

ACERCA DE LA EXISTENCIA DEL VERDADERO VALOR DE UNA PROBABILIDAD¹

Alberto Landro
Centro de Investigaciones en Econometría
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Buenos Aires
Av. Córdoba 2122 - 2° piso - Ciudad de Buenos Aires - C1120AAQ
Argentina
alandro@econ.uba.ar

Recibido 19 agosto de 2010, aceptado 06 de septiembre de 2010

Resumen

Los modelos objetivistas se basan en la hipótesis determinística que postula la existencia de la probabilidad y que esta es cognoscible sólo en forma asintótica. El modelo subjetivista se basa en la hipótesis aleatorista de no existencia de una verdad sobre la probabilidad. Ahora bien, ambas hipótesis sólo son contrastables a partir de modelos estocásticos que no son estrictamente falsables. De modo que ni la hipótesis de existencia de un verdadero valor de la probabilidad de ocurrencia de un evento ni el postulado de Finettiano que sostiene que “la probabilidad no existe” son estrictamente verificables.

Palabras clave: probabilidad, aleatoriedad, interpretaciones de probabilidad, modelos objetivistas, hipótesis determinística, modelos subjetivistas, hipótesis aleatorista, modelos estocásticos.

¹ Una versión preliminar de este trabajo fue presentado a las Jornadas Anuales de la Asociación Argentina de Economía Política 2010.

ON THE EXISTENCE OF THE TRUE VALUE OF A PROBABILITY²

Alberto Landro
Center for Research in Econometrics
School of Economics
University of Buenos Aires
Av. Córdoba 2122 - 2° piso - Ciudad de Buenos Aires - C1120AAQ
Argentina
alandro@econ.uba.ar

Received August 19th 2010, accepted September 6th 2010

Abstract

Objectivist models are based on the deterministic hypothesis that postulates the existence of probability, which is cognoscible only in an asymptotic way. On the other hand, subjectivist models consider the aleatoristic hypothesis according to which there is no truth about probability. However, both hypotheses may only be compared through stochastic models, which are not strictly falsifiable. Therefore, neither the hypothesis stating the existence of a true value regarding the probability of occurrence of an event nor the Finetti's postulate which sustains that "probability does not exist" are strictly verifiable.

Keywords: probability, randomness, interpretations of probability, objectivistic models, deterministic hypothesis, subjectivist models, aleatoristic hypothesis, stochastic models.

² A preliminary version of this paper was presented at the XLV Annual Meeting of the AAPE.

1. UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DEL AZAR

La conceptualización del azar surgió asociada a la idea de la falta de información suficiente acerca de la estructura causal que supuestamente determina el comportamiento de los fenómenos fácticos: el observador cuenta con una información -sea ésta de carácter objetivo o consista en el conocimiento de datos de múltiples características y orígenes que constituyen su experiencia personal (subjetiva) sobre el fenómeno- que, debido a esa suerte de solidaridad universal que relaciona los procesos y hace que su naturaleza aparezca como infinitamente complicada, resulta incompleta, motivando en consecuencia que las razones de una parte del comportamiento del fenómeno permanezcan ignoradas para sí.

Esta noción Tomista clásica de azar-ignorancia, durante mucho tiempo la única aceptada por la teología moral, implica una concepción determinística del mundo exterior al observador fundada en ciertas premisas de orden metafísico: **i)** que el mundo al que pertenecen los fenómenos es real; **ii)** que existen leyes objetivas que rigen el comportamiento de los mismos y **iii)** que estas leyes son inherentes a los fenómenos racionales y asintóticamente cognoscibles.

La insuficiencia del método clásico para explicar “...un mundo inestable que conocemos a través de una ventana finita”¹, en el que una modificación infinitesimal en el conocimiento del observador -a pesar de contar con ecuaciones determinísticas- conduce de una realización del fenómeno a otra cualquiera de su infinito conjunto de realizaciones posibles -en el que la irreversibilidad es la regla y la reversibilidad la excepción-, dio origen a una nueva formulación -aleatorista-, cuya diferencia con la dinámica clásica radicó esencialmente en la postulación del concepto de estado del proceso en un instante dado como resultante de una evolución orientada en el tiempo.

Como consecuencia, se puede concluir que aceptar la hipótesis clásica -determinística- es equivalente a suponer que todo fenómeno es explicable, en la hipótesis que, en el límite, es la consecuencia necesaria de un conjunto infinito de factores que definen su estructura causal. Por el contrario, aceptar la noción de aleatoriedad parcial objetiva o la interpretación termodinámica -aleatorista- implica sustituir el concepto clásico de azar-ignorancia (epistemológico) por el de azar-absoluto (ontológico), sustituir la afirmación “el observador nunca puede saber” por la afirmación “ni el observador ni la naturaleza nunca pueden saber”.

¹ Prigogine y Nicolis (1977).

En cualquiera de los dos casos, la presencia de ese algo denominado azar que aparece inevitablemente en la visión que todo observador posee acerca del comportamiento de todo fenómeno genera en él un sentimiento de incertidumbre cuya representación cuantitativa formal está dada por la probabilidad.

Esta apreciación del concepto de probabilidad como lógica inferencial del conocimiento incierto da origen a una cuestión fundamental: ¿cómo puede ser caracterizado un sentimiento de incertidumbre mediante una probabilidad definida numéricamente?

Los distintos supuestos a que dio lugar esta cuestión originaron una noción de probabilidad objetiva basada en el concepto de expectativa y, posteriormente, en una interpretación esencialmente dual que asimiló la probabilidad, ya sea a una expresión deductiva basada en la simetría de la aleatoriedad inherente a algunos eventos -**definición clásica**-, ya sea a la frecuencia con la que se verifican ciertos fenómenos -**definición frecuentista**. En el primer caso la probabilidad queda determinada por los modos posibles de presentarse los resultados de un fenómeno; en el segundo, por las frecuencias observadas de dichos resultados.

Apenas un poco más tarde -y con la finalidad de aproximarse a una concepción neo-Bayesiana de la noción de modelo identificatorio de la probabilidad- surgió una tercera interpretación (**logicista**) que asimila la probabilidad a una relación lógica indefinida entre una proposición y un cuerpo de conocimiento. El agregado a la conceptualización logicista de la inevitable intervención en el proceso de inducción del individuo-evaluador como mecanismo transformador de la información dio origen a una **definición subjetivista (personalista)** más general de probabilidad.

Ante el fracaso en el intento de hallar una definición universal de la noción de probabilidad mediante una fórmula más o menos compleja se planteó la posibilidad de un retorno a una interpretación en cierta forma objetivista a partir de definiciones menos estrictas basadas en una variante del logicismo, conocida como **teoría de las propensiones**, que asocia el concepto de probabilidad al de las posibilidades potenciales.

