Expresión de la renta vitalicia mediante una serie potencial entera de la variación del tipo de interés

Barral Souto, José

1934

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS
de la
Universidad Nacional de Buenos Aires

" Expresión de la renta vitalicia mediante una serie potencial entera de la variación del tipo de interés."

por

José Barral Souto

Tesis presentada para optar al título de Doctor en Ciencias Económicas.

SUMARIO

Buenos Aires, abril de 1934

63712

INTRODUCCION

Preséntase a menudo en trabajos actuariales la necesidad de valores de conmutación, a un tipo de interés ligeramente distinto del de la tabla que se posee.

Cierta clase de problemas pueden reducirse a la utilización de un nuevo tipo de interés v.g.(1) rentas vitalicias variables en progresión geométrica, siempre que la tasa de progresión sea inferior a la del interés (2) rentas vitalicias combinadas con sorteos de probabilidad constante, (3) valuación de fondos, cuyos gastos de administración se cubren con un porcentage sobre la renta que producen; etc.

Tales problemas, antes de decidir la confección de las tablas de conmutación a tipos determinados, para el caso que convenga, requieren cálculos a tipos distintos, pero próximos a los usuales, para estudiar v.g. que probabilidad conviene asignar al sorteo, o que porcentage aplicar sobre la renta suficiente para cubrir los gastos.

Demuestro aquí, que la renta a'_x calculada al nuevo tipo de interés , puede expresarse así:

$$a'_x = a_x - \rho \frac{S_x}{D_x} + \rho^2 \frac{S_x^{(2)}}{D_x} - \cdots + \rho^{2r} \frac{S_x^{(2r)}}{D_x} - \rho^{2r+1} \frac{S_x^{(2r+1)}}{D_x} + \cdots$$

donde "a_x" es la renta vitalicia calculada a un cierto tipo de interés i ; D_x y S_x los valores conocidos de conmutación $S^{(2)}$; $S^{(3)}$; $S^{(4)}$ etc, sumas acumulativas, semejantes a la S respecto de la N y esta respecto de la D , pero de orden superior, indicado por el número entre paréntesis, (se atribuye a la S el valor $S^{(1)}$.

y $\rho = \frac{i'-i}{1+i} = \frac{\Delta i}{1+i}$

La serie converge absolutamente para todas las tasas posibles, pero practicamente solo resulta utilizable cuando el tipo de interés difiere poco del que se toma como base, bastando generalmente, la misma tabla de conmutación si la diferencia entre los tipos no excede de ½%, con un error inferior al 1%

Aún cuando me referiré solo a rentas vitalicias, lo mismo, sería aplicable p.e. a la prima única del seguro de vida A'_x, en cuyo caso llegaríamos a la expresión siguiente:

$$A'_x = A_x - \rho \frac{R_x}{D_x} + \rho^2 \frac{R_x^{(2)}}{D_x} - \rho^3 \frac{R_x^{(3)}}{D_x} + \cdots$$

donde las $R^{(k)}$ indicarían sumas acumulativas de orden superior, a partir de $R_x = R_x^{(1)}$ de la tabla de conmutación, al tipo de interés base.

Los demás símbolos tienen el significado que se sabe: $R_x = \sum_{t}^{\omega} M_t$; $A_x =$ prima única del seguro de vida al tipo i ; y A'_x al nuevo tipo i' .

I DEMOSTRACIONES PREVIAS

Propiedad de los sumatorios.

1.- Si tenemos el sumatorio doble respecto de u y t :

$$\sum_{u=x}^{\omega}\sum_{t=x}^{u}\varphi(u;t)$$

es decir , de una función, $\varphi(u;t)$ de los números enteros consecutivos u y t, a contar desde x hasta ω , podemos desarrollarlo en un cuadro como el siguiente:

u	$\sum_{t=x}^{u}\varphi(u;t)$
x	$\sum_{t=x}^{x}\varphi(x;t)=\varphi(x;x)$
$x+1$	$\sum_{t=x}^{x+1}\varphi(x+1;t)=\varphi(x+1;x)+\varphi(x+1;x+1)$
$x+2$	$\sum_{t=x}^{x+2}\varphi(x+2;t)=\varphi(x+2;x)+\varphi(x+2;x+1)+\varphi(x+2;x+2)$
$\vdots$	
$\omega-1$	$\sum_{t=x}^{\omega-1}\varphi(\omega-1;t)=\varphi(\omega-1;x)+\varphi(\omega-1;x+1)+\varphi(\omega-1;x+2)+\cdots+\varphi(\omega-1;\omega-1)$
ω	$\sum_{t=x}^{\omega}\varphi(\omega;t)=\varphi(\omega;x)+\varphi(\omega;x+1)+\varphi(\omega;x+2)+\cdots+\varphi(\omega;\omega-1)+\varphi(\omega;\omega)$

$$(1)\qquad \sum_{u=x}^{\omega}\sum_{t=x}^{u}\varphi(u;t)=\sum_{u=x}^{\omega}\varphi(u;x)+\sum_{u=x+1}^{\omega}\varphi(u;x+1)+\sum_{u=x+2}^{\omega}\varphi(u;x+2)+\cdots+\sum_{u=\omega-1}^{\omega}\varphi(u;\omega-1)+\sum_{u=\omega}^{\omega}\varphi(u;\omega)$$

