Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

Instituto de Investigaciones en Administración, Contabilidad y Métodos Cuantitativos para la Gestión (IADCOM)

Centro de Investigación
en Métodos Cuantitativos
aplicados a la Economía y la Gestión
(CMA)

UNDÉCIMAS JORNADAS DE TECNOLOGÍA APLICADA A LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA UNIVERSITARIA

2011

Editores: María Teresa Casparri
Alicia Bernardello
Javier García Fronti
Ana Silvia Vilker

Onceavas Jornadas de Tecnología Aplicada a la Educación Matemática Universitaria / María Teresa Casparri ... [et.al.] ; dirigido por María Teresa Casparri. - 1a ed. - Buenos Aires : Universidad de Buenos Aires, 2012.
250 p. ; 20x15 cm.

ISBN 978-950-29-1361-2

1. Matemática. 2. Enseñanza Universitaria. I. Casparri, María Teresa II. Casparri, María Teresa, dir.
CDD 510.711

Fecha de catalogación: 28/03/2012

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

Editor Responsable:
Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión (CMA)
Av. Córdoba 2122 2º piso
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Argentina
Tel/Fax 0054 (011) 4370-6139; cma@econ.uba.ar

Hecho el depósito que marca la Ley 11.247
Impreso en la Argentina

Primera Edición. Abril del 2012.

Índice

PRÓLOGO

"El auge de las nuevas tecnologías permite un mayor análisis de la información"

Como todos los años, el Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos aplicados a la Economía y la Gestión –CMA- junto con el Departamento Pedagógico de Matemática han organizado estas jornadas de tecnología aplicada a la educación matemática universitaria que, en su undécima edición tuvieron lugar los días 9 y 10 de junio de 2011 en nuestra casa de estudios con el objetivo de lograr en este medio académico una mayor relación entre estudiantes y docentes

Nuestro decano, Profesor Dr. Alberto Edgardo Barbieri tuvo a su cargo el acto de inauguración de las mismas, incentivando a jóvenes estudiantes y docentes a comprometerse con la enseñanza y la investigación, sugiriendo el avance en la búsqueda de nuevas tecnologías como motivación.

Han participado de las exposiciones y conferencias docentes de nuestra casa de estudios como asimismo estudiantes investigadores, alumnos y docentes de las maestrías en gestión económica y financiera de riesgos y en gestión actuarial de la seguridad social.

Nuevas tecnologías van surgiendo, el avance es vertiginoso y resulta imperiosa la necesidad de estar capacitados académica y técnicamente para afrontar estos cambios.

Los docentes debemos entonces estar atentos, analizarlos y aplicarlos a las distintas disciplinas que se desarrollan en nuestro ámbito de enseñanza para poder transmitirlas en forma exitosa a esos alumnos e investigadores que formamos día a día.

Es así que en el marco de las mencionadas jornadas han sido expuestos trabajos relacionados justamente con las nuevas metodologías e herramientas tecnológicas que se aplican a la resolución de problemas matemáticos y estadísticos a través de la implementación de nuevos programas.

En el marco de las jornadas también se mostró el contenido de las aulas virtuales ya que varias materias del Departamento Pedagógico de Matemática comenzarán a ser dictadas bajo esta modalidad a partir del segundo cuatrimestre de este año.

También se reseñó el contenido de la maestría en gestión actuarial de la seguridad social que a partir del próximo año comenzará a dictarse bajo la modalidad de distancia.

El objetivo se cumplió: estas jornadas sirvieron de mecanismo difusor de tecnologías que se aplican diariamente a la resolución de problemas en distintos ámbitos, permitiendo mostrar el avance incesante de la enseñanza.

María Alejandra Metelli

INDICADORES Y PLANIFICACIÓN ESTRATÉGICA

Gustavo Norberto Tapia

Cuando debemos hacer una elección y no la haces, esto ya es una elección.
William James

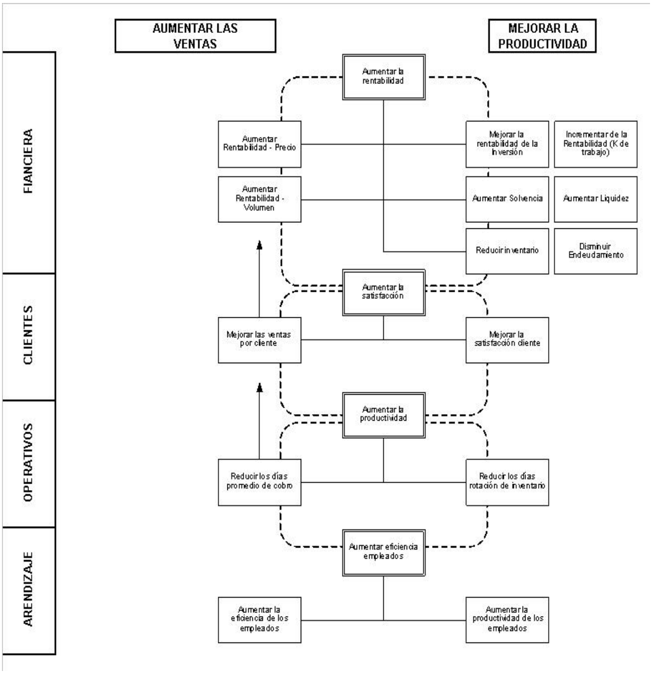
INTRODUCCIÓN

La introducción de un nuevo sistema de dirección centrado en el tablero de comando debe superar la inercia de la organización, que tiende a envolver y a absorber cualquier programa de cambio. Se requiere una organización con líderes que promuevan la construcción del cuadro de mando y que trabajen en implantarlo como un nuevo sistema de gestión, para luego gestionar el sistema de dirección estratégica de una forma constante y recurrente.

Se identifican tres roles de máxima importancia a la hora de construir e implementar el tablero de comando como un sistema de gestión estratégica:

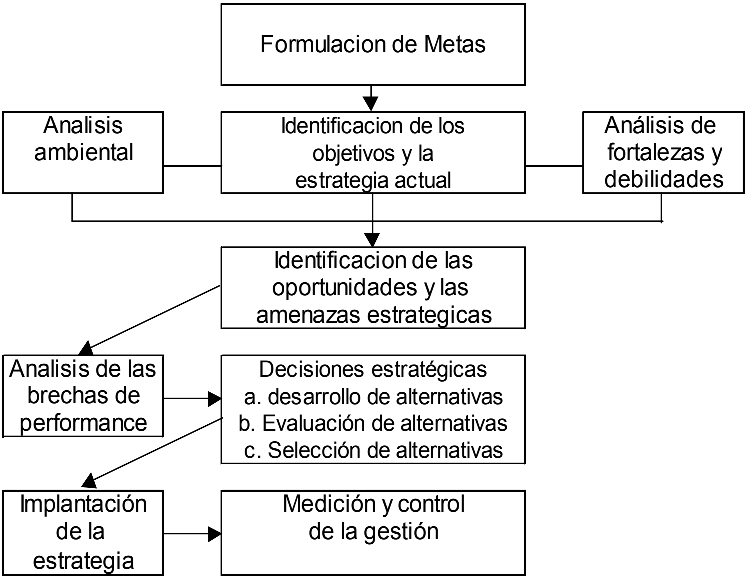
- El *arquitecto* es responsable del proceso que construye el tablero de comando inicial y que introduce el cuadro de mando en el sistema de gestión. Dado que el cuadro de mando representa un cambio radical en la filosofía de gestión, el arquitecto debe comprender totalmente y estar motivado internamente por el nuevo enfoque sobre los objetivos estratégicos a largo plazo. Esta persona ha de ser capaz de educar al equipo ejecutivo y guiar la traducción de la estrategia en objetivos e indicadores específicos de una forma que no sea amenazadora y que no dispare las reacciones defensivas.
- El *agente de cambio* que debería tener una relación directa con el director general, ya que sirve para guiar el desarrollo del nuevo sistema de gestión durante un periodo de dos a tres años durante el cual se dinamizan los nuevos procesos con la herramienta de tablero de comando.
- El *comunicador* que debe obtener la comprensión, la aceptación y el apoyo de todos los miembros de la organización, desde los

más altos niveles hasta los equipos y empleados de primera línea. Las nuevas estrategias articuladas en el tablero de comando acostumbran a exigir nuevos valores y modos de realizar el trabajo, que se construyen alrededor de la satisfacción del cliente, calidad y capacidad de respuesta, innovación y servicio.



Entre los beneficios, se destaca la explicación de un modelo de negocio, que traducido en indicadores, facilita el alcance de las metas, el recorrido en una dirección previamente pensada y la aspiración a lograr un consenso importante en la empresa; todo esto integrando cortos con largos plazos. Por supuesto que existen riesgos, si no se comunica adecuadamente o no se registra y mide oportunamente. La falta de colaboración de la dirección, en la preparación e implementación provocará el fracaso de la medición de la gestión. El análisis del tablero de comando demanda el planteo de las estrategias de la organización. Bajo las cuatro perspectivas, se puede al menos integrar las principales actividades presentes en la vida de la organización, vinculando los planos financieros, comerciales, operativos y aprendizaje.

Será fundamental ante la formulación de las estrategias, emplear previamente un modelo de análisis estratégico como el FODA –fortalezas, oportunidades, debilidades y amenazas-, como punto de partida, a fin de señalar los factores críticos e ir contemplando las metas a obtener.



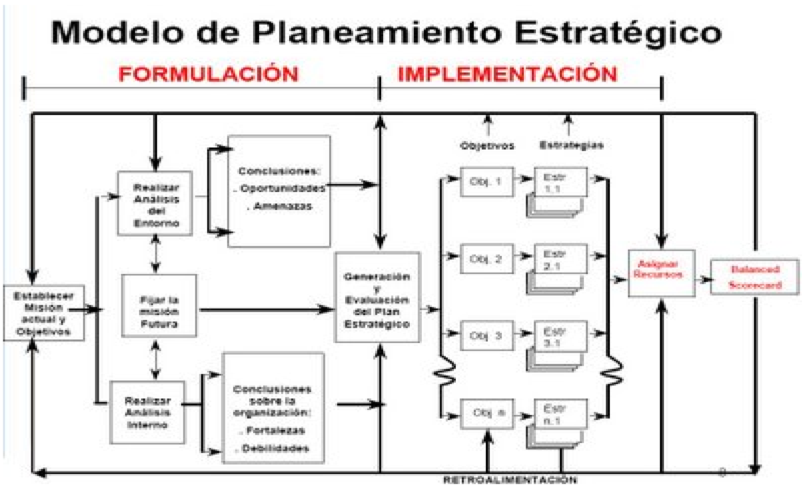
1. PLANIFICACIÓN ESTRATÉGICA

En la planificación estratégica de una empresa o unidad de negocios la misión se define en base al análisis estratégico, que comprende dos campos fundamentales:

- El *análisis externo*, que trata de las condiciones generales del entorno (económicas, políticas, sociales, tecnológicas, etc.) que afectan o pueden afectar a la vida de la empresa, así como también las condiciones específicas del mercado, los clientes y la competencia.

- El *análisis interno*, que es común desglosar en fuerzas y debilidades de cara a la competencia y demás condiciones del medio externo.

Las organizaciones han diseñado un conjunto de actividades con el fin de lograr los objetivos previamente enunciados, en un marco en el que previamente se ha expresado la Visión y la Misión. La planificación es una actividad en la que, por un lado se establecen los objetivos y la manifestación pragmática de la estrategia a partir de acciones concretas para alcanzarlos; y por otro lado, avanzando en el proceso de planeación, se plantean las metas en los diferentes asuntos con el nivel de detalle requerido para trabajar de manera concreta y materializar el cumplimiento de los objetivos. El proceso de planificación es decisión y acción.



El plan de negocios es entonces la exteriorización de un proceso de decisión, se trate de un nuevo emprendimiento o de un negocio ya instalado, que frecuentemente cubre un horizonte entre tres y cinco años, analizando la implementación y maduración de las operaciones, y evaluando su rentabilidad, riesgos y creación de valor. Consta al menos de un análisis contextual, de un plan comercial y de un plan financiero, y suele tener un plan de inversiones generador del flujo de fondos que de él emerge. Los capítulos del plan de negocios examinan los siguientes aspectos:

- ❖ Descripción del Negocio (breve reseña histórica)
- ❖ El producto
- ❖ El Mercado
- ❖ Competencia
- ❖ Riesgos y oportunidades del negocio
- ❖ Marketing Plan
- ❖ Plan operativo, manufactura y tácticas.
- ❖ Supuestos e hipótesis de trabajo.
- ❖ Management, organización, accionistas
- ❖ Proyecciones de Ventas
- ❖ Presupuestos anuales/mensuales
- ❖ Estrategias de financiamiento
- ❖ Información económico-financiera
- ❖ Sensibilidad y Escenarios
- ❖ Resumen de inversiones
- ❖ Conclusiones
- ❖ Apéndices y anexos

Las hipótesis de trabajo deben contemplar los indicadores que inciden en las variables del plan de negocios, como la inflación, la tasa de interés, el aumento de costos de la materia prima y de los salarios, la evolución de los tipos de cambio, etc. El seguimiento y la evaluación ayudan a mejorar el desempeño y a conseguir resultados. Dicho de manera más precisa, el objetivo general del seguimiento y la evaluación es la medición y análisis del desempeño, a fin de gestionar con más eficacia los efectos y productos que son los resultados en materia de desarrollo. El desempeño se define como el progreso hacia el logro de resultados.

Los principales objetivos del seguimiento y la evaluación, actualmente orientados a resultados son:

- ➢ Mejorar el aprendizaje colectivo en materia de desarrollo.
- ➢ Asegurar la toma de decisiones con base en la información.

- Apoyar la responsabilidad sustantiva y la toma de posición.
- Fortalecer la capacidad en cada una de las áreas.

Estos objetivos están vinculados en un proceso continuo y la asociación estrecha con los principales interesados a lo largo del proceso también promueve la creación de conocimiento y aprendizaje compartidos, contribuyendo a la transferencia de destrezas y al desarrollo en los lugares de trabajo.

Así es que el seguimiento tiene por finalidad proporcionar a los gerentes y a los principales interesados, en el contexto de una intervención en curso, indicaciones tempranas de progreso, o de la falta de progreso, en el logro de resultados. La evaluación es un ejercicio selectivo que intenta evaluar de manera sistemática y objetiva los progresos hacia un efecto y su realización[1]. La evaluación no es un acontecimiento aislado, sino un ejercicio que implica análisis de alcance y profundidad diferentes, que se lleva a cabo en distintos momentos como respuesta a las necesidades cambiantes de conocimiento y aprendizaje durante el proceso de conseguir un determinado efecto. La retroalimentación es un proceso, en el marco de seguimiento y evaluación, mediante el cual se divulgan información y conocimientos que se utilizan para evaluar el progreso general hacia el logro de resultados o para

[1] PNUD Manual de Seguimiento y Evaluación de Resultados.2002. NY. EUA.

confirmarlos. La retroalimentación puede consistir en hallazgos, conclusiones, recomendaciones y lecciones extraídas de la experiencia. Se la utiliza para mejorar el desempeño y como base para la toma de decisiones.

La gestión basada en resultados es una estrategia o enfoque de gestión mediante la cual una organización se asegura que sus procesos, productos y servicios contribuyan al logro de resultados claramente definidos. La gestión basada en resultados provee un marco coherente para la planificación y la gestión estratégica en la que se definen de manera realista los resultados que se espera obtener, siguiendo el progreso que busca alcanzarlos, integrando las lecciones aprendidas en las decisiones de la dirección y la gerencia.

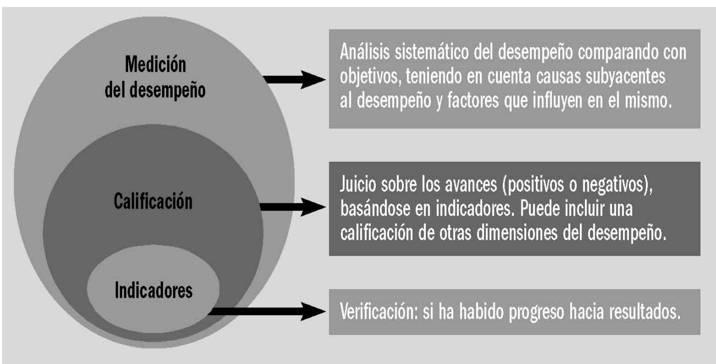
La evaluación de efectos abarca un conjunto de proyectos, programas y estrategias conexos cuyo objetivo es producir un determinado efecto. Estas evaluaciones analizan cómo y por qué los efectos se consiguen o no, en el contexto para un lugar y momento determinado. También puede ayudar a aclarar los factores subyacentes que afectan la situación, destacándose las consecuencias imprevistas (positivas y negativas), recomendando acciones para mejorar el desempeño en la programación futura y generando lecciones aprendidas. Estas evaluaciones periódicas y en profundidad utilizan datos de seguimiento correspondientes a un antes y un después.

Las evaluaciones de efectos pueden satisfacer distintas necesidades en momentos diferentes del ciclo de programación. Si se las realiza temprano en el ciclo, pueden suministrar información sobre los posibles impedimentos; si se las realiza a mitad del ciclo, pueden sugerir ajustes; y si se las realiza al final, pueden contribuir a guiar el trabajo en el ciclo siguiente. Tanto el seguimiento como la evaluación de efectos tienen por objetivo la recolección y análisis sistemáticos de información, para identificar los cambios producidos, desde las condiciones de base hasta los efectos esperados. Es importante comprender las razones por las que un cambio tiene lugar, y entender el vínculo de las funciones que están estrechamente ligadas con los procesos de toma de decisiones en los niveles de programa y de política.

Al planificar el seguimiento para evaluar el progreso hacia los efectos se alienta a las áreas a continuar con los siguientes pasos:

- Analizar las necesidades: para lo cual debe precisarse qué información se requiere para examinar el efecto y qué elementos son más convenientes supervisar.
- Estudiar el seguimiento actual con los instrumentos aptos a este fin, como los indicadores de éxito o de progreso.
- Conocer el alcance o los instrumentos del seguimiento.
- Adaptar y diseñar mecanismos de seguimiento para cerrar brechas entre la información disponible y la requerida.

En cuanto a la medición de desempeño, los indicadores son los elementos que sintetizan y contribuyen a formarse una idea acabada del tema en consideración. Sin embargo, no son los únicos elementos; para valorar el desempeño es necesario conocer no sólo los logros obtenidos, sino también se requiere tener información sobre cómo fueron obtenidos, los factores que influyeron de modo positivo o negativo, si los resultados fueron excepcionalmente buenos o malos, quiénes fueron los principales responsables, entre otros aspectos.



1.1 Pasos claves para seleccionar indicadores

Establecer líneas de base y metas: Un indicador de efectos tiene dos componentes: línea de base y meta. La línea de base es la situación antes de iniciar el proceso, programa o actividad, que marca el punto de partida del seguimiento de resultados. La meta es la situación que se prevé al final del proceso.

Las líneas de base proveen información que puede ser utilizada para diseñar e implementar intervenciones. También proveen un importante conjunto de datos con cuya comparación se puede determinar el éxito (o, al menos, el cambio), lo cual permite medir el grado de progreso hacia un resultado. La verificación de resultados depende del conocimiento del cambio que se producirá en el tiempo. Todo esto requiere comprender claramente el problema de desarrollo que se quiere abordar. El análisis exhaustivo de los factores claves que influyen en un problema de desarrollo complementa la formulación de datos de líneas de base y la determinación de metas.

Utilizar indicadores aproximados, si es necesario: el costo, complejidad y oportunidad de la recolección de datos pueden impedir directamente que se mida un resultado, en cuyo caso indicadores aproximados pueden indicar tendencias de desempeño y hacer que los gerentes identifiquen problemas potenciales o áreas en las que ha habido éxito, como ocurre a menudo con efectos vinculados con el diálogo de políticas, gobernabilidad y otros resultados difíciles de medir. Es importante diferenciar entre los indicadores cuantitativos y los cualitativos. Tanto los indicadores cuantitativos como los cualitativos deben seleccionarse basándose en la índole de los aspectos específicos del resultado planificado. Por ejemplo, la eficiencia se presta para ser medida por indicadores cuantitativos. Por el contrario, la medición de sostenibilidad requiere evaluar de modo cualitativo las actitudes y el comportamiento porque involucra la capacidad de adaptación de la gente a un medio ambiente cambiante.

Tratar de limitar la cantidad de indicadores: el exceso de indicadores suele ser contraproducente. Con la información disponible deben elaborarse algunos pocos indicadores fidedignos y bien estudiados que reflejen esencialmente los cambios positivos en la situación y su evolución. Ser selectivo implica lograr un equilibrio entre lo que se *debe* medir y lo que se *puede* medir.

RESULTADOS PREVISTOS	INDICADORES DE DESEMPEÑO	CLASIFICACIÓN DE INDICADORES						PUNTAJE TOTAL	SELECCIÓN
		A	B	C	D	E	F		
Impacto	Si hubiere -								
Efecto 1	Indicador 1 Indicador 2…	[Asignar un punto por cada criterio cumplido]							
Producto 1	Indicador 1 Indicador 2…								

Seleccionar de 2 a 3 indicadores con la mejor puntuación

A = el sentido del indicador es claro
B = datos fácilmente disponibles
C = la tarea de recolectar datos está al alcance de la dirección del proyecto y no requiere expertos para su análisis
D = el indicador es lo bastante representativo para el conjunto de los resultados previstos (efectos o productos)
E = el indicador es tangible y se puede observar
F = el indicador es difícil de valorar cualitativamente pero es tan importante que debe tenerse en cuenta (indicador aproximado)

Asegurar la oportunidad: la utilidad de un indicador depende de que las medidas sean claras y oportunas, de forma que el indicador de fecha prevista corresponda al progreso previsto de la asistencia. Si hay cambios, tales como modificaciones en productos o efectos, deben establecerse nuevos indicadores que correspondan a las metas reales.

1.2 Planificación con indicadores

La prueba crítica de la validez de un indicador es si es práctico para efectuar el seguimiento de resultados, es decir, si es fácil obtener y analizar datos para el indicador. La obtención de datos "válidos" y "representativos" puede ser una tarea grande, compleja y cara. Por tanto, los indicadores deben ser sencillos y su número reducido, pero deben indicar cierto grado de progreso o la magnitud del cambio. Si los indicadores seleccionados son demasiado complejos, será difícil entenderlos o analizarlos debidamente.

Principios claves para recolectar y analizar datos utilizando indicadores

Explicación: Crear un marco conceptual para integrar ideas,definiendo,orientando y dirigiendo la información disponible y sus propias ideas sobre el proyecto o programa. En el caso del PNUD, esto significa tener una cadena fiable de resultados en términos de efectos,productos y alianzas.

Enunciado de intenciones o problema: ¿Qué va a investigar? Defina los problemas y las cuestiones, busque indicios que tengan un significado claro, concierte acuerdos con beneficiarios y asociados. Esto significa definir el problema de desarrollo a nivel de objetivo secundario del MRE.

Preguntas a responder: Una vez que termine de recolectar datos, ¿cuáles son las preguntas principales a las que espera hallar respuestas razonables? ¿Qué evidencia puede utilizar para verificar el nivel de logro de un indicador?

Enunciado del efecto: Enumere los efectos específicos que va a supervisar, fije metas realistas y tenga presentes las fuentes de datos y las responsabilidades de seguimiento.

Diseño y procedimiento: Establezca quiénes serán objeto de entrevistas, encuestas y grupos focales y describa cómo serán seleccionados. Explique en qué circunstancias se recolectarán los datos, qué instrumentos de medición o de recolección de datos se utilizarán y cómo se analizarán e interpretarán los datos. Trate de encontrar datos de fácil acceso y evite recolectar demasiados datos.

Supuestos: ¿Cuáles son sus supuestos acerca de la índole de las cuestiones que investiga, sus métodos y mediciones o sobre la relación que tiene la investigación con otros problemas o situaciones?

Limitaciones: ¿Cuáles son las limitaciones de sus métodos o enfoque en cuanto a validez interna y externa?

Delimitación: ¿En qué se basa para restringir el alcance de la recolección y el análisis de datos? ¿Se centra sólo en los aspectos seleccionados de los problemas o del efecto, en ciertas áreas de interés, en una gama limitada de temas?

Definiciones de términos: Enumere y defina los conceptos principales que utilizará, especialmente en los casos en que los conceptos tengan acepciones diferentes para interlocutores distintos. Debe ponerse énfasis en las definiciones operativas o de comportamiento.

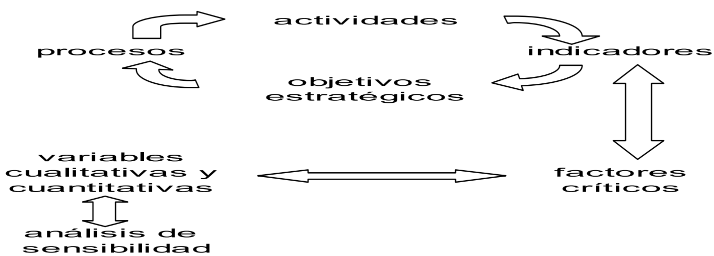
El proceso de retroalimentación al seguimiento y la evaluación sigue varias etapas básicas:

- ✓ Asegurar concentración en los resultados.

- ✓ Elaborar programas basados en los efectos buscados.
- ✓ Establecer qué evidencia se busca, qué variaciones pueden anticiparse y qué debe hacerse si estas variaciones ocurren.
- ✓ Delimitar para cada nivel de personal y los socios, el propósito para el cual se generan conocimientos o información para la toma de decisiones y su alcance.
- ✓ Definir las prioridades de seguimiento, orientadas a productos y efectos y disponer de puntos de referencias o normas sobre los cuales se basarán los juicios sobre retroalimentación.
- ✓ Seleccionar indicadores de conocimientos e información basados en las prioridades corporativas, su utilización y los usuarios.
- ✓ Hacer que los recursos utilizados sean rentables considerando el monto de recursos asignados e identificar los requerimientos principales de recursos para evaluación para la futura programación.
- ✓ Incorporar un calendario de plazos que cubra los cambios futuros en la programación.
- ✓ Acordar un sistema de recolección y análisis de datos y asignar responsabilidades con costos.
- ✓ Analizar la información cualitativa para mejorar la aplicación de ciertas técnicas de seguimiento y evaluación, tales como comprobar supuestos sobre el terreno, mejor formulación de preguntas y elegir con más perspicacia las áreas que serán analizadas.
- ✓ Supervisar los procesos de aprendizaje, incluyendo el uso de retroalimentación y los productos de conocimiento.
- ✓ Indagar constantemente, a través de mecanismos de retroalimentación, sobre la causa de lo que ha sucedido o está sucediendo en los planes llevados a cabo.
- ✓ Identificar el alcance del efecto de los planes y programas.
- ✓ Especificar dónde, cuándo y cómo se interpretará, se comunicará y se distribuirá la información, lo que incluye consultas como insumos a los procesos habituales.
- ✓ Documentar, analizar y examinar experiencias comparativas en materia de diseño de programas, alianzas y actividades de seguimiento y evaluación.

- ✓ Intervenir en diferentes niveles organizacionales (actividades operativas, elecciones estratégicas, enfoques y prioridades corporativas) en consonancia con la estrategia del plan organizacional.
- ✓ Establecer metas de modo estratégico.
- ✓ Generar información que sea adecuada para diversos usuarios y oportuna para la toma de decisiones y requerimientos de responsabilidad.
- ✓ Diseñar modelos apropiados en consulta con los usuarios y capacitar al personal en su utilización.
- ✓ Pedir opinión a todos los interesados, entre ellos los beneficiarios del programa.
- ✓ Buscar pruebas empíricas
- ✓ Efectuar controles múltiples y velar por la calidad de evidencia evaluativa, con una retroalimentación válida y relevante.

Con relación al entorno, debemos considerar el efecto que éste tiene sobre los resultados de la empresa, como también el impacto que se manifiesta en él a partir de las acciones (o reacciones) de la empresa.,



Vale aquí contemplar el denominado análisis de sensibilidad y de contexto a fin de conocer el grado de adaptabilidad y posible performance de las operaciones de la firma. Para ello, los factores y las variables críticas deben ser estudiados con un grado de aproximación tal que posibilite la modificación en el comportamiento organizacional.

2. NEGOCIOS QUE GENERAN VALOR

2.1 La filosofía de la gestión de valor

La Dirección debiera controlar la gestión de producción de valor para lo cual es necesario designar unidades desde el *top management* a los niveles operativos. Es preciso difundir la mentalidad y estilo de trabajo de sistémico de esta metodología. El compromiso con el sistema y las decisiones prácticas para su implantación corrigen las disfuncionalidades y optimizan el funcionamiento. La puesta en marcha, requiere de una estrategia que contenga las metas y los medios, contemplados en un plan con estimaciones parciales y tiempos de logro. En este sentido, la gestión de valor como filosofía, es un servicio sobre el entorno, aún cuando los dueños de la organización busquen maximizar los retornos de la inversión de capital en el mediano y largo plazo.

Operativamente, la gestión de valor reduce la complejidad de problemas en las dimensiones temporales y estructurales, guiando metódicamente las actividades de los equipos implicados en el proceso de producción de valor. La gestión de valor también es un sistema social con dimensiones de comunicación e interacción personal, en el que se integran segmentos de potencialidades y acciones.

Este sistema conforma una red de comunicación de decisiones con una dimensión de información básica, que representa un foco de intercambios y acoplamientos con el exterior. Un sistema de gestión de valor, también considera a la dimensión ecológica en las relaciones intra e inter organizacionales.

Se comprende entonces que la estrategia de Valor basado en la Gestión, sugiere que las Organizaciones deben maximizar el valor de la empresa y no la ganancia, lo que por otra parte tiene efectos más positivos sobre la capacidad competitiva. La gerencia basada en valor es un efectivo vínculo entre la estrategia y las mediciones para la creación de valor, lo que se manifiesta al exteriorizar los procesos principales:

1) Desarrollar estrategias para maximizar el valor
2) Traducir la estrategia en metas -corto y largo plazo- enfocada a los inductores de valor
3) Desarrollar planes de acción y presupuestos a las metas previstas
4) Introducir sistemas de medición de resultados y esquemas de compensación

Para subsistir y crecer en mercados altamente competitivos y globalizados, es necesario gerenciar la empresa con criterios de creación de valor. Entre las operaciones más importantes y frecuentes podemos mencionar: adquisición de empresas, alianzas estratégicas, opciones de negocios corporativos.

2.2 La búsqueda de los inductores de valor

Uno de los pasos más importantes en la filosofía de gestión basada en valor es la búsqueda de los inductores de valor. Estos inductores son variables de desempeño operacional que actúan en la creación de valor. Estas variables deben ser muy bien analizadas y entendidas por dos razones: primero, porque la organización no puede actuar directamente sobre el valor, actúa sobre cosas que puedan influenciarlo como la satisfacción del consumidor, los costos, los gastos de capital, entre otros; segundo, es a través de los inductores que la administración enseña a entender al resto de la organización y a establecer un diálogo sobre lo que se espera sea cumplido. Los que se identifiquen deben estar bajo revisión periódica, ya que no son estáticos.

Un inductor de valor es simplemente cualquier variable que afecta el valor de una empresa. Para que sea útil, los inductores necesitan ser organizados de manera que se pueda identificar cuáles tienen mayor impacto sobre el valor, asignando la responsabilidad de desempeño a individuos que puedan colaborar para que la organización pueda alcanzar sus objetivos.

Los inductores deben desarrollarse en tres niveles:

A nivel genérico, donde los márgenes operacionales y el capital invertido son combinados para calcular la tasa de retorno del capital invertido (r).

A nivel de las unidades de negocio, donde variables como la satisfacción del consumidor son particularmente relevantes.

A nivel operativo, donde se necesita gran detalle para enlazarlos a las decisiones específicas de la gerencia de este nivel.

Otra forma de ubicar los inductores de valor es desagregando la empresa por unidades estratégicas de negocio, o bien trabajando con cada cliente, cada proveedor o cada vendedor. Es importante desagregar la información financiera que se posee y tratar de llegar al rediseño de los estados existentes, con una integración que contemple los aspectos relevantes incorporados en la estrategia.

La identificación de los inductores es un proceso creativo que requiere de ensayo y error. Las aproximaciones mecánicas basadas en la información existente y las puramente financieras, raramente permiten establecerlos. Alinear los inductores con las decisiones es la clave para organizar un árbol de inductores, calculando los márgenes operacionales desintegrados por producto, o por localización geográfica o por segmento de mercado.

Un inductor no puede tomarse aisladamente de los demás para trabajar sobre él, por ejemplo, un incremento de precios puede tener un gran impacto sobre el valor, pero si se considera la posible pérdida de participación en el mercado, el alza afectará el valor negativamente. Por esta razón se recomienda el uso de escenarios que representen la incidencia de diferentes tipos de decisión sobre el valor de la empresa o de sus unidades de negocio, permitiendo además un constante juego que no dejará a la empresa, en ningún momento, con la guardia baja.

2.3 Valor Económico Agregado *(EVA)* como medida de desempeño

El EVA es un indicador basado en el valor que surge al comparar la rentabilidad obtenida por una organización con el costo de los recursos gestionados para conseguirla. Si el EVA es positivo, la compañía crea valor, lo que implica que se ha generado una rentabilidad mayor al costo de los recursos empleados. Si el EVA es negativo no se cubren los costos y se destruye riqueza. Al análisis de EVA se ha atado un componente para la valuación de empresas, el Valor de Mercado Agregado (MVA), el cual puede definirse como la diferencia entre el valor de mercado total de una compañía y el total de los recursos invertidos (capital) para crear ese valor a una fecha cualquiera. Si el MVA es positivo, la empresa ha creado valor, mientras que si es negativo lo ha destruido.

El EVA tiene algunos beneficios respecto de otros indicadores, tales como el Retorno sobre la Inversión (ROI) o la Utilidad por Acción (UPA). En el EVA se incorpora el factor riesgo en el procedimiento de su medición y se refleja en términos absolutos el desempeño corporativo en el esquema de gestión basado en valor mencionado precedentemente, en el cual se enfatiza el empleo de inductores de valor corporativo.

Como sistema permite:

- Medir el desempeño, con base en la verdadera creación de valor para el accionista.
- Rediseñar los sistemas de gestión, facilitando los procesos de planeamiento estratégico y la asignación de recursos.
- Motivar a los gerentes a crear valor, a través de un sistema de compensación variable basado en la creación de valor.
- Fortalecer la cultura de creación de valor; a través de un programa de capacitación y comunicación (interna y externa).

El EVA provee a la administración de una metodología consistente para facilitar la formulación estratégica y soportar una correcta evaluación de desempeño y analizar inversiones y adquisiciones. Con el objetivo de alinear los intereses entre ejecutivos y accionistas, es preciso hacer algo más que simplemente establecer una mejor manera de acompañar el desempeño. El EVA debe ser encarado como el elemento central de un sistema integrado de gestión, que fomente una correcta toma de decisión económica para toda la organización. Este sistema de gestión está sólidamente apoyado en cuatro pilares: medida de desempeño, sistema de gestión, motivación y mentalidad empresarial. Adicionalmente, es posible integrar las metodologías de costo basado en actividades y valor económico agregado: ABC - EVA sinergizando el perfeccionamiento en las estructuras de costos fijos, con un manejo adecuado del costo de capital. De esta manera se integra el campo estratégico con el táctico – operativo.

El EVA mide los ingresos operativos versus el costo del capital empleado. Fue definido por su creador, Stewart, como los ingresos netos operativos después de impuestos (NOPAT) menos el costo del capital:

EVA = NOPAT – Costo del Capital

$$\boxed{\text{EVA} = \text{NOPAT} - (\text{Capital} * \text{Costo del Capital})}$$

Estrategias para crear valor e incrementar el EVA

Puesto que uno de los objetivos principales de los dirigentes de una empresa es la creación de valor para sus accionistas, se debe conseguir un EVA positivo. Las medidas que una organización puede adoptar para crear valor se pueden encuadrar en uno de los siguientes conceptos:

- *Eficiencia operacional:* Mejorar la utilidad operacional después de impuestos sin involucrar más capital en el negocio.
- *Alcanzar crecimiento rentable:* Invertir nuevo capital en proyectos de los que se esté obteniendo una rentabilidad mayor que el costo que tiene conseguir ese nuevo capital a invertir.
- *Liquidar capital improductivo*
- *Recortar la inversión en proyectos no rentables*

2.4 Razón Q de Tobin

James Tobin en 1969 introdujo el concepto de la Q, que es una relación entre el valor de mercado de una firma y el costo de reposición de los activos de una firma. El valor de mercado de una firma corresponde al valor presente de los beneficios económicos esperados (MVA) más la inversión inicial en activos. Los costos de reposición hacen referencia al costo de vender los activos de la empresa en el mercado. Tobin buscaba una relación causal entre la Q y la inversión, incorporando las expectativas que los inversionistas tienen acerca de la productividad marginal futura de los factores de producción, si la Q marginal es mayor que uno, existen incentivos para invertir ya que los beneficios esperados del proyecto son mayores que su costo, si Q marginal es menor que 1 no es oportuno invertir.

2.5 Efecto Palanca Financiero –EPF-, Efecto Palanca Operativo –EPO- y Efecto Palanca Combinado –EPC-

La idea central es que los resultados finales de una empresa se dan en función de dos grandes variables:

A) *La estructura de costos*: para efectuar una misma producción pueden buscarse distintas combinaciones de costos fijos y variables. Una empresa muy automatizada tendrá, probablemente, un mayor componente de costos fijos que otra del mismo ramo y escala de producción, donde el factor trabajo sea preponderante.

B) *La estructura financiera*: se analiza cuál es la estrategia de financiamiento que la empresa adoptó y cuál es la proporción de deudas a fondos propios.

Así es que dos empresas, del mismo ramo y similar tamaño, pueden tener idénticas estructuras de costos operativos fijos y variables y, sin embargo, tener ratios de deudas diferentes.

En suma, este modelo distingue dos estructuras: de costos y financiera, sobre los que se generan los rendimientos y los riesgos y que dan lugar al cálculo de los indicadores conocidos como efecto palanca o *leverage*. La estructura de costos da lugar al leverage operativo. La estructura financiera al leverage financiero.

Se distinguen también dos tipos de riesgos: del negocio y riesgo financiero. El riesgo del negocio se vincula con la variabilidad que tienen las ganancias antes de impuestos y de intereses. Su medición puede calcularse a través de la desviación típica en la función de probabilidad de las ganancias antes de impuestos y de intereses. En el riesgo del negocio influyen diversos factores: la rama industrial en la que está situada la empresa, la demanda del producto, la competencia, la estructura de activos de la empresa, el grado de apalancamiento operativo.

2.6 Aspectos financieros e impulsores con valor estratégico

- *Crecimiento y diversificación de los ingresos*: El crecimiento y la diversificación de los ingresos consisten en expandir los productos y servicios ofrecidos, llegando a nuevos consumidores y a nuevos mercados, modificando la mezcla de productos y servicios para ofrecer un valor agregado mayor, y modificando los precios.

- *Reducción de costos / mejora de la productividad*: La reducción de costos y la mejora de la productividad se logran reduciendo los costos directos e indirectos de los productos y servicios y compartiendo los recursos entre las distintas unidades de negocios.

- *Utilización de los activos - estrategia de inversión*: Con referencia a la utilización de los activos, los gerentes se deben ocupar de reducir el nivel de capital de trabajo empleados para mantener cierto volumen y diversidad de negocios. También deben esforzarse para obtener una mayor utilización de sus activos fijos aprovechando la capacidad ociosa para desarrollar nuevos negocios. Todas estas acciones permitirán incrementar el retorno sobre la inversión.

La siguiente figura muestra los diferentes temas estratégicos según la estrategia que siga la unidad de negocios:

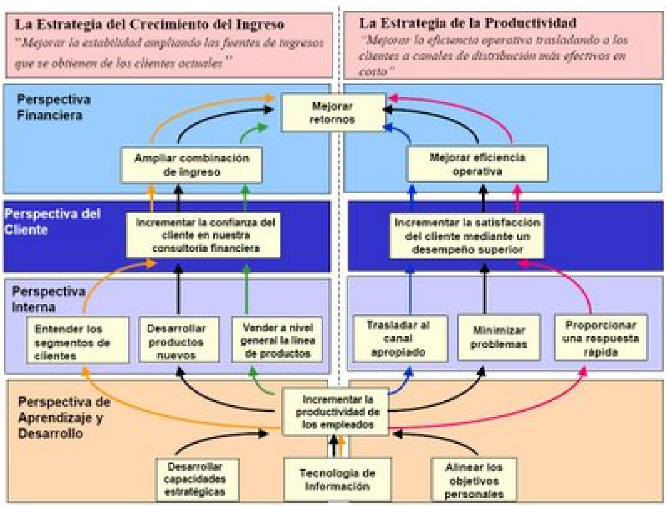
		Temas estratégicos		
		Crecimiento y diversificación de los ingresos	Reducción de costos / mejora de productividad	Utilización de los activos / estrategia de inversión
Estrategia de la unidad de negocios	Crecimiento	Tasa de crecimiento de las ventas, por segmento. Porcentaje de ingresos de nuevos productos, servicios y clientes.	Ingresos / empleados	Inversiones (porcentaje de ventas)
	Sostenimiento	Cuota de clientes y cuentas seleccionadas. Venta cruzada. Porcentaje de ventas por nuevas aplicaciones. Rentabilidad de clientes y de línea de productos.	Costos versus competidores. Tasa de reducción de costos. Gastos indirectos (porcentaje sobre ventas)	Ratios de capital circulante (ciclo de maduración) ROCE por categoría de activos. Tasa de utilización de los activos.
	Cosecha	Rentabilidad de la línea de productos y clientes. Porcentaje de clientes no rentables.	Costos por unidad (por unidad de output, por transacción).	Periodo de repago. Rendimiento.

2.7 Temáticas comerciales que impulsan la estrategia empresarial con valor

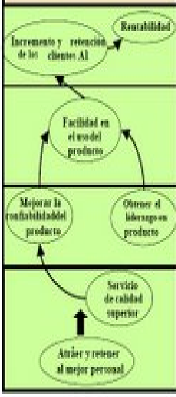
En la perspectiva del cliente, las empresas identifican los segmentos de cliente y de mercado en que han elegido competir. Estos segmentos representan las fuentes que proporcionarán el componente de ingresos de los objetivos financieros de la empresa. Además de aspirar a satisfacer y agradar a los clientes, los gerentes de unidades de negocio deben, dentro de la perspectiva del cliente, traducir sus declaraciones de visión y estrategia en objetivos concretos basados en el mercado y los clientes.

Un proceso de formulación de estrategia que utilice una investigación con profundidad del mercado debe revelar los diferentes segmentos de mercado o cliente y sus preferencias en cuanto a aspectos como el precio, calidad, funcionalidad, imagen, prestigio, relaciones y servicio. La estructura de la empresa puede entonces definirse en función de esos segmentos de cliente y de mercado que elija convertir en objetivos. El tablero de comando, como descripción de la estrategia de una empresa, debería identificar los objetivos del cliente de cada segmento seleccionado. Una vez que una empresa ha identificado y seleccionado sus segmentos de mercado, puede tratar los objetivos y medidas para sus segmentos seleccionados. Hemos descubierto que las empresas acostumbran a seleccionar dos conjuntos de medidas para sus perspectivas de cliente. El primer conjunto representa las medidas genéricas que virtualmente todas las empresas quieren utilizar. Como sea que estas medidas, como la satisfacción del cliente, la cuota de mercado y la retención de clientes, aparecen en tantos cuadros de mandos integrales, nos referimos a ellas como el grupo central de indicadores. El segundo grupo de medidas representa a los inductores de la actuación –diferenciadores- de los resultados del cliente.

Las perspectivas financiera y comercial serán resultados de la perspectiva de procesos internos y de recursos humanos.



En el siguiente mapa y cuadro se puede percibir un conjunto de indicadores que conforman un tablero de comando equilibrado *(balanced scorecard)*, en línea con la planificación y los inductores de valor tratados en este capítulo. El tablero diseñado, es aplicable a empresas de mediana y pequeña envergadura.



Mapa Estratégico	Objetivos	Mediciones/ Indicadores	Línea de Base N	Metas (Año N+1)	Iniciativas/ Estrategias
	Aumentar la Rentabilidad	RSI	10%	14% anual	Implantar costos ABC
	Mejorar la satisfacción del cliente	Compras repetidas	30%	60%	Programa de calidad De fidelización
	Modernizar el proceso de producción	% del proyecto avanzado	n.d.	60% el primer año	Programa de instalación
	Desarrollar competencias del personal en TI	Prueba de habilidad estructurada	25%	50% Año 1 75% Año 2	Plan capacitación para todos

13

2.8 Ciclo de vida de los negocios

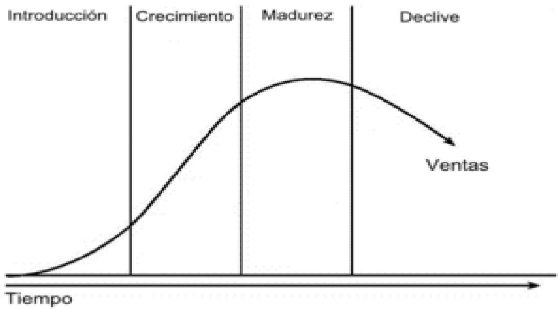
En la necesidad de encontrar herramientas que permitan evaluar tanto la factibilidad de iniciar como de continuar con una determinada actividad, de compararlo con otras posibilidades y, de analizar las acciones tendientes a mejorar las actividades ya en marcha, habrá que evaluar de manera continua la posición relativa frente a los diferentes negocios y posibilidades.

- Analizar factibilidad de un nuevo negocio o línea de productos.
- Monitorear ante los cambios generados interna y externamente la continuidad de una determinada actividad.
- Analizar los cambios a realizar con el fin de mejorar la factibilidad y generación de rendimientos.
- Hacer un seguimiento de la evolución de la actividad emprendida a los efectos de monitorear sus posibilidades futuras y su comparación con otras actividades.

2.9 El ciclo de vida de la empresa

El ciclo de vida de la empresa se grafica con una curva de Gauss, donde, como en todo ciclo vital, hay un nacimiento, un crecimiento, una estabilidad y una decadencia previa a la desaparición y muerte. Mediante este modelo podemos analizar tanto el ciclo de vida de una organización, la de los productos por ella desarrollados, como también el de las personas que integran dicha organización.

Con los productos también se verifica un ciclo. Los productos siguen un ritmo de ventas variable con el tiempo, como el de la figura, y pasan por cuatro fases: introducción, crecimiento, madurez y declive.



La evolución del mercado es un proceso paralelo al ciclo de vida del producto. A medida que la categoría de producto madura, la industria atraviesa etapas que se reflejan en las etapas del ciclo de vida del producto.

Algunos aspectos a considerar:

- Un crecimiento muy abrupto puede generar un descalce financiero.
- Importante es detectar a tiempo el punto de quiebre entre maduro y declive ya que puede evitar el ingreso a esta última etapa.
- Llegar a la etapa de madurez no implica dejar de ganar. Es el momento de optimizar y trabajar con los procesos internos.
- Se pueden crear saltos de crecimiento, diversificando, pero sopesando las ventajas estimadas con los riesgos asumidos.
- Pensar estratégicamente aún cuando se inicie la etapa de declive.

Evidentemente, los inductores, indicadores, metas de las empresas serán diferentes según la etapa que transiten en la vida del producto, mercado o institucional. Aún así, el tablero de comando posibilitará hacer el seguimiento y evaluar las estrategias de negocios y sectoriales dispuestas para cada caso.

3. LA IMPORTANCIA DE LA TECNOLOGÍA

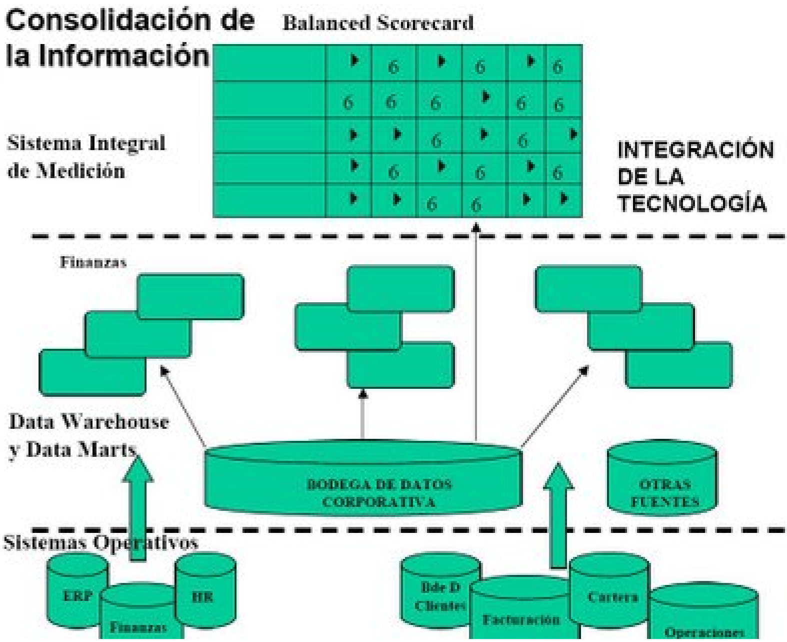
3.1 Problemas para dirigir con la tecnología

Gran parte de la información suministrada por los sistemas no es útil para los directivos debido a deficiencias de puntualidad, exactitud y aplicabilidad.

Los problemas encontrados en el tablero de comando ayudan a entender estas deficiencias:

1. La resistencia al uso de la tecnología.
2. La dificultad de codificar la estrategia: concretar la estrategia en números es uno de los mayores limitantes en el desarrollo de tableros de control.
3. Miedo a la difusión.

