



Universidad de Buenos Aires  
Facultad de Ciencias Económicas  
Biblioteca "Alfredo L. Palacios"



# Fundamentos matemáticos de los seguros sociales

Acerboni, Argentino V.

1916

Cita APA:

Acerboni, A. (1916). Fundamentos matemáticos de los seguros sociales. Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales de la Biblioteca Central "Alfredo L. Palacios". Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

Fuente: Biblioteca Digital de la Facultad de Ciencias Económicas - Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

07494

# FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

DE LOS

# SEGUROS SOCIALES

*Argenteroni*

TESIS

PRESENTADA PARA OPTAR AL TÍTULO DE DOCTOR EN CIENCIAS ECONÓMICAS

POR

ARGENTINO ACERBONI

FACULTAD

CIENCIAS ECONÓMICAS



189

BUENOS AIRES

IMP. ESCOFFIER, CARACCILO & CIA.

1916

CONTADURÍA

INVENTARIO DE 1917

Nº 1215

189

CATALOGADO



REDESCUENTO BANCARIO

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

---

DECANO

Doctor Rodríguez Etchart Carlos

VICE-DECANO

Doctor Yriondo Manuel M. de

SECRETARIO

Doctor Levene Ricardo

CONSEJO DIRECTIVO

Doctor Bianco José  
» Broggi Hugo  
Ingen. Casariego Orfilio  
Doctor Davel Ricardo J.  
» Dellepiane Antonio  
» Frederking Gustavo A.  
» Gonnet Manuel B.  
» Lobos Eleodoro  
Ingen. Noceti Domingo  
Doctor Olaechea y Alcorta Pedro  
Señor Piñero Sergio M.  
Doctor Suárez José León  
» Torino Damián M.

PRO-SECRETARIO

Señor Gonnet Raúl

# ACADEMIA DE CIENCIAS ECONÓMICAS

---

## ACADÉMICO HONORARIO

Doctor Uballes Eufemio

## PRESIDENTE

Doctor Olaechea y Alcorta Pedro

## SECRETARIO

Doctor Frederking Gustavo A.

## ACADÉMICOS

Doctor Arce José ✓  
Señor Berduc Enrique  
Doctor Bianco José  
» Broggi Hugo  
Ingen. Casariego Orfilio  
Doctor Davel Ricardo J.  
» Dávila Adolfo E.  
» Frers Emilio  
» Gonnet Manuel B.  
» Lobos Eleodoro  
» Melo Leopoldo  
Ingen. Noceti Domingo  
Señor Pillado Ricardo  
» Piñero Sergio M.  
Doctor Piñero Norberto  
» Rodríguez Etchart Carlos  
» Suárez José León  
» Susini Telémaco  
» Tezanos Pinto David de  
» Torino Damián M.  
» Weigel Muñoz Ernesto  
» Yriondo Manuel M. de  
» Zeballos Estanislao S.

## PERSONAL DOCENTE

---

### *Matemática Financiera (1.º curso)*

Profesor titular: Ing. Orfilio Casariego  
» suplente: Ing. Manuel Ordóñez

### *Matemática Financiera (2.º curso)*

Profesor titular: Sr. José González Galé  
» suplente: Ing. Justo Pascali (h.)

### *Estadística*

Profesor titular: Dr. Hugo Broggi  
» suplente: Ing. Alejandro Bunge

### *Tecnología Industrial y Rural*

Profesor: Ing. Ricardo J. Gutiérrez

### *Contabilidad*

Profesor titular: Sr. T. Vallini  
» suplente: Sr. Santiago G. Rossi  
» » Sr. Juan Bayetto

### *Bancos*

Profesor titular: Sr. Sergio M. Piñero  
» suplente: Dr. Gustavo A. Frederking  
» » Sr. Antonio Morandi

### *Sociedades Anónimas y Seguros*

Profesor titular: Dr. Mario A. Rivarola  
» suplente: Dr. Ricardo Olivera  
» » Dr. Juan Ramón Galarza

### *Geografía Económica Nacional (1.º curso)*

Profesor titular: Dr. Arturo Seeber  
» suplente: Dr. Ernesto Ferrari

### *Geografía Económica Nacional (2.º curso)*

Profesor: Dr. Manuel Carlés

### *Fuentes de Riqueza Nacional*

Profesor titular: Dr. Ricardo J. Davel  
» suplente: Dr. Martiniano Leguizamón Pondal

### *Transportes y Tarifas*

Profesor: Ing. Carlos M. Ramallo

### *Economía Política (1.º curso)*

Profesor titular: Dr. Mauricio Nirenstein  
» suplente: Dr. Enrique Ruiz Guiñazú  
» » Dr. Filiberto de Oliveira César

*Economía Política (2.º curso)*

Profesor: Dr. Juan J. Britos (h.)

*Régimen Agrario*

Profesor titular: Dr. Eleodoro Lobos  
» interino: Dr. Mario Sáenz

*Historia del Comercio*

Profesor titular: Dr. Luis R. Gondra  
» suplente: Dr. Miguel A. Garmendia  
» » Dr. Jorge Cabral

*Finanzas*

Profesor titular: Dr. Ernesto Weigel Muñoz  
» suplente: Dr. Salvador Oría  
» » Dr. Alfredo Labougle

*Política Comercial y Régimen Aduanero Comparado*

Profesor titular: Dr. Vicente Fidel López  
» suplente: Sr. Martín Rodríguez Etchart  
» » Dr. Atilio Pessagno

*Régimen Económico y Adm. de la Constitución*

Profesor titular: Dr. Mariano de Vedia y Mitre  
» suplente: Dr. Joaquin Rubianes

*Legislación Civil*

Profesor titular: Dr. Augusto Marcó del Pont  
» suplente: Dr. Juan F. Solá

*Legislación Comercial (1.º curso)*

Profesor titular: Dr. Antonio J. Maresca  
» suplente: Dr. Salvador Alfonso (h.)  
» » Dr. Manuel F. Fernández

*Legislación Comercial (2.º curso)*

Profesor titular: Dr. Wenceslao Urdapilleta  
» suplente: Dr. Dimas González Gowland

*Derecho Internacional Comercial (Privado y Público)*

Profesor titular: Dr. José León Suárez  
» suplente: Dr. Eduardo Sarmiento Laspiur  
» » Dr. José Miguel Padilla

*Legislación Industrial*

Profesor: Dr. Alfredo L. Palacios

*Legislación Consular*

Profesor: Dr. Eduardo Sarmiento Laspiur

PADRINO DE TESIS

Sr. JOSÉ GONZÁLEZ GALÉ





A MIS PADRES

*[Handwritten signature or name, possibly "Miguel Ángel..."]*

# INDICE

---

|                    |    |
|--------------------|----|
| Bibliografía ..... | 15 |
|--------------------|----|

## CAPITULO I

### OBJETOS DEL SEGURO SOCIAL

|  |    |
|--|----|
| 1. Generalidades.— 2. Alcance del seguro social.— 3. Seguro en caso de enfermedad.— 4. Seguro en caso de accidentes.— 5. Seguro en caso de invalidez.— 6. Seguro en caso de vejez.— 7. Seguro social integral..... | 17 |
|--|----|

## CAPITULO II

### SEGURO EN CASO DE ENFERMEDAD — ESTADÍSTICA Y TABLAS

|   |    |
|---|----|
| 1. La función de morbosidad.— 2. La tasa de morbosidad. Notaciones.— 3. Registro de datos.— 4. Selección — 5. Ajustamiento.— 6. Influencia de la mortalidad.— 7. La probabilidad elemental de enfermedad..... | 23 |
|---|----|

## CAPÍTULO III

### SEGURO EN CASO DE ENFERMEDAD — PRIMAS Y RESERVAS

|  |    |
|--|----|
| 1. Prima única.— 2. Primas periódicas.— 3. Seguros temporarios.— 4. Primas fijas.— 5. Beneficios variables.— 6. Valuaciones..... | 37 |
|--|----|

## CAPITULO IV

### SEGURO DE INVALIDEZ Y VEJEZ

|  |    |
|--|----|
| 1. Consideraciones sobre la invalidez.— 2. Notaciones.— 3. La probabilidad de muerte.— 4. Tablas de invalidez.— 5. Reactividades.— 6. Construcción de la tabla.— 7. Cálculo de las primas.— 8. Reservas.— 9. Seguros de vejez..... | 47 |
|--|----|

CAPITULO V

TABLAS

I. Tablas fundamentales.— 2. Conmutaciones.— 3. Seguro integral..... 61

TABLAS FUNDAMENTALES

I. T<sub>v</sub> (1909). Tabla de mortalidad de la población de Buenos Aires, varones, según los datos del censo de 1909.— 2. T<sub>m</sub> (1909), id. id., mujeres.— 3. Tabla de morbosidad (absoluta) de la Manchester Unity (1893-97).— 4. Tabla de extinción de las pensiones por edades a la entrada, del seguro alemán (Klein).— 7. Tabla de invalidez para la población de Buenos Aires..... III

CONMUTACIONES 4 ‰

I. D<sub>x</sub>, N<sub>x</sub>,  $\bar{N}_x$ ..... XV  
 II.  $K_x^{1/2}$ ,  $K_x^{2/2}$ ,  $K_x^2$ ,  $K_x^{3+4}$ ,  $K_x^{5+}$ ..... XVII

CONMUTACIONES 5 ‰

I. D<sub>x</sub>, N<sub>x</sub>,  $\bar{N}_x$ ..... XIX  
 II.  $K_x^{1/2}$ ,  $K_x^{2/2}$ ,  $K_x^2$ ,  $K_x^{3+4}$ ,  $K_x^{5+}$ ..... XXI

CONMUTACIONES 6 ‰

I. D<sub>x</sub>, N<sub>x</sub>,  $\bar{N}_x$ ..... XXIII  
 II.  $K_x^{1/2}$ ,  $K_x^{2/2}$ ,  $K_x^2$ ,  $K_x^{3+4}$ ,  $K_x^{5+}$ ..... XXV

CONMUTACIONES (INVALIDEZ) 5 ‰

I.  $D_x^{\bar{a}a}$ ,  $N_x^{\bar{a}a}$ ,  $\bar{N}_x^{\bar{a}a}$ , I<sub>x</sub>..... XXVII

APÉNDICE I

Formularios para el registro de datos..... XXXI

APÉNDICE II

Variación de las tasas de morbosidad y mortalidad.. XXXIV

APÉNDICE III

Método de valuación «por edades pasadas» de Hardy. XXXVIII

Fé de Erratas..... XLI

# BIBLIOGRAFIA

(Para una bibliografía completa, consúltese la Encyclopédie des Sciences Mathématiques, etc., I, fasc. 4, y el Versicherung-Lexikon, p. 613).

- L. von Bortiewicz.* — Art. «Statistique» en la Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliqués. París, Gauthier-Villars, 1911. I, fasc. 4.
- Dr. Augusto Bunge.* — Las conquistas de la Higiene social. T. II, Buenos Aires, 1911.
- U. Broggi.* — Matematica Attuariale. Milano, U. Hoepli, 1906.
- J. González Galé.* — El seguro en caso de enfermedad. Buenos Aires, 1914.
- G. F. Hardy.* — Messenger Prize Essay on Friendly Societies. London, C. y E. Layton, 1886.
- George King.* — Institute of Actuaries' Text-Book. Part II. London, Layton, 1902.
- P. de Lafitte.* — Essai d'une Théorie rationnelle des sociétés de secours mutuels. París, Gauthier-Villars, 1892.
- A. Loewy.* — Art. Invalidenversicherung en el «Versicherungs Lexikon» del Prof. Dr. A. Manes. Tübingen, J. C. B. Mohr, 1909.
- Vygyan Marr.* — Notes on an Investigation of the Sickness and Mortality Experience of a friendly society. London, Layton, 1908. (Trans. of the F. of A. vol. IV, part V).
- G. Minutilli.* — Nozione di scienza attuariale. Milano, U. Hoepli, 1913.
- P. J. Richard.* — Etude sur l'assurance complementaire de l'assurance sur la vie. París, A. Hermann et fils, 1911.
- P. J. Richard et E. Petit.* — Theorie Mathematique des assurances. París, O. Dion, 1908. (Encyclopedie Scientifique du docteur Toulouse).
- Wm. Sutton.* — Sickness and mortality experience deduced from the quinquennial returns made by the registered friendly societies for the years 1856 to 1880 inclusive. London, H. M.'s stationery office, 1912.
- A. W. Watson.* — Friendly society finance considered in its actuarial aspect. London, Layton, 1912.
- An account of an investigation of the sickness and mortality experience of the I. O. O. F., Manchester Unity, during the five years 1893-97. London, Layton, 1903.

Sobre invalidez, será de suma utilidad consultar, además, las siguientes obras, que no hemos consultado directamente por no poderse actualmente obtener, habiendo hecho uso de los datos que de ellas ha extraído el Dr. A. Bunge:

Entwurf einer Reichversicherungsordnung nebst Begründung. Berlín 1907.

*Klein.* — Statistik der Arbeiterversicherung. Berlín, 1908.

Statistik der Ursachen der Erwerbsunfähigkeit, etc., 1904. (Publicación oficial del Dep. Nacional del Seguro alemán).

Para los cálculos numéricos hemos empleado las tablas de logaritmos a 7 decimales de Chambers (London 1869) e incidentalmente las de Lalande.

---

## CAPITULO I

### Objetos del Seguro Social

1. Generalidades. — 2. Alcance del seguro social. — 3. Seguro en caso de enfermedad. — 4. Seguro en caso de accidente. — 5. Seguro en caso de invalidez. — 6. Seguro en caso de vejez. — 7. Seguro social integral.

#### 1. — GENERALIDADES

En todo el presente trabajo, vamos a considerar los seguros sociales, exclusivamente del punto de vista de un problema matemático; estudiando los diversos factores que intervienen para determinar el costo de los beneficios, su interdependencia, y su efecto en la determinación de dicho costo, con prescindencia absoluta del aspecto social y jurídico de la cuestión.

El problema jurídico del seguro social, es de palpitante actualidad; la discusión doctrinaria y política sobre la forma de implantarse y de costearse sus diversos servicios, tiene un interés vital en estos momentos en que las legislaciones de todos los países se encuentran en un estado de franca evolución hacia la protección estatal del obrero; pero, como decimos, no podemos ocuparnos de este aspecto de la cuestión, por exceder de los límites señalados a nuestro trabajo por la índole del mismo.

A este respecto, puede consultarse ventajosamente la obra del doctor Augusto Bunge, «Conquistas de la Higiene Social» (1), el informe presentado por el mis-

---

(1) A. BUNGE. Las conquistas de la higiene social. Buenos Aires, 1911.

mo al Departamento Nacional de Higiene (1), y los Informes del Departamento Nacional del Trabajo (2).

Por otra parte, para nuestro punto de vista, la importancia de las soluciones que puedan darse a este problema es muy secundaria; se trata de dos puntos siempre ligados en la práctica, pero, en realidad, sus soluciones son independientes; el costo de los servicios de seguro social puede determinarse en todos sus extremos, con absoluta prescindencia de la fuente de los recursos destinados a atenderlos, desde que, sean éstos costeados por el Estado, sean por el asegurado mismo, o por el patrono, o por los tres bajo un sistema cualquiera de distribución, las cifras absolutas no variarán, y sí solamente la forma de repartirse éstas.

## 2. — ALCANCE DEL SEGURO SOCIAL

Para poder llegar a resultados válidos en el estudio matemático de los seguros sociales, debemos previamente limitar con precisión el alcance de cada uno de ellos.

Podemos hacer en la práctica cuatro divisiones principales:

- 1. Seguro en caso de enfermedad. ✓
- 2. Seguro en caso de accidentes. ✓
- 3. Seguro en caso de invalidez (pensiones de invalidez).
- 4. Seguro en caso de vejez (pensiones de vejez).

Además de estas cuatro categorías principales, existen diversos beneficios accesorios, que constituyen otras tantas ramas del seguro social; seguro contra puerperio, contra desocupación, sobre nupcialidad, y el seguro infantil, que es una variedad de seguro de vida, con características especiales.

Entre nosotros, la mayor parte de estos beneficios, excluyendo el de accidentes, al cual atienden algunas sociedades de seguros generales, se encuentran confiados

---

(1) Anales del Departamento Nacional de Higiene, Vol. XXI, Nos. 5 y 6, Buenos Aires, 1914.

(2) La Desocupación obrera en 1915. Publicación del Ministerio del Interior, Buenos Aires, 1915, págs. 170 a 181.

a sociedades particulares, ya sea bajo la forma de mutualidades, ya de empresas comerciales de asistencia médica. Estas últimas, son simples empresas mercantiles, que realizan sus operaciones en una forma análoga a las compañías de seguros, aunque sin las bases matemáticas que dan a éstas su seguridad, sin un control eficiente, y, en cambio, con un margen considerable de utilidad, en vista de lo exiguo del beneficio que aseguran en cambio de la cuota; las primeras son, además de sociedades de asistencia, y, en algunos casos, de pensiones a la vejez e invalidez; son, decimos, sociedades filantrópicas que tienen otros ideales; en casi todas ellas el programa social comprende iniciativas de educación, de intercambio social, de higiene colectiva, y aún, en muchos casos, de agrupación gremial o política.

Es menester tener en cuenta estas circunstancias al examinar el estado financiero de una sociedad de esta naturaleza, pues en ella, además de los fondos destinados a costear el mínimum estatuario de beneficios, deben existir fondos especiales, que corresponden a las atenciones de higiene social, de educación, de cultura, u otras cualesquiera que deben atenderse con recursos independientes y propios.

### 3. — SEGURO EN CASO DE ENFERMEDAD

El seguro en caso de enfermedad tiene por objeto ofrecer al asegurado, en cambio de una prima, generalmente estipulada en un tanto mensual, un beneficio en caso de enfermedad, que consiste, ya en un subsidio pecuniario, ya en asistencia y medicinas, o ya, y esto es lo más frecuente, ambas cosas a la vez.

Para poder apreciar el valor de los seguros de enfermedad, es necesario, en este caso, estudiar el costo de la asistencia por día de enfermedad. Entre nosotros, las sociedades de socorros mutuos, que son las que practican este seguro, no tienen en general una administración suficientemente organizada para permitir una investigación de esta naturaleza. Aun en las sociedades

mejor organizadas, la estadística de enfermedad se lleva del punto de vista médico, agrupándose los ataques por causas; y sin tener en cuenta el dato, importantísimo del punto de vista actuarial, de las *asistencias*, es decir, del número de días de enfermedad atendidos (1).

En cuanto al monto del subsidio de enfermedad, éste varía con las diferentes sociedades, desde pesos 0,50 y pesos 0,75 hasta pesos 3. Teniendo en cuenta que este subsidio debe facilitar al obrero enfermo los medios de mantenerse hasta tanto se restablezca, no puede considerarse que llene las funciones elementales del seguro social ningún subsidio inferior a un peso por día de enfermedad.

Los estatutos de las diversas mutualidades, limitan la duración del subsidio de enfermedad a un máximo de tres meses, seis meses, un año. Algunas establecen subsidios variables, es decir, una cuota dada por los primeros tres meses de enfermedad, una cuota menor por los tres restantes, y una más reducida aún por el resto del año.

Pasado el año de asistencia, casi todas las sociedades consideran al enfermo como crónico, y conmutan el beneficio de enfermedad por una pensión de invalidez, sea con goce de asistencia médica, o sin ella, según lo prescriban los Estatutos.

(1) De las cifras extractadas de los Balances publicados por la Sociedad Italiana de Beneficencia en los tres últimos ejercicios, hemos obtenido los siguientes coeficientes para el costo, por asistencia, de los servicios de médicos y farmacia en el Hospital Italiano, coeficientes que pueden servir como primera aproximación para determinar el costo del seguro de enfermedad. Debe tenerse presente que la asistencia en el Hospital Italiano se refiere en general a enfermos de alguna gravedad:

|  | Costo por asistencia |               |               |
|--|----------------------|---------------|---------------|
|  | 1913-14              | 1914-15       | 1915-16       |
| Asistencia médica general.....                 | 0.1215               | 0.4613        | 0.3544        |
| Medicinas y gastos de farmacia.....            | 0.3809               | 0.4027        | 0.3337        |
| Total, sin operaciones....                     | 0.5024               | 0.8640        | 0.6881        |
| Asistencia médica, operaciones.....            | 0.1635               | 0.1292        | 0.1135        |
| Laboratorios y reposición de instrumental..... | 0.1495               | 0.1794        | 0.1570        |
| Total general.....                             | <u>0.8154</u>        | <u>1.1726</u> | <u>0.9586</u> |

Es también práctica de estas sociedades establecer un período llamado *de carencia*, es decir, un primer período de enfermedad, tres o cinco días, que no goza de subsidio. La enfermedad de menor duración, no goza de subsidio, y las de mayor duración, sólo después de transcurrido el período de carencia.

#### 4. — SEGURO EN CASO DE ACCIDENTES

Este seguro tiene como objeto indemnizar al asegurado en caso de sobrevenirle incapacidad total o parcial como consecuencia de un accidente del trabajo; y en caso de muerte, indemnizar en igual forma a sus herederos. La indemnización puede ser una suma única, o una pensión vitalicia.

Se trata, pues, de una renta de invalidez especial, y de un seguro de vida limitado a determinados riesgos.

#### 5. — SEGURO DE INVALIDEZ

Las enfermedades no profesionales, y los accidentes extraños al trabajo, constituyen el objeto del seguro de invalidez, independientemente de la invalidez senil, que es objeto de un riesgo distinto.

La forma que afecta generalmente el seguro de invalidez es la pensión vitalicia, pagadera desde el momento de producirse la invalidez, si ésta es proveniente de accidente; y después del segundo año de enfermedad, si la invalidez es de origen morbozo.

El monto del beneficio de invalidez, excluída siempre la invalidez por accidentes del trabajo o enfermedad profesional, debe ser tal que permita al asegurado una modesta subsistencia.

#### 6. — SEGURO DE VEJEZ

El seguro en caso de vejez (pensiones de vejez), tiene como objeto la pensión vitalicia después de una edad determinada, 60, 65, 70 o más años. Se trata, por

lo tanto, de una renta vitalicia diferida hasta el año 60, 65, 70, etc. de edad del asegurado.

Respecto al monto de la pensión, debemos hacer la misma observación que en el seguro de invalidez.

#### 7. — SEGURO SOCIAL INTEGRAL

Un plan completo de seguro social, que se proponga poner al obrero al abrigo de todas las contingencias, comprendería, por lo menos:

Un beneficio de enfermedad de 1 peso diario, con más un suplemento prudencial para médico y medicinas, vigente desde los 15 hasta los 60 años.

Un seguro de accidentes que provea una renta igual al 50 por ciento, por lo menos, de la disminución de la capacidad económica del obrero, o al 50 por ciento de su jornal íntegro, en caso de incapacidad total, o de muerte, entre los 15 y los 60 años.

Una renta de invalidez de pesos 0,80 diarios, cesando a los 60 años.

Una renta de vejez de pesos 0,80 diarios, a partir de los 60 años.

Tomamos como edad de retiro 60 años, por ser, a nuestro juicio, el límite máximo de la eficiencia del obrero, entre nosotros, en las condiciones actuales de la explotación industrial, con muy raras excepciones.

---

## CAPITULO II

---

### Seguro en caso de enfermedad. — Estadística y tablas

1. La función de morbosidad. — 2. La tasa de morbosidad. Notaciones. — 3. Registro de datos. — 4. Selección. — 5. Ajustamiento. — 6. Influencia de la mortalidad. — 7. La probabilidad elemental de enfermedad.

#### 1. — LA FUNCIÓN DE MORBOSIDAD

Vamos a considerar, en su forma más general, el caso de un individuo cualquiera de la comunidad.

El asegurador, mediante una prima única o periódica, se ha comprometido a pagar al individuo (asegurado), una cantidad determinada, en efectivo o en asistencia médica, por cada día de enfermedad que el asegurado sufra durante el período al cual se extiende el seguro.

*¿Es posible expresar por medio de una cantidad, función de la edad y del número de días de enfermedad, la probabilidad de que ese individuo, en un día determinado, se halle sufriendo el enésimo día de un ataque de enfermedad?*

Esta función biométrica, a la cual podemos llamar *probabilidad elemental de enfermedad*, sería función de dos variables independientes, edad y duración de enfermedad; y no ha sido, a nuestro entender, estudiada hasta hoy.