De las sumas efectuadas miembro a miembro y por columnas se obtiene la (1), de la que a su vez se deduce:

$$\sum_{u=x}^{\omega}\sum_{t=x}^{u}\varphi(u;t)=\sum_{t=x}^{\omega}\sum_{u=t}^{\omega}\varphi(u;t)$$

que sobreentendiendo la función : $\varphi(u;t)$, puede escribirse abreviadamente:

$$\sum_{u=x}^{\omega}\sum_{t=x}^{u}=\sum_{t=x}^{\omega}\sum_{u=t}^{\omega}$$

Analogamente, si tenemos $\sum_{z=x}^{\omega}\sum_{u=x}^{z}\sum_{t=x}^{u}\varphi(z,u,t)$ mediante la (2), y puesto que cuidando de no invertir el orden de dependencia de las variables, los sumatorios pueden ser arbitrariamente ordenados, tendremos:

$$\sum_{z=x}^{\omega}\sum_{u=x}^{z}\sum_{t=x}^{u}=\sum_{u=x}^{\omega}\sum_{z=u}^{\omega}\sum_{t=x}^{u}=\sum_{u=x}^{\omega}\sum_{t=x}^{u}\sum_{z=u}^{\omega}=\sum_{t=x}^{\omega}\sum_{u=t}^{\omega}\sum_{z=u}^{\omega}$$

Descúbrese de inmediato la ley general, y la demostración de la misma, pues admitiendo que la propiedad fuese cierta para $m-1$ sumatorios, se tendría:

$$\sum_{i=x}^{\omega}\sum_{h=x}^{i}\cdots\sum_{z=x}\sum_{u=x}^{z}=\underset{1}{\sum_{u=x}^{\omega}}\ \underset{2}{\sum_{z=u}^{\omega}}\cdots\underset{m-2}{\sum_{h=g}^{\omega}}\ \underset{m-1}{\sum_{i=h}^{\omega}}$$

y para m sumatorios:

$$\sum_{i=x}^{\omega}\sum_{h=x}^{i}\cdots\sum_{z=x}\sum_{u=x}^{z}\sum_{t=x}^{u}=\sum_{u=x}^{\omega}\sum_{z=u}^{\omega}\cdots\sum_{h=g}^{\omega}\sum_{i=h}^{\omega}\sum_{t=x}^{u}$$

considerando ahora el $m^{\underline{o}}$ sumatorio con el primero, queda finalmente:

$$(2)\qquad \sum_{i=x}^{\omega}\sum_{h=x}^{i}\cdots\sum_{z=x}\sum_{u=x}^{z}\sum_{t=x}^{u}=\sum_{t=x}^{\omega}\sum_{u=t}^{\omega}\sum_{z=u}^{\omega}\cdots\sum_{h=g}^{\omega}\sum_{i=h}^{\omega}$$

Es decir, la propiedad sería necesariamente cierta para m sumatorios, y como lo es para el primer caso de dos sumatorios, en virtud del principio de inducción completa, queda demostrado

I DEMOSTRACIONES PREVIAS

Propiedad de los sumatorios.

1.- Si tenemos el sumatorio doble respecto de u y t :

$$\sum_{x}^{\omega}{}_{u} \sum_{x}^{u}{}_{t} \varphi(u;t)$$

es decir , de una función, $\varphi(u;t)$ de los números enteros consecutivos u y t, **a contar desde** x hasta ω , podemos desarrollarlo en un cuadro como el si - **guiente:**

$$\begin{array}{ll}
\underline{u} & \underline{\sum_{x}^{u}{}_{t} \varphi(u;t)} \\
x & \sum_{x}^{x}{}_{t} \varphi(x;t) = \varphi(x,x) \\
x+1 & \sum_{x}^{x+1}{}_{t} \varphi(x+1;t) = \varphi(x+1;x) + \varphi(x+1;x+1) \\
x+2 & \sum_{x}^{x+2}{}_{t} \varphi(x+2;t) = \varphi(x+2;x) + \varphi(x+2;x+1) + \varphi(x+2;x+2) \\
\vdots & \\
\omega-1 & \sum_{x}^{\omega-1}{}_{t} \varphi(\omega-1;t) = \varphi(\omega-1;x) + \varphi(\omega-1;x+1) + \varphi(\omega-1;x+2) + \cdots + \varphi(\omega-1;\omega-1) \\
\omega & \sum_{x}^{\omega}{}_{t} \varphi(\omega;t) = \underline{\varphi(\omega;x)} + \underline{\varphi(\omega;x+1)} + \underline{\varphi(\omega;x+2)} + \cdots + \underline{\varphi(\omega;\omega-1)} + \underline{\varphi(\omega,\omega)}
\end{array}$$

$$(1) \qquad \sum_{x}^{\omega}{}_{u} \sum_{x}^{u}{}_{t} \varphi(u;t) = \sum_{x}^{\omega}{}_{u} \varphi(u;x) + \sum_{x+1}^{\omega}{}_{u} \varphi(u;x+1) + \sum_{x+2}^{\omega}{}_{u} \varphi(u;x+2) + \cdots + \sum_{\omega-1}^{\omega}{}_{u} \varphi(u,\omega-1) + \sum_{\omega}^{\omega}{}_{u} \varphi(u;\omega)$$