En los últimos años, el crecimiento de la oferta ha posibilitado una baja de costos en el desarrollo de software de gestión, lo que ha quebrado una de las barreras que frenaba a estas empresas a la hora de buscar una solución en la tecnología informática. Es factible encontrar soluciones para todo tipo de empresas, tamaño, mercado, actividad. Las soluciones de ERP (sistema de administración integrado) cuentan con un gran número de funcionalidades para ser aplicadas por las empresas con la finalidad de acceder a una solución para la gestión integral de las empresas, no sólo para adaptarse a los distintos segmentos productivos, sino para cada necesidad específica.



Este circuito de datos, información y acción debe estar plenamente ajustado para que produzca beneficios en la organización. Las demoras, las imprecisiones y los errores provocan ineficiencias que suelen cobrar un alto precio.

Este ajuste entre proceso de negocios y software de gestión debe cuidarse especialmente en el proceso de selección de la tecnología a utilizar, pero también se debe contemplar durante toda la vida útil del software instalado. En muchas ocasiones, se produce un cambio en la forma de operar que no se refleja adecuadamente en el software, o bien porque el proveedor del software no está dispuesto a realizar la modificación, o porque la empresa no puede asumir el costo de dicho cambio, lo cual termina con la determinación de un proceso que es la resultante del cambio requerido por la estrategia, y las restricciones existentes en el software utilizado.

Ventajas del empleo de tecnología

- Mayor velocidad de acceso a datos
- Información más precisa para la toma de decisiones.
- Análisis de información en mayor profundidad con mayor eficacia.
- Ahorro de costos con alta eficiencia.
- Seguridad.

El software que brinde información contenida en el tablero de comando, podrá estar integrado al sistema de gestión ERP, u otros, brindando *on line* datos e información sobre los costos, la rotación de inventarios, las ventas y la satisfacción de los clientes, la participación en el mercado, la rentabilidad por cliente, el clima organizacional, medidas sobre desempeño ambiental, entre los más trascendentes, indicando además la calificación con un sistema de colores, banderas, etc., que conforma un lenguaje visual que transmite con oportunidad la información para decidir.

3.2 Recomendaciones para seleccionar software s/TC

- ✓ Evalué aspectos funcionales y técnicos del software.
- ✓ Utilice listas de verificación (*checklist*), complemente con preguntas abiertas y entrevistas con el proveedor del software.
- ✓ Revise evaluaciones externas (publicaciones revistas)
- ✓ Compruebe las referencias de los clientes
- ✓ Conozca y evalué la competencia
- ✓ Pregunte por futuras aplicaciones del software
- ✓ Tenga en cuenta la integración con otras aplicaciones de su empresa y herramientas de apoyo a la toma de decisiones
- ✓ Investigue antecedentes sobre el desarrollo del software

3.3 Otros aspectos

- ✓ Facilidad de uso
- ✓ Capacidad de análisis cuantitativo y cualitativo
- ✓ Administración

- ✓ Despliegue corporativo
- ✓ Funcionalidad y portabilidad
- ✓ Facilidad de mantenimiento

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ansoff, H.; Declerck, R.; Hayes R. (1991): *El planteamiento estratégico*. Distrito Federal, Ediciones Trillas.

Ansoff, H. (1998): *La dirección estratégica en la práctica empresarial*. Distrito Federal, Ediciones Pearson.

Bonilla, E.; Rojas Cortés, L.; Torres Moreno, A. (2008): *Importancia estratégica del cuadro integral de mando en la gestión empresarial*. Universidad de Nueva Granada.

Casparri, M. T.; Bernardello, A.; Tapia, G. y otros (2006): *Administración financiera utilizando Excel*. Buenos Aires, Editorial Omicron.

Kotler, P. (2001): *Dirección de marketing*. México, Ediciones Prentice Hall.

Rappaport, A. (1998): *La creación de valor para el accionista*. Bilbao, Ediciones Deusto.

Ronco, E.; Lladó, E. (2000): *Aprender a gestionar el cambio*. Barcelona, Editorial Paidós.

LA MATEMÁTICA EN LA ALHAMBRA[1]

Miguel Ángel Nastri
Oscar Sardella

La época más gloriosa de la Granada árabe se inicia hacia el año 1236, cuando al ser conquistada Córdoba, la ciudad se convirtió en la capital de la España musulmana. Fue precisamente en este esplendoroso período, cuando la refinada sensibilidad árabe creó la maravilla arquitectónica de la Alhambra.-

Los historiadores árabes hacen derivar el nombre de Alhambra al hecho de que la antigua fortaleza fue reedificada por la noche a la luz de las antorchas. La etimología en cambio, proviene de que las tierras ferruginosas, en las que se asienta la Alambra, proyectan su colorido sobre sus muros. De acuerdo con esta hipótesis etimológica, el vocablo Alhambra sería el resultado de la castellanización de las palabras árabes Calat Alhambra, que significan Castillo Rojo.

La Alhambra, "El monumento que habla por sus paredes", se nos presenta como un enigma.

Todo está y estuvo fuera del alcance de miradas rápidas ya que los colores, inscripciones y adornos florales ocultan sus secretos.

Los matemáticos tenemos nuestros ojos preparados para ver sólo la mitad de lo que figura en sus muros. La otra mitad corresponde a los arabistas, que ya hicieron buena parte de su tarea.

La Alhambra no sólo es el más bello, sino el mejor conservado y más antiguo de todos los palacios árabes que quedan en el mundo.

Los invitamos, a través de la filmación titulada "Arabescos y Geometría" a:

1.- Observar algunos sectores de la Alhambra.

2.- Estudiar su geometría.

---

[1] Introducción a la proyección del video Arabescos y Geometría del CEMAV de la Universidad de Valencia, para el Departamento de Matemática, 1995.

Las imágenes nos muestran una finalidad artística distinta al arte figurativo, así la repetición de un motivo ornamental en forma precisa, ordenada matemáticamente, frecuentemente perfecta, induce a la compaginación de motivos de adorno y compostura fundamentales de carácter geométrico, cubriendo superficies de distinta amplitud, como mosaicos, frisos, como símbolo y representación de la cultura árabe.

Se distingue una unidad de composición en este tipo especial de decoración, que nos permite incursionar en el mundo de la geometría, eligiendo los arabescos por la riqueza regular y exacta que presentan.

Esta decoración nos permite entrar en el mundo de la geometría, como soporte a estudios matemáticos que son abstractos.

Define plano a una superficie prolongada indefinidamente; estudia figuras planas como triángulos, polígonos, entre otras formas; define figuras iguales, mide distancias y ángulos, para luego analizar las características de los arabescos.

Define Geometría Euclídea como un movimiento que es una transformación del plano, que conserva las distancias y que da lugar a los distintos movimientos en el plano y que describe con ejemplos visualmente precisos, como reflexión, rotación, traslación, simetría, reflexión sesgada, solapamiento, recursividad, movimiento, identidad. Continua la exposición con la composición del movimiento, el producto de movimientos, como operación algebraica, analizando los casos particulares, como el movimiento inverso y el resultado de identidad, las figuras planas iguales, homotecias y transformaciones afines.

Mediante la composición de transformaciones lineales en el plano, muestra las propiedades: asociativa, la existencia de elemento neutro y de elemento inverso, planteando y analizando la estructura algebraica de grupo sobre todos los movimientos.

En función de los movimientos de figuras en el plano, define la geometría equiforme y la geometría afín.

El grupo cristalográfico plano, lo da el grupo de simetrías que se originan en tres dimensiones y se clasifican según el movimiento que poseen. En el año 20 de nuestra era, se determinó la existencia de diecisiete grupos cristalográficos planos y todos aparecen en la Alambra en sus arabescos presentando distintos tipos de simetrías.

Los grupos cristalográficos planos se identifican con una denominación determinada, constituyendo una notación de cristografías. Los arabescos de la Alhambra presentan todos estos tipos, ilustrándonos la proyección de cada uno de ellos, tales como los identificados como p6, cmm, p1, p6m, p4gm, pmm, p3m1, p4.

Indubitablemente la proyección española titulada “Arabescos y Geometría”, que es una producción del CEMAV de la Universidad de Valencia, para el Departamento de Matemática, realizada en el año 1995, nos permite con ejemplos visuales concretos y precisos introducirnos en la geometría en general, en la geometría euclídea y en principios elementales del álgebra.

EDUCACIÓN VIRTUAL EN LA FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS[1]

Aldo Albarellos[2]

A partir del año 2010 la Facultad de Ciencias Económicas de la UBA ha decidido migrar su Programa de Educación a Distancia Semipresencial hacia la modalidad Virtual.

Existen numerosas y calificadas razones para hacerlo. Razones estratégicas y por supuesto beneficios para estudiantes y docentes. De todo ello hablaremos durante el encuentro.

Entendemos a la educación virtual como una filosofía y también como un conjunto de personas, conocimientos, metodologías, actuaciones, procesos, estructuras e instrumentos que, integrados dentro de un marco estratégico, permiten materializar dicha filosofía y hacerla realidad.

La filosofía constituye, básicamente, la orientación dirigida a democratizar el acceso a la educación de alta calidad desde el punto de vista de la superación de los limitantes tradicionales de tiempo y distancia, teniendo en cuenta primordialmente la socialización, el protagonismo y la personalización del estudiante y la adaptación, accesibilidad, distribución, actualización e intercambio de información, ideas, conocimientos y experiencias, como así también de la adquisición y construcción de conocimiento, habilidades y actitudes en forma compartida y colaborativa.

Para llevar a cabo su propósito la educación virtual integra estratégicamente los conocimientos y desarrollos que aportan las ciencias de la educación, las disciplinas vinculadas con la comunicación y la psicología, las tecnologías informáticas y de redes, las tecnologías de la telecomunicación, las plataformas de educación virtual y fundamentalmente las personas que trabajan en distintas funciones y que

[1] Resumen de la conferencia dada en el marco de la presente Jornada.

[2] Licenciado en Administración egresado de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires. Posee un posgrado en Docencia Universitaria de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires. Director del departamento de Educación Virtual y Tecnología Educativa y del Programa de Formación de Docentes en Entornos Virtuales de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires.

permiten plasmar la educación virtual como modelo único y no como derivación tecnológica de la educación presencial.

En cuanto a las personas, en particular nos referimos a los formadores y asesores de docentes y tutores virtuales, los docentes, los tutores, los investigadores y desarrolladores de nuevas estrategias pedagógicas adecuadas al entorno virtual, los diseñadores y desarrolladores de contenidos y de materiales, los investigadores, desarrolladores y adaptadores de nuevas tecnologías informáticas, redes y telecomunicaciones, los administradores de plataformas, los procesadores didácticos, los diseñadores formativos, los diseñadores gráficos y multimedia, los diseñadores y editores audiovisuales, los programadores, los administradores de los servidores informáticos, alojamientos (hosting), software y redes.

ASISTENTES VIRTUALES DE CLASE EN LA EDUCACIÓN UNIVERSITARIA

Mauricio Dorfman
Andrea Grondona
Néstor Mazza
Patricio Mazza

INTRODUCCIÓN

A efectos de facilitarle al lector la comprensión del trabajo, se incorporan conceptos generales sobre los AVC y particulares de "Ariel" (asistente utilizado en la experiencia), los cuales también pueden encontrarse en un trabajo previo de los mismos autores.

El lector ya familiarizado con los mismos puede obviarlos, continuando la lectura en "3.- Experiencia realizada en FCE-UBA, primer semestre 2011".

Las nuevas tecnologías de información y comunicación (NTIC) no resultan indiferentes para el proceso enseñanza-aprendizaje. Han generado impacto en las formas de comunicarse, compartir contenidos y también en el desarrollo de nuevos modelos de adquisición de conocimiento.

Las NTIC tienen un papel protagónico no sólo en el ámbito académico sino en todas las esferas de la sociedad. Por tal razón, su involucramiento en la educación permite no sólo mejorar la enseñanza sino también desarrollar en los alumnos habilidades de interacción virtual, muy requeridas en el ámbito profesional.

Sin embargo, el campo de la tecnología educativa no es sencillo. Los métodos como videoconferencia o aprendizaje por sí mismos, no han logrado la efectividad esperada; contado con limitaciones en la interactividad débil entre alumno, profesor y sistema (L. B. Sheremetov).

Que el docente explique un concepto podría no traducirse en que el alumno lo comprenda. La relación enseñanza-aprendizaje representa un desafío adicional en los procesos de educación virtual. El rol del docente se intensifica en cuanto a la necesidad de evaluar críticamente el valor agregado de la tecnología. Debe evitarse que una errónea utilización la vuelva contraproducente en los objetivos educacionales preestablecidos.

Sin pretender sustituir al docente humano, la inteligencia artificial (IA) está comenzando a ser utilizada en el proceso enseñanza-aprendizaje.

1.1 ¿Qué es un asistente virtual?

Un asistente virtual (también conocido como agente computacional inteligente, chatbot, chatterbot, bot o robot de charla) es un conjunto de programas informáticos capaces de interactuar con los seres humanos mediante el lenguaje natural, en lugar de una interfaz gráfica/GUI como Windows o una línea de comando al estilo DOS [8].

Basado en Inteligencia Artificial, un asistente virtual es capaz de simular una conversación inteligente por medio de texto y/o audio, emulando el diálogo que podría mantener el usuario con una persona real. Los agentes virtuales pueden tener distintas funcionalidades: un representante de atención a clientes, un especialista en un campo dado del conocimiento, etc.

El PNL (Procesamiento del Lenguaje Natural) es la rama de la Inteligencia Artificial que permite la interacción de los asistentes virtuales gracias a la comprensión sintáctica y semántica del idioma.

El agente pionero fue "Eliza", el cual era un sistema funcional en el ámbito de la psicología, creado en 1966 por el científico alemán Joseph Weizenbaum para que las personas dialogaran al igual que si lo hicieran con sus terapeutas.

En la actualidad se pueden encontrar asistentes conocedores de temáticas tales como música, artistas, sexo, psicología, cuentacuentos para niños, etc. También los hay de carácter general, es decir que no se especializan en ningún tema particular.

Muchos de los agentes se personalizan para darle una sensación humana a través de un nombre, una apariencia (mediante una imagen o un avatar animado), una nacionalidad, una fecha de cumpleaños, aficiones, etc.

1.2 Asistentes virtuales en el ámbito educativo

Un Asistente Virtual de Clase, AVC, puede emplearse a modo de complemento en el proceso enseñanza-aprendizaje. Con determinados contenidos y rutinas específicas, el AVC puede interactuar con los alumnos, brindar información, realizar tutorías, tomar exámenes, etc.

La interacción estudiante-AVC se realiza a través de un "chat". El AVC, ante la recepción de un estímulo, consulta en su base de conocimiento y brinda una contestación (la cual puede ser también del tipo: "No lo sé, lamento no poder ayudarte").

La tecnología de asistentes virtuales presenta distintos beneficios, entre los que podemos mencionar: su disponibilidad en cualquier momento y lugar (a través de acceso a Internet), la posibilidad de preguntar el mismo concepto tantas veces como el alumno necesite, la homogeneidad en las respuestas, la ausencia de fatiga o cambios de humor, etc.

Sin perjuicio de ello, esta tecnología resulta de aplicación incipiente y no se cuenta con estudios específicos que permitan cuantificar los beneficios intuitivamente existentes. Los resultados de cada experiencia supeditan su efectividad a la potencia/capacidad del cerebro artificial empleado y a las particularidades y regionalismos de cada idioma.

A priori, la utilización de los AVC en el ámbito educativo representa un beneficio claro vinculado a la navegación de manera no lineal del alumno en el descubrimiento de su conocimiento. De tal forma, se permite replantear el paradigma del aprendizaje por computadora de tipo secuencial.

Por otra parte, la utilización de una tecnología nueva le permite al alumno desarrollar habilidades prácticas, llegando a comprender las ventajas y limitaciones de esa nueva herramienta en uso (M. Stone Wiske).

Actualmente la proliferación de tecnologías colaborativas, promueven un aprendizaje de tipo cooperativo, facilitando la comprensión de tareas complejas y la categorización y memorización de conceptos. En tal sentido, se están empezando a utilizar sistemas multi-agentes, los cuales asumen distintos roles a fin de colaborar, co-existir, aprender del alumno o incluso competir con el mismo. Esto ha sido posible gracias al desarrollo en los últimos años de un subcampo de la IA, la Inteligencia Artificial Distribuida (IAD).

Algunas menciones de asistentes virtuales empleados con fines educativos:

- CHARLIE (ChatteR Learning Interface Entity) es un robot basado en tecnología AIML (Artificial Intelligence Markup Language) e incorporado a una plataforma de tele-educación llamada INES (Intelligent Educational System) de la Universidad de Vigo, España [9]. CHARLIE realiza las tareas de interfaz entre la plataforma y los estudiantes.

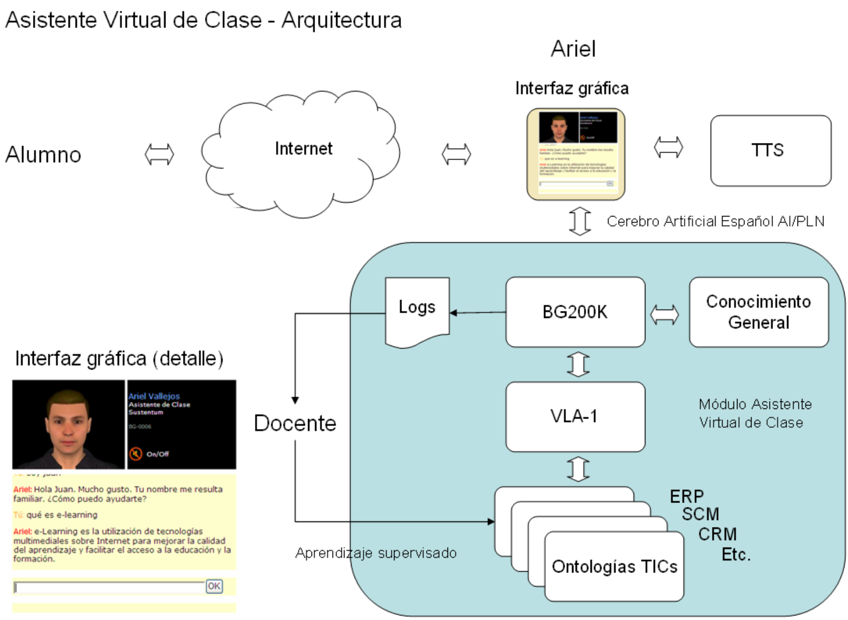
- GUIDON es un Sistema Tutor Inteligente (en inglés ITS, Intelligent Tutoring System), el cual fue construido sobre el sistema experto MYCIN, para el diagnóstico de enfermedades infecciosas. El sistema presenta un caso al estudiante de medicina, quien realiza preguntas y propone un diagnóstico. GUIDON interviene cuando el alumno solicita ayuda o cuando las acciones se desvían de las óptimas.

- EVA (Proyecto Espacios Virtuales de Aprendizaje) fue desarrollado en CIC-IPN (Centro de Investigación en Computación, Instituto Politécnico Nacional, México). Incluye un sistema multi-agente de aprendizaje donde los agentes pueden ser de distintos tipos: de búsqueda en Internet, de colaboración, asesor personal, evaluador o asistente personal.

- Freudbot, utilizado en cursos de psicología de Athabasca, Canadá. Es un asistente con la imagen y personalidad de Sigmund Freud.

1.3 Descripción de Ariel, el AVC utilizado en FCE-UBA

"Ariel" está compuesto por un "cerebro artificial" capaz de comprender el lenguaje Español, por un módulo específico para las tareas propias de un asistente de clase (explicación de conceptos, revisión, examen, etc.) y estructuras de conocimiento, ontologías, con los contenidos relacionados a TICs.



El cerebro artificial utilizado por Ariel es el BG200K de BotGenes que es posiblemente el más avanzado de su tipo en idioma Español. Esencialmente utiliza técnicas propias de PLN, Procesamiento del Lenguaje Natural, una rama de la Inteligencia Artificial, para interpretar la conversación resolviendo ambigüedades idiomáticas y contextualizando las respuestas. Posee más de 200.000 reglas de decisión y análisis que le permiten además manejar regionalismos, errores ortográficos y de tipeo.

Por otro lado, las rutinas propias de un Asistente de Clase están implementadas mediante el VLA-1 también de BotGenes, el cual ofrece la posibilidad de comentar los puntos salientes de un concepto dado, responder preguntas puntales tanto fuera como dentro del tema en curso, administrar un test verdadero falso, recibir sugerencias, etc. Los conocimientos propios de las TICs han sido almacenados en estructuras (ontologías) que las rutinas del VLA-1 pueden acceder.

Asimismo, el AVC utilizado ofrece la posibilidad de “encuestar” al alumno sobre su utilidad e incluso recabar sugerencias.

Al momento de realizar esta experiencia, Ariel conoce aproximadamente el 90% de los conocimientos asociados a la asignatura Administración de Recursos Informáticos, incluyendo temas de gestión: planificación, selección de aplicaciones, uso estratégico de las TICs, etc.; y más de 500 acrónimos propios de las TICs.

Ariel adicionalmente tiene un módulo de síntesis de voz y sincronización dinámica con un avatar que lo representa.

Se accede a Ariel desde las siguientes URLs:

“http://www.sustentum.com/sustentum/ariel.asp” o
”http://www.asistentedeclase.com.ar”

2. EXPERIENCIA REALIZADA EN FCE-UBA, PRIMER SEMESTRE 2011

Durante los meses de marzo y abril de 2011 se invitó a los alumnos de Administración de Recursos Informáticos a utilizar el AVC “Ariel” como elemento adicional en la preparación del examen parcial.

Los alumnos utilizaron el AVC fuera de la Universidad, sirviéndose de sus contenidos para facilitar el estudio de la materia a modo de complemento de las clases presenciales. Incluso han podido evaluar sus propios conocimientos a través de un breve examen de tipo Verdadero o Falso, que Ariel facilita sobre cada tema (en el Apéndice A del presente, puede encontrarse un ejemplo de conversación con Ariel).

Al finalizar el examen presencial de la materia, se administró una encuesta anónima tendiente a recoger información sobre la experiencia, obteniéndose 36 respuestas.

2.1 Características muestrales

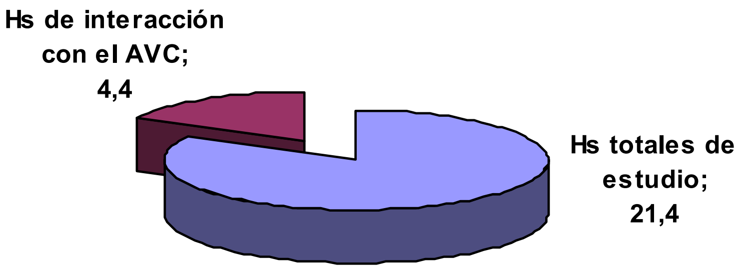
- Participaron 36 alumnos.
- Varones 75%.
- La edad promedio es de 26,4 años.

- El 8% ya son graduados de otras carreras.
- En el 97% de los casos no habían tenido experiencia previa de interacción con un Agente Virtual.

- El 58% pertenece a la carrera de Administración (mayoritariamente) y/o Contador; el 42% restante corresponde a la carrera de Sistemas de Información.

2.2 Resultados

- Uso del AVC: los alumnos utilizaron el AVC 4,4 horas en promedio; habiendo 3 casos donde el uso superó las 8 horas, y representando un 20,6% del total del tiempo dedicado a la preparación de la materia.



Las horas dedicadas a preparar el examen y las horas de uso del AVC no muestran un patrón claro y podrían indicar que el AVC fue utilizado con diferente propósito por parte de los alumnos.

Por otro lado (véase Tabla 1), y como podría anticiparse, existe una marcada correlación (r= 0,77), entre las horas dedicadas a preparar la materia y la calificación esperada. Y si bien también podía preverse correlación entre las horas dedicadas a preparar la materia utilizando el AVC y la calificación esperada, sorprende positivamente el alto grado de la misma: r = 0,98. Posiblemente la práctica con el AVC le haya provisto a los alumnos de mayor seguridad a la hora de enfrentar el examen.

Tabla 1

Calificación esperada	Número de casos	Promedio Hs AVC	Promedio Hs estudio (total)
2	1	1,0	5,0
4	5	2,4	11,8
5	4	2,3	22,3
6	15	3,8	17,4
7	5	4,6	41,2
8	4	6,3	13,5
10	1	7,0	50,0
	r =	0,98	0,77

Nota: se ha excluido un caso. Un alumno indicaba una calificación esperada de 9, y 24 horas de uso del AVC, situación que además de ser significativamente distinta al promedio de 4,4, no pudo ser verificada en los logs.

Por otro lado, la correlación entre la proporción de hs. de estudio utilizando el AVC y el total de horas dedicadas (que varía entre 0,1 y 0,47) y la calificación esperada es muy débil: 0,15.

Esto reafirma el hecho de que la expectativa de obtener una mejor calificación está asociada al uso, en términos absolutos, del AVC. La influencia del AVC en las expectativas de obtener una buena calificación también se confirma analizando las horas de utilización del AVC en dos grupos: a.- de una a tres horas, b.- más de tres horas [10].

Tabla 2

Hr. de uso	n	$\overline{X}_n$	S_{n-1}
1-3	23	5,48	1,41
>3	13	7,08	1,32

Donde:

S_{n-1} es la desviación estándar muestral insesgada o cuasivarianza (calculada sobre n-1)

$$t = \frac{|\overline{X}_1 - \overline{X}_2|}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = 3,41$$

Con un nivel de confianza incluso del 99% (t_o = 2,73) puede afirmarse que la diferencia observada no es de naturaleza aleatoria, sino que está asociada a la variación de la variable X, el uso del AVC, ($t > t_o$ o 3,41 > 2,73).

Consideraciones adicionales:

Cabe señalar que las encuestas fueron anónimas para evitar condicionar las opiniones, situación que imposibilita correlacionar el uso del AVC con el desempeño real del alumno.

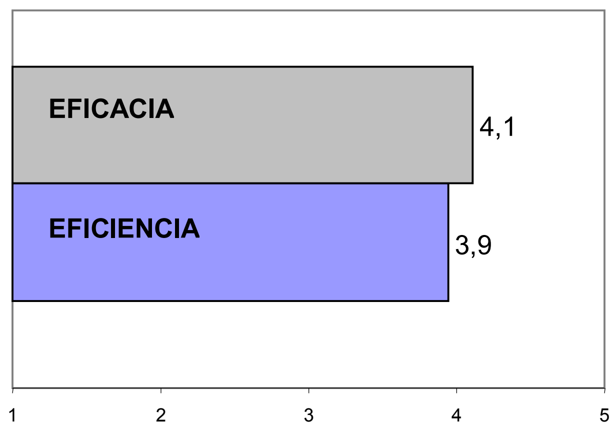
- Más temas vs. Profundidad a existentes: el 58% prefiere que el AVC incorpore nuevos temas de conocimiento antes que profundizar los que ya posee.

Con un nivel de confianza del 95%, el error de estima es de 0,14 mayor a los 0,08 (0,58 - 0,5), indicando que la diferencia observada no ofrece significación estadística.

$$e = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 0{,}14 > 0{,}08$$

- Percepción de Eficacia y Eficiencia: en una escala de 1 a 5, siendo 1 la peor y 5 la mejor, los alumnos calificaron con un promedio de 4,11 a la utilidad del AVC para comprender mejor los conceptos ya aprendidos (eficacia), mientras que obtuvo un 3,94 promedio la facilidad de estudiar con mayor rapidez gracias la disponibilidad del asistente (eficiencia).

Contribución/valor percibido por el alumno



El análisis de significación confirma que la diferencia observada entre las medias no es estadísticamente significativa. Con un nivel de confianza del 95 % y N = 36, la función *t* de Student indica un t_o = 2,34 > 1,26; resultado de la distribución de las diferencias de las opiniones.

$$t = \frac{|\overline{X}_D|}{\sqrt{\frac{S_D{}^2}{n}}} = 1.26$$

Donde:

$\overline{X}_D$ = 0,17 media de las diferencias;

$S_D{}^2$ = 0,66 varianza insesgada (n-1) de las diferencias;

n = 36 número de encuestados.

- Género del AVC: los alumnos en su conjunto manifestaron indiferencia respecto del género del AVC (50% por cada alternativa). Sin embargo, los varones dijeron preferir un asistente mujer en un 63 %, mientras que las mujeres prefirieron un AVC varón en un 89%.

	Género del Alumno		
Género del AVC	V	M	Totales
V	10	8	18
M	17	1	18
	27	9	36

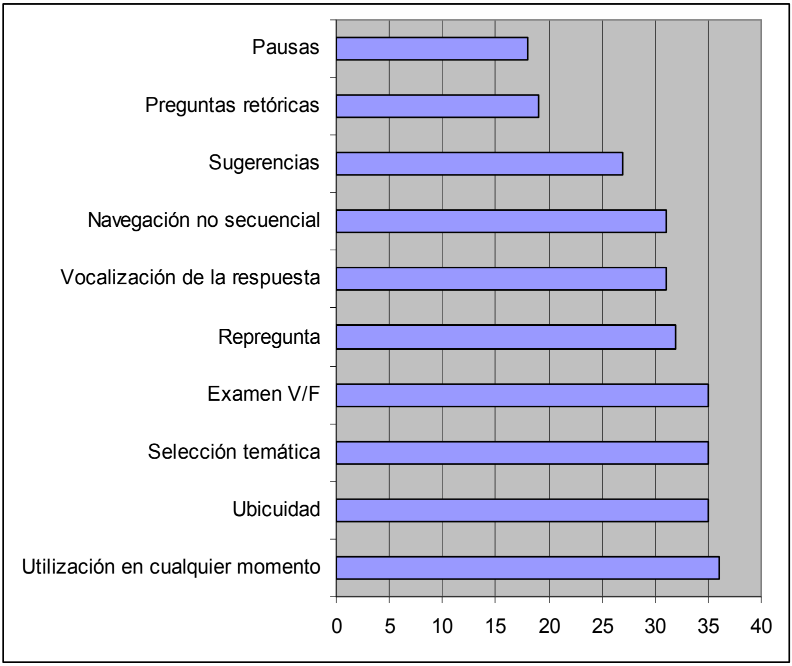
La leve preferencia masculina relevada, es estadísticamente significativa con un nivel de confianza del 95%.

$$e = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 0{,}14 > 0{,}63 - 0{,}5$$

Este resultado parecería sugerir que un Asistente Virtual de Clase de género opuesto al alumno podría ser más efectivo en el proceso de enseñaza-aprendizaje, al menos para la temática tratada: gestión de TICs.

Nota: los alumnos sólo experimentaron con un AVC masculino.

- Valoración de atributos: Se les solicitó a los alumnos que indicaran si valoran diez atributos propios de los AVCs. La posibilidad de seleccionar el tema, realizar un examen de tipo V/F, la disponibilidad 7x24 y la ubicuidad fueron los atributos más valorados.



- AVC en otras materias: A la totalidad de los alumnos les gustaría que existieran Asistentes Virtuales para otras asignaturas.
- Diferencias por género: con un nivel de confianza del 95% ($t_o = 2,35$) no se han observado diferencias estadísticamente significativas *por género* en la percepción de la mejora de la eficiencia ni en la eficacia.

Eficacia

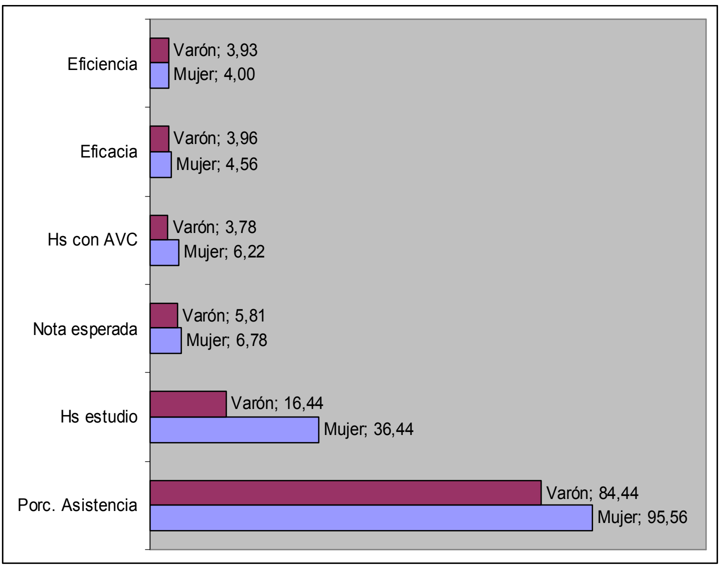
	n	$\overline{X}_n$	S_{n-1}
M	9	4,56	0,73
V	27	3,96	0,76

$$t = \frac{|\overline{X}_1 - \overline{X}_2|}{\sqrt{\frac{S_1^{\,2}}{n_1} + \frac{S_2^{\,2}}{n_2}}} = 2{,}11$$

Eficiencia

	n	$\overline{X}_n$	S_{n-1}
M	9	4,00	0,87
V	27	3,93	1,04

$$t = \frac{|\overline{X}_1 - \overline{X}_2|}{\sqrt{\frac{S_1^{\,2}}{n_1} + \frac{S_2^{\,2}}{n_2}}} = 0{,}20$$



En líneas generales se observa que las mujeres asistieron más a clase, dedicaron mayor tiempo al estudio de la materia y a la interacción con el AVC, además de esperar una mayor calificación en el examen.

Nota: No se han observado diferencias estadísticamente significativas en la medición de estas variables respecto de la carrera que están estudiando los alumnos (Administración/Contador o Sistemas).

Comentarios: a continuación transcribimos algunos comentarios adicionales escritos por alumnos en las encuestas y que, a nuestro juicio, merecen destacarse:

- *"El Asistente me fue de mucha ayuda para el estudio complementario. Luego de haber leído todos los textos, decidí realizar consultas con el AVC y que me tomara exámenes y creo haber obtenido un buen resultado. […]"*
- *"Nunca lo había utilizado anteriormente y me parece buenísimo para hacer más ameno el estudio, sobre todo cuando es escaso el tiempo para hacerlo."*
- *"Es la primera vez que cuento con una herramienta de este tipo en la Facultad y la verdad que me pareció muy útil, y al ser en formato de chat, permite que lo incorpores como si de verdad estuvieras aprendiendo de una conversación con alguien."*
- *"Es la herramienta de estudio, consulta y autoevaluación más completa que he utilizado hasta el momento."*
- *"Me gustaría que fuese más didáctica la explicación, o en el caso de que un V o F, si respondo mal, que me diga por qué."*
- *"Fue de mucha ayuda contar con el AVC, para poder hacer un repaso rápido de los contenidos de la materia y a su vez contar con la posibilidad de ser evaluado para saber si falta profundizar algún tema determinado."*
- *"Con la opción de sonido podía escucharlo mientras trabajaba o realizaba otras actividades."*
- *"Las pausas que hace para distender y hacer comentarios fuera de los temas de estudio me parecieron muy divertidas y me relajaban para seguir con el estudio."*

- *"En cuanto a mi experiencia con Ariel me ha sido de gran utilidad para fijar los temas, recordar detalles y capturar cosas que quizás pase por alto. Ha sido una experiencia interesante y me gustaría que se utilizara en otras materias."*

3. ASISTENTES VIRTUALES EN MATEMÁTICAS

La tecnología no ha estado ausente como mediadora de contenidos [6] en el campo de las matemáticas. Posiblemente el proyecto Mathletics, destinado a niños de 5 a 14 años, sea uno de los más representativos de dicha presencia.

Por otro lado, los AVC han sido, particularmente en la década pasada, usados también dentro del campo de las matemáticas, habiendo varios de ellos aún activos:

- MathBot http://nlp-addiction.com/chatbot/mathbot/
- Skynet http://home.comcast.net/~chatterbot/bots/AI/Skynet/
- math@bot.im http://wg.vinayraikar.com/apps/math/
- Suuga http://machekku.uaznia.net/xmpp/suuga/
- Sofia http://www.math.harvard.edu/~knill/sofia/

En la mayoría de los casos, el desarrollo del "bot" ha sido asociado a la interpretación de fórmulas y su cálculo. Esta tarea no es menor dado que las tecnologías involucradas se orientan al procesamiento del lenguaje natural y no a la evaluación de expresiones algebraicas.

Algunos, como MathBot, son básicos y sin capacidad de interpretar los símbolos de las operaciones elementales como "+"; otros como Skynet sí interpreta operadores; mientras que otros como math@bot.im que dicen resolver (no verificado) expresiones como: *"sin(deg2rad(1.2))-tan(30)-exp(1.1)*2/pow(7,1.1)-fact(2)"*.

Con un alcance mucho más amplio, en el año 2003 y conducidos por Oliver Knill, un grupo de la universidad de Harvard, desarrolló "Sofia", con conocimientos sobre cálculo estadístico, funciones, teoría de números, cálculo, teoremas, etc.; e interfaz con sistemas CAS, computer algebra Systems, como Pari or Mathematica, lo cual le ofrece una excelente capacidad para interpretar expresiones y realizar cálculos.

Sofia, recibió dicho nombre en honor a Sofia Kovalevskaya (1850-1891) quién se destacó por sus trabajos en ecuaciones diferenciales, Integrales Abelianas, entre otros.

Más recientemente, en mayo del 2009, Stephen Wolfram anunció un "motor computacional" de respuestas a preguntas formuladas en lenguaje natural: Wolfram Alpha, http://www.wolframalpha.com/.

Dicho desarrollo combina la capacidad de interpretar el lenguaje natural, la de realizar cálculos complejos y la de presentar información gráfica de un sinnúmero de temáticas.

Ariel, el AVC de nuestra experiencia y cuyo propósito es asistir en la capacitación de la Gestión de las Tecnologías de Información y Comunicaciones, también puede realizar cálculos elementales y razonamientos lógicos; y conoce particularmente algunos aspectos sobre la función Z de Riemann (véase ejemplo de diálogo en el apéndice 1).

4. CONCLUSIONES

La experiencia realizada confirma, una vez más, el potencial de los AVC en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Si bien la comprensión plena de la interacción de los alumnos con el AVC, y el valor real de este último, no pueden concluirse categóricamente, los resultados sí han mostrado una valoración muy favorable por parte de los alumnos. En particular, la alta correlación observada entre el uso del AVC y la expectativa sobre la calificación a obtener, parecería indicar una influencia positiva en la seguridad con que el alumno encara el examen.

Por otro lado, el nivel de madurez alcanzado por el Asistente Virtual utilizado sugiere una clara oportunidad de aplicación inmediata en otros entornos (contenidos, modalidades educativas, etc.).

En particular, la inexistencia de un Asistente Virtual con capacidad para interpretar fórmulas y resolverlas; conocimientos específicos en matemáticas (no sólo capacidad de cálculo); e interacción en idioma español; ofrece un desafío específico y de alto potencial dada la vasta población de estudiantes que cursan matemáticas (en sus diferentes ramas: Álgebra, Análisis, Estadística, etc.) como parte de su formación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bayan Abu Shawar, Eric Atwell. Chatbots: Are they Really Useful? LDV-Forum 2007 – Band 22 (1) – 29-49. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.106.1099&rep=rep1&type=pdf

Dorfman, M.; Grondona, A.; Mazza N. "Asistentes Virtuales de Clase". Trabajo presentado en UBA Sep Jornada Académica Anual del Departamento de Sistemas. Buenos Aires, septiembre de 2010.

Guzman, A.; Núñez, G.; Sheremetov, L. (1999): Tecnologías de Inteligencia Artificial y de agentes computacionales en la educación: el Proyecto EVA. Academia, año 4, No. 24 Centro de Investigación en Computación, IPN. http://copernico.mty.itesm.mx/bibliotecas/REDII/cic/tmp/CIC2000453.pdf

Heller, B.; Procter, M.; Mah, D.; Jewell, L.; Cheung, B. (n.d.) "Freudbot, An Investigation of Chatbot Technology in Distance Education". Centre for Psychology, Athabasca University. http://psych.athabascau.ca/html/chatterbot/ChatAgent-content/EdMediaFreudbotFinal.pdf

Knill, Oliver Sofia Project. http://www.math.harvard.edu/~knill/sofia/

Lion, C. (n.d.) Tecnologías y enseñanza en el nivel superior: el conocimiento mediado tecnológicamente. Facultad de Filosofía y Letras, Universidad de Buenos Aires. http://conedsup.unsl.edu.ar/Download_trabajos/Trabajos/Eje_6_Procesos_Formac_Grado_PostG_Distancia/Lion_Carina.PDF

Malagón, C.; Vinagre, M.; Pancorbo, J.(n.d.) Introducing chatbots and cooperative multi-user text editors to support collaborative learning. Antonio de Nebrija University, Madrid, Spain. http://www.nebrija.es/~cmalagon/research/malagon-vinagre-pancorbo_abs1327.pdf

Mazza, N. (1999): Hacia el fin de la metáfora. La Gaceta electrónica. FCE-Universidad de Buenos Aires.

http://web.econ.uba.ar/WAppFCE01/SendImageJPA01?Function=getFilexPOID&filePOID=1368

Mikic Fonte, F.; Llamas Nistal, M.; Burguillo Rial, J.; Fernández Hermida, D. (2009): CHARLIE: Un robot conversacional como interfaz de una plataforma de tele-educación. Departamento de Ingeniería Telemática E.T.S.I. Telecomunicación, Universidad de Vigo, Vigo, España.
http://remo.det.uvigo.es/solite/attachments/037_Cita2009%20art%20uvigo2%20solite.pdf

Morales Vallejo, P. (2007): El contraste de medias (4.6.3. Diferencia entre medias de muestras relacionadas, P. 19). Universidad Pontificia Comillas, Madrid, Facultad de Ciencias Humanas y Sociales.
http://www.upcomillas.es/personal/peter/estadisticabasica/ContrasteDeMedias.pdf

Knill, O.; Carlsson, J.; Chi, A.; Lezama, M.: An artificial intelligence experiment in college math education. 11/17/2003, latest edit: 4/19/2004.
http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.118.5672&rep=rep1&type=pdf

Salinas, J. (2004): Innovación docente y uso de las TIC en la enseñanza universitaria. Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento (RUSC). UOC. Vol. 1, no 1.
http://www.uoc.edu/rusc/dt/esp/salinas1104.pdf

Stone Wiske, M.; Rennebohm Franz, K.; Breit, L.(2006): *Enseñar para la Comprensión con nuevas tecnologías*. Argentina: Ed.Paidós (p.53).

Villareal Farah, G. (n.d.): Agentes Inteligentes en Educación. Centro Comenius Universidad de Santiago de Chile.
http://edutec.rediris.es/Revelec2/revelec16/villarreal.pdf

APÉNDICE 1 (Ejemplo de interacción con el AVC Ariel)

Ariel: Hola. ¿Quién eres?

Tú: hola Ariel, yo soy juan

Ariel: Hola Juan. Mucho gusto. Tu nombre me resulta familiar. ¿Cómo puedo ayudarte?

Tú: querría saber que es la función zeta

Ariel: La función Zeta de Riemann se define como zeta(s)=1+1/2^s+1/3^s+... donde s es complejo y Re(s)>1.

Tú: bien, y cuáles son los ceros

Ariel: La función Z se anula para valores pares negativos de s, los ceros triviales, y para valores de s donde 0 < Re(s) < 1. Según la hipótesis de Riemann los ceros su ubican en la recta Re(s)=1/2.

Tú: qué es la hipótesis de Riemann?

Ariel: La hipótesis de Riemann, considerado uno de los mayores problemas matemáticos abiertos en la actualidad, asegura que cualquier cero no trivial tiene Re(s)=1/2, por lo tanto, todos los ceros están alineados en el plano complejo formando una recta, llamada recta crítica.

Tú: cuáles son las discontinuidades

Ariel: La función Z presenta un punto de singularidad en S=1.

Tú: para qué se utiliza la función zeta

Ariel: Por ejemplo, el estudio de la distribución de los "ceros no triviales" tiene profundas implicaciones en la distribución de los números primos y en otras cuestiones relacionadas con la teoría de números.

Tú: hablando de zeta, sabes quién es zeta Jones

Ariel: Ah, sí. He visto varias de las películas de Zeta Jones.

Tú: como cual

Ariel: Por ejemplo "La terminal."

Tú: muchas gracias

Ariel: De nada.

Tú: me podes decir qué es un estimador consistente?

Ariel: En estadística, un estimador es considerado consistente cuando sus valores se acercan cada vez más del valor del parámetro, según el tamaño de la muestra aumenta.

Tú: por ejemplo cual?

Ariel: Por ejemplo, la media empírica de una muestra $\bar{Y} = (Y1+...+Yn)/n$ es un estimador consistente de la esperanza $E(Y)$.

Tú: ah

Ariel: Creí que lo sabías...

Tú: no me tomas un examen de elearning?

Ariel: ¡Con mucho gusto! Por favor responde "V" o "F", según sea verdadera o falsa la siguiente afirmación. Veamos esta... e-Learning es la utilización de aulas virtuales para mejorar la calidad del aprendizaje y facilitar el acceso a la educación y la formación.

Tú: v

Ariel: Correcto. Veamos esta... Los sistemas de e-Learning son gratuitos y accesibles por todos.

Tú: f

Ariel: Correcto. Veamos esta... Si bien las organizaciones pueden desplegar sus propias plataformas de e-Learning, es común recurrir a organizaciones que ya posean dicha infraestructura.

Tú: v

Ariel: Correcto. Veamos... Algunos productos de e-Learning son ACME e-Learning, Kallidus Compose, Moodle, Claronine, SCORM e-Learning, etc.

Tú: f

Ariel: Lo lamento. No es correcto. Tú... Realmente muy bien. Contestaste el 75 % de las preguntas en forma correcta.

Tú: ¿tu sabes hacer cálculos?

Ariel: ¿Yo? Las matemáticas no son mi especialidad, pero adelante. Si puedo ayudarte...

Tú: calcula 23456 por 11

Ariel: Creo que es 258016.

Tú: y cual es la raiz de 256

Ariel: Veamos... La raíz es 16.0.

Tú: interesante. dime ¿tú puedes razonar?

Ariel: ¿Yo? Desde luego. ¿Te gusta la lógica?

Tú: a ver... los números primos son impares

Ariel: OK. Muy bien. ¿Y qué más puedes decir en relación a "números primos" o "impares"?

Tú: los impares son enteros

Ariel: OK. Todos los números primos son enteros entonces.

Tú: muchas gracias por tu ayuda. Adios

Ariel: OK. Disculpa. ¿Podría preguntarte cuán efectiva fue mi ayuda hoy? Por favor califícala en una escala de 1 a 5, siendo 5: muy buena y 1: muy mala. Gracias desde ya por participar de esta encuesta.

Tú: 5

Ariel: Me gustaría poder mejorar. ¿Hay alguna sugerencia que quieras hacerme?

Tú: me gustaría que supieras sobre variable compleja

Ariel: Muchas gracias. Hasta pronto.

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL DICTADO DE UNA INTRODUCCIÓN A LA OPTIMIZACIÓN NO LINEAL EN GRADO

Marco Bellocchio
Martín Masci
Javier García Fronti

INTRODUCCIÓN

Las problemáticas relacionadas con optimizaciones matemáticas son muy recurrentes en el estudio de las ciencias económicas. La idea de construir una relación entre elementos de la naturaleza y buscar la mejor decisión, a sabiendas de que el mundo posee restricciones relacionadas con la escasez, plantea un objetivo que puede ser traducido al lenguaje matemático y de esta manera otorgarle al desarrollo deductivo validez lógica. Por ende, resulta relevante para la formación de grado de futuros profesionales, trasmitir conocimientos que le otorguen las herramientas adecuadas que les permitan enfrentarse con éxito a dicho tipo de problemáticas. El rol del docente en Matemática para Economistas debe cumplir con esta meta. El hecho de tratar particularmente distinto el manejo de las restricciones, otorga al problema de optimización una sofisticación esencial. El tema que se desarrolla en el presente trabajo tiene como motivación lo antes mencionado, buscando una interpretación didáctica del tema que mejor sintetiza a la sofisticación referenciada: problemas de optimización no-lineal con restricciones que admiten desigualdad, bajo la perspectiva de *Kuhn-Tucker*.

Los ejercicios de programación, con las características antes expuestas son tan importantes como complejos de enseñar. La razón principal radica en que conllevan varios temas de matemática y álgebra superior, lo cual requiere de una base de contenidos previos lo suficientemente desarrollada. Dado el esquema de materias de grado, el contenido de esas cuestiones puede ser diverso y causar heterogeneidad en los conocimientos y formas de abordar los distintos temas en un curso de matemática para economistas. En la sección 2, se analizan con mayor detalle estas consideraciones.

Desde nuestra visión particular, encontrar un algoritmo que permita resolver los problemas citados, puede permitir al docente sobrellevar satisfactoriamente el camino que desea recorrer en el ámbito de enseñanza-aprendizaje. Para ello es necesario consultar la bibliografía específica de los temas relevantes y buscar las distintas visiones que puedan contribuir a la didáctica deseada. De este asunto trata la sección 3, del presente trabajo.

Las secciones 4 y 5, se centran en nuestro aporte hacia la búsqueda de un esquema tipo diagrama de flujo, donde se exprese en forma didáctica el proceso de clasificación y resolución de problemas de optimización matemática. Encontrar un proceso, permite al alumno/a ordenar las etapas de resolución y análisis de cualquier ejercicio de este tipo, para conseguir en forma eficaz y exitosa la respuesta del problema. Es por ello que se incluyen en el presente trabajo, tanto el diagrama en su versión genérica como un ejemplo de aplicación del mismo.