Además de obtener una definición teórica explícita de la probabilidad (vinculada a una axiomática consistente en sí misma), cada una de estas interpretaciones insistió en obtener una consecuente estructura inferencial, definida por reglas de interpretación explícitas o implícitas, que caracterizara su rol de modelo identificatorio del verdadero valor de esa escurridiza medida puramente teórica de la incertidumbre

denominada “probabilidad”.

2. LOS MODELOS PROBABILÍSTICOS Y SUS REGLAS DE INTERPRETACIÓN

2.1. El modelo clásico

La definición clásica adolece de falencias insoslayables que restringen la pretensión dogmática de Laplace de consagrarla como el único modelo válido de la verdadera naturaleza de la probabilidad. Fundamentalmente su carácter exclusivamente deductivo (que impide la definición de reglas de interpretación), la innegable circularidad y la imposibilidad de su aplicación fuera del ámbito de esos fenómenos de existencia ideal en los cuales el mecanismo físico que genera la aleatoriedad incluye, en forma simétrica, a todos los resultados posibles.

Es harto conocido el tratamiento que la literatura ha dedicado a la tautología que encierra el supuesto de equiprobabilidad de los resultados posibles y sobre todo su intento de justificación a partir del principio (subjetivista) de la razón insuficiente, el cual dada su tendencia a generar paradojas que impiden la determinación de valores de probabilidad únicos obviamente no es válido como argumento contra la circularidad.

2.2. El modelo frecuentista

La definición frecuentista es apta sólo para calcular las probabilidades de ocurrencia de aquellos fenómenos considerados repetibles. No tiene sentido, en el contexto frecuentista, hablar de la probabilidad de ocurrencia de un fenómeno único o de la probabilidad de que una proposición sea verdadera o falsa. Las probabilidades calculadas a partir de esta interpretación son objetivas y, por lo tanto, independientes de la opinión del individuo-evaluador.

El postulado de Quetelet (1835, 1848) sobre la asimilación de las leyes gravitacionales a las causas constantes que gobiernan la sociedad y los trabajos de Fechner (1866, 1871) acerca de la existencia de una variante de indeterminismo parcial en el comportamiento de los fenómenos fácticos condujeron al concepto de “objeto colectivo” (“*Kollektivgegenstand*”) o “serie colectiva” (“*Kollektivereihe*”), definido como un conjunto de individuos heterogéneos que varían aleatoriamente con respecto a un atributo común (en particular, un atributo cuantificable). En su expresión más simple, el “*Kollektiv*” puede ser considerado como una sucesión de resultados obtenidos de una

serie de observaciones repetidas en igualdad de condiciones, cada una de las cuales admite sólo dos alternativas posibles. Este concepto de “*Kollektivgegenstand*” prosperó con el florecimiento del empirismo desarrollado por el Círculo de Viena en la obra, entre otros, del filósofo y psicólogo Lipps (1898, 1901, 1905) y de los astrónomos Helm (1902) y Bruns (1897, 1898, 1905, 1906), y tuvo su culminación en la reformulación realizada por von Mises (1912, 1919a, 1919b, 1928) y Reichenbach (1935) del concepto de probabilidad “...a fin de reemplazar o complementar la rígida estructura causal de la teoría clásica”².

Von Mises (1928) consideró la necesidad de distinguir entre “*colectivos empíricos*” (que están formados por un número finito de elementos, que son observables y que dan origen a lo que algunos autores han denominado frecuentismo finito) y “*colectivos matemáticos*” (formados por una sucesión infinita de elementos y que dan origen al llamado frecuentismo hipotético), y supuso que los colectivos empíricos obedecen a dos principios fundamentales: la ley de estabilidad de las frecuencias estadísticas y la ley de irregularidad.

Al basarse en estos principios y en la hipótesis que las sucesiones infinitas son abstracciones matemáticas o idealizaciones de la realidad empírica necesarias para obtener una representación matemática admisible de la probabilidad, von Mises estableció el postulado (muy discutible) según el cual un colectivo empírico finito podía representar en términos analíticos un colectivo matemático infinito. Debe tenerse en cuenta que von Mises fue un empirista y que su análisis se basó siempre en una filosofía operacionalista según la cual los principios teóricos deben ser definidos en términos de fenómenos observables de acuerdo con las características de un colectivo empírico. Según esta interpretación operacionalista, la naturaleza de los fenómenos repetibles es tal que: **i)** es posible, por abstracción, obtener ciertos conceptos matemáticos que permiten formular las leyes empíricas que rigen su comportamiento; **ii)** recurriendo nuevamente a la abstracción y, a partir de dichas leyes empíricas, es posible definir los axiomas de la teoría matemática asociada a dicho comportamiento y **iii)** a partir de esta teoría matemática, es posible descubrir consecuencias que permiten explicación y predicción de otros fenómenos repetibles.

El operacionalismo-positivista de las ideas de von Mises se debe fundamentalmente a la influencia de la obra de Ernst Mach (en particular, *The science of mechanics: A critical and historical account of its development*). Su desarrollo de la teoría de la probabilidad siguió el mismo esquema que el desarrollo que Mach hizo de la mecánica:

² von Mises (1921).

introdujo la ley de estabilidad de las frecuencias estadísticas (que supuso válida a partir de la observación) y sobre ella basó su definición de probabilidad (la definición de un concepto teórico, la probabilidad, identificable en términos del comportamiento límite de un modelo observable, la frecuencia relativa), pero no proporcionó ninguna vinculación entre observación y teoría más allá de la muy controvertida utilización de los límites de una sucesión finita de observaciones y su justificación a partir de la aplicación del concepto de límite en la física teórica.

Entre las numerosas modificaciones a que fue sometida la interpretación frecuentista de von Mises, la más importante fue, indudablemente, la debida a Reichenbach (1935), quien procuró obtener una definición de probabilidad por una vía axiomática y justificar el significado intuitivo de la misma. Con respecto a la primera cuestión, Reichenbach intentó una solución basada exclusivamente en la teoría de conjuntos y en las operaciones lógicas, obteniendo una definición de probabilidad (puramente formal) expresada como una relación entre dos clases de proposiciones.

Con respecto a la segunda cuestión, Reichenbach procuró ampliar los alcances de la interpretación frecuentista a eventos no-repetibles, mediante la definición de las que denominó "*clases de referencia*" formadas por eventos similares al analizado y consideró la teoría de la probabilidad como la disciplina que calcula probabilidades desconocidas de colectivos derivados a partir de probabilidades conocidas de colectivos originarios. Pero esta generalización tropezó con la dificultad insalvable que significa la imposibilidad de la determinación de reglas de selección objetivas, universalmente aceptadas, de los eventos que deben integrar dichas clases de referencia.

