Construcción de tablas que dependen de dos o más causas de crecimiento

Harriague, Benjamín

1930

PADRINO DE TESIS

Señor José Gonzalez Galé

-0-0-0-0-

A MIS

PADRES

A MIS

PROFESORES

CONSTRUCCION DE TABLAS QUE DEPENDEN DE DOS O MAS CAUSAS DE DECRECIMIENTO

---:0:---

Por medio de este trabajo me he propuesto encarar el problema de la construcción de una tabla de doble frecuencia y con este motivo aplicar como método de ajustamiento algunos de los procedimientos vistos en el curso de Biometría dictado por el señor Profesor José Gonzalez Galé y que conjuntamente con el de Cálculo Actuarial a cargo del Dr.Argentino V. Acerboni constituyeron las dos materias que complementaron el primer cursó de la carrera actuarial del cual, cúpome el honor de formar parte.

La evolución social actual ha llegado a fijar el principio de que el personal de una institución cualquiera debe ir constituyendo el capital necesario para poder acojerse a los diversos beneficios que ella otorga y bajo el punto de vista matemático, los costos de éstos deben ser calculados en forma tal que en ningún momento el capital y reservas constituídos para ello pueda llegar a ser insuficiente y colocar a la Institución en situación de quebranto.

Esta clase de problema es al que están abocados puede decirse todas las cajas de pensiones,protectoras o de jubilaciones privadas o del estado existentes en nuestro pais,pués la mayoría de ellas han sido constituídas sin ninguna base seria de cálculo y claro está, con el correr de los años y ante el fantasma del agotamiento del capital y reservas absorbidas por los beneficios acordados sin relación a los ingresos, se preguntan ?Cuál es la solución que evite el déficit y estabilice la caja?.

Aquí aparece entonces la necesidad de hacer el estudio actuarial de la institución o caja.- Para ello, es indispensable la construcción prévia de una tabla de vida y servicios del personal la que nos colocará en situación de poder calcular primero las distintas tasas y luego de un proceso de ajustamiento, los valores de conmutaciones que servirán para el cálculo del costo matemático de los distintos beneficios que la institución concede o se propone conceder.

En esta tesis he encarado el primer aspecto del problema, vale decir, el cálculo de las distintas tasas y su ajustamiento, concretándose únicamente a la mortalidad y secesión.

Tabla de Vida y Servicios:- Para la construcción de esta tabla, que como dije, es el primer paso para luego pasar a la determinación de las distintas tasas y poder así calcular el costo de los beneficios que una institución otorga a su personal, es indispensable fijar una época inicial y otra final de observación e indudablemente cuando más distante sea una época de la otra, tanto mayor será la experiencia y tanto más exactas y duraderas las conclusiones a que pueda llegarse.

Fijado el período de observación y teniendo presente las distintas causas de crecimiento o decrecimiento de la institución que tomé como base para este trabajo, procedí a la clasificación de los datos obtenidos en la siguiente forma:

1º- Personal existente en el momento inicial de la observación - b_x

2º- Nuevos entrados durante el período de observación. n_x

3º- Jubilados durante el período de observación - r_x

4º- Cesantes, exonerados y renunciantes durante el período de observación - W_x

5º- Fallecidos durante el período de observación - d_x

6º- Existentes al final del período de observación - e_x

Esta clasificación ha sido hecha por fichas cuyos modelos estan agregados al final de este trabajo las que por medio de las máquinas tabuladoras "Hollerith" que permitieron obtener las distintas clasificaciones indicadas anteriormente agrupados por año de nacimiento y porconsiguiente por edad, para cuya determinación procedí a tomar como base, la edad entera más próxima. En esta forma, obtuve la tabla de Vida y Servicios que se indica a continuación cuya columna E_x (expuestos a riesgo) la obtuve, mediante la expresión:

$$E_x = E_{x-1} + b_x + n_x - (W_x + r_x + d_{x-1} + e_x)$$

TABLA DE VIDA Y SERVICIO

x	b_x	n_x	w_x	d_x	r_x	e_x	E_x
14	1						1
15	3						4
16		1					5
17							5
18	7	95	2			4	101
19	47	260	21			64	323
20	129	233	52	2		128	525
21	171	196	49	1		196	645
22	213	205	51	2		189	842
23	252	162	58	4		225	971
24	256	133	58	4		268	1030
25	287	101	52	3		279	1083
26	258	72	62	4		269	1079
27	256	84	57	1		266	1092
28	220	64	49	8		261	1065
29	194	40	40	4		309	942
30	207	27	42	5		276	854
31	198	21	32	4		240	796
32	203	23	26	4		207	785
33	190	20	16	4		187	783
34	177	14	28	3		191	756
35	168	15	15	8		185	736
36	124	5	12	4		203	642
37	102	2	12	3		175	555
38	100	1	15	5		165	473
39	78	4	12	4		154	584
40	49		12	3		114	303
41	53	3	9	2		88	259
42	45	2	5	4		85	216
43	43	2	2	5		68	187
44	41	3	9	1		44	173
45	42		3	4		48	163
46	33	1	6	5	1	55	151
47	19	2	3		3	41	120
48	21		7	1	7	34	93
49	22	1	1	1	9	38	73
50	32			1	9	16	79
51	27		1	2	9	15	80
52	18	1		1	12	13	72
53	14		3	1	15	12	55
54	14	1	1		7	12	49
55	12	1		1	6	11	45
56	10		3	4	10	9	32
57	6	1			2	5	28
58	5		1		3	7	22
59	1	1	1	1	2	8	13
60	3				3	5	7
61	7			1	1	2	11
62	3				2	2	9
63	3				4	1	7
64						2	3
65	1					4	2

x	b_x	n_x	w_x	d_x	r_x	e_x	E_x
66					1		1
67	1				1	1	0
68	3				1		2
69	1						3
70				1			3
71	1	1		1			4
72	2			1	1	1	5
73				1			2
74							1
75						1	0
76							

<u>Determinación de las distintas tasas</u>:- Respecto a la determinación de las distintas tasas existen dos procedimientos; el uno que podría llamarse analítico por la sutileza que encierra su determinación y el otro, el práctico, que viene a ser el procedimiento aconsejado por G. King [redacted] y Manly.

A este respecto voy a permitirme una pequeña consideración sobre una y otra forma del cálculo de estas tasas.- Según el primer procedimiento se tiene que si para determinar la tasa de mortalidad para una edad cualquiera aplicamos la expresión:

$$q_x^d = \frac{d_x}{E_x}$$

aconsejada y aplicada por los autores ya citados, se comete un error, cual es, el de eliminar de la observación y por consiguiente de la tasa de mortalidad, todas aquellas personas que por cualquier otra causa se han retirado de la institución en el transcurso del año, vale decir, entre las edades (x) y $(x+1)$ años, como ser los jubilados, exonerados, renunciantes, etc. que indudablemente han estado expuestos al riesgo de fallecer durante una parte del mismo.-

No es posible pues incluir ni tampoco eliminar a todas estas personas, en la determinación de la tasa de mortalidad. Como solución se supone entonces que todas las demás causas de decrecimiento se encuentran igualmente distribuidas durante el año y por consiguiente que la mitad de las personas retiradas por causas ajenas a la mortalidad han estado expuestas al riesgo de fallecer, por lo tanto que:

$$q_x^d = \frac{d_x}{l_x - \frac{1}{2}\left(w_x + r_x\right)}$$

Por el mismo razonamiento se llega a que:

$$q_x^w = \frac{w_x}{l_x - \frac{1}{2}\left(d_x + r_x\right)}$$

y

$$q_x^r = \frac{r_x}{l_x - \frac{1}{2}\left(w_x + d_x\right)}$$

en vez de:

$$q_x^w = \frac{w_x}{E_x}$$

y

$$q_x^r = \frac{r_x}{E_x}$$

expresiones que he empleado para el cálculo de las distintas tasas.

El procedimiento analítico presenta todavía un pequeño inconveniente de órden práctico;esto es que prolonga el proceso del cálculo desde el momento que en virtud de la suposición hecha debemos calcular las tasas centrales y para ello determinar para cada edad el número de personas existentes al servicio de la institución en la mitad de cada año, es decir: los L_x

Para ello, se tiene:

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t} \cdot dt$$

o bien:

$$L_x = \int_0^1 \left\{ l_x - t \cdot \left[d_x + w_x + r_x \right] \right\} \cdot dt$$

de donde se obtiene finalmente:

$$L_x = l_x - \frac{1}{2} \left(d_x + w_x + r_x \right)$$

Para determinar las tasas centrales, se tiene entonces:

$$(m\,d_x) = \frac{d_x}{L_x} \quad \therefore \quad d_x = (m d_x) \cdot L_x$$

$$(m\,w_x) = \frac{w_x}{L_x} \quad \therefore \quad w_x = (m w_x) \cdot L_x$$

$$(m\,r_x) = \frac{r_x}{L_x} \quad \therefore \quad r_x = (m r_x) \cdot L_x$$

y de aquí se deducen cada una de las tasas anuales.