En la práctica actuarial, se ha venido considerando una manifestación derivada de esta función, a la que se

ha dado el nombre de *tasa de morbosidad* (o de morbilidad)—*taux de morbidité*—*rate of sickness*.

La tasa de morbosidad,  $m_x$  de los actuarios franceses, o  $z_x$  siguiendo la notación inglesa, es el promedio por cabeza de la enfermedad sufrida por las personas de un grupo determinado, entre edades  $x$  y  $x + 1$ , expresada en días ( $m_x$ ) o en semanas ( $z_x$ ).

Encarado en esta forma, el problema debe plantearse de una manera algo distinta, y más simple.

*Conocido el promedio anual de días de enfermedad soportado por un grupo de individuos de determinada edad, ¿es justificado considerar este promedio como el número probable de días de enfermedad que soportará un individuo de igual edad, en un grupo análogo, durante un año?*

La contestación a esta pregunta depende de la frecuencia individual de las enfermedades, factor de difícilísimo conocimiento, y que sólo es posible estudiar indirectamente.

El estudio de la estadística revela la constancia de los fenómenos de origen morbooso; dos grupos de población, de constitución análoga, demuestran el mismo índice de frecuencia, ya se trate de días de enfermedad, o de porcentaje de determinadas enfermedades o accidentes.

Los porcentajes de tuberculosos, de muertes repentinas, de enfermos asistidos en los consultorios gratuitos, de recetas despachadas en los mismos, son constantes; y las variaciones que en ellos se producen, pueden atribuirse directamente a causas que el estudio de las estadísticas revela.

Tomado, pues, un grupo de individuos de una edad determinada, y una estadística de enfermedad entre individuos de esa edad, observados en un grupo de análoga composición, podemos establecer a priori, dentro de ciertos límites determinados por las leyes del écart, el número total de días de enfermedad que el asegurador deberá indemnizar a los individuos del grupo considerado, en un año.

De aquí que un razonamiento análogo al empleado para los seguros de vida, para justificar la distribución del compromiso del asegurador entre todos los individuos del grupo, nos justifique el empleo de la tasa de morbosidad, para representar el número probable de días de enfermedad para cada individuo, no porque esa cifra considerada individualmente, sea el caso más probable, matemáticamente hablando, sino porque es el promedio del grupo considerado, parte alícuota del compromiso del asegurador.

## 2. — TASA DE MORBOSIDAD. NOTACIONES

Vamos, pues, a limitarnos a considerar la «tasa de morbosidad», como expresión indirecta de la «probabilidad elemental de enfermedad», que el estado actual de los conocimientos sobre la materia no permite estudiar directamente.

Adoptaremos, tanto por su mayor comodidad, cuanto por encuadrar dentro del sistema general de notación empleado por los actuarios, la notación inglesa, expuesta por Hardy (1).

Se designa por  $z_x$  la tasa de morbilidad para la edad  $x$ , expresada en semanas. En cambio de este símbolo, conviene emplear  $m_x$  expresándose la tasa en días.

Las sociedades de socorros mutuos, como hemos dicho antes (Cap. I, párr. 3), limitan frecuentemente la duración del beneficio de enfermedad, ya sea estableciendo un período de carencia de tres o más días, ya sea limitando el subsidio a tres, seis o doce meses de enfermedad, o estableciendo subsidios diferenciales para los períodos trimestrales o semestrales de enfermedad.

Es necesario, por lo tanto, en la práctica, tener tablas que representen únicamente la enfermedad correspondiente a cada uno de esos períodos.

Hardy designa por  $z_x^1$ ,  $z_x^2$ ,  $z_x^3$ , la tasa de morbosidad cuando sólo se tengan en cuenta el 1.º, 2.º, 3.º, se-

---

(1) GEORGE F. HARDY. Messenger Prize Essay on Friendly Societies. London, 1886, págs. 36 y 37.

mestres de enfermedad, respectivamente, y por  $z_x^2 + z_x^3 +$  la tasa de enfermedad cuando se comprende toda la enfermedad desde el 2.º, 3.º semestre inclusive.

Es posible emplear esta notación cuando se exprese la tasa en días, con sólo cambiar la cifra significativa, y podemos emplear, en iguales condiciones,  $m_x^1$ ,  $m_x^2$ ,  $m_x^3$ ,  $m_x^2 +$ , y  $m_x^3 +$ , respectivamente, reservando la notación  $m_x$  para representar la tasa de morbosidad sin limitación de duración de enfermedad.

Cuando la sociedad de socorros mutuos de la cual proceden los datos con que se forma la tasa de morbosidad, tiene establecido un período de carencia, este hecho, que modifica la tasa de morbosidad, debe hacerse constar en la notación, lo que puede hacerse por medio de un índice antepuesto a la  $m$ , ej.,  $-^3 m_x^1$ , tasa de morbosidad, edad  $x$ , con un período de asistencia de un semestre, y un período de carencia de tres días.

Se designa por  $l m_x$  ( $l z_x$  de la notación inglesa) el total de enfermedad experimentada por  $l_x$  asegurados, durante el año observado.

De los  $l_x$  individuos que existen al iniciarse el año de observación, llegan al final del mismo  $l_{x+1}$ .

Dos hipótesis pueden hacerse respecto al número de individuos expuestos a riesgo.

Considerando el individuo expuesto a riesgo por todo el año de su fallecimiento (hipótesis análoga a la hecha para las tablas de mortalidad), tendremos como tasa de morbosidad,

$$m_x = \frac{l m_x}{l_x}$$

que denota el promedio de días de enfermedad que sufre un individuo de edad  $x$ , teniendo en cuenta la probabilidad de supervivencia.

Si consideramos los individuos como expuestos a riesgo sólo hasta el momento de su muerte, eliminando así automáticamente la probabilidad de supervivencia, tenemos, (suponiendo los fallecimientos igualmente distribuidos durante todo el año), que el número de individuos expuestos a riesgo será

$$l_x + \frac{1}{2} d_x$$

o sea

$$l_x + \frac{1}{2} p_x$$

$$l_x + \frac{1}{2} p_x = l_x + \frac{1}{2} p_x$$

La tasa de morbilidad será en este caso

$$(ma)_x = \frac{lm_x}{l_x + \frac{1}{2} p_x} = \left(\frac{1}{2} p_x\right)^{-1} \cdot \frac{lm_x}{l_x}$$

Esta es la llamada por los actuarios ingleses: *tasa central de morbilidad* (central rate of sickness), y que preferimos llamar *tasa absoluta de morbilidad*, por ser independiente de la probabilidad de vida.

Comparando este valor con el valor antes hallado para la tasa de morbilidad  $m_x$ , tendremos que

$$m_x = (ma)_x \cdot \frac{1}{2} p_x$$

fórmula que nos permite, para una población cualquiera, de la cual conozcamos las tasas de mortalidad, convertir la tasa de morbilidad común en tasa absoluta de morbilidad.

### 3. — REGISTRO DE DATOS

La construcción de una tabla de morbilidad que pueda servir de base a los cálculos actuariales, exige, por lo expuesto, la recopilación de datos recogidos, hasta donde sea posible, en el mismo medio en que debe aplicarse, o en su defecto, en una población similar.

En Europa, donde hay sociedades de seguros sociales que tienen una administración bien organizada, estas tablas se hacen a base de la experiencia recogida por las sociedades mismas.

Este origen tienen las tablas de la Ancient Order of Foresters, Independent Order of Oddfellows (Manchester Unity), las de Hubbard, de la Caja de Leipzig, y las tablas calculadas por Neison en 1836-40, Finlaison en 1846-50, y Sutton en 1856-80, con la base de los informes quinquenales que las sociedades registradas deben enviar a la Inspección (Registrar).

La implantación del seguro nacional, en Alemania, Austria, Inglaterra, etc., ha dado lugar a nuevas tablas, que tienen la ventaja de comprender la totalidad de una población, en vez de ser solamente de vidas seleccionadas, como lo son la mayor parte de las que hemos citado.

Para el registro de estos datos, se usan fichas análogas a las empleadas por las sociedades de seguros de vida.

Los tres modelos transcritos en el apéndice núm. 1, form. 1, form. 2 y form. 3, propuestos por Hardy (1), están basados en la práctica de las sociedades inglesas.

Para las tablas de la Manchester Unity, 1893-1897, Watson (2) empleó un modelo más completo, que transcribimos en el mismo apéndice, form. 4; modelo que ofrece la ventaja de clasificar por separado cada ataque de enfermedad.

Es indispensable indicar distintamente en la ficha correspondiente al asegurado, el año de ingreso y el de egreso, a fin de no computar estos años en el cálculo de las tablas; por cuanto el asegurado ha estado expuesto a riesgo por un tiempo menor a la totalidad del año.

#### 4.— SELECCIÓN

Cuando los datos a estudiarse para la formación de una tabla provienen de sociedades diferentes, ocurren diversas causas de error que es menester estudiar detenidamente antes de proceder al ajustamiento de los datos estadísticos hallados.

En primer lugar, una de las causas más importantes es la selección que se produce automáticamente en las sociedades de socorros mutuos. Aquellas sociedades en que la tasa de morbosidad es mucho mayor que el pro-

---

(1) Op. cit., págs. 29 a 31.

(2) An account of an investigation on the sickness and mortality experience of the Independent Order of Odd-Fellows, Manchester Unity, 1893-97. A. W. WATSON, Manchester 1903, págs. 8 y 9.

medio general, se encuentran, a consecuencia de esto, en dificultades financieras, lo cual ocasiona su desaparición, quedando, por lo tanto, solamente aquellas sociedades en que la morbosidad es más liviana, o en que los socios aprovechan menos de los beneficios, sea porque la administración es más celosa, sea porque se encuentran en mejores condiciones de fortuna.

Un ejemplo de la acción de esta causa se encuentra en las primeras tablas calculadas, las tablas escocesas de 1820, que arrojan una tasa de morbosidad excesivamente favorable.

Existe, por otra parte, la circunstancia que hemos mencionado, del celo administrativo; relacionada con el elemento subjetivo, tan importante en lo que se refiere a enfermedad. Los estatutos de las diversas sociedades dan normas distintas en cada una, para el goce de los beneficios, y de la rigidez o laxitud en la aplicación de estas normas, como del celo de las diversas comisiones administrativas, depende en gran parte al aumento o disminución en el costo de los socorros. En muchas sociedades son sólo los socios menesterosos los que hacen uso del socorro, mientras que los que se hallan en buenas condiciones de fortuna, hacen cuestión de beneficencia, no sólo donando sus socorros para el fondo social, sino que también prescindiendo del médico de la sociedad, con lo cual todos los ataques de enfermedad de esta clase de socios escapan a la estadística, y, como consecuencia, influyen en representar la enfermedad de esa sociedad como un porcentaje mucho menor de lo que en realidad es.

Una institución bien organizada, debe controlar cuidadosamente esta clase de socios, y dar salida en sus libros a los socorros que les correspondan, dándoles entrada nuevamente como donaciones, atribuyéndolos a fondos distintos del de enfermedad, pues lo contrario es falsear la tasa de morbosidad anual, y engañarse con respecto a sus compromisos.

Afecta también la tasa de morbosidad, sobre todo en las últimas edades, el caso de uno o más enfermos

crónicos en una sociedad; hecho éste que ocurre con más frecuencia en las sociedades antiguas. Esta causa de error puede evitarse por medio de la vigilancia administrativa, aplicando con tiempo las disposiciones referentes a subsidio de crónicos.

Pero no hay que olvidar que, al subsidiarse un socio como crónico, desaparece del grupo observado, y si bien es cierto que su salida disminuye el número de individuos en observación, es verdad también que los que quedan son los más sanos, y, por lo tanto, el subsidio de crónicos obra como una selección de las mejores vidas.

En el cálculo de tablas de conjunto, el error por este concepto se hace proporcionalmente menor, a medida que aumenta el número de observaciones, como consecuencia de la aplicación de la teoría de las probabilidades.

#### 5. — AJUSTAMIENTO

Reunidos y clasificados los datos relativos a la enfermedad experimentada, corresponde proceder a su ajustamiento.

Se han propuesto para este objeto diferentes sistemas. Desechando el ajustamiento gráfico, que ofrece inconvenientes obvios, tenemos las fórmulas diferentes empleadas para el ajustamiento de las tablas de mortalidad, la mayor parte de las cuales son aplicables a la tasa de morbosidad.

Buscando una fórmula que se ajustara mejor a estas tablas, se ha propuesto el estudio de la función

$$m_x = \frac{C + AB^x}{1_x}$$

en que se supone a la tasa de morbosidad un comportamiento análogo al de la tasa instantánea de mortalidad, en la hipótesis de Gompertz-Makeham, pero este método no ha llegado a resultados válidos en la práctica, debido, a nuestro juicio, a un error de generalización.

Efectivamente,  $m_x$  no es, como la tasa instantánea de mortalidad, la probabilidad marginal de un acontecimiento único.

La tasa de morbosidad, en cualquiera de sus manifestaciones, es la medida del resultado producido por una serie de probabilidades elementales desconocidas, que obran conjuntamente, probabilidades que constituyen en conjunto la probabilidad elemental de enfermedad, cuyo estudio hemos propuesto en este mismo capítulo, párr. 1, y de lo cual nos volveremos a ocupar más adelante.

Es, por lo tanto, una cantidad que expresa una esperanza matemática.

Hardy (1) propone una fórmula, basada en la de las diferencias finitas, que tiene la ventaja de ser sumamente simple en su aplicación, y dar una gradación muy regular.

Representando por  $u_x$  el término  $x$  en la serie original, y por  $u'_x$  el término de la serie ajustada, se aplica la fórmula siguiente:

$$u'_x = \frac{1}{120} \{ 24 u_x + 22 (u_{x-1} + u_{x+1}) + 17 (u_{x-2} + u_{x+2}) + 10 (u_{x-3} + u_{x+3}) + 4 (u_{x-4} + u_{x+4}) - 2 (u_{x-6} + u_{x+6}) - 2 (u_{x-7} + u_{x+7}) - (u_{x-8} + u_{x+8}) \}$$

Para la aplicación de la fórmula precedente, se forma el siguiente cuadro:

|     |       |                  |                  |   |                               |                  |                                 |                             |
|-----|-------|------------------|------------------|---|-------------------------------|------------------|---------------------------------|-----------------------------|
| (1) | (2)   | (3)              | (4)              | (5)   | (6)                           | (7)              | (8)                             | (9)                         |
| $x$ | $u_x$ | $\frac{u_x}{12}$ | suma<br>col. (3) | $\frac{u_x-2}{12} +$<br>$+\frac{u_x+2}{12}$ | col. (4)<br>menos<br>col. (5) | suma<br>col. (6) | $\frac{1}{10}$ suma<br>col. (7) | suma<br>col. (8)<br>$= u_x$ |
|     |       |                  | 3 a 3            |   | 4 a 4                         | 5 a 5            | 6 a 6                           |                             |

Para la gradación de las tablas de la Manchester Unity, 1893-97, Watson (2) empleó la siguiente fórmula:

(1) Op. cit. pág. 33.

(2) Op. cit. pág. 63.

$$u'_0 = \frac{1}{320} ; 74u_0 + 67(u_{-1} + u_1) + 46(u_{-2} + u_2) + \\ + 21(u_{-3} + u_3) + 8(u_{-4} + u_4) - 5(u_{-5} + u_5) - \\ - 6(u_{-6} + u_6) - 3(u_{-7} + u_7) \{$$

Para el cálculo de la edad de los individuos observados, y formación de grupos de edades en observación, es muy conveniente la forma que propone Hardy, y que consiste en calcular al individuo como comprendido dentro del grupo de edad que corresponda a su cumpleaños más próximo a la iniciación del año de observación.

Es decir, que todos los individuos que al iniciarse el año tengan entre  $x - \frac{1}{2}$  y  $x + \frac{1}{2}$  años, serán considerados como de  $x$  años, cumplidos el 1.º de Enero.

Cuando la función  $m_x$  tabulada, está clasificada por períodos de enfermedad, debe tenerse en cuenta, al obtener los datos respectivos, la desviación que se produce por el hecho de haber, al iniciarse el período de observación, individuos enfermos, cuyas enfermedades arrancan de fechas anteriores, y que, por lo tanto, modifican la forma de exposición a riesgo para cada uno de los grupos de enfermedad observados.

Este inconveniente se subsana, ya sea suprimiendo de la estadística estos individuos, ya sea aplicando una corrección conveniente.

## 6. — INFLUENCIA DE LA MORTALIDAD

Hemos visto en este mismo capítulo (párr. 2), que la tasa de la morbosidad depende de la probabilidad de vida, mientras que la tasa central o tasa absoluta de morbosidad, no es influenciada directamente por ella.

Pero ocurre preguntar, si la mortalidad y la morbosidad, funciones análogas, no son afectadas por causas comunes, como ser, el estado sanitario de la población, la ocupación, la vitalidad general de la raza, etc.

Una simple consideración de las tasas de mortalidad

y morbosidad de las diferentes tablas, no es suficiente para formar un criterio exacto al respecto.

Efectivamente, en primer lugar, para poder comparar entre sí la morbosidad de dos tablas diferentes, sería necesario hacer primeramente abstracción de la mortalidad, lo cual podría obtenerse reduciendo la tasa de morbosidad común, a la tasa absoluta de morbosidad, en aquellas tablas que no indican esta última (las tablas de Manchester 1893-97, presentan la tasa absoluta o central de morbosidad en todos los grupos):-

Esta reducción puede hacerse muy fácilmente, si se tiene en cuenta que, como hemos dicho más arriba, ambas tasas están ligadas por la ecuación

$$m_x = (ma)_x \cdot \frac{1P_x}{2}$$

Pero, independientemente de esta circunstancia, que es posible corregir, existen otras que no son susceptibles de corrección, y de éstas, la principal es el elemento subjetivo.

Watson, en la memoria que acompaña a las tablas de la Manchester Unity 1893-97, menciona una observación anotada anteriormente por otros actuarios de diversos países, con respecto a un aumento continuo de la tasa de morbosidad, a la vez que una disminución también constante en la mortalidad.

En el apéndice núm. II, presentamos cuadros que comprenden la morbosidad, mortalidad y tasa absoluta de morbosidad de varias tablas inglesas, y su comparación con la tabla de Manchester Unity 1893-97, que puede adoptarse como término de comparación por su perfección y minuciosidad.

Se nota por ellas el aumento mencionado, aumento que es evidente.

Pero, como quiera que sea, el elemento subjetivo bastaría para justificar dicho aumento. La enfermedad es un hecho indefinido, que se presta a mucha amplitud de interpretación. Los asegurados han sido siempre, en los principios del seguro de enfermedad, remisos en hacer uso de los beneficios, y es sabido que cada vez van

aprovechando más del socorro de enfermedad, de manera que este hecho sería por sí sólo suficiente para justificar un aumento que no es excesivo, como puede verse por los cuadros.

#### 7. — LA PROBABILIDAD ELEMENTAL DE ENFERMEDAD

Hemos propuesto en este mismo capítulo (párr. I) el estudio de una nueva función biométrica, que denominamos «probabilidad elemental de enfermedad».

Vamos a exponer a continuación los datos de que hasta ahora se dispone para contribuir a su estudio.

La probabilidad de que en el primer día del año de observación, el individuo (que no acaba de sufrir examen médico) se halle sufriendo un enésimo día de enfermedad, sería, por hipótesis:

$$(\text{pm})_x^n = f(x, n)$$

función cuya forma es necesario determinar.

La probabilidad de hallarse en ese primer día del año de observación, sufriendo un día de enfermedad de orden cualquiera, sería entonces:

$$(\text{pm})_x = \sum_n^0 f(x, n)$$

probabilidad que podríamos considerar similar a la tasa instantánea de mortalidad.

La tasa absoluta de morbosidad para el año  $x, x+1$ , sería entonces

$$(\text{ma})_x = \sum_{x+1}^x \sum_n^0 f(x, n)$$

Para una enfermedad, comprendida entre los  $n$  y  $n'$  días, la probabilidad para el primer día del año de observación, sería

$$(\text{pm})^{n/n'} = \sum_{n'}^n f(x, n)$$

y la tasa absoluta de enfermedad, para una duración de enfermedad comprendida entre los  $n$  y los  $n'$  días, sería

$$(\mathbf{ma})_x^{n/n'} = \sum_{x+1}^x \sum_{n'}^n f(x.n)$$

La tasa  $(\mathbf{ma})_x^1$ , es decir, del primer semestre de asistencia, sería, entonces

$$(\mathbf{ma})_x^1 = \sum_{x+1}^x \sum_{180}^0 f(x.n)$$

El estudio de tablas que registren por separado el total de enfermedad correspondiente a cada semana del ataque de enfermedad, como son las tablas de Sutton, permitirá determinar la forma general de la función:

$$f(x.n).$$

---

## CAPITULO III

### Seguro en caso de enfermedad. — Primas y reservas

1. Prima única. — 2. Primas periódicas. — 3. Seguros temporarios. — 4. Primas fijas. — 5. Beneficios variables. — 6. Valuaciones.

#### 1. — PRIMA ÚNICA

Al contratar un seguro de enfermedad, el asegurador contrae el compromiso de indemnizar al asegurado una cantidad determinada, por cada día de enfermedad.

Vamos a calcular el valor actual de estas indemnizaciones para un individuo de edad  $x$ , suponiendo que la indemnización sea unitaria, y el compromiso del asegurador subsista por toda la vida del asegurado.

Considerando el año  $(n+1)$ avo del contrato. Al iniciarse el año, la edad del asegurado será  $(x+n)$ , y por lo tanto el promedio de días de enfermedad a indemnizarse en el año será (cap. II)  $m_{x+n}$ .

Como los días de enfermedad están distribuidos en todo el año, podemos presumir que el pago total de la indemnización se haga de una sola vez, a mediado de año; de manera que el valor actual de las indemnizaciones a pagarse en el  $(n+1)$ avo año, será

$$m_{x+n} \cdot v^{n+\frac{1}{2}} \quad \left( v = \frac{1}{1+i} \right)$$

Pero este valor actual no es hoy un valor cierto;

depende de la probabilidad que tiene el asegurado de sobrevivir hasta la iniciación del año considerado.

Esta probabilidad es

$$\frac{l_{x+n}}{l_x}$$

luego el valor actual del compromiso del asegurador por el año  $(n+1)$  avo, será

$$m_{x+n} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot v^{n+\frac{1}{2}}$$

que podemos expresar en la siguiente forma:

$$\frac{1}{v^{\frac{1}{2}}} \cdot m_{x+n} \cdot \frac{l_{x+n} \cdot v^{x+n}}{l_x \cdot v^x}$$

o sea, reemplazando  $l_{x+n} \cdot v^{x+n}$ , y  $l_x \cdot v^x$  por sus símbolos como valores de comutación ( $D_{x+n}$  y  $D_x$ ),

$$v^{\frac{1}{2}} \cdot m_{x+n} \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

y si hacemos  $v^{\frac{1}{2}} \cdot m_{x+n} \cdot D_{x+n} = H_{x+n}$ , es decir, si introducimos un nuevo símbolo de comutación

$$H_x = v^{\frac{1}{2}} \cdot m_x \cdot D_x,$$

tendremos el valor actual del compromiso del asegurador por el  $(n+1)$  avo año del seguro

$$\frac{H_{x+n}}{D_x}$$

El valor actual total de un seguro de enfermedad o sea la prima única, que representamos por  $s_x$ , será

$$s_x = \sum_w^x \frac{H_m}{D_x} = \frac{1}{D_x} \sum_w^x H_m$$

Representando por  $K_m$  la suma

$$\sum_w^x H_m$$

tendremos que el valor total actual de un seguro de enfermedad de 1 peso diario, por toda la vida del asegurado, será

$$s_x = \frac{K_x}{D_x}$$

Por idéntico razonamiento, si consideramos el caso en

que el compromiso del asegurador se concrete a los primeros seis meses de enfermedad, tendremos el valor de este seguro

$$s_x^1 = \frac{K_x^1}{D_x}$$

en el cual

$$K_x^1 = \sum_w^x H_x^1$$

y

$$H_x^1 = v^{\frac{1}{2}} \cdot m_x^1 \cdot D_x$$

De igual manera

$$s_x^2 = \frac{K_x^2}{D_x}$$

y así sucesivamente para los diversos valores de  $m$ .