A fin de evitar cualquier tipo de regularidad en las sucesiones de eventos que constituyen su fundamento, tanto la definición de von Mises como la de Reichenbach intentaron proporcionar a su modelo de probabilidad un contenido estrictamente matemático mediante la imposición de complicadas condiciones que, inevitablemente, restringían el concepto de aleatoriedad total y permitían concluir que era imposible dar un carácter matemáticamente preciso a la noción de "*irregularidad absoluta*"³.

Todas estas condiciones condujeron a convertir al modelo frecuentista en una teoría puramente matemática que, en vez de tratar con resultados favorables y resultados posibles como en el modelo clásico,

³ Ver Landro (2010b).

trata con límites que son entidades matemáticas abstractas y en la cual las demostraciones de los teoremas se obtienen, a partir de la definición de probabilidad, exclusivamente mediante la utilización de métodos lógico-matemáticos.

2.3. El modelo logicista

Como una extensión de la definición de probabilidad *a posteriori* de la interpretación frecuentista, surge la propuesta de la denominada interpretación logicista, que condujo a un modelo en el que la noción general de probabilidad (la cual se traduce en un grado de creencia racional o idea similar acerca de la ocurrencia de un fenómeno determinado) es función -exclusivamente- de un cierto estado de conocimiento definido por un conjunto de argumentos, intrínsecos o extrínsecos a dicho fenómeno, que el observador posee mediante la percepción de una relación lógica entre las proposiciones⁴. Una probabilidad, $p(A / B)$, concebida como una relación (indefinida) entre una proposición (A) y un cuerpo de conocimiento (B), entre una "... afirmación y otra afirmación (o conjunto de afirmaciones) que representa la evidencia"⁵, condicionada por la verdad de dicha evidencia. Donde el evento A puede, en consecuencia, ser representado mediante un subconjunto $A \subset \Omega$ tal que $A = \{w / S(w) \text{ es verdadera}\}$, de modo que a cada evento le corresponde un único conjunto A y viceversa, es decir, a cada proposición $S(w)$ del espacio proposicional le corresponde un conjunto A en el espacio de eventos y viceversa.

La interpretación logicista se basó en los aportes realizados por Augustus de Morgan, John Venn, Harold Jeffrey y, en particular, John Maynard Keynes, continuados por los miembros del Círculo de Viena, Bernard Bolzano, Ludwig Wittgenstein, Frederick Waismann y, en particular, Rudolf Carnap y Karl Popper.

El punto de partida de la aproximación de Keynes consistió, precisamente, en definir una teoría del vínculo parcial como una generalización de la teoría del vínculo total de la lógica deductiva y considerar la probabilidad como una evaluación de ese vínculo parcial, de modo que no es posible hablar de la probabilidad de una hipótesis sino, solamente, de su probabilidad condicionada por una cierta

⁴ Ramsey (1931): "De acuerdo con esta interpretación, la teoría de la probabilidad es considerada como una rama de la lógica, la lógica de la creencia parcial y del argumento no-concluyente".

⁵ Kyburg y Smokler (1980).

evidencia vinculada parcialmente con ella. Luego, dado un conjunto h de proposiciones y una conclusión consistente en un conjunto de proposiciones a , si h implica parcialmente a a en un grado α entonces, identificando los grados de vínculo parcial con los grados de creencia racional, Keynes concluyó que, dado h , existirá un grado α de creencia racional en a , es decir, una relación de probabilidad de grado α entre a y h . Obsérvese que Keynes asimila su modelo probabilístico a un grado de creencia racional no simplemente a un grado de creencia individual. Es decir, considera las probabilidades como valores fijados objetivamente por el observador, los cuales son asimilables a relaciones lógicas conocidas por intuición, pero utilizando un concepto platónico del término “objetivo”, es decir no referido a “cosas” del mundo material, sino a “algo” en un supuesto mundo platónico formado por ideas abstractas, similar al postulado por los filósofos de Cambridge, que incluía ideas objetivas, cualidades éticas (con la idea de la “virtud” ocupando un lugar prominente) y entes matemáticos.

2.4. El modelo subjetivista

Si a esta conceptualización logicista se agrega la imposibilidad de dejar de considerar en el proceso de inducción la intervención del individuo-evaluador como fuente de información o como mecanismo transformador de observaciones, surge el modelo subjetivista -más general- de probabilidad Bernoulliana, según el cual es comprensible la existencia de evaluaciones de probabilidad no coincidentes entre sí aún para estados de conocimiento similares, ya que en este contexto aleatorista la máxima objetividad a la que se puede aspirar es a una suerte de concordancia de evaluaciones personales, a una cierta intersubjetividad.

Más allá de algunos curiosos antecedentes previos, se puede considerar que la teoría subjetiva de la probabilidad fue introducida en forma independiente por Ramsey (en Braithwaite, 1931) y de Finetti (1930a, 1930b, 1930c, 1931a, 1931b, 1937). Ramsey planteó su propuesta -de carácter netamente antilogicista- a partir de una crítica detallada de la interpretación keynesiana, en tanto que la obra de de Finetti -de carácter netamente antifrecuencista- se origina en la propuesta de Czuber quien, en su memoria de 1903 y en la segunda edición revisada y aumentada de 1908-1910, proporcionó una de las mejores exposiciones sobre las paradojas de la probabilidad geométrica (ver Keynes, 1921) y concluyó que no existe ninguna necesidad de suponer el cumplimiento de la condición de la razón insuficiente.

En términos subjetivistas, la probabilidad de ocurrencia de un evento

E podría ser interpretada como el precio (apuesta) p que un individuo estima equitativo pagar a un contrincante por el derecho a recibir de éste un importe unitario, exigible si E se verifica. La condición de equidad implica la indiferencia entre ser uno u otro jugador, entre pagar o cobrar p para cobrar o pagar 1 al verificarse E . Se dice, en ese caso, que la evaluación de la probabilidad es “coherente” en cuanto que no coloca a ninguno de los dos jugadores en la situación de ganar con seguridad. Es decir, si p es una evaluación coherente en el sentido de Ramsey-de Finetti de la probabilidad de ocurrencia de un evento E para un individuo, dado que el precio es entendido en este caso como una magnitud lineal, la evaluación de la probabilidad de la no ocurrencia de E (es decir, de la ocurrencia de \bar{E}) para dicho individuo debe ser $p(\bar{E}) = q = p(1 - E) = 1 - p(E) = 1 - p$.