Por ejemplo, para la tasa anual de mortalidad, se tiene:

$$q_x^d = \frac{d_x}{l_x - \frac{1}{2}\left(w_x + r_x\right)} = \frac{d_x}{L_x + \frac{1}{2} d_x}$$

ó bien:

$$q_x^d = \frac{(md_x) \cdot L_x}{L_x + \frac{1}{2}(md_x) \cdot L_x} = \frac{(md_x)}{1 + \frac{1}{2}(md_x)}$$

y finalmente:

$$q_x^d = \frac{2\,(md_x)}{2 + (md_x)}$$

siguiendo el mismo razonamiento se encuentra para la tasa de secesión:

$$q_x^w = \frac{2\,(mw_x)}{2 + (mw_x)}$$

y para la tasa de jubilación:

$$q_x^r = \frac{2\cdot(mr_x)}{2 + (mr_x)}$$

El cuadro que a continuación se detalla representa el valor de las tasas de mortalidad y secesión calculados por el procedimiento seguido por Menly y ~~[illegible]~~ G. King; pues, la diferencia que pueda existir entre uno y otro procedimiento no es de una importancia tal como para modificar fundamentalmente los resultados obtenidos.

TASAS DE MORTALIDAD Y SECESION NO AJUSTADAS

x	E_x	W_x	d_x	q_x^w	q_x^d
14	1	-	-	-	-
15	4	-	-	-	-
16	5	-	-	-	-
17	5	-	-	-	-
18	101	2	-	0.020	-
19	325	21	-	0.065	-
20	525	32	2	0.061	0.0038
21	645	49	1	0.076	0.0016
22	842	51	2	0.057	0.0024
23	971	58	4	0.060	0.0041
24	1030	58	4	0.056	0.0039
25	1083	52	3	0.048	0.0028
26	1079	62	4	0.057	0.0037
27	1092	57	1	0.052	0.0009
28	1065	49	8	0.046	0.0008
29	942	40	4	0.042	0.0042
30	854	42	5	0.049	0.0059
31	796	32	4	0.040	0.0050
32	785	26	4	0.033	0.0051
33	788	16	4	0.020	0.0051
34	756	28	3	0.037	0.0040
35	736	15	8	0.020	0.0109
36	642	12	4	0.019	0.0062
37	555	12	3	0.022	0.0054
38	473	15	5	0.032	0.0106
39	384	12	4	0.031	0.0104
40	303	12	3	0.040	0.0099
41	259	9	2	0.035	0.0077
42	216	3	4	0.014	0.0185
43	187	2	5	0.011	0.0267
44	173	9	1	0.052	0.0058
45	163	3	4	0.018	0.0245
46	151	6	5	0.040	0.0331
47	120	3		0.025	-
48	93	7	1	0.075	0.0108
49	73	1	1	0.014	0.0137
50	79	-	1	-	0.0127
51	80	1	2	0.013	0.0250
52	72	-	1	-	0.0139
53	55	3	1	0.055	0.0182
54	49	1		0.020	-
55	45		1	-	0.0222
56	32	3	4	0.094	0.0125
57	28			-	-
58	22	1		0.045	-
59	13	1	1	0.077	0.0769
60	7			-	-
61	11		1	-	0.0909
62	9			-	-
63	7			-	-
64	5			-	-
65	2			-	-
66	1			-	-

TASAS DE MORTALIDAD Y SUCESION NO AJUSTADAS

x	E_x	w_x	d_x	q_x^w	q_x^d
67	0			-	-
68	2			-	-
69	3			-	-
70	3		1	-	0.3333
71	4	1	1	0.250	0.2500
72	3		1		0.3333
73	2		1		0.5
74	1				-
75	0				-
76	-				-

<u>Ajustamiento de la tasa de mortalidad:</u>- Para el ajustamiento de la tasa de mortalidad tomé en consideración una de las fórmulas estudiadas en el curso de Biometría, la fórmula de Karup.- El principio sobre el que está basado ésta, es de que se considera la expresión analítica de la mortalidad de la forma:

$$U_x = U_0 + A.x + B.x^2 + C.x^3$$

valo decir, una función de tercer grado y se quiere tomar una función de segundo grado tal que pueda servirnos para ajustar porciones de la curva representativa de la de tercer grado. Indudablemente la condición para que ello pueda verificarse es que las derivadas en los puntos de unión de una y otra curva, sean iguales.

Si admitimos como expresión analítica de la curva de segundo grado: $U_z = U_0 + a.z + b.z^2$

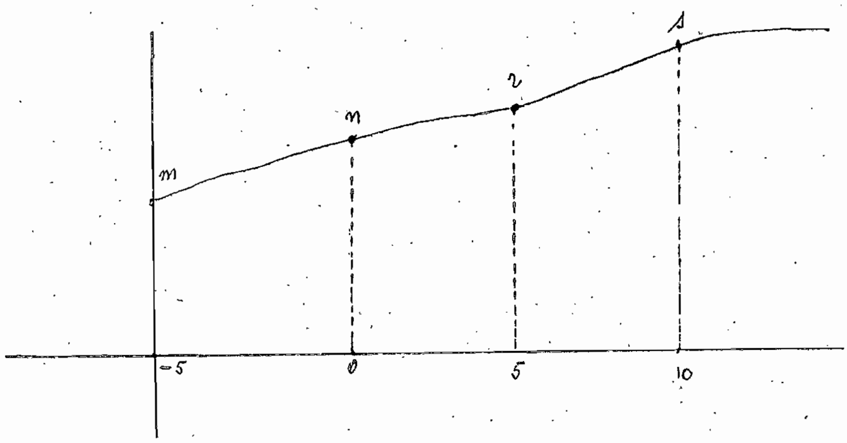
y calculamos la derivada de ambas, tenemos:

$$\frac{dU_x}{dx} = A + 2.B.x + 3.C.x^2$$

y

$$\frac{d.U_z}{dz} = a + 2.b.z.$$

pero si suponemos que la curva tiene el aspecto:



y las dos derivadas nos interesan para valores de variables de 0 y 5 solamente, tendremos respectivamente:

$$\left(\frac{dU_x}{dx}\right)_{x=0} = A$$

y

$$\left(\frac{dU_x}{dx}\right)_{x=5} = A + 10.B + 75.C$$

Para la derivada de la función representativa de la curva de segundo grado consideremos a ésta en los puntos m y r vale decir, entre valores de variables -5 y 5; se tiene:

$$U_{-5} = U_0 - 5a + 25b$$

$$U_5 = U_0 + 5a + 25b$$

de donde se deduce:

$$a = \frac{U_5 - U_{-5}}{10}$$

y

$$\left(\frac{dU_z}{dz}\right)_{z=0} = \frac{U_5 - U_{-5}}{10}$$

derivada que debe ser igual a la derivada para X = 0 de la función de tercer grado, es decir

$$A = \frac{U_5 - U_{-5}}{10}$$

Para determinar ahora la derivada de la función de segundo grado en el punto r que corresponde a valor de variable 5 sería un poco más complicado, pero si suponemos al punto r como origen, por consiguiente valor de variable 0, nuestro problema se abrevia, pués no tenemos mas que considerar la derivada entre valores de variables comprendidos entre 0 y 10; luego:

$$\left(\frac{dU_t}{dt}\right)_{t=5} = \frac{U_{10} - U_0}{10}$$

y por la misma razón anterior:

$$A + 10.B + 75.C = \frac{U_{10} - U_0}{10}$$

En esta forma planteamos las tres siguientes ecuaciones indispensables:

$$U_5 = U_0 + 5A + 25\,B + 125.C$$

$$A = \frac{U_5 - U_{-5}}{10}$$

$$A + 10\,B + 75.C = \frac{U_{10} - U_0}{10}$$

De las que se deduce lo siguiente:

$$U_5 - U_0 = 5A + 25\,B + 125\,C \qquad (1)$$

$$U_5 - U_{-5} = 10\,A \qquad (2)$$

$$U_{10} - U_0 = 10A + 100\,B + 750.C \qquad (3)$$

De la comparación de (2) y (3) se tiene:

$$100\,B + 750.C = U_{10} - U_0 - U_5 + U_{-5}$$

De la comparación de (1) y (2) se tiene:

$$50\,B + 250.C = U_5 - 2U_0 + U_{-5}$$

y de la comparación de estas dos últimas expresiones se deduce:

$$250.C = U_{10} - 3U_5 + 3.U_0 - U_{-5}$$

y

$$50.B = -U_{10} + 4.U_5 - 5.U_0 + 2U_{-5}$$

De manera que tenemos así determinados el valor de cada uno de los coeficientes A, B y C, en efecto:

$$A = \frac{U_5 - U_{-5}}{10}$$

$$B = \frac{-U_{10} + 4.U_5 - 5.U_0 + 2U_{-5}}{50}$$

$$C = \frac{U_{10} - 3U_5 + 3U_0 - U_{-5}}{250}$$

Si en la expresión analítica de tercer grado substituimos los coeficientes, tenemos:

$$U_x = U_0 + \frac{U_5 - U_{-5}}{10}.x + \frac{-U_{10} + 4.U_5 - 5U_0 + 2U_{-5}}{50}.x^2 + \frac{U_{10} - 3U_5 + 3U_0 - U_{-5}}{250}.x^3$$

o bien:

$$250U_x = 250 U_0 + 25.x.\left(U_5 - U_{-5}\right) + 5.x^2\left(-U_{10} + 4.U_5 - 5U_0 + 2U_{-5}\right) + x^3.\left(U_{10} - 3U_5 + 3.U_0 - U_{-5}\right)$$