Poseyendo tablas de mortalidad y morbosidad de la población, podemos, pues, calcular los valores de  $H_x$  y  $K_x$  en forma análoga al cálculo de los demás valores de conmutación.

Si en vez de la tasa común de morbosidad, consideramos la tasa central o absoluta de morbosidad, debemos reemplazar, en el valor de  $H_x$ ,  $m_x$  por su equivalente en función de la tasa de morbosidad absoluta (ver cap. II)

$$(\text{ma})_x \cdot \frac{1}{2} p_x$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} H_x &= v^x + \frac{1}{2} \cdot (\text{ma})_x \cdot l_x \cdot \frac{1}{2} p_x = v^x + \frac{1}{2} \cdot (\text{ma})_x \cdot l_x + \frac{1}{2} = \\ &= (\text{ma})_x \cdot D_x + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

## 2. — PRIMAS PERIÓDICAS

El valor hallado,  $s_x$ , es el valor actual del seguro de enfermedad, vida entera; y equivale a la prima única a pagarse para que el compromiso del asegurador sea compensado.

Pero, en la práctica, el seguro de enfermedad no se contrata mediante un solo pago, sino por pagos mensuales, semanales, quincenales, etc.

Debemos, pues, repartir la prima única en una serie de pagos escalonados, considerándose la prima mensual, semanal, etc., como una renta servida por el asegurado.

El valor actual de una anualidad vitalicia de  $P_x$  pesos, será

$$P_x \cdot \frac{N_x}{D_x}$$

y como este valor debe compensar el compromiso del asegurador, tenemos la igualdad

$$s_x = P_x \cdot \frac{N_x}{D_x} \quad (1)$$

Si, en vez de ser anual, el pago es hecho por fracciones de año (meses, quincenas, semanas), como es más frecuente, y, puede decirse, la regla en el seguro de enfermedad, la renta servida por el asegurado es una renta continua, y su valor (1)

$$\frac{\bar{N}_x}{D_x} \quad \left( \bar{N}_x = N_x + \frac{D_x}{2} \right)$$

El valor de la prima única, en función de la prima total anual, que simbolizamos por  $\bar{P}_x$ , será

$$s_x = \bar{P}_x \cdot \frac{\bar{N}_x}{D_x} \quad (2)$$

De la fórmula (2), obtenemos para el valor de la prima total anual,  $\bar{P}_x$ ,

$$\bar{P}_x = \frac{s_x \cdot D_x}{N_x},$$

y substituyendo  $s_x$  por su valor hallado más arriba,

$$\left( \frac{K_x}{D_x} \right)$$

tenemos

$$P_x = \frac{K_x}{N_x} \quad (3)$$

y

$$P_x = \frac{K_x}{\bar{N}_x} \quad (4).$$

---

(1) Inst. of Actuaries' Text Book. T. II, Cap. IX, párr. 25.

Nos hemos ocupado hasta aquí, únicamente, de las primas puras, pues el cálculo de las primas comerciales no ofrece ninguna característica de interés, que difiera de los seguros ordinarios.

### 3. — SEGURO TEMPORARIO

Si en vez de considerar el seguro de enfermedad de vida entera, lo suponemos limitado, cesando el enésimo año de contratado, tendremos, aplicando un razonamiento análogo al empleado para las rentas temporarias:

$${}_n s_x = \frac{K_x - K_{x+n}}{D_x}$$

y, teniendo en cuenta que la prima se sirve únicamente por los  $n$  años que rige el seguro, la prima continua para el seguro temporario, será

$${}_n \bar{P}_x = \frac{K_x - K_{x+n}}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}}$$

En la práctica, y teniendo en cuenta que a partir de una edad determinada (60, 65, 70, etc. años), la enfermedad se confunde con la invalidez senil, los aseguradores limitan el seguro a una edad determinada, cualquiera que haya sido la edad inicial del seguro.

Llamando  $y$  a esta edad, tenemos:

$${}_{y-x} s_x = \frac{K_x - K_y}{D_x}$$

y también

$${}_{y-x} \bar{P}_x = \frac{K_x - K_y}{\bar{N}_x - \bar{N}_y}$$

Al hacerse el cálculo de tablas para un seguro determinado, puede considerarse la edad límite del beneficio ( $y$ ), como edad límite de la tabla, en cuyo caso volvemos a las fórmulas determinadas más arriba (1), (2), (3) y (4), pero, naturalmente, es menester hacer igual limitación en cuanto a la tabla de mortalidad y de conmutación empleada, haciendo

$$\bar{N}_x = \frac{\sum_y^{x+1} D_x}{y} + \frac{D_x}{2}$$

o de lo contrario, mantener como denominador

$$\bar{N}_x - \bar{N}_y.$$

#### 4. — PRIMAS FIJAS

Hemos supuesto en los párrafos anteriores una prima anual función de la edad inicial del seguro.

En la práctica de los seguros de enfermedad, sean nacionales o particulares, este sistema no es aplicable, y es necesario fijar una cuota única para todos los asegurados, cualquiera que sea la edad de entrada.

Es evidente que una cuota única alta, favorece al asegurador en las edades tempranas, mientras que una cuota baja lo perjudica en las últimas edades. Es preciso fijar una cuota tal, que, en las primeras edades, exceda del costo del beneficio, y permita así constituir una reserva con que atender al exceso del costo del beneficio en las últimas edades.

Cuando la edad de ingreso de los asegurados está limitada de antemano, es fácil fijar esta cuota, partiendo de la edad máxima de entrada, por la fórmula

$$\bar{P}_x = \frac{K_x}{\bar{N}_x}$$

Pero, en esta forma, los asegurados que ingresen al seguro en una edad inferior a  $x$ , se ven perjudicados en el exceso de prima que pagan hasta llegar a la edad  $x$ , en que su compromiso es compensado por el compromiso del asegurador.

Sin embargo, éste es el sistema que se emplea generalmente para esta clase de seguros.

Un sistema más perfeccionado consiste en fijar una edad mínima de ingreso, calculando la prima a partir de esa edad, por la misma fórmula mencionada más arriba.

De esta manera, los asegurados que ingresaran al

seguro en edades superiores a  $x$ , vendrían a perjudicar al asegurador por la diferencia de primas entre la edad  $x$ , y la edad de su ingreso. El asegurador se cubre de esta diferencia, estableciendo un derecho variable de ingreso, función de la edad, y cuyo valor es la diferencia entre el compromiso que contrae al asegurar un individuo de edad  $x'$ , compromiso que es igual a

$$\frac{K_{x'}}{D_{x'}}$$

y el compromiso que contrae el asegurado, en base de una prima calculada para la edad  $x$ , y pagadera desde la edad  $x'$ , es decir

$$\bar{P}_x \frac{\bar{N}_{x'}}{D_{x'}}$$

La cuota de ingreso para la edad  $x$  sería, pues,

$$V_x^{x'} = \frac{K_{x'}}{D_{x'}} - \bar{P}_x \frac{\bar{N}_{x'}}{D_{x'}}$$

y substituyendo  $\bar{P}_x$  por su valor

$$V_x^{x'} = \frac{K_{x'} - K_x \frac{\bar{N}_{x'}}{\bar{N}_x}}{D_{x'}}$$

#### 5. — BENEFICIOS VARIABLES

Es común en este seguro fijar diferentes indemnizaciones para las diversas duraciones de enfermedad; es decir, se fija, por ej., un beneficio de pesos 1,00 durante el primer semestre de enfermedad, de pesos 0,50 durante el segundo semestre, de pesos 0,25 por el resto de la enfermedad, etc.

En este caso, el valor de la prima variará, componiéndose de tres o más partes diferentes. Para el ejemplo citado, sería (suponiendo que el seguro cese el año  $y$ ):

$$|_{y-x} \bar{P}_x = \frac{K_x^1 - K_y^1 + \frac{1}{2} (K_x^2 - K_y^2) + \frac{1}{4} (K_x^3 - K_y^3)}{\bar{N}_x - \bar{N}_y}$$

Es frecuente también establecer que mientras dure la enfermedad el asegurado no ha de pagar prima alguna.

En este caso, el asegurador toma a su cargo, además de la indemnización, el servicio de la prima, y, por lo tanto, la indemnización unitaria se convierte en

$$1 + \frac{\bar{P}_x}{365}$$

de manera que el valor de  $\bar{P}_x$  será

$$\bar{P}_x = \left(1 + \frac{\bar{P}_x}{365}\right) \frac{K_x}{N_x}$$

de donde,

$$\bar{P}_x = \frac{K_x}{N_x \left(1 - \frac{K_x}{365 N_x}\right)}$$

#### 6. — VALUACIONES

La valuación de la cartera de una sociedad de seguro sobre enfermedad (o de una Caja de seguro nacional) ofrece algunas características particulares.

Existe, en primer lugar, como en una sociedad de seguros, el cálculo de las reservas. Este cálculo, en lo que se refiere a los beneficios de enfermedad, y a la contribución de los asegurados, puede hacerse con gran economía de tiempo, aplicando el método de Hardy, denominado de «edades pasadas», que exponemos en apéndice núm. III, método que permite hacer dicho cálculo por un sistema de suma continua.

Luego, es menester tener en cuenta las desviaciones que la práctica de la sociedad señale sobre las tasas de morbosidad y mortalidad empleadas para el cálculo de las tablas. Este punto es delicadísimo, y sólo la práctica y el estudio detallado de la sociedad considerada, pueden ofrecer normas al respecto.

En tercer lugar, existen las secesiones. Toda sociedad de seguro enfermedad experimenta anualmente un número bastante importante de secesiones de so-

cios, que benefician a la sociedad por las reservas acumuladas.

El porcentaje de secesiones a esperarse durante el próximo año, es un valor positivo que debe tenerse en cuenta en las valuaciones, pero la determinación de este porcentaje es muy difícil. Una sociedad nueva ofrece generalmente una tasa fuerte de secesiones, a causa de los asegurados jóvenes que abandonan sus pagos; si estos porcentajes se adoptan como base para los años siguientes, se corre el peligro de obtener resultados demasiado favorables, que no serán ciertos en la práctica.

Por otra parte, no debe olvidarse que la secesión produce una selección al revés en los asegurados, pues son sólo las mejores vidas las que descuidan el seguro, mientras que los asegurados de salud precaria hacen un esfuerzo para continuar un seguro que les ofrece ventajas inmediatas.

Otro punto importante es el interés que la sociedad obtiene sobre sus inversiones. Éste interés debe, hasta donde sea posible, ser el mismo que se calcula en las tablas del seguro enfermedad empleadas. Si existe diferencia a favor de las inversiones, la sociedad obtiene un beneficio, y, en cambio, si el interés tabulado es mayor, importa una pérdida; beneficio y pérdida que deben tenerse muy en cuenta al hacer la valuación.

---

## CAPITULO IV

### **Seguro de invalidez y vejez**

1. Consideraciones sobre la invalidez. — 2. Notaciones. — 3. La probabilidad de muerte. — 4. Tablas de invalidez. — 5. Reactividades. — 6. Construcción de la tabla. — 7. Cálculo de las primas. — 8. Reservas. — 9. Seguros de vejez.

#### 1. — CONSIDERACIONES SOBRE LA INVALIDEZ

El seguro de invalidez tiene por objeto proporcionar al individuo invalidado por una lesión de origen morbosos y accidental (no producida por un accidente del trabajo), una renta vitalicia.

Damos por hecho en cuanto a este seguro, el mismo raciocinio empleado para legitimar el uso de la probabilidad en los seguros de vida y de enfermedad (véase capítulo II). Por otra parte, la comparación de diversas estadísticas basadas en un número suficientemente grande de observaciones, muestra la constancia de los fenómenos de invalidez.

El cálculo de las primas del seguro de invalidez, ofrece una dificultad mucho mayor que el seguro de vida o de enfermedad, pues mientras en el primero se trata de estudiar la frecuencia de un solo hecho (la muerte) y en el segundo de dos hechos (muerte y enfermedad), que se pueden estudiar aisladamente, en el seguro de invalidez se deben considerar la frecuencia de dos hechos (muerte e invalidez), de los cuales, producido uno, influye poderosamente sobre la frecuencia del otro.

No entraremos a considerar la teoría estadística de la invalidez, que no ha llegado aún a un estado que permita hacer aplicaciones prácticas (1), y nos limitaremos a dar una idea de la forma de conducirse de la invalidez y la mortalidad.

## 2. — NOTACIONES

Considerando un grupo de población de igual edad,  $x$  años, grupo que simbolizamos por  $l_x$ , podemos dividirlo en dos partes: los individuos válidos al comenzar el año de observación, que representamos por  $l_x^{aa}$  y los individuos inválidos al comenzar el año, que representamos por  $l_x^{ii}$ .

Del primer grupo, pasan al segundo, durante el año, un cierto número de individuos, que simbolizamos por  $l_x^{ai}$ . La probabilidad para un individuo de invalidarse en el año  $x$  de edad, *habiendo empezado el año como válido*, es decir, considerando sujetos a riesgo de invalidez por todo el año los individuos que mueren en el año como válidos, es

$$i_x = \frac{l_x^{ai}}{l_x^{aa}}$$

Simbolizando por  $d_x^{aa}$  y  $d_x^{ii}$  respectivamente, los individuos que mueren en edad  $x$ , en estado de validez y de invalidez, tenemos la probabilidad de morir como válido,

$$q_x^{aa} = \frac{d_x^{aa}}{l_x^{aa} - \frac{1}{2}l_x^{ai}}$$

y la probabilidad de morir como inválido

$$q_x^{ii} = \frac{d_x^{ii}}{l_x^{ii} + \frac{1}{2}l_x^{ai}}$$

siempre supuestos los casos de invalidez distribuidos

---

(1) Véase la Encyclopédie des Sciences Mathématiques, I. 24, párr. 12, en que se expone el estado actual de la teoría estadística de la invalidez.

# TABLA DE MORTALIDAD DE LA CIUDAD DE BUENOS AIRES

SEGÚN LOS DATOS DEL CENSO MUNICIPAL DE 1909

## MUJERES

T<sup>M</sup> (1909)

| x  | $l_x$   | $d_x$ | $P_x$   | $q_x$   |
|----|---------|-------|---------|---------|
| 15 | 100.000 | 462   | 0.99538 | 0.00462 |
| 16 | 99.538  | 469   | 0.99528 | 0.00472 |
| 17 | 99.069  | 478   | 0.99518 | 0.00482 |
| 18 | 98.591  | 487   | 0.99506 | 0.00494 |
| 19 | 98.104  | 495   | 0.99495 | 0.00505 |
| 20 | 97.609  | 506   | 0.99482 | 0.00518 |
| 21 | 97.103  | 516   | 0.99468 | 0.00532 |
| 22 | 96.587  | 528   | 0.99454 | 0.00546 |
| 23 | 96.059  | 539   | 0.99439 | 0.00561 |
| 24 | 95.520  | 551   | 0.99423 | 0.00577 |
| 25 | 94.969  | 564   | 0.99407 | 0.00593 |
| 26 | 94.405  | 577   | 0.99389 | 0.00611 |
| 27 | 93.828  | 591   | 0.99370 | 0.00630 |
| 28 | 93.237  | 607   | 0.99349 | 0.00651 |
| 29 | 92.630  | 621   | 0.99329 | 0.00671 |
| 30 | 92.009  | 637   | 0.99307 | 0.00693 |
| 31 | 91.372  | 655   | 0.99284 | 0.00716 |
| 32 | 90.717  | 672   | 0.99259 | 0.00741 |
| 33 | 90.045  | 691   | 0.99233 | 0.00767 |
| 34 | 89.354  | 711   | 0.99205 | 0.00795 |
| 35 | 88.643  | 731   | 0.99175 | 0.00825 |
| 36 | 87.912  | 753   | 0.99143 | 0.00857 |
| 37 | 87.159  | 776   | 0.99110 | 0.00890 |
| 38 | 86.383  | 800   | 0.99075 | 0.00925 |
| 39 | 85.583  | 824   | 0.99037 | 0.00963 |
| 40 | 84.759  | 851   | 0.98997 | 0.01003 |
| 41 | 83.908  | 877   | 0.98954 | 0.01046 |
| 42 | 83.031  | 906   | 0.98909 | 0.01091 |
| 43 | 82.125  | 936   | 0.98860 | 0.01140 |
| 44 | 81.189  | 968   | 0.98808 | 0.01192 |
| 45 | 80.221  | 1002  | 0.98751 | 0.01249 |
| 46 | 79.219  | 1035  | 0.98693 | 0.01307 |
| 47 | 78.181  | 1072  | 0.98630 | 0.01370 |
| 48 | 77.112  | 1109  | 0.98561 | 0.01439 |
| 49 | 76.003  | 1149  | 0.98489 | 0.01511 |
| 50 | 74.854  | 1191  | 0.98409 | 0.01591 |
| 51 | 73.663  | 1233  | 0.98325 | 0.01675 |
| 52 | 72.430  | 1280  | 0.98233 | 0.01767 |
| 53 | 71.150  | 1327  | 0.98135 | 0.01865 |
| 54 | 69.824  | 1377  | 0.98029 | 0.01971 |
| 55 | 68.447  | 1429  | 0.97912 | 0.02088 |
| 56 | 67.018  | 1479  | 0.97793 | 0.02207 |
| 57 | 65.539  | 1539  | 0.97651 | 0.02349 |
| 58 | 64.000  | 1597  | 0.97504 | 0.02496 |
| 59 | 62.403  | 1659  | 0.97342 | 0.02658 |

TV (1909)

| x   | $l_x$   | $d_x$  | $p_x$   | $q_x$   |
|-----|---------|--------|---------|---------|
| 60  | 49.368  | 2315   | 0.95311 | 0.04689 |
| 61  | 47.053  | 2379   | 0.94945 | 0.05055 |
| 62  | 44.674  | 2421   | 0.94581 | 0.05419 |
| 63  | 42.253  | 2456   | 0.94187 | 0.05813 |
| 64  | 39.797  | 2471   | 0.93791 | 0.06209 |
| 65  | 37.326  | 2487   | 0.93338 | 0.06662 |
| 66  | 34.839  | 2476   | 0.92893 | 0.07107 |
| 67  | 32.363  | 2435   | 0.92476 | 0.07524 |
| 68  | 29.928  | 2428   | 0.91885 | 0.08115 |
| 69  | 27.500  | 2334   | 0.91515 | 0.08485 |
| 70  | 25.166  | 2285   | 0.90919 | 0.09081 |
| 71  | 22.881  | 2221   | 0.90294 | 0.09706 |
| 72  | 20.660  | 2085   | 0.89908 | 0.10092 |
| 73  | 18.575  | 2003   | 0.89216 | 0.10784 |
| 74  | 16.572  | 1910   | 0.88476 | 0.11524 |
| 75  | 14.662  | 1774   | 0.87898 | 0.12102 |
| 76  | 12.888  | 1631   | 0.87348 | 0.12652 |
| 77  | 11.257  | 1485.9 | 0.86798 | 0.13202 |
| 78  | 9.771.1 | 1355.4 | 0.86129 | 0.13871 |
| 79  | 8.415.7 | 1206.8 | 0.85660 | 0.14340 |
| 80  | 7.208.9 | 1101.8 | 0.84716 | 0.15284 |
| 81  | 6.107.1 | 1002.9 | 0.83576 | 0.16424 |
| 82  | 5.104.2 | 906.0  | 0.82251 | 0.17749 |
| 83  | 4.198.2 | 805.0  | 0.80827 | 0.19173 |
| 84  | 3.393.2 | 702.3  | 0.79303 | 0.20697 |
| 85  | 2.690.9 | 600.9  | 0.77668 | 0.22332 |
| 86  | 2.090.0 | 503.1  | 0.75927 | 0.24073 |
| 87  | 1.586.9 | 411.5  | 0.74068 | 0.25932 |
| 88  | 1.175.4 | 328.10 | 0.72088 | 0.27912 |
| 89  | 847.30  | 262.76 | 0.69989 | 0.30011 |
| 90  | 584.54  | 188.37 | 0.67775 | 0.32225 |
| 91  | 396.17  | 136.99 | 0.65421 | 0.34579 |
| 92  | 259.18  | 96.38  | 0.62959 | 0.37041 |
| 93  | 162.80  | 64.511 | 0.60373 | 0.39627 |
| 94  | 93.289  | 41.625 | 0.57651 | 0.42349 |
| 95  | 56.664  | 25.594 | 0.54831 | 0.45169 |
| 96  | 31.070  | 14.908 | 0.52017 | 0.47983 |
| 97  | 16.162  | 8.2461 | 0.48980 | 0.51020 |
| 98  | 7.9159  | 4.2878 | 0.45833 | 0.54167 |
| 99  | 3.6281  | 2.1109 | 0.41818 | 0.58182 |
| 100 | 1.5172  | 0.9694 | 0.36107 | 0.63893 |
| 101 | 0.5478  | 0.4273 | 0.27004 | 0.72996 |
| 102 | 0.1205  | 0.1071 | 0.11117 | 0.88883 |
| 103 | 0.0134  | 0.0134 | 0.00000 | 1.00000 |
| 104 | 0.0000  |        |         |         |