De las sumas efectuadas miembro a miembro y por columnas se obtiene la (1), **de la que a su vez se deduce:**

$$\sum_{x}^{\omega}{}_{u} \sum_{x}^{u}{}_{t} \varphi(u;t) = \sum_{x}^{\omega}{}_{t} \sum_{t}^{\omega}{}_{u} \varphi(u;t)$$

que sobreentendiendo la función : $\varphi(u;t)$, puede escribirse abreviadamente:

$$\sum_{x}^{\omega}{}_{u} \sum_{x}^{u}{}_{t} = \sum_{x}^{\omega}{}_{t} \sum_{t}^{\omega}{}_{u}$$

Analogamente, si tenemos $\sum_{x}^{\omega}{}_{z} \sum_{x}^{z}{}_{u} \sum_{x}^{u}{}_{t} \varphi(z,u,t)$ mediante la (2), y puesto que cuidando de **no invertir** el orden de dependencia de las variables, los sumatorios pueden ser **arbitrariamente** ordenados, tendremos:

$$\sum_{x}^{\omega}{}_{z} \sum_{x}^{z}{}_{u} \sum_{x}^{u}{}_{t} = \sum_{x}^{\omega}{}_{u} \sum_{u}^{\omega}{}_{z} \sum_{x}^{u}{}_{t} = \sum_{x}^{\omega}{}_{u} \sum_{x}^{u}{}_{t} \sum_{u}^{\omega}{}_{z} = \sum_{x}^{\omega}{}_{t} \sum_{t}^{\omega}{}_{u} \sum_{u}^{\omega}{}_{z}$$

Descúbrese de inmediato la ley general, y la demostración de la misma, **pues admitiendo** que la propiedad fuese cierta para $\overline{m-1}$ sumatorios, se tendría:

$$\sum_{x}^{\omega}{}_{i} \sum_{x}^{i}{}_{h} \cdots \sum_{x}{}_{z} \sum_{x}^{z}{}_{u} = \sum_{x}^{\omega}{}_{u} \sum_{u}^{\omega}{}_{z} \cdots \sum_{g}^{\omega}{}_{h} \sum_{h}^{\omega}{}_{i}$$

y para m sumatorios:

$$\sum_{x}^{\omega}{}_{i} \sum_{x}^{i}{}_{h} \cdots \sum_{x}{}_{z} \sum_{x}^{z}{}_{u} \sum_{x}^{u}{}_{t} = \sum_{x}^{\omega}{}_{u} \sum_{u}^{\omega}{}_{z} \cdots \sum_{g}^{\omega}{}_{h} \sum_{h}^{\omega}{}_{i} \sum_{x}^{u}{}_{t}$$

considerando ahora el $m^{\underline{o}}$ sumatorio con el primero, queda finalmente:

$$(2) \qquad \sum_{x}^{\omega}{}_{i} \sum_{x}^{i}{}_{h} \cdots \sum_{x}{}_{z} \sum_{x}^{z}{}_{u} \sum_{x}^{u}{}_{t} = \sum_{x}^{\omega}{}_{t} \sum_{t}^{\omega}{}_{u} \sum_{u}^{\omega}{}_{z} \cdots \sum_{g}^{\omega}{}_{h} \sum_{h}^{\omega}{}_{i}$$

Es decir, la propiedad sería necesariamente cierta para m sumatorios, **y como lo es para el primer caso** de dos sumatorios, en virtud del principio de **inducción completa,** queda demostrado

Relación entre coeficientes binomiales.

2.- Es:

$$\binom{s+1}{r}-\binom{s}{r}=\frac{(s+1)!}{r!\,(s+1-r)!}-\frac{s!}{r!\,(s-r)!}=\frac{s!}{r!\,(s-r)!}\left[\frac{s+1}{s+1-r}-1\right]=\frac{s!}{(r-1)!\,(s-r+1)!}=\binom{s}{r-1}$$

de donde se deduce:

$$\begin{aligned}
\binom{r}{r} & & &=\binom{r-1}{r-1}\\
\binom{r+1}{r}&-\binom{r}{r} &&=\binom{r}{r-1}\\
\binom{r+2}{r}&-\binom{r+1}{r} &&=\binom{r+1}{r-1}\\
&\vdots && \vdots\\
\binom{n}{r}&-\binom{n-1}{r}&&=\binom{n-1}{r-1}
\end{aligned}$$

sumando miembro a miembro, y simplificando, queda:

$$\binom{n}{r}=\binom{r-1}{r-1}+\binom{r}{r-1}+\binom{r+1}{r-1}+\binom{r+2}{r-1}+\cdots+\binom{n-2}{r-1}+\binom{n-1}{r-1}$$

o sí en vez de n ponemos "$\omega-x+r$":

$$\binom{\omega-x+r}{r}=\binom{r-1}{r-1}+\binom{r}{r-1}+\binom{r+1}{r-1}+\binom{r+2}{r-1}+\cdots+\binom{\omega-x+r-2}{r-1}+\binom{\omega-x+r-1}{r-1}$$