Finalmente es importante recopilar todo lo desarrollado y analizar las conclusiones que se desprenden, para verificar potencialidad del esquema planteado y su vinculación con la problemática descripta. Asimismo, es trascendental considerar la posibilidad de abrir las puertas a nuevas investigaciones que amplíen los horizontes del conocimiento y para ello valerse de las nuevas tecnologías informáticas y sus progresos, puede resultar de suma significatividad. La sección 6 aborda estas conclusiones.

"El secreto de la educación es enseñar a la gente de tal manera que no se den cuenta de que están aprendiendo hasta que es demasiado tarde" (Harold E. Edgerton, ingeniero y profesor estadounidense).

1. DIFICULTADES Y MOTIVACIONES

El alumnado de un curso de matemática para economistas, se enfrenta a distintas dificultades que resultan interesantes de analizar desde una perspectiva docente cuando se intenta desarrollar un tema novedoso. En particular, de acuerdo al diagrama de materias de grado, los alumnos llegan a la materia con conocimientos básicos de álgebra lineal y resoluciones matemáticas relativamente elementales, siendo que el campo de aplicaciones se reduce a problemas básicos. La primera dificultad es implementar la noción de un espacio n-dimensional. La característica sobresaliente, en la mayoría de los cursos, es la heterogeneidad de posibilidades y conocimientos dado un número grande de alumnos/as.

Los problemas de optimización matemática son recurrentes en los cursos antecesores, pero ¿cómo hacer para homogeneizar conceptos de resolución, para luego sofisticar el problema? El alumno/a que transitó por materias de análisis matemático, opera mecánicamente sobre cualquier problema que implica la optimización de una función objetivo, sujeta a restricciones que vienen dadas como ecuaciones. El procedimiento clásico implica construir una función de *Lagrange*, asociada al caso, para luego confeccionar un sistema de ecuaciones que son las derivadas parciales de dicha función respecto de las variables y los multiplicadores. La resolución del sistema otorga (o no) puntos críticos, que pueden ser extremos relativos. Estas condiciones de primer orden son necesarias, pero no suficientes. El/la alumno/a promedio trabaja con esas operaciones aritméticas sin mayores dificultades.

El problema de optimizaciones no-lineales con restricciones que admiten desigualdad (inecuaciones), trae aparejado un conjunto de dificultades que pueden confundir fácilmente al alumno/a. Principalmente provienen de ciertos conocimientos que no fueron anticipados en los cursos anteriores, como por ejemplo, el concepto de "necesaria vs. suficiente" en las condiciones de resolución, como así también conceptos de análisis topológico, que resultan importantes para las condiciones de *Kuhn-Tucker*. La motivación principal, a nuestro entender, pasa por poder transmitir de manera robusta la resolución de ejercicios más complejos (partiendo de la no-linealidad) y con la posibilidad de operar con restricciones que se saturen o relajen, buscando así candidatos a óptimo que con el caso clásico no se encuentran. El hecho novedoso de "jugar" con las funciones restricción, le imprime al problema una sensación de caos, que intentamos contrarrestar con algún algoritmo que permita ordenar y proceder en forma sistemática, como lo hacen con los casos de optimización clásica.

Nos parece relevante mencionar que a los fines didácticos puede resultar útil que el alumnado resuelva mediante un algoritmo, pero creemos importante que en el proceso de aprendizaje un/a alumno/a se enfrente a la bibliografía específica y construya sus inquietudes al respecto. De este tema haremos un mayor análisis en el apartado siguiente.

Dado que se estudian casos de aplicación de situaciones económicas, resulta fundamental que el tema de optimizaciones con restricciones de desigualdad se dicte en los cursos de grado de matemática para economistas. Es una herramienta que a los futuros profesionales puede resultar muy útil, dado que otorga pertenencia empírica, si es aplicado en un modelo teórico. Adicionalmente permite un análisis mucho más complejo, puesto que no admite restricción alguna de cantidad de variables y/o funciones restricción. En las materias sucesoras se utiliza con frecuencia y permite resolver tanto, problemas micro como macroeconómicos. Si se logra un aprendizaje robusto, también implica nociones de análisis topológico, que resulta particularmente útil para la comprensión de cuestiones relacionadas con equilibrio y estabilidad de sistemas.

2. DISTINTAS VISIONES DE UNA MISMA PROBLEMÁTICA

El tema en cuestión no presenta bibliografía específica muy vasta. En la mayoría de los casos se presenta el tema con supuestos de que el lector posee la competencia necesaria para comprender el procedimiento resolutivo. A los fines de la presentación para un curso de grado resulta complicado elegir un solo manual que sintetice desde los conceptos más básicos a los más complejos. Es por esto que para el desarrollo didáctico del tema se tienen que utilizar varias fuentes bibliográficas y el/la alumno/a tiene que hacer el esfuerzo de extraer conceptos de cada una en general y de ninguna en particular.

A continuación se presentan tres fuentes bibliográficas, que a nuestro entender son las que sintetizan mejor las ideas que se intentan transmitir y en cada caso haremos mención de sus aportes específicos.

2.1 *Matemática para Economistas con Excel y Matlab*, de Bernardello A. y otros
Capítulo 2, apartado 3

En este libro confeccionado para las cátedras de matemática para economistas se identifican con claridad las cuestiones que hacen a la necesidad y suficiencia de las condiciones. Presenta de manera muy esquemática el procedimiento por el cual se pueden identificar las condiciones, con lenguaje matemático comprensible. Se basa en problemas simples, pero aumenta progresivamente la complejidad, de manera que no perturba al lector; en forma simultánea muestra aplicaciones económicas interesantes y motivadoras.

Resulta particularmente útil el orden con el cual están expresados los conceptos, dando una idea de procedimiento, que es lo que en definitiva buscamos como algoritmo. Muestra con rigurosidad las características que debe poseer un problema para ser resuelto mediante la mecánica de *Kuhn-Tucker*, es decir, muestra la cualificación de restricciones, las condiciones necesarias de primer orden y las suficientes mediante la aplicación del teorema de Arrow-Enthoven. Por simplicidad analiza un caso relevante que tiene que ver con programación cuasi-cóncava, entendiendo que una vez que se domine esa rama de programación, se pueden hacer las transformaciones necesarias para problemas de otro tipo. Es decir, si el/la alumno/a puede resolver un caso de maximización, puede hacerlo para otro de minimización, por ejemplo.

2.2 *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*, de Chiang A. y Wainwright K.
Capítulo 13

Comparativamente al caso anterior, el nivel de complejidad en la exposición de los temas relevantes del caso, es mucho mayor. Quizá excede al nivel que se exige para cursos de grado. Las características relevantes del capítulo específico de optimizaciones expone temas adicionales, es decir, que los autores reconocen en el tema una sofisticación particular. El modo en que organiza los temas es inherente al abordaje complejo que intenta desarrollar, de manera que resulta un texto de gran riqueza académica, pero que puede originar ciertas dificultades en lo que a didáctica refiere.

Se presentan de manera completa y robusta todos los temas necesarios y suficientes para la resolución de cualquier problema en todas las posibilidades de programación matemática. Este hecho, nuevamente quizá resulte demasiado detallado para un/a estudiante de grado. Una observación destacable es el hecho de que se exponen interpretaciones de las condiciones de *Kuhn-Tucker*, lo cual implica relajar el procedimiento de resolución para mostrar implicancias y ventajas del proceso, dejando lo puramente abstracto de lado.

A los fines del estudio económico, al igual que el caso anterior, posee aplicaciones económicas desarrolladas y ejemplos resueltos. Adicionalmente expone una serie de teoremas, que resultan interesantes en las aplicaciones antes mencionadas.

2.3 *Further Mathematics for Economic Analysis*, de Synsæter K. y otros

Capítulo 3, apartados 5 y 6

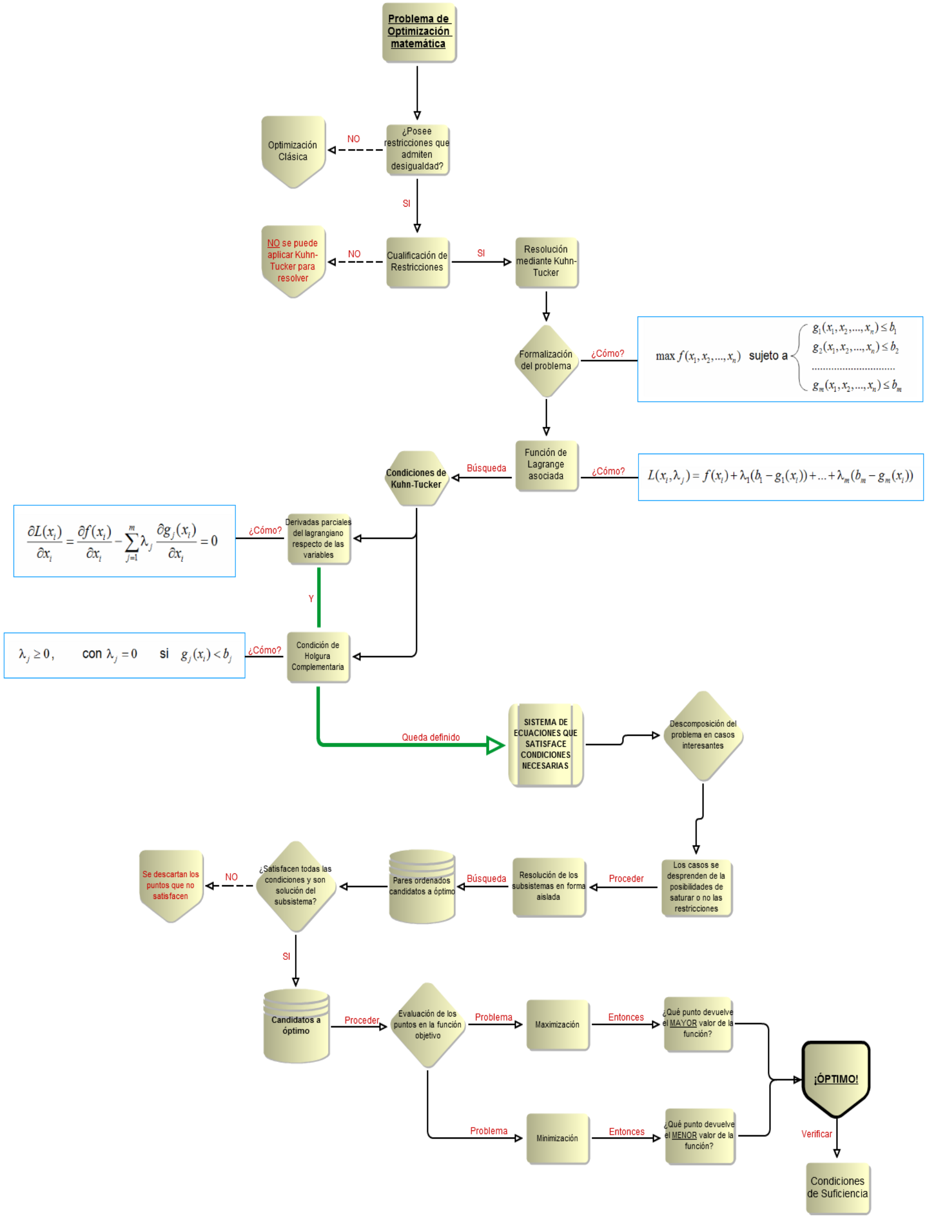
En esta fuente bibliográfica se encuentra, a nuestro entender, la perfecta armonía entre complejidad y procedimiento didáctico. Posee una claridad, en la forma y contenido del tema, sobresaliente. Presenta de manera distinta a las fuentes antes citadas, tanto las condiciones necesarias como las suficientes. Las muestra de manera concisa, pero sin olvidar que el lector puede no manejar ciertos conceptos, por lo que se dedica a exponer criterios básicos, sin descuidar la complejidad del tema.

A los fines del presente trabajo, es importante destacar que se puede esbozar un intento por conciliar un algoritmo de resolución, mediante un método sistemático, pero sin violar ningún principio matemático. Adicionalmente, presenta gran cantidad y variedad de ejemplos, desde los más abstractos a los de mayor pertinencia en lo que a economía respecta. Como se explicó al principio del apartado, el estudiante debería enfrentarse a los textos y extraer de cada uno los aspectos que más contribuyan a entender la problemática.

Sin embrago, consideramos que se puede hacer una síntesis desde la perspectiva docente, tomando la iniciativa del capítulo del presente apartado, y generando un algoritmo de resolución para cualquier problema de optimización matemática. Dicho método se intentará exponer en un esquema didáctico, en el próximo apartado.

3. ALGORITMO DIDÁCTICO

En el presente apartado, nos proponemos presentar un esquema didáctico que permita la resolución sistemática de los problemas mencionados. Una vez presentado, se expone una breve descripción de los aspectos relevantes del diagrama y la utilidad del mismo para el docente que desarrolla el tema, como así también el alcance que puede tener en el alumnado. El esquema es el siguiente:


Problema de Optimización matemática
¿Posee restricciones que admiten desigualdad?
NO
Optimización Clásica
SI
Cualificación de Restricciones
NO
NO se puede aplicar Kuhn-Tucker para resolver
SI
Resolución mediante Kuhn-Tucker
Formalización del problema
¿Cómo?
$\max f(x_1, x_2, ..., x_n)$ sujeto a $\begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_1 \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_m \end{cases}$
Función de Lagrange asociada
¿Cómo?
$L(x_i, \lambda_j) = f(x_i) + \lambda_1(b_1 - g_1(x_i)) + ... + \lambda_m(b_m - g_m(x_i))$
Búsqueda
Condiciones de Kuhn-Tucker
Derivadas parciales del lagrangiano respecto de las variables
¿Cómo?
$\frac{\partial L(x_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j(x_i)}{\partial x_i} = 0$
Y
Condición de Holgura Complementaria
¿Cómo?
$\lambda_j \ge 0$, con $\lambda_j = 0$ si $g_j(x_i) < b_j$
Queda definido
SISTEMA DE ECUACIONES QUE SATISFACE CONDICIONES NECESARIAS
Descomposición del problema en casos interesantes
Los casos se desprenden de la posibilidades de saturar o no las restricciones
Proceder
Resolución de los subsistemas en forma aislada
Búsqueda
Pares ordenados candidatos a óptimo
¿Satisfacen todas las condiciones y son solución del subsistema?
NO
Se descartan los puntos que no satisfacen
SI
Candidatos a óptimo
Proceder
Evaluación de los puntos en la función objetivo
Problema
Maximización
Entonces
¿Qué punto devuelve el MAYOR valor de la función?
Problema
Minimización
Entonces
¿Qué punto devuelve el MENOR valor de la función?
¡ÓPTIMO!
Verificar
Condiciones de Suficiencia

El esquema anterior es un diagrama de flujo, cuya función principal es acompañar al lector en el proceso de resolución de una problemática. Por definición, un diagrama de flujo es una descripción de un algoritmo en forma gráfica, siendo este último un conjunto de instrucción que lleva a la resolución de un conflicto. Dicho de otro modo, son los pasos a seguir para resolver cualquier optimización matemática. Por cuestiones de exposición y alcance del presente trabajo, aquellas situaciones donde no es posible resolver mediante el método de *Kuhn-Tucker*, no se incluyen en el mencionado diagrama. De igual manera, no se realiza una descripción de las condiciones que deben cumplir las restricciones para cualificar, las cuales se encuentran en la bibliografía citada.

El esquema muestra dos situaciones dicotómicas al inicio, para luego desarrollar un método sistemático de resolución. Dichas situaciones hacen a la identificación del problema y ordena de algún modo el escenario para clasificar las distintas problemáticas de optimización. De esta manera, frente a un ejercicio, lo primero que se debe preguntar el lector es cómo se presentan las funciones de restricción, ¿son ecuaciones o inecuaciones?. La respuesta indicará para el primer caso la resolución mediante el método clásico de *Lagrange*, mientras que para el segundo se prosigue en el diagrama de flujo, para probar la cualificación de dichas restricciones. De proceder satisfactoriamente, entonces se puede decir que el ejercicio se trata de una optimización factible de ser resuelto mediante la propuesta de *Kuhn-Tucker*. De esta etapa en adelante el procedimiento encuentra su resolución en forma robusta, si se prosigue en cada etapa sin saltear u omitir ninguna.

Como primer conjunto de operaciones es necesario transformar (siempre que así se requiera) el formato del ejercicio llevándolo al esquema genérico, que para el caso de maximización que se muestra en el diagrama surge de la programación cuasi-cóncava. Este paso implica trabajar con orden y prolijidad, tanto para la función objetivo como para las restricciones, minimizando el riesgo de cometer errores aritméticos o de inconsistencia lógica. El formato garantiza que las condiciones necesarias del problema estén bien especificadas, aspecto que resulta relevante cuando se prosigue hacia las etapas sucesivas. La construcción de la función *lagrangiana*, se realiza de la misma manera que en el caso clásico, cuyas variables están definidas por las variables relevantes del problema y los multiplicadores asociados a las restricciones.

Las etapas siguientes conforman las condiciones de *Kuhn-Tucker*, que al suponer que las restricciones cualifican, dichas condiciones son necesarias. Las condiciones de primer orden del problema, difieren sustancialmente del caso clásico, debido a que están conformadas por dos conjuntos de ecuaciones: las derivadas parciales de la función *lagranagiana*, respecto de las variables relevantes del problema; y las condiciones de holgura complementaria. En su conjunto conforman un sistema de ecuaciones que no puede ser resuelto, dado que las condiciones de complementariedad implican un tratamiento particular. Mediante el análisis de estas últimas se derivan los casos interesantes del problema, conformados esencialmente por las combinaciones que surgen de saturar o no las restricciones, es decir, tratarlas como igualdades o desigualdades. El procedimiento implica que la descomposición del sistema general, en subsistemas asociados a los casos antes mencionados, permite la resolución parcial del problema general, mediante el tratamiento de los subsistemas en forma independiente. Dicho en otros términos, se pueden resolver todos los subsistemas en forma aislada, admitiendo la posibilidad de que alguno/s no arrojen solución determinada. Es importante destacar que los casos interesantes pueden arrojar uno o más puntos que satisfacen las condiciones que conforman el sistema de ecuaciones, mientras que el número de puntos sea finito. Dichos puntos son "candidatos a óptimo", dado que hay que agotar la resolución de todos los subsistemas, para luego someterlos a un análisis comparativo entre estos y así obtener el óptimo local. Los puntos que no satisfacen lógicamente a alguna/s condiciones del problema se descartan, quedando fuera de todo análisis.

Los "candidatos a óptimo" son sometidos al análisis comparativo que implica valuar la función objetivo en cada uno de dichos puntos. Para los casos de maximización, se busca el punto que devuelva el mayor valor de la función objetivo; para el caso de minimización ocurre lo contrario, es decir, se busca el punto que devuelva el menor valor. Con este procedimiento se identifica el mejor de los "candidatos", que resulta el óptimo local del problema, y para finalizar se deben garantizar las condiciones suficientes que otorgan legitimidad al resultado. Dichas condiciones pueden ser testeadas de diversas formas, siendo las más usuales aquellas derivadas del análisis topológico, de la función de *Lagrange* o de la función objetivo y las restricciones en forma separada. En los casos de programación cuasi-cóncava, se busca que la función *lagragiana* sea cóncava o bien que la función objetivo sea cóncava y las restricciones cuasi-convexas. Este análisis de las superficies de las funciones otorga validez al óptimo encontrado.

Didácticamente puede resultar útil la implementación del esquema que resume el algoritmo de resolución, dado que ordena de manera preestablecida la sucesión de pasos para completar el proceso de búsqueda de candidatos a óptimo. El docente puede articular la presentación del tema mediante la aclaración de conceptos previos, que puedan resultar relevantes, para luego motivar al alumno/a con la idea de poder resolver cualquier problema, sometiéndolo al proceso antes descripto. El objetivo final es causar un impulso para resolver problemas complejos, sin alterar drásticamente el proceso de aprendizaje del alumnado promedio. Al ser implementado sucesivas veces, a nuestro entender, se puede lograr internalizar el procedimiento y lejos de crear dependencia al algoritmo, se podría estimular la intuición hacia la resolución en escenarios abstractos y de forma exitosa.

4. EJEMPLO DE APLICACIÓN

Para otorgarle sentido práctico a la descripción del algoritmo antes presentado, se expone un ejercicio, del que se pueden extraer algunas consideraciones válidas. El problema puede estar presentado de la siguiente manera:

$$\min\ f(x,y) = 2x^2 + y^2 \qquad \text{sujeto a} \qquad \begin{cases} x + y \geq 12 \\ -x^2 \leq -9 \end{cases}$$

Como primera observación, el esquema sugiere que se verifique que las funciones restricción admitan desigualdad, hecho que se puede ver claramente. La siguiente etapa implica analizar si cualifican dichas restricciones. A los fines del presente trabajo, sólo diremos que dicha condición se cumple, dado que las funciones son de tipo C^1, una de ellas lineal y la otra convexa. La demostración queda fuera del alcance del presente trabajo[1].

Luego, se puede aplicar el procedimiento que establece *Kuhn-Tucker*. Siendo que en el diagrama se establece que se deben realizar todas las transformaciones necesarias para expresar el problema en la forma

---

[1] Para mayor profundización véase *Métodos Fundamentales de Economía Matemática.* Chiang & Wainwright, 2007, págs. 412-418.

genérica. En este caso transformaremos tanto la función objetivo como la primera restricción, para resolver un problema de maximización (programación cuasi-cóncava). Nótese que $\min f(x, y)$ es idéntico a $\max -f(x, y)$; del mismo modo una restricción expresada como $g(x, y) \geq b$ es idéntico a $-g(x, y) \leq -b$. De este modo el problema formalizado es:

$$\text{MAX} - f(x, y) = -2x^2 - y^2 \qquad \text{sujeto a} \qquad \begin{cases} -x - y \leq -12 \\ \quad -x^2 \leq -9 \end{cases}$$

Con el ejercicio re-expresado, se procede a la confección de la función de *Lagrange*:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = -2x^2 - y^2 + \lambda_1(-12 + x + y) + \lambda_2(-9 + x^2)$$

Las condiciones de primer orden para problemas de maximización con restricciones de desigualdad son las siguientes:

$$\begin{cases} \text{i.} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -4x + \lambda_1 + 2x\lambda_2 = 0 \\ \text{ii.} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -2y + \lambda_1 = 0 \\ \text{iii.} & \lambda_1 \geq 0\,,\ \text{con}\ \lambda_1 = 0\ \text{si}\ -x - y < -12 \\ \text{iv.} & \lambda_2 \geq 0\,,\ \text{con}\ \lambda_2 = 0\ \text{si}\ -x^2 < -9 \end{cases}$$

Las primeras dos condiciones surgen de las derivadas parciales de la función *lagrangiana* respecto de las variables de decisión, mientras que las restantes dos corresponden a las condiciones de holgura complementaria. De estas últimas se desprenden los casos interesantes de análisis, dado que otorgan la posibilidad de activar (*binding*) o no cada una de las funciones de restricción. Los pasos siguientes en la resolución del presente ejemplo consisten en resolver en forma autónoma cada caso, buscando soluciones al subsistema, conformando "candidatos a óptimo". En cada caso es conveniente reescribir el subsistema correspondiente, y de esa manera buscar los puntos que satisfacen en simultáneo todas las ecuaciones.

CASO I: *Ambas restricciones activas*. Implica que los *lambdas* asociados deben ser positivos y las restricciones se cumplen con igualdad, es decir, están saturadas. Este caso corresponde al que citamos como clásico.

El subsistema queda conformado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \text{i.} & -4x + \lambda_1 + 2x\lambda_2 = 0 \\ \text{ii.} & -2y + \lambda_1 = 0 \\ \text{iii.} & x + y = 12 \\ \text{iv.} & x^2 = 9 \end{cases}$$

La forma de resolución del subsistema puede ser cualquiera de las algebraicas y en particular se puede apreciar que es un sistema compatible. Adicionalmente puede resultar importante tener en cuenta que en la mayoría de los ejercicios de aplicaciones económicas existe un consenso en que las variables de decisión no adopten valores negativos, dado que en general pueden tratarse de bienes o insumos. Para el caso de las decisiones de consumo de un individuo, decidir gastar su presupuesto en bienes o servicios adquiere relevancia dicha no-negatividad, puesto que se saben bienes deseables y no males. En forma análoga, una firma que decide la cantidad de insumos que aplica a una determinada producción, no resulta viable pensar en cantidades negativas. Para el problema en cuestión puede o no tenerse en cuenta y el resultado cambia relativamente, como se verá a continuación.

Al resolver el sistema por sustitución, se obtienen los siguientes pares ordenados: $(x, y) = (3{,}9); (-3{,}15)$. Cuando se buscan los *lambdas* asociados, sucede que $(\lambda_1, \lambda_2) = (18, -1); (30{,}7)$. Por esta razón el primer par ordenado no satisface todas las condiciones, siendo que el *lambda* asociado a la segunda restricción es negativo. Pero el par ordenado $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathbf{-3}, \mathbf{15})$**, es un candidato a óptimo**. Es en este punto donde adquiere importancia el sentido económico de las variables, puesto que si se tratase de un problema con condiciones de no-negatividad este punto se descartaría.

CASO II: *la primera restricción activa y la segunda no.* Dada la condición *iv*, $\lambda_2 = 0$.

El subsistema asociado a este caso es el siguiente:

$$\begin{cases} \text{i.} & -4x + \lambda_1 = 0 \\ \text{ii.} & -2y + \lambda_1 = 0 \\ \text{iii.} & x + y = 12 \\ \text{iv.} & -x^2 < -9 \end{cases}$$

El hecho de reducir el sistema por la condición de holgura complementaria que indica la nulidad de un *lambda*, simplifica la resolución del mismo. De esta manera se resuelve despejando de las primeras tres ecuaciones y luego se verifica la última. El par ordenado que arroja como solución es $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathbf{4}, \mathbf{8})$ **siendo un candidato a óptimo**, dado que $(\lambda_1, \lambda_2) = (16,0)$.

CASO III: *la segunda restricción activa y la primera no.* Por la condición de *Kuhn-Tucker iii*, $\lambda_1 = 0$.

El subsistema queda conformado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \text{i.} & -4x + 2x\lambda_2 = 0 \\ \text{ii.} & -2y = 0 \\ \text{iii.} & -x - y < -12 \\ \text{iv.} & x^2 = 9 \end{cases}$$

Este caso es interesante, dado que de las ecuaciones *ii* y *iv* se deducen valores de $(x, y) = (3,0)$, dicho par ordenado arroja un valor de *lambda* positivo, no obstante contradice lógicamente la condición *iii*. Por lo tanto **no existe candidato a óptimo para este caso**.

CASO IV: *ambas restricciones inactivas.* En forma análoga a los anteriores casos las condiciones de holgura complementaria indican que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

El último subsistema a analizar es el siguiente:

$$\begin{cases} \text{i.} & -4x = 0 \\ \text{ii.} & -2y = 0 \\ \text{iii.} & -x - y < -12 \\ \text{iv.} & -x^2 < -9 \end{cases}$$

Nuevamente, el sistema se reduce al extremo que resulta sencillo encontrar un par ordenado *a priori*: $(x, y) = (0,0)$. Sin embargo, este punto no satisface ninguna de las condiciones lógicas *iii* y *iv*. Por lo tanto **no existe candidato a óptimo**, tampoco en este caso.

Dado que los cuatro casos de análisis arrojan dos pares ordenados que son candidatos a óptimo local, es necesario realizar un análisis comparativo entre ambos, tal como lo indica el esquema del algoritmo. Para ello se evalúa la función objetivo en cada punto y dado que se busca maximizar, será deseable aquel que devuelva un mayor valor. Esto es: $f(-3,15) = -243$ y $f(4,8) = -96$. Por lo tanto, el par ordenado $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathbf{4}, \mathbf{8})$ **es el óptimo local** para este problema. Nótese que además cumple con la restricción de no-negatividad, si la misma fuese operativa.

El diagrama de flujo finaliza en este paso, pero es importante verificar la suficiencia de las condiciones de optimización. Para ello se debe analizar la topología de las funciones involucradas. Para el problema planteado y dado que se trata de programación cuasi-cóncava, la condición suficiente se verifica, pero al igual que la cualificación de las restricciones no se demuestra en el presente trabajo[2].

5. CONCLUSIONES Y OPORTUNIDADES DE INVESTIGACIÓN FUTURA

En el presente trabajo se desarrolló una versión didáctica de optimizaciones con restricciones de desigualdad, basadas en los aportes de *Kuhn-Tucker*. La motivación está enfocada en dos aspectos esenciales de la relación enseñanza-aprendizaje, por un lado el rol del docente en transmitir un conjunto de conceptos de diversas naturalezas y por el otro, el rol del estudiante que intenta construir un proceso de aprendizaje lo más suavizado posible.

Este desarrollo didáctico ayuda al docente a identificar fácilmente las problemáticas a las cuales se enfrentan los alumnos cuando resuelven problemas de esta índole. Como se especificó, el alumnado de Matemática para Economistas ingresa al curso con conocimientos heterogéneos, y es por eso que el mayor desafío consiste en homogeneizar criterios generando el espacio indicado para explicar un tema novedoso, con éxito.

La idea de presentar un proceso mediante un algoritmo juega un papel fundamental en la mencionada motivación ya que puede resultar práctico para el docente en su afán de transmitir de manera ordenada y esquemática la sofisticación de los problemas recurrentes en ciencias económicas, como son las optimizaciones. De cualquier modo creemos fundamental el rol activo del alumno/a no solo en el tema aquí desarrollado sino para cualquier tema dentro del ámbito académico. En el escenario ideal, conformar un espacio donde prevalezca el *feedback* entre el docente y los alumnos, (como así también entre los alumnos) resulta productivo a los fines de las nuevas tecnologías en enseñanza. El tema tratado se encuentra un tanto difuso y es necesario recurrir a distintas fuentes bibliográficas para construir conceptos más acabados, de manera que sintetizar todo el procedimiento y las implicancias que se desprenden

---

[2] Para mayor profundización del tema véase *Further Mathematics for Economic Analysis.* Sydsæter, Hammond, Seierstad, & Strom, 2008, pp. 135-139.

del mismo puede resultar excesivo. Sin embargo, recurrir a un algoritmo lo suficientemente genérico para adaptarse a cualquier ejercicio de optimización puede resultar esclarecedor y versátil.

En los ejemplos expuestos, se muestra cómo la implementación del algoritmo ayuda a descomponer un problema basado en la resolución de un sistema, en pequeños problemas que resueltos en forma independiente, conforman un conjunto solución general. Este hecho resulta difícil de transmitir con otros métodos. Adicionalmente, permite identificar los problemas que son resolubles mediante el algoritmo de optimización con el procedimiento de *Kuhn-Tucker*, de aquello que no. É Estos últimos pueden resolverse mediante optimizaciones clásicas o bien no poder aplicar ninguno de los procesos mencionados. Con la aplicación a ejercicios, el lector puede formarse una idea de la intuición que se genera con la implementación de un algoritmo simple como es el expuesto y así no necesariamente se produce una dependencia al esquema, sino que debe permitir la libertad de pensar y relacionar los conceptos rápidamente.

Para terminar, creemos importante destacar que este trabajo puede ser motivador de futuras investigaciones en varios aspectos. Por un lado, se puede trabajar aún más en cuestiones ligadas a la docencia, buscando nuevos mecanismos de transmisión, tanto a nivel de grado como de posgrado. Por otro lado, también se puede investigar más profundamente el rol del alumnado y las dificultades que experimentan, dado que la dinámica de los tiempos modernos, trae con sí una exigencia hacia la excelencia basada en conceptos de eficiencia. Adicionalmente, se puede pensar en la construcción de un *software* especializado que opere sobre la idea del algoritmo, permitiendo a cualquier usuario ingresar un problema dado por muchas funciones objetivos y restricciones, que pueden expresarse como inecuaciones y que la iteración del proceso arroje el resultado cierto. De otro modo, resolver en forma manual un problema como el antes mencionado, conlleva esfuerzo en exceso y gran probabilidad de cometer errores humanos. Por fuera del presente trabajo, nuestra motivación como docentes, alumnos y profesionales, está en poder generar avances tanto en la transmisión de conocimiento como en la innovación hacia tecnologías que permitan obtener resultados en forma rápida, concreta y eficiente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bernardello, A.; Bianco, M.; Casparri, M.; García Fronti, J.; Olivera de Marzana, S. (2010): *Matemática para Economistas con Excel y Matlab.* Buenos Aires, Omicron System.

Chiang, A.; Wainwright, K. (2007): *Métodos Fundamentales de Economía Matemática.* Mexico, Mc Graw Hill.

Masci, M. (2011): Programación no-lineal: Metodología para la búsqueda de candidatos a óptimo según Kuhn-Tucker. En A. Bernardello, & J. García Fronti, *Aplicaciones Económicas y Financieras de Matemática Superior* (págs. 57-74). Buenos Aires, Omicron System.

Mas-Colell, A.; Whinston, M.; Green, J. (1995): *Microeconomic theory.* New York, Oxford University Press.

Sydsæter, K.; Hammond, P.; Seierstad, A.; Strom, A. (2008): *Further Mathematics for Economic Analysis.* Pearson Education.

PROPUESTA DE UN CURSO SEMIPRESENCIAL DE ESTADÍSTICA UTILIZANDO MOODLE

María José Bianco
Gabriela Patricia Net

INTRODUCCIÓN

Durante el año 2010 realizamos el curso on line: "Diseño de Propuestas Educativas en Entornos Virtuales" en la Facultad de Farmacia y Bioquímica de la Universidad de Buenos Aires. El objetivo del mismo fue introducir a los participantes en el mundo de las propuestas educativas virtuales y en el manejo de las herramientas de un Campus Virtual basado en Moodle (Modular *Object-Oriented Dyinamic Learning Environment*). Asimismo, se estableció un espacio de reflexión en torno a la planificación de la enseñanza y el buen uso de la tecnología.

Los propósitos específicos del curso fueron:

- Enmarcar la tecnología y su potencia en las posibilidades de aprender.
- Dar a conocer un entorno virtual de enseñanza y aprendizaje y sus principales herramientas.
- Aprender a utilizar los módulos básicos de un Entorno Virtual de Enseñanza y Aprendizaje (EVEA)
- Diseñar propuestas didácticas desde la perspectiva de lo aprendido, reflexionando sobre las propias prácticas de la enseñanza.

El trabajo final consistió en la elaboración de una propuesta didáctica desde la perspectiva de lo aprendido, que favoreció también la reflexión sobre las propias prácticas de la enseñanza y la potencia de las herramientas tecnológicas a disposición. Bajo esa consigna planificamos el trayecto inicial de un curso a distancia con modalidad semipresencial (con encuentros semanales presenciales) de la asignatura Estadística I para la Facultad de Ciencias Económicas de la UBA.

En este trabajo se presenta el desarrollo de la primera unidad del citado curso: Probabilidades. Este módulo inicial, que ejemplifica la potencialidad del empleo de las nuevas tecnologías en la enseñanza universitaria, fue construido en la plataforma Moodle, incluyendo diferentes posibilidades multimedia (lecturas, imágenes, videos, wikis, foros, links de Internet, simuladores, etc.).

1. TECNOLOGÍA EN EL NIVEL SUPERIOR

El mayor desafío que enfrenta la educación superior es la incorporación de la tecnología *desde lo pedagógico*; es decir, concibiéndola como una herramienta de la imaginación y la construcción del pensamiento.

La incorporación en la Universidad de las nuevas tecnologías implica una gran renovación. Por un lado, se observan cambios en los paradigmas tradicionales de enseñanza y aprendizaje y como consecuencia de esto, se impone un debate acerca de cómo la tecnología produce cambios en las formas de enseñar y de aprender, en los modos de pensar y de producir conocimientos.

Además, se deben reconocer claramente los propósitos pedagógicos que justifiquen la inclusión de la tecnología en las distintas propuestas de enseñanza (dado que por sí sola no genera valor agregado), así como es necesario contar con asistencia pedagógica y técnica para el desarrollo de materiales.

Debe reflexionarse, además, acerca de cuál es la tecnología requerida por los estudiantes para favorecer procesos de pensamiento cada vez más complejos.

Algunos de los problemas que acarrea son:

- ¿Cómo lograr correctas y útiles vinculaciones entre los materiales multimedia ofrecidos en las situaciones de enseñanza, y las propuestas de clase "tradicional": trabajos prácticos, clases teóricas, laboratorios reales, etc.? El diseño de nuevas propuestas apoyadas en la tecnología implica una revisión profunda de los problemas de la enseñanza.
- ¿Cómo lograr un adecuado compromiso de los estudiantes frente a nuevas propuestas de estudio?
- ¿Cómo desarrollar propuestas pedagógicas que le den sentido al trabajo en colaboración, facilitado por la tecnología?

- La necesidad de capacitación docente, fundamental para que puedan involucrarse con la tecnología necesaria.
- Dado que la introducción de tecnología provocará un mayor compromiso de los docentes con los procesos de aprendizaje de sus estudiantes, será necesario también favorecer las posibilidades de trabajo en equipo de los profesores, tener en cuenta sus disponibilidades horarias, una remuneración adecuada, etc.
- ¿Cómo evitar la tecnofobia? Este fenómeno de rechazo a las nuevas propuestas de enseñanza podría presentarse en alumnos y docentes quizás no tan jóvenes, con escaso contacto y manejo de tecnologías. En este contexto se pueden producir barreras al aprendizaje.

La incorporación de tecnologías adecuadas potencia:

i. El rápido acceso a información actualizada, desde múltiples lugares.

ii. La capacidad de auto instrucción de los estudiantes (que consideramos debería ser característica del alumno universitario).

iii. La comprensión, la atención y la focalización en el objeto de estudio.

iv. Las posibilidades de diseño de estrategias adecuadas para clases masivas.

v. El trabajo en colaboración, que impulsa el desarrollo de pensamiento en niveles cada vez más complejos.

vi. La posibilidad de resolver dificultades pedagógicas tales como las falencias en la formación previa en una asignatura.

vii. La oferta de capacitación de docentes y estudiantes.

Una buena propuesta de enseñanza en el nivel superior puede estar apoyada con tecnología, pero es claro que el solo empleo de la misma no asegura el éxito. Lo que caracteriza (io debiera caracterizar!) al estudiante universitario, es su capacidad de estudio independiente, su facultad para indagar, hacerse preguntas y buscar las respuestas con iniciativa propia y espíritu crítico. Esto es lo que lo convertirá en un profesional con capacidad de investigación y de resolución de problemas en su ámbito.

Por otro lado, existen otros usos de tecnología en la vida académica, tales como el correo electrónico para la comunicación con los alumnos, las presentaciones en Power Point, el uso del chat como apoyo a clases presenciales, que también deben ser considerados.

2. PLANIFICACIÓN DE UNA PROPUESTA DIDÁCTICA CON EL USO DE TECNOLOGÍA

Al planificar un curso o una propuesta didáctica con el uso de tecnología se deben tener en cuenta los siguientes aspectos:

1) *Tipo de* curso: Es decir, pensar si el curso será presencial con apoyo virtual, virtual con alguna instancia presencial o totalmente virtual. Nuestra propuesta fue para un curso virtual con algunas instancias presenciales.

2) *Tema del Curso*: La primera tarea del docente debe ser definir claramente el tema que abordará el material del curso. Esto implica tener una visión global del tema específico del curso, de las necesidades institucionales, así como de la información a desarrollar y de las características de los destinatarios.

   Nosotras propusimos el dictado de la materia Estadística I para la Facultad de Ciencias Económicas de la UBA. Esta es una materia del segundo año del ciclo general y se cursa una vez aprobadas las seis materias del primer tramo. Esto implica trabajar con alumnos que ya cursaron Algebra y Análisis Matemático I. Así, como experiencia piloto planteamos desarrollar un tema básico del programa de esa materia: Probabilidad.

3) *Elaboración de objetivos*: En función del tema definido, se procede a establecer con precisión qué se propone lograr con los materiales a producir.

   El objetivo de nuestro curso es lograr un apoyo virtual para el dictado de la materia, con materiales suficientes para que los alumnos puedan abordar el estudio autónomo y con encuentros presenciales para resolver dudas.

4) *Destinatarios*: Es importante tener muy claro quiénes son los destinatarios del curso (alumnos de grado o posgrado) y cuál es el número máximo de destinatarios.

   Nuestro curso corresponde a una materia de grado, común a todas las carreras que se dictan en la facultad. El número máximo sugerido de cursantes es de 50 alumnos.

5) *Equipo docente*: Es necesario establecer la cantidad de docentes que se requiere para llevar adelante el curso y saber, además, si esos docentes necesitan una formación adicional en el uso del Campus. Esta materia debería considerarse, dentro de la currícula del dictado de materias, en la modalidad a distancia; pero, como se proponen encuentros presenciales y los destinatarios aún están cursando materias en las sedes (se recuerda que los alumnos de la Facultad de Económicas recién comienzan a cursar materias en la sede Córdoba a partir del primer año del ciclo profesional, es decir, tercer año de la carrera), la propuesta sería tener un curso en cada una de ellas. Esto implicaría una disponibilidad mínima de 4 docentes (aunque esto dependerá de la cantidad de cursos que se dispongan en cada sede). Los docentes necesitarán previamente recibir formación e información sobre el uso de la plataforma.

6) *Selección de medios de la plataforma*: Íntimamente ligado con el proceso de elaboración de los objetivos, se encuentra la selección de los medios y herramientas más adecuadas para lograrlos, es decir, de los recursos y actividades. Correo electrónico, foros, poder subir archivos, construir wikis son algunos de los recursos que nos planteamos utilizar. Con respecto a las actividades, proponemos trabajos prácticos con ejercicios resueltos y ejercitación para realizar como trabajo individual. También consideramos aplicaciones económicas del tema propuesto.

3. DESARROLLO DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

La planificación del curso consistió en analizar todos los aspectos citados en el ítem anterior. Decidimos así realizar el diseño de tres módulos para la Unidad 1 del programa de la materia Estadística I: Probabilidades.

3.1 Módulo 1: Introducción al cálculo de probabilidades

Este es el módulo organizador del curso, donde se presentan el tema, los objetivos, y las actividades iniciales.

Dada la importancia de construir los aprendizajes en forma colectiva, éste y todos los módulos contienen un foro de reflexión y consulta. La construcción de conocimientos realizada a través de las actividades del campus, será enriquecida y validada tanto en los espacios de reflexión y consulta abiertos en los foros, así como en los encuentros presenciales.

Solicitamos aquí la elaboración de una wiki sobre la conexión de las probabilidades con otras áreas del saber y con la vida cotidiana, para propiciar la investigación de los participantes sobre las aplicaciones de esta área de las matemáticas.

Propusimos también en este módulo un video de interés extraído de una serie probablemente conocida por los alumnos.

1

Módulo 1

INTRODUCCIÓN al Cálculo de PROBABILIDADES

Presentación

- ¡Bienvenidos!
- Guía del Módulo 1
- Esquema y Objetivos del Curso

Actividades del Módulo 1

- Actividad 1.1 Presentarnos
- Actividad 1.2: ¿Cuál es la probabilidad de sacar un par de medias negras?
- Actividad 1.3 Wiki: Aplicaciones de las probabilidades

Bibliografía

- Medias blancas y medias negras
- Las probabilidades en nuestra vida diaria

Video

- Video: Probabilidades en Numb3rs

Consultas sobre el Módulo 1

- Consultas y comentarios sobre el Módulo 1 (optativo)

3.2 Módulo 2: Teoría de probabilidades

Aquí se incluyeron los materiales teóricos necesarios para poder realizar las actividades, así como las instrucciones y actividades para realizar con simuladores de probabilidades. Las simulaciones pueden ser consideradas como "prácticas de laboratorio", en la medida en que pueden ser repetidas numerosas veces, observando los resultados y proponiendo conjeturas diversas.

También se propuso navegar otros cursos en línea relacionados. Este tipo de actividades, que requieren de dedicación y reflexión personal, son apropiadas para el campus virtual; las instancias presenciales del curso quedan reservadas para consultas personales sobre la teoría, la bibliografía y los ejercicios propuestos, que no hayan sido ya consideradas y resueltas en los foros.

2

Módulo 2

TEORÍA DE PROBABILIDADES

Guía del Módulo 2

Actividades del Módulo 2

- Actividad 2.1: Resultados de las simulaciones
- Actividad 2.2: Juego de Cartas
- Actividad 2.3: Diagramas de Venn
- Actividad 2.4 : Dos dados

Bibliografía y recursos

- Teoría de Probabilidades. Parte I
- Simuladores
- Web con simuladores
- Teoría de Probabilidades. Parte II
- Simulador: Juego de Cartas
- Simulador: Diagramas de Venn
- Simulador: Dos dados

Ayudas:

- Consultas y comentarios sobre el Módulo 2 (optativo)
- Glosario de Probabilidades

Bibliografía complementaria

- Curso de Probabilidades

3.3 Módulo 3: Actividades

En este módulo se incluyeron Guías de Trabajos Prácticos, para realizar luego de las lecturas teóricas propuestas en el módulo anterior. También se ofrecen actividades que permitan la autoevaluación: ejercicios resueltos, ejercicios con respuesta final, y un cuestionario. Todas ellas contribuyen a la detección de errores e incomprensiones, y a la validación personal de los conocimientos en el proceso de construcción de los mismos.

3

Módulo 3

ACTIVIDADES

Guia del Módulo 3

Actividades de ejercitación

Actividad 3.1: Ejercicios resueltos paso a paso

Actividad 3.2: Guía de ejercitación

Consultas y comentarios sobre el Módulo 3 (optativo)

Actividades de autoevaluación

Cuestionario

Autoevaluación

Encuesta

4. CONCLUSIONES

La realización del curso online: "Diseño de Propuestas Educativas en Entornos Virtuales" y la posterior elaboración del trabajo final descripto aquí nos ha permitido como participantes experimentar muchos de los aspectos positivos esperables en la participación de un curso a distancia provechoso:

- Aprendizaje compartido en la realización de tareas con el apoyo de los compañeros y tutores en los foros.
- Valoración de las diferentes perspectivas aportadas por la formación muy variada e interesante de los participantes.
- Desarrollo de la propia creatividad en el diseño de la tarea final del curso, potenciada y perfeccionada por la colaboración con colegas, co-autores y visitantes.
- Posibilidad de construir los conocimientos con la potencia de las diferentes posibilidades multimedia ofrecidas: lecturas, videos, foros, links de Internet relacionados, etc.

En una próxima instancia se propondrá la implementación efectiva del curso a distancia diseñado, como una alternativa con modalidad semipresencial, para el aprendizaje de los contenidos iniciales de la asignatura Estadística I en la Facultad de Ciencias Económicas de la UBA. Será imprescindible luego evaluar la aplicación del mismo, los resultados de aprendizaje obtenidos, y las posibles correcciones y mejoras.

La difusión de las nuevas tecnologías como nuevas herramientas de enseñanza y aprendizaje es un hecho indudable en los ámbitos académicos actuales. Pero la elaboración de módulos didácticos apropiados y su posterior gestión es una tarea que insume gran dedicación y esfuerzo, y que requiere de capacitación docente adecuada. Los entornos de aprendizaje integrados, o plataformas virtuales, como Moodle, facilitan estas tareas. Incluyen herramientas para simplificar la comunicación, la gestión de los cursos, y el diseño de los mismos.

Pero resulta importante establecer que en cualquier propuesta desarrollada para un ambiente virtual de aprendizaje deben sostenerse ciertos principios básicos para que la metodología resulte satisfactoria:

- Dar prioridad a los aspectos pedagógicos por sobre los puramente tecnológicos.
- Diseñar procesos centrados en el aprendizaje, que respondan a las demandas del sujeto que aprende en situación virtual.

- Propiciar las interacciones continuas y sistemáticas: docente-alumno, alumno-pares.
- Promover técnicas de autoaprendizaje.
- Contener evaluaciones apropiadas, integrales y continuas, de los procesos de aprendizaje y de la propuesta en sí misma.

El reto fundamental es no perder de vista el propósito educativo de las propuestas virtuales, para que los estudiantes puedan comprometerse y sumergirse en las mismas, gestionar sus aprendizajes y construir sus propios conocimientos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barberá Gregori, E.; Badía Garganté, A (2005): *"El uso educativo de las aulas virtuales emergentes en la educación superior"* Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento (RUSC) (vol. 2, no 2). UOC. [http://www.uoc.edu/rusc/2/2/dt/esp/barbera.pdf]

Dede, Chris (comp.) (2000): "*Aprendiendo con tecnología".* Buenos Aires, Paidós.

Valverde Berrocoso, J.; Garrido Arroyo, M (2005): "*La función tutorial en entornos virtuales de aprendizaje: comunicación y comunidad"* Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa, 4 (1), 153-167. [http://www.unex.es/didactica/RELATEC/sumario_4_1.htm]

SIMULACIÓN EXPERIMENTAL Y CALIBRACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE UN MODELO DE CICLO REAL PARA LA ECONOMÍA ARGENTINA

María Cecilia Gómez
Agustín A. Alonso

INTRODUCCIÓN

Durante las últimas décadas se desarrollaron procedimientos econométricos basados en la aplicación de procedimientos de simulación. El avance de la computación, en particular, permitió la introducción de algoritmos de optimización numérica y métodos de inferencia que no se fundamentan en el conocimiento de la expresión analítica de los estimadores. Entre estos métodos se destaca el de calibración, desarrollado a partir del trabajo de Kydland y Prescott (1982), para el estudio de las fluctuaciones cíclicas que presentan las variables macroeconómicas. El objetivo de este procedimiento consiste en resolver un interrogante, cuya respuesta tiene carácter numérico, utilizando modelos de optimización intertemporal.