**TABLA**  
**DE MORBOSIDAD (ABSOLUTA) DE LA MANCHESTER UNITY**  
 (1893-97)

| X  | (ma) <sup>1/2</sup><br>X<br>PRIMER<br>TRIMESTRE | (ma) <sup>2/2</sup><br>X<br>SEGUNDO<br>TRIMESTRE | (ma) <sup>2</sup><br>X<br>SEGUNDO<br>SEMESTRE | (ma) <sup>3+4</sup><br>X<br>SEGUNDO<br>AÑO | (ma) <sup>5+</sup><br>X<br>RESTO DE<br>ENFERMED. |
|----|---|--|---|--|--|
| 15 | 6.510   | 0.378  | 0.147   | —  | —  |
| 16 | 6.510   | 0.378  | 0.147   | —  | —  |
| 17 | 6.293   | 0.399  | 0.168   | —  | —  |
| 18 | 5.985   | 0.441  | 0.196   | 0.042                                      | —  |
| 19 | 5.649   | 0.483  | 0.245   | 0.084                                      | 0.007  |
| 20 | 5.341   | 0.525  | 0.287   | 0.126                                      | 0.028  |
| 21 | 5.103   | 0.567  | 0.322   | 0.168                                      | 0.063  |
| 22 | 4.956   | 0.602  | 0.357   | 0.203                                      | 0.112  |
| 23 | 4.893   | 0.616  | 0.378   | 0.245                                      | 0.168  |
| 24 | 4.865   | 0.637  | 0.399   | 0.259                                      | 0.231  |
| 25 | 4.865   | 0.651  | 0.413   | 0.280                                      | 0.287  |
| 26 | 4.872   | 0.658  | 0.434   | 0.287                                      | 0.336  |
| 27 | 4.879   | 0.672  | 0.448   | 0.308                                      | 0.371  |
| 28 | 4.907   | 0.686  | 0.455   | 0.322                                      | 0.406  |
| 29 | 4.942   | 0.707  | 0.469   | 0.336                                      | 0.441  |
| 30 | 4.991   | 0.728  | 0.483   | 0.364                                      | 0.483  |
| 31 | 5.054   | 0.749  | 0.497   | 0.385                                      | 0.546  |
| 32 | 5.117   | 0.777  | 0.525   | 0.406                                      | 0.616  |
| 33 | 5.180   | 0.805  | 0.553   | 0.420                                      | 0.707  |
| 34 | 5.250   | 0.833  | 0.588   | 0.434                                      | 0.798  |
| 35 | 5.327   | 0.868  | 0.623   | 0.455                                      | 0.903  |
| 36 | 5.411   | 0.910  | 0.658   | 0.490                                      | 1.015  |
| 37 | 5.516   | 0.945  | 0.707   | 0.525                                      | 1.141  |
| 38 | 5.635   | 0.994  | 0.749   | 0.581                                      | 1.281  |
| 39 | 5.768   | 1.036  | 0.805   | 0.630                                      | 1.442  |
| 40 | 5.901   | 1.092  | 0.861   | 0.679                                      | 1.610  |
| 41 | 6.034   | 1.155  | 0.910   | 0.742                                      | 1.771  |
| 42 | 6.167   | 1.211  | 0.966   | 0.791                                      | 1.939  |
| 43 | 6.293   | 1.274  | 1.022   | 0.847                                      | 2.107  |
| 44 | 6.426   | 1.337  | 1.078   | 0.896                                      | 2.289  |
| 45 | 6.566   | 1.400  | 1.148   | 0.945                                      | 2.499  |
| 46 | 6.720   | 1.470  | 1.225   | 1.001                                      | 2.737  |
| 47 | 6.895   | 1.554  | 1.309   | 1.078                                      | 3.017  |
| 48 | 7.084   | 1.659  | 1.393   | 1.176                                      | 3.360  |
| 49 | 7.287   | 1.778  | 1.491   | 1.295                                      | 3.766  |
| 50 | 7.504   | 1.904  | 1.596   | 1.421                                      | 4.263  |
| 51 | 7.728   | 2.023  | 1.736   | 1.568                                      | 4.837  |
| 52 | 7.959   | 2.163  | 1.876   | 1.729                                      | 5.488  |
| 53 | 8.211   | 2.296  | 2.058   | 1.904                                      | 6.216  |
| 54 | 8.484   | 2.464  | 2.254   | 2.130                                      | 6.993  |

| x   | (ma) $\frac{1}{x}$ | (ma) $\frac{2}{x}$ | (ma) $\frac{2}{x}$ | (ma) $\frac{3+4}{x}$ | (ma) $\frac{5+}{x}$ |
|-----|--------------------|--------------------|--------------------|----------------------|---------------------|
| 55  | 8.785              | 2.646              | 2.485              | 2.331                | 7.819               |
| 56  | 9.093              | 2.856              | 2.758              | 2.618                | 8.680               |
| 57  | 9.415              | 3.087              | 3.052              | 2.961                | 9.618               |
| 58  | 9.744              | 3.332              | 3.388              | 3.360                | 10.675              |
| 59  | 10.080             | 3.598              | 3.766              | 3.843                | 11.928              |
| 60  | 10.430             | 3.899              | 4.179              | 4.403                | 13.475              |
| 61  | 10.815             | 4.214              | 4.641              | 5.047                | 15.421              |
| 62  | 11.221             | 4.536              | 5.138              | 5.796                | 17.829              |
| 63  | 11.634             | 4.865              | 5.656              | 6.629                | 20.720              |
| 64  | 12.047             | 5.201              | 6.188              | 7.504                | 24.101              |
| 65  | 12.446             | 5.544              | 6.748              | 8.435                | 27.944              |
| 66  | 12.831             | 5.922              | 7.357              | 9.436                | 32.249              |
| 67  | 13.188             | 6.342              | 8.050              | 10.556               | 37.093              |
| 68  | 13.482             | 6.790              | 8.813              | 11.809               | 42.602              |
| 69  | 13.678             | 7.224              | 9.618              | 13.181               | 48.867              |
| 70  | 13.776             | 7.609              | 10.409             | 14.581               | 55.944              |
| 71  | 13.769             | 7.917              | 11.130             | 15.960               | 63.812              |
| 72  | 13.692             | 8.148              | 11.760             | 17.276               | 72.359              |
| 73  | 13.587             | 8.323              | 12.278             | 18.508               | 81.508              |
| 74  | 13.475             | 8.456              | 12.712             | 19.663               | 91.182              |
| 75  | 13.335             | 8.575              | 13.069             | 20.692               | 101.325             |
| 76  | 13.139             | 8.666              | 13.321             | 21.516               | 111.839             |
| 77  | 12.880             | 8.729              | 13.454             | 22.162               | 122.710             |
| 78  | 12.523             | 8.743              | 13.489             | 22.491               | 133.854             |
| 79  | 12.096             | 8.673              | 13.377             | 22.554               | 145.208             |
| 80  | 11.620             | 8.505              | 13.153             | 22.421               | 156.541             |
| 81  | 11.123             | 8.295              | 12.824             | 22.148               | 167.482             |
| 82  | 10.647             | 8.001              | 12.446             | 21.749               | 177.555             |
| 83  | 10.192             | 7.700              | 12.026             | 21.133               | 186.466             |
| 84  | 9.723              | 7.385              | 11.669             | 20.321               | 194.236             |
| 85  | 9.212              | 7.007              | 11.317             | 19.397               | 200.914             |
| 86  | 8.631              | 6.594              | 11.046             | 18.606               | 206.689             |
| 87  | 8.015              | 6.440              | 10.570             | 18.256               | 211.596             |
| 88  | 7.434              | 6.398              | 10.549             | 17.836               | 216.244             |
| 89  | 7.434              | 6.398              | 10.549             | 17.836               | 220.458             |
| 90  | 7.434              | 6.398              | 10.549             | 17.836               | 225.512             |
| 91  | 7.434              | 6.398              | 10.549             | 17.836               | 230.937             |
| 92  | 7.434              | 6.398              | 10.549             | 17.836               | 230.937             |
| 93  | 7.434              | 6.398              | 10.549             | 17.836               | 230.937             |
| 94  | 7.434              | 6.398              | 10.549             | 17.836               | 230.937             |
| 95  | 7.434              | 6.398              | 10.549             | 17.836               | 230.937             |
| 96  | 7.434              | 6.398              | 10.549             | 17.836               | 230.937             |
| 97  | 7.434              | 6.398              | 10.549             | 17.836               | 230.937             |
| 98  | 7.434              | 6.398              | 10.549             | 17.836               | 230.937             |
| 99  | 7.434              | 6.398              | 10.549             | 17.836               | 230.937             |
| 100 | 7.434              | 6.398              | 10.549             | 17.836               | 230.937             |
| 101 | 7.434              | 6.398              | 10.549             | 17.836               | 230.937             |

**TABLA DE INVALIDEZ PARA LA POBLACIÓN  
DE BUENOS AIRES**

| x  | $l_x$  | $i_x$   | $l_x^{aa}$ | $l_x^{ii}$ | $l_x^{ai}$ | $d_x^{ii}$ | $q_x^i$ |
|----|--------|---------|------------|------------|------------|------------|---------|
| 20 | 96.309 | 0.00020 | 96.309     | 0          | 16         | 5          | 0.52632 |
| 21 | 95.660 | 0.00023 | 95.649     | 14         | 22         | 13         | 0.56522 |
| 22 | 94.982 | 0.00026 | 94.959     | 23         | 25         | 16         | 0.45070 |
| 23 | 94.287 | 0.00030 | 94.255     | 32         | 28         | 17         | 0.36957 |
| 24 | 93.575 | 0.00034 | 93.532     | 43         | 32         | 21         | 0.35254 |
| 25 | 92.869 | 0.00038 | 92.815     | 54         | 35         | 22         | 0.30769 |
| 26 | 92.143 | 0.00043 | 92.076     | 67         | 40         | 25         | 0.28736 |
| 27 | 91.381 | 0.00049 | 91.299     | 82         | 45         | 28         | 0.26794 |
| 28 | 90.626 | 0.00054 | 90.527     | 99         | 49         | 31         | 0.25112 |
| 29 | 89.872 | 0.00066 | 89.755     | 117        | 59         | 35         | 0.23890 |
| 30 | 89.120 | 0.00079 | 88.979     | 141        | 70         | 39         | 0.22159 |
| 31 | 88.367 | 0.00085 | 88.195     | 172        | 75         | 46         | 0.21933 |
| 32 | 87.604 | 0.00107 | 87.403     | 201        | 94         | 52         | 0.20968 |
| 33 | 86.829 | 0.00131 | 86.586     | 243        | 113        | 61         | 0.20367 |
| 34 | 86.040 | 0.00150 | 85.745     | 295        | 129        | 71         | 0.19749 |
| 35 | 85.241 | 0.00181 | 84.888     | 353        | 154        | 83         | 0.19302 |
| 36 | 84.416 | 0.00218 | 83.992     | 424        | 183        | 96         | 0.18622 |
| 37 | 83.570 | 0.00235 | 83.059     | 511        | 195        | 108        | 0.17748 |
| 38 | 82.692 | 0.00262 | 82.094     | 598        | 215        | 119        | 0.16867 |
| 39 | 81.788 | 0.00293 | 81.094     | 694        | 238        | 131        | 0.16113 |
| 40 | 80.848 | 0.00314 | 80.047     | 801        | 251        | 141        | 0.15218 |
| 41 | 79.866 | 0.00320 | 78.955     | 911        | 253        | 148        | 0.14265 |
| 42 | 78.841 | 0.00352 | 77.825     | 1.016      | 275        | 154        | 0.13350 |
| 43 | 77.776 | 0.00371 | 76.639     | 1.137      | 284        | 163        | 0.12744 |
| 44 | 76.652 | 0.00417 | 75.394     | 1.258      | 314        | 171        | 0.12085 |
| 45 | 75.481 | 0.00463 | 74.080     | 1.401      | 343        | 184        | 0.11701 |
| 46 | 74.249 | 0.00574 | 72.689     | 1.560      | 417        | 204        | 0.11535 |
| 47 | 72.954 | 0.00656 | 71.181     | 1.773      | 467        | 230        | 0.11462 |
| 48 | 71.569 | 0.00779 | 69.559     | 2.010      | 542        | 257        | 0.11267 |
| 49 | 70.141 | 0.00870 | 67.846     | 2.295      | 590        | 283        | 0.10926 |
| 50 | 68.646 | 0.01012 | 66.044     | 2.602      | 668        | 312        | 0.10246 |
| 51 | 67.080 | 0.01101 | 64.122     | 2.958      | 706        | 339        | 0.10238 |
| 52 | 65.415 | 0.01213 | 62.090     | 3.325      | 753        | 365        | 0.09861 |
| 53 | 63.689 | 0.01331 | 59.976     | 3.713      | 798        | 388        | 0.09435 |
| 54 | 61.878 | 0.01454 | 57.755     | 4.123      | 840        | 413        | 0.09091 |
| 55 | 59.991 | 0.01544 | 55.441     | 4.550      | 856        | 435        | 0.08738 |
| 56 | 58.010 | 0.01678 | 53.039     | 4.971      | 889        | 454        | 0.08383 |
| 57 | 55.963 | 0.01923 | 50.557     | 5.406      | 972        | 481        | 0.08164 |
| 58 | 53.832 | 0.02198 | 47.935     | 5.897      | 1.054      | 515        | 0.08017 |
| 59 | 51.634 | 0.02698 | 45.198     | 6.436      | 1.218      | 560        | 0.07948 |
| 60 | 49.368 | 0.03353 | 42.274     | 7.094      | 1.417      | 618        | 0.07920 |

| x  | $l_x$  | $i_x$   | $l_x^{\overline{aa}}$ | $l_x^{\overline{ii}}$ | $l_x^{\overline{ai}}$ | $d_x^{\overline{ii}}$ | $q_x^i$ |
|----|--------|---------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|---------|
| 61 | 47.053 | 0.04217 | 39.160                | 7.893                 | 1.651                 | 693                   | 0.07948 |
| 62 | 44.674 | 0.05034 | 35.523                | 8.851                 | 1.788                 | 780                   | 0.08004 |
| 63 | 42.253 | 0.05932 | 32.394                | 9.859                 | 1.922                 | 868                   | 0.08022 |
| 64 | 39.797 | 0.06834 | 28.884                | 10.913                | 1.974                 | 955                   | 0.08025 |
| 65 | 37.326 | 0.07630 | 25.394                | 11.932                | 1.933                 | 1.027                 | 0.07961 |
| 66 | 34.839 | 0.08293 | 21.996                | 12.843                | 1.824                 | 1.096                 | 0.07967 |
| 67 | 32.363 | 0.09509 | 18.792                | 13.571                | 1.787                 | 1.186                 | 0.08199 |
| 68 | 29.928 | 0.11103 | 15.756                | 14.172                | 1.749                 | 1.279                 | 0.08500 |
| 69 | 27.500 | 0.12901 | 12.858                | 14.642                | 1.659                 | 1.363                 | 0.08809 |
| 70 | 25.166 | 0.15509 | 10.228                | 14.938                | 1.586                 | 1.437                 | 0.09288 |
| 71 | 22.881 | 0.18929 | 7.794                 | 15.087                | 1.475                 | 1.521                 | 0.09611 |
| 72 | 20.660 | 0.28800 | 5.619                 | 15.041                | 1.618                 | 1.597                 | 0.10074 |
| 73 | 18.575 | 0.50000 | 3.513                 | 15.062                | 1.757                 | 1.688                 | 0.10589 |
| 74 | 16.572 | 0.95000 | 1.441                 | 15.131                | 1.369                 | 1.838                 | 0.11621 |
| 75 | 14.662 | —       | 0.000                 | 14.662                | —                     | 1.774                 | 0.12102 |

**MODELO DE FICHA EMPLEADA EN EL CÁLCULO  
DE LA TABLA ANTERIOR**

|     | (1)                          | (2)   | (3)                          |   |
|-----|------------------------------|---|------------------------------|---|
| 20  | $l_{x-\frac{1}{2}}^{i(20)}$  | $l_{x-\frac{1}{2}}^{i(20)} \cdot q_{x-1}^{i(20)}$   | $l_{x+\frac{1}{2}}^{i(20)}$  | $x$   |
| 21  | $l_{x-\frac{1}{2}}^{i(21)}$  | $l_{x-\frac{1}{2}}^{i(21)} \cdot q_{x-1}^{i(21)}$   | $l_{x+\frac{1}{2}}^{i(21)}$  | $l_x$   |
| ... | ...                          | .....   | ...                          | $l_x^{\overline{ii}} = \sum (3) + \frac{1}{2} \sum (2)$ |
| x-1 | $l_{x-\frac{1}{2}}^{i(x-1)}$ | $l_{x-\frac{1}{2}}^{i(x-1)} \cdot q_{x-1}^{i(x-1)}$ | $l_{x+\frac{1}{2}}^{i(x-1)}$ | $l_x^{\overline{aa}} = l_x - l_x^{\overline{ii}}$       |
|     |                              | $\sum (2)$  | $\sum (3)$                   | $i_x$   |
|     |                              |   |                              | $l_x^{\overline{ia}} = l_x^{\overline{aa}} \cdot i_x$   |

**PROBABILIDADES DE EXTINCIÓN DE LAS PENSIONES  
DE INVALIDEZ POR EDADES A LA ENTRADA, SEGÚN KLEIN**

| EDAD<br>DE<br>ENTRADA | SE EXTINGUEN EN EL AÑO |        |        |        |        |        |
|-----------------------|------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                       | 1.º                    | 2.º    | 3.º    | 4.º    | 5.º    | 6.º    |
| 20                    | 0.5650                 | 0.2820 | 0.1660 | 0.1125 | 0.0850 | 0.0660 |
| 25                    | 0.4620                 | 0.2495 | 0.1485 | 0.1020 | 0.0774 | 0.0619 |
| 30                    | 0.3990                 | 0.2225 | 0.1335 | 0.0945 | 0.0724 | 0.0593 |
| 35                    | 0.3530                 | 0.1980 | 0.1210 | 0.0870 | 0.0683 | 0.0578 |
| 40                    | 0.3080                 | 0.1755 | 0.1088 | 0.0804 | 0.0659 | 0.0572 |
| 45                    | 0.2640                 | 0.1530 | 0.0978 | 0.0754 | 0.0644 | 0.0568 |
| 50                    | 0.2215                 | 0.1305 | 0.0873 | 0.0715 | 0.0633 | 0.0575 |
| 55                    | 0.1805                 | 0.1090 | 0.0800 | 0.0687 | 0.0623 | 0.0590 |
| 60                    | 0.1450                 | 0.0955 | 0.0776 | 0.0694 | 0.0661 | 0.0663 |
| 65                    | 0.1220                 | 0.0913 | 0.0812 | 0.0790 | 0.0822 | 0.0867 |
| 70                    | 0.1138                 | 0.0972 | 0.0971 | 0.1024 | 0.1085 | 0.1152 |
| 75                    | 0.1214                 | 0.1223 | 0.1300 | 0.1380 | 0.1465 | 0.1560 |
| 80                    | 0.1560                 | 0.1665 | 0.1780 | 0.1905 | 0.2040 | 0.2180 |

| EDAD<br>DE<br>ENTRADA | SE EXTINGUEN EN EL AÑO |        |        |        |        |        |
|-----------------------|------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                       | 7.º                    | 8.º    | 9.º    | 10.º   | 11.º   | 12.º   |
| 20                    | 0.0535                 | 0.0450 | 0.0390 | 0.0350 | 0.0325 | 0.0317 |
| 25                    | 0.0515                 | 0.0444 | 0.0398 | 0.0365 | 0.0342 | 0.0336 |
| 30                    | 0.0507                 | 0.0449 | 0.0411 | 0.0381 | 0.0365 | 0.0361 |
| 35                    | 0.0507                 | 0.0458 | 0.0425 | 0.0398 | 0.0386 | 0.0386 |
| 40                    | 0.0507                 | 0.0468 | 0.0438 | 0.0417 | 0.0412 | 0.0419 |
| 45                    | 0.0517                 | 0.0480 | 0.0458 | 0.0447 | 0.0459 | 0.0473 |
| 50                    | 0.0535                 | 0.0511 | 0.0504 | 0.0522 | 0.0541 | 0.0561 |
| 55                    | 0.0569                 | 0.0582 | 0.0605 | 0.0632 | 0.0663 | 0.0699 |
| 60                    | 0.0699                 | 0.0738 | 0.0779 | 0.0822 | 0.0867 | 0.0915 |
| 65                    | 0.0915                 | 0.0967 | 0.1024 | 0.1085 | 0.1152 | 0.1223 |
| 70                    | 0.1223                 | 0.1300 | 0.1380 | 0.1465 | 0.1560 | 0.1665 |
| 75                    | 0.1665                 | 0.1780 | 0.1905 | 0.2040 | 0.2180 | 0.2330 |
| 80                    | 0.2330                 | 0.2490 | 0.2660 | 0.2840 | 0.3030 | 0.3230 |

## CONMUTACIONES

*Condemnation Mygale*  
IV

TM (1909)

| x   | $l_x$   | $d_x$  | $p_x$   | $q_x$   |
|-----|---------|--------|---------|---------|
| 60  | 60.744  | 1720   | 0.97168 | 0.02832 |
| 61  | 59.024  | 1786   | 0.96974 | 0.03026 |
| 62  | 57.238  | 1852   | 0.96765 | 0.03235 |
| 63  | 55.386  | 1915   | 0.96541 | 0.03459 |
| 64  | 53.471  | 1987   | 0.96285 | 0.03715 |
| 65  | 51.484  | 2015   | 0.96009 | 0.03991 |
| 66  | 49.469  | 2126   | 0.95703 | 0.04297 |
| 67  | 47.343  | 2193   | 0.95368 | 0.04632 |
| 68  | 45.150  | 2256   | 0.95002 | 0.04998 |
| 69  | 42.894  | 2317   | 0.94599 | 0.05401 |
| 70  | 40.577  | 2372   | 0.94154 | 0.05846 |
| 71  | 38.205  | 2395   | 0.93732 | 0.06268 |
| 72  | 35.810  | 2461   | 0.93128 | 0.06872 |
| 73  | 33.349  | 2488   | 0.92538 | 0.07462 |
| 74  | 30.861  | 2502   | 0.91893 | 0.08107 |
| 75  | 28.359  | 2500   | 0.91184 | 0.08816 |
| 76  | 25.859  | 2479   | 0.90414 | 0.09586 |
| 77  | 23.380  | 2438   | 0.89572 | 0.10428 |
| 78  | 20.942  | 2376   | 0.88657 | 0.11343 |
| 79  | 18.566  | 2288   | 0.87674 | 0.12326 |
| 80  | 16.278  | 2179   | 0.86614 | 0.13386 |
| 81  | 14.099  | 2048   | 0.85479 | 0.14521 |
| 82  | 12.051  | 1897   | 0.84259 | 0.15741 |
| 83  | 10.154  | 1731.6 | 0.82944 | 0.17056 |
| 84  | 8.422.4 | 1556.2 | 0.81523 | 0.18477 |
| 85  | 6.866.2 | 1374.1 | 0.79987 | 0.20013 |
| 86  | 5.492.1 | 1190.4 | 0.78326 | 0.21674 |
| 87  | 4.301.7 | 1009.6 | 0.76530 | 0.23470 |
| 88  | 3.292.1 | 836.6  | 0.74589 | 0.25411 |
| 89  | 2.455.5 | 675.5  | 0.72492 | 0.27508 |
| 90  | 1.780.0 | 529.9  | 0.70229 | 0.29771 |
| 91  | 1.250.1 | 402.61 | 0.67792 | 0.32208 |
| 92  | 847.49  | 295.18 | 0.65170 | 0.34830 |
| 93  | 552.31  | 207.93 | 0.62353 | 0.37647 |
| 94  | 344.38  | 140.06 | 0.59330 | 0.40670 |
| 95  | 204.32  | 89.71  | 0.56092 | 0.43908 |
| 96  | 114.61  | 54.294 | 0.52629 | 0.47371 |
| 97  | 60.316  | 30.773 | 0.48980 | 0.51020 |
| 98  | 29.543  | 16.003 | 0.45833 | 0.54167 |
| 99  | 13.540  | 7.8894 | 0.41818 | 0.58182 |
| 100 | 5.6506  | 3.6060 | 0.38107 | 0.63893 |
| 101 | 2.0446  | 1.5947 | 0.27004 | 0.72996 |
| 102 | 0.4499  | 0.3999 | 0.11117 | 0.88883 |
| 103 | 0.0500  | 0.0500 | 0.00000 | 1.00000 |
| 104 | 0.0000  |        |         |         |

## TABLA DE MORTALIDAD DE LA CIUDAD DE BUENOS AIRES

SEGÚN LOS DATOS DEL CENSO MUNICIPAL DE 1909

## VARONES

TV (1909)

| x  | $l_x$   | $d_x$ | $p_x$   | $q_x$   |
|----|---------|-------|---------|---------|
| 15 | 100.000 | 919   | 0.99081 | 0.00919 |
| 16 | 99.081  | 788   | 0.99210 | 0.00790 |
| 17 | 98.298  | 695   | 0.99298 | 0.00702 |
| 18 | 97.603  | 650   | 0.99329 | 0.00671 |
| 19 | 96.953  | 644   | 0.99335 | 0.00665 |
| 20 | 96.309  | 649   | 0.99326 | 0.00674 |
| 21 | 95.660  | 678   | 0.99291 | 0.00709 |
| 22 | 94.982  | 695   | 0.99268 | 0.00732 |
| 23 | 94.287  | 712   | 0.99245 | 0.00755 |
| 24 | 93.575  | 706   | 0.99246 | 0.00754 |
| 25 | 92.869  | 726   | 0.99218 | 0.00782 |
| 26 | 92.143  | 762   | 0.99173 | 0.00827 |
| 27 | 91.381  | 755   | 0.99173 | 0.00827 |
| 28 | 90.626  | 754   | 0.99169 | 0.00831 |
| 29 | 89.872  | 752   | 0.99163 | 0.00837 |
| 30 | 89.120  | 753   | 0.99155 | 0.00845 |
| 31 | 88.367  | 763   | 0.99137 | 0.00863 |
| 32 | 87.604  | 775   | 0.99115 | 0.00885 |
| 33 | 86.829  | 789   | 0.99091 | 0.00909 |
| 34 | 86.040  | 799   | 0.99071 | 0.00929 |
| 35 | 85.241  | 825   | 0.99032 | 0.00968 |
| 36 | 84.416  | 846   | 0.98998 | 0.01002 |
| 37 | 83.570  | 878   | 0.98950 | 0.01050 |
| 38 | 82.692  | 904   | 0.98907 | 0.01093 |
| 39 | 81.788  | 940   | 0.98850 | 0.01150 |
| 40 | 80.848  | 982   | 0.98783 | 0.01214 |
| 41 | 79.866  | 1025  | 0.98716 | 0.01284 |
| 42 | 78.841  | 1065  | 0.98640 | 0.01350 |
| 43 | 77.776  | 1124  | 0.98554 | 0.01446 |
| 44 | 76.652  | 1171  | 0.98472 | 0.01528 |
| 45 | 75.481  | 1232  | 0.98369 | 0.01631 |
| 46 | 74.249  | 1295  | 0.98255 | 0.01745 |
| 47 | 72.954  | 1385  | 0.98102 | 0.01898 |
| 48 | 71.569  | 1428  | 0.98005 | 0.01995 |
| 49 | 70.141  | 1495  | 0.97868 | 0.02132 |
| 50 | 68.646  | 1566  | 0.97718 | 0.02282 |
| 51 | 67.080  | 1665  | 0.97519 | 0.02481 |
| 52 | 65.415  | 1726  | 0.97362 | 0.02638 |
| 53 | 63.689  | 1811  | 0.97156 | 0.02844 |
| 54 | 61.878  | 1887  | 0.96951 | 0.03049 |
| 55 | 59.991  | 1981  | 0.96698 | 0.03302 |
| 56 | 58.010  | 2047  | 0.96471 | 0.03529 |
| 57 | 55.963  | 2131  | 0.96193 | 0.03807 |
| 58 | 53.832  | 2198  | 0.95916 | 0.04084 |
| 59 | 51.634  | 2266  | 0.95611 | 0.04389 |

Continúa en la página VI

## TABLAS FUNDAMENTALES

ñor Argentino Acerboni; y la recomiendan a la consideración de la mesa que debe dictaminar sobre el premio «Facultad de Ciencias Económicas».—(Firmados): Orfilio Casariego.—José González Galé.—Alejandro Bunge.—Es copia.—(Fdo.) R. Levene.