Cabe recordar que, de acuerdo con la interpretación objetivista, se dice que un evento E tiene una probabilidad de ocurrencia $p(E)$, entendiendo como evento no un caso individual bien determinado, sino todos los eventos de un cierto tipo (debe tenerse en cuenta que en el contexto objetivista la probabilidad es considerada como una propiedad real de un tipo especial de situaciones físicas, denominadas eventos). Por el contrario, la interpretación subjetivista -que se basa en una concepción aleatorista- considera que la probabilidad corresponde siempre a eventos individuales y, cada vez que se asigne una probabilidad, es necesario pensarla como subordinada a la interpretación que hace cada observador de un conjunto de información particular (entendiendo por evento individual un caso que, para un individuo que en ciertas circunstancias no puede asegurar su ocurrencia en forma cierta, es aleatorio).

2.5. El modelo propensionalista

Las interpretaciones comentadas precedentemente consideran que la noción de probabilidad es representable mediante una versión más o menos canónica. Si bien su fracaso en obtener una definición universal parecería desmentir dicha hipótesis, esto no debería ser considerado como un reconocimiento de la imposibilidad de identificar el verdadero valor de la probabilidad mediante una fórmula, sino quizás como la necesidad de recurrir a definiciones menos estrictas a partir de un conjunto difuso de proposiciones⁶. Este principio dio origen a un nuevo modelo objetivista de la probabilidad basado en la teoría de las

⁶ Recurrir a lo que Bachelard (1953) denominó la “conciencia de lo no-riguroso”.

propensiones.

Este modelo propensionalista fue introducido por Popper (1957b), desarrollado en sus trabajos de 1959b, 1983 y 1990, y continuado por un grupo de filósofos de la ciencia entre los que cabe destacar a Miller y a Fetzer⁷.

El problema que dio origen a esta teoría consistía en decidir acerca de la posibilidad de identificar probabilidades objetivas "*singulares*" sobre la ocurrencia de eventos individuales. En principio, Popper (1934) consideró un evento individual como un elemento particular de un colectivo de von Mises y sugirió que su "*probabilidad singular*" podía ser asimilada a su probabilidad en el colectivo considerado como una totalidad, pero luego en sus trabajos de 1957b y 1959b abandonó esa interpretación frecuentista.

Obsérvese que la palabra propensión sugiere un tipo de enumeración ordenada, lo cual marca una diferencia con el punto de vista frecuentista que, como se vio, se caracteriza porque las probabilidades sólo pueden ser introducidas en situaciones físicas (es decir, en "*ocasiones de manifestación total*", de acuerdo con la nomenclatura de Peirce, 1910), respecto de las cuales es posible definir un colectivo. En el modelo propensionalista de Popper es absolutamente legítimo postular la existencia de probabilidades sobre conjuntos de condiciones, aunque no admitan un número suficientemente grande de repeticiones, lo cual implica una ampliación indiscutiblemente significativa del conjunto de situaciones en el que resulta aplicable la teoría de la probabilidad, con respecto a la interpretación frecuentista. Las probabilidades de eventos individuales deben ser consideradas como dependientes fundamentalmente del conjunto de condiciones a las cuales está referido el evento más que del evento mismo⁸.

La propuesta de Popper fue modificada por Miller (1994, 1996), quien en su intención de resolver el problema fundacional de la identificación de probabilidades singulares, desvinculó las propensiones de las condiciones repetibles y propuso una asociación con los estados del universo, transformando al propensionalismo de una teoría científica

⁷ Otros aportes significativos a la interpretación propensionalista se deben a Hacking (1965) y Mellor (1971) (ver Salmon (1979)).

⁸ Este planteo también podría ser considerado como una variante del logicismo dirigida a intentar el retorno a una interpretación objetivista, asociando el concepto de probabilidad al de las denominadas posibilidades potenciales de Fock, según las cuales se puede admitir que el conjunto de resultados posibles existe sólo en la mente del observador, pero no como una creación de éste, sino como algo que el observador debe admitir (ver Omelyanoskij y Fock, 1972).

en una teoría metafísica.

A fin de evitar el carácter metafísico del modelo, a diferencia de la propuesta original de Popper y de la modificación de Miller y Fetzer (1982, 1993) abandonó la idea de asociar las propensiones a un estado completo del universo y propuso vincularlas a un conjunto completo de condiciones relevantes, de modo que para falsar un valor “*conjeturado*” de una propensión se debían plantear “*conjeturas*” acerca de un elenco de dichas condiciones relevantes. Ahora bien, dadas las dificultades insalvables que acarrea la formulación y, en consecuencia, la falsación de las conjeturas necesarias, se puede concluir que en el modelo de Fetzer las propensiones también observan un carácter más metafísico que científico y que, por lo tanto, su concepto de probabilidad no puede ser extendido en forma general a los casos singulares para los cuales la asignación de una probabilidad de ocurrencia continúa siendo subjetiva.

3. LOS CRITERIOS DE FALSACIÓN DE LOS MODELOS PROBABILÍSTICOS

A partir de los principios de no existencia de supuestos metafísicos acerca de la verdadera naturaleza de la probabilidad y, a fin de poder evaluar la capacidad explicativa explícita de los modelos frecuentista, subjetivista y propensionalista, se desarrollaron los correspondientes criterios de falsación como arbitrios capaces de contrastar la concordancia entre una teoría probabilística y el correspondiente modelo obtenido de los resultados observables de los fenómenos⁹.

Con respecto al **modelo frecuentista**, debe tenerse en cuenta que en la concepción de von Mises, las propiedades de los colectivos no están expresadas con relación a fenómenos reales o a procedimientos de observación efectivos, sino que son consideradas como axiomas, de modo que se supone que sus consecuencias son deducibles en forma rigurosa. Ahora bien, tales consecuencias serán verdaderas sólo si los axiomas que las originan son verdaderos. En particular, considerar la convergencia de la sucesión de frecuencias (es decir, al traslado del frecuentismo finito al frecuentismo hipotético) como un axioma y no como una eventualidad que podría ser razonablemente verdadera obliga

⁹ Debe tenerse en cuenta que el carácter exclusivamente deductivo del modelo clásico impide la definición de las reglas de interpretación y que el modelo logicista considera que las probabilidades son asimilables a relaciones lógicas conocidas por intuición, que no siempre son cuantificables y, en muchos casos, ni siquiera son comparables entre sí (ver Landro, 2010a).

a reconocer ciertos principios de determinismo metafísico inaceptables en la medida que contradicen las condiciones inherentes a la definición de los criterios de falsación.