según que la suma del 2º miembro se efectúe de izquierda a derecha o viceversa, puede escribirse:

$$\binom{\omega-x+r}{r}=\sum_{i=x}^{\omega}\binom{i-x+r-1}{r-1} \qquad ó \qquad \binom{\omega-x+r}{r}=\sum_{i=x}^{\omega}\binom{\omega-i+r-1}{r-1}$$

$$\binom{i-x+r-1}{r-1}=\sum_{h=x}^{i}\binom{h-x+r-2}{r-2} \qquad \binom{\omega-i+r-1}{r-1}=\sum_{h=i}^{\omega}\binom{\omega-h+r-2}{r-2}$$

$$\binom{h-x+r-2}{r-2}=\sum_{g=x}^{h}\binom{g-x+r-3}{r-3} \qquad \binom{\omega-h+r-2}{r-2}=\sum_{g=h}^{\omega}\binom{\omega-g+r-3}{r-3}$$

$$\binom{z-x+r-m+2}{r-m+2}=\sum_{u=x}^{z}\binom{u-x+r-m+1}{r-m+1} \qquad \binom{\omega-z+r-m+2}{r-m+2}=\sum_{u=z}^{\omega}\binom{\omega-u+r-m+1}{r-m+1}$$

$$\binom{u-x+r-m+1}{r-m+1}=\sum_{t=x}^{u}\binom{t-x+r-m}{r-m} \qquad \binom{\omega-u+r-m+1}{r-m+1}=\sum_{t=u}^{\omega}\binom{\omega-t+r-m}{r-m}$$

mediante sucesivos reemplazos del 1º miembro de cada igualdad en el 2º de la anterior, hasta llegar a la primera, se obtiene:

$$\binom{\omega-x+r}{r}=\sum_{i=x}^{\omega}\sum_{h=x}^{i}\sum_{g=x}^{h}\cdots\sum_{u=x}^{z}\sum_{t=x}^{u}\binom{t-x+r-m}{r-m}=\sum_{i=x}^{\omega}\sum_{h=i}^{\omega}\sum_{g=h}^{\omega}\cdots\sum_{u=z}^{\omega}\sum_{t=u}^{\omega}\binom{\omega-t+r-m}{r-m}$$

Si el número de " " sumatorios es tal que : $r-m=0 \therefore r=m$

es $\binom{t-x+r-m}{r-m}=\binom{t-x}{0}=\binom{\omega-t}{0}=1$ luego:

$$(3)\quad \binom{\omega-x+m}{m}=\sum_{i=x}^{\omega}\sum_{h=x}^{i}\sum_{g=x}^{h}\cdots\sum_{z=x}\sum_{u=x}^{z}\sum_{t=x}^{u}=\sum_{i=x}^{\omega}\sum_{h=i}^{\omega}\sum_{g=h}^{\omega}\cdots\sum_{z}^{\omega}\sum_{u=z}^{\omega}\sum_{t=u}^{\omega}=\binom{\omega-x+r}{r}$$

en particular, si se trata de $\overline{m+1}$ sumatorios; es:

$$(4)\quad \binom{i-x+m-1}{m-1}=\sum_{h=x}^{i}\sum_{g=x}^{h}\cdots\sum_{z=x}\sum_{u=x}^{z}\sum_{t=x}^{u}$$

Propiedad de las desigualdades

3.- Sean los numeradores y denominadores números positivos tales que cumplan la condición:

$$\frac{n_1}{d_1} > \frac{n_2}{d_2} > \frac{n_3}{d_3} > \frac{n_4}{d_4} > \frac{n_5}{d_5} > \frac{n_6}{d_6}$$

Considerando unicamente el último par es:

$$n_5 d_6 > n_6 d_5 \quad \therefore \quad n_5 d_6 - n_6 d_5 > 0$$

luego, tendremos:

$$\frac{n_5}{d_5} - \frac{n_5+n_6}{d_5+d_6} = \frac{n_5 d_6 - n_6 d_5}{d_5(d_5+d_6)} > 0$$

$$\frac{n_5+n_6}{d_5+d_6} - \frac{n_6}{d_6} = \frac{n_5 d_6 - n_6 d_5}{(d_5+d_6)d_6} > 0$$

verificando por lo tanto que:

$$(5) \qquad \frac{n_5}{d_5} > \frac{n_5+n_6}{d_5+d_6} > \frac{n_6}{d_6}$$

Es además, $\frac{n_4}{d_4} > \frac{n_5}{d_5}$ y en vez de (5) podemos escribir: $\frac{n_4}{d_4} > \frac{n_5+n_6}{d_5+d_6}$

Procediendo con este nuevo par de quebrados, como en el anterior, tendríamos, guiándonos por el resultado (5):

$$\frac{n_4}{d_4} > \frac{n_4+n_5+n_6}{d_4+d_5+d_6} > \frac{n_5+n_6}{d_5+d_6} > \frac{n_6}{d_6}$$