Agrupando llegamos a que:

$$250U_x = U_{10}\left(x^3 - 5x^2\right) + U_5\left(-3x^3 + 20x^2 + 25x\right) + U_0\left(3x^3 - 25x^2 + 250\right) + U_{-5}.\left(-x^3 + 10x^2 - 25x\right)$$

o bien:

$$250U_x = x^2\left(x-5\right).U_{10} + x.\left(-3x^2 + 20x + 25\right).U_5 + \left(3x^3 - 25x^2 + 250\right)U_0 - x.\left(x-5\right)^2.U_{-5}$$

Si tomamos como origen en vez de 0 un valor $n-x$, nuestra fórmula se transformará:

$$250\, U_n = x^2(x-5)\, U_{n-x+10} + x\cdot(-3x^2+20x+25)\, U_{n-x+5} +$$

$$+(3x^3-25x^2+250)\, U_{n-x} - x\cdot(x-5)^2\cdot U_{n-x-5}$$

y si damos a (x) sucesivamente los valores 1,2,3,4 y 5 tenemos:

$$250\, U'_n = -4\cdot U_{n+9} + 42\, U_{n+4} + 228\, U_{n-1} - 16\, U_{n-6}$$

$$250\, U'_n = -12\cdot U_{n+8} + 106\, U_{n+3} + 174\cdot U_{n-2} - 18\, U_{n-7}$$

$$250\, U'_n = -18\, U_{n+7} + 174\, U_{n+2} + 106\, U_{n-3} - 12\, U_{n-8}$$

$$250\, U'_n = -16\, U_{n+6} + 228\, U_{n+1} + 42\, U_{n-4} - 4\cdot U_{n-9}$$

$$250\, U'_n = 250\, U_n$$

Sumando y dividiendo luego por 2; se tiene:

$$U'_n = \frac{1}{625}\Big[125\, U_n + 114\cdot(U_{n+1}+U_{n-1}) + 87\cdot(U_{n+2}+U_{n-2}) +$$

$$+ 53\cdot(U_{n+3}+U_{n-3}) + 21\cdot(U_{n+4}+U_{n-4}) - 8\cdot(U_{n+6}+U_{n-6}) -$$

$$- 9\cdot(U_{n+7}+U_{n-7}) - 6\cdot(U_{n+8}+U_{n-8}) - 2\cdot(U_{n+9}+U_{n-9})\Big]$$

o bien:

$$u'_n = \frac{1}{625} \cdot \left[125\, u_n + 114 \cdot \delta_1 + 87 \cdot \delta_2 + 53\, \delta_3 + 21\, \delta_4 - 8\, \delta_6 - \right.$$
$$\left. - 9 \cdot \delta_7 - 6 \cdot \delta_8 - 2 \cdot \delta_9 \right]$$

que es la fórmula final de Karup.- A continuación se encuentra indicado el procedimiento seguido hasta obtener los valores ajustados de las tasas de mortalidad.-

TERMINOS POSITIVOS DE LA FORMULA DE KARUP

A

x	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
20	0.0016	0.0024	0.0041	0.0039
21	0062	0041	0039	0028
22	0057	0077	0028	0037
23	0063	0044	0075	0009
24	0069	0061	0025	0046
25	0076	0050	0032	0058
26	0037	0047	0083	0083
27	0045	0070	0098	0091
28	0051	0096	0078	0090
29	0067	0059	0088	0079
30	0092	0059	0060	0070
31	0110	0093	0048	0118
32	0101	0099	0151	0070
33	0091	0159	0121	0096
34	0160	0113	0104	0165
35	0102	0105	0157	0154
36	0163	0146	0155	0150
37	0168	0213	0139	0128
38	0158	0161	0186	0225
39	0205	0131	0247	0376
40	0181	0291	0321	0120
41	0284	0372	0164	0299
42	0344	0157	0349	0437
43	0243	0322	0430	0104
44	0512	0516	0077	0207
45	0389	0267	0293	0214
46	0245	0166	0404	0312
47	0439	0382	0185	0517
48	0137	0458	0495	0197
49	0235	0250	0470	0427
50	0387	0247	0182	0331
51	0266	0319	0108	0222
52	0432	0127	0359	0233
53	0139	0472	0252	0137
54	0404	0264	0250	0127
55	0125	0182	0139	1019
56	0222	-	0951	0139
57	0125	0991	-	1091
58	0769	0125	1131	-
59	-	0909	0125	0222
60	1678	-	-	0125

TERMINOS POSITIVOS DE LA FORMULA DE KARUP

B

x	$114.\gamma_1$	$87.\gamma_2$	$53.\gamma_3$	$21.\gamma_4$
20	0.1824	0.2088	0.2173	0.0819
21	7068	3567	2067	0538
22	6498	6699	1484	0777
23	7182	3828	3975	0189
24	7866	5507	1325	0966
25	8664	4350	1696	1218
26	4218	4089	4399	1743
27	5130	6090	5194	1911
28	5814	8352	4134	1890
29	7638	5133	4664	1659
30	1.0488	5133	3180	1617
31	1.2540	8091	2544	2478
32	1.1514	8613	8003	1470
33	1.0374	1.3833	6413	2016
34	1.8240	9831	3512	3465
35	1.1628	9135	8321	3234
36	1.8582	1.2702	8215	3150
37	1.9152	1.8531	7367	2688
38	1.8012	1.4007	9858	4725
39	2.3370	1.1397	1.3091	7896
40	2.0634	2.5317	1.7013	2520
41	3.2376	3.2277	8692	6279
42	3.9216	1.3659	1.8497	9177
43	2.7702	2.8014	2.2790	2184
44	5.8368	4.4892	4081	4347
45	4.4346	2.3229	1.5529	4494
46	2.7950	1.4442	2.1412	6552
47	5.0046	3.3234	9805	1.0857
48	1.5618	3.9846	2.6235	4137
49	2.6790	2.1750	2.4910	8967
50	4.4118	2.1489	9646	6951
51	3.0324	2.7753	5724	4662
52	4.9248	1.1049	1.9027	4893
53	1.5846	4.1064	1.3356	2877
54	4.6056	2.2968	1.3250	2667
55	1.4250	1.5834	7367	2.1399
56	2.5308	-	5.0403	0.2919
57	1.4250	8.6217	-	2.2911
58	8.7666	1.0875	5.9943	-
59	-	7.9085	6625	4662
60	19.1292	-	-	2625

TERMINOS NEGATIVOS DE LA FORMULA DE KARUP

A

x	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9
20	0.0037	0.0009	0.0008	0.0042
21	0009	0008	0042	0059
22	0008	0042	0059	0050
23	0042	0059	0050	0051
24	0059	0050	0051	0051
25	0050	0051	0051	0040
26	0089	0051	0040	0109
27	0067	0078	0109	0062
28	0064	0125	0100	0054
29	0150	0086	0070	0144
30	0101	0095	0130	0120
31	0082	0145	0145	0123
32	0143	0132	0138	0118
33	0113	0136	0105	0224
34	0107	0086	0222	0295
35	0119	0193	0276	0095
36	0244	0309	0066	0254
37	0317	0117	0287	0339
38	0109	0295	0390	0042
39	0296	0382	0050	0167
40	0571	0051	0159	0187
41	0109	0148	0188	0178
42	0170	0246	0167	0301
43	0191	0189	0359	0179
44	0233	0304	0201	0291
45	0354	0245	0236	0062
46	0238	0286	0106	0276
47	0259	0099	0326	0231
48	0185	0299	0224	0104
49	0489	0310	0077	0099
50	0185	0267	0185	0046
51	0245	0058	1036	0185
52	0331	1014	0058	1176
53	0769	0351	1154	0058
54	0108	0909	0331	0245
55	1046	0108	-	0331
56	0127	0137	0108	-
57	0250	0127	0137	0108
58	0139	0250	0127	0137
59	0182	0139	0250	0127
60	-	0182	0139	0250