---

(Prescindimos del seguro accidentes, que está garantido por una ley del Estado).

ENFERMEDAD:

$${}_{40}\bar{P}_{20} = \frac{4.014.307 - 374.450,9}{582.268 - 20.934,9} = 6,4842$$

INVALIDEZ:

$${}_{40}\bar{P}_{20}^i \cdot 292 = 292 \frac{12.494,77 - 6.950,86}{567,824 - 12,182,2} = 2,9134$$

VEJEZ:

$${}_{40}\bar{P}_{20} \cdot 292 = 292 \frac{20.934,9}{582.268 - 20.934,9} = 10,8901$$

RESÚMEN:

|                        |                   |
|------------------------|-------------------|
| Enfermedad .....       | \$ 6,4842         |
| Invalidez .....        | » 2,9134          |
| Vejez .....            | » 10,8901         |
| Prima total anual..... | <u>\$ 20,2877</u> |
| Prima mensual.....     | <u>\$ 1,70</u>    |

Buenos Aires, Septiembre 20 de 1916.

En reunión de la fecha, la mesa examinadora que suscribe aprueba la tesis sobre «Fundamentos matemáticos de los Seguros Sociales, del señor Argentino Acerboni.—(Firmados): Orfilio Casariego.—Domingo Noceti.—José González Galé.—Justo Pascali (h.).—Es copia.—(Fdo.) R. Levene.

Los miembros de la mesa examinadora que suscriben califican de sobresaliente el examen de tesis del se-

## 2. — CONMUTACIONES

Para las tablas del seguro de enfermedad, hemos calculado las conmutaciones a tres tasas de interés, 4 por ciento, 5 por ciento y 6 por ciento.

Es inoficioso calcular tablas inferiores al 4 por ciento, pues siendo éste el tipo oficial del interés en Caja de Ahorros, ninguna sociedad de socorros mutuos medianamente administrada puede tener sus inversiones a menor interés.

No es conveniente tampoco emplear tasas superiores al 6 por ciento, pues si bien las inversiones a mayor tipo de interés son frecuentes, no ofrecen suficiente constancia y seguridad como para ser adoptadas como base en un seguro que ha de extenderse sobre muchos años. En aquellos casos en que circunstancias muy favorables permitan obtener un interés mayor sobre las inversiones, es prudente considerar en los balances la diferencia de interés como una utilidad, y mantener para las reservas el tipo del 6 %, sin perjuicio de valuar en cada balance el beneficio probable por exceso de interés en el año próximo, o en los 2, 3 ó 5 años siguientes, despreciando el beneficio por este concepto a partir del 5.º año, como medida prudencial.

En cuanto al seguro invalidez, cuya tabla calculamos sólo como ensayo, hemos adoptado la tasa de interés del 5 %, que podemos considerar normal en nuestro país.

## 3. — SEGURO INTEGRAL

Con la base de las tablas calculadas, procederemos a determinar el costo de un seguro que comprenda los siguientes beneficios, para un individuo de 20 años:

Enfermedad, pesos 1.00 diarios.

Invalidez, pesos 0.80 diarios, pesos 292.00 anuales.

Vejez, pesos 0.80 diarios, pesos 292.00 anuales.

Edad de retiro, 60 años; interés 5 por ciento.

## CAPITULO V

---

### Tablas

1. Tablas fundamentales. — 2. Conmutaciones. — 3. Seguro integral

#### 1. --- TABLAS FUNDAMENTALES

A falta de una buena tabla de mortalidad nacional, hemos calculado, con los datos del censo de 1909, una tabla de mortalidad para la población de Buenos Aires, por sexos, por medio del método empleado en el cálculo de las tablas inglesas preparadas para la «National Insurance Act, 1911», que detallamos en la nota publicada, junto con la misma tabla, en el núm. 64 de la «Revista de Ciencias Comerciales».

El número reducido de observaciones empleadas, no permite abrigar esperanzas de mayor exactitud en las tablas obtenidas, pero sí creemos tener una aproximación suficiente para el cálculo de los seguros sociales, en que los montos asegurados son muy reducidos, y, por otra parte, el método empleado es más racional que el usado para el ajustamiento de las únicas tablas nacionales conocidas hasta hoy (las calculadas por el señor Latzina en 1887).

Para los cálculos de enfermedad, hemos adoptado la tabla de la Manchester Unity, 1893-97.

En cuanto a la tabla de invalidez, ya hemos explicado en el lugar respectivo los datos que han servido para confeccionarla, y el método empleado en su construcción.

$${}_{y-x}|\bar{a}_x = \frac{\bar{N}_y}{D_x}$$

y el valor actual de las primas a servirse por el asegurado,

$$\bar{P}_x \cdot {}_{y-x}\bar{a}_x = \bar{P}_x \cdot \frac{\bar{N}_x - \bar{N}_y}{D_x}$$

con lo cual tenemos para el valor de la prima

$$\bar{P}_x = \frac{\bar{N}_y}{\bar{N}_x - \bar{N}_y}$$

---

$$V_x^i = \frac{1}{D_x^{aa}} (\overline{K}_x^{ai} - \overline{N}_x^{aa} \cdot P_a^i)$$

Para un individuo de edad  $x$ , invalidado a la edad  $y$  ( $y < x$ ), la reserva será el valor de la anualidad a servírsele por el asegurador que simbolizamos por  $a_x^{i(y)}$  y que será evidentemente igual a

$$\frac{\overline{N}_x^{i(y)}}{D_x^{i(y)}}$$

empleándose para calcular los valores de conmutación ( $D_x^{i(y)}$ ) solamente el número de inválidos sobrevivientes a cada año, de los invalidados el año  $y$ .

El cálculo de estas reservas supone, indudablemente, el cálculo de una tabla de conmutaciones para cada una de las edades comprendidas entre  $a$  y  $w$ , los dos límites del seguro de invalidez; pero no creemos que sea posible de otra manera obtener resultados que ofrezcan suficiente garantía de exactitud.

Una simplificación muy grande podría obtenerse en los cálculos de invalidez, si la estadística lograra plantear la ley de supervivencia de inválidos bajo la forma de una ecuación exponencial, que permitiera substituir un grupo de invalidados de edad  $x$  y de diferentes épocas de invalidez, por un grupo de individuos de edad  $x$  y de una época convencional de invalidez, con una mortalidad resultante igual al anterior.

#### 9. — SEGURO DE VEJEZ

Una renta en caso de vejez, no es otra cosa que una renta vitalicia, continúa, diferida por un cierto número de años, y contratada mediante una prima temporaria, también continua, que cesa al llegar la edad de retiro, es decir, la edad inicial de la renta de vejez.

Sea  $y$  la edad de retiro, y  $x$  la edad de entrada al seguro; el valor actual de una pensión de vejez, por unidad anual de pensión, será:

haciendo  $H_x^{\bar{a}i} = l_x^{\bar{a}i} \cdot \bar{a}_x^{(i)} \cdot v^{x+\frac{1}{2}}$  y  $K_x^{\bar{a}i} = \sum_{t=0}^x H_x^{\bar{a}i}$ .

El costo por cada asegurado, será, pues

$$\frac{1}{l_x^{\bar{a}a} \cdot v^x} K_x^{\bar{a}i} = \frac{K_x^{\bar{a}i}}{D_x^{\bar{a}a}}$$

La prima anual continua, será, por lo ya expuesto

$$\bar{P}_x^i = \frac{K_x^{\bar{a}i}}{N_x^{\bar{a}a}}$$

y la prima del seguro temporario

$$|y-x \bar{P}_x^i = \frac{K_x^{\bar{a}i} - K_y^{\bar{a}i}}{N_x^{\bar{a}a} - N_y^{\bar{a}a}}$$

#### 8. — RESERVAS

Las reservas de una Caja de seguro invalidez, son de dos clases, según que se trate de válidos o de inválidos.

La reserva correspondiente a los individuos válidos, debe responder únicamente a la contingencia de invalideces futuras; invalidado uno o más asegurados, debe constituirse para ellos una reserva especial, que represente el valor actual de las pensiones de invalidez a servirse.

La reserva para un individuo, válido, de edad  $x$ , y asegurado en edad  $a$ , que paga por lo tanto una prima  $\bar{P}_a^i$ , es la diferencia entre el compromiso del asegurador, cuyo valor actual a la edad  $x$  es de

$$\frac{K_x^{\bar{a}i}}{D_x^{\bar{a}a}}$$

y el compromiso del asegurado

$$\bar{P}_a^i \cdot \frac{N_x^{\bar{a}a}}{D_x^{\bar{a}a}}$$

Luego la reserva será

al momento de producirse la invalidez, de una pensión continua, para un individuo de edad  $x$ .

Pueden establecerse valores de conmutación

$$l_x^{\overline{ai}} \cdot \overline{a}_x^{(i)}$$

mediante los cuales puede calcularse el compromiso del asegurador por cada individuo de edad  $x$ .

Pero, en este caso, cuando se quisieran calcular seguros temporarios, será necesario tener nuevas tablas de los valores.

$$|n\overline{a}_x^{(i)} \quad \text{y} \quad l_x^{\overline{ai}} \cdot |n\overline{a}_x^{(i)}$$

Por otra parte, las tablas de los valores de  $|n\overline{a}_x^{(i)}$  son indispensables para el cálculo de las reservas, y los valores de conmutación  $l_x^{\overline{ai}} \cdot |n\overline{a}_x^{(i)}$  necesitan calcularse solamente para las edades límites del seguro que tenga establecidas la caja de pensiones, sea nacional o particular.

Por medio de estos valores, podemos calcular el valor actual de un seguro de invalidez para un individuo de edad  $x$ , cualesquiera ( $x > a$ ).

Efectivamente, el año y de edad se producirán  $l_x^{\overline{ai}}$  invalideces, que gravarán al asegurador en la suma

$$l_y^{\overline{ai}} \cdot \overline{a}_y^{(i)}$$

Manteniendo la hipótesis de que las invalideces están distribuidas igualmente durante todo el año, el valor total de esta cantidad se puede considerar como adeudado a mediados del año y de edad, y su valor actual al iniciarse el año  $x$ , es decir, al contratarse el seguro, será

$$l_y^{\overline{ai}} \cdot \overline{a}_y^{(i)} \cdot v^{y-x+\frac{1}{2}}$$

El valor actual, en la misma época del compromiso total del asegurado, será, pues,

$$\sum_{y=x}^{\infty} l_y^{\overline{ai}} \cdot \overline{a}_y^{(i)} \cdot v^{y-x+\frac{1}{2}}$$

que podemos escribir

$$\frac{1}{v^x} \cdot K^{\overline{ai}}$$

El valor de la prima anual continua, será, pues,

$$\bar{P}_a^i = \frac{I_a}{D_a} \div \bar{a}_a^{aa} = \frac{I_a}{\bar{N}_a^{aa}}$$

Cuando el seguro sea temporario, es decir, terminado el año  $x$ , tendremos:

$$|_{x-a} \bar{P}_a^i = \frac{I_a - I_x}{\bar{N}_a^{aa} - \bar{N}_x^{aa}}$$

Este método nos permite calcular las primas correspondientes a un seguro contratado a la edad inicial de la tabla.

Cuando el origen del seguro es otra edad cualquiera,  $y$ , ( $y > a$ ), se presenta una dificultad. El año  $y$ , viven  $l_y^{\bar{i}}$  individuos, invalidados anteriormente, individuos que continúan percibiendo pensiones.

Ahora bien, ¿cuántos de esos individuos se encuentran entre los  $l_x^{\bar{i}}$  que perciben rentas el año  $x$ ?

Richard, suponiendo un promedio  $q_x^i$  de mortalidad de inválidos, hace esta cantidad igual a

$$l_y^{\bar{i}} \cdot q_y^i \cdot q_{y+1}^i \cdot q_{y+2}^i \cdot \dots \cdot q_{x-1}^i$$

pero esta hipótesis contiene una grave causa de error.

Mediante la tabla que hemos calculado por el sistema arriba explicado, tenemos que, a los 40 años, por ejemplo, existen 801 inválidos. De éstos, aplicando la hipótesis de Richard, y los valores de  $q_x^i$  resultantes de nuestra tabla, subsistirían a los 50 años, 211.5. En realidad, aplicada la tabla de mortalidad por edades a la entrada, el número de sobrevivientes a los 50 años, invalidados antes de cumplir los 40, es de 466.22.

Como el número de inválidos a los 50 años, es de 2.602, la hipótesis de Richard tendría como consecuencia aumentar el costo de las pensiones para el año 50 de edad, a cargo de los asegurados ingresados en edad 40, de 2.136 a 2.391, es decir, en un 12 por ciento, y así, en proporción diferente, en las demás edades.

Opinamos que podría hacerse el cálculo de las primas por medio de las reservas; sea  $\bar{a}_x^{(i)}$ , el valor actual,

bien continua, se pague desde la fecha de producida la invalidez.

El año  $x$  ( $a < x$ ) el asegurador deberá servir todos los términos de la pensión a los  $l_x^{\bar{ii}}$  inválidos existentes al iniciarse el año. Además, los  $l_x^{ai}$  individuos que se invaliden en el año, recibirán, en promedio, medio año de pensión cada uno (siempre en la hipótesis de que las invalideces estén repartidas igualmente durante todo el año), y los  $d_x^{\bar{ii}}$  individuos que mueren durante el año, en estado de invalidez, dejan de percibir, cada uno, medio año de pensión.

El compromiso del asegurador el año  $x$ , será, pues,

$$l_x^{\bar{ii}} + \frac{1}{2} l_x^{\bar{ai}} - \frac{1}{2} d_x^{\bar{ii}}$$

y su valor actual

$$v^{x-a} + \frac{1}{2} \cdot \left( l_x^{\bar{ii}} + \frac{1}{2} l_x^{\bar{ai}} - \frac{1}{2} d_x^{\bar{ii}} \right)$$

y el valor actual total del compromiso del asegurador por toda la duración del seguro

$$\sum_{x=a}^{\infty} v^{x-a} + \frac{1}{2} \left( l_x^{\bar{ii}} + \frac{1}{2} l_x^{\bar{ai}} - \frac{1}{2} d_x^{\bar{ii}} \right)$$

que podemos escribir

$$\frac{1}{v^a} \sum_{x=a}^{\infty} B_x = \frac{1}{v^a} I_a,$$

haciendo

$$B_x = v^{x-a} + \frac{1}{2} \left( l_x^{\bar{ii}} + \frac{1}{2} l_x^{\bar{ai}} - \frac{1}{2} d_x^{\bar{ai}} \right) \quad \text{y} \quad I_a = \sum_{x=a}^{\infty} B_x.$$

La parte correspondiente a cada uno de los  $l_x$  asegurados, será, pues,

$$\frac{1}{l_a \cdot v_a} I_a = \frac{I_a}{D_a}$$

( $D_a = D_a^{\bar{aa}}$  por ser  $a$  la edad inicial del seguro).

Por su parte, el asegurado debe servir una renta continua mientras dure su validez: el valor de esta renta será

$$\frac{\bar{a}_a}{a} = \frac{\bar{N}_a^{\bar{au}}}{D_a}$$

los 50, y el 20, para los invalidados a los 75.

equivalencia que se produce en el 28.º año para los invalidados a los 20 años, el 14.º para los invalidados a los 50, y el 2.º para los invalidados a los 75.

Hemos considerado que los casos de invalidez se producen, en promedio, a mediados de cada año, y que, por lo tanto, los decesos de inválidos, repartidos igualmente durante todo el año siguiente a la invalidez, igualan los coeficientes de Klein a mediados de cada año.

Con esta hipótesis aumentamos seguramente la mortalidad, pero en cambio, si se tiene en cuenta que, según la observación de la estadística alemana, los decesos de recién invalidados ocurren en mucho mayor número en los meses inmediatos a la invalidez, nuestra hipótesis viene a suponer, al iniciarse el año, una supervivencia de inválidos mayor que la real, y por lo tanto, la diferencia que puede haber es siempre un aumento en el total de inválidos, y por lo tanto aumenta el margen de seguridad de la reserva.

Para el cálculo de la tabla hemos hecho una serie de fichas anuales (56 en total), cuyo modelo acompañamos a la tabla, en el capítulo respectivo.

Repetimos que consideramos este método técnicamente incorrecto, pero, sin embargo, más exacto que el sistema empleado por Richard (1), consistente en aplicar al grupo de inválidos un promedio de mortalidad, de acuerdo con los cálculos de Bentzien, que dan tasas de mortalidad de inválidos mucho menores que las que resultan por el método que hemos empleado.

#### 7. — CÁLCULO DE LAS PRIMAS

Un grupo de  $I_x$  individuos de la misma edad (la edad inicial de la tabla, en que todos los individuos son válidos), constituye un seguro de invalidez, a condición de que la prima continua sea pagadera únicamente mientras dure la validez del asegurado, y que la pensión, tam-

---

(1) P. J. RICHARD. — Etude sur l'assurance complémentaire de l'assurance sur la vie. París, 1911.

servaciones para establecer una tabla de reactividades que permita determinar el coeficiente exacto de reactividades a cada edad.

Mientras este punto no esté suficientemente estudiado, podemos, sin gran error, suponer que el total de cesación de las pensiones se debe a muerte, despreciando las reactividades que, en realidad, vienen a engrosar el grupo de los activos, y aumentar parcialmente la reserva, con lo cual el error producido por despreciar las reactividades disminuye mucho en importancia, sobre todo si se tiene en cuenta que, lógicamente, las reactividades deben ocurrir en las edades tempranas, y ser muy raras en edades avanzadas, de manera que el individuo reactivado se mantiene en el grupo de válidos durante un plazo suficientemente largo para constituir la mayor parte de la reserva que corresponde a su nueva y definitiva invalidez.

#### 6. — CONSTRUCCIÓN DE LA TABLA

Con las bases arriba mencionadas, hemos ensayado la construcción de una tabla de invalidez para la población de Buenos Aires (varones), con los siguientes datos:

1.º Coeficientes de invalidez por edades, de Zimmermann.

2.º Tabla de mortalidad de la población de Buenos Aires, varones, T<sup>v</sup> (1909).

3.º Tablas de probabilidad de extinción de las pensiones por edades a la entrada, de Klein.

Con respecto a esta última tabla, debemos observar que, no siendo posible conseguir hoy, por la dificultad en obtener obras alemanas, el original, hemos debido valernos solamente de los datos transcriptos en la obra del doctor Bunge, correspondientes a las edades quinquenales; que hemos interpolado aritméticamente, y completado por progresión aritmética, a partir del 13.º año, hasta igualar la mortalidad general de nuestra población,

la probabilidad de invalidar en el año, habiéndolo empezado como válido, será

$$i_x = \frac{l_x^i}{l_x^{aa}} = \frac{\text{Invalidos en el año } x}{\text{Válidos en el año } x}$$

Prescindimos, en este cálculo, de la influencia de la mortalidad de los individuos válidos, que modifica nuestro denominador, pero la importancia del error producido por esta causa, aun en el caso de aplicarse a una población las tasas de invalidez obtenidas en otra de mortalidad muy distinta, es muy escasa.

En el caso de aplicarse en nuestro país las tablas obtenidas para el Imperio Alemán, por ejemplo, el error cometido a los 60 años no llega a uno por ciento de la tasa  $i_x$  o sea, modifica la tasa de invalidez en 0,0003.

Sobre  $l_x^i$  individuos invalidados en edad  $x$ , mueren antes de cumplir un año de invalidez  $d_x^{i(x)}$ . En realidad, este número de muertos corresponde, mitad al año de edad  $x$ , y mitad al año  $x + 1$ , de manera que al adoptar  $q_x^{i(x)}$  como si fuera expresión de

$$\frac{d_x^{i(x)}}{l_x^i}$$

se comete nuevamente un pequeño error, cuyo valor puede apreciarse aproximadamente, comparando las tablas de Klein.

Aceptada la hipótesis planteada, podemos, en presencia de una tabla de mortalidad de inválidos por edades a la entrada, construir una tabla de invalidez, no correcta técnicamente, pero de suficiente aproximación para el empleo práctico.

### 5. — REACTIVIDADES

Un 5 por ciento (Klein) de los individuos invalidados, vuelven a ingresar en el grupo de los válidos, por cesación de la causa de su invalidez.

Sería necesario tener un número suficiente de ob-

La tuberculosis produce de inmediato un porcentaje mucho mayor de muertos que otras causas de invalidez, lo cual explica la enorme mortalidad de inválidos en las edades tempranas.

A medida que se aleja la fecha de la invalidez, desaparecen del grupo la gran mayoría de los tuberculosos y otros invalidados por causas graves, se consolidan las lesiones en los sobrevevientes y, por lo tanto, disminuye la mortalidad, hasta igualarse a la mortalidad general, y crecer de nuevo con ésta, pasando, por lo tanto, por un mínimo.

#### 4. — TABLAS DE INVALIDEZ

Un grupo de válidos observado, disminuye en razón de dos causas, la muerte y la invalidez, que obran simultáneamente. No es posible estudiar una causa independientemente de la otra, sino reduciendo la observación a un espacio de tiempo infinitamente pequeño, por medio del análisis infinitesimal.

Pero hasta tanto la teoría estadística de la invalidez no se encuentre asentada sobre bases sólidas, que permitan obtener resultados prácticos de suficiente confianza, podemos, por el empleo de una serie de hipótesis, obtener cifras bastante aproximadas para servir como base de cálculo.

Al efecto, debemos tener presente que el seguro invalidez versa generalmente sobre sumas muy pequeñas, y, por lo tanto, los errores que se cometan en el análisis no llegarán a afectar las primas sino en cantidad escasamente apreciable.

Suponemos observado un grupo de población suficientemente grande, clasificado por edades, incluyéndose cada individuo en el grupo de edad que corresponde a su cumpleaños más próximo al iniciarse el año de observación.