A este respecto, von Mises propuso un criterio de falsación más restrictivo consistente en una extensión del postulado conocido como ley de exclusión de los sistemas de juego, que requiere no sólo la estabilidad de las frecuencias relativas respecto a ciertos resultados particulares, sino la invariancia de dichas frecuencias ante una selección, de acuerdo con alguna regla, de una sucesión localizada de la sucesión original. Las críticas a esta propuesta se refieren, no sólo a sus argumentos basados en la noción inexacta o semimatemática de sistema de juego o de selección localizada, sino a la noción no especificada completamente de selección admisible. A fin de corregir estas falencias, Church (1934, 1936a, 1936b), Turing (1936) y Wald (1937) propusieron un método de especificación más preciso de las selecciones localizadas, basado en la definición de función computable, obteniendo precisiones que pueden ser consideradas completamente válidas en el ámbito de la matemática clásica, pero que no son admisibles en el ámbito constructivista de la matemática. En este contexto, de acuerdo con la teoría de la complejidad algorítmica, se puede concluir fácilmente que no es posible justificar la aleatoriedad de una sucesión, es decir que la propuesta de Wald-Church-Turing tampoco proporciona una caracterización estricta de la propiedad de irregularidad, de su relación con la condición de independencia estocástica y, en consecuencia, del axioma de convergencia estadística de la frecuencia relativa. De lo que se desprende que la condición de irregularidad (*“Regellosikeit”*) asume, aún en este caso, un carácter exclusivamente subjetivo.

Por otra parte, resulta innegable que las probabilidades interpretadas como límite de una frecuencia relativa siempre son condicionadas por un colectivo empírico en particular y el hecho que la noción de serie empírica no coincida con la de sucesión matemática (en la que la ley que determina unívocamente sus elementos es conocida) permite concluir que la convergencia de las frecuencias no es asimilable a la operación analítica de pase al límite.

En cuanto al **modelo probabilístico personalista**, de acuerdo con las consideraciones realizadas en la Sec. 2.4, resulta fácil concluir que cualquier criterio de falsación asociado a esta interpretación atiende exclusivamente a la falsación de la proposición derivada del sentimiento de incertidumbre personal del observador, sin tomar en consideración ninguna referencia a los fenómenos externos.

Algunos autores procuran superar esta restricción interpretando la

condición de intercambiabilidad de de Finetti como un vínculo entre las probabilidades personales y físicas. En su teorema de representación de Finetti (1937) demuestra que, dada una sucesión finita de eventos intercambiables, $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$, cuando $n \rightarrow \infty$, la función de distribución de la variable $E_{(n)}^* = \frac{1}{n}(E_1 + E_2 + \dots + E_n)$, $F_n(\pi) = p(E_{(n)}^* \leq \pi)$, converge (excepto en puntos de discontinuidad) a una función límite $F(\pi)$ y, como corolario, establece la vinculación de los conceptos de intercambiabilidad e independencia: “Sea $p_x(E)$ la probabilidad atribuida a un evento genérico E cuando los eventos E_1, E_2, \dots, E_n son considerados independientes e igualmente probables con probabilidad π , si se supone que los eventos E_i son intercambiables con distribución límite $F(\xi)$, la probabilidad $p(E)$ del mismo evento genérico está dada por $p(E) = \int_0^1 p_x(E) dF(x)$. Esta propiedad puede ser expresada de la siguiente forma: las distribuciones de probabilidad p correspondientes al caso de eventos intercambiables son combinaciones lineales de las distribuciones p_x correspondientes al caso de eventos independientes equiprobables, las ponderaciones en las combinaciones lineales están expresadas por $F(x)$ ”.

Ahora bien, con respecto a los alcances de la utilización de este teorema de representación, debe tenerse en cuenta que es ilusorio, en este contexto, suponer que se pueda construir un modelo sobre algo que no posee ningún significado empírico, como son los eventos de dominio infinito¹⁰. En el ámbito de la inferencia el teorema de representación debe ser asumido de acuerdo con su formulación más débil, según la cual la condición necesaria y suficiente para que los eventos E_n sean intercambiables es que, condicionada por un elemento aleatorio p , la distribución de probabilidades conjunta para cualquier sucesión finita sea la misma. Se puede concluir entonces que, desde un punto de vista meramente formal, los eventos inintercambiables son asimilables a eventos considerados como independientes con probabilidad constante pero desconocida (p), donde p se distribuye de acuerdo con la

¹⁰ Ver Landro, A.H. (2010a).

distribución mixta que postula el teorema de representación.

Pero, debe tenerse en cuenta: **i)** que la existencia de la probabilidad (objetiva) p es una condición meramente matemática debida a alguna extensión particular de una familia de distribuciones coherentes de dimensión finita a una ley para la sucesión $\{E_1, E_2, \dots, E_n, \dots\}$; **ii)** que, de acuerdo con Regazzini y Petris (1992), existen sucesiones de eventos intercambiables cuyas correspondientes frecuencias relativas de éxitos no convergen estocásticamente en un sentido preciso¹¹ y **iii)** que, de acuerdo con de Finetti (1931), dados una sucesión $E^{(j)}(X)$ ($j = 1, 2, \dots, [X]$;

$X = 0, 1, 2, \dots, n$) de eventos intercambiables y un evento $E^{(n+1)}$: que el resultado de la $(n+1)$ -ésima prueba sea un éxito, se demuestra que la probabilidad de ocurrencia de $E^{(n+1)}$, condicionada por la supuesta ocurrencia de $E^{(j)}$, queda definida por una función de las variables X y n , de la forma $p(E^{(n+1)} / E^{(j)}(X)) = \frac{X+1}{n+1} \frac{p(X+1, n+1)}{p(X, n)} = f(X, n)$, tal que

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(X, n) = \frac{X}{n}$. Lo que permite concluir que la aparente objetividad de la probabilidad $f(X, n)$ no es sino una ilusión metafísica. Que, en

realidad, observadores diferentes con distintas asignaciones de probabilidades iniciales, basadas exclusivamente en la condición de coherencia, en virtud de la combinación de esta condición con la propiedad de intercambiabilidad y suponiendo que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(X+1, n+1)}{p(X, n)} = 1$

convergerán hacia una evaluación de la probabilidad final igual a $\frac{X}{n}$.

Que el observador transforma sus probabilidades iniciales, $p(E^{(j)})$ en probabilidades finales mediante un condicionamiento bayesiano. Es decir que, si bien distintos observadores pueden partir de un modelo basado en diferentes probabilidades iniciales, a partir de un incremento de la evidencia sus probabilidades finales tenderán habitualmente a converger produciendo la ilusión de la existencia de una probabilidad objetiva (que, en términos de la interpretación subjetivista, constituye sólo un concepto metafísico vacío de significado).