TERMINOS NEGATIVOS DE LA FORMULA DE KARUP

B

x	$8.\gamma_6$	$9.\gamma_7$	$6.\gamma_8$	$2.\gamma_9$
20	0.0296	0.0081	0.0048	0.0084
21	0072	0072	0252	0118
22	0064	0378	0354	0100
23	0336	0531	0300	0102
24	0472	0450	0306	0102
25	0400	0459	0306	0080
26	0712	0459	0240	0218
27	0536	0702	0654	0124
28	0512	1125	0600	0108
29	1200	0774	0420	0288
30	0808	0855	0780	0240
31	0656	1305	0870	0246
32	1144	1188	0828	0236
33	0904	1224	0630	0448
34	0856	0774	1332	0590
35	0952	1737	1656	0190
36	1952	2781	0396	0508
37	2536	1055	1722	0678
38	0872	2655	2340	0084
39	2368	3438	0300	0334
40	2968	0459	0954	0374
41	0872	1332	1128	0356
42	1360	2214	1002	0602
43	1528	1701	2154	0358
44	1864	2736	1206	0582
45	2832	2205	1416	0124
46	1904	2574	0636	0552
47	2072	0891	1946	0462
48	1480	2691	1344	0208
49	3912	2790	0462	0198
50	1464	2403	1110	1692
51	1960	0522	6216	0370
52	2648	9126	0348	2352
53	6152	2979	6924	0116
54	0864	8181	1986	0490
55	8368	0972	-	0662
56	1016	1233	0648	-
57	2000	1143	0822	0216
58	1112	2250	0762	0274
59	1456	1251	1500	0254
60	-	1638	0834	0500

CUADRO COMPARATIVO DE LOS VALORES

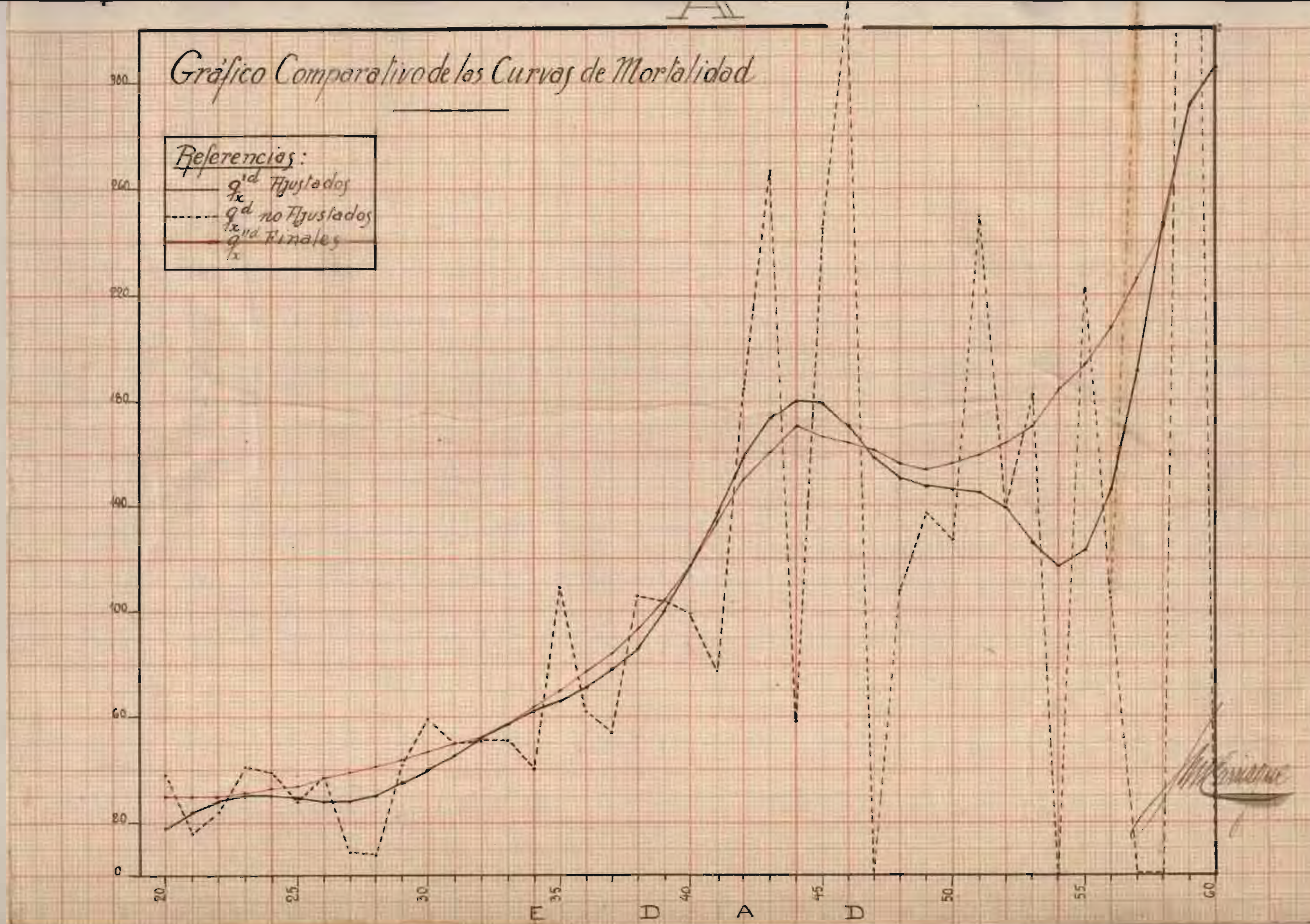
de q'^{d}_{x} y q^{d}_{x}

x	$125. U_n$ (1)	Términos Positivos (2)	Σ (1) + (2) (3)	Términos Negativos (4)
20	0.4750	0.6904	1.1654	0.0509
21	2000	1.3290	1.5290	0514
22	3000	1.5158	1.8158	0896
23	5125	1.5174	2.0299	1269
24	4875	1.5464	2.0339	1330
25	3500	1.5928	1.9428	1245
26	4625	1.4449	1.9074	1629
27	1125	1.8325	1.9450	2016
28	1000	2.0190	2.1190	2345
29	5250	1.9094	2.4344	2682
30	7375	2.0418	2.7793	2683
31	6250	2.5653	3.1903	3077
32	6375	2.9600	3.5975	3396
33	6375	3.2636	3.9011	3206
34	5000	3.7048	4.2048	3552
35	1.3625	3.2318	4.5943	4535
36	7750	4.2649	5.0399	5727
37	6750	4.7738	5.4488	5989
38	1.3250	4.6602	5.9852	5951
39	1.3000	5.5754	6.8754	6440
40	1.2375	6.5484	7.7859	4755
41	9625	7.9624	8.9249	3688
42	2.3125	8.0549	10.3674	5178
43	3.3375	8.0690	11.4065	5741
44	7250	11.1688	11.8938	6580
45	3.0625	8.7598	11.8223	6577
46	4.1375	7.0336	11.1711	5666
47	-	10.3942	10.3942	5301
48	1.3500	8.5936	9.9536	5723
49	1.7125	8.2417	9.9542	7362
50	1.5875	8.2204	9.8079	6669
51	3.1250	6.8463	9.9713	9068
52	1.7375	8.4217	10.1592	1.4474
53	2.2750	7.3143	9.5893	1.6171
54	-	8.4941	8.4941	1.1521
55	2.7750	5.8850	8.6600	1.0002
56	1.5625	7.8630	9.4255	2897
57	-	12.3378	12.3378	4181
58	-	15.8484	15.8484	4598
59	9.6125	9.0370	18.6495	4461
60	-	19.3917	19.3917	2972

CUADRO COMPARATIVO DE LOS VALORES

B

x	Δ (3) - (4)	$q'^{d}_{x} = \frac{\Delta}{625}$	q^{d}_{x}	Desvíos	
20	1.2145	0.0018	0.0038	-	20
21	1.4776	0024	0016	+	8
22	1.7562	0028	0024	+	4
23	1.9030	0030	0041	-	11
24	1.9009	0030	0039	-	9
25	1.8183	0029	0028	+	1
26	1.7445	0028	0037	-	9
27	1.7434	0028	0009	+	19
28	1.8045	0030	0008	+	22
29	2.1662	0035	0042	-	7
30	2.5110	0040	0059	-	19
31	2.8826	0046	0050	–	4
32	3.2670	0052	0051	+	1
33	3.5805	0057	0051	+	6
34	3.8496	0062	0040	+	22
35	4.1168	0066	0109	-	43
36	4.4662	0071	0062	+	9
37	4.8499	0078	0054	+	24
38	5.3901	0086	0106	-	20
39	6.2314	0100	0104	-	4
40	7.3104	0117	0099	+	18
41	8.5561	0137	0077	+	60
42	9.8496	0158	0165	–	27
43	10.8524	0173	0267	–	94
44	11.2550	0180	0058	+	122
45	11.2646	0179	0245	–	66
46	10.6045	0170	0351	–	161
47	9.8561	0158	-	+	150
48	9.3613	0150	0108	+	42
49	9.2180	0147	0137	+	10
50	9.1410	0146	0127	+	19
51	9.0645	0145	0250	–	105
52	8.7118	0139	0139		-
53	7.9722	0126	0182	–	56
54	7.3420	0117	-	+	117
55	7.6998	0123	0222	-	99
56	9.1358	0146	0125	+	21
57	11.9197	0191	-	+	191
58	15.4086	0247	-	+	247
59	18.2034	0291	0769	-	478
60	19.0945	0306	-	+	306


A
Gráfico Comparativo de las Curvas de Mortalidad
Referencias:
q_x^{id} Ajustados
q_x^{d} no Ajustados
q_x^{id} Finales
300
260
220
180
140
100
60
20
0
20
25
30
35
40
45
50
55
60
E D A D