Sobre  $l_x^{aa}$  individuos observados, de edad  $x$ , válidos, se invalidan en el año  $l_x^{ai}$ . La tasa de invalidez, o sea

| x   | $K_x^{1/2}$ | $K_x^{2/2}$ | $K_x^2$  | $K_x^{3+4}$ | $K_x^{5+}$ |
|-----|-------------|-------------|----------|-------------|------------|
| 60  | 480.381     | 232.256     | 291.753  | 403.048     | 1.679.484  |
| 61  | 433.509     | 214.734     | 289.973  | 383.261     | 1.618.928  |
| 62  | 389.051     | 197.411     | 261.895  | 362.514     | 1.555.536  |
| 63  | 347.019     | 181.420     | 242.649  | 340.803     | 1.488.752  |
| 64  | 307.468     | 163.881     | 223.421  | 318.267     | 1.418.311  |
| 65  | 270.452     | 147.900     | 204.408  | 295.210     | 1.344.258  |
| 66  | 236.045     | 132.574     | 185.753  | 271.891     | 1.267.006  |
| 67  | 204.284     | 117.915     | 167.542  | 248.534     | 1.187.179  |
| 68  | 175.188     | 103.923     | 149.782  | 225.245     | 1.105.343  |
| 69  | 148.821     | 90.644      | 132.546  | 202.203     | 1.022.025  |
| 70  | 125.232     | 78.469      | 115.959  | 179.471     | 937.750    |
| 71  | 104.439     | 66.958      | 100.212  | 157.412     | 853.115    |
| 72  | 86.288      | 56.519.1    | 85.540   | 136.383     | 768.995    |
| 73  | 71.649      | 47.212.5    | 72.108   | 116.651     | 686.347    |
| 74  | 57.282      | 39.024.1    | 60.029   | 98.442      | 606.157    |
| 75  | 45.954.2    | 31.915.6    | 49.343.4 | 81.912      | 529.505    |
| 76  | 36.446.7    | 25.801.8    | 40.025.5 | 67.159      | 457.263    |
| 77  | 28.552.1    | 20.594.8    | 32.021.6 | 54.213      | 390.065    |
| 78  | 22.071.7    | 16.202.9    | 25.268.0 | 43.063.0    | 328.467    |
| 79  | 16.831.9    | 12.541.7    | 19.624.0 | 33.652.4    | 372.460    |
| 80  | 12.651.0    | 9.547.0     | 15.000.3 | 25.856.7    | 222.270    |
| 81  | 9.359.7     | 7.138.0     | 11.274.8 | 19.506.1    | 177.931    |
| 82  | 6.808.6     | 5.235.5     | 8.333.5  | 14.426.3    | 139.518    |
| 83  | 4.860.7     | 3.771.7     | 6.056.5  | 10.447.2    | 107.034    |
| 84  | 3.397.6     | 2.666.39    | 4.330.1  | 7.416.3     | 80.266     |
| 85  | 2.322.03    | 1.849.42    | 3.039.23 | 5.168.3     | 58.778     |
| 86  | 1.552.03    | 1.263.73    | 2.090.77 | 3.550.3     | 41.984     |
| 87  | 1.018.52    | 856.13      | 1.409.55 | 2.400.2     | 29.207.8   |
| 88  | 660.61      | 568.57      | 937.58   | 1.585.01    | 19.759.6   |
| 89  | 426.92      | 367.42      | 605.93   | 1.024.26    | 12.961.0   |
| 90  | 267.84      | 230.51      | 380.20   | 642.60      | 8.243.6    |
| 91  | 163.07      | 140.34      | 231.53   | 391.24      | 5.065.5    |
| 92  | 95.75       | 82.40       | 136.01   | 229.73      | 2.974.3    |
| 93  | 54.07       | 46.52       | 76.87    | 129.73      | 1.679.63   |
| 94  | 29.27       | 25.19       | 41.68    | 70.24       | 909.34     |
| 95  | 15.13       | 13.02       | 21.61    | 36.30       | 469.95     |
| 96  | 7.43        | 6.39        | 10.68    | 17.82       | 230.65     |
| 97  | 3.44        | 2.96        | 5.02     | 8.25        | 106.78     |
| 98  | 1.49        | 1.28        | 2.11     | 3.56        | 46.06      |
| 99  | 0.59        | 0.50        | 0.83     | 1.40        | 18.07      |
| 100 | 0.20        | 0.17        | 0.28     | 0.47        | 6.07       |
| 101 | 0.05        | 0.04        | 0.07     | 0.11        | 1.44       |

| x  | $K_x^{1/2}$ | $K_x^{2/2}$ | $K_x^{\frac{3}{2}}$ | $K_x^{3+4}$ | $K_x^{5+}$ |
|----|-------------|-------------|---------------------|-------------|------------|
| 15 | 6.337.542   | 1.093.888   | 913.978             | 870.583     | 2.760.388  |
| 16 | 6.004.711   | 1.073.401   | 906.011             | 870.583     | 2.760.388  |
| 17 | 5.668.351   | 1.053.870   | 898.416             | 870.583     | 2.760.388  |
| 18 | 5.358.050   | 1.034.164   | 890.132             | 870.583     | 2.760.388  |
| 19 | 5.076.236   | 1.013.399   | 880.903             | 868.605     | 2.760.388  |
| 20 | 4.822.175   | 991.676     | 869.884             | 864.827     | 2.760.073  |
| 21 | 4.592.739   | 969.124     | 857.556             | 859.415     | 2.758.870  |
| 22 | 4.383.425   | 945.867     | 844.348             | 852.524     | 2.756.286  |
| 23 | 4.189.366   | 922.295     | 830.369             | 844.575     | 2.752.080  |
| 24 | 4.006.514   | 899.275     | 816.243             | 835.419     | 2.745.622  |
| 25 | 3.833.020   | 876.559     | 802.014             | 826.183     | 2.737.384  |
| 26 | 3.667.480   | 854.408     | 787.961             | 816.656     | 2.727.618  |
| 27 | 3.509.360   | 833.053     | 773.876             | 807.341     | 2.716.713  |
| 28 | 3.358.361   | 812.255     | 760.011             | 797.807     | 2.705.231  |
| 29 | 3.213.548   | 792.010     | 746.583             | 788.306     | 2.693.249  |
| 30 | 3.074.481   | 772.115     | 733.385             | 778.851     | 2.680.839  |
| 31 | 2.940.570   | 752.582     | 720.438             | 769.085     | 2.667.880  |
| 32 | 2.811.300   | 733.424     | 707.726             | 759.238     | 2.653.915  |
| 33 | 2.686.552   | 714.481     | 694.927             | 749.340     | 2.638.898  |
| 34 | 2.566.211   | 695.780     | 682.080             | 739.583     | 2.622.483  |
| 35 | 2.450.015   | 677.344     | 669.066             | 729.977     | 2.604.821  |
| 36 | 2.337.724   | 659.047     | 655.933             | 720.386     | 2.585.786  |
| 37 | 2.229.130   | 640.784     | 642.728             | 710.552     | 2.565.416  |
| 38 | 2.123.780   | 622.735     | 629.225             | 700.525     | 2.543.624  |
| 39 | 2.021.405   | 604.676     | 615.617             | 689.970     | 2.520.351  |
| 40 | 1.921.774   | 586.781     | 601.712             | 679.088     | 2.495.443  |
| 41 | 1.824.924   | 568.900     | 587.581             | 667.944     | 2.469.119  |
| 42 | 1.730.889   | 550.900     | 573.399             | 656.380     | 2.441.519  |
| 43 | 1.639.694   | 532.992     | 559.114             | 644.683     | 2.412.746  |
| 44 | 1.551.467   | 515.131     | 544.786             | 632.808     | 2.383.206  |
| 45 | 1.466.127   | 497.375     | 530.466             | 620.909     | 2.352.807  |
| 46 | 1.383.606   | 479.780     | 516.038             | 609.032     | 2.321.400  |
| 47 | 1.303.768   | 462.315     | 501.484             | 597.139     | 2.288.883  |
| 48 | 1.226.436   | 444.886     | 486.803             | 585.049     | 2.255.045  |
| 49 | 1.151.527   | 427.343     | 472.073             | 572.614     | 2.219.515  |
| 50 | 1.078.963   | 409.638     | 457.226             | 559.718     | 2.182.013  |
| 51 | 1.008.697   | 391.809     | 442.281             | 546.412     | 2.142.096  |
| 52 | 940.773     | 374.028     | 427.023             | 532.630     | 2.099.581  |
| 53 | 875.231     | 356.216     | 411.574             | 518.392     | 2.054.388  |
| 54 | 811.995     | 338.518     | 395.725             | 503.729     | 2.006.517  |
| 55 | 751.020     | 320.809     | 379.525             | 488.636     | 1.956.258  |
| 56 | 692.237     | 303.104     | 362.897             | 473.039     | 1.903.939  |
| 57 | 635.730     | 285.356     | 345.770             | 456.770     | 1.849.999  |
| 58 | 581.535     | 267.586     | 328.202             | 439.726     | 1.794.635  |
| 59 | 529.730     | 249.871     | 310.190             | 421.862     | 1.737.880  |

| x   | $K_x^{1/2}$ | $K_x^{2/2}$ | $K_x^2$  | $K_x^{3+4}$ | $K_x^{5+}$ |
|-----|-------------|-------------|----------|-------------|------------|
| 60  | 134.588     | 63.792.1    | 81.280.8 | 107.572     | 432.591    |
| 61  | 119.782     | 58.257.4    | 75.348.6 | 101.322     | 413.463    |
| 62  | 106.036     | 52.888.9    | 69.436.1 | 94.892      | 393.817    |
| 63  | 93.256      | 47.722.5    | 63.584.0 | 88.291      | 373.510    |
| 64  | 81.457      | 42.788.4    | 57.847.8 | 81.568      | 352.496    |
| 65  | 70.622.0    | 38.110.9    | 52.282.6 | 74.818.6    | 330.821    |
| 66  | 60.745.6    | 33.709.5    | 46.925.3 | 68.122.0    | 308.636    |
| 67  | 51.796.6    | 29.579.2    | 41.794.2 | 61.540.9    | 286.144    |
| 68  | 43.753.3    | 25.711.2    | 36.884.5 | 55.102.8    | 263.521    |
| 69  | 36.601.8    | 22.109.5    | 32.209.7 | 48.853.2    | 240.923    |
| 70  | 30.324.6    | 18.869.7    | 27.795.7 | 42.804.1    | 218.497    |
| 71  | 24.895.8    | 15.864.3    | 23.684.3 | 37.044.8    | 196.400    |
| 72  | 20.246.2    | 13.190.2    | 19.925.9 | 31.655.4    | 174.852    |
| 73  | 16.315.7    | 10.851.2    | 16.550.0 | 26.696.1    | 154.080    |
| 74  | 13.019.5    | 8.832.0     | 13.571.4 | 22.206.0    | 134.306    |
| 75  | 10.278.9    | 7.112.2     | 10.986.0 | 18.206.9    | 115.761    |
| 76  | 8.022.1     | 5.661.0     | 8.774.2  | 14.705.0    | 98.613     |
| 77  | 6.183.5     | 4.448.4     | 6.910.2  | 11.690.0    | 82.963     |
| 78  | 4.702.8     | 3.444.86    | 5.367.0  | 9.142.2     | 68.888     |
| 79  | 3.528.15    | 2.624.74    | 4.101.7  | 7.032.5     | 56.332     |
| 80  | 2.608.54    | 1.965.37    | 3.084.73 | 5.317.8     | 45.291.6   |
| 81  | 1.898.26    | 1.445.50    | 2.280.75 | 3.947.3     | 35.723.0   |
| 82  | 1.358.10    | 1.042.67    | 1.657.98 | 2.871.68    | 27.589.6   |
| 83  | 953.45      | 738.58      | 1.184.95 | 2.045.07    | 20.841.3   |
| 84  | 655.25      | 513.29      | 833.09   | 1.427.34    | 15.385.6   |
| 85  | 440.16      | 349.92      | 574.95   | 977.80      | 11.088.7   |
| 86  | 289.09      | 235.01      | 388.86   | 660.35      | 7.793.8    |
| 87  | 186.39      | 156.55      | 257.73   | 438.96      | 5.334.4    |
| 88  | 118.80      | 102.24      | 168.59   | 285.00      | 3.550.0    |
| 89  | 75.49       | 64.97       | 107.13   | 181.09      | 2.290.23   |
| 90  | 46.57       | 40.08       | 66.09    | 111.70      | 1.432.57   |
| 91  | 27.88       | 24.00       | 39.57    | 66.86       | 865.67     |
| 92  | 16.10       | 13.86       | 22.85    | 38.59       | 499.69     |
| 93  | 8.94        | 7.70        | 12.69    | 21.42       | 277.38     |
| 94  | 4.76        | 4.10        | 6.76     | 11.40       | 147.61     |
| 95  | 2.42        | 2.09        | 3.44     | 5.79        | 74.98      |
| 96  | 1.17        | 1.01        | 1.67     | 2.79        | 36.17      |
| 97  | 0.54        | 0.46        | 0.77     | 1.27        | 16.46      |
| 98  | 0.23        | 0.20        | 0.32     | 0.54        | 6.98       |
| 99  | 0.09        | 0.08        | 0.12     | 0.21        | 2.69       |
| 100 | 0.03        | 0.03        | 0.04     | 0.07        | 0.89       |
| 101 | 0.01        | 0.01        | 0.01     | 0.02        | 0.21       |

| x  | $K_x^{1/2}$ | $K_x^{2/2}$ | $K_x^2$ | $K_x^{3+4}$ | $K_x^{5+}$ |
|----|-------------|-------------|---------|-------------|------------|
| 15 | 3.501.571   | 507.024     | 384.510 | 321.237     | 883.076    |
| 16 | 3.238.942   | 491.775     | 378.580 | 321.237     | 883.076    |
| 17 | 2.993.297   | 477.512     | 373.033 | 321.237     | 883.076    |
| 18 | 2.770.959   | 463.425     | 367.097 | 321.237     | 883.076    |
| 19 | 2.572.843   | 448.827     | 360.609 | 319.847     | 883.076    |
| 20 | 2.398.412   | 433.814     | 353.009 | 317.241     | 882.859    |
| 21 | 2.243.153   | 418.583     | 344.666 | 313.578     | 882.045    |
| 22 | 2.104.178   | 403.141     | 335.897 | 309.003     | 880.329    |
| 23 | 1.977.762   | 387.785     | 326.791 | 303.825     | 877.472    |
| 24 | 1.860.894   | 373.072     | 317.763 | 297.973     | 873.459    |
| 25 | 1.752.099   | 358.827     | 308.840 | 292.181     | 868.293    |
| 26 | 1.650.251   | 345.198     | 300.194 | 286.319     | 862.285    |
| 27 | 1.554.803   | 332.307     | 291.691 | 280.696     | 855.702    |
| 28 | 1.465.374   | 319.990     | 283.479 | 275.051     | 848.902    |
| 29 | 1.381.226   | 308.226     | 275.676 | 269.529     | 841.940    |
| 30 | 1.301.942   | 296.884     | 268.152 | 264.139     | 834.865    |
| 31 | 1.227.038   | 285.958     | 260.910 | 258.676     | 827.436    |
| 32 | 1.156.094   | 275.444     | 253.934 | 253.272     | 819.772    |
| 33 | 1.088.924   | 265.244.0   | 247.042 | 247.943     | 811.686    |
| 34 | 1.025.350   | 255.364.4   | 240.255 | 242.788     | 803.009    |
| 35 | 965.123     | 245.808.4   | 233.510 | 237.809     | 793.855    |
| 36 | 908.019     | 236.503.6   | 226.832 | 232.931     | 784.175    |
| 37 | 853.837     | 227.391.5   | 220.243 | 228.025     | 774.011    |
| 38 | 802.265     | 218.556.1   | 213.633 | 223.116     | 763.343    |
| 39 | 753.095     | 209.882.6   | 207.097 | 218.046     | 752.165    |
| 40 | 706.146     | 201.449.9   | 200.545 | 212.918     | 740.428    |
| 41 | 661.368     | 193.163.6   | 194.012 | 207.766     | 728.211    |
| 42 | 618.712     | 184.998.6   | 187.579 | 202.521     | 715.691    |
| 43 | 578.125     | 177.028.6   | 181.221 | 197.315     | 702.930    |
| 44 | 539.599     | 169.229.2   | 174.964 | 192.130     | 690.031    |
| 45 | 503.037     | 161.622.1   | 168.829 | 187.032     | 677.007    |
| 46 | 468.350     | 154.226.2   | 162.764 | 182.040     | 663.805    |
| 47 | 435.424     | 147.023.7   | 156.762 | 177.135     | 650.395    |
| 48 | 404.133     | 139.971.4   | 150.822 | 172.243     | 636.703    |
| 49 | 374.395     | 133.007.0   | 144.974 | 167.306     | 622.598    |
| 50 | 346.131     | 126.110.7   | 139.191 | 162.283     | 607.991    |
| 51 | 319.279     | 119.297.4   | 133.480 | 157.198     | 592.736    |
| 52 | 293.811     | 112.630.6   | 127.759 | 152.031     | 576.796    |
| 53 | 269.700     | 106.078.1   | 122.076 | 146.793     | 560.171    |
| 54 | 246.877     | 99.690.5    | 116.356 | 141.501     | 542.893    |
| 55 | 225.285     | 93.419.5    | 110.619 | 136.156     | 525.095    |
| 56 | 204.862     | 87.268.1    | 104.842 | 130.737     | 506.917    |
| 57 | 185.600     | 81.218.1    | 99.004  | 125.191     | 488.530    |
| 58 | 167.475     | 75.275.1    | 93.128  | 119.491     | 470.014    |
| 59 | 150.476     | 69.463.1    | 87.217  | 113.629     | 451.391    |

| x   | $D_x$   | $N_x$    | $N_x$    |
|-----|---------|----------|----------|
| 60  | 1.496.6 | 10.416.5 | 11.164.8 |
| 61  | 1.345.6 | 9.070.9  | 9.743.7  |
| 62  | 1.205.3 | 7.865.6  | 8.468.3  |
| 63  | 1.075.5 | 6.790.1  | 7.327.9  |
| 64  | 955.60  | 5.834.54 | 6.312.34 |
| 65  | 845.54  | 4.989.00 | 5.411.77 |
| 66  | 744.53  | 4.244.47 | 4.616.74 |
| 67  | 652.47  | 3.592.00 | 3.918.24 |
| 68  | 569.23  | 3.022.77 | 3.307.39 |
| 69  | 493.43  | 2.529.34 | 2.776.06 |
| 70  | 426.00  | 2.103.34 | 2.316.34 |
| 71  | 365.39  | 1.737.95 | 1.920.65 |
| 72  | 311.25  | 1.426.70 | 1.582.33 |
| 73  | 264.00  | 1.162.70 | 1.294.70 |
| 74  | 222.20  | 940.50   | 1.051.60 |
| 75  | 185.46  | 755.04   | 847.77   |
| 76  | 153.79  | 601.25   | 678.15   |
| 77  | 126.44  | 474.81   | 538.03   |
| 78  | 103.77  | 371.04   | 422.93   |
| 79  | 84.320  | 286.723  | 328.883  |
| 80  | 68.140  | 218.583  | 252.653  |
| 81  | 54.458  | 164.125  | 191.354  |
| 82  | 42.937  | 121.188  | 142.657  |
| 83  | 33.317  | 87.871   | 104.530  |
| 84  | 25.405  | 62.466   | 75.169   |
| 85  | 19.007  | 43.459   | 52.963   |
| 86  | 13.927  | 29.532   | 36.496   |
| 87  | 9.975   | 19.557   | 24.545   |
| 88  | 6.970   | 12.587   | 16.072   |
| 89  | 4.740   | 7.847    | 10.217   |
| 90  | 3.085   | 4.762    | 6.305    |
| 91  | 1.973   | 2.789    | 3.776    |
| 92  | 1.217   | 1.572    | 2.181    |
| 93  | 0.722   | 0.850    | 1.211    |
| 94  | 0.411   | 0.439    | 0.645    |
| 95  | 0.223   | 0.216    | 0.328    |
| 96  | 0.116   | 0.100    | 0.158    |
| 97  | 0.057   | 0.043    | 0.072    |
| 98  | 0.026   | 0.017    | 0.030    |
| 99  | 0.011   | 0.006 ↑  | 0.012    |
| 100 | 0.004   | 0.002 ↑  | 0.004    |
| 101 | 0.002   |          | 0.001    |

| x  | $D_x$   | $N_x$     | $\bar{N}_x$ |
|----|---------|-----------|-------------|
| 15 | 41.727  | 581.745   | 602.609     |
| 16 | 39.003  | 542.742   | 562.244     |
| 17 | 36.504  | 506.238   | 524.490     |
| 18 | 34.196  | 472.042   | 489.140     |
| 19 | 32.044  | 439.998   | 456.020     |
| 20 | 30.029  | 409.969   | 424.984     |
| 21 | 28.139  | 381.830   | 395.900     |
| 22 | 26.358  | 355.472   | 348.651     |
| 23 | 24.684  | 330.788   | 343.130     |
| 24 | 23.111  | 307.677   | 319.233     |
| 25 | 21.638  | 286.039   | 296.858     |
| 26 | 20.254  | 265.785   | 275.912     |
| 27 | 18.950  | 246.835   | 256.310     |
| 28 | 17.729  | 229.106   | 237.971     |
| 29 | 16.587  | 212.519   | 220.813     |
| 30 | 15.517  | 197.002   | 204.761     |
| 31 | 14.515  | 182.487   | 189.745     |
| 32 | 13.575  | 168.912   | 175.700     |
| 33 | 12.693  | 156.219   | 162.566     |
| 34 | 11.866  | 144.353   | 150.286     |
| 35 | 11.090  | 133.263   | 138.808     |
| 36 | 10.361  | 122.902   | 128.083     |
| 37 | 9.676.8 | 113.224.9 | 118.063.3   |
| 38 | 9.033.2 | 104.191.7 | 108.708.3   |
| 39 | 8.428.7 | 95.763.0  | 99.977.4    |
| 40 | 7.860.2 | 87.902.8  | 91.832.9    |
| 41 | 7.325.3 | 80.577.5  | 84.240.2    |
| 42 | 6.821.9 | 73.755.6  | 77.166.6    |
| 43 | 6.348.9 | 67.406.7  | 70.581.2    |
| 44 | 5.902.9 | 61.503.8  | 64.455.3    |
| 45 | 5.483.7 | 56.020.1  | 58.742.0    |
| 46 | 5.088.9 | 50.931.2  | 53.475.7    |
| 47 | 4.717.1 | 46.214.1  | 48.572.7    |
| 48 | 4.365.6 | 41.848.5  | 44.031.3    |
| 49 | 4.036.3 | 37.812.2  | 39.830.4    |
| 50 | 3.726.7 | 34.085.5  | 35.948.9    |
| 51 | 3.280.9 | 30.804.6  | 32.445.1    |
| 52 | 3.160.6 | 27.644.0  | 29.224.3    |
| 53 | 2.903.0 | 24.741.0  | 26.192.5    |
| 54 | 2.660.8 | 22.080.2  | 23.410.6    |
| 55 | 2.433.7 | 19.646.5  | 20.863.4    |
| 56 | 2.220.1 | 17.426.4  | 18.536.5    |
| 57 | 2.020.5 | 15.405.9  | 16.416.2    |
| 58 | 1.833.6 | 13.572.3  | 14.489.1    |
| 59 | 1.659.2 | 11.913.1  | 12.742.7    |

| x   | $K_x^{1/2}$ | $K_x^{2/2}$ | $K_x^2$   | $K_x^{3+4}$ | $K_x^{5+}$ |
|-----|-------------|-------------|-----------|-------------|------------|
| 60  | 253.324     | 121.166.9   | 155.361   | 207.322     | 847.810    |
| 61  | 227.053     | 111.346.1   | 144.835   | 196.232     | 813.869    |
| 62  | 202.372     | 101.729.4   | 134.244   | 184.714     | 778.677    |
| 63  | 179.260     | 92.386.7    | 123.661   | 172.776     | 741.955    |
| 64  | 157.720     | 83.379.1    | 113.189   | 160.502     | 703.592    |
| 65  | 137.752     | 74.758.5    | 102.932.1 | 148.064     | 663.645    |
| 66  | 119.368     | 66.569.6    | 92.964.8  | 135.605     | 622.370    |
| 67  | 102.560     | 58.811.9    | 83.327.3  | 123.244     | 580.125    |
| 68  | 87.309      | 51.477.7    | 74.017.9  | 111.037     | 537.229    |
| 69  | 73.620      | 44.583.3    | 65.069.4  | 99.074      | 493.972    |
| 70  | 61.378      | 38.322.6    | 56.539.8  | 87.385      | 450.635    |
| 71  | 50.787.4    | 32.459.5    | 48.519.2  | 76.150      | 407.527    |
| 72  | 41.630.6    | 27.193.1    | 41.117.4  | 65.536.2    | 365.090    |
| 73  | 33.815.8    | 22.542.8    | 34.405.6  | 55.576.3    | 323.792    |
| 74  | 27.200.0    | 18.490.2    | 28.427.2  | 46.564.4    | 284.104    |
| 75  | 21.647.1    | 15.005.5    | 23.188.7  | 38.461.4    | 246.529    |
| 76  | 17.030.8    | 12.037.0    | 18.664.5  | 31.298.3    | 211.453    |
| 77  | 13.234.2    | 9.532.9     | 14.815.3  | 25.072.4    | 179.136    |
| 78  | 10.147.4    | 7.440.9     | 11.598.3  | 19.761.0    | 149.795    |
| 79  | 7.675.3     | 5.715.0     | 8.935.4   | 15.321.1    | 123.371    |
| 80  | 5.721.5     | 4.314.1     | 6.774.7   | 11.678.2    | 99.917     |
| 81  | 4.198.1     | 3.199.1     | 5.050.3   | 8.738.8     | 79.394     |
| 82  | 3.028.5     | 2.326.88    | 3.701.9   | 6.410.0     | 61.784     |
| 83  | 2.142.97    | 1.662.19    | 2.667.9   | 4.603.2     | 47.034     |
| 84  | 1.485.94    | 1.165.05    | 1.891.42  | 3.240.1     | 34.995.3   |
| 85  | 1.006.78    | 801.11      | 1.316.36  | 2.238.7     | 25.423.2   |
| 86  | 667.03      | 542.68      | 897.87    | 1.524.75    | 18.013.3   |
| 87  | 433.87      | 364.55      | 6.0.16    | 1.022.13    | 12.429.8   |
| 88  | 278.95      | 240.08      | 395.86    | 669.27      | 8.340.0    |
| 89  | 178.74      | 153.84      | 253.66    | 428.85      | 5.425.2    |
| 90  | 111.19      | 95.70       | 157.80    | 266.77      | 3.421.9    |
| 91  | 67.12       | 57.77       | 95.27     | 161.04      | 2.085.1    |
| 92  | 39.08       | 33.63       | 55.47     | 93.75       | 1.213.85   |
| 93  | 21.88       | 18.83       | 31.07     | 52.49       | 679.60     |
| 94  | 11.75       | 10.11       | 16.69     | 28.17       | 364.77     |
| 95  | 6.02        | 5.18        | 8.57      | 14.43       | 186.90     |
| 96  | 2.93        | 2.52        | 4.19      | 7.02        | 90.95      |
| 97  | 1.35        | 1.16        | 1.95      | 3.22        | 41.75      |
| 98  | 0.58        | 0.50        | 0.81      | 1.38        | 17.86      |
| 99  | 0.23        | 0.20        | 0.31      | 0.54        | 6.95       |
| 100 | 0.08        | 0.07        | 0.10      | 0.18        | 2.32       |
| 101 | 0.02        | 0.02        | 0.02      | 0.04        | 0.55       |