De esta manera, el modelo teórico constituye un verdadero laboratorio experimental que permite analizar las implicancias cuantitativas de un modelo teórico. Sobre la base del concepto de "aprender haciendo", el trabajo desarrolla el procedimiento a aplicar para que el alumno pueda entender los alcances y limitaciones de la teoría del ciclo real, utilizando un ejemplo desarrollado para la economía argentina.

Este trabajo desarrolla y aplica el procedimiento de calibración, en un modelo de ciclo real para la economía argentina. En particular, pretende destacar la importancia que tiene el modelo teórico en la calibración de los parámetros, constituyendo un verdadero laboratorio experimental.

Está ordenado de la siguiente manera: en el punto 2 se presentan y desarrollan los pasos a seguir para calibrar un modelo de ciclo real y en el punto 3 se presentan las reflexiones finales, a modo de conclusión.

1. EL MÉTODO DE CALIBRACIÓN

La esencia de esta metodología (aplicada a modelos de optimización intertemporal) puede sintetizarse en los siguientes pasos:

1. Formular una pregunta de carácter cuantitativo, en el sentido en que la respuesta tenga carácter numérico.
2. Seleccionar un modelo que permita resolver el interrogante.
3. Encontrar la solución del modelo para las variables endógenas en función de las variables exógenas y los parámetros.
4. Asignar el valor de los parámetros y simular trayectorias para las variables endógenas.
5. Seleccionar un criterio para comparar los resultados del modelo simulado con los de la economía observada.

1.1 El interrogante

La teoría del ciclo real pretende resolver el problema relativo a la importancia de los shocks tecnológicos para determinar las fluctuaciones en el nivel de actividad económica. Con ese fin, en este trabajo, nos planteamos el siguiente interrogante:

¿Es posible que un modelo diseñado para ser consistente con el crecimiento de largo plazo genere las fluctuaciones en el nivel de actividad que asociamos al ciclo real en Argentina?

Este interrogante, que se plantearon inicialmente Kydland y Prescott (1982) ha sido utilizado para averiguar si un simple modelo de crecimiento neoclásico, cuya única fuente de incertidumbre la constituye la evolución de la tecnología, más allá de las imperfecciones del mercado y del análisis de precios flexibles, puede describir los patrones observados del ciclo de un país.

1.2 El modelo a utilizar para resolver el interrogante

En este trabajo utilizamos el ***Modelo de Hansen (1985)***, que es uno de los referentes más importantes para estudiar el ciclo real. Es una extensión del modelo neoclásico de crecimiento estocástico que endogeniza la oferta de trabajo y supone su indivisibilidad (esto significa que los individuos trabajan la jornada completa o no trabajan) de esta manera no pueden ajustar la cantidad de horas trabajadas durante las diferentes fases del ciclo. Su objetivo consiste en mostrar la manera en que la incorporación de trabajo indivisible aumenta la habilidad del modelo para reproducir los momentos de segundo orden de las series de EEUU.

Se supone que existe una firma que tiene acceso a una tecnología que se puede representar como una función de producción de Cobb-Douglas:

$$y_t = z_t k_t^{\theta} h_t^{1-\theta}$$

La tecnología se comporta como un proceso estocástico autoregresivo:

$$z_t = \rho z_{t-1} + \varepsilon_t$$

La acumulación de capital está sujeta a una ley de movimiento que refleja que el stock de capital neto al principio del período depende de decisiones de inversión y de la depreciación del stock de capital anterior:

$$k_t = (1-\delta)k_{t-1} + i_t$$

Para cada período "t", las restricciones de factibilidad están dadas por:

$$c_t + i_t \le z_t k^{\theta}{}_t h_t^{1-\theta}$$

Se supone que la economía está habitada por un conjunto continuo de hogares idénticos y tienen una vida infinita. El problema del agente representativo consiste en maximizar la función de utilidad:

$$E\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, l_t)$$

$$u(c_t, 1-h_t) = \ln c_t + A\ln(1-h_t)$$

Las condiciones de equilibrio en el mercado de factores son:

$$r_t = \theta z_t k_t^{\theta-1} h_t^{\theta}$$

$$c_t + i_t \le w_t h_t + r_t k_t$$

$$w_t = (1-\theta) z_t k_t^{\theta} h_t^{-\theta}$$

El problema de maximización de la utilidad puede expresarse:

$$\max E\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\log c_t - A\log(1-h_t))$$

Sujeto a las restricciones:

$$k_t = (1-\delta)k_{t-1}$$

$$c_t + i_t \leq z_t k^{\theta}{}_t h_t^{1-\theta}$$

$$z_t = \rho z_{t-1} + \varepsilon_t$$

En esta economía la **indivisibilidad del trabajo** implica que los individuos trabajan una cantidad de tiempo "h_0" o no trabajan.

Existe un **planificador social** que toma decisiones en cada periodo "t". En este problema de optimización, las secuencias que se derivan de la resolución del problema del planificador, son iguales a las que se obtienen cuando se consideran localizaciones de equilibrio competitivo.

Este resultado se fundamenta en los **dos teoremas fundamentarles de la teoría del bienestar**. El **primer teorema** establece que cualquier localización de equilibrio competitivo para esta economía es un óptimo de Paretto. Como hay un único óptimo de Paretto, si existe el equilibrio competitivo debe, por tanto, resolver el problema del planificador social. La existencia de este equilibrio se establece mediante el cumplimiento del **segundo teorema**. Es pertinente aclarar que el método de resolución del equilibrio en este caso se limita a **hogares homogéneos** y **economías que no presentan distorsiones.**

1.3 La solución del modelo para las variables endógenas en función de las variables exógenas y los parámetros: el método de los coeficientes indeterminados.

Diversos procedimientos han sido desarrollados para resolver el problema de optimización en modelos de equilibrio general. Un primer enfoque para hallar el equilibrio competitivo recursivo consiste en construir una aproximación lineal cuadrática, un problema de optimización de estas características tiene una función objetivo cuadrática, y restricciones lineales. Otra manera de resolverlo es utilizando aproximaciones log lineales, a las condiciones de primer orden del problema de optimización. Si bien las aproximaciones lineales son más fáciles de obtener, como señala Novales (2010) tienen errores mayores de aproximación que las log lineales, debido a que estas últimas producen condiciones de estabilidad que son lineales en el logaritmo de las variables y por tanto son no lineales en los niveles de las variables originales. Tomar en cuenta la no linealidad presente en la relación que existe entre variables de control y de estado reduce los errores numéricos de las aproximaciones lineales.

Para resolver el problema de optimización, en este trabajo se utiliza el método de los coeficientes indeterminados de H. Uhlig (1997), que usa aproximaciones log lineales al estado estacionario.

La solución del problema de optimización que plantea el modelo se halla utilizando **el concepto de equilibrio competitivo recursivo, que consiste en plantear un sistema de ecuaciones que permita definir un conjunto de series de tiempo para cada una de las variables del modelo que cumpla, en cada periodo, con las restricciones del modelo**.

1.3.1 Función objetivo y condiciones de primer orden

A partir del lagrangiano:

$$L = \max E[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t ((\log C_t - AH_t) - \lambda_t (C_t + K_t - Z_t K_{t-1}{}^{\theta} H_t{}^{1-\theta} - (1-\delta)K_{t-1}))]$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial L}{\partial C_t} : \frac{1}{C_t} = \lambda_t$$

$$\frac{\partial L}{\partial H_t} : A = \lambda_t (1-\theta) \frac{Y_t}{H_t}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} : C_t + K_t = Z_t K_{t-1}{}^{\theta} H_t{}^{1-\theta} + (1-\delta) K_{t-1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial K_t} : \lambda_t = \beta E_t [\lambda_{t+1} R_{t+1}]$$

La función objetivo para el periodo t y para el periodo t+1, teniendo en cuenta que los agentes sólo pueden formar expectativas condicionales sobre el futuro (E_t[.]).

$$L = \ldots + \beta^t ((\log C_t - AH_t) - \lambda_t (C_t + K_t - Z_t K_{t-1}{}^{\theta} H_t{}^{1-\theta} - (1-\delta) K_{t-1}))] +$$
$$E_t[\beta^{t+1}((\log C_{t+1} - AH_{t+1}) - \lambda_{t+1}(C_{t+1} + K_{t+1} - Z_{t+1} K_t{}^{\theta} H_{t+1}{}^{1-\theta} - (1-\delta)K_t))] + \ldots$$

Diferenciando luego con respecto a K_t obtenemos:

$$0 = \beta^t \lambda_t - E_t [\beta^{t+1} \lambda_{t+1} (\theta \frac{Y_{t+1}}{K_t} + 1 - \delta)]$$

Reordenando los términos y teniendo en cuenta la ecuación del retorno:

$$R_{t+1} = \theta \frac{Y_{t+1}}{K_t} + 1 - \delta$$

Se deduce la ecuación de Euler:

$$\lambda_t = \beta E_t[\lambda_{t+1} R_{t+1}]$$

1.3.2 Definición del estado estacionario

En estado estacionario las variables crecen a una tasa constante, que se obtiene de las condiciones de primer orden, quitando los subíndices y el shock estocástico en las ecuaciones anteriores:

Dadas las condiciones de primer orden:

$$\frac{1}{C_t} = \lambda_t$$

$$A = \lambda_t (1-\theta) \frac{Y_t}{H_t}$$

$$R_t = \theta \frac{Y_t}{K_{t-1}} + (1-\delta)$$

$$\lambda_t = \beta E_t[\lambda_{t+1} R_{t+1}]$$

Y las restricciones de tecnología y factibilidad:

$$Y_t = Z_t K_{t-1}{}^{\theta} H_t^{1-\theta}$$

$$C_t + K_t = Y_t + (1-\delta) K_{t-1}$$

$$\log Z_t = \rho \log Z_{t-1} + \varepsilon_t \text{ con } \varepsilon_t \sim i.i.d. N(0;\sigma_\varepsilon^2)$$

El estado estacionario es:

$$\frac{1}{\overline{C}} = \overline{\lambda}$$

$$A = \overline{\lambda}(1-\theta) \frac{\overline{Y}}{\overline{H}}$$

$$\overline{R} = \theta \frac{\overline{Y}}{\overline{K}} + (1-\delta)$$

$$\overline{\lambda} = \beta \overline{\lambda}\,\overline{R}$$

Condiciones de factibilidad y tecnología

$$\overline{Y} = \overline{Z}\overline{K}^{\theta}\overline{H}^{1-\theta}$$

$$\overline{C} + \overline{K} = \overline{Y} + (1-\delta)\overline{K}$$

$$\log \overline{Z} = \rho \log \overline{Z}$$

En estas ecuaciones, las barras corresponden a valores de equilibrio estable. Para resolverlas se necesita indicar los valores a fijar: si se dejan fijos θ, β y δ, por ejemplo, quedan determinados los valores de $\overline{R}$ y $\overline{Y}/\overline{K}$. En forma alternativa se pueden fijar los valores de $\overline{R}$ y $\overline{Y}/\overline{K}$ y luego despejar los valores de β y δ. Este procedimiento permite que las características observables de una economía real queden reflejadas en los parámetros estructurales y es la esencia del método de calibración.

Teniendo en cuenta un $\overline{H}$ dado y resolviendo para A, obtenemos:

$$\overline{R} = \frac{1}{\beta}$$

$$\frac{\overline{Y}}{\overline{K}} = \frac{\overline{R} - 1 + \delta}{\theta}$$

$$\overline{Y} = (\overline{Z}(\frac{\overline{Y}}{\overline{K}})^{-\theta})^{\frac{1}{1-\theta}}\overline{H}$$

$$\overline{K} = (\frac{\overline{Y}}{\overline{K}})^{-1}\overline{Y}$$

$$\overline{C} = \overline{Y} - \delta\overline{K}$$

$$\frac{1}{\overline{C}} = \overline{\lambda}$$

$$A = \bar{\lambda}(1-\theta)\frac{\bar{Y}}{\bar{H}}$$

Las condiciones de primer orden se hallan a partir del lagrangiano que se puede expresar:

$$L = \max E[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t ((\log C_t - AH_t) - \lambda_t (C_t + K_t - Z_t K_{t-1}{}^{\theta} H_t{}^{1-\theta} - (1-\delta)K_{t-1}))]$$

Luego las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial L}{\partial C_t} : \frac{1}{C_t} = \lambda_t$$

$$\frac{\partial L}{\partial H_t} : A = \lambda_t (1-\theta)\frac{Y_t}{H_t}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} : C_t + K_t = Z_t K_{t-1}{}^{\theta} H_t{}^{1-\theta} + (1-\delta)K_{t-1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial K_t} : \lambda_t = \beta E_t[\lambda_{t+1} R_{t+1}]$$

La función objetivo para el periodo t y para el periodo t+1, teniendo en cuenta que los agentes sólo pueden formar expectativas condicionales sobre el futuro ($E_t[.]$):

$$L = ... + \beta^t ((\log C_t - AH_t) - \lambda_t (C_t + K_t - Z_t K_{t-1}{}^{\theta} H_t{}^{1-\theta} - (1-\delta)K_{t-1}))] +$$
$$E_t[\beta^{t+1}((\log C_{t+1} - AH_{t+1}) - \lambda_{t+1}(C_{t+1} + K_{t+1} - Z_{t+1} K_t{}^{\theta} H_{t+1}{}^{1-\theta} - (1-\delta)K_t))] + ...$$

Diferenciando luego con respecto a K_t obtenemos:

$$0 = \beta^t \lambda_t - E_t[\beta^{t+1}\lambda_{t+1}(\theta \frac{Y_{t+1}}{K_t} + 1 - \delta)]$$

Reordenando los términos y teniendo en cuenta la ecuación del retorno:

$$R_{t+1} = \theta \frac{Y_{t+1}}{K_t} + 1 - \delta$$

Se deduce la ecuación de Euler:

$$\lambda_t = \beta E_t[\lambda_{t+1} R_{t+1}]$$

1.3.3 Definición del estado estacionario

En estado estacionario las variables crecen a una tasa constante, que se obtiene de las condiciones de primer orden, quitando los subíndices y el shock estocástico en las ecuaciones anteriores:

Dadas las condiciones de primer orden:

$$\frac{1}{C_t} = \lambda_t$$

$$A = \lambda_t (1-\theta)\frac{Y_t}{H_t}$$

$$R_t = \theta \frac{Y_t}{K_{t-1}} + (1-\delta)$$

$$\lambda_t = \beta E_t[\lambda_{t+1} R_{t+1}]$$

Y las restricciones de tecnología y factibilidad:

$$Y_t = Z_t K_{t-1}{}^{\theta} H_t^{1-\theta}$$

$$C_t + K_t = Y_t + (1-\delta)K_{t-1}$$

$$\log Z_t = \rho \log Z_{t-1} + \varepsilon_t \text{ con } \varepsilon_t \sim i.i.d.N(0;\sigma_\varepsilon^2)$$

El estado estacionario es:

$$\frac{1}{\overline{C}} = \overline{\lambda}$$

$$A = \overline{\lambda}(1-\theta)\frac{\overline{Y}}{\overline{H}}$$

$$\overline{R} = \theta \frac{\overline{Y}}{\overline{K}} + (1-\delta)$$

$$\overline{\lambda} = \beta \overline{\lambda}\,\overline{R}$$

Condiciones de factibilidad y tecnología

$$\overline{Y} = \overline{Z}\overline{K}^{\theta}\,\overline{H}^{1-\theta}$$

$$\bar{C} + \bar{K} = \bar{Y} + (1-\delta)\bar{K}$$
$$\log \bar{Z} = \rho \log \bar{Z}$$

En estas ecuaciones, las barras corresponden a valores de equilibrio estable. Para resolverlas se necesita indicar los valores a fijar: si se dejan fijos θ, β y δ, por ejemplo, quedan determinados los valores de $\bar{R}$ y $\bar{Y}/\bar{K}$. En forma alternativa se pueden fijar los valores de $\bar{R}$ y $\bar{Y}/\bar{K}$ y luego despejar los valores de β y δ. Este procedimiento permite que las características observables de una economía real queden reflejadas en los parámetros estructurales y es la esencia del método de calibración.

Teniendo en cuenta un $\bar{H}$ dado y resolviendo para A, obtenemos:

$$\bar{R} = \frac{1}{\beta}$$
$$\frac{\bar{Y}}{\bar{K}} = \frac{\bar{R} - 1 + \delta}{\theta}$$
$$\bar{Y} = (\bar{Z}(\frac{\bar{Y}}{\bar{K}})^{-\theta})^{\frac{1}{1-\theta}}\bar{H}$$
$$\bar{K} = (\frac{\bar{Y}}{\bar{K}})^{-1}\bar{Y}$$
$$\bar{C} = \bar{Y} - \delta\bar{K}$$
$$\frac{1}{\bar{C}} = \bar{\lambda}$$
$$A = \bar{\lambda}(1-\theta)\frac{\bar{Y}}{\bar{H}}$$

1.3.4 *Transformación log lineal de las restricciones del modelo*

A los fines de reemplazar las ecuaciones no lineales del modelo por ecuaciones lineales dinámicas se utiliza la aproximación log lineal al estado estacionario. En ese caso las ecuaciones son lineales en desvíos porcentuales del estado estacionario.

El principio de la log linealización:

Dado que $x \approx 0$, entonces $e^{x} \approx 1 + x$.

Luego, se observa que $\hat{x}_t = \log(x_t / \overline{x})$ es la log-desviación de x_t de su estado estacionario. De esta forma $100x_t$ es aproximadamente la desviación porcentual de x_t de $\overline{x}$.

Entonces $x_t = \overline{x}e^{\hat{x}_t} \approx \overline{x}(1 + \hat{x}_t)$

Luego se aplica la log linealización, las ecuaciones quedan expresadas:

Nº	*Ecuaciones*	*Log linealizaciones*
(i)	$\dfrac{1}{c_t} = \lambda_t$	$0 = \hat{c}_t + \hat{\lambda}_t$
(ii)	$A = \lambda_t (1-\theta)\dfrac{y_t}{h_t}$	$0 = \hat{\lambda}_t + \hat{y}_t - \hat{h}_t$
(iii)	$R_t = \theta \dfrac{y_t}{k_{t-1}} + (1-\delta)$	$0 = -\overline{R}\hat{R}_t + \theta \dfrac{\hat{y}}{\hat{k}}(\hat{y}_t + \hat{k}_{t-1})$
(iv)	$y_t = z_t k_{t-1}{}^{\theta} h_t^{1-\theta}$	$0 = -\hat{y}_t + z_t + \theta\hat{k}_{t-1} + (1-\theta)\hat{h}_t$
(v)	$c_t + k_t = y_t + (1-\delta)k_{t-1}$	$0 = -\overline{c}\hat{c}_t - \overline{k}\hat{k}_t + \overline{y}\hat{y}_t + (1-\delta)\overline{k}\hat{k}_{t-1}$
(vi)	$\lambda_t = \beta E_t[\lambda_{t+1} R_{t+1}]$	$0 = -\hat{\lambda}_t + E_t[\hat{\lambda}_{t+1} + \hat{R}_{t+1}]$
(vii)	$z_{t+1} = \rho z_t + \varepsilon_{t+1}$	$z_{t+1} = \rho z_t + \varepsilon_{t+1}$

1.3.5 El método de los coeficientes indeterminados

Ley recursiva de movimiento

Sobre la base de que las variables de estado son z_t y k_{t-1}, la dinámica del modelo puede expresarse:

$$\lambda_t = f_{(\lambda)}(k_{t-1}, z_t)$$
$$k_t = f_{(k)}(k_{t-1}, z_t)$$
$$y_t = f_{(y)}(k_{t-1}, z_t)$$

Etc.

Esta ley de movimiento es lineal en el logaritmo de los desvíos, e*l método de coeficientes indeterminados se obtiene de la ley recursiva de movimiento.*

$$\hat{\lambda}_t = \eta_{\lambda k}\hat{k}_{t-1} + \eta_{\lambda z} z_t$$
$$\hat{k}_t = \eta_{kk}\hat{k}_{t-1} + \eta_{kz} z_t$$
$$\hat{y}_t = \eta_{yk}\hat{k}_{t-1} + \eta_{yz} z_t$$

Para coeficientes $\eta_{\lambda k}, \eta_{\lambda z}$, etc.

$$\hat{\lambda}_t = \eta_{\lambda k}\hat{k}_{t-1} + \eta_{\lambda z} z_t$$
$$\hat{k}_t = \eta_{kk}\hat{k}_{t-1} + \eta_{kz} z_t$$

A partir de una serie de transformaciones realizadas en la ley recursiva de movimiento, se obtiene la siguiente ecuación cuadrática característica:

$$0 = \rho(\eta_{kk}) = \eta_{kk}{}^2 - (\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_5}\alpha_4 + \frac{1}{\alpha_5})\eta_{kk} + \frac{\alpha_1}{\alpha_5}$$

Donde

$$\alpha_1 = \frac{\overline{y}}{\overline{k}} + (1-\delta)$$

$$\alpha_2 = \frac{\overline{c}}{\overline{k}} + \frac{1-\theta}{\theta}\frac{\overline{y}}{\overline{k}}$$

$$\alpha_3 = \frac{\overline{y}}{\theta\overline{k}}$$

$$\alpha_4 = 0$$

$$\alpha_5 = 1 + (1-\theta)\frac{\overline{y}}{\overline{R}\overline{k}}$$

$$\alpha_6 = \frac{\overline{y}}{\overline{R}\overline{k}}$$

Resolviendo la ecuación cuadrática característica

$$\eta_{kk} = \frac{1}{2}((\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_5}\alpha_4 + \frac{1}{\alpha_5}) \pm \sqrt{(\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_5}\alpha_4 + \frac{1}{\alpha_5})^2 - 4\frac{\alpha_1}{\alpha_5}}$$

Se elige la raíz estable $\left|\eta_{kk}\right| < 1$

Hay al menos una raíz estable si $\left|\eta_{kk_1}, \eta_{kk_2}\right| = \left|\frac{\alpha_1}{\alpha_5}\right| > 1$

Con η_{kk} calculamos $\eta_{\lambda k} = \frac{\eta_{\lambda\lambda} - \alpha_1}{\alpha_2}$

Análogamente En z_t :

$$0 = \eta_{kz} + \alpha_2\eta_{\lambda z} + \alpha_3$$

$$0 = -\eta_{\lambda z} + \alpha_4\eta_{kz} + \alpha_5\eta_{\lambda k}\eta_{kz} + (\alpha_5\eta_{\lambda z} + \alpha_6)\rho$$

A partir de estas ecuaciones calculamos

$$\eta_{\lambda z} = \frac{\alpha_4\alpha_3 + \alpha_5\eta_{\lambda k}\alpha_3 + \alpha_6\rho}{1 - \alpha_4\alpha_2 - \alpha_5\eta_{\lambda k}\alpha_2 - \alpha_5\rho}$$

$$\eta_{kz} = \alpha_2\eta_{\lambda z} + \alpha_3$$

1.4 Calibración de los parámetros del modelo: el valor de los parámetros y simulación de las trayectorias para las variables endógenas

Una de las razones de la aplicación del método de calibración es que no existe la posibilidad de estimarlos, bien porque corresponden a variables no observables (tal el caso del shock tecnológico) o porque no existen datos, en estos casos es necesario acudir a otras fuentes de información. En este trabajo hemos **tomado en cuenta la siguiente información:**

- ***Datos relativos a características estructurales de la economía argentina*** **(definidas a partir del estado estacionario del modelo):** a los fines de que el modelo simulado refleje propiedades estructurales de la economía argentina, algunos parámetros se calibran en el estado estacionario. Es pertinente aclarar que en estado estacionario todas las variables crecen a una tasa constante, luego aumenta la escala, pero no la composición del producto de la economía.
- ***Otros trabajos como referencia***
- ***Hechos Estilizados del Ciclo de la economía argentina:*** Según se verá más adelante, la selección de los valores de los parámetros se realiza de manera tal que el modelo simulado reproduzca algunas de las propiedades cuantitativas de las series de la economía observada. En modelos de ciclo real estas propiedades son estadísticos, que tienen por objeto proporcionar información relativa a las propiedades que caracterizan la distribución conjunta del movimiento cíclico de las series observadas. En el cuadro No 1 del Anexo presentamos los estadísticos, cuyas regularidades constituyen los hechos estilizados del ciclo de la economía argentina, algunos de los cuales pretendemos que refleje el modelo a través de la calibración de los parámetros. Para ello utilizamos, en primer lugar, información estadística y la que proporcionan otros trabajos en el tema, según se desarrolla más adelante.

1.4.1 Calibracion de los parámetros de la funcion de oferta

La calibración de los parámetros de la función de oferta se realiza tomando en cuenta propiedades de largo plazo de las series en Argentina (participación del capital en el producto, tasa de depreciación del capital, etc.) y propiedades de corto plazo que están representadas en el comportamiento aleatorio de los residuos de Solow.

1.4.1.1 Productividad total de factores y sus parámetros: (ρ y σ_{ε})

Los parámetros de la PTF, como ha sido señalado es una variable no observable y la calibración se realiza sobre la base de que los parámetros de esta función se definen bajo el supuesto de que la productividad total de los factores es un proceso estocástico autoregresivo de primer orden:

$$z_t = \rho z_{t-1} + \varepsilon_t$$

Donde, ε_t es un componente aleatorio (innovación) independiente que está idénticamente distribuido (i.i.d.) con media cero y desvío estándar igual a σ_{ε}.

Un proceso de estas características genera series con fluctuaciones recurrentes, cuyas propiedades están determinadas por dos parámetros: ρ y σ_{ε}.

Para calibrar estos parámetros en este trabajo se toma en cuenta la siguiente información de trabajos previos sobre el tema:

	Kydland y Zarazaga (2001)	Kydland y Zarazaga (2002)	Kydland y Zarazaga (2003 y 2004)	Zarazaga (2006)
Coeficiente de auto correlación del proceso que sigue la productividad total de los factores (ρ)	0,73 (1950-1979)	0,7553 (1950-1979) 0,8423 (1950-1997)	0,56 (1951-1979)	0,5715 (1951-1979)
Desvío estándar de los errores o innovaciones(σ_{ε})	1/(1- ρ)=4,16		1/(1-ρ) =5,26	

Además de estos trabajos, se tomaron en cuenta los siguientes hechos estilizados del ***ciclo en el nivel de actividad*** :

Amplitud: una particularidad del ciclo en Argentina es su amplitud, aproximadamente de 4%. Es un hecho estilizado de las economías latinoamericanas: el ciclo presenta una mayor amplitud que las economías de países desarrollados (en EEUU, por ejemplo, es aproximadamente igual a 1,7%).

Duración: respecto de su duración, la economía argentina presenta ciclos de mayor duración a partir de la década de los noventa.

El ciclo del consumo está altamente correlacionado con el nivel de actividad : el alto grado de asociación del movimiento conjunto del nivel de actividad y el consumo es un hecho observado en todos los países y se explica ya que el consumo es el componente más importante de la demanda agregada.

1.4.1.2 Participación del Capital y del trabajo en el Producto (θ)

La información estadística sobre participación del trabajo en el Producto se registra en la cuenta de **Generación del Ingreso del Sistema de Cuentas Nacionales.** En esta cuenta se registran los ingresos primarios originados por los agentes públicos y privados que participan directamente en la producción, sin embargo no puede ser utilizada por el hecho de que una de las subdivisiones (ingreso mixto) tiene un peso muy importante en el producto, y es muy difícil calcular de forma precisa tanto la participación del trabajo como del capital en el producto.

A los fines de resolver este problema Kydland y Zarazaga (2001, 2003 y 2004) proponen, a falta de datos, una participación del 60% del trabajo y del 40% del capital en el producto bajo el supuesto de que la tecnología de producción argentina es similar a la estadounidense

	Kydland y Zarazaga (2001, 2003 y 2004)
Participación del capital en el producto (θ)	0,4

En los hechos estilizados este parámetro se refleja en la volatilidad del ciclo de todas las variables del modelo (a excepción de la tecnología): cuanto menor es la participación del capital en el producto, mayor es la volatilidad del ciclo de estas variables (Cuadro Nº 3). La magnitud de su efecto, sin embargo, es sensiblemente inferior a la del shock tecnológico. Este hecho es consistente en su carácter de ser un parámetro que refleja condiciones de largo plazo.

De acuerdo con los hechos estilizados del ciclo en Argentina, se observa que, para σ_{ε} = 2, $\rho =$ 0,95 y $\theta =$ 0,4, el modelo genera series con volatilidades cíclicas similares a las observadas en Argentina.

1.4.1.3 Tasa de depreciación del capital (δ)

El stock de capital físico representa el acervo de los bienes de capital de una economía. El stock capital físico esta compuesto por un conjunto muy heterogéneo de bienes con tasas de depreciación muy dispares. Esto implica que algunos tipos de capital pierdan su valor de forma más rápida de la que lo hacen otros tipos: automóviles, equipos industriales, terrenos o construcciones, lógicamente van a tener diferentes tipos de depreciación en base a características propias. Lamentablemente, no contamos con series históricas que posean esta información desagregada para la Argentina. Para calibrar este parámetro se ha tomado en cuenta la siguiente informacion:

Otros trabajos en el tema:

	Nicholson y Maia (2001)	Kydland y Zarazaga (2001)	Kydland y Zarazaga (2003 y 2004)
Tasa de depreciación trimestral (δ)	0,0225	0,025	0,0286

Características estructurales de la economía argentina:

Tomando las series observadas del stock de capital agregado en el periodo 1950-2006 en Argentina, se observa que es en promedio 2,5 veces mayor al producto. De acuerdo con esta última información, la tasa de depreciación que resulta de utilizar las siguientes relaciones en el estado estacionario:

$$\bar{I} = \delta \bar{K}$$
$$(\bar{I} / \bar{Y}) = \delta (\bar{K} / \bar{Y})$$
$$\delta = \frac{(\bar{I} / \bar{Y})}{(\bar{K} / \bar{Y})}$$
$$\delta_{anual} = \frac{0,2}{2,5} = 0,08$$
$$\delta_{trimestral} = \delta_{anual} / 4 = 0,02$$

Sobre la base de la información precedente este parámetro se ha calibrado en 0,02.

1.4.2 Parámetros de la función de utilidad

1.4.2.1 Tiempo destinado a mercado de trabajo ($\overline{H}$)

En Argentina se dispone de muy poca información para calibrar este parámetro. De acuerdo a la Encuesta de Indicadores Laborales del Ministerio de Trabajo y Seguridad Social, entre Agosto de 2001 y Enero de 2006, el promedio de horas mensuales trabajadas para Gran Buenos Aires, Gran Córdoba, Gran Rosario y Gran Mendoza es de 160,6. Esto implicaría un promedio de 40,15 horas semanales. Si tenemos en cuenta que una semana cuenta con 168 horas, concluimos que los agentes pasan 40,15/168=0,24 de su dotación de tiempo en el mercado de trabajo. Otros trabajos en el tema, como Kydland y Zarazaga (2001, 2003 y 2004) suponen que en Argentina, al igual que en Estados Unidos, los agentes utilizan 1/3 de su dotación de tiempo en el mercado laboral.

	Kydland y Zarazaga (2001, 2003 y 2004)
Porcentaje de Tiempo utilizado en el mercado laboral (H)	1/3

La proporción de tiempo destinado al mercado de trabajo es un parámetro que prácticamente no modifica los resultados (Cuadro Nº 5). Por ese motivo este parámetro se calibró en el valor mencionado en estos trabajos.

1.4.2.2 Tasa de interés real (Factor de descuento)

En el trabajo de Kydland y Zarazaga (2001), la tasa de interés real se determina a partir de la siguiente relación en estado estacionario:

$$\overline{R} = \theta(\overline{Y} / \overline{K}) - \delta$$

Kydland y Zarazaga (2003 y 2004) utilizando esa misma relación, y una tasa de depreciación de capital diferente, calibran este parámetro en una tasa de interés real anual del 8,7%:

	Kydland y Zarazaga (2001)	Kydland y Zarazaga (2003 y 2004)
Tasa de interés real anual ($\overline{R}$)	0,1	0,087

Sobre la base de la tasa de depreciación calibrada, suponiendo una participación del capital en el producto del 40% y en un cociente $\overline{Y} / \overline{K}$ promedio de 0,41 entre 1950 y 2006, de acuerdo con las series del trabajo de Coremberg et als. (2007) y la siguiente relación, en estado estacionario del modelo de Hansen resulta:

$$(\overline{Y}/\overline{K}) = (\overline{R} + \delta - 1)/\theta$$

$$\overline{R} = \theta(\overline{Y}/\overline{K}) - \delta + 1$$

$$\overline{R}_{anual} = 0,4(0,41) - 0,02 = 0,144$$

$$\overline{R}_{trimestral} = \overline{R}_{anual}/4 = 0,036$$

Este parámetro se refleja en la amplitud del nivel de actividad de la economía argentina, de acuerdo con lo cual se ha fijado en 1,036.

1.5 Criterio de comparación de los resultados del modelo simulado con los de la economía observada

La comparación de las propiedades del modelo simulado con la economía observada se realiza a partir de los momentos de segundo orden (varianzas y covarianzas) una vez removida la tendencia, de las variables asociadas al ciclo económico en el modelo. Siguiendo el enfoque de Lucas, este criterio se fundamenta en el concepto de ciclo como desvío a partir de la tendencia. En el enfoque de Kydland y Prescott, la tendencia se remueve utilizando el filtro de Hodrick-Prescott. Luego se obtienen las regularidades o hechos estilizados de los momentos de segundo orden de los desvíos de las series observadas. En el Cuadro Nº 1 del Anexo se presentan los hechos estilizados del ciclo de la economía argentina.

Las propiedades muestrales de las series simuladas surgen de aplicar el método de Monte Carlo. Sobre la base del análisis precedente, se simula la trayectoria de las variables utilizando el modelo de Hansen. En este trabajo se realizaron 200 simulaciones y en cada simulación se tomaron en cuenta la misma cantidad de observaciones que las de la economia real (60 observaciones). Las simulaciones se realizaron utilizando el programa Matlab.

Para cada trayectoria, una vez aplicado el filtro de Hodrick y Prescott, se obtienen los estadísticos correspondientes del componente cíclico (varianzas y covarianzas), cuyo valor medio proporciona una aproximación a la distribucion muestral del parámetro correspondiente . Las propiedades dinámicas se analizan utilizando la función impulso respuesta.

2. REFLEXIONES FINALES

El trabajo ha desarrollado el método para calibrar un modelo de ciclo real para la economía argentina. Este método comenzó a estudiarse en el marco del proyecto UBACYT "Procedimientos de simulación experimental para el análisis de políticas monetarias de mediano plazo".

El ejercicio permite apreciar que el modelo calibrado permite reproducir algunos de los hechos estilizados del ciclo: amplitud del ciclo del PBI, la correlación del ciclo del consumo y del producto y analizar, además, el efecto de variaciones en los parámetros sobre los hechos estilizados.

A modo de reflexión final interesa destacar las diferencias que existen con métodos tradicionalmente utilizados en econometría, en lo que hace a la elección del modelo, el método para seleccionar los parámetros a utilizar en la simulación, como así también para contrastar los resultados de la simulación con la evidencia empírica. Cuando se estima un modelo se parte de la base de que el modelo es una estructura probabilística que proporciona una buena aproximación a la que generó los datos. Cuando se calibra, se especifica un modelo que, por ser de naturaleza teórica, no se pretende que sea real y por tanto no es una hipótesis a ser testeada utilizando métodos estadísticos. Su contrastación se realiza de acuerdo con el objetivo propuesto en cada caso. En un modelo de ciclo real como el que se acaba de presentar, el objetivo propuesto consiste en averiguar si el modelo teórico, calibrado para la economía argentina, es capaz de reproducir los hechos estilizados del ciclo. Sobre la base de esta aproximación se proponen modificaciones a realizar al modelo, para mejorar su desempeño. La confianza en los resultados depende, fundamentalmente, de la teoría que fundamenta el modelo aplicado.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Coremberg, A. (2003): *El Crecimiento de la Productividad de la Economía Argentina durante la década de los Noventa: "Mito o Realidad".* Trabajo presentado en la XXXVIII Reunión Anual de la Asociación Argentina de Economía Política, Noviembre, Mendoza.

Coremberg, A. (2009): *Midiendo las fuentes del crecimiento en una economía inestable: Argentina. Productividad y factores productivos por sector de actividad económica y por tipo de activo*. Serie estudios y perspectivas, Nº41, Santiago de Chile, Comisión Económica para América Latina y el Caribe.

Coremberg, A.; Goldszier, P.; Heymann, D.; Ramos, A. (2007): *Patrones de la inversión y el ahorro en la Argentina*. Serie macroeconomía del desarrollo, Nº63, Santiago de Chile, Comisión Económica para América Latina y el Caribe.

Cooley, T. F.; Prescott, E. C. (1995): *Economic Growth and Business Cycles.* En Cooley, T. (comp.), Frontiers of Business Cycle Research (pp. 1-38). New Jersey, Princeton University Press.

Gómez, M. C.; Luque, P. S. (2009): *Ciclos económicos en Argentina (1980-2006): ¿qué nos dicen los hechos estilizados?* XLIV Reunión Anual de la Asociación Argentina de Economía Política.

Hansen, G. D. (1985): "Indivisible Labor and The Business Cycle" en Journal *of Monetary Economics*, 16, 309-327.

Kydland, F. E. (1995): "Business Cycles and Aggregate Labor Market Fluctuations". En Cooley, T. (comp.), *Frontiers of Business Cycle Research* (pp. 126-156). New Jersey, Princeton University Press.

Kydland, F. E. (2004): "Quantitative Aggregate Theory". Nobel Prize in Economics documents, 4. Nobel Prize Committee.

Kydland, F. E; Prescott (1982): "Time to Build and Aggregate Fluctuations". Econométrica, vol. 50, number 6 (1345-1370).

Kydland, F. E.; Zarazaga, C. E. J. M. (2001): "Argentina's Lost Decade". Center for Latin America, Working paper 0401, Federal Reserve Bank of Dallas.

Kydland, F. E.; Zarazaga; C. E. J. M. (2002): "Argentina's recovery and "excess" capital shallowing of the 1990s". Trabajo presentado en la Seventh Economic Development, Technology and Human Resources Conference, Tafí del Valle, Argentina.

Kydalnd, F. E.; Zarazaga, C. E. J. M. (2003): "Argentina's lost decade and subsequent recovery: Hits and misses of the neoclassical growth model". Center for Latin America, Working papers 0403, Federal Reserve Bank of Dallas.

Kydland, F. E.; Zarazaga, C. E. J. M. (2004): "Argentina's capital gap puzle". Center for Latin America Working papers 0504, Federal Reserve Bank of Dallas.

Maia, J. L.; Nicholson, P. (2001): "El Stock de capital y la Productividad Total de los Factores en la Argentina". Dirección Nacional de Coordinación de Políticas Macroeconómicas, Buenos Aires.

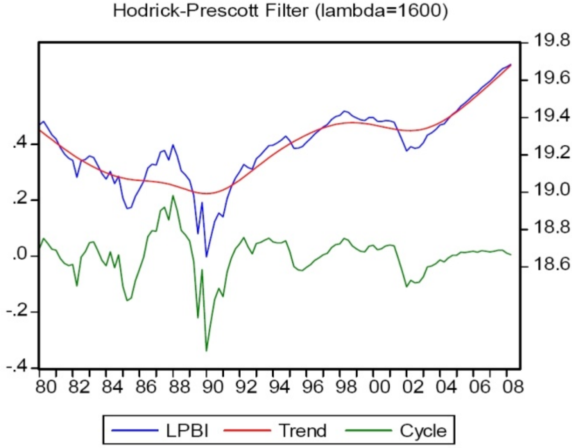
Novales, A.; Fernández, E. y Ruiz, J. (2010): *Economic growth – Theory and Numerical Solution Methods*, Springer, Berlin.

Uhlig, H. (1997): "A Toolkit for Analyzing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily". Manuscrito no publicado.

Zarazaga, C. E. J. M. (2004): "Argentina's Unimpressive Recovery: Insights from a Real Business-Cycle Approach". Center for Latin America Working papers 0504, Federal Reserve Bank of Dallas.

ANEXO

Gráfico 1: El componente cíclico en Argentina



Cuadro 1. Hechos estilizados (1993:1-2008:1)

Variable	Volatilidad Absoluta (% Std. Dev.)	Volatilidad Relativa (% Std. Dev.)	Correlación Cruzada del PBI Real con: x(t-5)	x(t-4)	x(t-3)	x(t-2)	x(t-1)	x(t)	x(t+1)	x(t+2)	x(t+3)	x(t+4)	x(t+5)
Consumo Privado	4.86	1.16	0.06	0.25	0.48	0.70	0.89	0.98	0.92	0.78	0.58	0.38	0.21
PBI Real	4.21	1	0.14	0.31	0.52	0.73	0.91	1.00	0.91	0.73	0.52	0.31	0.14
Horas trabajadas en la Industria	5.22	1.24	0.39	0.55	0.71	0.84	0.82	0.90	0.76	0.54	0.30	0.08	-0.09
Tasa de Interés	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Inversión Bruta Interna Fija (IBIF)	14.10	3.35	0.16	0.33	0.53	0.73	0.89	0.97	0.88	0.70	0.46	0.22	0.03

Análisis de sensibilidad

200 simulaciones
60 períodos

Autocorrelación del Shock Tecnológico (ρ) y Desvío Estándar del Shock Tecnológico (σ_ε)

Participación del capital en el producto (θ)	0.4
Trabajo en estado estacionario ($\overline{H}$)	0.33
Tasa de depreciación del capital (δ)	0.02
Tasa de Interés Real en estado estacionario ($\overline{R}$)	1.036
Coeficiente de aversión al riesgo (σ)	1

Cuadro 2. Evaluación de los parámetros del shock tecnológico (ρ) y (σ_ε)

Autocorrelación del Shock Tecnológico (ρ)	Desvío Estándar del Shock Tecnológico (σ_ε) (%)	σ_k	σ_c	σ_y	σ_h	σ_{inv}	σ_{tech}	corr (k,y)	corr (c,y)	corr (y,y)	corr (h,y)	corr (inv,y)	corr (tech,y)
0.5	0.5	0.25	0.17	1.05	0.97	6.86	0.49	0.43	0.56	1	0.99	0.99	1
0.5	1	0.52	0.36	2.15	1.98	14	1	0.43	0.56	1	0.99	0.99	1
0.5	2	1.04	0.72	4.29	3.93	27.8	2	0.43	0.56	1	0.99	0.99	1
0.65	0.5	0.3	0.22	1.11	0.99	7.05	0.53	0.42	0.61	1	0.98	0.99	1
0.65	1	0.64	0.46	2.23	1.98	14.13	1.06	0.42	0.61	1	0.98	0.99	1
0.65	2	0.96	0.69	3.4	3.03	21.56	1.62	0.43	0.61	1	0.98	0.99	1
0.8	0.5	0.36	0.29	1.14	0.98	6.9	0.57	0.42	0.7	1	0.98	0.98	1
0.8	1	0.73	0.57	2.3	1.94	13.92	1.14	0.41	0.7	1	0.98	0.98	1
0.8	2	1.49	1.17	4.61	3.89	27.88	2.3	0.42	0.7	1	0.98	0.98	1
0.95	0.5	0.35	0.4	0.07	0.75	5.54	0.62	0.43	0.87	1	0.96	0.98	1
0.95	1	0.69	0.77	2.09	1.46	10.84	1.21	0.42	0.87	1	0.97	0.98	1
0.95	2	1.36	1.54	4.21	2.94	21.73	2.42	0.42	0.88	1	0.97	0.98	1

NOTA: σ_k=volatilidad del capital, σ_c=volatilidad del consumo, σ_y=volatilidad del producto, σ_h=volatilidad del trabajo, σ_{inv}=volatilidad de la inversión, σ_{tech}=volatilidad de la productividad, corr (x,y)= correlación del componente "x" con el producto "y".

Participación del Capital en el Producto (θ)

Capital Share (θ)	0.4
Steady State Labor (H)	0.33
Depreciation rate of capital (δ)	0.02
Steady State Interest Rate (R)	1.036
Relative Risk Aversion (σ)	1
Autocorr Tech Shock (ρ)	0.95
Std. Dev Tech Shock (σ_ε) (%)	2

Cuadro3. Evaluación del parámetro de la proporción del capital en la producción total (θ)

Participación del capital en Y (θ)	σ_k	σ_c	σ_y	σ_h	σ_{inv}	σ_{tech}	corr (k,y)	corr (c,y)	corr (y,y)	corr (h,y)	corr (inv,y)	corr (tech,y)
0.2	2.46	2.24	4.8	2.97	43.2	2.49	0.52	0.89	1	0.94	0.95	0.99
0.4	1.36	1.54	4.21	2.94	21.7	2.42	0.42	0.88	1	0.97	0.98	1
0.6	0.9	1.08	3.51	2.7	13.3	2.41	0.39	0.82	1	0.97	0.99	0.99

Tasa de depreciación del capital (δ)

Capital Share (θ)	0.4
Steady State Labor (H)	0.33
Depreciation rate of capital (δ)	0.02
Steady State Interest Rate (R)	1.036
Relative Risk Aversion (σ)	1
Autocorr Tech Shock (ρ)	0.95
Std. Dev Tech Shock (σ_ε) (%)	2

Cuadro 4: Evaluación del parámetro de la tasa de depreciación del capital

Tasa de depreciación del capital (δ)	**σ_k**	**σ_c**	**σ_y**	**σ_h**	**σ_{inv}**	**σ_{tech}**	**corr (k,y)**	**corr (c,y)**	**corr (y,y)**	**corr (h,y)**	**corr (inv,y)**	**corr (tech,y)**
0.02	1.36	1.54	4.21	2.94	21.7	2.42	0.42	0.88	1	0.97	0.98	1
0.04	1.7	1.82	4.02	2.57	13.5	2.43	0.5	0.88	1	0.94	0.97	1
0.06	1.98	2.07	3.98	2.33	10.8	2.48	0.57	0.89	1	0.91	0.96	1

Tasa de Interés Real en el Estado Estacionario

Capital Share (θ)	0.4
Steady State Labor (H)	0.33
Depreciation rate of capital (δ)	0.02
Steady State Interest Rate (R)	1.036
Relative Risk Aversion (σ)	1
Autocorr Tech Shock (ρ)	0.95
Std. Dev Tech Shock (σ_ε) (%)	2

Cuadro 5. Evaluación de la tasa de interés real en estado estacionario

Tasa de Interés Real en el estado estacionario ($\overline{R}$)=1/β	**σ_k**	**σ_c**	**σ_y**	**σ_h**	**σ_{inv}**	**σ_{tech}**	**corr (k,y)**	**corr (c,y)**	**corr (y,y)**	**corr (h,y)**	**corr (inv,y)**	**corr (tech,y)**
1.01	1.06	1.17	4.71	3.75	15	2.48	0.32	0.86	1	0.99	0.99	1
1.036	1.36	1.54	4.21	2.94	21.7	2.42	0.42	0.88	1	0.97	0.98	1
1.06	1.67	1.83	4.02	2.57	26.8	2.43	0.51	0.88	1	0.94	0.95	1

Coeficiente de Aversión al Riesgo (σ)

Capital Share (θ)	0.4
Steady State Labor (H)	0.33
Depreciation rate of capital (δ)	0.02
Steady State Interest Rate (R)	1.036
Relative Risk Aversion (σ)	1
Autocorr Tech Shock (ρ)	0.95
Std. Dev Tech Shock (σ_ε) (%)	2

Cuadro 6. Evaluación del parámetro del coeficiente de aversión al riesgo de los agentes

Coeficiente de aversión al riesgo (σ)	σ_k	σ_c	σ_y	σ_h	σ_{inv}	σ_{tech}	corr (k,y)	corr (c,y)	corr (y,y)	corr (h,y)	corr (inv,y)	corr (tech,y)
0.5	2	2.03	5.4	4.81	31.5	2.39	0.5	0.63	1	0.99	0.95	0.99
1	1.36	1.54	4.21	2.94	21.7	2.42	0.42	0.88	1	0.97	0.98	1
1.5	1.19	1.28	3.61	2.02	18.6	2.45	0.39	0.91	1	0.92	0.98	1

Trabajo en Estado Estacionario ($\bar{H}$)

Capital Share (θ)	0.4
Steady State Labor (H)	0.33
Depreciation rate of capital (δ)	0.02
Steady State Interest Rate (R)	1.036
Relative Risk Aversion (σ)	1
Autocorr Tech Shock (ρ)	0.95
Std. Dev Tech Shock (σ_ε) (%)	2

Cuadro 7. Evaluación de la proporción de la dotación del tiempo que los agentes utilizan en actividades laborales

Trabajo en estado estacionario ($\overline{H}$)	σ_k	σ_c	σ_y	σ_h	σ_{inv}	σ_{tech}	**corr (k,y)**	**corr (c,y)**	**corr (y,y)**	**corr (h,y)**	**corr (inv,y)**	**corr (tech,y)**
0.2	1.43	1.6	4.28	2.99	22.1	2.47	0.43	0.87	1	0.96	0.98	1
0.33	1.36	1.54	4.21	2.94	21.7	2.42	0.42	0.88	1	0.97	0.98	1
0.4	1.44	1.61	4.32	3.03	22.4	2.49	0.42	0.87	1	0.96	0.98	1
0.6	1.38	1.55	4.13	2.9	21.4	2.39	0.43	0.87	1	0.96	0.98	1

CONDICIONES DE SUFICIENCIA EN UN PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO APLICADO AL CRECIMIENTO ECONÓMICO

María José Bianco
Pablo Herrera

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se estudiarán las condiciones de suficiencia de un problema de control óptimo aplicado al crecimiento de una economía. Estas condiciones surgen a partir de una serie de teoremas, en los cuales se enuncian las características funcionales que tienen que cumplir los elementos que forman parte del problema en cuestión. Sin embargo, cuando se utiliza la teoría de control óptimo para analizar problemas económicos (en particular, problemas de crecimiento económico), el planteo del mismo presenta ciertas características que son relevantes a la hora de analizar las condiciones suficientes.