¹¹ Ver Landro, A.H. (2010a).

Como consecuencia de las restricciones ya comentadas en la Sec. 2.5 respecto de la **aproximación propensionalista** a las probabilidades de eventos individuales mediante la definición de clases de referencia, se puede concluir en forma inmediata que: **i)** algunas probabilidades pueden ser consideradas preferibles a otras y **ii)** el grado de preferencia respecto de las probabilidades varía en forma directa con la magnitud de la evidencia en la que se basan, pero esta relación de preferencia no implica la existencia de una probabilidad singular objetiva.

Sea un evento singular E que puede ser clasificado como un elemento de una sucesión de condiciones, S_1, S_2, S_3, \dots tal que $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \dots$. Supóngase que se cuenta con información estadística que permite obtener buenas estimaciones (p_1, p_2, p_3, \dots) de la probabilidad objetiva sobre la ocurrencia de E con respecto a las condiciones S_1, S_2, S_3, \dots . Entonces, de acuerdo con las consideraciones anteriores, se demuestra que la probabilidad p_2 es preferible a p_1 , que p_3 es preferible a p_2 y así sucesivamente. En particular, si se sustituyen las condiciones S_i por la clase de referencia del conjunto de elementos, S , se puede obtener una estimación de la probabilidad asociada a la clase de referencia más restringida.

Un primer problema vinculado a las posibilidades identificatorias del modelo propensionalista derivado de la aplicación de este principio se presenta obviamente cuando no existe una única clase de referencia de máxima restricción seleccionable. Pero debe tenerse en cuenta que, aún en el caso en que dicha clase existiera, la adopción del criterio consistente en asimilar la probabilidad sobre la ocurrencia de un evento singular a su frecuencia relativa en la clase de referencia más restringida a la cual pertenece el evento podría conducir a una decisión equivocada. Podría suceder que se conocieran circunstancias que no constituyeran datos estadísticos en una clase de referencia pero que, sin embargo, proporcionararan razones considerables para corregir la asignación de probabilidades. En ese caso, la no consideración de dicha evidencia cualitativa puede conducir a asignaciones de probabilidades con una base menos satisfactoria que la que se podría haber obtenido a partir de un análisis total de la evidencia. El procedimiento general para asignar probabilidades a eventos singulares debería entonces: **i)** asignar el evento a la clase de referencia más restringida para la cual existen datos estadísticos confiables (suponiendo que exista una clase con estas características) y calcular la frecuencia relativa (r) de la ocurrencia del evento en dicha clase y **ii)** tomar en consideración cualquier información de características no-estadísticas que sea

relevante para la ocurrencia del evento en la circunstancia en cuestión y, a la luz de esta información, corregir la frecuencia relativa. En el caso de que existiera más de una clase de referencia de restricción máxima con frecuencias relativas r_1, r_2, r_3, \dots , se debería seleccionar una frecuencia relativa y corregirla utilizando la información no-estadística. Viceversa, si no existiera ninguna clase de referencia aceptable, la asignación de la probabilidad debería basarse exclusivamente en la información no-estadística.

Si bien este método de asignación de probabilidades parece razonable, es innegable que incluye muchos elementos subjetivos y que, en consecuencia, no resulta adecuado como modelo identificatorio de una probabilidad objetiva singular, en particular en aquellos casos en los cuales no se cuenta con información estadística obtenida de sucesiones suficientemente largas de observaciones. En caso que se contara con una sucesión de observaciones y no existieran circunstancias ajenas a los datos estadísticos, el modelo para identificar la probabilidad (teórica) sobre la ocurrencia de un evento a partir de la frecuencia relativa (observable) será, de acuerdo con la nomenclatura de Popper (1934), *“impermeable a la falsación estricta”*¹². Un vano intento de solución propuesto por Popper a esta dificultad consistió en apelar a la noción de *“falsación metodológica”* según la cual, aunque las proposiciones sobre probabilidades no sean estrictamente falsables, pueden ser utilizadas (y de hecho lo son en las ciencias experimentales) como argumentos falsables mediante la utilización de tests estadísticos¹³. Debe tenerse en cuenta que, de acuerdo con este procedimiento, cualquier hipótesis puede ser refutada metodológicamente aún cuando desde un punto de vista estrictamente lógico no es refutable y, por lo tanto, que este criterio de falsación no

¹² Sea una moneda sobre cuyas características no se posee información y tal que se supone que la probabilidad de obtener el resultado “cara” en una tirada dada es igual a p . Entonces, la probabilidad de obtener m veces el resultado “cara” en una sucesión de

n tiradas independientes de dicha moneda estará dada por $p(m/n) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$.

De modo que, no importa cuántas tiradas se realicen, cuántas veces se obtenga el resultado “cara”, ni cuál sea el supuesto valor de $p \in (0,1)$, la probabilidad $p(m/n)$ será no-nula. Lo cual implica que la hipótesis *“la probabilidad de obtener el resultado ‘cara’ en una tirada es igual a p ”* está *“inmunizada”* respecto de la *“falsación estricta”* (ver Gillies, 1990).

¹³ Popper (1934): *“...un físico se encuentra habitualmente ante la disyuntiva de decidir si una hipótesis probabilística particular debe ser aceptada como ‘confirmada empíricamente’ o si debe ser rechazada como ‘falsificada prácticamente’”*.

resuelve el problema de la identificación de la probabilidad.

4. LA LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS DE BOREL Y EL PRINCIPIO DE COURNOT

A fin de independizar el problema de la identificación de cualquier supuesto metafísico acerca de la verdadera naturaleza de la probabilidad, Borel (1905, 1909a, 1909b) propuso los primeros intentos de vinculación de la teoría de la medida de conjuntos con la cuantificación de la probabilidad (una probabilidad concebida como un ente matemático definido exclusivamente en el plano formal) mediante la formulación de la conocida como ley fuerte de los grandes números, según la cual, dado un fenómeno binomial cuyos resultados posibles son E y \bar{E} y denotando por:

$$X_n = X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in E \\ 0 & \text{si } \omega \in \bar{E} \end{cases}$$

a la variable aleatoria que representa el resultado de la n -ésima observación con probabilidad $p(X_n=1)=p$ y por $Y^{(n)} = \sum_{j=1}^n X_j$ a la

variable aleatoria que representa el número de veces que se presenta el resultado E en una sucesión de n observaciones, se verifica que

$$\left(\frac{Y^{(n)}}{n} - p \right) \xrightarrow{ccc} 0.$$

Este resultado y los trabajos posteriores de Faber (1910), Hausdorff (1914), Cantelli (1916a, 1916b, 1917a), Kolmogorov (1929, 1931, 1933a, 1933b, 1933c) y Prohorov (1956) lograron una formalización rigurosa de la relación entre la teoría de la medida, la interpretación geométrica de la probabilidad y el concepto de independencia en las sucesiones de eventos repetibles. El criterio de falsación asociado a este modelo de identificación se basó en el principio de Cournot, según el cual se puede asegurar que un evento cuasi-imposible no ocurrirá. Es decir, un criterio de falsación que considera como relacionadas en forma conceptualmente significativa con referentes externos solamente

las probabilidades extremas (0 ó 1)¹⁴.