Analogamente por ser $\frac{n_3}{d_3} > \frac{n_4}{d_4}$ es, por la anterior $\frac{n_3}{d_3} > \frac{n_4+n_5+n_6}{d_4+d_5+d_6}$ cuyo par de quebrados daría aplicando la (5):

$$\frac{n_3}{d_3} > \frac{n_3+n_4+n_5+n_6}{d_3+d_4+d_5+d_6} > \frac{n_4+n_5+n_6}{d_4+d_5+d_6} > \frac{n_5+n_6}{d_5+d_6} > \frac{n_6}{d_6}$$

Prosiguiendo la operación llegaríamos por recurrencia a:

$$(6) \quad \frac{n_1}{d_1} > \frac{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6}{d_1+d_2+d_3+d_4+d_5+d_6} > \frac{n_2+n_3+n_4+n_5+n_6}{d_2+d_3+d_4+d_5+d_6} > \frac{n_3+n_4+n_5+n_6}{d_3+d_4+d_5+d_6} > \frac{n_4+n_5+n_6}{d_4+d_5+d_6} > \cdots > \frac{n_6}{d_6}$$

bastando para ello, considerar los dos primeros pares de quebrados, substituyendo el de la izquierda por el que le precede, mayor que él, aplicar la (5) y combinar con el resultado inmediato anterior.

Resulta evidente, la extensión de la (6) a un número v.g. de "n" términos.

Definición de las $S_x^{(r)}$

4.- Consideremos un cuadro como el siguiente:

x	$S_x^{(0)}$	$S_x^{(1)}$	$S_x^{(2)}$	$S_x^{(3)}$		$S_x^{(r)}$
1	6	18	43	89	- - - -	
2	5	12	25	46	- - - -	
3	3	7	13	21	- - - -	
4	2	4	6	8	- - - -	
5	2	2	2	2	- - - -	

donde cada columna se forma con las sumas acumulativas de las cifras de la columna anterior, a partir de la cifra que corresponde al último valor de x : 5.

Si de una manera general llamamos "ω" al último valor de las x, de cuya línea parten todas las sumas acumulativas, vendrían a estar definidas las $S_x^{(r)}$ por las relaciones:

$$S_x^{(r)} = \sum_{t=x}^{\omega} S_t^{(r-1)} \qquad\qquad S_g^{(r-m+2)} = \sum_{h=g}^{\omega} S_h^{(r-m+1)}$$

$$S_t^{(r-1)} = \sum_{u=t}^{\omega} S_u^{(r-2)} \qquad\qquad S_h^{(r-m+1)} = \sum_{i=h}^{\omega} S_i^{(r-m)}$$

$$S_u^{(r-2)} = \sum_{z=u}^{\omega} S_z^{(r-3)}$$

$$\vdots$$

Substituyendo el 1º miembro de cada igualdad en el 2º de la anterior, sucesivamente, se obtiene:

$$S_x^{(r)} = \sum_x^{\omega} t \sum_t^{\omega} u \sum_u^{\omega} z \cdots \sum_g^{\omega} h \sum_h^{\omega} i \, S_i^{(r-m)}$$

y de aquí por la (2)

$$S_x^{(r)} = \sum_x^{\omega} i \sum_x^{i} h \sum_x^{h} g \cdots \sum_x z \sum_x^{z} u \sum_x^{u} t \, S_i^{(r-m)}$$

Como $S_i^{(r-m)}$ no depende de las variables h,g,...z,u,t,podemos reemplazar los $m-1$ sumatorios, cuyo valor según la (4) es:

$$\sum_x^{i} h \sum_x^{h} g \cdots \sum_x z \sum_x^{z} u \sum_x^{u} t = \binom{i-x+m-1}{m-1}$$

y nos queda entonces:

(7) $$S_x^{(r)} = \sum_x^{\omega} i \binom{i-x+m-1}{m-1} S_x^{(r-m)}$$

Ampliación de las tablas de conmutación.

5.- La relación entre ciertos valores de las tablas de conmutación es, como se sabe: $N_x = \sum_x^{\omega} t \, D_{t+1}$ (') ó $N = \sum_x^{\omega} t \, D_t$

$$S_x = \sum_x^{\omega} t \, N_t$$

y si definimos a $S_x^{(2)}$; $S_x^{(3)}$ ... $S_x^{(r)}$ como sumas acumulativas de orden superior a las de la tabla, vendríamos a ampliar esta así:

$$S_x^{(2)} = \sum_x^{\omega} t \, S_x$$

$$S_x^{(3)} = \sum_x^{\omega} t \, S_x^{(2)} \quad etc$$

y en general, puesto que combinando con las $S^{(r)}$ que hemos definido, correspondería: $S_x^{(1)} = S_x$; $S_x^{(0)} = N_x$ y $S_x^{(-1)} = D_x$ por la (7), para $r-m = -1$

$$S_x^{r} = \sum_x^{\omega} i \binom{i-x+m-1}{m-1} S_i^{(-1)} = \sum_x^{\omega} i \binom{i-x+r}{r} D_{i+1}$$

La tabla de conmutación ampliada, tendría púes las columnas para los valores siguientes:

$$S_x^{(-1)} = D_{x+1}$$

$$S_x^{(0)} = N_x = \sum_x^{\omega} i \, D_{i+1}$$

(8) $$S_x^{(1)} = S_x = \sum_x^{\omega} i \binom{i-x+1}{1} D_{i+1}$$

$$S_x^{(2)} = \sum_x^{\omega} i \binom{i-x+2}{2} D_{i+1}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$S_x^{(r)} = \sum_x^{\omega} i \binom{i-x+r}{r} D_{i+1}$$

(') En rigor debíeramos poner $N_x = \sum_x^{\omega-1} t \, D_{t+1}$ puesto que $D_{\omega+1} = 0$ para $x = \omega$, pero por simplicidad conviene mantener los límites uniformes x , ω .