De esta manera, en primera instancia se realizará el planteo del problema. El mismo se basará en una problemática en particular que se refiere al crecimiento económico de un país en base a la toma de deuda. Se plantearán también las condiciones necesarias que surgen del principio de máximo de Pontryagin adaptado para este tipo de problemas. Seguidamente, se enuncian y demuestran los teoremas que dan origen a las condiciones de suficiencia para este problema en particular.

En la sección *Condiciones Suficientes*, se presenta tanto el teorema de Mangasarian como el de Arrow. Ambos piden la concavidad de un elemento particular de la teoría de control óptimo. Por las características particulares del problema propuesto estos elementos se encuentran representados por el Hamiltoniano de Valor Presente para el teorema de Mangasarian y por el Hamiltoniano de Valor Presente Derivado para el teorema de Arrow. Que estos elementos difieran tanto en su significado como en su notación matemática comparándolos con el Hamiltoniano y el Hamiltoniano Derivado respectivamente, modifica la demostración de los teoremas en cuestión.

1. EL PROBLEMA

Utilizando la teoría del control óptimo, se plantea un problema en el cual se decide analizar el comportamiento de un país. En este país, el crecimiento de su nivel de capital (y en consecuencia de su producto) está basado principalmente en la toma de deuda. Este comportamiento se acota a un determinado periodo de tiempo.

En este problema se maximizará una función de utilidad social que dependerá tanto del nivel de capital, como del nivel de deuda contraído. La variable de control estará representada por la toma de deuda que decidan realizar las autoridades de este país. Esta toma de deuda a su vez impacta sobre el nivel de capital acumulado, lo que conformará la variable de estado del problema en cuestión. Esta relación queda a su vez expresada en la ecuación de movimiento a la que se encuentra sujeta la maximización.

A su vez, hay que definir el periodo temporal en el que se enmarca este problema de control óptimo. El límite inferior estará dado por el momento en que este país ha tomado la decisión de crecer en base a la toma de deuda, y en consecuencia se puede suponer que el mismo es cero. El límite superior u horizonte temporal de este problema será infinito.

El supuesto de un horizonte temporal infinito, es muy recurrente en problemas de crecimiento económico. Este supuesto se basa en que el proceso de acumulación de capital se dará en forma natural a partir de la contracción de deuda y no hay un momento en que el mismo finalice. Además, suponiendo un horizonte temporal infinito, se facilita el análisis matemático del problema y se evita tener que especificar una condición final para el nivel de capital.

Para este caso en particular se supondrán dos tipos de condiciones sobre el estado final del sistema. En el primer caso no se da ninguna condición final para el nivel de capital acumulado. En el segundo caso, el nivel de capital en el infinito tendrá que superar cierto nivel mínimo de capital preestablecido. A partir de cada uno de estos dos condicionamientos sobre el estado del sistema surgirán diferentes condiciones de transversalidad.

Otra consideración, a la hora de plantear este problema, es que la función de utilidad social que se está maximizando se querrá valuar en valor presente. Por este motivo esa misma función tendrá que estar afectada por un factor de descuento que, a una tasa de interés dada, actualice en cada instante del tiempo el valor de la utilidad social. Esta modificación sobre el funcional objetivo, hará que se sustituya el Hamiltoniano que resulta del problema, por un Hamiltoniano de Valor Presente. A su vez, se tendrán que establecer unas condiciones necesarias reformuladas para este tipo de problema en particular.

Una vez presentados todos los elementos que conforman el problema de control óptimo, se puede escribir el mismo como:

$$\max_{x(t)} \int_0^\infty u(k,x,t)\, e^{-\rho t} dt$$
$$sujeto\ a$$
$$m(k,x,t\ )$$
$$donde\ k(0) = k_0 \wedge \lim_{t\to\infty} k(t)\ \ libre\ ó\ \lim_{t\to\infty} k(t) \geq k_{min}$$
$$x \in R^+$$

Donde el Hamiltoniano de Valor Presente del problema está dado por:

$$H_c(k,x,\lambda,t) = u(k,x,t) + q(t)m(k,x,t)$$

Las condiciones necesarias que surgen del principio de máximo de Pontryagin son:

$(i)\ H_c(k^*,x^*,t,q) \geq H_c(k^*,x,t,q)$

$(ii)\ \dfrac{\partial H_c^*}{\partial q} = \dfrac{\partial k^*}{\partial t} = m(k^*,x^*,t)$

$(iii)\ \dfrac{\partial q}{\partial t} = -\dfrac{\partial H_c^*}{\partial k} + \rho q$

Como se ha mencionado previamente, se analizarán solamente dos tipos de restricciones sobre el estado final del sistema y en consecuencia sólo dos condiciones de transversalidad[1]. Con $\lim_{t\to\infty} q(t)e^{-\rho t} = 0$ como condición de transversalidad si no se impone ninguna restricción sobre el estado final del sistema ($\lim_{t\to\infty} k(t)\ libre$), ó $\lim_{t\to\infty} q(t)e^{-\rho t}\big(k(t) - k^*(t)\big) = 0$ como condición de transversalidad si se impone que el estado final del sistema sea mayor a un valor mínimo predeterminado ($\lim_{t\to\infty} k(t) \geq k_{min}$).

2. CONDICIONES SUFICIENTES

Las condiciones de suficiencia, como en cualquier otro problema de optimización, aseguran el cumplimiento de las condiciones necesarias. Para hallarlas en este trabajo se presenta una adaptación de los teoremas de Mangasarian y de Arrow[2]. Para simplificar la demostración de ambos teoremas, se utilizará la siguiente notación:

$$
\begin{aligned}
&u = u(k, x, t)\\
&u^* = u(k^*, x^*, t)\\
&m = m(k, x, t)\\
&m^* = m(k^*, x^*, t)\\
&H_c = H_c(k, x, t, q)\\
&H_c^* = H_c(k^*, x^*, t, q)\\
&H_c^0 = H_c^0(k, q, t)\\
&H_c^{0*} = H_c^0(k^*, q, t)
\end{aligned}
$$

2.1 Teorema de Mangasarian

El teorema de Mangasarian del que surgen las condiciones suficientes del problema de control óptimo para este problema en particular, se puede enunciar de la siguiente manera.

---

[1] Las diferentes condiciones de transversalidad para un problema de control óptimo con horizonte temporal infinito son analizadas en detalle en "Optimal Control Theory with Economic Applications" de Seierstad, A. & Sydsaeter, K. (1987).

[2] Los enunciados y demostraciones originales de sendos teoremas se pueden encontrar en "Optimización Dinámica" de Cerdá, E. (2001). Además en la publicación "Sufficient Conditions in Optimal Control Theory" de Seierstad, A. & Sydsaeter, K. (1977) se puede encontrar una adaptación de las condiciones de suficiencia para problemas de control óptimo con horizonte temporal infinito.

Teorema: *Sean $x^*(t)$ y $k^*(t)$ los resultados que se obtienen al aplicar el principio de máximo de Pontryagin,* $\forall t \in [0,\infty)$, *al problema de control óptimo. Si se verifica que:*

a- $x \in R^+$, *donde R^+ es un conjunto convexo (reales positivos).*

b- $\partial u/\partial x$ *existe y es continua.*

c- *La función $q(t)$ es continua y diferenciable.*

d- $[\partial H_c^*/\partial x](x^* - x) > 0$

e- *El Hamiltoniano de Valor Presente, H_c, es cóncavo en k y en x.*

Entonces $(x^*; k^*)$ solucionan el problema planteado. En particular, si H_c es estrictamente cóncava la solución es única.

Demostración: El teorema recientemente enunciado quedaría demostrado si se cumple que:

$$\Delta \geq 0$$

$$siendo\ \Delta = \int_0^\infty [u^* - u]e^{-\rho t}dt$$

Por definición de Hamiltoniano de Valor Presente, la función de utilidad social se puede reescribir cómo:

$$u = H_c - qm$$

$$\Delta = \int_0^\infty [H_c^* - H_c]e^{-\rho t}dt + \int_0^\infty q[m - m^*]e^{-\rho t}dt$$

Utilizando el supuesto de que tanto la función de utilidad social, u, como la ecuación de movimiento, m, tienen derivadas parciales primeras continuas tanto en el nivel de deuda, x, como en el nivel de capital, k, se puede enunciar la siguiente definición de concavidad[3] para el Hamiltoniano de Valor Presente.

[3] La definición de concavidad enunciada en este trabajo se puede estudiar del libro *Optimización. Cuestiones, ejercicios y aplicaciones a la economía* de Barbolla, R., Cerdá, E. y Sanz, P.

$$H_c^* - H_c \geq \frac{\partial H_c^*}{\partial k}(k^* - k) + \frac{\partial H_c^*}{\partial x}(x^* - x)$$

De las condiciones necesarias se sabe que:

$$(iii)\ \frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial H_c^*}{\partial k} + \rho q \Rightarrow \frac{\partial H_c^*}{\partial k} = -\frac{\partial q}{\partial t} + \rho q$$

Por lo tanto se puede reescribir la definición de concavidad como:

$$H_c^* - H_c \geq \left[\frac{\partial q}{\partial t} - \rho q\right](k - k^*) + \frac{\partial H_c^*}{\partial x}(x^* - x)$$

Si esta definición de concavidad se introduce dentro de la expresión de Δ se tiene que:

$$\Delta = \int_0^\infty \left[\left[\frac{\partial q}{\partial t} - \rho q\right](k - k^*) + \frac{\partial H_c^*}{\partial x}(x^* - x)\right] e^{-\rho t} dt + \int_0^\infty q \left[\frac{\partial k}{\partial t} - \frac{\partial k^*}{\partial t}\right] e^{-\rho t} dt$$

Reagrupando, se obtiene:

$$\Delta = \int_0^\infty \left[\left[\frac{\partial q}{\partial t} - \rho q\right](k - k^*) + q\left[\frac{\partial k}{\partial t} - \frac{\partial k^*}{\partial t}\right]\right] e^{-\rho t} dt + \int_0^\infty \frac{\partial H_c^*}{\partial x}(x^* - x) e^{-\rho t} dt$$

Por la concavidad de H_c, en particular de $H_c(k^*, x, t, q)$ en la variable x en cada $t \in [0, \infty)$, y haciendo utilización de la condición (i) del principio de máximo se puede ver que:

$$\frac{\partial H_c^*}{\partial x}(x^* - x) e^{-\rho t} > 0 \Leftrightarrow H_c(k^*, x^*, t, q^*) \geq H_c(k^*, x, t, q)$$

Por lo tanto, para que se cumpla que $\Delta \geq 0$, se tiene que verificar:

$$\int_0^\infty \left[\left[\frac{\partial q}{\partial t} - \rho q\right](k - k^*) + q\left[\frac{\partial k}{\partial t} - \frac{\partial k^*}{\partial t}\right]\right] e^{-\rho t} dt \geq 0$$

Reacomodando esta integral se puede ver que:

$$\int_0^{\infty}\left[\left[\frac{\partial q}{\partial t}\right](k-k^*)e^{-\rho t}+q\left[\frac{\partial k}{\partial t}-\frac{\partial k^*}{\partial t}\right]e^{-\rho t}-\rho q(k-k^*)e^{-\rho t}\right]dt$$

La resolución de la misma es la siguiente:

$$\int_0^{\infty}\frac{d}{dt}qe^{-\rho t}(k-k^*)dt = qe^{-\rho t}(k-k^*)|_0^{\infty}$$

Si se tiene en cuenta que $k^*(0)=k(0)=k_0$, el resultado es el siguiente:

$$\lim_{t\to\infty} qe^{-\rho t}\big(k(t)-k^*(t)\big)$$

Por haber supuesto que el estado final del sistema es libre (no hay una condición para k cuando $t\to\infty$), la condición de transversalidad en este sistema indica que $\lim_{t\to\infty} qe^{-\rho t}=0$. En consecuencia, se puede decir que:

$$\lim_{t\to\infty} qe^{-\rho t}(k-k^*)=0$$

Sin embargo hay que remarcar que si se hubiese impuesto como estado final del sistema que $\lim_{t\to\infty} k>k_{min}$ la condición de transversalidad indicaría que:

$$\lim_{t\to\infty} qe^{-\rho t}(k-k^*)\geq 0$$

De esta manera se puede ver que el teorema de Mangasarian queda demostrado para cualquiera de las dos condiciones de transversalidad analizadas ya que con ambas:

$$\Delta\geq 0$$

$$siendo\ \Delta = \int_0^{\infty} [u^* - u] e^{-\rho t} dt$$

Otra manera de enunciar el teorema de Mangasarian consistiría en pedir la concavidad tanto de la función objetivo como de la ecuación de movimiento, ambos elementos constitutivos del Hamiltoniano de Valor Presente. Una demostración del teorema de Mangasarian partiendo de esta premisa daría el mismo resultado que la demostración recientemente realizada.

Seguidamente se expone el teorema de Arrow del cual se desprenden unas condiciones de suficiencia que son más generales que las que surgen del teorema de Mangasarian. Sin embargo, estas condiciones presentan el inconveniente de que no siempre es sencillo comprobar si las mismas se cumplen.

2.2 Teorema de Arrow

El teorema de Arrow reformulado para el problema en cuestión se enuncia de la siguiente manera.

Teorema: *Sean $x^*(t)\ y\ k^*(t)$ los resultados que se obtienen al aplicar el principio de máximo de Pontryagin, $\forall t \in [0, \infty)$ al problema de control óptimo. Si se verifica que:*

- *a- La función $q(t)$ es continua y diferenciable.*
- *b- El Hamiltoniano de Valor Presente Derivado, $H_c^o = \max_x H_c$, es cóncavo en k para cada $\forall t \in [0, \infty)$*

Entonces $(x^*; k^*)$ solucionan el problema planteado. En particular, si H_c^o es estrictamente cóncava la solución es única.

Dentro del teorema enunciado ha aparecido una función que a lo largo del trabajo no había sido definida. Esta función se la conoce como el Hamiltoniano de valor presente derivado. El mismo es una función que surge de la incorporación del resultado de la maximización estática del Hamiltoniano de valor presente controlando por el nivel de deuda contraído. Esto es:

$$H_c^0(k,q,t) = \max_x H_c(k,x,q,t)$$

De este problema se obtiene $x = x^0(k,q,t)$, a partir de lo cual se verificar que:

$$H_c^0(k,q,t) = H_c(k,x^0,q,t)$$

Para la demostración del teorema enunciado, es necesario previamente enunciar la siguiente proposición.

Proposición: *Si x^0 es diferenciable, se verifica que:*

$$\frac{\partial H_c^0(k,q,t)}{\partial k_i} = \frac{\partial H_c(k,x^0,q,t)}{\partial k_i} \ \forall x \in R^+$$

Donde $i = 1,\dots,n$ indica el recorrido de los valores que puede tomar el nivel de capital.

Demostración de la Proposición: Por la definición de Hamiltoniano de valor presente derivado se sabe que:

$$H_c^0(k,q,t) = H_c(k,x^0,q,t)$$

Si se tiene en cuenta que existen n valores posibles que pueden tomar el nivel de capital existente en la sociedad, y m valores para el nivel de deuda contraído, para cada uno de esos valores, se verifica que:

$$\frac{\partial H_c^0(k,q,t)}{\partial k_i} = \frac{\partial H_c(k,x^0,q,t)}{\partial k_i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial H_c(k,x^0,q,t)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j^0}{\partial k_i}$$

También se verifica que:

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial H_c(k,x^0,q,t)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j^0}{\partial k_i} = 0$$

Para esto existe la posibilidad de dos casos. El primero, es una situación en donde el hamiltoniano derivado (que surge de la maximización del hamiltoniano del problema controlando por el nivel de deuda contraído) alcanza el óptimo dentro del conjunto definido para los posibles valores de deuda (reales positivos). Si es así, entonces se cumplirá que:

$$\frac{\partial H_c(k, x^0, q, t)}{\partial x_j} = 0$$

Por lo tanto:

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial H_c(k, x^0, q, t)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j^0}{\partial k_i} = 0$$

El segundo corresponde a una situación en donde el óptimo se alcanza en un punto fuera del conjunto de valores factibles para el nivel de deuda contraído. En tal caso se verificará que:

$$\frac{\partial x_j^0}{\partial k_i} = 0$$

Este resultado se da porque al variar marginalmente uno de los n valores del nivel de capital existente, el valor de la deuda contraída (que no pertenece al conjunto de valores factibles) no varía. En consecuencia, se sigue cumpliendo que:

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial H_c(k, x^0, q, t)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j^0}{\partial k_i} = 0$$

Así la proposición ha quedado demostrada.

Con el resultado obtenido a partir de la proposición enunciada, se puede proceder a la demostración del teorema de Arrow.

Demostración del Teorema: El teorema enunciado quedaría demostrado si se cumple que:

$$\Delta \geq 0$$

$$siendo\ \Delta = \int_0^{\infty} [u^* - u] e^{-\rho t} dt$$

Por definición de Hamiltoniano de Valor Presente Derivado, se sabe que:

$$H_c(k, x, q, t) \leq H_c^0(k, q, t)$$

Y por ser H_c^0 cóncava en el nivel de capital, k, se tiene que:

$$H_c^0 \leq H_c^{0*} + \frac{\partial H_c^{0*}}{\partial k_i}(k - k^*)$$

Teniendo en cuenta que $H_c^0(k^*, q, t) = H_c(k^*, x^*, q, t)$ y la proposición previamente enunciada, la desigualdad anterior se puede reescribir como:

$$H_c(k, x, q, t) \leq H_c(k^*, x^*, q^*, t) + \frac{\partial H_c(k^*, x^*, q^*, t)}{\partial k_i}(k - k^*)$$

Por definición de H_c y utilizando la condición necesaria (iii) que surge del principio de máximo de Pontryagin, se puede reescribir nuevamente la desigualdad como:

$$u + qm \leq u^* + qm^* + \left[-\frac{\partial q}{\partial t} + \rho q\right](k - k^*)$$

Despejando se llega a:

$$u^* - u \geq \left[\frac{\partial q}{\partial t} - \rho q\right](k - k^*) + q\left(\frac{\partial k}{\partial t} - \frac{\partial k^*}{\partial t}\right)$$

$$u^* - u \geq \left[\frac{\partial q}{\partial t}\right](k - k^*) + q\left(\frac{\partial k}{\partial t} - \frac{\partial k^*}{\partial t}\right) - \rho q(k - k^*)$$

Si a esta desigualdad se le aplica el operador Integral y se la multiplica por $e^{-\rho t}$, se obtiene:

$$\Delta \geq \int_0^\infty \left[\left[\frac{\partial q}{\partial t}\right](k-k^*) + q\left(\frac{\partial k}{\partial t} - \frac{\partial k^*}{\partial t}\right) - \rho q(k-k^*)\right] e^{-\rho t} dt$$

Reacomodando se obtiene que:

$$\Delta \geq \int_0^\infty \left[\frac{\partial q}{\partial t}\right](k-k^*)e^{-\rho t} + q\left(\frac{\partial k}{\partial t} - \frac{\partial k^*}{\partial t}\right) e^{-\rho t} - \rho q(k-k^*)e^{-\rho t} dt$$

$$\Delta \geq \int_0^\infty \frac{d}{dt} q(k-k^*)e^{-\rho t} dt = qe^{-\rho t}(k-k^*)|_0^\infty$$

Utilizando que $k^*(0) = k(0) = k_0$, se puede decir que:

$$\lim_{t\to\infty} qe^{-\rho t}\big(k(t) - k^*(t)\big) = 0$$

Por haber supuesto que el estado final del sistema es libre (no hay una condición para k cuando $t \to \infty$), la condición de transversalidad en este sistema indica que $\lim_{t\to\infty} qe^{-\rho t} = 0$. En consecuencia, se puede decir que:

$$\lim_{t\to\infty} qe^{-\rho t}(k-k^*) = 0$$

Sin embargo hay que remarcar que si se hubiese impuesto como estado final del sistema que $\lim_{t\to\infty} k > k_{min}$ la condición de transversalidad indicaría que:

$$\lim_{t\to\infty} qe^{-\rho t}(k-k^*) \geq 0$$

Con lo que queda demostrado que x^* es el nivel de deuda óptimo del problema, con k^* trayectoria óptima del nivel de capital, lo que conforma el teorema enunciado.

3. CONCLUSIONES

En este trabajo se han estudiado los teoremas que dan origen a las condiciones de suficiencia de un problema de control óptimo. La demostración de las mismas incluye las modificaciones que intervienen para el problema planteado. En particular, se ha aplicado la teoría del control óptimo a un problema de crecimiento económico, que considera tanto un horizonte temporal infinito como un factor de descuento que actualiza el valor del funcional objetivo.

Estas modificaciones, al alterar los componentes que conforman el problema de control óptimo, modifican en primera instancia las condiciones necesarias que surgen del principio de máximo de Pontryagin. Estos cambios, a la vez, hacen que se deba modificar también el enunciado y la demostración de los teoremas de suficiencia.

Así, se han presentado tanto el teorema de Mangasarian como el de Arrow incluyendo las respectivas modificaciones en los mismos. Como la mayoría de los condiciones de suficiencia para un problema de optimización, ambos teoremas piden la concavidad de un elemento en particular de la teoría de control óptimo. Esto a la vez que hace que uno sea más general que el otro, plantea diversos niveles de dificultad para demostrar su cumplimiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barbolla, R.; Cerdá, E.; Sanz, P. (2001): *Optimización. Cuestiones, ejercicios y aplicaciones a la economía*. Madrid, Prentice Hall.

Cerdá, E. (2001): *Optimización Dinámica*. Madrid, Prentice Hall.

Chiang, A.; Wainwright, K. (2006): *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*. México, Editorial MacGrawHill.

Seierstad, A.; Sydsaeter, K. (1977): "Sufficient Conditions in Optimal Control Theory" en *International Economic Review*, Vol. 18, No. 2, 367-391.

Seierstad, A. & Sydsaeter, K. (1987): *Optimal Control Theory with Economic Applications.* North-Holland.

Sydsaeter, K.; Strom, A. & Berck, P. (2005): *Economists' Mathematical Manual.* Fourth Edition.

MATHEMATICA EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Silvina Cafferata Ferri
Andrea Campillo
Yalile Srour
Susana Estévez

INTRODUCCIÓN

Distintas investigaciones y publicaciones realizadas (Fernández Casuso, 2000; Gavilán Izquierdo y Barroso Campos, 1999; Santos Trigo y Díaz Barriga, 1999; Veloso, 1994) concuerdan acerca de la complejidad en la formación de futuros profesionales al considerar los cambios permanentes a los que éstos deberán enfrentarse, lo cual implica una formación integral que no puede dejar de considerar los avances técnicos y tecnológicos de nuestra época. En particular, en lo que a Matemática se refiere, el aprendizaje por parte de los estudiantes va más allá de la aplicación de reglas o algoritmos; incluye que entiendan el significado de las ideas matemáticas y desarrollen estrategias y formas de pensar consistentes con el quehacer matemático. Actividades como visualizar, representar y formular relaciones matemáticas aparecen como centrales en las últimas propuestas del currículum matemático de acuerdo con el National Council of Teachers of Mathematics.

Si bien resulta dificultoso centrarse en una única categoría, es nuestra intención presentar una propuesta de trabajo para el dictado de las asignaturas referidas al Análisis Matemático que, a través de diversas herramientas y el recurso informático en particular, se desarrollen no sólo los contenidos propios de la disciplina sino también diferentes tipos de habilidades y estrategias de aprendizaje que evidencien la adquisición de esos conceptos, relacionándolos de ser posible con sus futuras prácticas profesionales a través de diversos tipos de modelización.

1. EL RECURSO INFORMÁTICO EN LA EDUCACIÓN

Muchas de las investigaciones referidas al tema que nos concierne, concuerdan en identificar algunas de las ventajas que tiene la enseñanza asistida por computadora frente a la enseñanza tradicional, como por ejemplo la motivación que produce en los estudiantes, la personalización en el proceso de aprendizaje, permitiendo que cada alumno aprenda a su propio ritmo, la información inmediata que proporciona al estudiante sobre sus respuestas permitiéndole volver sobre sus propios pasos, la utilización por parte del docente de diferentes estrategias didácticas con distintos grupos de estudiantes, entre otras.

Pero si bien pueden considerarse las mencionadas características, quedan por resolver algunos interrogantes, como por ejemplo, ¿qué tareas o problemas ayudan a generar un ambiente donde los estudiantes tengan oportunidades para plantear sus propias preguntas y argumentos de solución?, ¿cómo promover actividades donde los estudiantes puedan desarrollar estos hábitos?, ¿qué recursos informáticos sirven para alcanzar los objetivos previstos y qué aportan al proceso de enseñanza y de aprendizaje?

En nuestra Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional nos sirve como antecedente el proyecto de investigación Aprendizaje de la Matemática Asistido por Computadora -AMAC- que sienta algunas de las bases sobre las que es nuestro interés profundizar, en particular, en la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral, sobre temas específicos y centrales de las asignaturas Análisis Matemático I y Análisis Matemático II de las carreras de Ingeniería en sus diferentes especialidades.

Es nuestra intención continuar el trabajo iniciado, a través de un proyecto de investigación en el que estamos trabajando desde el año 2009, esperando a lo largo de su avance poder aportar además otro tipo de materiales a modo de: guías didácticas para el desarrollo de los contenidos (especializándonos en el aprendizaje del cálculo diferencial e integral), trabajos de campo organizados como aulas taller donde se puedan desarrollar guías de trabajo práctico integradoras que pongan de manifiesto las particularidades del uso de un recurso informático y presentar conclusiones que resulten caracterizadoras de nuestros alumnos y de la formación que estamos brindando.

2. EL SOFTWARE MATHEMATICA COMO EJEMPLO DE RECURSO INFORMÁTICO

De acuerdo con Mora y Rodríguez (2002), la computadora puede ser utilizada como medio de comunicación entre el profesor y el estudiante, con el fin de hacer más eficaz la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática. Básicamente, se trata de aprovechar las capacidades gráficas, de almacenamiento y velocidad de la computadora para presentar al estudiante una serie de situaciones de aprendizaje que permitan al docente ilustrar conceptos y resultados, mientras que el alumno puede experimentar confrontando la teoría con algunos ejemplos o verificar soluciones. La capacidad de graficación de un software como Mathematica constituye una gran herramienta para estos objetivos ya que permite llevar animaciones a la clase para visualizar mejor el conocimiento y permite proporcionar textos interactivos que le ayuden a los estudiantes a visualizar, contrastar sus cálculos y trabajar con funciones sin necesidad de generar ni estar en contacto con complejos códigos.

Todo lenguaje computacional hace de la computadora una herramienta de propósito general, pero entre éstos, Mathematica es uno muy especial por varias razones. Sin disponer de un dominio completo del paquete, en las primeras sesiones de trabajo es posible obtener la solución a una gran cantidad de problemas de la Matemática y de sus aplicaciones. Un extenso conjunto de elaborados métodos pueden ser aplicados directamente, obteniendo un aprovechamiento de la herramienta sin necesidad de ocuparse de ella como un lenguaje de programación. Pero aunque Mathematica dispone de una gran cantidad de procedimientos ya definidos en todos los campos de la Matemática y sus aplicaciones, adquiere su verdadera potencia cuando permite utilizarlos para redefinir y crear nuevos procedimientos. Desde este aspecto, agrega a los tradicionales recursos de los lenguajes de programación, renovados recursos para hacer cálculos numéricos, la construcción de gráficos y nuevas herramientas para hacer cálculo simbólico.

3. EL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN EN DESARROLLO

Desde comienzos de 2009 se está llevando a cabo el trabajo de investigación “El uso de Mathematica en el aprendizaje de los conceptos del cálculo diferencial e integral en carreras de Ingeniería”, el cual se interesa en abordar y dar respuesta al problema

¿Cómo puede introducirse una herramienta informática en el proceso de enseñanza y de aprendizaje de conceptos relacionados al cálculo diferencial e integral en la Universidad?

Dada la amplitud del problema así planteado, especificamos el análisis a la implementación de un software en particular, como es Mathematica. Y circunscribimos también nuestra área de trabajo al ámbito de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Buenos Aires, remitiéndonos entonces sólo a las carreras de Ingeniería en sus distintas especialidades cuando hacemos referencia a los contenidos del cálculo diferencial e integral.

Respecto de los docentes y del proceso de enseñanza, nuestros objetivos son:

- Analizar el modo en que el software puede incorporarse al desarrollo teórico – práctico de la asignatura.
- Elaborar propuestas de inclusión de la herramienta informática en las clases de Análisis Matemático I y Análisis Matemático II.

Respecto de los alumnos y del proceso de aprendizaje, nuestros objetivos son:

- Describir las ventajas y desventajas del uso del software en la adquisición de conceptos matemáticos de las asignaturas Análisis Matemático I y II.
- Analizar el modo en que el software puede incluirse en el desarrollo de diversos tipos de actividades prácticas propias de la asignatura.
- Analizar el resultado de la utilización del software en la adquisición de saberes y representación gráfica, algebraica y numérica.

Se ha elaborado un tutorial que permite a los alumnos conocer ya sea las sentencias básicas que se requieren para la resolución de las primeras actividades como así también otras que permiten analizar con más detalle esa resolución o resolver actividades con mayor grado de complejidad.

Se elaboraron algunas guías de trabajos prácticos donde se secuencian las actividades seleccionadas, y se ha comenzado la implementación de algunas de esas actividades.

4. EJEMPLOS PROPUESTOS EN ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Las actividades desarrolladas fueron diseñadas para integrar los conceptos de: límite, continuidad, asíntotas lineales, derivada y aplicaciones de derivadas al estudio de funciones, fomentando en los estudiantes el análisis de las potencialidades en la utilización de un recurso informático, como es el caso del software Mathematica.

A modo de ejemplo, comentamos a continuación algunas de las actividades diseñadas para la asignatura Análisis Matemático I.

1) Dada la función $f : D_f \to R / f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{4x^4 + 2x^3 - 10x^2 + 4x}$

a) Hallar el dominio y el conjunto de ceros.

b) Indicar las ecuaciones de las asíntotas lineales.

c) Realizar el gráfico de f

d) ¿Cómo se visualizan en el gráfico las discontinuidades de f?

Comparar los resultados obtenidos en los ítems b) y c)

2) Realizar el mismo análisis que en el ejercicio 1) para la función

$$g : D_g \to R / g(x) = \ln\left(-x^4 + x^2 + 2\right)$$

Uno de los objetivos de estos primeros ejercicios es que los alumnos se familiaricen con la sintaxis del software, en lo relativo a la definición de funciones, rever el concepto de dominio y conjunto de ceros, resolver ecuaciones e inecuaciones, para luego pasar a trabajar con conceptos específicos de la asignatura.

El planteo general no se centra solamente en la resolución de cálculos o gráficas mediante la utilización de Mathematica, sino en el análisis e interpretación de resultados obtenidos.

En cuanto a la utilización del software, esto trae como consecuencia la activación de los paquetes incluidos en el programa, la resolución de inecuaciones, etc. lo que constituye un grado de avance en la familiarización con el mismo.

Para el ejercicio Nº 1, el desarrollo de la resolución utilizando Mathematica es el siguiente:

a) Hallar el dominio y el conjunto de ceros.

In[1]:= $f[x\_] = \dfrac{x^2 - 1}{4x - 10x^2 + 2x^3 + 4x^4}$

Out[1]= $\dfrac{-1 + x^2}{4x - 10x^2 + 2x^3 + 4x^4}$

In[2]:= $\text{Solve}\left[4x - 10x^2 + 2x^3 + 4x^4 == 0,\ x\right]$

Out[2]= $\left\{\{x \to -2\},\ \{x \to 0\},\ \left\{x \to \frac{1}{2}\right\},\ \{x \to 1\}\right\}$

En principio, se define la función sobre la cual se va a realizar el análisis, para luego comenzar a trabajar en la obtención del dominio de la función. Es evidente la rapidez y facilidad con la que el programa resuelve las ecuaciones, que en el caso planteado hubiera sido muy dificultoso manualmente. Sin embargo puede notarse la necesidad de los conocimientos matemáticos para saber plantear las ecuaciones correspondientes, ya que la salida que ofrece el software no constituye la respuesta pedida.

In[3]:= $\text{Solve}[f[x] == 0,\ x]$

Out[3]= $\{\{x \to -1\}\}$

En este caso se consideró, al diseñar el ejercicio, que $x = 1$ es una raíz tanto del numerador como del denominador, por lo que podría incurrirse en el error de incluirlo en el conjunto de ceros, si no se considerara el dominio. Para estos casos particulares, si se iguala a cero la función previamente definida, el software halla correctamente sus raíces, evaluando su dominio al indicar las soluciones.

b) Indicar las ecuaciones de las asíntotas lineales.

```
In[4]:= Limit[f[x], x → -2]

Out[4]= -∞
```

```
In[5]:= Limit[f[x], x → 0]

Out[5]= -∞
```

In[6]:= Limit$\left[f[x],\ x \to \frac{1}{2}\right]$

Out[6]= ∞

```
In[7]:= Limit[f[x], x → 1]
```

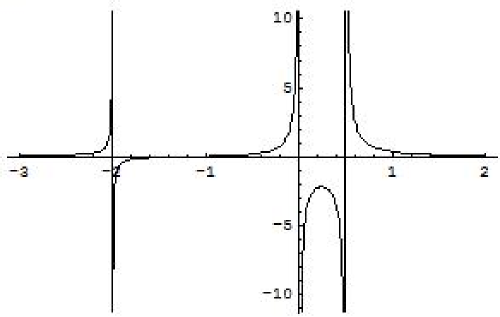
Out[7]= $\frac{1}{3}$

```
In[8]:= Limit[f[x], x → ∞]

Out[8]= 0
```

En este caso, los conocimientos adquiridos permiten plantear los límites correctos para la obtención de las ecuaciones de las asíntotas. Asimismo, este cálculo de límites y su posterior interpretación permite evaluar y clasificar los tipos de discontinuidades que se presentan en cada caso.

c) Realizar el gráfico de *f*

```
In[9]:= Plot[f[x], {x, -3, 2}]
```




```
Out[9]= - Graphics -
```

d) ¿Cómo se visualizan en el gráfico las discontinuidades de *f* ? Comparar los resultados obtenidos.

El objeto de esta pregunta es hacer reflexionar a los alumnos sobre las limitaciones del software, y la necesidad de interpretar los resultados obtenidos.

Para el caso de las discontinuidades evitables, el software realiza la gráfica con trazo continuo, sin evidenciar especialmente el caso de un punto en el que se presenta este tipo de discontinuidades. Es el caso de la discontinuidad que *f* presenta en $x = 1$.

Si consideramos el resultado obtenido para el límite de la función cuando $x \to -2$, la gráfica de la función debería "dirigirse hacia abajo", en el entorno de *x* = -2. Sin embargo, este comportamiento sólo se observa para valores de *x* que tienden a -2 por derecha. Se plantea entonces la necesidad de calcular los límites laterales, ya que el software calcula por *default* sólo el límite por derecha. En este caso, a través una nueva sentencia se obtiene los resultados que se corresponden con lo que se visualiza en la gráfica.

```
In[10]:= Limit[f[x], x → -2, Direction → 1]

Out[10]= ∞

In[11]:= Limit[f[x], x → -2, Direction → -1]

Out[11]= -∞
```

Otro ejemplo de ejercicios propuestos es el siguiente:

3) Dada la función $h : D_h \to R \,/\, h(x) = \begin{cases} 2^{x^2} & \text{si } x \le 1 \\ -\dfrac{5}{2}x + \dfrac{9}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Analizar si la función es continua en *x* = 1

b) Realizar el gráfico correspondiente

c) Estudiar analíticamente si *h* es derivable en su dominio

4) Realizar el mismo análisis que en el ejercicio anterior para la función

$$t : D_t \to R \,/\, t(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+5}{1-x} & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{|x-2|}{x-2} & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

En estos casos, se plantea el análisis de funciones definidas por ramas o por intervalos. El programa Mathematica permite definir de distintas maneras este tipo de funciones, de forma tal que los alumnos podrán elegir la que resulte más sencilla o más conveniente de acuerdo con la cantidad de ramas que se definan en la función. Para este ejercicio se utilizó la siguiente sentencia:

In[1]:= $\mathtt{h[x\_] = Which}\left[x \le 1,\ 2^{x^2},\ x > 1,\ -\dfrac{5}{2}\,x + \dfrac{9}{2}\right]$

Out[1]= $\mathtt{Which}\left[x \le 1,\ 2^{x^2},\ x > 1,\ \dfrac{1}{2}\,(-5)\,x + \dfrac{9}{2}\right]$

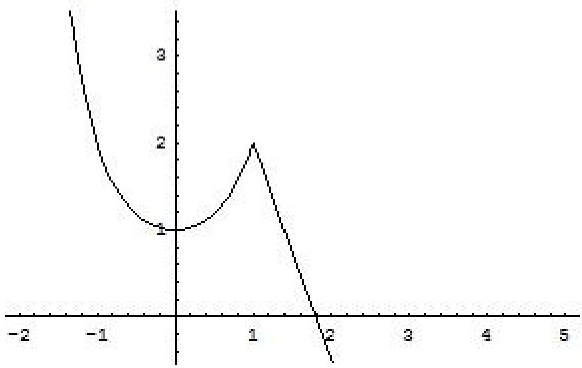
a) Analizar si la función es continua en *x* = 1

```
In[2]:= h[1]

Out[2]= 2

In[3]:= Limit[h[x], x → 1, Direction → 1]

Out[3]= 2

In[4]:= Limit[h[x], x → 1, Direction → -1]

Out[4]= 2
```

Para la resolución de este ejercicio se aplica la metodología tradicional en la evaluación de la continuidad en un punto: evaluar la función en ese punto, evaluar el límite de la función en dicho punto, y comparar los valores obtenidos. En este caso, el cálculo del límite en x = 1 deberá efectuarse calculando los límites laterales. Para este ejercicio, la función resulta continua en el punto.

b) Realizar el gráfico correspondiente

```
In[5]:= Plot[h[x], {x, -2, 5}]
```




```
Out[5]= - Graphics -
```

Mediante la representación gráfica de la función se corrobora el análisis realizado para la continuidad de *f*.

c) Estudiar analíticamente si *h* es derivable en su dominio.

In[6]:= $\text{Limit}\left[\dfrac{h[x]-h[1]}{x-1},\ x\to 1,\ \text{Direction}\to 1\right]$

Out[6]= Log[16]

In[7]:= $\text{Limit}\left[\dfrac{h[x]-h[1]}{x-1},\ x\to 1,\ \text{Direction}\to -1\right]$

Out[7]= $-\dfrac{5}{2}$

Para evaluar la derivabilidad de *h* en $x = 1$ se recurre al cálculo de la derivada por definición, al considerar el modo en que está definida la función. Dado que los límites no son iguales, la función no es derivable en $x = 1$.

Si se desea obtener la derivada mediante una sentencia en Mathematica, el resultado es el siguiente:

In[8]:= h'[x]

Out[8]= $\text{Which}\left[x \leq 1,\ 2^{1+x^2}\,\text{Log}[2]\,x,\ x > 1,\ -\dfrac{5}{2}\right]$

Se debe tener en cuenta que el software no resuelve analíticamente la derivabilidad en $x = 1$ por lo que incluye ese punto en el dominio de la función derivada, aunque no corresponde hacerlo. En el caso de esta sentencia también deberá realizarse, de manera similar a lo sucedido en ítems anteriores, una interpretación del resultado para evaluar correctamente la respuesta obtenida.

5. OBSERVACIONES SOBRE LA IMPLEMENTACIÓN

Estos ejercicios se implementaron en el Laboratorio de Matemática dependiente de la UDB Matemática del Departamento de Ciencias Básicas de la Facultad Regional Buenos Aires.

Este Laboratorio de Matemática fue creado para realizar proyectos de investigación, trabajos prácticos relativos a las materias dictadas por la UDB Matemática, dictado de cursos extracurriculares inherentes a la aplicación de la matemática en la ingeniería y la utilización del software correspondiente.

En la implementación de las actividades diseñadas para la asignatura Análisis Matemático I, se les entregó a los alumnos los enunciados de los ejercicios, y un detalle de los comandos básicos del programa Mathematica que necesitarían utilizar en las resoluciones.

Las primeras actividades se presentaron en un archivo del software en el que se incluían los comandos a aplicar, pero sin las salidas. Se propuso a los alumnos analizar dichas salidas utilizando esta ayuda, para resolver luego las otras actividades, teniendo como referencia las sentencias y operaciones realizadas en los casos anteriores.

Durante la implementación de esta experiencia se realizaron algunas observaciones como por ejemplo:

- Por el hecho tener escritas las sentencias (entradas) del primer ejercicio generó que se limitaran a presionar la tecla Enter, sin observar ni analizar lo que aplicaban. Tampoco interpretaron las salidas del programa en función de los conceptos y conocimientos adquiridos en la materia. Por ejemplo, en el caso del ejercicio 1 no les sorprendió que en el cálculo de la asíntota vertical de la función el límite en $x = -2$ diera $-\infty$ en tanto que en la gráfica se observaba que la función tiende a $+\infty$ cuando los valores de x se acercan a -2 por izquierda. No detectaron que el límite calculado por *default* por el programa es el límite por derecha. Los alumnos apreciaron rápidamente este tipo de situaciones cuando los docentes se lo hicieron notar, pero no pudieron detectarlas por sí mismos en la mayoría de los casos.
- Para resolver los segundos ejercicios de cada bloque, mecanizaron lo utilizado en la primera resolución. Les costó en principio pensar y analizar las nuevas situaciones planteadas, para luego utilizar la computadora como herramienta; en general, intentaron resolver los ejercicios de manera similar a los anteriores, aún cuando debían analizar las diferencias, y esperaban contar con una sentencia o una instrucción que les resuelva de manera directa lo pedido. Por

ejemplo, en el ejercicio 2 no sabían qué rango de valores asignarle a la variable *x* para realizar la gráfica, si bien habían calculado antes el dominio de la función como el intervalo $(-\sqrt{2}\,,\sqrt{2})$. A su vez, para este ejercicio muchos alumnos plantearon el cálculo de asíntotas horizontal y oblicua, cuando el cálculo de los límites involucrados no tienen sentido para el dominio de la función definida.

- Al solicitarles a los alumnos que entreguen las resoluciones de los ejercicios se detectaron en ellos dificultades para utilizar otros programas como es el caso del procesador de textos y la utilización de su editor de ecuaciones. Además, tienden a considerar que la resolución en el programa Mathematica equivale a la resolución o a la respuesta del ejercicio, aún cuando deben considerar de otra manera la forma de escribir la respuesta o el análisis y la justificación que deberían agregarle.
- Debe limitarse el tiempo destinado a la implementación de las actividades, resultando más productivo utilizar las computadoras en períodos más cortos y con una cantidad limitada de ejercicios.

Esta implementación nos permitió elaborar algunas conclusiones, que han generado cambios para las actividades programadas para el presente año.

6. EJEMPLOS PROPUESTOS EN ANÁLISIS MATEMÁTICO II

En relación con la asignatura Análisis Matemático II, se diseñaron algunas actividades, de las cuales mostramos a continuación algunos ejemplos. El primer grupo de ejercicios planteados tiene como objetivo la determinación de dominios naturales de campos escalares, campos vectoriales y funciones vectoriales, para luego avanzar en la gráfica de campos escalares, sus líneas de nivel y sus campos de gradientes.

Las gráficas mencionadas a través del software Mathematica permiten realizar un análisis más exhaustivo y con otros matices, lo que no es sencillo de realizar trabajando con las gráficas en papel.

En todos los casos los ejercicios consisten en identificar y manejar con fluidez cada una de las funciones mencionadas, reconociendo claramente las dimensiones de los dominios y los conjuntos de llegada en cada uno de los ejemplos planteados.

Para aquellos alumnos que no conozcan previamente el software, estos primeros ejercicios permiten la familiarización con el mismo. Y aquellos que lo conocen, pueden rever algunas instrucciones conocidas como así también comenzar a trabajar ahora con las sintaxis y los paquetes específicos, propios de las resoluciones que se plantean en más de una variable. Por ejemplo:

1) Determine y grafique el dominio natural D de las siguientes funciones:

a) $f : D_f \to R \,/\, f(x, y) = \ln(\,(x+1)(y-2x)\,)$

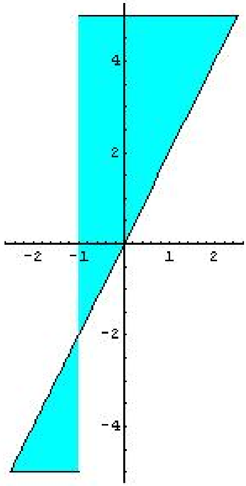
b) $f : D_f \to R \,/\, f(x, y) = \dfrac{\ln(xy)}{\sqrt{2-x-y}}$

Para el ítem a), se presenta el siguiente desarrollo en Mathematica:

```
In[1]:= << Algebra`InequalitySolve`

In[2]:= InequalitySolve[(x + 1) (y - 2 x) > 0, {x, y}]

Out[2]= x < -1 && y < 2 x || x > -1 && y > 2 x
```

```
In[3]:= << Graphics`InequalityGraphics`
```

```
In[4]:= InequalityPlot[ (x + 1) (-2 x + y) > 0, {x, -5, 5}, {y, -5, 5} ]
```




```
Out[4]= - Graphics -
```

Vemos que en este ejercicio, la resolución implica la apertura de dos paquetes: el de resolución de inecuaciones y el de gráfico de inecuaciones.

En el caso de la respuesta a la inecuación, el alumno comienza a familiarizarse con la notación del software, que indica la unión e intersección de conjuntos de manera no tradicional. Para la notación habitual en matemática, el domino quedaría expresado por:

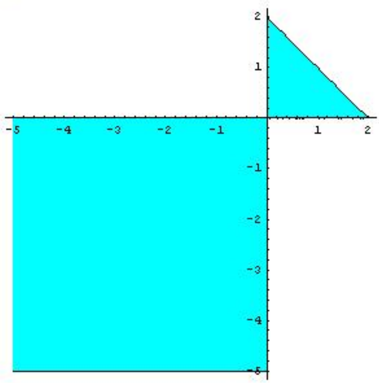
D = $\{(x, y) \in R^2 /(x < -1 \wedge y < 2x) \vee (x > -1 \wedge y > 2x)\}$

En el caso de la gráfica de dicho conjunto dominio, el alumno deberá interpretar el resultado en función de sus conocimientos matemáticos, ya que el programa dibuja la frontera del recinto mediante una línea continua en el caso de la recta $y = 2x$ en tanto no coloca una línea visible en el caso de la recta $x = -1$. Pareciera que el tratamiento de los puntos de dicha frontera no es el mismo para el dominio establecido. Sin embargo, en ambos casos los puntos de la frontera no pertenecen al dominio de la función, lo que en las gráficas tradicionales hechas en papel se representa con línea de puntos.

Asimismo el software dibuja una línea en el borde superior y en el borde inferior, similar a la que caracteriza a la recta $y = 2x$, lo que podría identificarse como otros conjunto de puntos que representan una frontera del dominio. Sin embargo, el conjunto D no está acotado. En los gráficos tradicionales hechos en papel no se colocaría ninguna línea divisoria en la parte superior e inferior del gráfico.

Para resolver el ítem b), es decir, para evaluar el dominio natural de $f(x,y) = \dfrac{\ln(xy)}{\sqrt{2-x-y}}$, se plantea el siguiente desarrollo:

```
In[6]:= InequalitySolve[x y > 0 && 2 - x - y > 0, {x, y}]

Out[6]= x < 0 && y < 0 || 0 < x < 2 && 0 < y < 2 - x

In[7]:= InequalityPlot[x y > 0 && 2 - x - y > 0, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
```




```
Out[7]= - Graphics -
```

En este caso, como en los anteriores hay que tener cuidado con las fronteras que se grafican para el conjunto D: los ejes no pertenecen al dominio de la función (en papel se graficarían en línea punteada), el segmento de recta $y = 2 - x$ ubicado en el primer cuadrante tampoco pertenece al conjunto evaluado, y el segmento inferior en el tercer cuadrante no corresponde como frontera del conjunto ya que no está acotado.

El segundo grupo de ejercicios propuestos para la asignatura Análisis Matemático II está relacionado con la gráfica de líneas de nivel, campos de gradientes y gráficas de campos escalares.

En este caso, la gráfica de curvas de nivel superpuesta a la del campo de gradientes, permite visualizar en algunos ejemplos la propiedad de perpendicularidad del gradiente respecto de los conjuntos de nivel de los campos escalares. Asimismo puede aplicarse la propiedad relativa a la dirección de máxima y mínima derivada, asociadas al gradiente, para evaluar en qué puntos del dominio podrían producirse los máximos y mínimos de la función.