| x  | $K_x^{1/2}$ | $K_x^{2/2}$ | $K_x^2$ | $K_x^{3+4}$ | $K_x^{5+}$ |
|----|-------------|-------------|---------|-------------|------------|
| 15 | 4.687.883   | 733.595     | 585.762 | 520.801     | 1.540.865  |
| 16 | 4.363.690   | 715.932     | 578.893 | 520.801     | 1.540.865  |
| 17 | 4.076.459   | 699.254     | 572.407 | 520.801     | 1.540.865  |
| 18 | 3.814.005   | 682.625     | 565.400 | 520.801     | 1.540.865  |
| 19 | 3.577.916   | 665.229     | 557.668 | 519.144     | 1.540.865  |
| 20 | 3.367.103   | 647.204     | 548.525 | 516.009     | 1.540.604  |
| 21 | 3.178.545   | 628.644     | 538.393 | 511.561     | 1.539.615  |
| 22 | 3.008.155   | 609.712     | 527.641 | 505.951     | 1.537.511  |
| 23 | 2.851.688   | 590.706     | 516.370 | 499.542     | 1.533.975  |
| 24 | 2.705.660   | 572.322     | 505.089 | 492.230     | 1.528.961  |
| 25 | 2.568.426   | 554.353     | 493.834 | 484.924     | 1.522.445  |
| 26 | 2.438.731   | 536.998     | 482.824 | 477.459     | 1.514.794  |
| 27 | 2.316.028   | 520.426     | 471.894 | 470.231     | 1.506.332  |
| 28 | 2.199.967   | 504.441     | 461.237 | 462.904     | 1.497.507  |
| 29 | 2.089.721   | 489.029     | 451.014 | 455.670     | 1.488.385  |
| 30 | 1.984.858   | 474.027     | 441.062 | 448.541     | 1.479.028  |
| 31 | 1.884.845   | 459.439     | 431.392 | 441.247     | 1.469.349  |
| 32 | 1.789.147   | 445.267     | 421.988 | 433.962     | 1.459.018  |
| 33 | 1.697.743   | 431.388     | 412.610 | 426.710     | 1.448.015  |
| 34 | 1.610.408   | 417.785     | 403.287 | 419.629     | 1.436.095  |
| 35 | 1.526.884   | 404.533     | 393.932 | 412.724     | 1.423.399  |
| 36 | 1.446.936   | 391.506     | 389.582 | 405.895     | 1.409.847  |
| 37 | 1.370.357   | 378.627     | 280.270 | 398.960     | 1.395.482  |
| 38 | 1.296.772   | 366.021     | 370.838 | 391.956     | 1.380.261  |
| 39 | 1.225.947   | 353.528     | 361.424 | 384.654     | 1.364.160  |
| 40 | 1.157.677   | 341.266     | 346.896 | 377.197     | 1.347.092  |
| 41 | 1.091.944   | 329.102     | 337.305 | 369.633     | 1.329.158  |
| 42 | 1.028.731   | 317.002     | 327.771 | 361.858     | 1.310.604  |
| 43 | 968.010     | 305.078     | 318.260 | 354.070     | 1.291.512  |
| 44 | 909.824     | 293.298     | 308.810 | 346.239     | 1.272.030  |
| 45 | 854.078     | 281.699     | 299.456 | 338.466     | 1.252.173  |
| 46 | 800.687     | 270.315     | 290.121 | 330.782     | 1.231.853  |
| 47 | 749.524     | 259.123     | 280.794 | 323.161     | 1.211.015  |
| 48 | 700.439     | 248.060     | 271.475 | 315.487     | 1.189.537  |
| 49 | 653.345     | 237.031     | 262.214 | 307.669     | 1.167.200  |
| 50 | 608.159     | 226.006     | 252.969 | 299.639     | 1.143.848  |
| 51 | 564.821     | 215.010     | 243.752 | 291.432     | 1.119.228  |
| 52 | 523.326     | 204.148     | 234.431 | 283.013     | 1.093.256  |
| 53 | 483.668     | 193.370     | 225.083 | 274.398     | 1.065.911  |
| 54 | 445.770     | 182.764     | 215.584 | 265.610     | 1.037.221  |
| 55 | 409.575     | 172.252     | 205.968 | 256.651     | 1.007.387  |
| 56 | 375.013     | 161.842     | 196.192 | 247.480     | 976.626    |
| 57 | 342.106     | 151.506     | 186.218 | 238.006     | 945.214    |
| 58 | 310.846     | 141.256     | 176.085 | 228.175     | 913.280    |
| 59 | 281.249     | 131.135     | 165.794 | 217.969     | 880.855    |

| x   | $D_x$   | $N_x$    | $\bar{N}_x$ |
|-----|---------|----------|-------------|
| 60  | 2.643.0 | 19.613.4 | 20.934.9    |
| 61  | 2.399.0 | 17.214.4 | 18.413.9    |
| 62  | 2.169.3 | 15.045.1 | 16.129.8    |
| 63  | 1.954.0 | 13.091.1 | 14.058.1    |
| 64  | 1.752.8 | 11.338.3 | 12.214.7    |
| 65  | 1.565.7 | 9.772.6  | 10.555.5    |
| 66  | 1.391.8 | 8.380.8  | 9.076.7     |
| 67  | 1.231.3 | 7.149.5  | 7.765.2     |
| 68  | 1.084.5 | 6.063.0  | 6.607.3     |
| 69  | 949.00  | 5.116.00 | 5.590.50    |
| 70  | 827.12  | 4.288.88 | 4.702.44    |
| 71  | 716.20  | 3.572.68 | 3.930.78    |
| 72  | 615.89  | 2.956.79 | 3.264.74    |
| 73  | 527.37  | 2.429.42 | 2.693.11    |
| 74  | 448.09  | 1.981.33 | 2.205.38    |
| 75  | 378.45  | 1.602.88 | 1.792.11    |
| 76  | 316.07  | 1.286.81 | 1.444.85    |
| 77  | 262.94  | 1.023.87 | 1.155.34    |
| 78  | 217.36  | 806.51   | 915.19      |
| 79  | 178.29  | 628.22   | 717.37      |
| 80  | 145.45  | 482.77   | 555.50      |
| 81  | 117.36  | 365.41   | 424.09      |
| 82  | 93.410  | 271.997  | 318.702     |
| 83  | 73.172  | 198.825  | 235.411     |
| 84  | 56.327  | 142.498  | 170.662     |
| 85  | 42.542  | 99.956   | 121.227     |
| 86  | 31.468  | 68.488   | 84.222      |
| 87  | 22.755  | 45.733   | 57.111      |
| 88  | 16.051  | 29.682   | 37.708      |
| 89  | 11.020  | 18.662   | 24.172      |
| 90  | 7.241   | 11.421   | 15.042      |
| 91  | 4.674   | 6.747    | 9.084       |
| 92  | 2.912   | 3.835    | 5.291       |
| 93  | 1.742   | 2.093    | 2.964       |
| 94  | 1.002   | 1.091    | 1.592       |
| 95  | 0.550   | 0.541    | 0.816       |
| 96  | 0.287   | 0.254    | 0.398       |
| 97  | 0.142   | 0.112    | 0.183       |
| 98  | 0.066   | 0.046    | 0.079       |
| 99  | 0.029   | 0.017    | 0.032       |
| 100 | 0.012   | 0.005    | 0.011       |
| 101 | 0.004   | 0.001    | 0.003       |
| 102 | 0.001   | —        | 0.001       |

| x  | $D_x$   | $N_x$     | $N_x$     |
|----|---------|-----------|-----------|
| 15 | 48.102  | 767.620   | 791.671   |
| 16 | 45.890  | 722.230   | 744.925   |
| 17 | 42.887  | 679.343   | 700.787   |
| 18 | 40.558  | 638.785   | 659.064   |
| 19 | 38.368  | 600.417   | 619.601   |
| 20 | 36.298  | 564.119   | 582.268   |
| 21 | 34.337  | 529.782   | 546.951   |
| 22 | 32.470  | 497.312   | 513.547   |
| 23 | 30.697  | 466.615   | 481.964   |
| 24 | 29.015  | 437.600   | 452.108   |
| 25 | 27.533  | 410.067   | 423.844   |
| 26 | 25.914  | 384.153   | 397.110   |
| 27 | 24.476  | 359.677   | 371.915   |
| 28 | 23.118  | 336.559   | 348.118   |
| 29 | 21.834  | 314.725   | 325.642   |
| 30 | 20.620  | 294.105   | 304.415   |
| 31 | 19.473  | 274.632   | 284.369   |
| 32 | 18.385  | 256.247   | 265.440   |
| 33 | 17.355  | 238.892   | 247.570   |
| 34 | 16.378  | 222.514   | 230.703   |
| 35 | 15.453  | 207.061   | 214.788   |
| 36 | 14.575  | 192.486   | 199.774   |
| 37 | 13.805  | 178.681   | 185.584   |
| 38 | 12.950  | 165.731   | 172.206   |
| 39 | 12.199  | 153.532   | 159.632   |
| 40 | 11.484  | 142.018   | 147.790   |
| 41 | 10.804  | 131.244   | 136.646   |
| 42 | 10.158  | 121.086.4 | 126.165.4 |
| 43 | 9.543.5 | 111.542.9 | 116.314.6 |
| 44 | 8.957.6 | 102.585.3 | 107.064.1 |
| 45 | 8.400.7 | 94.184.6  | 98.385.0  |
| 46 | 7.870.2 | 86.314.4  | 90.249.5  |
| 47 | 7.361.6 | 78.949.8  | 82.632.1  |
| 48 | 6.880.8 | 72.069.0  | 75.509.4  |
| 49 | 6.422.4 | 65.646.6  | 68.857.8  |
| 50 | 5.986.2 | 59.660.4  | 62.653.5  |
| 51 | 5.571.0 | 54.089.4  | 56.874.9  |
| 52 | 5.174.1 | 48.915.3  | 51.502.4  |
| 53 | 4.797.7 | 44.117.6  | 46.516.5  |
| 54 | 4.439.3 | 39.678.3  | 41.898.0  |
| 55 | 4.099.0 | 35.579.3  | 37.628.8  |
| 56 | 3.774.9 | 31.804.4  | 33.691.9  |
| 57 | 3.468.2 | 28.336.2  | 30.570.3  |
| 58 | 3.177.3 | 25.158.9  | 26.747.6  |
| 59 | 2.902.5 | 22.256.4  | 23.707.7  |

| $x$ | $D_x$   | $N_x$    | $\bar{N}_x$ |
|-----|---------|----------|-------------|
| 60  | 4.692.9 | 37.248.4 | 39.594.9    |
| 61  | 4.800.8 | 32.947.6 | 35.098.0    |
| 62  | 3.926.4 | 29.021.2 | 30.984.4    |
| 63  | 3.570.8 | 25.450.4 | 27.235.8    |
| 64  | 3.233.8 | 22.216.6 | 23.833.5    |
| 65  | 2.916.4 | 19.300.2 | 20.758.4    |
| 66  | 2.617.4 | 16.682.8 | 17.991.5    |
| 67  | 2.337.9 | 14.344.9 | 15.513.9    |
| 68  | 2.078.8 | 12.266.1 | 13.305.5    |
| 69  | 1.836.7 | 10.429.4 | 11.347.8    |
| 70  | 1.616.2 | 8.813.2  | 9.621.3     |
| 71  | 1.412.9 | 7.400.3  | 8.106.8     |
| 72  | 1.226.7 | 6.173.6  | 6.787.0     |
| 73  | 1.060.5 | 5.113.1  | 5.643.4     |
| 74  | 909.72  | 4.203.39 | 4.658.25    |
| 75  | 773.93  | 3.429.46 | 3.816.43    |
| 76  | 654.09  | 2.775.37 | 3.102.42    |
| 77  | 549.37  | 2.226.00 | 2.500.69    |
| 78  | 458.50  | 1.767.50 | 1.996.75    |
| 79  | 379.72  | 1.387.78 | 1.577.64    |
| 80  | 312.75  | 1.075.03 | 1.231.41    |
| 81  | 254.76  | 820.27   | 947.65      |
| 82  | 204.73  | 615.54   | 717.91      |
| 83  | 161.92  | 453.62   | 534.58      |
| 84  | 125.84  | 327.78   | 390.70      |
| 85  | 95.956  | 231.820  | 279.798     |
| 86  | 71.660  | 160.160  | 195.990     |
| 87  | 52.317  | 107.843  | 134.002     |
| 88  | 37.260  | 70.583   | 89.213      |
| 89  | 25.827  | 44.756   | 57.670      |
| 90  | 17.132  | 27.624   | 36.190      |
| 91  | 11.165  | 16.459   | 22.042      |
| 92  | 7.023   | 9.436    | 12.948      |
| 93  | 4.242   | 5.194    | 7.315       |
| 94  | 2.462   | 2.732    | 3.963       |
| 95  | 1.365   | 1.367    | 2.050       |
| 96  | 0.720   | 0.647    | 1.007       |
| 97  | 0.360   | 0.287    | 0.467       |
| 98  | 0.170   | 0.117    | 0.202       |
| 99  | 0.075   | 0.042    | 0.080       |
| 100 | 0.030   | 0.012    | 0.027       |
| 101 | 0.010   | 0.002    | 0.007       |
| 102 | 0.002   | 0.000    | 0.000       |

| x  | $D_x$   | $N_x$     | $\bar{N}_x$ |
|----|---------|-----------|-------------|
| 15 | 55.526  | 1.028.885 | 1.056.648   |
| 16 | 52.900  | 975.985   | 1.002.435   |
| 17 | 50.464  | 925.521   | 950.753     |
| 18 | 48.182  | 877.339   | 901.430     |
| 19 | 46.018  | 831.321   | 854.230     |
| 20 | 43.954  | 787.357   | 809.344     |
| 21 | 41.979  | 745.388   | 766.378     |
| 22 | 40.078  | 705.310   | 725.349     |
| 23 | 38.255  | 667.055   | 686.183     |
| 24 | 36.506  | 630.549   | 648.802     |
| 25 | 34.837  | 595.712   | 613.131     |
| 26 | 33.235  | 562.477   | 579.095     |
| 27 | 31.693  | 530.784   | 546.631     |
| 28 | 30.222  | 500.562   | 515.673     |
| 29 | 28.818  | 471.744   | 486.153     |
| 30 | 27.477  | 444.267   | 458.006     |
| 31 | 26.197  | 418.070   | 431.169     |
| 32 | 24.973  | 393.097   | 405.584     |
| 33 | 23.799  | 369.298   | 381.198     |
| 34 | 22.676  | 346.622   | 357.960     |
| 35 | 21.601  | 325.021   | 335.822     |
| 36 | 20.569  | 304.452   | 314.737     |
| 37 | 19.580  | 284.872   | 294.662     |
| 38 | 18.629  | 266.243   | 275.558     |
| 39 | 17.717  | 248.526   | 257.385     |
| 40 | 16.840  | 231.686   | 240.106     |
| 41 | 15.995  | 215.691   | 223.689     |
| 42 | 15.183  | 200.508   | 208.100     |
| 43 | 14.402  | 186.106   | 193.307     |
| 44 | 13.648  | 172.458   | 179.282     |
| 45 | 12.922  | 159.536   | 165.997     |
| 46 | 12.222  | 147.314   | 153.425     |
| 47 | 11.547  | 135.767   | 141.541     |
| 48 | 10.892  | 124.875   | 130.321     |
| 49 | 10.265  | 114.610   | 119.743     |
| 50 | 9.659.4 | 104.930.3 | 119.780.0   |
| 51 | 9.075.9 | 95.874.4  | 100.412.4   |
| 51 | 8.510.3 | 87.364.1  | 91.619.3    |
| 53 | 7.967.0 | 79.397.1  | 83.380.6    |
| 54 | 7.442.7 | 71.954.4  | 75.675.8    |
| 55 | 6.938.3 | 65.016.1  | 68.485.3    |
| 56 | 6.451.1 | 58.565.0  | 61.790.6    |
| 57 | 5.984.1 | 52.580.9  | 55.573.0    |
| 58 | 5.534.9 | 47.046.0  | 49.813.5    |
| 59 | 5.104.7 | 41.941.3  | 44.493.7    |

7.46.0

igualmente durante todo el año, y, por lo tanto, los invalidados durante el año expuestos a riesgo de muerte como válidos por medio año en promedio, y como inválidos por el medio año restante.

Simbolizamos por  $q_z^{i(x)}$  la probabilidad que tiene un individuo invalidado en el año  $x$ , de morir durante el año  $z$  de edad.

A estas probabilidades corresponden las probabilidades de supervivencia,

$$p_x^{aa}, p_x^{ii}, p_z^{i(x)}, \text{ respectivamente.}$$

Observemos que, como se comprobará más adelante

$$p_x^{aa} \neq p_x^{ii} \neq p_x$$

$$\text{y } p_z^{i(x)} \neq p_z^{i(x+1)} \neq p_z^{i(x+2)}, \text{ etc.}$$

### 3. -- LA PROBABILIDAD DE MUERTE

Las tablas comunes de supervivencia comprenden a la vez los individuos válidos e inválidos de la población considerada, y la mortalidad que ellas arrojan es un promedio de la mortalidad general de válidos e inválidos.

Pero debemos observar que al producirse la invalidez de un individuo, ocurre en virtud de una lesión que afecta fuertemente su vitalidad, y, por lo tanto, modifica fundamentalmente su probabilidad de supervivencia.

Las tablas de Klein, de extinción de las pensiones por edades a la entrada, que damos más adelante, arrojan, para los individuos de 30, 50 y 70 años, por ejemplo, las siguientes probabilidades de extinción de las pensiones (un 5 por ciento de las extinciones corresponden a reactividades, es decir, reingreso del individuo en el grupo de los válidos) (1):

(1) AUGUSTO BUNGE. Op. cit. p. 642. — De esta obra tomamos gran parte de los datos empleados en este capítulo, por lo cual excusamos repetir la cita.

$$\begin{aligned}
 q_{30} &= 0.0067 & q_{30}^{i(20)} &= 0.0325 & q_{30}^{i(25)} &= 0.0619 & q_{30}^{i(30)} &= 0.3990 \\
 q_{50} &= 0.0156 & q_{50}^{i(40)} &= 0.0412 & q_{50}^{i(45)} &= 0.0568 & q_{50}^{i(50)} &= 0.2215 \\
 q_{70} &= 0.0703 & q_{70}^{i(60)} &= 0.0867 & q_{70}^{i(65)} &= 0.0867 & q_{70}^{i(70)} &= 0.1138
 \end{aligned}$$

La primera cantidad de cada línea ( $q_x$ ), que representa la mortalidad general de la población, corresponde a la estadística general del Imperio Alemán (1910).

Como se ve, la mortalidad de los recién invalidados difiere de la mortalidad general en una proporción mucho mayor en las edades tempranas que en las avanzadas; y a medida que se aleja la fecha de la invalidez, la mortalidad desciende, hasta igualarse a la mortalidad general en un período variable.

El primer hecho se debe a las causas de la invalidez; en las edades tempranas la causa más frecuente de invalidez es la tuberculosis, mientras que en los últimos años predominan la debilidad, anemia y marasmo senil; en general, a los primeros años la invalidez se debe a una grave lesión orgánica, mientras que en los últimos es una anticipación de la invalidez senil.