Propiedades de los valores de conmutación

6.- Como punto de partida, consideremos las probabilidades de supervivencia anual, que sabemos decrecen desde una edad baja, hasta la edad límite de la tabla; ω:

$$\frac{l_{x+1}}{l_x} > \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} > \frac{l_{x+3}}{l_{x+2}} > \cdots > \frac{l_{x+t+1}}{l_{x+t}} > \cdots\cdots > \frac{l_\omega}{l_{\omega-1}} > \frac{l_{\omega+1}}{l_\omega} = 0$$

multiplicando toda la sucesión de desigualdades por v y, numerador y denominador de cada término, por una potencia conveniente de v podremos escribir:

$$\frac{D_{x+1}}{D_x} > \frac{D_{x+2}}{D_{x+1}} > \frac{D_{x+3}}{D_{x+2}} > \cdots > \frac{D_{x+t+1}}{D_{x+t}} > \cdots > \frac{D_\omega}{D_{\omega-1}} > \frac{D_{\omega+1}}{D_\omega} = 0$$

Para un término cualquiera, se deduce, por la (6):

$$\frac{D_{x+t+1}}{D_{x+t}} > \frac{D_{x+t+1}+D_{x+t+2}+D_{x+t+3}+\cdots+D_\omega+D_{\omega+1}}{D_{x+t}+D_{x+t+1}+D_{x+t+2}+\cdots+D_{\omega-1}+D_\omega} > \frac{D_{\omega+1}}{D_\omega} = 0$$

y de aquí; omitiendo $D_{\omega+1}$ pués vale cero:

$$\frac{D_{x+t}+D_{x+t+1}+\cdots+D_{\omega-1}+D_\omega}{D_{x+t}} > \frac{D_{x+t+1}+D_{x+t+2}+\cdots+D_\omega}{D_{x+t+1}}$$

dando a t todos los valores de "0" a "ω" y utilizando la N que simboliza la suma de las D :

$$\frac{N_{x-1}}{D_x} > \frac{N_x}{D_{x+1}} > \frac{N_{x+1}}{D_{x+2}} > \cdots > \frac{N_{x+t-1}}{D_{x+t}} > \frac{N_{x+t}}{D_{x+t+1}} > \cdots > \frac{N_{\omega-3}}{D_{\omega-2}} > \frac{N_{\omega-2}}{D_{\omega-1}} > \frac{N_{\omega-1}}{D_\omega} = 1$$

por ser $S = \sum N$ y por la (6), a su vez es:

$$\frac{N_{x-1}}{D_x} > \frac{S_{x-1}}{N_{x-1}} > \frac{S_x}{N_x} > \frac{S_{x+1}}{N_{x+1}} > \cdots > \frac{S_{x+t-1}}{N_{x+t-1}} > \frac{S_{x+t}}{N_{x+t}} > \cdots > \frac{S_{\omega-3}}{N_{\omega-3}} > \frac{S_{\omega-2}}{N_{\omega-2}} > \frac{S_{\omega-1}}{N_{\omega-1}} = 1$$

aplicando repetidamente la (6) y por la notación definida en 5; llegaremos a:

$$\ddot{a}_x = \frac{N_{x-1}}{D_x} > \frac{S_x}{N_x} > \frac{S_x^{(2)}}{S_x} > \frac{S_x^{(3)}}{S_x^{(2)}} > \cdots > \frac{S_x^{(r)}}{S_x^{(r-1)}} > \frac{S_{x+1}^{(r)}}{S_{x+1}^{(r-1)}} > \cdots > \frac{S_{x+t}^{(r)}}{S_{x+t}^{(r-1)}} > \cdots > \frac{S_{\omega-1}^{(r)}}{S_{\omega-1}^{(r-1)}} = 1$$

En particular para

$$(9) \qquad \ddot{a}_x > \frac{S_x^{(n)}}{S_x^{(n-1)}} > \frac{S_x^{(n+r)}}{S_x^{(n+r-1)}} > 1$$

Comparando con las rentas ciertas, se verifica:

$$\ddot{a}_x < \ddot{a}_{\overline{\omega-x}|} < \ddot{a}_{\overline{\infty}|} = 1 + \frac{1}{i} = \frac{1}{vi} = \frac{1}{d}$$

Se infiere de aquí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_x^{(n+1)}}{S_x^{(n)}} \geq 1 \qquad y \qquad \lim_{i\to\infty} \frac{S_x^{(n+1)}}{S_x^{(n)}} = \lim_{i\to\infty}\left(1+\frac{1}{i}\right) = 1$$