<u>Ajustamiento de la tasa de secesión:</u>- Para el ajustamiento de esta tasa utilicé la fórmula de Woolhouse la que considera 15 puntos de la curva para determinar el término u ordenada central. Woolhouse para llegar a su fórmula de ajustamiento imaginó cinco parábolas de segundo grado, cada una de las cuales pasaba por tres puntos y tomó como ordenada las comprendidas en intervalos de 5 en 5; es decir que si enumeramos las quince ordenadas correspondiente a los quince puntos considerados por -7,-6,-5,-4, 3,- 2,- 1,- 0, 1, 2,3,4,5,6,7, se tiene que la primer parábola pasa por los puntos correspondientes a las ordenadas;

-7, -2, 3

la segunda por:

-6, -1, 4

la tercera por

-5, 0, 5

y así sucesivamente las ~~tres~~ dos parábolas restantes.- La expresión analítica de la parábola de segundo grado supongamos sea:

$$U_{m+z} = U_m + A.z + B.z^2$$

en la que tenemos que determinar el valor de los coeficientes A y B.- Si hacemos $z = 5$ y $z = -5$ puesto que éste es el intervalo que separa los puntos de unión de cada parábola, nos queda:

$$U_{m+5} = U_m + 5.A + 25B$$

$$U_{m-5} = U_m - 5.A + 25B$$

Expresiones que nos permite calcular el valor de A y B, en efecto:

$$A = \frac{1}{10} \cdot \left(U_{m+5} - U_{m-5} \right)$$

$$B = \frac{1}{50} \cdot \left[\left(U_{m+5} + U_{m-5} \right) - 2\,U_{m} \right]$$

y entonces en la expresión analítica de segundo grado:

$$U_{m+z} = U_{m} + \frac{z}{10} \cdot \left(U_{m+5} - U_{m-5} \right) + \frac{z^2}{50} \cdot \left(U_{m+5} + U_{m-5} \right) - \frac{z^2}{25} \cdot U_{m}$$

si hacemos:

$$m + z = n$$

$$m = n - z$$

se tiene:

$$U_{n} = U_{n-z} + \frac{z}{10} \cdot \left(U_{n-z+5} - U_{n-z-5} \right) + \frac{z^2}{50} \cdot \left(U_{n-z+5} + U_{n-z-5} \right) - \frac{z^2}{25} \cdot U_{n-z}$$

Como queremos determinar cinco parábolas equidistantes del punto central, se toma la de (n) cómo central y dos más de cada lado, es decir, las ordenadas correspondientes a $(n-2)$; $(n-1)$; $(n+1)$; $(n+2)$.- En nuestra ecuación general tenemos entonces que para el valor central $z = 0$, los valores equidistantes tomados de uno y otro lado, se hacen sucesivamente $z = -2$, $z = -1$, $z = 1$ y $z = 2$ y para cada uno de estos tenemos:

$$\left(U_{n} \right) = U_{n+2} - \frac{1}{5} \left(U_{n+7} - U_{n-3} \right) + \frac{2}{25} \cdot \left(U_{n+7} + U_{n-3} \right) + \frac{4}{25} \cdot U_{n+2}$$

$$\left(U_{n} \right) = U_{n+1} - \frac{1}{10} \cdot \left(U_{n+6} - U_{n-4} \right) + \frac{1}{50} \cdot \left(U_{n+6} + U_{n-4} \right) - \frac{1}{25} U_{n+1}$$

$$\left(U_{n} \right) = U_{n}$$

$$\left(U_n\right) = U_{n-1} + \frac{1}{10}\cdot\left(U_{n+4} - U_{n-6}\right) + \frac{1}{50}\cdot\left(U_{n+4} + U_{n-6}\right) - \frac{1}{25}\cdot U_{n-1}$$

$$\left(U_n\right) = U_{n-2} + \frac{1}{5}\cdot\left(U_{n+3} - U_{n-7}\right) + \frac{2}{25}\cdot\left(U_{n+3} + U_{n-7}\right) - \frac{4}{25}\cdot U_{n-2}$$

Agrupando los términos, se tiene:

$$\left(U_n\right) = \frac{21}{25}\cdot U_{n+2} - \frac{3}{25}\cdot U_{n+7} + \frac{7}{25}\cdot U_{n-3}$$

$$\left(U_n\right) = \frac{24}{25}\cdot U_{n+1} - \frac{2}{25}\cdot U_{n+6} + \frac{3}{25}\cdot U_{n-4}$$

$$\left(U_n\right) = U_n$$

$$\left(U_n\right) = \frac{24}{25} U_{n-1} + \frac{3}{25}\cdot U_{n+4} - \frac{2}{25} U_{n-6}$$

$$\left(U_n\right) = \frac{21}{25} U_{n-2} + \frac{7}{25} U_{n+3} - \frac{3}{25}\cdot U_{n-7}$$

Sumando ordenadamente y sacando $\frac{1}{125}$ factor común, se tiene:

$$\left(U_n\right) = \frac{1}{125}\cdot\Big[25 U_n + 24\cdot\left(U_{n+1} + U_{n-1}\right) + 21\cdot\left(U_{n+2} + U_{n-2}\right) + 7\cdot\left(U_{n+3} + U_{n-3}\right) + 3\cdot\left(U_{n+4} + U_{n-4}\right) - 2\cdot\left(U_{n+6} + U_{n-6}\right) - 3\cdot\left(U_{n+7} + U_{n-7}\right)\Big]$$

o bien, observando la notación

$$\left(U_n\right) = \frac{1}{125}\cdot\left[25 U_n + 24\cdot\delta_1 + 21\,\delta_2 + 7\cdot\delta_3 + 3\cdot\delta_4 - 2\,\delta_6 - 3\cdot\delta_7\right]$$

Para llegar al mismo aspecto que Woolhouse dió a su fórmula, podemos hacer:

$$\left(U_n\right) = \frac{1}{125}\cdot\left[25 U_n + 25\,\delta_1 + 25\,\delta_2 - \delta_1 - 4\,\delta_2 + 7\,\delta_3 + 3\cdot\delta_4 - 2\,\delta_6 - 3\cdot\delta_7\right]$$

es decir:

$$\left|U_n\right| = \frac{1}{5}\cdot\left[U_n + (\gamma_1+\gamma_2) - 0{,}04\left\{(\gamma_1-\gamma_3) + 4\,(\gamma_2-\gamma_3) + 2\,(\gamma_6-\gamma_3) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + 3\,(\gamma_7-\gamma_4)\right\}\right]$$

y siguiendo la misma notación empleada por su autor, de hacer:

$$\gamma_1 - \gamma_3 = f$$
$$\gamma_2 - \gamma_3 = g$$
$$\gamma_6 - \gamma_3 = h$$
$$\gamma_7 - \gamma_4 = k$$

se tiene:

$$\left|U_n\right| = \frac{1}{5}\cdot\left\{U_n + \gamma_1 + \gamma_2 - 0{,}04\left(f + 4g + 2h + 3k\right)\right\}$$

Aspecto final que el mismo Woolhouse dió a su fórmula.-
A continuación se encuentra indicado el procedimiento seguido en la aplicación de esta fórmula hasta llegar a los valores ajustados.

TERMINOS POSITIVOS DE LA FORMULA DE WOOLHOUSE

A

x	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
18	0.065	0.061	0.076	0.037
19	81	76	57	60
20	141	57	60	56
21	98	125	76	48
22	136	117	113	77
23	95	124	118	117
24	108	94	120	107
25	113	112	83	118
26	100	102	102	86
27	103	90	105	100
28	94	106	88	89
29	95	92	90	68
30	82	79	72	94
31	82	62	83	72
32	60	86	62	65
33	70	60	68	64
34	40	52	62	81
35	56	42	65	71
36	42	69	51	73
37	31	51	77	55
38	53	59	53	51
39	72	57	33	31
40	66	53	33	71
41	54	42	84	40
42	46	92	49	72
43	66	53	80	56
44	29	54	60	115
45	92	36	89	49
46	43	127	25	14
47	115	32	52	24
48	39	49	31	52
49	75	38	49	73
50	27	75	60	60
51	-	69	95	25
52	68	20	14	169
53	20	13	94	14
54	55	94	13	45
55	114	55	45	90
56	-	65	132	-
57	139	77	20	55
58	77	94	-	20
59	45	-	94	-
60	77	45	-	94
61				