Transcribimos, como comprobación, algunos datos de la estadística del seguro alemán. Sobre 1,000 invalidados en cada grupo de edad, se deben a tuberculosis (A) y a debilidad, anemia, marasmo senil (B), el siguiente número de inválidos:

| GRUPOS<br>DE<br>EDAD | GRUPOS PROFESIONALES |     |     |     |     |     |
|----------------------|----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
|                      | (1)                  |     | (2) |     | (3) |     |
|                      | (A)                  | (B) | (A) | (B) | (A) | (B) |
| 20-24                | 412                  | 47  | 671 | 39  | 611 | 40  |
| 30-34                | 303                  | 63  | 535 | 62  | 446 | 52  |
| 40-44                | 197                  | 103 | 369 | 113 | 292 | 80  |
| 50-54                | 105                  | 171 | 174 | 209 | 131 | 162 |
| 60-64                | 35                   | 195 | 58  | 224 | 42  | 187 |

- (1) Agricultura, ganadería, bosques y pesca.
- (2) Industria y minería y construcciones.
- (3) Comercio y transportes.

| x  | $\bar{D}_x^{aa}$ | $\bar{N}_x^{aa}$ | $\bar{N}_x^{aa}$ | $I_x$     |
|----|------------------|------------------|------------------|-----------|
| 20 | 33.298           | 549.675          | 567.824          | 12.494.77 |
| 21 | 34.332           | 515.343          | 532.509          | 12.492.19 |
| 22 | 32.462           | 482.881          | 499.112          | 12.486.40 |
| 23 | 30.687           | 452.194          | 467.538          | 12.477.23 |
| 24 | 29.001           | 423.193          | 437.694          | 12.465.32 |
| 25 | 27.409           | 395.784          | 409.489          | 12.450.64 |
| 26 | 25.896           | 369.888          | 382.836          | 12.433.20 |
| 27 | 24.454           | 345.434          | 357.661          | 12.412.75 |
| 28 | 23.093           | 322.341          | 333.888          | 12.389.09 |
| 29 | 21.806           | 300.535          | 311.438          | 12.362.20 |
| 30 | 20.588           | 279.947          | 290.241          | 12.331.62 |
| 31 | 19.435           | 260.512          | 270.230          | 12.296.28 |
| 32 | 18.343           | 242.169          | 251.341          | 12.256.17 |
| 33 | 17.306           | 224.863          | 233.516          | 12.210.70 |
| 34 | 16.322           | 208.541          | 216.702          | 12.158.23 |
| 35 | 15.389           | 193.152          | 200.847          | 12.098.04 |
| 36 | 14.502           | 178.650          | 185.901          | 12.029.31 |
| 37 | 13.658           | 164.992          | 171.821          | 11.948.85 |
| 38 | 12.856           | 152.136          | 158.564          | 11.859.87 |
| 39 | 12.095           | 140.011          | 146.089          | 11.761.14 |
| 40 | 11.370           | 128.671          | 134.356          | 11.652.34 |
| 41 | 10.681           | 117.990          | 123.331          | 11.533.68 |
| 42 | 10.027           | 107.963.3        | 112.977.3        | 11.406.48 |
| 43 | 9.403.9          | 98.559.4         | 103.261.4        | 11.271.13 |
| 44 | 8.810.6          | 89.748.8         | 94.154.1         | 11.125.34 |
| 45 | 8.241.8          | 81.504.0         | 85.626.4         | 10.973.60 |
| 46 | 7.704.8          | 73.799.2         | 77.651.6         | 10.812.80 |
| 47 | 7.185.7          | 66.613.5         | 70.206.4         | 10.640.41 |
| 48 | 6.687.5          | 59.926.0         | 63.269.8         | 10.454.07 |
| 49 | 6.212.2          | 53.713.8         | 56.819.9         | 10.252.11 |
| 50 | 5.759.3          | 47.954.5         | 50.834.2         | 10.033.32 |
| 51 | 5.325.4          | 42.629.1         | 45.291.8         | 9.787.46  |
| 52 | 4.911.1          | 37.718.0         | 40.123.6         | 9.532.84  |
| 53 | 4.518.0          | 33.200.0         | 35.459.0         | 9.261.21  |
| 54 | 4.143.5          | 29.056.5         | 31.128.3         | 8.970.50  |
| 55 | 3.788.1          | 25.268.4         | 27.163.5         | 8.666.89  |
| 56 | 3.451.4          | 21.817.0         | 23.512.7         | 8.348.46  |
| 57 | 3.133.2          | 18.683.8         | 20.250.4         | 8.018.97  |
| 58 | 2.829.3          | 15.854.5         | 17.269.2         | 7.677.16  |
| 59 | 2.540.7          | 13.313.8         | 14.584.2         | 7.321.97  |
| 60 | 2.263.2          | 11.050.6         | 12.182.2         | 6.950.86  |
| 61 | 1.996.6          | 9.054.0          | 10.052.3         | 6.559.36  |
| 62 | 1.724.9          | 7.329.1          | 8.191.6          | 6.142.79  |
| 63 | 1.498.1          | 5.831.0          | 6.580.1          | 5.699.47  |
| 64 | 1.272.2          | 4.557.8          | 5.194.9          | 5.226.22  |

| $x$ | $\overline{D}_x^{aa}$ | $\overline{N}_x^{aa}$ | $\overline{N}_x^{aa}$ | $I_x$    |
|-----|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------|
| 65  | 1,065.2               | 3,493.64              | 4,026.24              | 4,735.25 |
| 66  | 878.72                | 2,614.92              | 3,054.28              | 4,228.16 |
| 67  | 714.97                | 1,899.95              | 2,257.44              | 3,713.19 |
| 68  | 570.92                | 1,329.03              | 1,614.49              | 3,198.14 |
| 69  | 442.70                | 886.33                | 1,107.68              | 2,688.68 |
| 70  | 336.16                | 550.17                | 718.25                | 2,190.59 |
| 71  | 243.96                | 306.21                | 428.19                | 1,709.40 |
| 72  | 167.51                | 138.70                | 222.46                | 1,249.24 |
| 73  | 99.74                 | 38.96                 | 88.83                 | 811.36   |
| 74  | 38.96                 | —                     | 19.48                 | 393.08   |

## APÉNDICES







## APÉNDICE II

## I. — Morbilidad, mortalidad y morbilidad absoluta de diversas tablas

| Grupos de edad                 | ANSELL<br>1823-27 | NEISON<br>1836-40 | FINLAISON<br>1846-50 | A. O. F.<br>1871-75 | SUTTON<br>1876-83 |
|--------------------------------|-------------------|-------------------|----------------------|---------------------|-------------------|
| <i>a) MORBOSIDAD.</i>          |                   |                   |                      |                     |                   |
|                                |                   |                   |                      |                     | $m_x$             |
| 20 — 24                        | 5.495             | 5.999             | 6.895                | 5.733               | 5.93              |
| 25 — 29                        | 5.775             | 6.230             | 6.895                | 5.971               | 6.09              |
| 30 — 34                        | 6.251             | 6.419             | 6.597                | 6.776               | 7.14              |
| 35 — 39                        | 7.063             | 7.252             | 7.637                | 8.050               | 8.68              |
| 40 — 44                        | 8.365             | 8.911             | 8.589                | 9.611               | 11.69             |
| 45 — 49                        | 10.325            | 11.438            | 10.059               | 11.949              | 12.93             |
| 50 — 54                        | 13.230            | 15.267            | 12.124               | 15.855              | 16.73             |
| 55 — 59                        | 18.102            | 21.336            | 15.239               | 22.470              | 23.52             |
| 60 — 64                        | 27.937            | 33.215            | 21.826               | 32.158              | 36.05             |
| 65 — 69                        | 52.297            | 70.084            | 32.354               | 55.797              | 45.11             |
| 70 — 74                        |                   | 115.703           | 53.676               | 83.993              | 101.22            |
| 75 — 79                        |                   | 175.448           | 77.492               | 123.634             | 141.89            |
| <i>b) MORTALIDAD.</i>          |                   |                   |                      |                     |                   |
|                                |                   |                   |                      |                     | $q_x$             |
| 20 — 24                        | .00679            | .00667            | .00748               | .00743              | .0057             |
| 25 — 29                        | .00989            | .00726            | .00729               | .00729              | .0062             |
| 30 — 34                        | .01143            | .00774            | .00796               | .00886              | .0078             |
| 35 — 39                        | .01788            | .00875            | .00893               | .01092              | .0098             |
| 40 — 44                        | .01663            | .00992            | .01100               | .01284              | .0116             |
| 45 — 49                        | .02014            | .01201            | .01306               | .01658              | .0148             |
| 50 — 54                        | .02290            | .01567            | .01636               | .02045              | .0190             |
| 55 — 59                        | .03635            | .02120            | .02360               | .02973              | .0278             |
| 60 — 64                        | .04433            | .02772            | .02855               | .03802              | .0391             |
| 65 — 69                        | .05501            | .03968            | .04391               | .05843              | .0571             |
| 70 — 74                        |                   | .06732            | .06203               | .08003              | .0807             |
| 75 — 79                        |                   | .08146            | .09209               | .14259              | .1215             |
| <i>c) MORBOSIDAD ABSOLUTA.</i> |                   |                   |                      |                     |                   |
|                                |                   |                   |                      |                     | $(ma)_x$          |
| 20 — 24                        | 5.514             | 6.019             | 6.921                | 5.755               | 5.947             |
| 25 — 29                        | 5.804             | 6.253             | 6.920                | 5.993               | 6.109             |
| 30 — 34                        | 6.287             | 6.444             | 6.623                | 6.806               | 7.168             |
| 35 — 39                        | 7.127             | 7.284             | 7.672                | 8.094               | 8.723             |
| 40 — 44                        | 8.433             | 8.955             | 8.637                | 9.673               | 11.759            |
| 45 — 49                        | 10.430            | 11.517            | 10.125               | 12.049              | 13.026            |
| 50 — 54                        | 13.383            | 15.388            | 12.224               | 16.019              | 16.890            |
| 55 — 59                        | 18.457            | 21.565            | 15.411               | 22.809              | 23.851            |
| 60 — 64                        | 28.570            | 33.682            | 22.142               | 32.781              | 36.767            |
| 65 — 69                        | 53.777            | 71.503            | 33.080               | 57.476              | 46.435            |
| 70 — 74                        |                   | 119.733           | 55.394               | 87.494              | 105.262           |
| 75 — 79                        |                   | 182.897           | 81.232               | 133.124             | 151.058           |

# I. — Morbosidad, mortalidad y morbosidad absoluta de diversas tablas

(continuación)

| Grupos de edad                 | MANCHESTER UNITY |         |         |          |
|--------------------------------|------------------|---------|---------|----------|
|                                | 1846-48          | 1856-60 | 1866-70 | 1893-97  |
| <b>a) MORBOSIDAD.</b>          |                  |         |         |          |
|                                |                  |         |         | $m_x$    |
| 20 — 24                        | 4.736            | 5.803   | 5.278   | 6.289    |
| 25 — 29                        | 5.306            | 5.740   | 5.642   | 6.635    |
| 30 — 34                        | 5.859            | 6.006   | 6.496   | 7.400    |
| 35 — 39                        | 6.412            | 7.028   | 7.434   | 8.859    |
| 40 — 44                        | 8.155            | 8.673   | 8.827   | 11.008   |
| 45 — 49                        | 9.793            | 10.815  | 11.452  | 13.849   |
| 50 — 54                        | 13.027           | 14.077  | 15.554  | 19.088   |
| 55 — 59                        | 20.069           | 21.175  | 21.329  | 27.818   |
| 60 — 64                        | 28.798           | 32.466  | 33.005  | 43.384   |
| 65 — 69                        | 40.047           | 50.155  | 50.659  | 72.128   |
| 70 — 74                        | 49.294           | 84.392  | 84.434  | 116.879  |
| 75 — 79                        |                  | 116.459 | 118.311 | 165.452  |
| <b>b) MORTALIDAD.</b>          |                  |         |         |          |
|                                |                  |         |         | $q_x$    |
| 20 — 24                        | .00740           | .00758  | .00643  | .0037    |
| 25 — 29                        | .00790           | .00748  | .00762  | .0046    |
| 30 — 34                        | .00870           | .00834  | .00818  | .0055    |
| 35 — 39                        | .00916           | .00991  | .00977  | .0070    |
| 40 — 44                        | .01165           | .01178  | .01258  | .0095    |
| 45 — 49                        | .01399           | .01421  | .01429  | .0117    |
| 50 — 54                        | .01861           | .01795  | .01905  | .0169    |
| 55 — 59                        | .02867           | .02609  | .02492  | .0243    |
| 60 — 64                        | .04114           | .03566  | .03537  | .0356    |
| 65 — 69                        | .05721           | .05499  | .05209  | .0541    |
| 70 — 74                        | .07012           | .06825  | .07811  | .0809    |
| 75 — 79                        |                  | .11538  | .09950  | .1204    |
| <b>c) MORBOSIDAD ABSOLUTA.</b> |                  |         |         |          |
|                                |                  |         |         | $(ma)_x$ |
| 20 — 24                        | 4.754            | 5.826   | 5.294   | 6.30     |
| 25 — 29                        | 5.327            | 5.762   | 5.661   | 6.65     |
| 30 — 34                        | 5.885            | 6.031   | 6.523   | 7.42     |
| 35 — 39                        | 6.442            | 7.063   | 7.470   | 8.89     |
| 40 — 44                        | 8.203            | 8.724   | 8.882   | 11.06    |
| 45 — 49                        | 9.862            | 10.892  | 11.534  | 13.93    |
| 50 — 54                        | 13.149           | 14.204  | 15.703  | 19.25    |
| 55 — 59                        | 20.361           | 21.465  | 21.598  | 28.14    |
| 60 — 64                        | 29.403           | 33.055  | 33.599  | 44.17    |
| 65 — 69                        | 41.226           | 51.573  | 52.013  | 74.13    |
| 70 — 74                        | 51.097           | 87.373  | 87.865  | 121.80   |
| 75 — 79                        |                  | 123.588 | 125.558 | 176.05   |

## II. — CIFRAS COMPARATIVAS

| Grupos de edad                 | ANSELL<br>1823-27 | NEISON<br>1836-40 | FINLAISSON<br>1846-50 | A. O. F.<br>1871-75 | SUTTON<br>1876-80 |
|--------------------------------|-------------------|-------------------|-----------------------|---------------------|-------------------|
| <i>a) MORBOSIDAD.</i>          |                   |                   |                       |                     | $m_x$             |
| 20 — 24                        | 0.88              | 0.96              | 1.01                  | 0.91                | 0.95              |
| 25 — 29                        | 0.87              | 0.94              | 1.04                  | 0.89                | 0.92              |
| 30 — 34                        | 0.85              | 0.87              | 0.89                  | 0.92                | 0.97              |
| 35 — 39                        | 0.80              | 0.82              | 0.86                  | 0.91                | 0.98              |
| 40 — 44                        | 0.76              | 0.81              | 0.78                  | 0.86                | 1.06              |
| 45 — 49                        | 0.75              | 0.83              | 0.78                  | 0.86                | 0.93              |
| 50 — 54                        | 0.69              | 0.80              | 0.64                  | 0.83                | 0.88              |
| 55 — 59                        | 0.65              | 0.77              | 0.55                  | 0.81                | 0.85              |
| 60 — 64                        | 0.65              | 0.77              | 0.51                  | 0.74                | 0.83              |
| 65 — 69                        | 0.73              | 0.99              | 0.45                  | 0.77                | 0.63              |
| 70 — 74                        |                   | 0.99              | 0.46                  | 0.72                | 0.86              |
| 75 — 79                        |                   | 1.06              | 0.47                  | 0.75                | 0.86              |
| <i>b) MORTALIDAD.</i>          |                   |                   |                       |                     | $q_x$             |
| 20 — 24                        | 1.83              | 1.81              | 2.02                  | 2.01                | 1.54              |
| 25 — 29                        | 2.15              | 1.58              | 1.58                  | 1.58                | 1.35              |
| 30 — 34                        | 2.08              | 1.41              | 1.45                  | 1.61                | 1.42              |
| 35 — 39                        | 2.55              | 1.25              | 1.27                  | 1.55                | 1.40              |
| 40 — 44                        | 1.75              | 1.04              | 1.16                  | 1.35                | 1.22              |
| 45 — 49                        | 1.72              | 1.03              | 1.12                  | 1.42                | 1.26              |
| 50 — 54                        | 1.36              | 0.93              | 0.96                  | 1.21                | 1.15              |
| 55 — 59                        | 1.50              | 0.88              | 0.98                  | 1.23                | 1.15              |
| 60 — 64                        | 1.25              | 0.78              | 0.80                  | 1.07                | 1.10              |
| 65 — 69                        | 1.02              | 0.73              | 0.81                  | 1.08                | 1.05              |
| 70 — 74                        |                   | 0.83              | 0.77                  | 0.99                | 1.00              |
| 75 — 79                        |                   | 0.68              | 0.76                  | 1.18                | 1.01              |
| <i>c) MORBOSIDAD ABSOLUTA.</i> |                   |                   |                       |                     | $(ma)_x$          |
| 20 — 24                        | 0.88              | 0.96              | 1.01                  | 0.91                | 0.94              |
| 25 — 29                        | 0.87              | 0.94              | 1.04                  | 0.90                | 0.92              |
| 30 — 34                        | 0.85              | 0.87              | 0.89                  | 0.92                | 0.96              |
| 35 — 39                        | 0.80              | 0.82              | 0.86                  | 0.91                | 0.98              |
| 40 — 44                        | 0.76              | 0.81              | 0.78                  | 0.87                | 1.06              |
| 45 — 49                        | 0.75              | 0.83              | 0.73                  | 0.87                | 0.94              |
| 50 — 54                        | 0.69              | 0.80              | 0.63                  | 0.83                | 0.88              |
| 55 — 59                        | 0.65              | 0.77              | 0.55                  | 0.81                | 0.85              |
| 60 — 64                        | 0.65              | 0.76              | 0.50                  | 0.74                | 0.83              |
| 65 — 69                        | 0.73              | 0.96              | 0.45                  | 0.79                | 0.63              |
| 70 — 74                        |                   | 0.98              | 0.45                  | 0.72                | 0.86              |
| 75 — 79                        |                   | 1.04              | 0.46                  | 0.75                | 0.86              |

## II. — CIFRAS COMPARATIVAS

(continuación)

| Grupos de edad                 | MANCHESTER UNITY |         |         |          |
|--------------------------------|------------------|---------|---------|----------|
|                                | 1846-48          | 1855-60 | 1866-70 | 1893-97  |
| <i>a) MORBOSIDAD.</i>          |                  |         |         | $m_x$    |
| 20 — 24                        | 0.76             | 0.93    | 0.81    | 1.00     |
| 25 — 29                        | 0.80             | 0.87    | 0.85    | 1.00     |
| 30 — 34                        | 0.79             | 0.81    | 0.88    | 1.00     |
| 35 — 39                        | 0.73             | 0.80    | 0.81    | 1.00     |
| 40 — 44                        | 0.74             | 0.78    | 0.80    | 1.00     |
| 45 — 49                        | 0.71             | 0.78    | 0.83    | 1.00     |
| 50 — 54                        | 0.68             | 0.74    | 0.82    | 1.00     |
| 55 — 59                        | 0.72             | 0.76    | 0.77    | 1.00     |
| 60 — 64                        | 0.66             | 0.75    | 0.76    | 1.00     |
| 65 — 69                        | 0.56             | 0.70    | 0.70    | 1.00     |
| 70 — 74                        | 0.42             | 0.72    | 0.72    | 1.00     |
| 75 — 79                        |                  | 0.71    | 0.72    | 1.00     |
| <i>b) MORTALIDAD.</i>          |                  |         |         | $q_x$    |
| 20 — 24                        | 2.00             | 2.05    | 1.74    | 1.00     |
| 25 — 29                        | 1.72             | 1.62    | 1.66    | 1.00     |
| 30 — 34                        | 1.58             | 1.52    | 1.49    | 1.00     |
| 35 — 39                        | 1.31             | 1.42    | 1.39    | 1.00     |
| 40 — 44                        | 1.22             | 1.24    | 1.32    | 1.00     |
| 45 — 49                        | 1.20             | 1.21    | 1.22    | 1.00     |
| 50 — 54                        | 1.10             | 1.06    | 1.13    | 1.00     |
| 55 — 59                        | 1.18             | 1.08    | 1.03    | 1.00     |
| 60 — 64                        | 1.16             | 1.00    | 0.99    | 1.00     |
| 65 — 69                        | 1.06             | 1.02    | 0.96    | 1.00     |
| 70 — 74                        | 0.87             | 0.84    | 0.96    | 1.00     |
| 75 — 79                        |                  | 0.95    | 0.83    | 1.00     |
| <i>c) MORBOSIDAD ABSOLUTA.</i> |                  |         |         | $(ma)_x$ |
| 20 — 24                        | 0.76             | 0.92    | 0.81    | 1.00     |
| 25 — 29                        | 0.80             | 0.87    | 0.85    | 1.00     |
| 30 — 34                        | 0.79             | 0.81    | 0.88    | 1.00     |
| 35 — 39                        | 0.73             | 0.79    | 0.84    | 1.00     |
| 40 — 44                        | 0.74             | 0.79    | 0.80    | 1.00     |
| 45 — 49                        | 0.71             | 0.78    | 0.83    | 1.00     |
| 50 — 54                        | 0.68             | 0.74    | 0.82    | 1.00     |
| 55 — 59                        | 0.72             | 0.76    | 0.77    | 1.00     |
| 60 — 64                        | 0.67             | 0.75    | 0.76    | 1.00     |
| 65 — 69                        | 0.55             | 0.69    | 0.70    | 1.00     |
| 70 — 74                        | 0.42             | 0.72    | 0.72    | 1.00     |
| 75 — 79                        |                  | 0.70    | 0.71    | 1.00     |

## APÉNDICE III

---

### Método de valuación "por edades pasadas" de Hardy

Expuesto por A. W. WATSON, (Friendly Society Finance, págs. 68 a 70).

Sea  $n_x$  el número de individuos asegurados, de edad  $x$ .

El valor de las anualidades a percibirse por primas es:

$$\begin{aligned}
 & n_x (1 + a_x) + n_{x+1} (1 + a_{x+1}) + n_{x+2} (1 + a_{x+2}) + \dots = \\
 & n_x \left( \frac{D_x}{D_x} + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \dots \right) + \\
 & \quad + n_{x+1} \left( \frac{D_{x+1}}{D_{x+1}} + \frac{D_{x+2}}{D_{x+1}} + \dots \right) + \\
 & \quad \quad + n_{x+2} \left( \frac{D_{x+2}}{D_{x+2}} + \dots \right) + \\
 & \quad \quad \quad + \dots = \\
 & = \frac{n_x}{D_x} D_x + \left( \frac{n_x}{D_x} + \frac{n_{x+1}}{D_{x+1}} \right) D_{x+1} + \\
 & \quad + \left( \frac{n_x}{D_x} + \frac{n_{x+1}}{D_{x+1}} + \frac{n_{x+2}}{D_{x+2}} \right) D_{x+2} + \dots
 \end{aligned}$$

Se hace la suma continua de la columna  $\frac{n_x}{D_x}$  y luego se calcula

$$\left( \sum_{x+k}^x \frac{n_x}{D_x} \right) \cdot D_{x+k} \quad (1)$$

valor total de las anualidades unitarias pagaderas al

empezar el año  $x + k$  de edad, por todas las personas que tienen hoy entre  $x$  y  $x + k$  años.

Para hallar el valor de las indemnizaciones de enfermedad, correspondientes, se introduce la tasa de enfermedad como factor en la fórmula (1), es decir:

$$\left( \sum_{x+k}^x \frac{D_x}{D_x} \right) \cdot D_{x+k} \cdot s_{x+k} \quad (2)$$

y para la indemnización en caso de muerte

$$\left( \sum_{x+k}^x \frac{n_x}{D_x} \right) \cdot D_{x+k} \cdot q_{x+k} \quad (3)$$

El pasivo neto del seguro enfermedad o indemnización de muerte, es, por lo tanto, supuesta una indemnización diaria unitaria en caso de enfermedad, un capital asegurado en caso de muerte igual a  $C$ , y la prima total para ambos seguros  $P$ ,

$$\left( \sum_{x+k}^x \frac{n_x}{D_x} \right) \cdot D_{x+k} (m_{x+k} + Cq_{x+k} - P)$$

Si la tasa de enfermedad se refiere a los individuos vivientes al iniciarse el año ( $m_x$ ) y la prima se abona en forma continua ( $\bar{P}_x$ ), la expresión anterior se modifica en la siguiente forma:

$$\left( \sum_{x+k}^x \frac{n_x}{D_x} \right) \cdot D_{x+k} \left\{ m_{x+k} + Cq_{x+k} - \right. \\ \left. - P \left( 1 - \frac{1}{2}q_{x+k} \right) \right\} \left( 1 - \frac{1}{2}i \right)$$

Si los beneficios o las primas no son iguales para todos los socios, debe hacerse la correspondiente corrección en  $n_x$ .

Si se emplea la tasa central (absoluta) de enfermedad, conviene emplear en las expresiones anteriores, valores centrales de comutación,

$$(1) \text{ se convierte en } \left( \sum_{x+k}^x \frac{n_x}{D_x} \right) \cdot D_{x+k} + \frac{1}{2} \quad (6)$$

$$(2) \text{ » » » } \left( \sum_{x+k}^x \frac{n_x}{D_x} \right) \cdot D_{x+k} + \frac{1}{2} \cdot m_{x+k} + \frac{1}{2} \quad (7)$$

(3) se convierte en  $\left( \sum_{x+k}^x \frac{n_x}{D_x} \right) \cdot D_{x+k+\frac{1}{2}} \cdot P_{x+k+\frac{1}{2}}$  (8)

La gran utilidad práctica de este plan consiste en la facilidad que ofrece para alterar los valores de la tasa de morbosidad, por edades o grupos de edades determinados.

Puede, por ejemplo, resultar conveniente el empleo de una tabla cualquiera de morbosidad, pero ajustando los valores, por adición o substracción de determinados porcentajes en cada grupo quinquenal o decenal de edad.

La operación puede practicarse con gran economía de tiempo empleando el siguiente formulario:

|   |       |            |                      |              |                     |           |          |           |                                 |  |
|---|-------|------------|----------------------|--------------|---------------------|-----------|----------|-----------|---------------------------------|--|
| x | $n_x$ | $D_x^{-1}$ | $n_x \cdot D_x^{-1}$ | $\Sigma$ (3) | $D_{x+\frac{1}{2}}$ | (4) X (5) | $(ma)_x$ | (6) X (7) | Factor de variación de $(ma)_x$ | (8) x (9)<br>Valor final de las indemn. de enfermedad. |
|   | (1)   | (2)        | (3)                  | (4)          | (5)                 | (6)       | (7)      | (8)       | (9)                             | (10)   |

La columna (4) es la suma continua de la columna (3), desde la edad más baja hasta (x).

## FÉ DE ERRATAS

| Página | Línea                    | En vez de  | Léase  |
|--------|--------------------------|--|--|
| 52     | 13                       | 0.00003  | 0.00033  |
| 55     | últ.                     | _____ nula _____                                       |  |
| 57     | últ.                     | $\frac{1}{v^x} \cdot K^{\overline{ai}}$                | $\frac{1}{v_x} \cdot K_x^{\overline{ai}}$              |
| 60     | 1                        | ${}_{y-x} \overline{a}_x = \frac{\overline{N}_x}{D_x}$ | ${}_{y-x} \overline{a}_x = \frac{\overline{N}_y}{D_x}$ |
| IX     | $l_{54}^{\overline{ai}}$ | 848  | 840  |
| XV     | $N_{38}$                 | 47.016.0   | 47.046.0   |

Mathematical analysis