Veamos el siguiente ejercicio como ejemplo de lo mencionado:

2) Dado el campo escalar $f : D_f \to R \,/\, f(x, y) = \operatorname{sen}(y) \cdot \cos(x)$

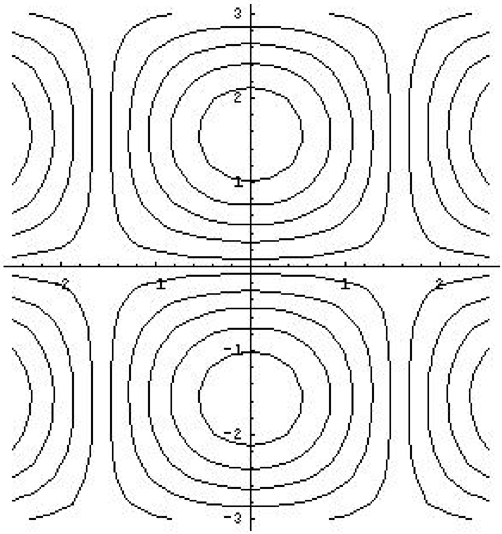
a) Graficar las líneas de nivel de *f*
b) Graficar el campo de gradientes de *f*
c) Superponer ambos gráficos. ¿Cómo resulta ser el campo de gradientes respecto de las curvas de nivel?
d) Analizar el comportamiento del campo de gradientes para evaluar si hay algún punto en el cual la función alcance un máximo o mínimo. Justificar.
e) ¿Cuál es el módulo del vector gradiente en los puntos en los cuales se producen extremos? Señalar en la gráfica todos los puntos en los cuales el gradiente sea nulo. Evaluar analizando el campo de gradientes, si en todos los casos están asociados a extremos de la función. Justificar.
f) Realizar la gráfica de la función *f* y corroborar las respuestas dadas para los ítems anteriores.

Para la resolución del ejercicio, se presenta el siguiente desarrollo en Mathematica:

a)

```
In[1]:= f[x_, y_] = Sin[y] Cos[x]

Out[1]= Cos[x] Sin[y]
```

```
In[2]:= ContourPlot[f[x, y], {x, -2.5, 2.5}, {y, -3, 3}, Axes → True,
        ContourShading → False, Frame → False, AxesOrigin → {0, 0}]
```



```
Out[2]= - ContourGraphics -
```

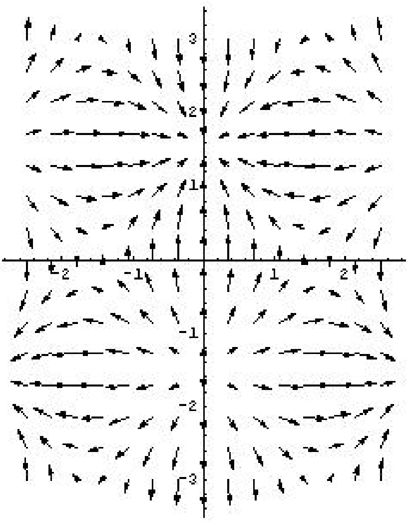
En el caso de este ejercicio, se realiza la gráfica de las curvas de nivel sin el sombreado de fondo que indica los valores que van tomando las imágenes de la función, a fin de evaluar con claridad las propiedades de los campos de gradientes y analizar su comportamiento.

Para este tipo de gráfica se incorporan algunas instrucciones específicas, que, además de anular el sombreado de las curvas de nivel, coloca los ejes cartesianos de la manera tradicional en que se hace habitualmente.

Otra instrucción que se introduce es similar a lo ya realizado en Análisis Matemático I en cuanto a la definición de la función específica sobre la cual luego se hará el análisis. Esto permite que las posteriores instrucciones que se refieran a dicha función simplemente se indiquen con la expresión que la define, en este caso f [x,y], en lugar de transcribir la fórmula algebraica asociada.

b) Para la gráfica del campo de gradientes correspondiente, es necesario abrir el paquete asociado a la gráfica de campos vectoriales:

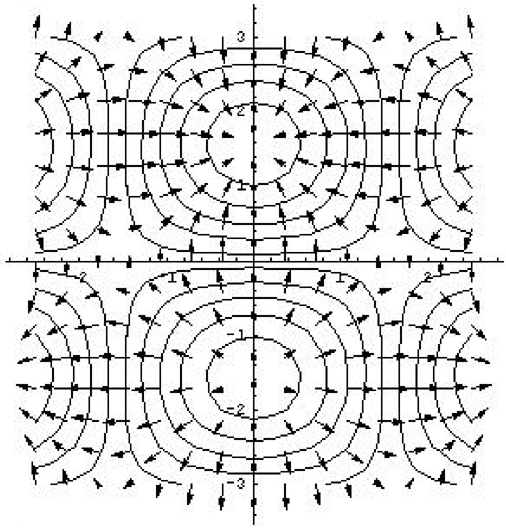
```
In[3]:= << Graphics`PlotField`

In[4]:= PlotVectorField[{- Sin[y] Sin[x], Cos[x] Cos[y]}, {x, -2.5, 2.5},
          {y, -3, 3}, Axes → True]
```




```
Out[4]= - Graphics -
```

En los ítems c), d) y e) se pide la superposición de las curvas de nivel y del campo de gradientes asociados a la función, a fin de realizar las interpretaciones gráficas de los mismos, que luego se corroborarán en forma analítica:

```
In[5]:= Show[%2, %4]
```




```
Out[5]= - Graphics -
```

Cuando se superponen los gráficos de las curvas de nivel y el campo de gradientes, se ve claramente la propiedad de perpendicularidad de este último respecto de los conjuntos de nivel. Esta propiedad será enunciada y demostrada formalmente en clases posteriores a la de la implementación áulica del ejercicio. Sin embargo, los alumnos pueden visualizar esta propiedad en algunos casos particulares, lo que permite una familiaridad con la propiedad que facilita su posterior formalización y demostración.

Para analizar los extremos de la función en virtud del campo de gradientes se aplica la propiedad de las funciones diferenciables, en las cuales el gradiente en un punto indica la dirección de máxima derivada en dicho punto, y el vector opuesto al gradiente, la dirección de derivada mínima. Considerando que la derivada es una tasa de cambio, el gradiente indicará la dirección en la cual esa tasa de cambio se hace mayor (o menor en el caso de la dirección opuesta al gradiente). Esto permite que los alumnos evalúen aquellos puntos del dominio a los cuales "apuntan" todos los gradientes: dichos puntos tendrán como imagen un máximo de la función.

En el caso de los puntos del dominio de los cuales “salen” todos los gradientes, podemos afirmar que la función alcanzará un mínimo en dichos puntos.

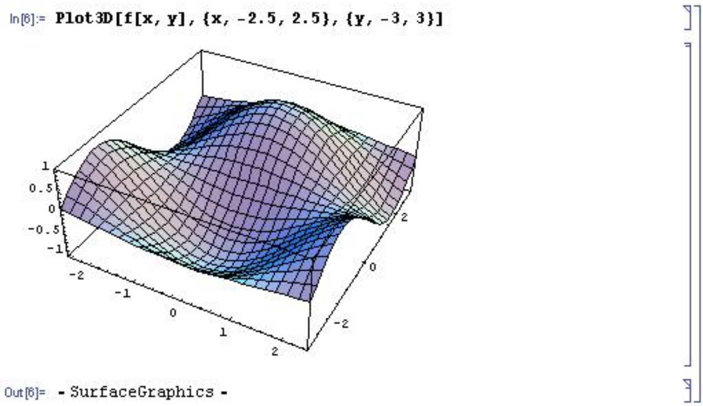
En este ejercicio en particular, y en el rango de valores que se le asignó a las variables, hay dos puntos en los cuales se producirán extremos: un máximo y un mínimo. Dada la periodicidad de las funciones seno y coseno, puede intuirse que el patrón de las curvas de nivel y del campo de gradientes se repetirá en todo R^2, y se podrá generalizar el análisis de este subconjunto del dominio, para extenderlo a todo el plano.

Analizando el módulo de los vectores del campo de gradientes, se puede concluir que en los puntos del dominio en los cuales la función alcanza un máximo o un mínimo, dicho gradiente es nulo. La condición necesaria para la existencia de extremos puede evaluarse en algunos casos particulares a través del análisis de campo de gradientes, lo que reforzará la interpretación geométrica en relación al plano tangente.

Además, el gráfico del campo de gradientes permite ver otros puntos del dominio en los cuales el gradiente es nulo: sin embargo en estos casos el estudio del campo de gradientes permite descartar la existencia de extremos, ya que los vectores ni “apuntan” todos a ese punto ni “salen” todos del mismo. Formalmente, en el estudio de funciones, éstos se definen como puntos de ensilladura de la superficie. En el sector del domino que se analiza en este ejercicio aparecen dos puntos en los cuales el gradiente es nulo y donde la función no presenta extremos.

La gráfica del campo escalar, imposible de realizar a mano, permite corroborar las respuestas deducidas mediante el análisis del campo de gradientes.

f)



En la gráfica de la superficie asociada al campo escalar pueden visualizarse los puntos en los cuales se alcanzan máximos y mínimos locales, y aquellos puntos de gradiente nulo que no resultan extremos.

7. CONSIDERACIONES FINALES

Para el presente año hemos planificado diversas implementaciones:

- Realizar las mismas actividades de la implementación anterior en Análisis Matemático I incorporando las modificaciones comentadas en las observaciones.
- Con el mismo grupo de alumnos realizar otra implementación, que no sólo incluya los contenidos vistos en las actividades anteriores sino también los correspondientes al segundo cuatrimestre.
- En Análisis Matemático II se implementarán actividades, que incluyen los ejemplos propuestos en el presente trabajo.

A partir de los resultados obtenidos y de las observaciones que puedan surgir de esa puesta en práctica, continuaremos realizando los ajustes correspondientes para lograr una mejora en el proceso de enseñanza – aprendizaje en el cálculo diferencial a integral utilizando la computadora como herramienta didáctica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Carrillo de Albornoz, A.; Llamas, I. (2005): *Mathematica 5: aplicaciones para PC*. México, Ed. Alfaomega.

Castillo, E. (1994): *Mathematica*. Madrid, Ed. Paraninfo.

Favieri, A. y otros. (2009): *Aprendiendo cálculo diferencial con Wolfram Mathematica*. Buenos Aires, TM Grupo Editor.

Fernández Casuso, M. (2000): "Perfeccionamiento de la enseñanza – aprendizaje del tema de límite de funciones con el uso de un asistente matemático", en *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3 (2), 171-188.

Gavilán Izquierdo, J.; Barroso Campos, R. (1999): "El ordenador en la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas: una propuesta". *Educación Matemática*, 11 (3), 95-103.

Meza Cascante, L. (2000): "Sobre el papel de las computadoras en el proceso educativo". *Matemática, eduación e Internet*, 1 (1), en http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/ContribucionesN12000/Meza1_archivos/SobreElPapeldelCmputador.htm

Mora, W.; Rodriguez, J. (2002): "Conceptos de cálculo diferencial presentados por medio del computador usando Mathematica". *Matemática, educación e Internet*, 3 (3), en http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/ContribucionesV3n3002/0calculoJulioWalter/pag1.html

Pérez López, C. (1995): *Cálculo numérico y simbólico con Mathematica*. Madrid, RA-MA.

Santos Trigo, L.; Díaz Barriga, E. (1999): "Validación y exploración de métodos de solución a problemas propuestos a través del uso de la tecnología". *Educación Matemática*, 11 (2), 90-101.

Veloso, M. (1994): *"Calculadora gráfica. Un recurso innovador en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas".* Trabajo presentado en las VI Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, organizado por la Sociedad Extremeña de Educación Matemática, Universidad de Extremadura.

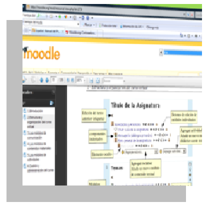
TROPAREVSKY, M.; GARCÍA R. (1997): *Matemática con Mathematica*. Buenos Aires, Nueva Librería.

LA PRÁCTICA DOCENTE Y LAS TICs: ESTADO Y PERSPECTIVAS. PROPUESTA DE UN PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

María Teresa Casparri
Juan Ramón Garnica Hervás
Aída B. Castegnaro de Pasarin

1. CONSTRUCCIÓN DE CURSOS VIRTUALES. SU ESTADO ACTUAL

1.1 Presentación de la plataforma MOODLE



Los estudiantes en nuestra Facultad de Ciencias Económicas tienen la opción de elegir la modalidad en que cursarán cada una de sus asignaturas integrantes del Plan de Estudios.

Al respecto, cada Departamento será el encargado de ofrecer los cursos en cada cuatrimestre. Estos cursos podrán ser presencial, a distancia en sus dos modalidades, semipresencial e "Internet", intensivo y magistral.

El presente trabajo está enfocado para la modalidad de cursos por internet de asignaturas del área matemática, específicamente de "Cálculo Financiero" y "Estadística", correspondientes al Ciclo Profesional y al Ciclo General, respectivamente.

Sobre esta alternativa de cursada resulta interesante mencionar la Resolución del C.D. N° 468 del 24/07/2006 porque establece que además de otra modalidad, en la de distancia se incorporen la mayor cantidad posible de las asignaturas de grado de la currícula de la Facultad, que hasta esa fecha no se ofrecían.

Es indudable que el espíritu de la norma es aumentar la inclusión de materias bajo esta modalidad de cursada, cuyos aspectos también se encuentran regulados en los Puntos 4 "Métodos de Conducción del Aprendizaje" y 5 "Métodos de Evaluación" de los programas correspondientes, de acuerdo al Anexo 1 de la Resolución CD 4422 del 10/11/97 "Aprobación de normas para la presentación de los programas" que establece para cada uno de los puntos citados, una definición por separado del curso, sea presencial, magistral o a distancia, con los requisitos mínimos de cada uno.

En los hechos, del análisis observacional en el presente cuatrimestre 2011, surge que las dieciséis asignaturas correspondientes a los dos tramos del Ciclo General también son ofrecidas como cursos a distancia y la mitad de estas, son totalmente por internet, tal es el caso de las materias del área de matemática. Recordemos que en el año 1999, este departamento fue pionero en la incorporación de las primeras asignaturas totalmente por internet, nos estamos refiriendo a "Cálculo Financiero" y "Algebra", en un proyecto a cargo de la Dra. María Teresa Casparri y en el que hemos sido partícipes activos en la construcción de sus contenidos y tutoría después.

Con relación a las asignaturas del ciclo Profesional en este tipo de modalidad, se está incrementando gradualmente la oferta curricular de materias.

Ahora bien, en lo referente a las necesidades que cubre el desarrollo de un curso no presencial debemos disponer de un *"entorno virtual"*, medio en el cual todos los protagonistas, tanto profesor-tutor como alumnos, nos vincularemos a través de los recursos y actividades, y nos comunicaremos. El buen funcionamiento del soporte tecnológico hará posible la existencia de la interacción virtual por medios telemáticos que posibilitará formar un contexto también virtual, entendido como las características que en nuestra actividad educativa enmarcan las condiciones en donde los docentes-tutores llevamos a cabo nuestras acciones de enseñanza y de aprendizaje virtual. Está claro en la necesidad de un equipo con conectividad para utilizar, como mínimo, el entorno virtual en donde está alojado el curso.

Desde el punto de vista docente, nos conduce a pensar en el diseño del curso en un sitio, que en nuestro caso, ya viene dado por la Institución Educativa. No es el único, pensemos que conviven muchas plataformas tecnológicas conocidas con las siglas LMS (Learning Management System), es decir "Sistemas de gestión de aprendizaje" y hasta la fecha hemos conocido dos que fueron los utilizados en la F.C.E., pero muchos de nosotros fuimos aprendiendo otras por curiosidad, ya que las hay de acceso libre con un simple trámite para conseguir la aprobación del alta del curso que estamos abriendo en alguna plataforma que alguien nos la recomendó y que cubre la necesidad de utilizarla como refuerzo a nuestras clases con la modalidad presencial, o bien la que debemos emplear como formación en el caso de modalidad totalmente por internet. Sin embargo, todas comparten un elemento común que es nuestro espacio de acción: el aula virtual en donde el alumno debe cumplir su rol activo para la generación de conocimientos participando en ese ambiente educativo virtual.

Muchos docentes tienen la creencia de que por el hecho de no asistir presencialmente a un curso tradicional, debemos trabajar menos, a los que les respondemos que este tipo de modalidad no representa aislamiento, pues el hecho de no verse durante 4 VH, 6VH semanales no implica no comunicarse, sino todo lo contrario, el diálogo se da a través de los materiales que colguemos en el sitio y de la interacción tanto sincrónica como asincrónica. Y ello posibilita que la presencia del profesor-tutor es mayor al tiempo de una cursada presencial, por lo que estamos permanentemente comunicados, pues caso contrario el efecto motivación se pierde ante la falta de respuesta a requerimientos del alumno.

Dicha modalidad reviste de mayor potencialidad que un curso tradicional y expone al alumno a una cultura digital que ya es parte de la cultura misma. Pensemos en que la utilización de estos entornos adicionalmente generan otro tipo de competencias específicas en la tecnología digital información, deben ser pensados como complemento a los cursos presenciales, pues posibilitan la alfabetización digital de nuestros estudiantes y no sólo cubre contenidos en el área informacional sino también en lo atinente a la interacción social, y asimismo permite el monitoreo del nivel del curso, sus progresos y los podemos conducir a verdaderos trabajos colaborativos con organización de tiempos, sin necesidad de combinar encuentros físicos que a veces resultan difíciles.

Pero el entorno, o bien contexto virtual, no es estático, sus potencialidades crecen a lo largo del tiempo. Algunos progresan y otros quedan más rezagados y los docentes no podemos estar alejados de esa realidad. Por eso nuestra institución universitaria se encuentra en camino de implementar una nueva plataforma, comúnmente denominada Moodle, que es el acrónimo de "Modular Object Oriented Dynamic Environment", es decir entorno de aprendizaje dinámico orientado a objetos y modular. Se está imponiendo el término Moodlear, verbo que responde al proceso de aprender deambulando con un enfoque social constructivista[1] a partir de la conformación de una comunidad de aprendizaje.

El desafío presente se encuentra pues, en el diseño de nuestros cursos con "Moodle" que a hoy, ofrece una visión superadora en lo relacionado al proceso de enseñanza-aprendizaje frente a otras aulas virtuales. Nada podemos decir del futuro por la propia dinámica y crecimiento tecnológico en donde mejores entornos podrán reemplazarlo.

Para el diseño, selección y elaboración de materiales de enseñanza, debemos desterrar la idea acerca de la simple transferencia electrónica en forma de documento Word, Pdf o similares, el simple correo. Además del repositorio de archivos que conforman la estructura del curso debemos pensar nuevas y mejores actividades que van más allá del foro, el chat , para dar paso a otras funcionalidades que ofrece esta plataforma y responden a las diferentes actividades en forma de cuestionarios, taller, wiki, lecciones, diario, que giran en torno a un complejo pensamiento de la forma en que se aprende y el cómo lo aprende.

El Moodle resultaría una plataforma virtual poderosa que nos obliga a repensar inteligentemente formas de enseñanza más integrales, hasta podríamos decir más interdisciplinarias, considerando diferentes áreas relacionadas al saber específico de nuestro fragmento disciplinar y ese sí que representa nuestro desafío. No hay duda de que para una enseñanza actual requerimos de las Tics, fomentando la autonomía en nuestros estudiantes, pero adicionalmente nos exige un mayor compromiso docente en los procesos de comprensión de los mismos estudiantes.[2] Frente a lo comentado, somos conscientes de la necesidad de construir una didáctica tecnológica en términos de Edith Litwin[3]y en la aplicación de las TICs como herramienta mediadora de innovación tecnológica y ello representa un desafío tanto para el cambio como para generar una didáctica de

---

[1] http://docs.moodle.org/es/Acerca_de_Moodle

[2] LITWIN, Edith Las nuevas tecnologías en las instituciones educativas: reflexiones para una inversión sustentable. Tendencias, análisis y prospectiva. Disponible en: http://www.litwin.com.ar/site/Articulos7.asp

[3] LITWIN, Edith. Diseño e implementación de propuestas en línea de educación a distancia Publicado en: www.educ.ar disponible en http://www.litwin.com.ar/site/Articulos3.asp

autor[4] que nos posibilita potenciar y enriquecer la propuesta educativa, abriendo un abanico de dispositivos didácticos, sin que signifique desterrar las tecnologías transmisivas, similares a la modalidad presencial de clase tradicional en el sentido de que un docente imparte un determinado contenido, sino de sumar tecnologías por la propia fuerza educativa que nos ofrecen las tecnologías interactivas y las colaborativas gracias al "entorno virtual"

1.2 Presentación del sumario

Este Sumario presentado a modo de resumen como adjunto al trabajo, contiene una serie de íconos referenciados que haciendo click en cada uno de ellos despliega una diversidad de recursos y actividades.

Los **recursos** en formato Word, pdf, diapositivas, planillas de cálculo, enlaces de archivos en distintos formatos persiguen al igual que las actividades un sentido didáctico-pedagógico para la generación y comprensión de los contenidos, lo que sigue un orden que va desde "Orientaciones para el estudio", "Materiales de comprensión" y concluye con "A modo de cierre".

Simples recomendaciones para un buen diseño de entornos de aprendizaje y de materiales son que deberán planificarse contenidos y actividades de tal manera que contemplen:

- Los conocimientos previos del estudiante a los fines de crear puente con los nuevos. Tipo actividades autodiagnóstica.
- Los objetivos de conocimiento que perseguimos sobre cada tema seleccionando el o los recurso/s que mejor se adapten al fin específico.
- El proceso interno de aprendizaje individual.
- El proceso de construcción de aprendizaje social.
- El respeto de las necesidades, de los intereses y de las formas de aprendizaje de los alumnos.

---

[4] LITWIN, Edith (2009) :"El impacto de las nuevas tecnologías en el oficio del alumno universitario". Primer Congreso Internacional de Pedagogía Universitaria. Buenos Aires. Argentina

- El alcance del conocimiento que pretendemos sean los contenidos mínimos de la asignatura.
- El entretejido de los diferentes espacios contextuales.
- La inquietud epistémica sobre conocimientos más allá de los objetivos del curso, pero que le permite al alumno a partir de lo construido seguir profundizando. Apunta a la zona de desarrollo próximo.

1.2.1 Sumario de "Cálculo Financiero"

1.2.2 Sumario de "Estadística"

2. IMPLEMENTACIÓN DE CURSOS VIRTUALES. PROPUESTA DE UN PROYECTO DE INVESTIGACIÓN. PERSPECTIVAS

2.1 Primera línea de trabajo: cursos virtuales interactivos y trabajo colaborativo

Las **actividades** que pueden diseñarse con esta plataforma son una herramienta potencial del moddle pues permiten tanto la generación como el refuerzo de contenidos, competencias y entrenamientos de todo tipo y pueden ser tipificadas en **actividades interactivas:** lecciones, auto diagnóstico con cuestionarios de distintos tipos, hotpotatoes , enlaces con simuladores, utilización de software específicos hasta foro, wiki, chat que por el tipo de participación en la actividad son potenciales para transformarse en algo más y encuadrarse en verdaderas **actividades colaborativas a** las que le incorporamos también talleres, entre otras de las ofrecidas por Moodle.

Asimismo brinda una gama de tecnologías comunicacionales tradicionales sincrónicas y asincrónicas como diario del alumno.

2.2 Segunda línea de trabajo: cursos virtuales contextuales. Fundamentación

En el ámbito de las estrategias de enseñanza y aprendizaje, han surgido nuevos paradigmas, como es el caso del denominado "Aprendizaje Contextual", el que resulta de aplicación en asignaturas del área de Matemática en general.

En el ámbito de nuestra Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires, en breve estará disponible a través de la CITEP (Centro de Innovación en Tecnología y Pedagogía) la plataforma MOODLE para el diseño de aulas virtuales necesarias para los cursos por internet, lo que hace posible la aplicación de TICs en el proceso de enseñanza aprendizaje.

2.2.1 Marco teórico

2.2.1.1 Aprendizaje contextual

En el enfoque del aprendizaje contextual se sostiene que la mayoría de los alumnos aprende mejor cuando pueden conectar los nuevos conceptos con el mundo real a través de sus propias experiencias o las experiencias que puedan darle sus profesores.

Es así, que aquellos estudiantes que normalmente tienen un bajo desempeño en cursos abstractos como los de matemática y ciencias, podrían obtener niveles más altos si se les enseña usando un método contextual.

La propuesta mantiene el rigor académico de los cursos pero introduce ejemplos y actividades del mundo real con aplicaciones y problemas que remiten al alumno a casos propios del ambiente laboral y de la vida. De acuerdo a la teoría del aprendizaje contextual, el aprendizaje se genera cuando el alumno procesa información y conocimientos nuevos de tal manera que les da sentido en su marco de referencia (su propio mundo interno de memoria, experiencia y respuesta) y se da cuando la mente encuentra el significado en el contexto, o sea, en el ámbito donde la persona se encuentra, y que lo hace así buscando relaciones que tengan sentido y parezcan ser útiles.

Frente a un paradigma tradicional caracterizado por contenidos teóricos que una vez expuestos eran seguidos secuencialmente por ejercicios ó problemas, tal como resulta ser la organización de los libros de textos e incluso de los cursos universitarios, se presenta un nuevo paradigma en el cual las actividades referidas a la solución de casos concretos, en tiempo y espacio, se introducen en forma conjunta con los contenidos a manera de disparador de éstos. Se entretejen en una interacción contenidos y actividades y también en éstas en si mismas, atento las características del proceso de solución de problemas.

Se concluye entonces que dichas actividades referidas a *casos* concretos resultan el *contexto práctico* de los contenidos que se persigue introducir, en tanto que dicho proceso requiere de un soporte que satisfaga las necesidades de *interactividad* en el desarrollo de las actividades[5]. Sin embargo, entendemos como el principio del aprendizaje contextual que debe ser nutrido de otros espacios que comentaremos más adelante en nuestra hipótesis.

---

[5] Enseñanza Contextual de Matemática: Piedra Angular del Cambio de Paradigmas © 2003, CORD Publicado por: CORD Communications, Inc. Estados Unidos de América.

2.2.1.2 Un medio necesario: TICs

Las denominadas Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (Tics) ocupan un lugar central en la sociedad y en la economía del fin de siglo, con una importancia creciente.

El concepto de Tics surge como convergencia tecnológica del hardware, el software y las infraestructuras de telecomunicaciones. La asociación de estas tres tecnologías da lugar a una concepción del proceso de la información.

Se denominan Tecnologías de la Información y las Comunicaciones, en adelante Tics, al conjunto de tecnologías que permiten la adquisición, producción, almacenamiento, tratamiento, comunicación, registro y presentación de informaciones, en forma de voz, imágenes y datos contenidos en señales de naturaleza acústica, óptica o electromagnética.

En el ámbito educativo, estas tecnologías intervienen como recurso innovador si se gestiona pensando en su uso para el proceso de enseñanza y aprendizaje y así aparecen en este escenario como elemento facilitador, que promueve el desarrollo de aptitudes intelectuales y facilita la adquisición de habilidades y destrezas, que se sigue según las necesidades del estudiante y el propósito docente. Su incorporación en el campo educativo principalmente ofrece la oportunidad de trabajar en un ambiente que propicia el trabajo colaborativo entre estudiantes y entre estudiante-docente.

Debemos pensar en el trabajo colaborativo que responde a un contexto socio cultural donde se define el "cómo aprendemos" (socialmente) y "dónde aprendemos" (en red) y la red es ese entorno conversacional que permite que un sujeto pueda contrastar su punto de vista personal con el de otro hasta llegar a un acuerdo.[6]

2.2.2 Antecedentes en la temática

Las plataformas virtuales utilizadas en la enseñanza universitaria han venido excluyendo los conceptos propios de nuevos paradigmas tales como el aprendizaje contextual y el aprendizaje colaborativo, no obstante

[6] Zañartu Correa, Luz María "Aprendizaje colaborativo:una nueva forma de diálogo interpersonal y en red"Disponible en:
http://www.educrea.cl/documentacion/articulos/aprendizaje/09_aprendizaje_colaborativo.html

resultar aquellas un instrumento particularmente eficiente para éstos. Por tal razón, el presente trabajo trata sobre la formulación de un Programa de Investigación relativo a dos asignaturas del área matemática en las carreras de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires, específicamente Cálculo Financiero y Estadística para su aplicación en plataformas virtuales, a fines de introducir en éstas los principios del aprendizaje contextual y colaborativo.

A partir de una conceptualización general sobre lo que entendemos por educación y aprendizaje, y tomando como referencia las plataformas virtuales que se venían utilizando en los cursos con modalidad a distancia que constituyen antecedentes sobre los que surgen nuestras reflexiones como corazón del proceso investigativo, nos pone en el compromiso de enfrentarnos como docentes en una actitud reflexiva e indagatoria acerca de las diferentes estrategias que podemos utilizar teniendo en cuenta las variedad de tecnologías que actualmente nos ofrecen las plataformas virtuales, cuyas características son la gran potencialidad en los recursos que se pueden emplear como contenidos de enseñanza y aprendizaje.

Es así que nos enfrentamos a los nuevos paradigmas relativos a aprendizaje contextual y aprendizaje colaborativo, especificando las distintas dimensiones del primero, a los que denominaremos espacios contextuales, los que formarán parte de la configuración actual de la nueva plataforma virtual y del programa de investigación en curso cuyos contenidos forman parte del presente trabajo[7].

2.2.3 Problema

Nos planteamos los siguientes interrogantes

a.- ¿Resulta en una mejora de eficiencia el uso de las estrategias que proponen el paradigma del "aprendizaje contextual" en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en general y de las asignaturas Estadística y Cálculo Financiero en particular?

b. - ¿Cuáles son los alcances del contexto?

---

[7] Cfr. "DESARROLLO PROFESIONAL DOCENTE Y NUEVOS PARADIGMAS EN EL MARCO DE LAS TICS: UNA PROPUESTA PARA LA IMPLEMENTACIÓN DE CURSOS VIRTUALES CONTEXTUALES". Presentado en la convocatoria ABA 2010/2011. "La Aplicación de las Nuevas Tecnologías en el Aula".

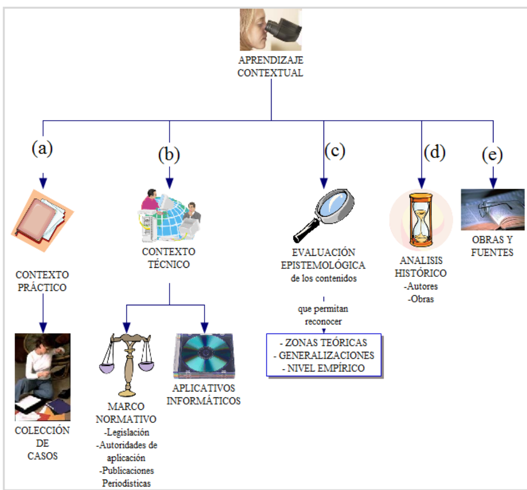
c.-¿El proceso de enseñanza-aprendizaje aumenta su eficiencia a través del uso de las TICs?

2.2.4 Hipótesis

Las estrategias propuestas por el paradigma del aprendizaje contextual, aumentan la eficiencia del proceso de enseñanza-aprendizaje para las asignaturas Estadística y Cálculo Financiero, correspondientes al área matemática.

El alcance queda determinado por una serie de espacios contextuales. En tal sentido la *colección de casos* referida en el marco teórico representa el *contexto práctico* de los contenidos auxiliado del contenido técnico (soporte informático, legislaciones y autoridades de aplicación que enmarcan el y regulan el objeto de estudio y es recomendable su expansión hacia nuevos territorios o *contextos teóricos*, a saber:

- La evaluación epistemológica de los contenidos, a fines de diferenciar en éstos sus zonas teóricas, sus generalizaciones y su nivel empírico.
- El análisis histórico que permita conocer los autores en el marco de la época donde éstos se situaran.
- El estudio de obras y fuentes.
- El uso de TICs aumenta la eficiencia del proceso de enseñanza-aprendizaje.



2.2.5 Metodología

2.2.5.1 Desarrollo del modelo de espacios contextuales

1.- Existe un paradigma tradicional que se construye a partir de la lógica deductiva en donde los contenidos teóricos preceden a las actividades prácticas y son ejecutadas en forma individual por los estudiantes. En contraposición nos encontramos con un nuevo paradigma en donde las actividades preceden y conducen a los contenidos teóricos y son ejecutadas en forma grupal. *" Primero la práctica, la acción; luego la teoría"* expresa Martínez, J. y continúa *"Cualquier intento de facilitar el aprendizaje, por los medios que sea, que no aporta desde los intereses, las preocupaciones, las necesidades de aquéllos a quienes va dirigido, está condenado a tener problemas. El alumno es el verdadero protagonista".*[8]

El nuevo paradigma reconoce entonces dos dimensiones:

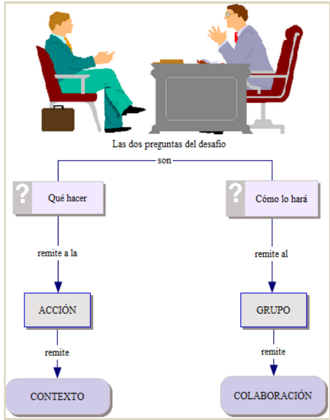
- los casos y actividades que conforman el contexto de los contenidos teóricos –dimensión contextual- y
- las formas en que se desarrollan las prácticas y actividades del grupo mediado por la colaboración entre sus miembros, en el proceso del conocimiento -dimensión colaborativa-

Si pensamos en una entrevista laboral en donde el entrevistador enfrenta a la otra parte ante una pregunta como la del gráfico, *"No quiero que me exprese lo que Usted aprendió, sino necesito saber lo que Usted es capaz de hacer y cómo lo hará"* tiene su respuesta en la dimensión contextual mientras que la última parte la responde la dimensión colaborativa.

Si traducimos el gráfico "El qué hacer" remite a la acción, y "Cómo lo hará" remite al grupo. A su vez, la acción remite al contexto y el grupo remite a la colaboración.

---

[8] Martínez, Javier (2004): El papel del tutor en el aprendizaje virtual. Disponible en: http://www.uoc.edu/dt/20383/index.html



Nos conduce a pensar en el aprendizaje realmente obtenido en su formación. El aprendizaje como fenómeno individual e interno es mental y tenemos que tener cuidado porque ocurre también, aunque el sujeto no se lo proponga, vivimos aprendiendo. Resulta una construcción que hacen los sujetos a partir de la interacción con el medio y con los otros. Si bien este aprendizaje puede resultar de una tarea grupal, el que se genera es en definitiva, individual, entendido como propio y diferente en cada individuo.

Consecuentemente se dan dos formas de relacionar al aprendizaje y es en función a:

- ✓Lo que el sujeto realmente adquiere
- ✓Los procesos o caminos que el sujeto utiliza para adquirir el conocimiento.

Si consideramos al aprendizaje como resultado directo de la enseñanza al estilo conductista se conoce que mucho de lo obtenido queda en la memoria a corto plazo, pues el proceso de aprendizaje es un proceso complejo en el que subyacen diferentes instancias de deconstrucción, contrastación y re significación para el sujeto que aprende. Por eso, en contraposición al estilo anterior aparece el constructivista que va de la mano de la psicología cognitiva. Esta perspectiva sostiene que el alumno interaccionando con los otros y con los objetos del mundo aprende y que resulta ser un aprendizaje constructivo porque se dan reestructuraciones profundas en una lógica "equilibrio-desequilibrio-reequilibrio", es decir frente a una idea previa (equilibrio) en esa interacción desencadena el conflicto que desacomoda dicha idea (desequilibrio), se asimila si adquiere significado y finaliza con un retorno al equilibrio cuando ese aprendizaje se acomoda en un nuevo esquema[9], de esta forma conseguirá aprendizajes duraderos y parecería que el aprendizaje contextual es aquel que se genera en el individuo a través de un repertorio de acciones que iremos explicando en el desarrollo del trabajo y que le permite al alumno atribuir sentido .

El presente enfoque sostiene que la mayoría de los alumnos aprende mejor cuando pueden conectar los nuevos conceptos con el mundo real a través de sus propias experiencias o las experiencias que puedan darle sus docentes. Es así que aquellos alumnos que normalmente tenían bajo desempeño en cursos abstractos, en disciplinas del área de matemática y otras ciencias, podrían lograr niveles más altos si se les enseña usando un método contextual.

2.- La propuesta mantiene el rigor académico de los cursos pero introduce ejemplos y actividades del mundo real con aplicaciones y problemas que remiten al alumno a casos propios del ambiente laboral y de la vida.

El enfoque contextual reconoce, como ya expresamos, que el aprendizaje es un proceso complejo y multifacético que va más allá de las metodologías prácticas, basadas en la relación estímulo-respuesta. Según la teoría del aprendizaje contextual, el aprendizaje tiene lugar sólo cuando el alumno procesa información y conocimientos nuevos de tal manera que les da sentido en su marco de referencia (su propio mundo interno de memoria, experiencia y respuesta). Parte del supuesto que la mente busca, de forma natural, el significado en el contexto—o sea, en el ámbito donde la persona se encuentra—y que lo hace así buscando relaciones que tengan sentido y parezcan serle útiles.

Si bien es el estudiante el responsable último del aprendizaje y es quien en la medida que construye su conocimiento va atribuyendo sentido

---

[9] Stigliano, Daniel y Gentile, Daniel "Enseñar y aprender en grupos cooperativos". (2006) Buenos Aires. Ediciones Novedades Educativas.

y significado a los contenidos de enseñanza que le impartimos, el docente es quien asume la responsabilidad de orientar esa construcción en una determinada dirección. Así, la construcción del conocimiento es una construcción orientada a compartir significados y sentidos.[10]

3.- Consecuentemente, podemos afirmar que dado un paradigma tradicional caracterizado por contenidos teóricos que una vez expuestos eran seguidos secuencialmente por ejercicios ó problemas, tal como resulta ser la organización de los libros de textos e incluso los cursos universitarios tradicionales, se presenta un nuevo paradigma.

En dicho nuevo paradigma, las actividades referidas a la solución de casos concretos, en tiempo y espacio, se introducen en forma conjunta con los contenidos a manera de disparador de éstos a los fines de crear y recrear el conocimiento. Se plantea entonces una interacción entre contenidos y actividades. Y también en éstas en sí mismas, atento las características del proceso de solución de problemas.

Se concluye entonces que dichas actividades referidas a casos concretos resultan el contexto práctico de los contenidos que se persigue introducir, en tanto que dicho proceso requiere de un soporte que satisfaga las necesidades de interactividad en el desarrollo de las actividades.[11]

Esta interactividad hace desaparecer la secuencialidad como característica tradicional en la enseñanza y aprendizaje. Adicionalmente, damos paso a la zona de desarrollo próximo con una enseñanza que apunta a ese nivel de desarrollo potencial, considerando la potencialidad del sujeto que aprende, preparando materiales que bien pensados, planificados, diseñados para tal fin no limitan las capacidades reales de cada alumno, en donde debemos dejar una puerta semiabierta para que antes del cierre de cada tema, unidad temática o parte de ellas se genere una inquietud epistémica en aquellos alumnos que quieran proseguir por el camino del conocimiento.

---

[10] Cesar Coll. Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento. España. Editorial Paidós.
[11] Enseñanza Contextual de Matemática: *Piedra Angular del Cambio de Paradigmas* © 2003, CORD Publicado por: CORD Communications, Inc. Estados Unidos de América.).

Como expresara Edgar Morin, "*No tenemos las llaves que abran las puertas de un futuro mejor. No conocemos un camino trazado. Sin embargo, podemos tratar de hacer realidad nuestros objetivos…*"

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Casparri, M. T.; Garnica Hervás, J. R.; Castegnaro de Pasarin, A. B.: "Desarrollo Profesional Docente y nuevos paradigmas en el marco de las Tics: Una propuesta para la implementación de cursos virtuales contextuales". ABA 2010/11. Área de Formación y desarrollo profesional docente. La aplicación de las nuevas tecnologías en el aula.

Casparri, M. T.; Garnica Hervás, J. R.; Castegnaro de Pasarin, A. B.: "El desafío de repensar materiales didácticos para el logro de aprendizajes significativos". Trabajo presentado en la 6° Jornada de Material Didáctico y Experiencias Innovadoras en Educación Superior. U.B.A. Agosto 2010.ISBN 978-950-29-1223-3 Fecha de Catalogación: 14/07/2010 1. Educación Superior CDD 378. http://docs.moodle.org/es/Acerca_de_Moodle

Center for Occupational Research and Development (CORD) (2003): Enseñanza Contextual de Matemática: Piedra Angular del Cambio de Paradigmas. Publicado por: CORD Communications, Inc. Estados Unidos de América.

Coll, C.: (1993): *Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento*. España, Editorial Paidós.

Garnica Hervás, J. R.; Castegnaro de Pasarin, A. B. (2010): "La profesionalización docente y las TICs como medio en la triangularidad didáctica". Trabajo presentado en X Jornadas de Tecnología Aplicada a la Educación Matemática Universitaria. Facultad de Ciencias Económicas, UBA.

Litwin, E.: Las nuevas tecnologías en las instituciones educativas: reflexiones para una inversión sustentable. Tendencias, análisis y prospectiva. Disponible en: http://www.litwin.com.ar/site/Articulos7.asp

Litwin, E.: Diseño e implementación de propuestas en línea de educación a distancia Publicado en www.educ.ar. disponible en:
http://www.litwin.com.ar/site/Articulos3.asp

Litwin, E. (2009):"El impacto de las nuevas tecnologías en el oficio del alumno universitario". Primer Congreso Internacional de Pedagogía Universitaria. Buenos Aires, Argentina.

Martínez, J. (2004): El papel del tutor en el aprendizaje virtual. Disponible en http://www.uoc.edu/dt/20383/index.html

Zañartu Correa, L. M.: "Aprendizaje colaborativo: una nueva forma de diálogo interpersonal y en red". Disponible en: http://www.educrea.cl/documentacion/articulos/aprendizaje/09_aprendizaje_colaborativo.html

EL USO DEL *MATHEMATICA* PARA EL ESTUDIO DE LAS DERIVADAS PARCIALES

Luisa L. Lazzari
Andrea Parma
María José Fernández

INTRODUCCIÓN

La inclusión de herramientas computacionales en la enseñanza de la matemática constituye un cambio profundo en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Se trata de una innovación en las técnicas que se emplean en el aula.

El objetivo principal de este trabajo es enriquecer las clases de Análisis Matemático II, mediante la incorporación de elementos informáticos, en particular el programa *Mathematica* que resulta de gran utilidad debido a sus capacidades simbólicas, numéricas y gráficas y permite al mismo tiempo el desarrollo de procedimientos para diversas aplicaciones. La importancia del uso de esta herramienta radica en su gran potencial debido a que puede ser utilizada por el estudiante no sólo a lo largo de su carrera, sino también en el ejercicio de su profesión.

En este trabajo se emplea el software *Mathematica* como recurso didáctico para la construcción del concepto de derivadas parciales. Se enfatiza la interpretación geométrica de las mismas, teniendo en cuenta las ventajas de este programa para visualizar gráficos. Se analiza la relación entre continuidad y derivabilidad para campos escalares y se tratan casos en que no existen derivadas parciales.

Se desarrollan diferentes aplicaciones económicas de las derivadas parciales y se realiza la representación geométrica.

1. CÁLCULO DE DERIVADAS PARCIALES CON EL *MATHEMATICA*

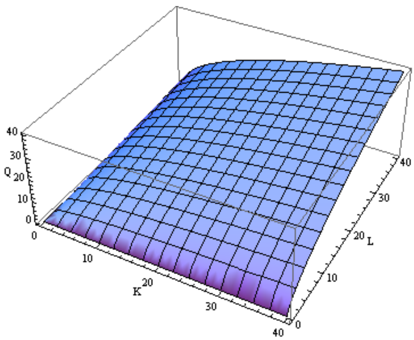
1.1 Productividad marginal

Se considera a continuación la función de producción de Cobb-Douglas $Q(K,L) = K^{0.4} L^{0.6}$ donde Q, K, L representan, respectivamente, producción, capital y trabajo, todas no negativas.

Se representa la superficie de producción en el primer octante, con el comando "Plot3D" del *Mathematica*:

```
Q[K_, L_] := K^0.4 L^0.6

g1 = Plot3D[Q[K, L], {K, 0, 4}, {L, 0, 4}, AxesLabel → {"K", "L", "Q"}]
```

Figura 1. Función de producción de Cobb-Douglas



En este caso podemos definir dos derivadas parciales $\frac{\partial Q}{\partial K} = Q_K$ y $\frac{\partial Q}{\partial L} = Q_L$ llamadas productividades marginales. Se realiza el cálculo de las mismas para *L*=*K*=2 con el *Mathematica*:

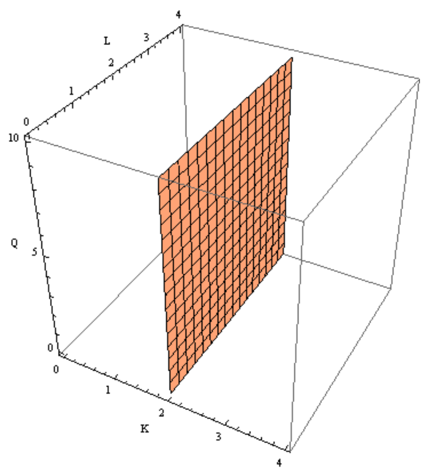
∂_L Q[K, L]	∂_K Q[K, L]
$\frac{0.6\,K^{0.4}}{L^{0.4}}$	$\frac{0.4\,L^{0.6}}{K^{0.6}}$
∂_L Q[K, L] /. {K → 2, L → 2}	∂_K Q[K, L] /. {K → 2, L → 2}
0.6	0.4

La derivada $\frac{\partial Q}{\partial L}_{(2,2)} = Q_{L\,(2,2)} = 0.6$ representa la tasa de cambio de la producción con respecto a cambios infinitesimales en el trabajo, mientras se mantiene constante el factor capital, en este caso *K*=2. De forma similar, $\frac{\partial Q}{\partial K} = Q_K = 0.4$ representa la tasa de cambio de la producción con respecto a cambios infinitesimales en el capital, mientras se mantiene constante el factor trabajo *L*=2.

Geométricamente, la función de producción $Q(K,L) = K^{0.4}\,L^{0.6}$ es una superficie, tal como se muestra en la Figura 1. El dominio de dicha función es todo el cuadrante no negativo del plano base *K*, *L.*

Si se mantiene invariante el factor capital en *K*=2 (Figura 2) y se considera únicamente variaciones en el factor trabajo, geométricamente se obtiene la intersección de la superficie $Q(K,L) = K^{0.4}\,L^{0.6}$ con el plano *K*=2 (Figura 3), generándose una curva $Q(2,L)$ (Figura 4 y 5) que representa el producto físico total del trabajo para una cantidad fija de capital *K*=2.

Figura 2. Plano K=2




```
g2 = ContourPlot3D[K == 2, {K, 0, 4}, {L, 0, 4}, {z, 0, 10}, AxesLabel → {"K", "L", "Q"}]
```

Figura 3. Intersección de la superficie de producción con el plano K=2

```
Show[g1, g2]
```

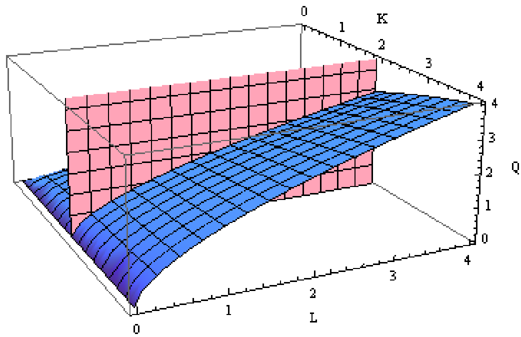


Figura 4. Producción total para K=2 en el espacio

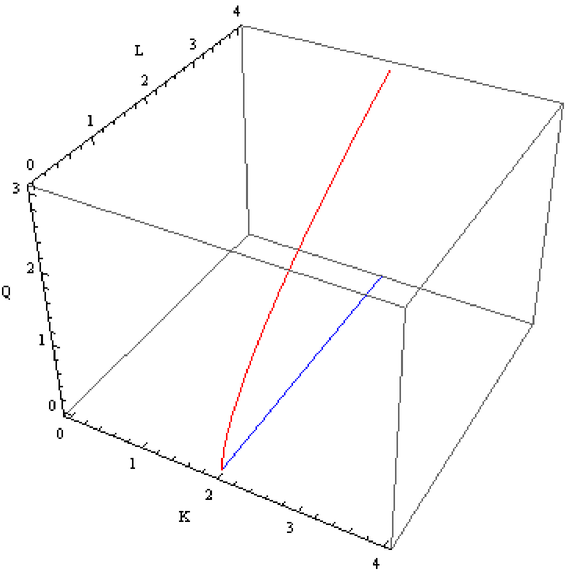
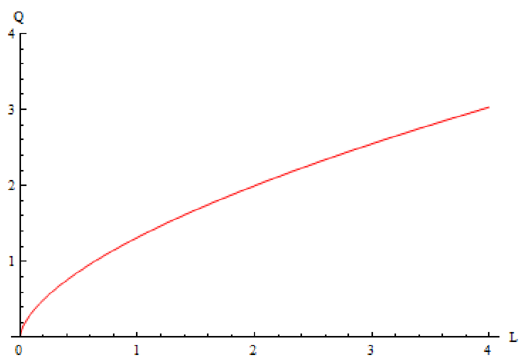


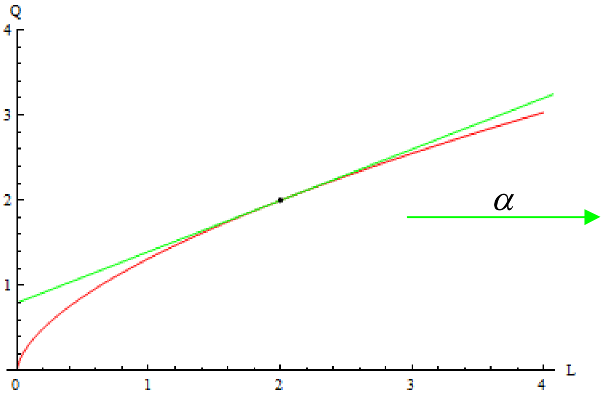
Figura 5. Curva $Q\,(2,L)$

```
a = Plot[Q[2, L], {L, 0, 4}, PlotRange → {0, 4}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0], AxesLabel → {"L", "Q"}]
```



La pendiente de dicha curva en (2,2) representa la interpretación geométrica de la derivada parcial $\left.\dfrac{\partial Q}{\partial L}\right|_{(2,2)} = Q_{L\,(2,2)} = tg\ \hat{\alpha} = 0.6$ (Figura 6).