II EXPRESION DE LA RENTA VITALICIA,

MEDIANTE UNA SERIE POTENCIAL ENTERA DE LA VARIACION DEL TIPO DE INTERES

7.- Es:

$$a_x = \frac{N_x}{D_x} = \frac{\sum_x^\omega t\, D_{t+1}}{D_x} = \frac{\sum_x^\omega t\, v^{t+1} l_{t+1}}{D_x} = \frac{\sum_x^\omega t\, v^{t-x+1} l_{t+1}}{l_x}$$

o también puesto que $v = (1+i)^{-1}$;

$$a_x = \frac{1}{l_x} \sum_x^\omega t\, (1+i)^{-t+x-1} l_{t+1}$$

Si tenemos un tipo de interés distinto:

$$i' = i + \Delta i \quad \therefore \quad 1 + i' = 1 + i + \Delta i = (1+i)\left(1 + \frac{\Delta i}{1+i}\right)$$

podremos escribir; designando por a'_x, la renta calculada al nuevo tipo de interés:

$$a'_x = \frac{1}{l_x} \sum_x^\omega t\, (1+i')^{-t+x-1} l_{t+1} = \frac{1}{l_x} \sum_x^\omega t\, (1+i)^{-t+x-1}\left(1+\frac{\Delta i}{1+i}\right)^{-t+x-1} l_{t+1}$$

Desarrollando, y poniendo $\frac{\Delta i}{1+i} = \rho$

$$a'_x = \frac{1}{l_x} \sum_x^\omega t\, v^{t-x+1} l_{t+1}\left[1 - \binom{t-x+1}{1}\rho + \binom{t-x+2}{2}\rho^2 - \cdots \mp \binom{t-x+h}{h}\rho^h \pm \cdots\right]$$

puesto que: $(1+i)^{-t-1} l_{t+1} = v^{t+1} l_{t+1} = D_{t+1}$

(10) $$a'_x = \frac{1}{D_x} \sum_x^\omega t\, D_{t+1}\left[1 - \binom{t-x+1}{1}\rho + \binom{t-x+2}{2}\rho^2 - \binom{t-x+3}{3}\rho^3 + \cdots \mp \binom{t-x+h}{h}\rho^h \pm \cdots\right]$$

y utilizando la (8), después de efectuar el paréntesis:

(11) $$a'_x = \frac{N_x}{D_x} - \rho\frac{S_x}{D_x} + \rho^2\frac{S_x^{(2)}}{D_x} - \rho^3\frac{S_x^{(3)}}{D_x} + \rho^4\frac{S_x^{(4)}}{D_x} - \cdots$$

III VALIDEZ Y PRACTICIDAD DE LA EXPRESION

Radio de convergencia de la serie.

8.- Prescindamos del signo, y calculemos la razón del término general de la serie,(11) por el que le precede.

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|\rho^{n+1}| \frac{S_x^{(n+1)}}{D_x}}{|\rho^n| \frac{S_x^{(n)}}{D_x}} = |\rho| \frac{S_x^{(n+1)}}{S_x^{(n)}}$$

según la (9), se verifica para todo valor de n :

$$a_x > \frac{S_x^{(n+1)}}{S_x^{(n)}} > 1$$

y multiplicando por $|\rho|$

$$|\rho| a_x > |\rho| \frac{S_x^{(n+1)}}{S_x^{(n)}} > |\rho|$$

luego es posible elegir ρ de manera que :

$$1 > |\rho| a_x > \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > |\rho|$$

con lo cual sabemos que la serie será absolutamente convergente para todo valor ρ tal que :

(12) $|\rho| < \frac{1}{a}$

El radio de convergencia es aún mayor, como facilmente se deduce de la serie entre paréntesis de la expresión (10), de a'_x :

Es allí :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\binom{t-x+n+1}{n+1} |\rho^{n+1}|}{\binom{t-x+n}{n} |\rho^n|} = |\rho| \frac{t-x+n+1}{n+1} = |\rho| \left[1 - \frac{t-x}{n+1}\right]$$

luego:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} |\rho| \left[1 - \frac{t-x}{n+1}\right] = |\rho|$$

la serie es por lo tanto absolutamente convergente para todo valor de ρ , puesto que su valor absoluto es necesariamente menor que la unidad.

Aproximación alcanzada.

9.- Obtuvimos:

$$a'_x = \frac{N_x}{D_x} - \rho \frac{S_x}{D_x} + \rho^2 \frac{S_x^{(2)}}{D_x} - \dots \mp \rho^n \frac{S_x^{(n)}}{D_x} \pm R_n$$

siendo :

$$R_n = \frac{1}{D_x} \sum_{1}^{\infty}{}_t (-\rho)^{n+t} S_x^{(n+t)} = \sum_{1}^{\infty}{}_t u_{n+t}$$

Vimos (9) que para $t > 1$ se verifica:

$$a_x > \frac{S_x^{(n)}}{S_x^{(n-1)}} > \frac{S_x^{(n+t)}}{S_x^{(n+t-1)}} > 1$$

y si hacemos : $\alpha_n = \dfrac{S_x^{(n)}}{S_x^{(n-1)}}$ y multiplicamos por $|\rho|$

$$|\rho|\, a_x > |\rho|\alpha_n > \left|\frac{u_{n+r}}{u_{n+r-1}}\right| > |\rho|$$