TERMINOS POSITIVOS DE LA FORMULA DE WOOLHOUSE

B

x	$24 \cdot \gamma_1$	$21 \cdot \gamma_2$	$7 \cdot \gamma_3$	$3 \gamma_4$
18	1.560	1.281	0.532	0.111
19	1.944	1.596	0.259	0.180
20	3.304	1.197	0.420	0.168
21	2.352	2.625	0.532	0.144
22	3.264	2.457	0.791	0.231
23	2.232	2.604	0.826	0.351
24	2.592	1.974	0.896	0.321
25	2.712	2.352	0.581	0.354
26	2.400	2.142	0.714	0.258
27	2.472	1.890	0.735	0.300
28	2.256	2.226	0.616	0.267
29	2.280	1.932	0.630	0.204
30	1.968	1.659	0.504	0.282
31	1.968	1.302	0.581	0.216
32	1.440	1.806	0.434	0.195
33	1.680	1.260	0.476	0.192
34	0.960	1.092	0.434	0.243
35	1.344	0.882	0.455	0.213
36	1.008	1.449	0.357	0.219
37	1.224	1.071	0.539	0.165
38	1.272	1.239	0.385	0.153
39	1.728	1.197	0.231	0.093
40	1.584	0.966	0.231	0.213
41	1.296	0.882	0.588	0.120
42	1.104	1.932	0.343	0.216
43	1.584	1.113	0.560	0.168
44	0.696	1.134	0.420	0.345
45	2.208	0.756	0.623	0.147
46	1.032	2.667	0.175	0.042
47	2.760	0.672	0.364	0.072
48	0.936	0.840	0.217	0.156
49	1.800	0.798	0.280	0.219
50	0.648	1.575	0.560	0.180
51	-	1.449	0.665	0.075
52	1.632	0.420	0.098	0.507
53	0.480	0.273	0.658	0.042
54	1.320	1.974	0.091	0.135
55	2.736	1.155	0.315	0.270
56	-	1.365	0.924	-
57	3.336	1.617	0.140	0.165
58	1.848	1.974	-	0.060
59	1.080	-	0.658	-
60	1.848	0.945	-	0.282

x	γ_6	γ_7	$2.\gamma_6$	$3.\gamma_7$
18	0.056	0.048	0.112	0.144
19	48	57	0.096	0.171
20	57	52	0.114	0.156
21	52	46	0.104	0.138
22	46	42	0.092	0.126
23	42	49	0.084	0.147
24	69	40	0.138	0.120
25	105	53	0.210	0.159
26	94	85	0.188	0.255
27	96	98	0.192	0.294
28	74	96	0.148	0.288
29	80	56	0.160	0.168
30	75	82	0.150	0.246
31	70	88	0.140	0.264
32	89	79	0.178	0.237
33	83	97	0.166	0.291
34	86	87	0.172	0.261
35	77	60	0.154	0.180
36	63	53	0.126	0.159
37	51	101	0.102	0.303
38	85	58	0.170	0.174
39	38	73	0.076	0.219
40	77	45	0.154	0.135
41	45	112	0.090	0.336
42	94	34	0.188	0.102
43	36	19	0.072	0.057
44	32	35	0.064	0.105
45	44	32	0.088	0.096
46	40	86	0.080	0.258
47	90	60	0.180	0.180
48	34	35	0.068	0.105
49	11	108	0.022	0.324
50	146	11	0.292	0.033
51	0.018	97	0.036	0.291
52	85	95	0.170	0.285
53	102	40	0.204	0.120
54	75	25	0.150	0.075
55	14	75	0.028	0.225
56	-	14	-	0.042
57	13	-	0.026	-
58	-	13	-	0.039
59	55	-	0.110	-
60	20	55	0.040	0.165

CUADRO COMPARATIVO DE LOS VALORES
de q'^{w}_{x} y q^{w}_{x}

A

x	$25.\,U_x$ (1)	Términos Positivos (2)	Σ (1)+(2) (3)	Términos Negativos (4)
18	0.500	3.484	3.984	0.256
19	1.625	3.979	5.604	0.267
20	1.525	5.169	6.694	0.270
21	1.900	5.655	7.555	0.242
22	0.925	6.743	7.668	0.218
23	1.500	6.013	7.513	0.231
24	1.400	5.783	7.183	0.258
25	1.200	5.999	7.199	0.369
26	1.425	5.514	6.939	0.443
27	1.300	5.397	6.697	0.486
28	1.150	5.365	6.515	0.436
29	1.050	5.046	6.096	0.328
30	1.225	4.413	5.638	0.396
31	1.000	4.067	5.067	0.404
32	0.825	3.875	4.700	0.415
33	0.500	3.608	4.108	0.437
34	0.925	2.729	3.654	0.422
35	0.500	2.894	3.394	0.334
36	0.475	3.033	3.508	0.285
37	0.550	2.999	3.549	0.405
38	0.800	3.049	3.849	0.344
39	0.775	3.249	4.024	0.295
40	1.000	2.994	3.994	0.289
41	0.875	2.886	3.761	0.426
42	0.350	3.595	3.945	0.290
43	0.275	3.425	3.700	0.129
44	1.300	2.595	3.895	0.169
45	0.450	3.744	4.184	0.184
46	1.000	3.916	4.916	0.338
47	0.625	3.868	4.493	0.360
48	1.875	2.149	4.024	0.173
49	0.350	3.097	3.447	0.346
50	–	2.963	2.963	0.325
51	0.325	2.189	2.514	0.327
52	–	2.657	2.657	0.455
53	1.375	1.453	2.828	0.324
54	0.500	3.520	4.020	0.225
55	–	4.476	4.476	0.253
56	2.350	2.289	4.639	0.042
57	–	5.258	5.258	0.026
58	1.125	3.882	5.067	0.039
59	1.925	1.738	3.663	0.110
60	–	3.075	3.075	0.205

CUADRO COMPARATIVO DE LOS VALORES

de ${q'}^{w}_{x}$ y q^{w}_{x}

B

x	Δ (3) − (4)	${q'}^{w}_{x} = \frac{\Delta}{125}$	q^{w}_{x}	Desvíos	
18	3.728	0.030	0.020	+	10
19	5.337	0.043	65	-	22
20	6.424	51	61	-	10
21	7.311	58	76	-	18
22	7.450	60	37	-	23
23	7.282	58	60	-	2
24	6.925	55	56	-	1
25	6.830	55	48	+	7
26	6.496	52	57	-	5
27	6.211	50	52	-	2
28	6.079	49	46	+	3
29	5.768	46	42	+	4
30	5.242	42	49	-	7
31	4.663	37	40	-	3
32	4.285	34	33	+	1
33	3.651	29	20	+	9
34	3.222	26	37	-	11
35	3.060	24	20	+	4
36	3.223	26	19	+	7
37	3.144	25	22	+	3
38	3.505	28	32	-	4
39	3.729	30	31	-	1
40	3.705	30	40	-	10
41	3.335	27	35	-	8
42	3.655	29	14	+	15
43	3.571	29	11	+	18
44	3.726	30	52	-	22
45	4.000	32	18	+	14
46	4.578	37	40	-	3
47	4.153	33	25	+	8
48	3.851	31	75	-	44
49	3.101	25	14	+	11
50	2.648	21	-	+	21
51	2.187	0.017	13	+	4
52	2.202	18		+	18
53	2.504	20	55	-	35
54	3.795	30	20	+	10
55	4.223	34	-	+	34
56	4.597	37	94	-	57
57	5.232	42	-	+	42
58	4.968	40	45	-	5
59	3.553	28	77	-	49
60	2.870	23	-	+	23