Figura 6. Productividad marginal con respecto al trabajo en (2,2)



En el caso normal, la productividad marginal con respecto a cualquier factor es positiva, es decir, a medida que uno de los insumos crece (siendo constante el otro) también aumenta la producción. Por ejemplo, para el caso de la función de Cobb-Douglas definida, la productividad marginal respecto al trabajo es:

$$Q_L = \frac{0.6\ \ K^{0.4}}{L^{0.4}} > 0$$

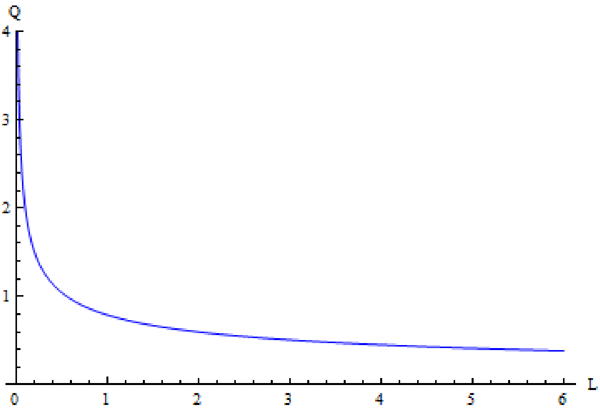
Para *K*=2

$$Q_{L(2,L)} = \frac{0.6\ \ 2^{0.4}}{L^{0.4}}$$

Sin embargo, como uno de los insumos crece, manteniéndose constante el otro, la producción aumenta con tasa decreciente, hasta alcanzar un punto en el cual no hay un incremento adicional, y de hecho ocurre un descenso en la producción total a medida que se emplean unidades adicionales del factor productivo considerado. Este comportamiento característico de la función de producción se conoce como ley de productividad marginal decreciente. Se observa en la gráfica de $Q_{L(2,L))}$ que es decreciente (Figura 7).

Figura 6. Productividad marginal con respecto al trabajo para K=2

$$d = \text{Plot}\left[\frac{0.6\grave{}\ 2^{0.4\grave{}}}{L^{0.4\grave{}}}, \{L, 0, 6\}, \text{PlotRange} \to \{0, 4\}, \text{PlotStyle} \text{->} \text{RGBColor}[0, 0, 1], \text{AxesLabel} \to \{\text{"L"}, \text{"Q"}\}\right]$$



En este caso, $Q_{LL} = -0.24 \;\; 2^{0.4} L^{-1.4} < 0$, es decir se trata de una curva convexa.

1.2 Demanda marginal

1.2.1 Bienes complementarios

A continuación, se realiza el mismo procedimiento anterior para el caso de las cantidades demandas *x* e *y* de dos bienes *X* e *Y*, ambas dependientes de sus respectivos precios unitarios, *p* y *q*.

$x[p\_, q\_] := \dfrac{1}{p^2 q}$	$y[p\_, q\_] := \dfrac{1}{p\, q}$
$p \geq 0,\; q \geq 0,\; x \geq 0$	

Como las funciones de demanda precedentes dependen de dos variables independientes y son continuas, podrán ser representadas por una superficie denominada superficie de demanda en el primer octante.

En las Figuras 7, 8 y 9 se representa con el *Mathematica* la superficie de demanda $x=f(p,q)$, el plano $q=2$ (se considera cualquier valor constante de q) y la intersección de la función de demanda con el plano.

Figura 7. Función de demanda x=f(p,q)

```
g1 = Plot3D[x[p, q], {p, 0, 4}, {q, 0, 4}, AxesLabel → {"p", "q", "x"}]
```

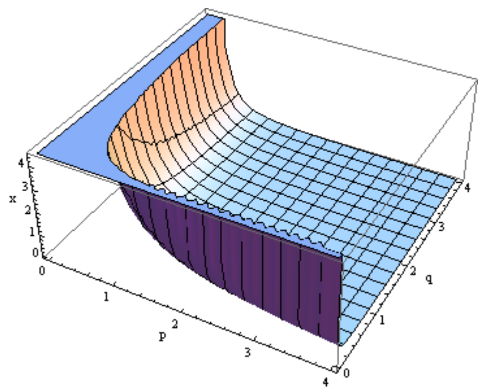


Figura 8. Plano q=2

```
g2 = ContourPlot3D[q == 2, {p, 0, 4}, {q, 0, 4}, {x, 0, 10}, AxesLabel → {"p", "q", "x"}]
```

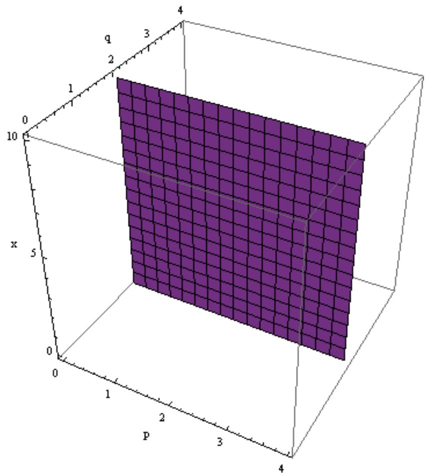
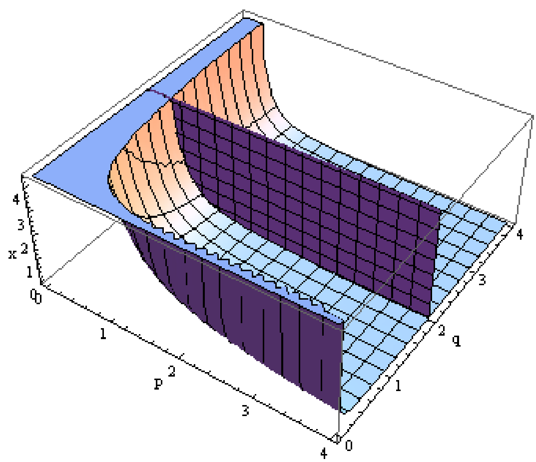


Figura 9. Intersección de la superficie de producción con el plano q=*2*

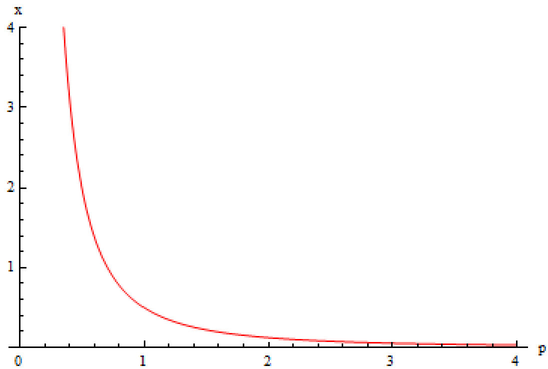
```
Show[g1, g2]
```



Al considerar q constante, se obtiene una función decreciente de p, es decir, a medida que p aumenta, x disminuye. Éste es el caso de los bienes típicos, donde $\frac{\partial x}{\partial p} < 0$

Figura 10. Curva x (p,2)

```
a = Plot[x[p, 2], {p, 0, 4}, PlotRange → {0, 4}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0], AxesLabel → {"p", "x"}]
```



Se calcula la derivada parcial con el *Mathematica*:

$$\partial_p x[p, q]$$

$$-\frac{2}{p^3 q}$$

Se observa que $\frac{\partial x}{\partial p} < 0$, por lo tanto se trata de un bien típico.

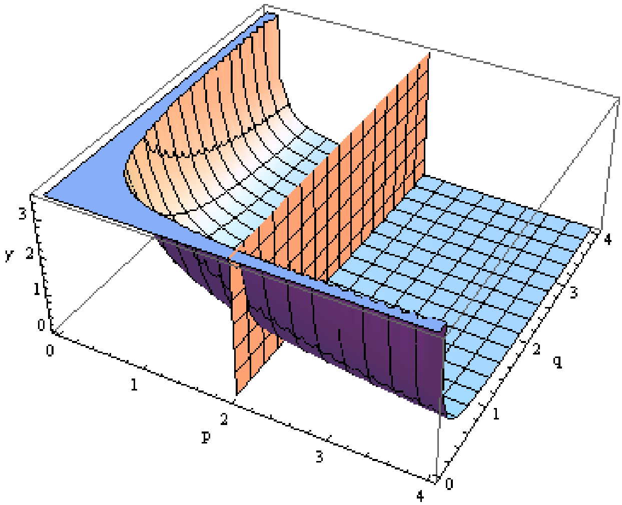
Realizamos el proceso anterior para el bien Y:

$$y[p\_, q\_] := \frac{1}{p\,q}$$

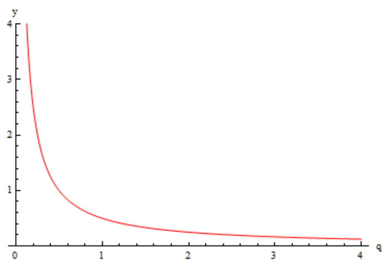
Figura 10. Intersección de la superficie de producción con el plano p=2

```
g3 = Plot3D[y[p, q], {p, 0, 4}, {q, 0, 4}, AxesLabel → {"p", "q", "y"}]

g4 = ContourPlot3D[p == 2, {p, 0, 4}, {q, 0, 4}, {y, 0, 10}, AxesLabel → {"p", "q", "y"}]

Show[g3, g4]
```

Figura 11. Curva y (2,q)




```
c = Plot[y[2, q], {q, 0, 4}, PlotRange → {0, 4}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0], AxesLabel → {"q", "y"}]
```



$$\partial_q \, y[p, q]$$

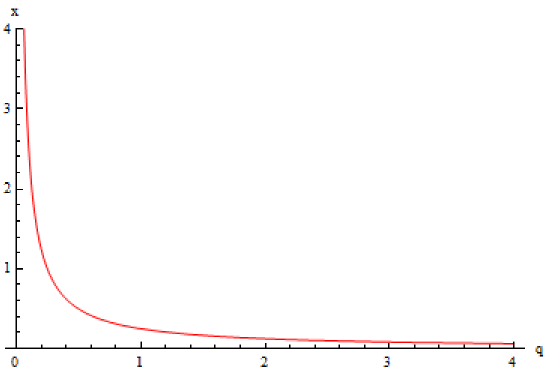
$$-\frac{1}{p\,q^2}$$

Se observa que $\frac{\partial y}{\partial q} < 0$, por lo tanto *X* como *Y* son bienes típicos.

En la Figura 12, se observa que para un precio constante *p*, si *q* crece entonces *x* decrece. En efecto, $\frac{\partial x}{\partial q} < 0$

Figura 12. Curva x (2,q)

```
d = Plot[x[2, q], {q, 0, 4}, PlotRange → {0, 4}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0], AxesLabel → {"q", "x"}]
```



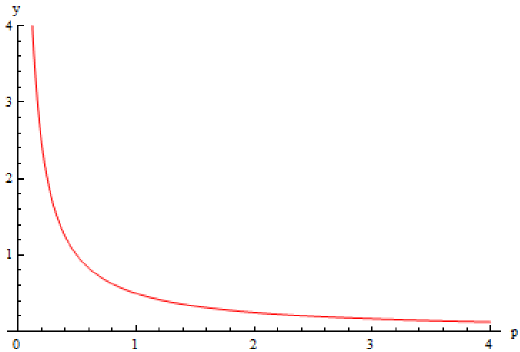

```
∂_q x[p, q]
```

$$-\frac{1}{p^2 q^2}$$

En la Figura 13 se observa que para un precio constante *q*, si *p* crece entonces *y* decrece. En efecto, $\frac{\partial x}{\partial q} < 0$.

Figura 13. Curva x (2,q)

```
e = Plot[y[p, 2], {p, 0, 4}, PlotRange → {0, 4}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0], AxesLabel → {"p", "y"}]
```



$$\partial_p y[p, q]$$

$$-\frac{1}{p^2 q}$$

Como ambas “derivadas cruzadas” son negativas ($\frac{\partial x}{\partial q} < 0$ y $\frac{\partial y}{\partial p} < 0$), los bienes *X* e *Y* son complementarios.

1.2.2. Bienes sustitutos

`x[p_, q_] := e^(q-p)`	`y[p_, q_] := e^(p-q)`
$p \geq 0,\ q \geq 0,\ x \geq 0$	

Se calcula las derivadas parciales de las demandas de cada uno de los bienes respecto a sus respectivos precios:

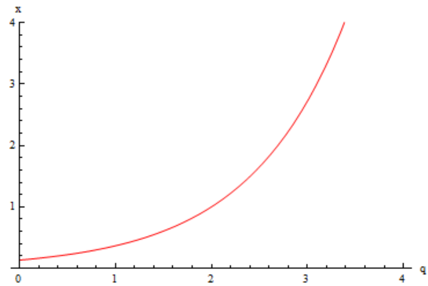
$\partial_p x[p, q]$	$\partial_q y[p, q]$
$-e^{-p+q}$	$-e^{p-q}$

Como $\frac{\partial x}{\partial p} < 0$ y $\frac{\partial y}{\partial q} < 0$ ambos bienes son típicos.

En la Figura 14 se observa que para un precio constante *p*, si *q* crece entonces *x* crece. En efecto, $\dfrac{\partial x}{\partial q} > 0$.

Figura 14. Curva x (2,q)

```
d = Plot[x[2, q], {q, 0, 4}, PlotRange → {0, 4}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0], AxesLabel → {"q", "x"}]
```

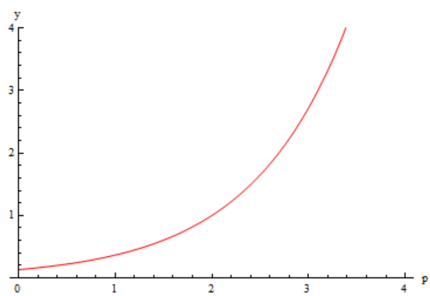


$\partial_q x[p, q]$ e^{-p+q}

En la Figura 15 se muestra que para un precio constante *q*, si *p* crece entonces *y* crece. En efecto, $\dfrac{\partial y}{\partial p} > 0$.

Figura 15. Curva y (p,2)

```
e = Plot[y[p, 2], {p, 0, 4}, PlotRange → {0, 4}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0], AxesLabel → {"p", "y"}]
```



```
∂p y[p, q]  e^(p-q)
```

Como ambas “derivadas cruzadas” son negativas ($\frac{\partial x}{\partial q} > 0$ y $\frac{\partial y}{\partial p} > 0$), los bienes X e Y son sustitutos.

1.3 Funciones que no admiten derivadas parciales finitas

1.3.1 Punto anguloso

4) Calcular las derivadas parciales en el origen

a) $f(x;y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ b) $f(x;y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Se representa la función en un entorno del origen (Figura 16) y se interseca la superficie con el plano y=0 (Figura 17)

Figura 16. Superficie z=f(x, y)

```
g1 = Plot3D[√(x² + y²), {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, AxesLabel → {"x", "y", "z"}]
```

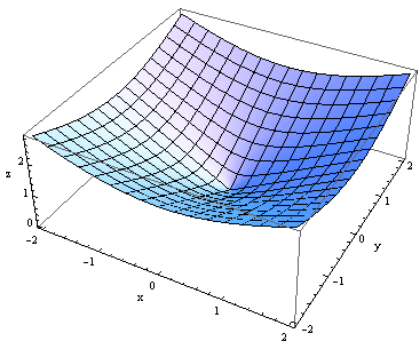


Figura 17. Intersección de la superficie con el plano y=0

```
g2 = ContourPlot3D[y == 0, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {z, 0, 45}, AxesLabel → {"x", "y", "z"}]
```

```
Show[g1, g2]
```

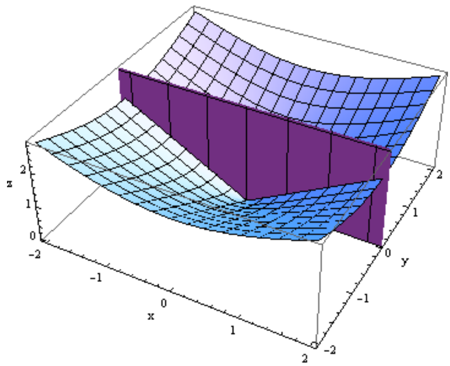
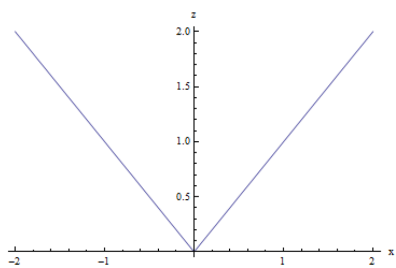


Figura 18. Curva z=f (x, 0)

$$f[x\_,\ y\_] := \sqrt{x^2 + y^2}$$

```
Plot[f[x, 0], {x, -2, 2}, AxesLabel → {"x", "z"}]
```



En la Figura 18 se observa que el origen es un punto anguloso.

Se calcula la función derivada parcial respecto a *x.*

$\partial_x f[x, y]$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2}}$$

```
∂x f[x, y] /. {x → 0, y → 0}
```

Indeterminate

Se puede ver que la función $\frac{\partial z}{\partial x}$ es indeterminada en el origen. Por lo tanto se calcula dicha derivada por definición:

```
Limit[(f[x, 0] - f[0, 0])/x, x -> 0, Direction → 1]
```

-1

```
Limit[(f[x, 0] - f[0, 0])/x, x -> 0, Direction → -1]
```

1

La función tiene derivadas finitas distintas a derecha *y* a izquierda del origen. Por lo tanto, no admite derivada parcial respecto a *x* en ese punto. En forma similar, se puede verificar la no existencia de derivada parcial respecto a *y* en el origen.

1.3.2 Punto cuspidal

Se estudian las derivadas parciales en el origen de la función

$$z = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$$

En la Figura 19 se representa la superficie y luego se interseca con el plano *y*=0 (Figura 20).

Figura 19. Superficie z=f(x, y)

```
g1 = Plot3D[∛(x² * y²), {x, -6, 6}, {y, -6, 6}, AxesLabel → {"x", "y", "z"}]
```

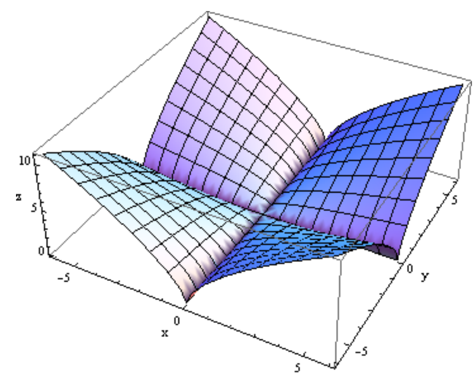


Figura 20. Intersección de la superficie con el plano y=0

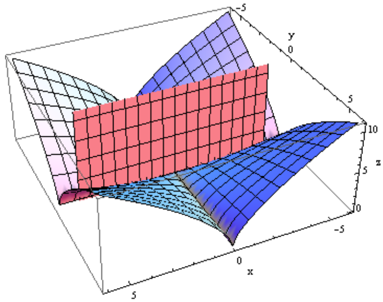
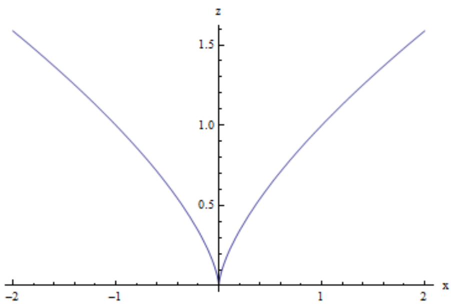


Figura 21. Curva z=f (x, 0)

```
Plot[f[x, 0], {x, -2, 2}, AxesLabel → {"x", "z"}]
```



En la Figura 21, se observa que el origen es un punto cuspidal (semirrecta tangente vertical $\overrightarrow{oz^{+}}$).

Se calcula con el *Mathematica* la $\dfrac{\partial z}{\partial x}$:

```
∂x f[x, y]
```

$$\frac{2\,x}{3\,\left(x^2+y^2\right)^{2/3}}$$

```
∂x f[x, y] /. {x → 0, y → 0}
```

```
Indeterminate
```

La función $\frac{\partial z}{\partial x}$ es indeterminada en el origen. Por lo tanto se calcula dicha derivada por definición:

```
Limit[(f[x, 0] - f[0, 0])/x, x -> 0, Direction → 1]
```
-∞

```
Limit[(f[x, 0] - f[0, 0])/x, x -> 0, Direction → -1]
```
∞

La función tiene derivadas infinitas de distinto signo a derecha y a izquierda del origen. Por lo tanto, no admite derivada parcial finita respecto a *x* en ese punto. En forma similar, se puede verificar la no existencia de derivada parcial respecto a *y* en el origen.

1.4 Relación entre continuidad y derivabilidad

Se analizará la continuidad y la existencia de derivadas parciales en el origen de la función $g : \Re^2 \to \Re \ / \ g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Se define la función con el programa *Mathematica*

```
g[x_, y_] := If[x == 0 && y == 0, 0, (x y)/(x^2 + y^2)]
```

1.4.1. Derivadas parciales

Se representa la superficie y se la interseca con el plano *y*=0 (Figuras 22 y 23)

```
g3 = Plot3D[g[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, AxesLabel → {"x", "y", "z"}]
```

Figura 22. Superficie z=g(x, y)

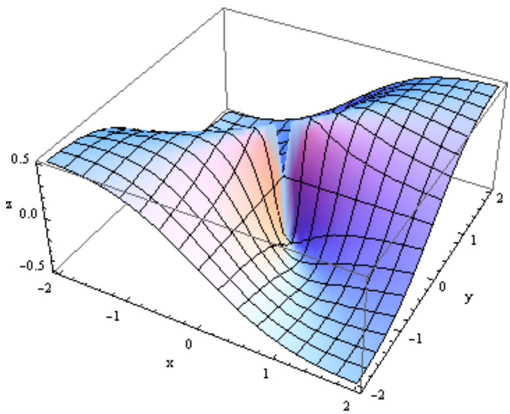
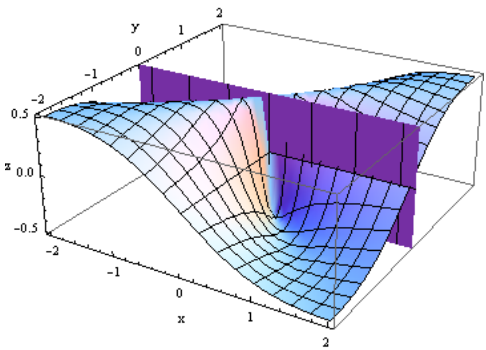


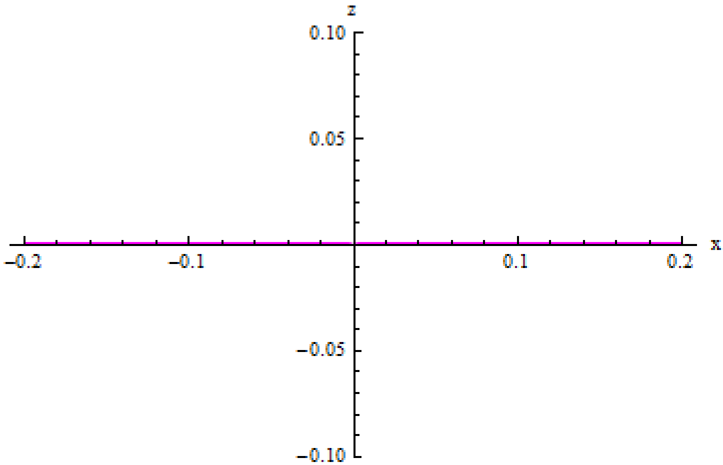
Figura 23. Intersección de la superficie con el plano y=0



La curva intersección $g(x, 0)$ es el eje x, que como es horizontal, su pendiente vale 0 (Figura 24). Por lo tanto la derivada parcial respecto a x es 0. Idéntico procedimiento, nos conduce a que la derivada parcial respecto a y es 0.

Figura 24. Curva z=g (x, 0)

```
Plot[g[x, 0], {x, -0.2, 0.2}, PlotRange → {-0.1, 0.1}, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 1]}, AxesLabel → {"x", "z"}]
```



Se comprueba esta interpretación geométrica, calculando las derivadas parciales por definición con el *Mathematica*:

∂_x g[x, y]

$$\text{If}\left[x == 0\ \&\&\ y == 0,\ 0,\ -\frac{(2\,x)\ (x\,y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{y}{x^2+y^2}\right]$$

∂_x g[x, y] /. {x → 0, y → 0}

0

∂_y g[x, y]

$$\text{If}\left[x == 0\ \&\&\ y == 0,\ 0,\ -\frac{(2\,y)\ (x\,y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{x}{x^2+y^2}\right]$$

∂_y g[x, y] /. {x → 0, y → 0} 0

1.4.2 Continuidad

a) Existe la imagen del punto:

g[0, 0] 0

b) Límite doble

Límites sucesivos en el origen

Cálculo de L_1

$$L_1 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} g(x,y)\right) = 0$$

Cálculo de L_2

$$L_2 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} g(x,y)\right) = 0$$

Límite radial en el origen

Se calcula el límite radial para cualquier *m*:

```
Limit[g[x, m x], x -> 0]
```

$$\frac{m}{1+m^2}$$

El límite radial depende del valor de la pendiente, por lo tanto no existe el límite doble. La función es discontinua esencial en el origen.

Por lo tanto, para funciones de dos o más variables independientes, puede ocurrir que existan ambas derivadas parciales en un punto y sin embargo sea discontinua en el mismo.

1.5 Producto medio y productividad marginal

Dada la función de producción $P(x,y) = 2x^2y^3 - 3x^3y^2$, verificar que el producto medio $Pme = \dfrac{P(x,y)}{x}$ y la productividad marginal P_x se igualan para el valor de x que maximiza el producto medio.

Se define la función de producción y el producto medio con el *Mathematica*

```
P[x_, y_] := 2 x^2 y^3 - 3 x^3 y^2
Pme[x_, y_] := P[x, y]/x
```

Se obtiene el máximo producto medio considerando constante el valor de *y* en 2, igualando la derivada a 0.

```
Solve[∂x Pme[x, 2] == 0]
```

$\left\{\left\{x \to \frac{2}{3}\right\}\right\}$

```
Pme[2/3, 2]
```

$\frac{16}{3}$

```
∂x,x Pme[x, 2] /. x -> 2/3
```

-24

Como la derivada segunda del producto medio es negativa, entonces $Pme_x\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{3}$ es un máximo relativo.

A continuación se calcula $\frac{\partial P}{\partial x}\left(\frac{2}{3},2\right)$

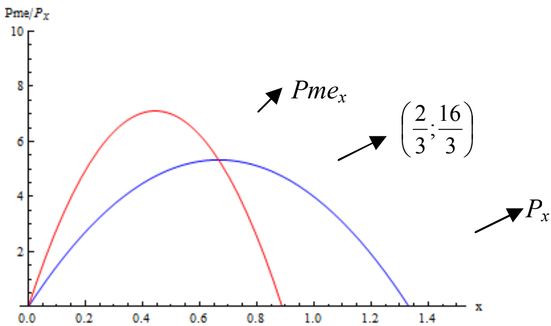
```
∂x P[x, y] /. {x -> 2/3, y → 2}
```

$\frac{16}{3}$

$$\frac{\partial P}{\partial x}\left(\frac{2}{3},2\right)=\frac{16}{3}$$

Se verifica que el producto medio $Pme_x=\frac{P(x,y)}{x}$ y la productividad marginal P_x se igualan, para el valor de x que maximiza el producto medio (Figura 27).

Figura 27. Pme_x y P_x



2. COMENTARIOS FINALES

En los últimos años hemos podido comprobar cómo la informática se ha introducido en la enseñanza para dar a los alumnos una formación básica en las nuevas tecnologías y como herramienta didáctica. Es posible iniciar a los alumnos en el uso del *software* con la realización de trabajos prácticos y a través de clases interactivas en el gabinete de computación, donde se abordan temas del cálculo diferencial e integral en una y varias variables, como así también álgebra y geometría. Con el uso de esta herramienta, los alumnos podrán afianzar los conceptos estudiados en clases teórico-prácticas, realizar comparaciones, establecer conjeturas, relacionar conceptos previos con los presentados en clase, con el fin de lograr aprendizajes significativos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Allen, R.G.D. (1960): *Mathematical Economics.* Londres, Macmillan & Co LTD.

Apostol, T. (1999): *Calculus,* Volumen II. Barcelona, Reverté, S. A.

Calvo, M.; Escribano, M.; Fernández, G.; García, M.; Ibar, R.; Ordás, M. (2003): *Problemas resueltos de Matemáticas aplicadas a la Economía y a la Empresa.* Madrid, Thomson.

Chiang, A. (1999): *Análisis Matemático para la Economía* I. *Cálculo diferencial.* México, McGraw-Hill.

Henderson, J.; Quandt, R. (1985): *Teoría microeconómica. Una aproximación matemática.* Barcelona, Ariel, S. A.

Tan, S. T. (1998): *Matemáticas para la administración y economía*. México, Internacional Thomson Editores.

Webb, S.C. (1994): *Economía de la empresa*. México, Limusa.

WOLFRAM, S. (1991): *Mathematica*. Illinois, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

TÉCNICAS CUANTITATIVAS PARA LA TOMA DE DECISIONES EN EL PROCESO DE SELECCIÓN DE RRHH

Ana M. Marsanasco
Emma Fernández Loureiro

INTRODUCCIÓN

Dado que el uso de Excel está muy difundido entre los estudiantes de Ciencias Económicas, nuestra propuesta se orienta a presentar un caso de selección de personal aplicando técnicas de la metodología borrosa mediante la utilización de funciones lógicas que contiene ese software.

El programa de la asignatura "Estadística para Administradores" comprende en sus contenidos la explicación de nociones sobre metodología borrosa. Mediante esta propuesta aspiramos a contribuir en el desarrollo de esta temática.

Si bien existe amplia y más moderna bibliografía sobre el tema, para los interesados en estas técnicas es interesante el capítulo 22 "Selección de personal" de Kaufman, A.; Gil Aluja, J. (1987).

En el caso que describimos a continuación la metodología borrosa se propuso como una técnica para cuantificar la subjetividad que comprende el proceso de selección y evaluación del personal.

Así, en este primer escrito, desarrollamos el proceso de elección entre varios candidatos a un puesto para luego, en una segunda propuesta, presentar la evaluación de desempeño.

1. DESCRIPCIÓN DE UN CASO

Los socios del estudio ABC consideran que su situación estructural se encuentra desbordada teniendo en cuenta los múltiples y variados clientes que tienen que atender. El estudio en pocos meses tuvo un crecimiento que no estaba en las expectativas y las solicitudes de trabajo exceden, especialmente en la parte contable, las previsiones.

Por ello han decidido solicitar los servicios de especialistas en Selección de Personal para incorporar un Contador y una Secretaria.

Una vez definidas la banda salarial, procedimientos y presupuesto de búsqueda, debe proponer la metodología para la selección de los aspirantes.

1.1 Definición de puestos

Jaime Maristany en su libro *Administración de Recursos Humanos* propone para la definición de puestos la elaboración de un formulario sencillo, con datos mínimos y concretos. A continuación presentamos los formularios elaborados referentes a las especificaciones para los puestos de contador y secretaria.

Puesto: Contador

Especificaciones para el puesto

Estudios: Contador Público

Sexo: indistinto — Edad: 30 a 45 años

Estado Civil: indistinto — Poseer registro de conducir

Domicilio: residir en Capital Federal

Buena Presencia

Experiencia: en tareas similares

Conocimiento: inglés

Competencias:

- Orientación generalista (C_1)
- Actitud Proactiva (C_2)
- Capacidad de negociación (C_3)
- Capacidad de comunicación (C_4)
- Tener sensibilidad en el trato con los clientes (C_5)
- Predisposición para trabajar en equipo (C_6)

Puesto: Secretaria

Especificaciones para el puesto	
Estudios: Secundario completo	
Sexo: Femenino	Edad: 30 a 45 años
Estado Civil: Indistinto	
Domicilio: residir en Capital Federal	
Buena Presencia	
Experiencia: en puestos similares	
Conocimiento: de informática (Word, Excel, Internet)	
Competencias	
- Capacidad de comunicación	
- Capacidad de atender varios requerimientos a la vez	
- Actitud servil	
- Buen humor	
- Celeridad en el trabajo	

1.2 Propuesta de orden de mérito

Para establecer el orden de mérito final entre los candidatos se tomarán en cuenta las competencias establecidas en las especificaciones para cada uno de los puestos.

Dado que las competencias son variables ligüísticas estimamos que la metodología borrosa es una herramienta útil a esos efectos.

Así definimos, en primer lugar, el perfil "ideal" que nos permita compararlo con los perfiles de cada uno de los candidatos. Este perfil comprende tanto la enumeración de las competencias que el candidato debe poseer para el puesto como el grado de importancia que cada competencia tiene en relación al puesto.

Denominamos C al conjunto de competencias:

$$C = \{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n\}$$

n: número de competencias

El cumplimiento de estas competencias por parte de los candidatos es una noción imprecisa, es decir, la afirmación del tipo "x tiene la competencia n" no es únicamente verdadera o falsa, sino que admite diversos grados de verdad y falsedad.

Por consiguiente, la pertenencia de cada competencia será graduada, representado así un subconjunto borroso de C para cada perfil. Denominaremos $\tilde{C}$ al conjunto borroso que representa el perfil "ideal" para el puesto de Contador y $\tilde{S}$ para el puesto de Secretaria.

La principal fuente de información para construir el perfil ideal está dada por los especialista en selección de personal y el cliente (el Estudio ABC), para los cuales resulta más sencillo indicar la importancia de las distintas competencias en su propio lenguaje natural que mediante un valor numérico (Bravo, 2006). Definimos a continuación los valores de pertenencia a utilizar en cada una de las competencias:

Tabla 1

Valoración	Pertenencia
Ninguna	0
Prácticamente ninguna	0.1
Muy baja	0.2
Baja	0.3
Media baja	0.4
Media	0.5
Medianamente alta	0.6
Alta	0.7
Muy alta	0.8
Excelente	0.9
Optima	1

Los conceptos de "Ninguna", "Prácticamente ninguna", etc., corresponden en mayor medida a la subjetividad de cada profesional de selección de personal y, por supuesto, no hay límites de "objetividad" bien definidos entre ambas nociones. Por tanto, el concepto de conjunto borroso cumple un papel fundamental en el planteo de las variables cualitativas. Tal como expresáramos, la opinión de los expertos puede ser representada con un número borroso, definido por su función de pertenencia, incluido en el intervalo [0,1], donde se considera: 0 (cero) la competencia no es importante para el puesto y 1(uno) la competencia es muy importante para el puesto.

En la Tabla 2 se muestran los perfiles diseñados para cada puesto.

Tabla 2

	Contador $\widetilde{C}$	**Secretaria** $\widetilde{S}$
Orientación generalista	0.50	0.00
Actitud proactiva	0.70	0.00
Capacidad de negociación	0.90	0.00
Capacidad de comunicación	0.80	1
Sensibilidad en el trato con los clientes	0.60	0.00
Predisposición para trabajar en equipo	0.70	0.00
Capacidad de atender varios requerimientos	0.00	0.90
Actitud servil	0.00	0.80
Buen humor	0.00	0.50
Celeridad en el trabajo	0.00	0.40

Efectivamente, los conjuntos borrosos para los perfiles ideales serán:

$$\widetilde{C} = \{c_1 / 0.50; c_2 / 0.70; c_3 / 0.90; c_4 / 0.80; c_5 / 0.60; c_6 / 0.70\}$$

$$\widetilde{S} = \{s_1 / 1; s_2 / 0.90; s_3 / 0.80; s_4 / 0.50; s_5 / 0.40\}$$

1.3 Análisis del perfil de los postulantes

Los selectores de personal confeccionarán el informe para cada postulante indicando el grado de pertenencia de cada competencia.

Llamamos P_C al conjunto de postulantes para el puesto de Contador y P_S al de postulantes para el puesto de Secretaria:

$$P_C = \{P_{C1}, P_{C2}, P_{C3}, \ldots, P_{Cm}\}$$

$$P_S = \{P_{S1}, P_{S2}, P_{S3}, \ldots, P_{Sm}\}$$

m: número de candidatos

Como cada etiqueta representa un número borroso, obtendremos para cada postulante un subconjunto borroso de P .

A partir de estos datos (perfil ideal y perfil de cada postulante) se desarrollará una metodología para obtener el candidato más adecuado para cada puesto.

1.4 Orden de preferencia de los candidatos mediante metodología borrosa

La confección de un orden de mérito para selección de candidatos es una de las aplicaciones más sencillas de la metodología borrosa. "La distancia relativa de Hamming y el coeficiente de adecuación, basados en la comparación de los aspirantes con el perfil "ideal" (Gil Aluja, 1996), son adecuadas", involucrando el caso que nos ocupa.

La distancia relativa de Hamming mide la desviación media de las diferencias, por lo tanto, este método no diferencia entre un exceso o un defecto respecto al ideal, se evalúan ambos de forma equivalente. En cambio, el cálculo del coeficiente de adecuación incluye implícitamente una corrección de los excesos y defectos. Se comparan atributo (en nuestro caso las competencias) de la función de pertenencia ideal con las del postulante.

Si para un atributo el perfil del postulante es mayor o igual que el ideal se asignará pertinencia 1. Si, en cambio, el perfil del postulante es menor que el ideal se asignará pertinencia:

1 – Perfil ideal + Perfil del postulante

De este modo, si en el perfil ideal el atributo tiene un grado de pertenencia 0 y un postulante no posee ese atributo, en su perfil se observará una pertenencia 1; en tanto, si el postulante alcanzara en algún grado esa competencia, conseguirá un valor menor a uno en su perfil.

El *coeficiente de adecuación* resulta del cociente entre el número borroso obtenido y el cardinal del conjunto referencial (en nuestro caso el ideal).

El orden de mérito se arma ordenando de mayor a menor los coeficientes de cada postulante.

Presentamos a continuación el cálculo para la selección del Contador, entendiendo que para el puesto de Secretaria el análisis es análogo.

Sea el conjunto borroso ideal (ver Tabla 2)

$$\widetilde{C} = \{c_1 / 0.50; c_2 / 0.70; c_3 / 0.90; c_4 / 0.80; c_5 / 0.60; c_6 / 0.70\}$$

Y los siguientes subconjuntos borrosos que corresponden a los tres candidatos seleccionados:

$$\widetilde{P}_{C1} = \{(c_1 / 0.6), (c_2 / 0.4), (c_3 / 0.5), (c_4 / 0.8), (c_5 / 0.9), (c_6 / 1)\}$$

$$\widetilde{P}_{C2} = \{(c_1 / 0.4), (c_2 / 0.6), (c_3 / 1), (c_4 / 0.9), (c_5 / 0,7), (c_6 / 0.8)\}$$

$$\widetilde{P}_{C3} = \{(c_1 / 0.9), (c_2 / 0.8), (c_3 / 0.5), (c_4 / 0.6), (c_5 / 0.4), (c_6 / 0.7)\}$$

Calculamos el coeficiente de adecuación para cada candidato mediante el Excel empleando la función lógica "SI". Recordemos que esta función devuelve un valor si la condición especificada es verdadera y otro valor si dicho argumento es falso. Su sintaxis en la siguiente:

SI(prueba_lógica;valor_si_verdadero; valor_si_falso)

En el caso que nos ocupa:

SI(Perfil postulante$\geq$ Perfil ideal;1; 1-Perfil ideal + Perfil postulante)

Los cálculos y resultados se exponen en la siguiente Tabla:

Tabla 3

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	
$\widetilde{C}$	0,5	0,7	0,9	0,8	0,6	0,7	
$\widetilde{P}_{C1}$	0,6	0,4	0,5	0,8	0,9	1	
$\widetilde{P}_{C2}$	0,4	0,6	1	0,9	0,7	0,8	
$\widetilde{P}_{C3}$	0,9	0,8	0,5	0,6	0,4	0,7	
							K($\widetilde{C}$, $\widetilde{P}$)
$\widetilde{P}_{C1}$ asignación	1	0,7	0,6	1	1	1	**0,88**
$\widetilde{P}_{C2}$ asignación	0,9	0,9	1	1	1	1	**0,97**
$\widetilde{P}_{C3}$ asignación	1	1	0,6	0,8	0,8	1	**0,87**

Concluimos que el segundo candidato es el que mejor se adapta al puesto por tener mayor coeficiente de adecuación.

El orden de los candidatos es el siguiente:

$\mathrm{P}_{C2} \rangle\rangle \mathrm{P}_{C3} \rangle\rangle \mathrm{P}_{C1}$ (donde: $\rangle\rangle$ significa “preferido a”)

Analicemos a continuación la selección de la secretaria.

Los resultados obtenidos para la selección de Secretaria fueron los siguientes:

$$\widetilde{C} = \{c_4 / 1; c_7 / 0.90; c_8 / 0.80; c_9 / 0.50; c_{10} / 0.40\} \text{ ideal}$$

Se seleccionaron dos candidatas y se hallaron los correspondientes subconjuntos borrosos:

$$\widetilde{P}_{S1} = \{(c_4 / 0.8), (c_7 / 0.4), (c_8 / 0.9), (c_9 / 0.7), (c_{10} / 0.5)\}$$

$$\widetilde{P}_{S2} = \{(c_4 / 0.6), (c_7 / 0.7), (c_8 / 0.5), (c_9 / 0.6), (c_{10} / 0.6)\}$$

Tabla 4

	C4	C7	C8	C9	C10
$\widetilde{C}$	1	0,9	0,8	0,5	0,4
$\widetilde{P}_{S1}$	0,8	0,4	0,9	0,7	0,5
$\widetilde{P}_{S2}$	0,6	0,7	0,5	0,6	0,6

						K($\widetilde{C}$, $\widetilde{P}$)
$\widetilde{P}_{S1}$ asignación	0,8	0,5	1	1	1	**0,86**
$\widetilde{P}_{S2}$ asignación	0,6	0,8	0,7	1	1	**0,82**

La primera candidata es la que mejor se ajusta al puesto por presentar el mayor coeficiente de adecuación.

2. REFLEXIONES FINALES

Tal como dijéramos en la introducción, esperamos que el caso desarrollado sea de utilidad para el desarrollo de los contenidos de la materia Estadística para Administradores. Más allá de este objetivo estimamos, tal como lo presenta la bibliografía, que la metodología borrosa es una herramienta interesante para aquellas situaciones en que sea necesario establecer un orden de mérito basado en la perspectiva del sujeto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bravo, Y. *et al*. (2006): Propuesta informática para seleccionar personal por competencias utilizando técnicas de inteligencia artificial, *Ingeniería Industrial*, Vol 27, pp. 33-39.

Fernández Loureiro, E. (2001): *Teoría de los conjuntos borrosos. A modo de introducción.* Buenos Aires, Ediciones Cooperativas.

Gil Aluja, J. (1996): *La gestión interactiva de los recursos humanos en la incertidumbre*, Madrid, Centro de Estudios Ramón Areces S.A.

Maristany, J. (2000): *Administración de Recursos Humanos*, Buenos Aires, Prentice Hall.

APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN EN C++ AL CÁLCULO FINANCIERO

María Teresa Casparri
Gonzalo Daniel Garcia

INTRODUCCIÓN

Los avances en la ciencia de la computación (tanto en hardware como software) de las últimas dos décadas, han permitido una "democratización" de la información a nivel global pero también han permitido que los usuarios puedan explorar el mundo de la programación en primera persona. Hoy en día, es muy fácil poder descargar programas en línea y los manuales correspondientes para aprender a utilizar un lenguaje de programación.

Uno de esos lenguajes es C: un lenguaje de programación de propósito general íntimamente asociado a UNIX, que fue creado por Dennis Ritchie entre 1969 y 1973, en los laboratorios Bell. Su principal ventaja es que es un lenguaje de nivel medio, con varias de las características de la de uno bajo. C proporciona construcciones básicas para manejar flujos de información requeridas en programas estructurados, como: toma de decisiones (if-else), iteración de un caso con condición de paro (while, for, do-while), selección de un caso entre un conjunto (switch), terminación prematura de ciclos (break). C se convirtió rápidamente en un lenguaje muy popular, ya que permite un rápido aprendizaje de su estructura de programación y al mismo tiempo posee una gran potencia en el manejo de información. Además, C es independiente de la estructura de la computadora y esto nos posibilita escribir programas portátiles que pueden ser corridos sin cambios en una variedad de máquinas; para mejorar la posibilidad de transportabilidad, existen estándares sobre la sintaxis del lenguaje, siendo el más reciente el C99 (publicado en marzo de 2000). Debido a sus condiciones óptimas para el manejo de estructuras lógicas y de repetición, podemos utilizar esta aplicación para la resolución de problemas financieros.

Nuestra propuesta metodológica es enseñar los rudimentos de programación en C para que los alumnos de la materia Cálculo Financiero adquieran una herramienta que les posibilite el entendimiento claro de la lógica y la intuición detrás de los modelos financieros, y además sea una herramienta que les posibilite una mejor inserción en el mercado laboral.

1. APLICACIONES AL CÁLCULO FINANCIERO

La resolución de ejercicios de cálculo financiero pueden ser resueltos en una gran cantidad de programas diferentes, ya que sólo se necesita potencia de cálculo. Por ejemplo, el Excel® tiene funciones específicas como valor actual y final de rentas (tanto adelantadas como vencidas), cálculo del valor de cuotas de diferentes tipos de préstamos, TIR, y otros. Sin embargo, el usuario debe dar por supuesto que la fórmula que está implícita en el Excel es la que realmente él conoce, y para poder hacer modificaciones sobre la misma, debe poder programar en VBA; por lo tanto, seguimos requiriendo que el alumno sepa por lo menos los rudimentos de programación.

Que la programación en VBA sea de comprensión sencilla (lo que se llama un lenguaje de alto nivel), lleva aparejado que no se puedan desarrollar fórmulas y cálculos complicados o de alta complejidad. El lenguaje en C++ es de nivel medio, por lo tanto es comprensible para el usuario pero además permite incrementar la velocidad de cálculo ya que es un lenguaje cercano a la comprensión del computador. Además, la programación en este lenguaje se puede desarrollar en programas (llamados compiladores) de libre acceso (gratuitos), y existe una amplia red de usuarios a nivel mundial que permiten que sea más fácil la consulta sobre cuestiones del lenguaje. Lo que resulta interesante al momento de explicar temas de cálculo, es la posibilidad de ver cómo se desarrolla el planteo de los cálculos y ver que la intuición financiera es equivalente a las fórmulas desarrolladas en clase.

Además, hoy la Web nos ofrece la posibilidad de utilizar distintos mecanismos de conexión entre grupos de personas (como las redes sociales) de manera de trabajar sobre un mismo proyecto al unísono, a través de páginas que permiten intercambiar y compartir archivos. De esta manera, se pueden organizar trabajos prácticos grupales sin la necesidad de una reunión física. Esto agiliza los tiempos de ejecución de los trabajos y otorga una enorme flexibilidad tanto a la forma de relacionarse de los agentes como de la forma de organizarse.

A continuación se mostrarán algunos ejemplos de problemas a ser tratados con la programación, y los códigos correspondientes:

1.1 Valor actual de una renta

Supongamos que queremos calcular el valor actual de una renta vencida $af(1;n;i)$: sabemos que la fórmula para poder calcularla es: $af(1;n;i) = C\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, pero también sabemos que no es otra cosa que el valor actual de cada pago: $af(1;n;i) = \sum_{s=1}^{n} C(1+i)^{-s}$. La programación en C++ permite al alumno relacionar ambos conceptos y ver la equivalencia de los mismos.

```
#include<iostream>
#include<cmath>
using namespace std;

int main()
{
   float n, i, VA, C, A, h, t;

   cout<<"Ingrese cantidad de terminos de la renta: "<<endl;
   cin>>n;
   cout<<"Ingrese tasa de interes efectiva subperiodica: "<<endl;
   cin>>i;
   cout<<"Ingrese capital inicial: "<<endl;
   cin>>C;
   cout<<"La renta es: 0-Adelantada  1-Vencida"<<endl;
   cin>>h;

  for (t=h ; t <= (n-1+h) ; j++)
   {   A= A + (1/pow((1+i),t));        // acumulo los pagos actualizados
   }

      VA=C*A;

   cout<<"El valor actual de la renta es: "<<VA<<endl;
   system("pause");
   return 0;
}
```

2.1.1. Código en C++ para calcular el valor actual de una renta como sumatoria de valores actuales

1.2 Marcha progresiva de un sistema de préstamo

La programación también nos permite poder representar una marcha progresiva de algún sistema de amortización. No sólo podemos especificar las variables relevantes a calcular (como las cuotas, el saldo de deuda, los intereses del período), sino que además tenemos la opción de exportar la marcha a un archivo *.txt que luego puede ser modificado y analizado a gusto.