A pesar de la insistencia de muchos autores en considerar que la propuesta de Borel no necesita asumir la existencia física de las probabilidades, que interpreta a la probabilidad como un término puramente teórico existente en el ámbito de las ideas y sin ninguna relación directa con el ámbito de los fenómenos fácticos, se puede concluir en forma inmediata que su aceptación del principio de Cournot como nexo entre su interpretación de la noción de probabilidad y el ámbito de las observaciones constituye una prueba indiscutible del carácter propensionalista de su propuesta. En consecuencia, a este criterio identificatorio, aparentemente abstracto y completamente independiente de cualquier interpretación del concepto de probabilidad, basado en los postulados de la ley fuerte de los grandes números, se le pueden aplicar, con respecto a su falsación, las mismas consideraciones que las realizadas para el modelo propensionalista.

5. CONCLUSIÓN

La presencia de ese algo denominado azar que aparece inevitablemente en la visión que **todo** observador posee acerca del comportamiento de **todo** fenómeno genera en él un sentimiento de incertidumbre, cuya cuantificación dio origen a distintas interpretaciones sobre la noción de probabilidad.

Algunas de estas interpretaciones (clásica, frecuentista, logicista y propensionalista), basándose en una concepción determinística generada en el supuesto epistemológico de azar-ignorancia, obtuvieron definiciones objetivistas de la probabilidad asociadas a estructuras inferenciales definidas por reglas de interpretación, explícitas o implícitas, que definen su rol de modelo identificatorio del verdadero valor de la probabilidad.

Pero, con respecto a estas reglas de representación, debe tenerse en cuenta que: **i)** el modelo clásico adolece de falencias insoslayables relacionadas fundamentalmente con su carácter exclusivamente deductivo que impide la contrastación de su concordancia con los resultados observables de los fenómenos; **ii)** el modelo frecuentista se basa en propiedades de los colectivos asumidas como axiomas que no

¹⁴ Obsérvese que este criterio no permite distinguir entre dos modelos probabilísticos absolutamente continuos $\hat{p} \approx \hat{p}^*$; en otros términos, sólo permite distinguir entre dos modelos que coinciden respecto de aquellos eventos a los cuales se les asigna una probabilidad nula, pero no necesariamente respecto de otros eventos con asignaciones no extremas.

son demostrables en forma rigurosa; **iii)** el modelo logicista considera las probabilidades como valores asimilables a relaciones lógicas en un ámbito formado por ideas abstractas y **iv)** el modelo propensionalista, a pesar de las modificaciones de Fetzer a la propuesta de Popper y Miller, no puede evitar su carácter metafísico. En consecuencia, a partir del principio de no existencia de supuestos acerca de la verdadera naturaleza de la probabilidad, resulta que no es posible definir criterios de falsación estricta para estos modelos.

Esta incapacidad de los modelos objetivistas para identificar el supuesto verdadero valor de la probabilidad de ocurrencia de un evento parece avalar la hipótesis determinística que postula el carácter “*proteiforme*”¹⁵ de la probabilidad. Por su parte, la aceptación del modelo subjetivista que, en base a una concepción aleatorista generada en el supuesto ontológico de azar absoluto postula la validez de evaluaciones de probabilidad no coincidentes entre sí, siempre que cumplan la condición de coherencia, conduce a la conclusión de que no existe una verdad sobre la probabilidad, que no existe una verdadera probabilidad sino infinitas versiones de la misma probabilidad.

Ahora bien, ambas interpretaciones, la determinística y la aleatorista, constituyen a su vez modelos estocásticos, por lo que se puede concluir que ni la hipótesis clásica que postula la existencia de un verdadero valor de la probabilidad de ocurrencia de un evento, sólo cognoscible en forma asintótica, ni la hipótesis de Finettiana resumida en el postulado que afirma que “*la probabilidad no existe*” son estrictamente verificables.

BIBLIOGRAFÍA

Bachelard, G. (1953). *Le matérialisme rationnel*. Presses Universitaires de France.

Borel, E. (1972a). “Remarques sur certaines questions de probabilité”. *Bulletin Societe Mathématique de France*, vol. 33. Reeditado en Borel, E.

Borel, E. (1972b) “Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques”. *Rendiconti Circolo Matematico di Palermo*, vol. 27. Reeditado en Borel, E.

Borel, E. (1924). *Éléments de la théorie des probabilités*, Gauthier-Villars,. Traducción al inglés, *Elements of the theory of probability*, (1965) Prentice-Hall.

¹⁵ Costantini y Geymonat (1982).

- Borel, E. (1972c). *Œuvres de Émile Borel*. Centre National de la Recherche Scientifique.
- Bruns, H. (1897). "Über die Darstellung von Fehlergesetzen". *Astronomische Nachrichten*, vol. 43.
- Bruns, H. (1898). "Zur collectiv-Masslehre". *Philosophische Studien*, vol. 14.
- Bruns, H. (1905). "Wahrscheinlichkeitsrechnung Kollektivmasslehre" en *Beiträge zur Quotenrechnung. Berichte der Königlich sächsischen gesellschaft der Wissenschaften*, vol. 58.
- Bruns, H. (1906). "Das Gruppenschema für zufällige Ereignisse". *Abhandlungen der Königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften*, vol. 29.
- Cantelli, F.P. (1916a). "La tendenza ad un limite nel censo del calcolo delle probabilità". *Rendiconti Circolo Matematico di Palermo*, vol. 41.
- Cantelli, F.P. (1916b). "Sulla legge dei grandi numeri". *Atti Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Memorie C1.Sc.Fis.*, vol. 11.
- Cantelli, F.P. (1917a). "Sulla probabilità como limite della frequenza". *Atti Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Memorie C1.Sc.Fis.*, vol. 26.
- Cantelli, F.P. (1917b). "Su due applicazioni d'un teorema di G. Boole alla statistica matematica". *Atti Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Memorie C1.Sc.Fis.*, vol. 26.
- Church, A. (1934). "An unsolvable problem of elementary number theory". *American Journal of Mathematics*, vol. 58.
- Church, A. (1936a). "A note on the Entscheidungsproblem". *Journal of Symbolic Logic*, vol. 1.
- Church, A. (1936b). "An unsolvable problem of elementary number theory". *American Journal of Mathematics*, vol. 58.
- Costantini, D.; Geymonat, L. (1982). *Filosofia della probabilità*. Feltrinelli.
- Dawid, A.P. (2004). "Probability, causality and the empirical world: A Bayes-de Finetti-Popper-Borel synthesis". *Statistical Science*, vol. 19.
- de Finetti, B. (1930^a). "Sulla proprietà conglomerativa delle probabilità subordinate". *Rendiconti Regio Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, vol. 63.
- de Finetti, B. (1980). *Probabilismo: Saggio critico sulla teoria della*