B

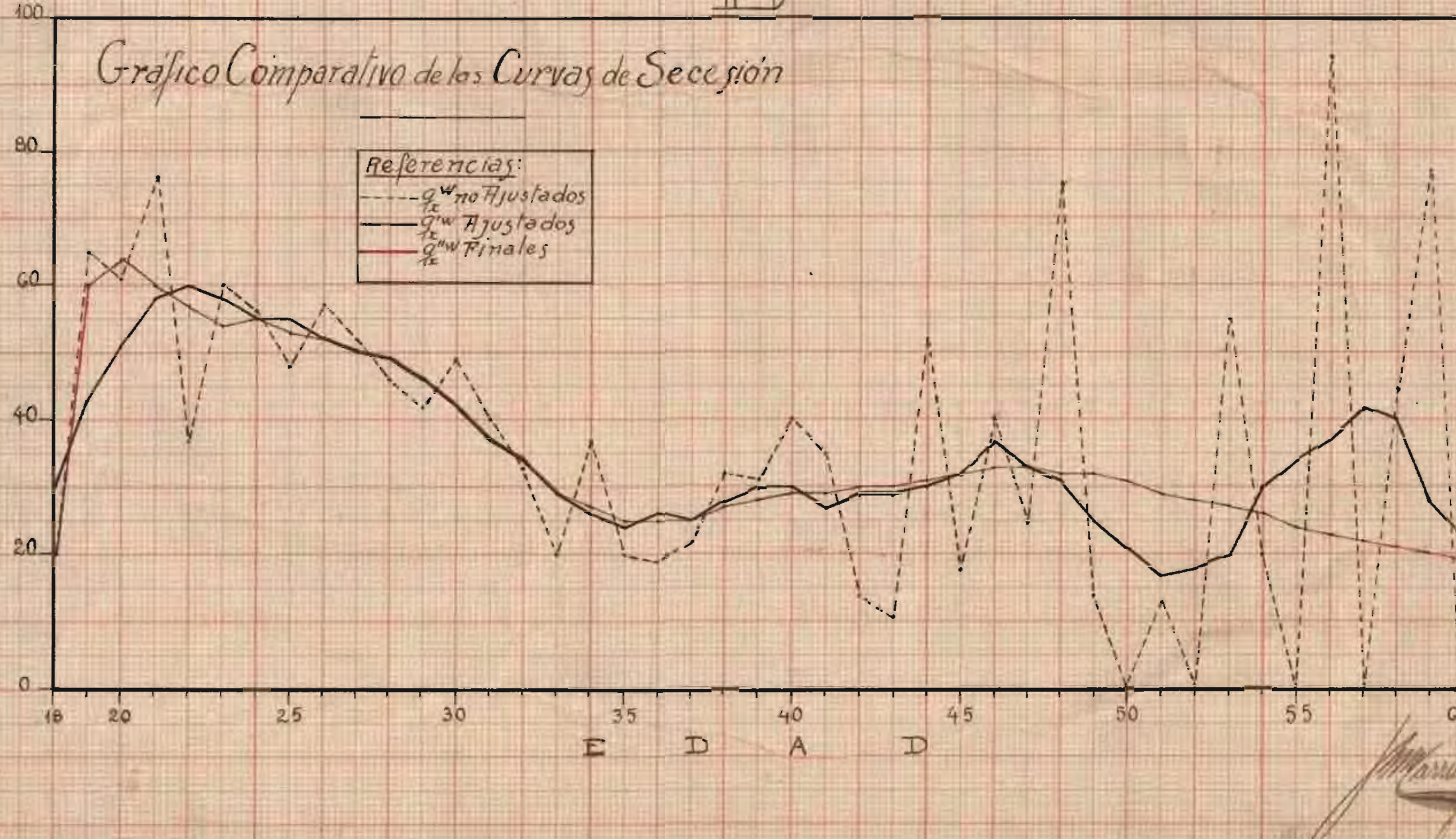


Gráfico Comparativo de las Curvas de Secesión
Referencias:
q_x^{w} no Ajustados
$q_x'^{w}$ Ajustados
$q_x''^{w}$ Finales
100
80
60
40
20
0
18
20
25
30
35
40
45
50
55
60
E D A D

Efectuado el ajustamiento y comparando la curva de mortalidad obtenida por medio de la fórmula de Karup con la curva de mortalidad proveniente directamente de la observación, vemos que se ha conseguido uno de los objetos de todo problema de ajustamiento vale decir, substituir una curva irregular llena de puntas y asperezas por medio de una curva regular, donde los saltos bruscos han desaparecido y donde las superficies de uno y otro lado de la curva ajustada con relación a la curva observada parecería se compensarán, como lo comprueban los desvíos producidos individualmente para cada edad, indicados en el cuadro comparativo de los valores (B).- Llegado a este punto de nuestro trabajo, debemos efectuar otra comprobación, esta es, tener la certeza de que dicha curva ajustada no sólo es regular sino que también llena las condiciones de fidelidad.- Para comprobar esta segunda parte, se hace necesario la construcción del cuadro de comprobación que a continuación se detalla, en el que se determina previamente el valor de:

$$d'_x = q^d_x \cdot E_x$$

procediendo luego a la acumulación de los mismos, de la siguiente manera:

$$\sum_{x=20}^{x=21} d'_x = d'_{20} + d'_{21}$$

$$\sum_{x=20}^{x=22} d'_x = \sum_{x=20}^{x=21} d'_x + d'_{22}$$

$$\sum_{x=20}^{x=23} d'_x = \sum_{x=20}^{x=22} d'_x + d'_{23}$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

y así sucesivamente.- En igual forma se procede con los valores de d_x.-

Efectuado esto, comparamos los términos de una y otra serie y observamos si existe más o menos concordancia entre los datos observados y ajustados, si los desvíos acumulados son lo más pequeño posible, si el cambio de signo es frecuente y finalmente, si las sumas de los valores ajustados no distan mucho de las sumas de los valores observados.- Unicamente cumplidas estas condiciones podemos decir que la curva ajustada es no sólo regular sino también fiel.

COMPROBACION DE LA TASA DE MORTALIDAD OBTENIDA POR LA FORMULA DE KARUP

A

x	E_x	q'^{d}_x	d'_x	d_x	$\Sigma d'_x$	Σd_x	Desvíos Acumulados
20	525	0.0018	0.95	2	0.95	2	- 1.05
21	645	0.0024	1.55	1	2.50	3	- 0.50
22	812	28	2.36	2	4.86	5	- 0.14
23	971	30	2.91	4	7.77	9	- 1.23
24	1030	30	3.09	4	10.86	13	- 2.14
25	1083	29	3.14	3	14.00	16	- 2.--
26	1079	28	3.02	4	17.02	20	- 2.98
27	1092	28	3.06	1	20.08	21	- 0.92
28	1065	30	3.20	8	23.28	29	- 5.72
29	942	35	3.30	4	26.58	33	- 6.42
30	854	40	3.42	5	30.00	38	- 8.--
31	796	46	3.66	4	33.66	42	- 8.34
32	785	52	4.08	4	37.74	46	- 8.26
33	785	57	4.49	4	42.23	50	- 7.77
34	756	62	4.69	3	46.92	53	- 6.08
35	736	66	4.86	8	51.78	61	- 9.22
36	642	71	4.56	4	56.34	65	- 8.66
37	555	78	4.33	3	60.67	68	- 7.33
38	473	86	4.07	5	64.74	73	- 8.26
39	384	100	3.84	4	68.58	77	- 8.42
40	303	117	3.55	3	72.13	80	- 7.87
41	259	137	3.55	2	75.68	82	- 6.32
42	216	158	3.41	4	79.09	86	- 6.91
43	187	173	3.24	5	82.33	91	- 8.67
44	173	180	3.11	1	85.44	92	- 7.56
45	163	179	2.92	4	88.36	96	- 7.64
46	151	170	2.57	5	90.93	101	- 10.07
47	120	158	1.90	-	92.83	101	- 8.17
48	93	150	1.40	1	94.23	102	- 7.77
49	73	147	1.07	1	95.30	103	- 7.70
50	79	146	1.15	1	96.45	104	- 7.55
51	80	145	1.16	2	97.61	106	- 8.39
52	72	139	1.--	1	98.61	107	- 8.39
53	55	126	0.69	1	99.60	108	- 8.40
54	46	117	0.57	-	100.17	108	- 7.83
55	45	124	0.55	1	100.72	109	- 8.28
56	32	0.0146	0.47	4	101.19	113	- 11.81
57	28	191	0.53	-	101.72	113	- 11.28
58	22	247	0.54	-	102.26	113	- 10.74
59	13	291	0.38	1	102.64	114	- 11.36
60	7	306	0.21	-	102.85	114	- 11.15

Si observamos este cuadro comprobativo (A) y aplicamos los principios enunciados,se llega a la conclusión de que la curva ajustada es regular pero no es fiel,desde el momento que todos los desvíos acumulados son negativos.

Esto nos indica pués, que la curva ajustada, a pesar de su regularidad aparente, no reune todavía las condiciones para considerarla como expresión de la mortalidad. No quiere decir ello que sea un defecto de la fórmula empleada, sino que la causa radica exclusivamente en el pequeño plazo observado (5 años) y en segundo lugar,en la carencia de datos para muchas edades.

Es necesario pués hacer una corrección a la curva ajustada.- Para ello procedí al ajustamiento gráfico que me permitió obtener la curva de mortalidad indicada en tinta roja (Gráfico A) y que como puede observarse en el cuadro de comprobación (B) que a continuación se transcribe, reune todas las condiciones de regularidad y fidelidad.

COMPROBACION DE LA TASA DE MORTALIDAD OBTENIDA POR LA FORMULA DE KARUP Y CORREGIDA GRAFICAMENTE -B-

x	E_x	q''^{d}_x	d''_x	d_x	$\Sigma d''_x$	Σd_x	Desvíos Acumulados	
20	525	0.0030	1.58	2	1.58	2	-	0.42
21	645	30	1.94	1	3.52	3	+	0.52
22	842	30	2.53	2	6.05	5	+	1.05
23	971	31	3.01	4	9.06	9	+	0.06
24	1030	33	3.40	4	12.46	13	-	0.54
25	1083	34	3.68	3	16.14	16	+	0.14
26	1079	37	3.99	4	20.13	20	+	0.13
27	1092	39	4.26	1	24.39	21	+	3.39
28	1065	41	4.37	8	28.76	29	-	0.24
29	942	44	4.14	4	32.90	33	-	0.10
30	854	47	4.01	5	36.91	38	-	1.09
31	796	50	3.98	4	40.89	42	-	1.11
32	785	52	4.08	4	44.97	46	-	1.03
33	788	57	4.49	4	49.46	50	-	0.54
34	756	64	4.84	3	54.30	53	+	1.30
35	736	70	5.15	8	59.45	61	-	1.55
36	642	77	4.94	4	64.39	65	-	0.61
37	555	84	4.66	3	69.05	68	+	1.05
38	473	93	4.40	5	73.45	73	+	0.45
39	384	104	3.99	4	77.44	77	+	0.44
40	303	117	3.55	3	80.99	80	+	0.99
41	259	134	3.47	2	84.46	82	+	2.46
42	216	150	3.24	4	87.70	86	+	1.70
43	187	160	2.99	5	90.69	91	-	0.31
44	173	170	2.94	1	93.63	92	+	1.63
45	163	166	2.71	4	96.34	96	+	0.34
46	151	164	2.48	5	98.82	101	-	2.18
47	120	161	1.93	-	100.75	101	-	0.25
48	95	156	1.45	1	102.20	102	+	0.20
49	73	154	1.12	1	103.32	103	+	0.32
50	79	156	1.23	1	104.55	104	+	0.55
51	80	159	1.27	2	105.82	106	-	0.18
52	72	164	1.18	1	107.00	107		-
53	55	172	0.95	1	107.95	108	-	0.05
54	49	184	0.90	-	108.85	108	+	0.85
55	45	194	0.87	1	109.72	109	+	0.72
56	32	208	0.67	4	110.39	113	-	2.61
57	28	226	0.63	-	111.02	113	-	1.98
58	22	246	0.54	-	111.56	113	-	1.44
59	13	291	0.38	1	111.94	114	-	2.06
60	7	306	0.21	-	112.15	114	-	1.85