La ventaja del C++ frente a la misma técnica en una planilla de cálculo, es que un único código puede ser modificado mínimamente (las ecuaciones de cálculo de las variables) para utilizarlo en un sistema de préstamo diferente; o sea, la ventaja es la posibilidad de reproducirlo con un mínimo costo de tiempo.

```
/*  Marcha progresiva de un sistema de préstamo Alemán
Variables:
        V0= valor del préstamo en t=0
        i= tasa de interés periódica
        n= cantidad de períodos
        t= tiempo
        I(t)= intereses generados entre t-1 y t, cuota de interés en t
        T(t)= cuota de amortización en t
        TA(t)= total amortizado hasta t.
        C(t)= cuota total en t. C(t)=I(t)+T(t)
        S(t)= saldo de deuda en t. S(t)=S(t-1)-T(t)
*/

#include <iostream>
#include <fstream>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <iomanip>

using namespace std;

int main()
{
```

```
    double V0, i, m;
    int n, j;

    cout<<"Ingrese valor del prestamo: "<<endl;
    cin>>V0;
    cout<<"Ingrese tasa de interes periodica: "<<endl;
    cin>>i;
    cout<<"Ingrese cantidad de periodos: "<<endl;
    cin>>n;

    ofstream SaveFile("marcha_aleman.txt");

    float I[n+1], T[n+1], TA[n+1], C[n+1], S[n+1], t[n+1];   // defino a las
variables endógenas como vectores!
    I[0]=0;                                  // (importante para hacer el for y guardar
los valores previos)
    T[0]=0;
    TA[0]=0;
    C[0]=0;
    t[0]=0;
    S[0]=V0;                                  // asigno los valores iniciales. t=0

    m=V0/n;                                  // cambios de variables

    for(j=0; j<=n; ++j)
    {
     t[j+1]=j+1;
     I[j+1]=i * S[j];
     T[j+1]=m;
     TA[j+1]=(m) * j;
     C[j+1]=I[j+1]+T[j+1];
     S[j+1]=V0-TA[j+1];
    }

// SALIDA

     SaveFile<< endl<< endl<<" t \t\t I \t\t T \t\t C \t\t \t\t TA \t\t S"<< endl;
     for (j = 0; j <= n+1; j++)
          {
           cout.setf(ios :: fixed);
           SaveFile<<setprecision(2)<<setw(4)<<t[j]<<"\t\t"
               <<setprecision(6)<<setw(8)<<I[j]<<"\t\t"
```

```
                <<setprecision(6)<<setw(8)<<T[j]<<"\t\t"
                <<setprecision(6)<<setw(8)<<C[j]<<"\t\t"
                <<setprecision(6)<<setw(8)<<TA[j]<<"\t\t"
                <<setprecision(6)<<setw(8)<<S[j]<< endl;          //muestro sólo
valores para tiempo, cuota, saldo
          }

   SaveFile.close();

   system("PAUSE");
   return 0;
}
```

2.2.1. Código en C++ para exportar a un txt una marcha progresiva de un sistema de amortización Alemán

1.3 Equivalencia de tasas

Otra ventaja de C++ para aplicaciones del cálculo financiero es crear programas que conviertan tasas utilizando la equivalencia de tasas. El Excel tiene una función financiera que sólo convierte entre tasas efectivas (INT.EFECTIVO), pero el siguiente código en C permite hacer una equivalencia de tasas de interés entre nominales y efectivas, en cualquier dirección de la equivalencia; además, se puede complejizar el código y calcular asimismo tasas de descuento y tasas continuas.

```
// Este programa convierte entre tasas de interés
// siguiendo la equivalencia de tasas:
//          (1+ia)=(1+im)^m=(1+Jm/m)^m
//      [tasas efectivas]    [tasa nominal]

#include<iostream>
#include<cmath>
using namespace std;

int main(void)
{
   float im=0, Jm=0, Fm=0, dm=0, m=0, p=0, resultado=0;          //variables
financieras
   int tasa, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, aa, bb, cc;             //variables auxiliares
para el switch
```

```
            cout<<"La tasa que tiene es: 1-Efectiva  2-Nominal"<<endl;
            cin>>a;
            switch(a)
            {
                case 1:
                    cout<<"El periodo de capitalizacion es: 1-Anual  2-Semestral  3-
Cuatrimestral  4-Trimestral  6-Bimestral  12-Mensual"<<endl;
                    cin>>m;

                            cout<<"Desea convertir a: 1-Efectiva  2-
Nominal"<<endl;
                            cin>>c;
                            switch(c)
                            {
                                case 1:
                                    cout<<"Con periodo de capitalizacion: 1-Anual
2-Semestral  3-Cuatrimestral  4-Trimestral  6-Bimestral  12-Mensual"<<endl;
                                    cin>>p;
                                    cout<<"Ingrese tasa: "<<endl;
                                    cin>> im;

                                    resultado=pow(1+im,m/p)-1;          //tasa
interés efectiva a tasa interés efectiva
                                    break;

                                case 2:
                                    cout<<"Con periodo de capitalizacion: 1-Anual
2-Semestral  3-Cuatrimestral  4-Trimestral  6-Bimestral  12-Mensual"<<endl;
                                    cin>>p;
                                    cout<<"Ingrese tasa: "<<endl;
                                    cin>> im;

                                    resultado=(pow(1+im,m/p)-1)*p;          //tasa
interés efectiva a tasa interés nominal
                                    break;
                            }
                            break;
                case 2:
                    cout<<"El periodo de capitalizacion es: 1-Anual  2-Semestral  3-
Cuatrimestral  4-Trimestral  6-Bimestral  12-Mensual"<<endl;
                    cin>>m;
```

```
                              cout<<"Desea convertir a: 1-Efectiva  2-
Nominal"<<endl;
                              cin>>f;
                              switch(f)
                              {
                                   case 1:
                                       cout<<"Con periodo de capitalizacion: 1-Anual
2-Semestral  3-Cuatrimestral  4-Trimestral  6-Bimestral  12-Mensual"<<endl;
                                       cin>>p;
                                       cout<<"Ingrese tasa: "<<endl;
                                       cin>> Jm;

                                       resultado=pow(1+Jm/m,m/p)-1;          //tasa
interés nominal a tasa interés efectiva
                                       break;

                                   case 2:
                                       cout<<"Con periodo de capitalizacion: 1-Anual
2-Semestral  3-Cuatrimestral  4-Trimestral  6-Bimestral  12-Mensual"<<endl;
                                       cin>>p;
                                       cout<<"Ingrese tasa: "<<endl;
                                       cin>> Jm;

                                       resultado=(pow(1+Jm/m,m/p)-1)*p;
//tasa interés nominal a tasa interés nominal
                                       break;
                              }
                              break;
        }

        cout<<"El valor de la tasa requerida es: "<<resultado<<endl;
        system("pause");
        return 0;

}
```

2.3.1. Código en C++ para calcular tasas de interés según la equivalencia de tasas

2. EXTENSIONES POR FUERA DEL CÁLCULO FINANCIERO

Además de las aplicaciones al cálculo financiero mencionadas más arriba, la programación en C++ puede ser articulada para materias con mayor complejidad de cálculo (como Análisis Numérico) o materias en las cuales aparecen variables financieras y estocásticas (como Bases Actuariales). La primera ventaja que tiene C frente al mismo cálculo en Excel es que el generador de números aleatorios incorporado en las librerías es superior, y además se tiene la posibilidad de sumar nuevos generadores más potentes, idea que en la planilla de cálculo está vedada. También, C++ permite trabajar con variables aleatorias correlacionadas, y Excel no. Este manejo de variables aleatorias es importante al momento de querer valuar, por ejemplo, opciones Europeas, calcular senderos de procesos estocásticos, y otros.

En cuanto a las aplicaciones en Análisis Numérico, podemos mencionar: resolución de ecuaciones por métodos numéricos (Bisección, Secante, Newton), integración numérica, diferencias finitas y resolución de ecuaciones diferenciales por métodos numéricos (Euler, Heun, Runge-Kutta).

```
// el programa encuentra la raíz de una función entre los puntos [a;b]
// utilizando el método de bisección

#include <iostream>
#include <cmath>

using namespace std;

double f(double x);

int main()
{
   double z, p, a, b, FA, FP, N0, e;

   cout<<"Ingrese limite inferior: "<<endl;
   cin>>a;
   cout<<"Ingrese limite superior: "<<endl;
   cin>>b;
   cout<<"Numero maximo de iteraciones: "<<endl;
```

```
    cin>>N0;
    cout<<"Cota de error: "<<endl;
    cin>>e;

    FA=f(a);

    for(int i=1; i <= N0; i++){
            p=a+(b-a)/2;
            FP=f(p);

            {if (FP==0.0000 || (b-a)/2 < e)
                {z=p;
                break;}
            else if ((FA * FP) > 0.0000)
                {a=p;
                FA=FP;}
            else
                b=p;
            }
    }

    cout<<"La raiz en el intervalo es: "<<z<<endl;

    system("pause");
    return 0;
}

double f(double x)
{
      double y = (-1) * pow(x,2.0) + x + 5;   //especifico la forma de la función a
tratar

     return y;
}
```

3.1. Código para encontrar raíces de una ecuación por el método de bisección

```
// Integración numérica por Simpson

#include <iostream>
#include <fstream>
#include <math.h>
```

```
#include <iomanip>
#include <stdlib.h>

using namespace std;


// defino la forma de la función a integrar

double f(double x)
{
       double result;
       result=pow(x,2)*log(x);
       return result;
}



int main(void)
{
   double x1, x2, x3, h, y;
   cout<<"Ingrese primer valor: ";
   cin>>x1;
   cout<<"Ingrese ultimo valor: ";
   cin>>x3;

   x2=(x3+x1)/2;  // valor del medio
   h=(x3-x1)/2;

   y=(h/3)*(f(x1)+4*f(x2)+f(x3));

   cout<<"El valor de la integral es: " << y <<endl;
   system("pause");
   return 0;

}
```

3.2. Código para integrar numéricamente una función por el método de Simpson

```
// Este programa genera un archivo con el valor de un subyacente
// q sigue un proceso Browniano Geométrico, para cada momento del tiempo

#include <cmath>     // funciones matemáticas básicas
```

```
#include <algorithm> // acá se define la función max()
#include<iostream>   // inputs - outputs
#include <ctime>     // para la semilla
#include<cstdlib>    // para el random, en caso de utilizar el de C++
#include <iomanip>
#include <fstream>

using namespace std;

int main()
{
    float S; // precio inicial del subyacente
    float alpha; // drift
    float sigma; // volatilidad del subyacente
    int t; // tiempo hasta maduración (en años)
    int T;
    float dt;

    cout<<"Precio inicial del subyacente en t=0: "<<endl;
    cin>>S;
    cout<<"Drift del proceso (para periodo anual): "<<endl;
    cin>>alpha;
    cout<<"Volatilidad del subyacente (para periodo anual): "<<endl;
    cin>>sigma;
    cout<<"Tiempo de simulación (en años): "<<endl;
    cin>>t;

    T = 365 * t;
    dt= 1/(365.0000000);
    float pi=4*atan(1);

    float P[T], x[T], y[T], z[T];     //pongo los valores en vectores
    P[0]= S;

    srand(time(NULL));  //inicia la semilla del random

    ofstream SaveFile("Browniano_Geo.txt");

    for (int i=1; i <= T; i++)
    {
          x[i]=(1.+rand())/(1.+RAND_MAX);
          y[i]=(1.+rand())/(1.+RAND_MAX);
```

```
        z[i]=sqrt(-2*log(x[i]))*cos(2*pi*y[i]);      //Z se distribuye según una
Normal(0,1)
        P[i]=P[i-1]+alpha*P[i-1]*dt+sigma*P[i-1]*z[i]*sqrt(dt);
   }

// SALIDA

  for (int i=0; i <= T; i++)
  {
        SaveFile<<P[i]<<endl;
  }

  SaveFile.close();

  system("pause");
  return 0;

}
```

3.3. Código para generar un camino aleatorio de un proceso Browniano Geométrico

3. CONCLUSIONES

La programación en C++ puede aportar mayor versatilidad al momento de la enseñanza del cálculo financiero, ya que permite bajar las ideas financieras intuitivas a un código que utiliza la potencia de cálculo para alcanzar los resultados que a los alumnos les suele demandar varios minutos. Además, la programación ayuda a utilizar el pensamiento lógica y a ordenar las ideas de cómo calcular diferentes tipos de variables financieras.

Asimismo, la programación en C++ puede ser articulada con materias más avanzadas de la carrera, para resolver problemas de mayor complejidad, y obteniendo todo un conjunto de recursos para analizar y resolver problemas de índole financiera y actuarial.

Al mismo tiempo, esta metodología puede ser complementada con otras tecnologías informáticas como los grupos en línea para reducir los tiempos y descentralizar el aprendizaje, recurriendo a ejercicios en línea y chat para la resolución de problemas. De esta manera se puede lograr que un grupo reducido de estudiantes pueda mejorar su desempeño académico por fuera del horario de cursada, pero bajo la ayuda y tutela del docente.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Casparri, M. T. y otros (2008): *Matemática Financiera, utilizando Excel*. 1era Edición. Buenos Aires, Omicron Editorial.

Castegnaro, A. B. (2006): *Curso de Cálculo Financiero*. 1era Edición. Buenos Aires: La Ley Ediciones.

Odegaard, B. A. (2004): *Financial Numerical Recipes in C++.* Disponible en línea en: http://finance.bi.no/~bernt/gcc_prog/index.html

Press, W. Teukolsky, S.; Vetterling, W.; Flannery, B. (2007): *Numerical Recipe. The Art of Scientific Computing*. 3rd Edition. Nesw York: Cambridge University Press.

Scheinerman, E. (2004): *C++ for Mathematicians*. 1st edition. USA: Chapman & Hall.

Soulié, J.(2007): “C++ Language Tutorial”. Disponible en línea en: http://www.cplusplus.com/doc/tutorial/

MÉTODOS DE ESTIMACIÓN Y ACTUALIZACIÓN DE MATRICES DE CONTABILIDAD SOCIAL

Julio Eduardo Fabris

INTRODUCCIÓN

En el análisis Insumo/Producto y en los Modelos de Equilibrio General es necesario actualizar matrices intersectoriales a partir de datos heterogéneos provenientes de diferentes fuentes. En muchos casos los datos utilizados provienen de las Cuentas Nacionales, de estudios sectoriales, de Encuestas de Hogares o de Gastos, etc.

A esto se le agrega que, debido a que la periodicidad de confección de las encuestas en general no coincide con la de las Cuentas Nacionales, se trabaja incluso con datos correspondientes a diferentes períodos.

La necesidad de compatibilizar estos datos heterogéneos se planteó ya en los primeros estudios intersectoriales y pueden rastrearse los primeros intentos de balanceo hasta los trabajos de los pioneros: Wassily Leontieff, creador del análisis Insumo/Producto y Richard Stone, creador del sistema de Cuentas Nacionales.

Las metodologías utilizadas en la actualidad se han sofisticado un tanto y los métodos inicialmente utilizados (técnicas biproporcionales) han dejado su lugar a técnicas más elaboradas inspiradas en la teoría de la información (técnica de entropía cruzada).

En esta ponencia se presentan algunos de los métodos más conocidos y se ejemplifican para el caso de datos de la economía argentina, utilizando medios de cálculo usuales como el programa Excel de planillas de cálculo y el programa Matlab de cálculo matricial.

1. MATRICES DE INSUMO/PRODUCTO (MIP) Y MATRICES DE CONTABILIDAD SOCIAL (MCS)

En este trabajo nos focalizaremos en el trabajo sobre las Matrices de Contabilidad Social (MCS). Estas surgen como una presentación de las Cuentas Nacionales en forma matricial que incorpora un grado mayor de detalle, por ejemplo mostrando las interconexiones, desagregando el sector de los hogares, ofreciendo la relación entre la generación del ingreso y el consumo, etc. Estas matrices se constituyen en la base de los modelos de Equilibrio General Computable, que últimamente se han incorporado al herramental de la especialidad, particularmente en la evaluación de políticas.

En principio una MCS es una matriz de Insumo / Producto (MIP) ampliada para tener en cuenta en forma detallada a los sectores generadores del ingreso, a los consumidores y al gobierno, tanto en su rol de consumidor como receptor de impuestos y tasas.

Matriz Insumo / Producto (MIP)

	Demanda Intermedia				Demanda Final				**Demanda**
	Sector A	**Sector B**	**Sector C**	**Total**	**Expo**	**Consumo**	**Inversion**	**Total**	**Total**
Sector A	200	150	300	**650**	20	250	5	**275**	925
Sector B	20	60	80	**160**	10	120	80	**210**	370
Sector C	180	45	150	**375**	45	120	60	**225**	600
Consumo Intermedio	**400**	**255**	**530**	1185	**75**	**490**	**145**	710	1895
VAB	525	115	70						
VBP	925	370	600						

	Actividades	Productos	Factores	Hogares	Gobierno	Resto Mundo	Impuestos	Ahorro-Inversion	Total
Actividades	-	Produccion Doméstica	-	-	-	-	-	-	
Productos	Consumo Intermedio	-	-	Consumo Hogares	Consumo Gobierno	Exportaciones	-	Inversión	Demanda Productos
Factores	Valor Agregado	-	-	-	-	Remuneraciòn Factorial	-	-	Ingreso Factores
Hogares	-	-	Remuneración Factorial	-	Transfer.	Transfer.	-	-	Ingreso Hogares
Gobierno	-	-	-	Transfer.	-	Transfer.	Recaudación Tributaria	-	Ingreso Gobierno
Resto del mundo	-	Importaciones	Remuneración Factorial	Transfer.	Transfer.	-	-	-	Salida Divisas
Impuestos	Impuestos Indirectos	Impuestos Indirectos	Impuestos Directos	Impuestos Directos	-	-	-	-	Recaudación Tributaria
Ahorro-Inversion	-	-	-	Ahorro Hogares	Ahorro Gobierno	Ahorro Externo	-	-	Ahorro Total
Total	Costo Total	Oferta Productos	Gasto Factores	Gasto Hogares	Gasto Gobierno	Entrada Divisas	Recaudación Tributaria	Inversión Total	

Como ya se planteó en la introducción, la confección y actualización de unas y otras matrices conlleva el problema de la consistencia de los datos volcados, el cual puede ser esquematizado mediante algunos ejemplos simples que permitan mostrar las distintas metodologías de resolución

2. ACTUALIZACIÓN DE UNA MIP A PARTIR DE NUEVOS DATOS DE FILAS Y COLUMNAS: MÉTODO RAS

Dada la matriz de insumo producto A_0 conocida, encontrar la matriz A que satisface:

$$a_{ij}^1 = r_i\, a_{ij}^0\, s_j$$

O en notación matricial:

$$A^1 = \bar{R} A^0 \bar{S}$$

Para ejemplificar la resolución de este problema tomaremos una matriz de Insumo / Producto de 3 sectores y supondremos que se dispone de datos actualizados de los totales de la submatriz de consumos intermedios.

Ejemplo: MIP de 3 sectores

	Demanda Intermedia				Demanda Final				**Demanda**
	Sector A	**Sector B**	**Sector C**	**Total**	**Expo**	**Consumo**	**Inversion**	**Total**	**Total**
Sector A	200	150	300	**650**	20	250	5	**275**	925
Sector B	20	60	80	**160**	10	120	80	**210**	370
Sector C	180	45	150	**375**	45	120	60	**225**	600
Consumo Intermedio	**400**	**255**	**530**	1185	**75**	**490**	**145**	710	1895
VAB	525	115	70						
VBP	925	370	600						

En general, esta actualización de valores totales no está acompañada de una actualización de datos internos de la matriz (la estructura de las transacciones intersectoriales) debido a que dicha información sólo se actualiza con la confección de una nueva versión de la MIP (por lo general cada 10 años).

Como en general los nuevos valores de totales de fila y columna no mantienen proporcionalidad con los anteriores, no existe una forma exacta de solucionar el problema. Por lo tanto, se busca una forma de obtener valores tentativos para dicha matriz de modo tal que se respeten los nuevos totales y se altere lo menos posible la estructura interna de la matriz.

<u>Submatriz de consumos intermedios original</u>

	Sector A	Sector B	Sector C	Total F
Sector A	200	150	300	**650**
Sector B	20	60	80	**160**
Sector C	180	45	150	**375**
Total C	**400**	**255**	**530**	

<u>Submatriz de consumos intermedios a calcular</u>

	Sector A	Sector B	Sector C	Total F
Sector A	?	?	?	**750**
Sector B	?	?	?	**200**
Sector C	?	?	?	**500**
Total C	**450**	**360**	**640**	

El método clásico para realizar esta compatibilización fue sugerido por Stone y resuelto detalladamente por Bacharach (1970). Recibe el nombre de RAS por la notación matricial de las operaciones asociadas.

Se trata de un método iterativo:

Paso 1:

Se divide cada uno de los coeficientes de cada columna por el total de la misma. De esa manera la suma de cada columna es 1.

Paso 2:

Se multiplica luego cada uno de los coeficientes de cada columna por el total deseado de la misma. De esta manera los totales de cada columna coinciden con los deseados aunque, en general, no hay coincidencia de los totales de fila respecto de los totales de fila buscados.

Paso 3:

Se divide cada uno de los coeficientes de cada fila por el total de la misma. De esa manera la suma de cada fila será 1.

Paso 4:

Se multiplica cada uno de los coeficientes de cada fila por el total deseado de la misma. De esta manera los totales de cada fila ahora coinciden con los deseados aunque, en general, ya no habrá coincidencia de los totales de columna respecto de los totales de columna buscados.

Paso 5 y subsiguientes: Se repiten los pasos 1 a 4 hasta lograr la coincidencia de los totales de fila y columna simultáneamente. El proceso converge rápidamente y puede suspenderse cuando se llega a los valores deseados con una cierta tolerancia pre-especificada.

Matriz original (Valores Deseados en negrita)

	Sector A	Sector B	Sector C	Total F	
Sector A	200	150	300	650	**750**
Sector B	20	60	80	160	**200**
Sector C	180	45	150	375	**500**
Total C	400	255	530		
	450	**360**	**640**		

PASO 1

	Sector A	Sector B	Sector C	Total F
Sector A	0,50	0,59	0,57	**1,65**
Sector B	0,05	0,24	0,15	**0,44**
Sector C	0,45	0,18	0,28	**0,91**
Total C	**1**	**1**	**1**	

PASO 2

	Sector A	Sector B	Sector C	Total F
Sector A	225,0	211,8	362,3	**799,0**
Sector B	22,5	84,7	96,6	**203,8**
Sector C	202,5	63,5	181,1	**447,2**
Total C	**450**	**360**	**640**	

PASO 3

	Sector A	Sector B	Sector C	Total F
Sector A	0,28	0,27	0,45	**1,00**
Sector B	0,11	0,42	0,47	**1,00**
Sector C	0,45	0,14	0,41	**1,00**
Total C	**0,84**	**0,82**	**1,33**	

PASO 4

	Sector A	Sector B	Sector C	Total F
Sector A	211,2	198,8	340,0	**750,0**
Sector B	22,1	83,1	94,8	**200,0**
Sector C	226,4	71,0	202,5	**500,0**
Total C	**459,7**	**352,9**	**637,4**	

Luego de varias iteraciones se consigue la convergencia, tal como se muestra en la tabla más abajo.

DATOS COMPATIBILIZADOS

	Sector A	Sector B	Sector C	Total F
Sector A	206,1	202,8	341,1	**750,0**
Sector B	21,4	84,2	94,4	**200,0**
Sector C	222,5	73,0	204,5	**500,0**
Total C	**450,0**	**360,0**	**640,0**	

El procedimiento iterativo puede automatizarse fácilmente mediante una planilla de cálculo o mediante un software matemático. En particular hemos desarrollado un sencillo programa en MATLAB que se presenta en el anexo.

El método utilizado (RAS) tiene la ventaja de su sencilla implementación pero no tiene una fundamentación económica. Por otra parte no tiene flexibilidad para fijar otros parámetros que no sean los totales de fila y columna, por ejemplo no puede dejar fijo un valor de la matriz, de cuya magnitud tenemos certeza.

3. ACTUALIZACIÓN DE UNA MIP A PARTIR DE NUEVOS DATOS DE FILAS Y COLUMNAS: MÉTODO DE ENTROPIA CRUZADA

Una alternativa bastante popular al método RAS lo constituye el método de Entropía Cruzada. Este método se fundamenta en la teoría de la información desarrollada por Shannon (1948 y aplicada en economía por Theil (1967).

Esquemáticamente consiste en minimizar la distancia de entropía cruzada de Kullback y Leibler (1951) entre el valor nuevo y el anterior de la probabilidad estimada.

Supongamos que un evento E_1 tiene probabilidad de ocurrencia q_1, pero recibimos nueva información por la cual la probabilidad de ocurrencia pasa a ser p_1:

$$P(E_1) = q_1 \qquad \text{--------->} \qquad P'(E_1) = p_1$$

La información adicional obtenida puede cuantificarse según la teoría de la información como:

$$-\ln\left({}^{p_1}/_{q_1}\right)$$

Por lo tanto la esperanza de la información adicional para un conjunto de n eventos será:

$$I(p:q) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ \ln \left({}^{p_i}/_{q_i}\right)$$

Aplicado al problema de actualizar una MIP el problema es encontrar una nueva MIP, cercana a la existente, minimizando la distancia de entropía cruzada entre ellas, respetando las restricciones impuestas (las sumas de las filas y las columnas).

Se trata entonces de resolver:

$$\min \sum_{i} \ \sum_{j} t_{ij}^{1} \, ln\left(\frac{t_{ij}^{1}}{t_{ij}^{0}}\right)$$

Sujeto a:

$$\sum_i \ \sum_i \ t_{ij}^{k} = 1 \qquad , \qquad \sum_i \ t_{ij}^{k} T \ = C_j \qquad , \qquad \sum_j \ t_{ij}^{k} T \ = F_j$$

Donde:

$$t_{ij} = {}^{a_{ij}}/_{T} \qquad T \ = \sum_i \ \sum_j \ a_{ij}$$

También se puede implementar en forma sencilla en una planilla de cálculo. Lo primero es pasar de la matriz original a la matriz de probabilidades iniciales dividiendo cada coeficiente por la suma total de los mismos.

Matriz original (Valores Deseados en negrita)

	Sector A	Sector B	Sector C	Total F	
Sector A	200	150	300	650	**750**
Sector B	20	60	80	160	**200**
Sector C	180	45	150	375	**500**
Total C	400	255	530		
	450	**360**	**640**		

MATRIZ DE PROBABILIDADES INICIALES qij

	Sector A	Sector B	Sector C	Total F
Sector A	0,169	0,127	0,253	0,549
Sector B	0,017	0,051	0,068	0,135
Sector C	0,152	0,038	0,127	0,316
Total C	0,338	0,215	0,447	1,000

Esta matriz cuyos coeficientes denominamos Qij hace las veces de punto de partida de información y con respecto a ella se calculan la entropía que agrega cada cambio.

Como se ve en la figura más abajo, para hallar la matriz con los valores nuevos de los coeficientes se parte de una matriz igual la inicial y se calculan también sus probabilidades, que ahora llamaremos Pij.

La matriz de entropías consigna para cada coeficiente el valor de:

$$Pij*\ln(Pij/Qij)$$

Obviamente las entropías iniciales serán nulas toda vez que al inicio los valores iniciales y finales son iguales.

A continuación se invoca al solver de Excel (en el menú Herramientas), el cual ahora intentará minimizar las entropías cruzadas (es decir la suma de los coeficientes de la matriz de entropías), pero cumpliendo con las restricciones de que las sumas de filas y columnas alcancen los valores deseados.

Estas restricciones se consignan como igualdades de las celdas donde dichos valores se almacenan. Los valores que cambian son los coeficientes de la matriz, con la restricción (que se consigna en “opciones”) de que dichos valores sean “no negativos”.

MATRIZ TRANSFORMADA

	Sector A	Sector B	Sector C	Total F	
Sector A	200	150	300	650	**750**
Sector B	20	60	80	160	**200**
Sector C	180	45	150	375	**500**
Total C	400	255	530	1185	
	450	**360**	**640**		

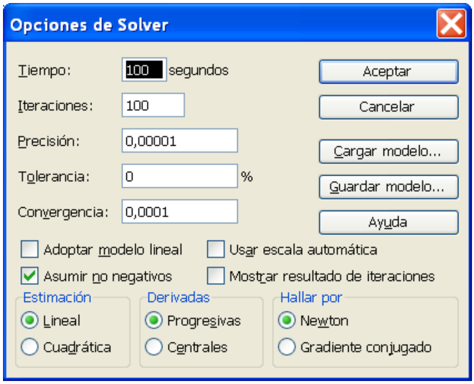
MATRIZ DE PROBABILIDADES FINALES Pij

	Sector A	Sector B	Sector C	Total F
Sector A	0,169	0,127	0,253	0,549
Sector B	0,017	0,051	0,068	0,135
Sector C	0,152	0,038	0,127	0,316
Total C	0,338	0,215	0,447	1,000

MATRIZ DE ENTROPIAS pij*ln (pij/qij)

0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00

SUMA DE ENTROPIAS CRUZADAS = 0,00E+00



En el caso que se ejemplifica la suma de las entropías se minimiza para valores de los coeficientes que coinciden con los obtenidos mediante el método RAS. Este resultado es general.

MATRIZ TRANSFORMADA

	Sector A	Sector B	Sector C	Total F	
Sector A	206,1	202,8	341,1	750	**750**
Sector B	21,4	84,2	94,4	200	**200**
Sector C	222,5	73,0	204,5	500	**500**
Total C	450	360	640	1450	
	450	**360**	**640**		

MATRIZ DE PROBABILIDADES FINALES Pij

	Sector A	Sector B	Sector C	Total F
Sector A	0,142	0,140	0,235	0,517
Sector B	0,015	0,058	0,065	0,138
Sector C	0,153	0,050	0,141	0,345
Total C	0,310	0,248	0,441	1,000

MATRIZ DE ENTROPIAS pij*ln (pij/qij)

-2,44E-02	1,40E-02	-1,73E-02
-1,98E-03	7,96E-03	-2,36E-03
1,55E-03	1,42E-02	1,53E-02

SUMA DE ENTROPIAS CRUZADAS = 6,88E-03

4. ENTROPÍA CRUZADA VS. RAS. COMPARACIÓN DE LOS MÉTODOS

Para la resolución del problema presentado el método de Entropía Cruzada resulta equivalente al método RAS (los resultados a los que se arriba son los mismos).

Por otra parte el método EC permite resolver una variedad de problemas más amplio que el método RAS y tiene una fundamentación estadística basada en la teoría de la información, cosa que el método RAS no tiene:

El método resulta ser más flexible porque:

- Pueden indicarse celdas que no se desean modificar (por ejemplo porque son datos muy confiables):

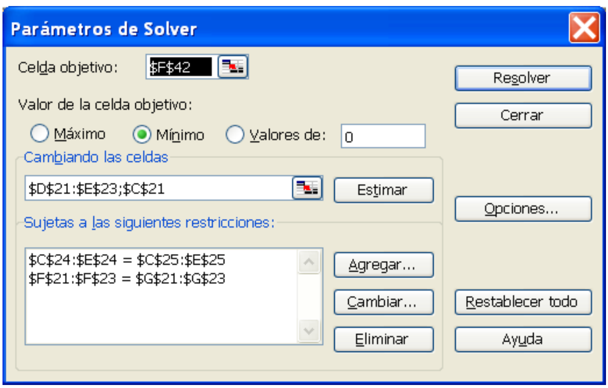
- Puede utilizarse para balancear una matriz (cuadrada) de contabilidad social construida con datos de distinta procedencia. Este problema difiere del anteriormente estudiado en que no se tiene un valor cierto de la suma de filas y columnas aunque forzosamente debe cumplirse que:
  - $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}$

5. FLEXIBILIDAD DEL MÉTODO DE ENTROPÍA CRUZADA

El caso antes mencionado de que algunas celdas deseen dejarse sin modificaciones puede ejemplificarse de la siguiente manera:

Supongamos tener el mismo caso que al principio (la misma matriz inicial y las mismas sumas finales deseadas) pero que las celdas A21 y A31 no deseen modificarse (Se señalan sombreadas en la figura).

El caso se resuelve fácilmente excluyendo a las mismas de las celdas a modificar. Pueden excluirse o no de la suma ya que dicha exclusión no alterará el óptimo.



MATRIZ TRANSFORMADA

	Sector A	Sector B	Sector C	Total F	
Sector A	250,0	188,8	311,2	750	**750**
Sector B	20,0	85,8	94,2	200	**200**
Sector C	180,0	85,4	234,6	500	**500**
Total C	450	360	640	1450	
	450	**360**	**640**		

MATRIZ DE PROBABILIDADES FINALES Pij

	Sector A	Sector B	Sector C	Total F
Sector A	0,172	0,130	0,215	0,517
Sector B	0,014	0,059	0,065	0,138
Sector C	0,124	0,059	0,162	0,345
Total C	0,310	0,248	0,441	1,000

MATRIZ DE ENTROPIAS pij*ln (pij/qij)

3,68E-03	3,69E-03	-3,55E-02
-2,78E-03	9,20E-03	-2,48E-03
-2,51E-02	2,59E-02	3,97E-02

SUMA DE ENTROPIAS CRUZADAS = 1,63E-02

Por otra parte el problema del balanceo de una matriz, en la que los valores de las sumas no están prefijados pero debe cumplirse la condición de igualdad de sumas de filas y columnas correspondientes, puede también implementarse en forma sencilla.

Simplemente se copian los totales de fila debajo de los finales de columna y se plantea la condición de que ambas sumas deben coincidir. Planteamos el ejemplo de balancear la matriz inicial utilizada en los anteriores ejemplos para que se igualen los totales de fila y columna.

MATRIZ TRANSFORMADA

	Sector A	Sector B	Sector C	Total F
Sector A	196,6	87,0	203,0	486,61
Sector B	33,3	58,9	91,7	183,86
Sector C	256,7	37,9	147,3	441,87
Total C	486,61	183,86	441,87	1112,34
	486,61	**183,86**	**441,87**	

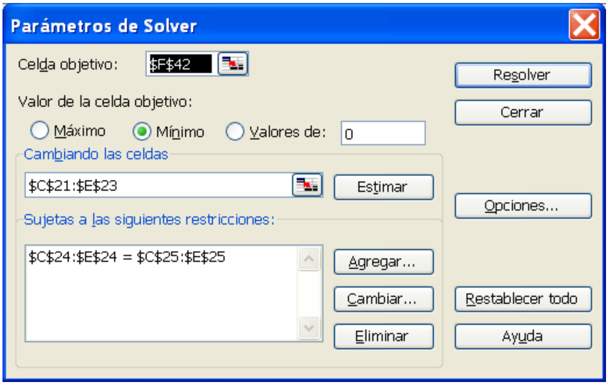
MATRIZ DE PROBABILIDADES FINALES Pij

	Sector A	Sector B	Sector C	Total F
Sector A	0,177	0,078	0,182	0,437
Sector B	0,030	0,053	0,082	0,165
Sector C	0,231	0,034	0,132	0,397
Total C	0,437	0,165	0,397	1,000

MATRIZ DE ENTROPIAS pij*ln (pij/qij)

8,19E-03	-3,76E-02	-5,98E-02
1,71E-02	2,40E-03	1,64E-02
9,65E-02	-3,69E-03	5,94E-03

SUMA DE ENTROPIAS CRUZADAS = 4,55E-02



6. CONCLUSIONES Y EXTENSIONES

Es posible actualizar matrices de insumo producto y balancear matrices de contabilidad social pequeñas utilizando planilla de cálculo.

El método de Entropía Cruzada aparece como el más versátil dada la disponibilidad actual de potencia de cálculo en las computadoras personales.

Para matrices grandes (por ejemplo la MIP 1997 de 124x124 sectores) se puede trabajar con medios de cálculos más potentes y precisos (por ejemplo MATLAB o GAMS).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Fofana, I., Lemelin, A. y Cockburn, J. (2002): "Balancing a Social Accounting Matrix", Université Laval, draft.

Bacharach, M. (1970): "Biproportional matrices and input-ouput change, Cambridge University Press, Londres.

Kullback, S. y Leibler, R. (1951): "On information and Sufficiency", The Annals of Mathematical Statistics Vol. 22 Nro. 1 79-86.

Robinson, S., Cattaneo, A. y El-said, M. (2000): "Updating and Estimating a Social Accounting Matrix Using Cross Entropy Methods", IFPRI. Discussion Paper Nro. 58.

APLICACIÓN DEL CONCEPTO DE AUTOVECTOR PRINCIPAL A LA PRIORIZACIÓN DE OBJETIVOS INSTITUCIONALES[1]

María Teresa Casparri
Verónica García Fronti
Javier García Fronti

INTRODUCCIÓN

El proceso jerárquico de análisis (AHP, por sus siglas en inglés Analytic Hierarchy Process) es una metodología de decisión multicriterio que permite priorizar diferentes alternativas en función de una serie de criterios favoreciendo por un lado la toma de decisiones y por otro lado permite mejorar el conocimiento de un problema dado.

Esta metodología de trabajo se basa en la descomposición de un problema en una estructura jerárquica que incluye varios niveles. Es un proceso de selección de alternativas en función de una serie de criterios los cuales, en general, suelen estar en conflicto.

Esta metodología fue propuesta por el matemático Thomas Saaty para resolver el tratado de reducción de armamento entre USA y la URSS y su uso se fue extendiendo a los más variados campos como la economía, la política y la gestión ambiental entre otros.

Brevemente, la metodología incluye los siguientes pasos:

I. Formulación del problema.
II. Valoración de los elementos.
III. Priorización de los criterios y las alternativas
IV. Priorización de las alternativas con respecto al objetivo planteado.

---

[1] El presente trabajo se realizó en el marco de los proyectos de investigación: PICT 2006-00770 "Impacto Económico-Financiero y Actuarial del Riesgo Climático en Argentina" y UBACyT 008 "Evaluación de Riesgos Económico-Financieros del Cambio Climático en Argentina" ambos dirigidos por la Dra. María Teresa Casparri. UBACyT 012 "Evaluación de riesgos económicos y financieros del cambio climático en Argentina" que dirige Javier García Fronti.

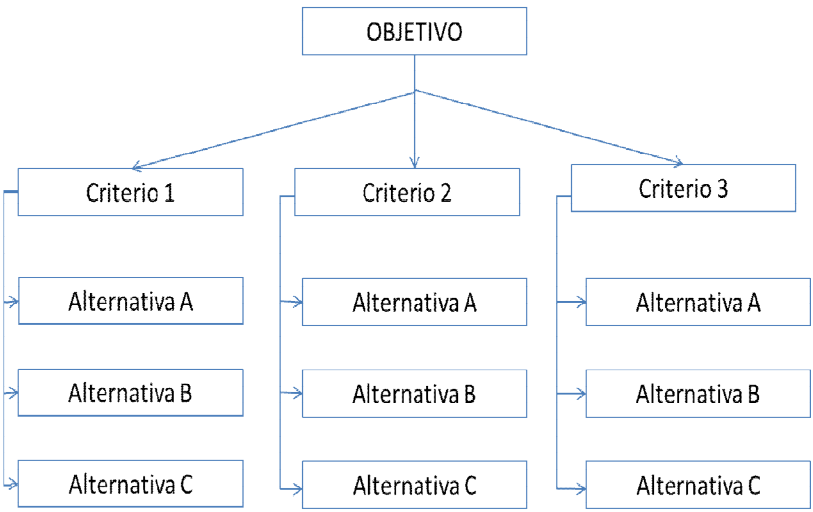
[2] Saaty, TL 2003, 'Decisión-making with the AHP: Why is the principal eigenvector necessary', *European Journal of Operational Research*, vol. 145, no. 1, pp. 85-91.

1. METODOLOGÍA AHP

A continuación describimos cada uno de los pasos involucrados en la metodología AHP:

Formulación del problema: El primer paso en esta metodología es el más complicado de realizar y el que permite conocer mejor el tema que se está analizando. Aquí, se desglosa el problema en sus componentes más importantes. En primer lugar se define el objetivo que se desea alcanzar al realizar la metodología AHP. Luego se identifica que criterios son relevantes a la hora de conseguir el objetivo propuesto y, por último, se listan las distintas alternativas con las que se cuentan para alcanzar los objetivos deseados. Es decir, se confecciona la estructura jerárquica del problema:

Figura 1



Valoración de los elementos: Se cuantifica a cada uno de los elementos con respecto al otro. El decisor debe emitir sus preferencias en cada uno de los niveles jerárquicos establecidos. Aquí se generarán matrices de comparación binaria.

Para la realización de las comparaciones se utilizan escalas de razón en términos de importancia sobre la base de una escala numérica que va desde uno hasta nueve (escala propuesta por Saaty)

Tabla 1

Escala numérica	Escala Verbal
1	Igual importancia de los criterios
3	Importancia moderada de un criterio sobre otro
5	Importancia fuerte
7	Importancia muy fuerte
9	Extrema importancia

Priorización de los criterios y alternativas

Se calcula la prioridad de cada criterio y de cada alternativa. El procedimiento propuesto por Saaty para su obtención es el *método del autovector principal por la derecha,* en el punto 3 profundizamos sobre el método.

Priorización de las alternativas con respecto al objetivo planteado:

Una vez que se realizó la priorización de las alternativas con respecto a cada criterio se confecciona una matriz cuyas columnas serán los autovectores obtenidos en cada una de las priorizaciones y se multiplica esta matriz por el vector de priorizaciones de los criterios. Es decir, cuál es la alternativa más conveniente para el problema planteado inicialmente.

2. AUTOVECTOR PRINCIPAL

Veamos como utilizamos el concepto de autovector para priorizar las alternativas. Supongamos que confeccionamos una matriz de n x n en la que hacemos comparaciones de a pares de cada uno de los elementos. Para cuantificar estas comparaciones utilizamos la escala propuesta por

Saaty del 1 al 9. Los decisores, al ir comparando de a pares los n criterios van a confeccionar la siguiente matriz:

Tabla 2

	Criterio 1	Criterio 2	Criterio 3	…	Criterio n
Criterio 1	C_{11}	C_{12}	C_{13}		C_{1n}
Criterio 2	C_{21}	C_{22}	C_{23}		C_{2n}
Criterio 3	C_{31}	C_{32}	C_{33}		C_{3n}
….					
Criterio n	C_{n1}	C_{n2}	C_{n3}		C_{nn}

En donde, por ejemplo, C_{12} nos estará indicando, la importancia relativa que tiene el criterio 1 con respecto al criterio 2.

Si analizamos la matriz, se puede ver que debido a la escala de comparación utilizada todos los elementos de la matriz van a ser positivos. Luego, los elementos de la diagonal principal van a ser todos igual a 1, ya que en la diagonal principal se compara la importancia de un criterio consigo mismo.

Por otro lado, se considera que la importancia de un criterio con respecto a otro satisface la condición recíproca, es decir si el criterio 1 es x veces preferido que el criterio 2, entonces el criterio 2 es 1/x preferido del criterio 1. Por lo tanto la matriz de comparaciones será positiva y recíproca:

Tabla 3

	Criterio 1	Criterio 2	Criterio 3		Criterio n
Criterio 1	1	C_{12}	C_{13}	….	C_{1n}
Criterio 2	$1/C_{12}$	1	C_{23}	….	C_{2n}
Criterio 3	$1/C_{13}$	$1/C_{23}$	1	….	C_{3n}
	….	….	….	….	….
Criterio n	$1/C_{1n}$	$1/C_{2n}$	$1/C_{3n}$	….	1

De acuerdo al teorema de Perron, una matriz positiva siempre tiene un valor característico real y positivo r, que es una raíz simple de la ecuación característica y excede el módulo de todos los demás valores característicos. A este valor o raíz maximal r corresponde un vector característico positivo. Por lo tanto la matriz de comparaciones, tiene un autovalor máximo que es positivo y asociado a ese autovalor un autovector positivo.

Si procedemos a normalizar al autovector principal, obtendremos el vector de prioridades de los criterios dados.

Algunos de los supuestos utilizados por Saaty son:

- Se asume independencia entre los criterios, es decir que son independientes de las propiedades de las alternativas.
- Reciprocidad: El decisor debe ser capaz de realizar comparaciones y establecer la fuerza de sus preferencias. La intensidad de estas preferencias debe satisfacer la condición recíproca: "Si A es x veces preferido que B, entonces B es 1/x veces preferido que A".

Cuando el decisor realiza las comparaciones binarias, lo que construye es una matriz, que como hemos mencionado tiene 1 en la diagonal principal y los elementos de la misma son recíprocos respecto de la diagonal principal.

Supongamos que w_1, w_2, ...w_n son las calificaciones dadas por los decisores a las n alternativas. La importancia relativa entre la alternativa i con respecto a la j se puede representar por el cociente wi/wj y la importancia relativa de todas las parejas de alternativas se puede resumir en la siguiente matriz de comparaciones pareadas W.

$$W=\begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}$$

Si quisiéramos obtener el vector de prioridades a partir de esta matriz deberíamos resolver el siguiente sistema:

$$W.x = \lambda x$$

En donde el vector de prioridades es justamente el autovector de la matriz W, esto se debe a que la matriz W es recíproca y consistente. Cuando una matriz es recíproca y consistente, garantiza que:

- La matriz W tiene un autovalor real positivo (λ_{max}), el cual domina en módulo a todos los demás autovalores, su autovector es único y es el llamado autovector principal.
- $\lambda_{max} = n$ y los demás autovalores son cero.
- El autovector principal de W es el vector de prioridades que captura la predominancia de cada una de las alternativas.

En la práctica, al confeccionar la matriz de comparaciones de alternativas esta no es recíproca ni consistente, ya que en los juicios humanos las mediciones ya no son consistentes, pero si esta matriz tiene apenas una perturbación con respecto a la matriz W, Saaty propone algunas pequeñas modificaciones para poder calcular el vector de prioridades y a su vez propone un índice de consistencia que nos permite asegurarnos que podemos aplicar el método a nuestra matriz, en este trabajo no profundizaremos en el índice de consistencia.

3. CASO DE APLICACIÓN PARA EL USO DE TIERRAS EN BRASIL

El proyecto de la FAO (SIRTPLAN) utilizó la metodología AHP para priorizar posibles escenarios para el uso de la tierra en Brasil.

El objetivo principal del proyecto era el establecimiento de un sistema de información de tierras con apoyo del SIG (Sistema de información geográfica) y consistió en una metodología para la evaluación y generación de escenarios de usos de las tierras con el apoyo de una serie de herramientas para almacenar, procesar, analizar y presentar información. En este proyecto se aplicó la metodología AHP para conocer las preferencias de actores involucrados en la toma de decisión frente a los usos de tierras en el caso específico de una Microcuenca en Brasil (Estado de Santa Catarina).

Previo al uso de la herramienta AHP se realizó con la comunidad el análisis de la situación actual y se estableció que la principal problemática es la baja rentabilidad y alta erosión de sus actuales actividades agropecuarias.

Utilizando programación lineal se generaron escenarios alternativos que corresponden a actividades agrícolas que tienden a generar el mayor margen bruto causando un mínimo de erosión posible. De esta forma con el AHP se buscó identificar criterios para la evaluación y priorización de esos escenarios.

En este caso de Brasil, el problema se estructuró de la siguiente manera:

1. Identificación del problema

El problema identificado por la comunidad fue la *baja rentabilidad y la alta erosión de las actividades agropecuarias.*

2. Definición del objetivo

El objetivo propuesto por los participantes fue*: Priorizar escenarios de usos de las tierras tendientes a minimizar la erosión y aumentar la rentabilidad.*

3. Identificación de criterios y su priorización

Criterio ambiental, criterio económico, criterio de comercialización, criterio de infraestructura.

4. Identificación de alternativas

Se seleccionaron dos escenarios de usos de las tierras optimizadas, teniendo en cuenta mínima erosión y alta rentabilidad. Se definió usar estos dos escenarios porque se consideraron los más compatibles con el perfil de los agricultores de la región que se caracterizan por tener limitados recursos de capital, de tierra y por el alto riesgo de sus actividades agropecuarias.

5. Emisión de juicios y las evaluaciones

Si bien al utilizar la metodología AHP se logro priorizar entre dos alternativas posibles para el uso de la tierra, el principal potencial de la herramienta fue que permitió mostrar en forma sistemática que opinaban los distintos actores involucrados en el uso de la tierra. Esto permite que de la metodología se realicen varias lecturas y se conozca el problema en mayor profundidad[2].

---

[2] La metodología AHP utilizada en Brasil y los resultados obtenidos se pueden encontrar en: FAO (2000) Informe Técnico Nº 2 "El AHP y su aplicación para la determinar los usos de la tierra"

La experiencia de Brasil permite nos muestra el amplio potencial de aplicación del AHP en diferentes situaciones.

4. CONCLUSIONES

El proceso AHP permite priorizar entre diferentes alternativas en función de una serie de criterios que en general están contrapuestos, esta metodología utiliza el concepto matemático de autovector para priorizar entre un conjunto de criterios y alternativas.

La simpleza con la que se puede plantear un problema complejo y resolverlo en forma sencilla es la mayor virtud de esta metodología, no obstante la sola aplicación de la misma no nos garantiza que se tome la mejor decisión y se debe tener en cuenta que si bien en este trabajo no nos detuvimos a analizarlo en profundidad en el armado de la matriz de comparaciones pareadas los conocimientos del problema de los decisores es fundamental para que el resultado sea adecuado.

La experiencia de Brasil nos muestra el amplio potencial de aplicación del AHP en diferentes situaciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anton, H (1997): *Introducción al algebra lineal*, 2º ed. Limusa. Mexico.

Bernardello, A; Bianco, M; Casparri, M; García Fronti, J; Olivera de Marzana, S (2010) *Matemática para Economistas*. Omicron. Buenos Aires.

FAO (2000) Informe Técnico Nº 2 *"El AHP y su aplicación para la determinar los usos de la tierra".*

Grossman, S (1996): *Algebra lineal.* Mc Graw-Hill, México.

Martinez Rodriguez, Elena (2007): *Aplicación del proceso jerárquico de análisis en la selección de la localización de una pymes.* Anuario Jurídico y Económico Escurialense, XL (523-542).

Saaty, T. (2003): *Decision-making with the AHP: Why is the principal eigenvector necessary.* European Journal of Operational Research.