probabilità e sul valore della scienza. Logos. Biblioteca di Filosofia, Perrella. Traducción al inglés en *Erkenntnis*, vol. 31.

de Finetti, B. (1980). "La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives". *Annales Institut H. Poincaré*. Traducción al inglés en Kyburg, H.E.; Smokler, H.E. (eds.).

de Finetti, B. (1981a). "Fondamenti logici del ragionamento probabilistico". *Bolletino dell'Unione Matematica Italiana*, vol. 5. Reeditado en de Finetti, B.

de Finetti, B. (1981b). "Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio". *Memorie della Reale accademia dei Lincei*, vol. IV. Reeditado en de Finetti, B.

de Finetti, B. (1981c) "Sul significato soggettivo della probailità". Traducción al inglés en de Finetti, B.

Faber, G. (1910). "Über stetige Funktionen". *Mathematische Annalen*, vol. 69.

Fechner, G.T. (1966). *Elemente der Phychophysik*. Versión en inglés, Holt-Rinehart-Winston.

Fechner, G.T. (1871). "Zur experimentalen Ästhetik". *Abhandlungen der Königlich säschischen gesellschaft der Wissenschaften*, vol. 9.

Fetzer, J.H. (1982). "Probabilistic explanation". *PSA*, vol. 2.

Fetzer, J.H. (1988). "Probabilistic metaphysics" en Fetzer, J.H. (ed.).

Fetzer, J.H. (1993). "Peirce and propensities" en Moore, E.C. (ed.).

Gillies, D.A. (1900). "Bayesianism versus falsificationism. Review of Howson and Urbach 1989". *Ratio*, New Series, vol. 1.

Hacking, I. (1965). *Logic statistical inference*. Cambridge University Press.

Hausdorff, F. (1914). "Grundzüge der Mengenlehre". von Weit.

Helm, G. (1902). "Die Wahrscheinlichkeitslehre als Thorie der Kollektivbegriffe". *Analnen der Naturphilosophie*, vol. 1.

Keynes, J.M. (1963). *A treatise on probability*. MacMillan.

Kolmogorov, A.N. (1992). "The general theory of measure and the calculus of probability". *Collected works of the Mathematical Section, Communist Academy, Section for Natural and Exact Sciences*, vol. 1 (original en ruso, traducción al inglés en Kolmogorov, A.N. (1992).

- Kolmogorov, A.N. (1931). "Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung". *Mathematische Annalen*, vol. 104.
- Kolmogorov, A.N. (1950). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Springer. Traducción al inglés "*Foundations of the theory of probability*", Chelsea.
- Kolmogorov, A.N. (1933a). "Über die Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung". *Izv. Akad. Nauk*.
- Kolmogorov, A.N. (1933b). "Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione". *Giornale Istituto Italiano degli Attuari*, vol. 4.
- Kyburg, H.E.; Smokler, H.E. (eds.) (1980). *Studies in subjective probability*. Wiley.
- Landro, A.H. (2010^a) *Acerca de la probabilidad*. Ediciones Cooperativas.
- Landro, A.H. (2010^b). "Acerca del 'Regellosigkeitsaxiom' de von Mises". *Cuadernos del CIMBAGE*, vol. 12.
- Lipps, G.F. (1898). "Über Fechner's collectivmasslehre und vie Vertheilungsgesetze der Collectivgegestände". *Philosophische Studien*, vol. 13.
- Lipps, G.F. (1901). "Die Theorie der Collectivgegestände". *Philosophische Studien*, vol. 17.
- Lipps, G.F. (1905). "Die Betimmung der Abhängigkeit zwischen den Merkmalen eines Gegendes". *Berichte der Königlich Säsischen Gesellschaft der Wissenschaften*, vol. 57.
- Miller, D.W. (1994). *Critical rationalism. A restatement and defence*. Open Court.
- Miller, D.W. (1996). "Propensities and indeterminism". en O'Hear, A. (ed.).
- Omelyanoskij, M.E.; Fock, V.A. (Eds.) (1972). *L'interpretazione materialistica della meccanica quantistica*. Feltrinelli.
- Peirce, C.S. (1957). "Notes on the doctrine of chances". Reeditado en *Essays in the philosophy of science*. The American Heritage Series, Bobbs-Merril.
- Popper, K.R. (1972). *The loogic of scientific discovery*. Sexta edición, Hutchinson.
- Popper, K.R. (1957a) "Probability magic or knowledge out of ignorance". *Dialectica*, vol. 11.

- Popper, K.R. (1957b). "The propensity interpretation of the calculus of probability and the quantum theory". En *Korner, S.* (ed.).
- Popper, K.R. (1959a). "The propensity interpretation of probability". *British Journal for the Philosophy of Science*, vol. 10.
- Popper, K.R. (1959b). *The logic of scientific discovery*. Hutchinson.
- Popper, K.R. (1983). *Realism and the aim of science*. Routledge & Kegan.
- Popper, K.R. (1990). *A world of propensities*. Thoemmes.
- Prigogine, I.; Nicolis, G. (1977). *Self-organization in non-equilibrium systems, from dissipative structures to order to fluctuations*. Wiley.
- Prokhorov, Y.V. (1956). "Convergence of random processes and limit theorems of probability theory". *Teor. Verojatnost Primenenija*, vol. 1.
- Ramsey, F.P. (1931). *The foundation of mathematics and other logical essays*. Routledge & Kegan.
- Regazzini, E.; Petris, G. (1992). "Some statistical aspects of the use of exchangeability in statistics". *Journal of the Italian Statistical Society*, vol. 1.
- Reichenbach, H. (1935). *The theory of probability*. University of California Press.
- Salmon, W.C. (1979). "Propensities: A discussion review of D.H. Mellor 'The matter of chance'". *Erkenntnis*, vol. 14.