Otro procedimiento que puede aplicarse especialmente en casos como éste en que el período de observación es muy pequeño y los datos sumamente irregulares, es efectuar previamente un ajustamiento por medio de una fórmula elemental y sencilla, por ejemplo, por medio de la fórmula de Finlaison:

$$u'_x = \frac{1}{25} \cdot \left[5u_x + 4 \cdot \gamma_1 + 3\gamma_2 + 2\gamma_3 + \gamma_4 \right]$$

y luego con los datos así obtenidos proceder al ajustamiento final.-

Si se observa la curva de cesación ajustada, vemos que la fórmula de Woolhouse nos ha permitido obtener una curva bastante regular, pero que según el cuadro de comparación (A) que a continuación se detalla no llena las condiciones de fidelidad, debido pues y exclusivamente a la poca experiencia y a la carencia de datos.- Al igual que para la mortalidad, una vez obtenida la curva de cesación ajustada por la fórmula de Woolhouse, procedí a un último ajustamiento gráfico, que me permitió así obtener tasas de cesación regulares y fieles expresadas por la curva en tinta roja. La bondad de los valores finales así obtenidos se demuestra en el cuadro de comparación (B).

[illegible]

[illegible]

A

x	E_x	$q_x^{'w}$	W_x'	W_x	$\Sigma W_x'$	ΣW_x	Desvios Acumulados	
[illegible]	301	0.030	3	2	3	2	+	2
[illegible]	[illegible]	0.015	[illegible]	[illegible]	17	[illegible]	-	6
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-	10
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-	[illegible]
[illegible]	972	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-	[illegible]
[illegible]	1020	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	+	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	+	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	+	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	+	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	785	[illegible]	-	1
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	785	[illegible]	-	1

COMPROBACION DE LA TASA DE CESACION OBTENIDA POR LA FORMULA DE WOOLHOUSE Y CORREGIDA GRAFICAMENTE

B

x	E_x	$q_x''^{w}$	W_x''	W_x	$\Sigma W_x''$	ΣW_x	Desvios Acumulados
18	101	0.020	2	2	2	2	0
19	323	060	19	21	21	23	- 2
20	525	064	34	32	55	55	0
21	645	060	39	49	94	104	- 10
22	842	057	48	31	142	135	+ 7
23	971	054	52	58	194	193	+ 1
24	1030	055	57	58	251	251	0
25	1083	053	57	52	308	303	+ 5
26	1079	052	56	62	364	365	- 1
27	1092	050	55	57	419	422	- 3
28	1065	049	52	49	471	471	0
29	942	046	43	40	514	511	+ 3
30	854	042	36	42	550	553	- 3
31	796	037	29	32	579	585	- 6
32	785	034	27	26	606	611	- 5
33	788	029	23	16	629	627	+ 2
34	756	027	20	28	649	655	- 6
35	736	025	18	15	667	670	- 3
36	642	025	16	12	683	682	+ 1
37	555	025	14	12	697	694	+ 3
38	473	027	13	15	710	709	+ 1
39	384	028	11	12	721	721	0
40	305	029	9	12	730	733	- 3
41	259	029	8	9	738	742	- 4
42	216	030	6	3	744	745	- 1
43	187	030	6	2	750	747	+ 3
44	173	031	5	9	755	756	- 1
45	163	032	5	3	760	759	+ 1
46	151	033	5	6	765	765	0
47	120	033	4	3	769	768	+ 1
48	95	032	3	7	772	775	- 3
49	73	032	2	1	774	776	- 2
50	79	031	2	-	776	776	0
51	80	029	2	1	778	777	+ 1
52	72	028	2	-	780	777	+ 3
53	55	027	1	3	781	780	+ 1
54	49	026	1	1	782	781	+ 1
55	45	024	1	-	783	781	+ 2
56	32	023	0.74	3	783.74	784	- 0.26
57	28	022	0.62	-	784.36	784	+ 0.36
58	22	021	0.46	1	784.82	785	- 0.18
59	13	020	0.26	1	785.08	786	- 0.92
60	7	019	013	-	785.21	786	- 0.79

Determinados los valores de las tasas de mortalidad,y secesión estamos en condiciones de construir nuestra tabla final. Basta tomar una cantidad como raíz y con ella ir determinando para cada edad el número de fallecidos, retirados y sobrevivientes. En mi caso, consideré como raíz la cantidad de 100.000 a los 18 años y en esa forma obtuve la tabla que a continuación se detalla.

TABLA DE MORTALIDAD Y SEPARACION

x	l_x	$q_x''^{d}$	$q_x''^{w}$	d_x''	W_x''
18	100.000	0.0030	0.020	300	2000
19	97.700	30	60	293	5862
20	91.345	30	64	275	5859
21	85.411	30	60	256	5125
22	80.050	30	57	240	4562
23	75.228	31	54	233	4062
24	70.953	33	55	234	3901
25	66.798	34	53	227	3540
26	63.071	37	52	233	3278
27	59.520	39	50	232	2976
28	56.322	41	49	231	2759
29	53.322	44	46	235	2453
30	50.634	47	42	238	2127
31	48.269	50	37	241	1786
32	46.242	52	34	240	1572
33	44.450	57	39	253	1733
34	42.444	64	27	272	1146
35	41.026	70	25	287	1026
36	39.715	77	25	306	993
37	38.414	84	25	323	960
38	37.152	93	27	345	1003
39	35.783	104	28	372	1002
40	34.409	117	29	403	998
41	33.008	134	29	442	957
42	31.609	150	30	474	948
43	30.187	160	30	483	906
44	28.798	170	31	490	893
45	27.415	166	32	459	877
46	26.085	164	33	428	861
47	24.794	161	33	399	818
48	23.577	156	32	368	754
49	22.455	154	32	346	719
50	21.390	156	31	334	663
51	20.393	159	29	324	591
52	19.478	164	28	319	545
53	18.624	170	27	316	503
54	17.795	184	26	327	463
55	17.005	194	24	330	408
56	16.267	208	23	338	374
57	15.555	226	22	352	342
58	14.861	246	21	366	312
59	14.183	291	20	413	284
60	13.486	306	19	413	256

FICHAS EMPLEADAS EN LA TABULACION

Número				12 11			12 11			FAMILIA AL 31 DIC. 1926												Serv.		SUELDOS AL 31 DICIEMBRE																HAB		
										Est.	Nacim esp.		Año Matr.		X Padre		X Madre		Hijos	Hijas	Hnas.	O.C.		X 1912				X 1917				X 1922				1927				X		
0	0	0	0	10	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1 S	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2 C	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3 V	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	4

Número				12 Nacim.to 11			12 Ingreso 11			12 Salida 11			Causa											SUELDOS AL 31 DICIEMBRE																RET	
																								X 1912				X 1917				X 1922				X				X	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1 Jub.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2 Mte.	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3 Cte.	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4 Ren.	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42

BIBLIOGRAFIA

A. V. Acerboni - Primer curso de Matemática Actuarial (año 1929)

U. Broggi - Matemática Attuariale - Milano, U.Hoepli, 1906.

J.Gonzalez Galé - 1er.curso de Biometría - (año 1929)

George King - Institute of Actuaries' Text-Book.- Part. II. London, Layton, 1902.

G. Minutilli - Nozione di scienza attuariale.- Milano, U. Hoepli, 1913.

P.J.Richard et E.Petit - Theorie Mathematique des assurances Paris, O.Dion, (1908) (Encyclopedie Scientifique du docteur Toulouse)

E.F.Spurgeon - Life Contingencies.- (Institute of Actuaries, Text-Books). Volumen III.

George King - On Staff pension Funds.- Volumen XXXIX del Journal of the Institute of Actuaries. London, 30 January 1905.

-0-0-0-0-0-0-

Buenos Aires, 4 Julio 1930

Anchorena 1178