Es:

$\dfrac{u_{n+r}}{u_n} = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\,\dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}}\,\dfrac{u_{n+3}}{u_{n+2}} \cdots\cdots \dfrac{u_{n+r}}{u_{n+r-1}}$ y por la anterior, tendremos:

$$|\rho|^r a_x^r > |\rho|^r \alpha_n^r > \left|\frac{u_{n+r}}{u_n}\right| > |\rho|^r \quad \therefore \quad |\rho|^r a_x^r |u_n| > |\rho|^r \alpha_n^r |u_n| > |u_{n+r}| > |\rho|^r |u_n|$$

y para todos los valores de $r \geq 1$

$$|u_n| \sum_1^\infty {}_r |\rho|^r a_x^r > |u_n| \sum_1^\infty {}_r |\rho|^r \alpha_n^r > \sum_1^\infty {}_r |u_{n+r}| > |u_n| \sum_1^\infty {}_r |\rho|^r$$

Si se verifica que $1 > |\rho| a_x > |\rho|\alpha_n$ los sumatorios comprenden a progresiones geométricas de razón menor que la unidad, e infinitos términos, luego es:

(13) $$|u_n| \frac{|\rho| a_x}{1-|\rho| a_x} > |u_n| \frac{|\rho|\alpha_n}{1-|\rho|\alpha_n} > \sum_1^\infty {}_r |u_{n+r}| > |u_n| \frac{|\rho|}{1-|\rho|}$$

Desigualdades, que nos permiten determinar un límite superior y otro inferior, del error absoluto cometido al considerar como suma de la serie , hasta el término de subíndice n en función de valores ya utilizados, para sumar la serie.

Para $\rho > 0$, como la serie además de convergente es de signos alternados , se sabe que el valor absoluto del resto, es inferior al del primer término despreciado:

$$|R_n| < |u_{n+1}| = \rho^{n+1} \frac{S_x^{(n+1)}}{D_x}$$

Por otra parte se tiene que:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| = |\rho| \frac{S_x^{(n)}}{S_x^{(n-1)}} = |\rho|\alpha_n \quad \therefore \quad |u_{n+1}| < |u_n||\rho|\alpha_n$$

de donde resulta:

$|R_n| < |u_n||\rho|\alpha_n = |\mathcal{E}_n|$ límite, del error, que se prevee.

Luego, considerando como valor de a'_x , la suma de los primeros términos de la serie, cometemos un error $\mathcal{E}_n$ (por exceso si $u_n > 0$ y defecto si $u_n < 0$) tal, que no supera en valor absoluto al del último término considerado u_n multiplicado por $\rho\,\alpha_n$, siendo : $u_n = \dfrac{S_x^{(n)}}{D_x}\rho$; $\rho = \dfrac{i'-i}{1+i}$; $\alpha_n = \dfrac{S_x^{(n)}}{S_x^{(n-1)}}$

En particular para:

$$a'_x \equiv {}_1a'_x = a_x - \rho \frac{S_x}{D_x} \qquad \text{es } |\mathcal{E}_1| = |u_1||\rho|\alpha_1 = |\rho| \frac{S_x}{D_x} |\rho| \frac{S_x}{N_x}$$

$$a'_x \equiv {}_2a'_x = a_x - \rho \frac{S_x}{D_x} + \rho^2 \frac{S_x^{(2)}}{D_x} \qquad |\mathcal{E}_2| = |u_2||\rho|\alpha_2 = \rho^2 \frac{S_x^{2}}{D_x} |\rho| \frac{S_x^{(2)}}{S_x}$$

Comprobaciones.

10.- Según lo expuesto es:

$$a'_x = a_x - \rho \frac{S_x}{D_x} + R_1$$

Tengamos la tabla H^m (Makehan, King) 3% y querramos hallar $a_x^{3\frac{1}{2}\%} = a'_x$ es:

$$\rho = \frac{i'-i}{1+i} = \frac{0,035-0,030}{1+0.03} = 0,004855$$

disponiendo en un cuadro los valores, tendremos:

x	$a_x^{3\%}$	$\rho \frac{S_x}{D_x}$	$_1a'_x = a_x - \rho \frac{S_x}{D_x}$	error límite	valor exacto	error observado absoluto	relativo
10	24.134	2.372	21.762	.246	21.940	.178	0,82
20	22.064	1.954	20.110	.182	20,245	.135	0,67
30	19.895	1.546	18.349	.128	18.441	.092	0,50
40	17.177	1.130	16.047	.080	16.103	.056	0,35
50	13.878	0.738	13.140	.043	13.172	.032	0,24
60	10.223	0.414	9.809	.019	9.823	.014	0,14
70	6.656	0.191	6.465	.007	6,470	.005	0,08
80	3.702	0.069	3.633	.002	3.634	.001	0,03
90	1.686	0.019	1.667	.000	1.667	.000	0,00

habiendo simbolizado como anteriormente: $\mathcal{E}_1 = |u_1| \rho \alpha_1 = \rho \frac{S_x}{D_x}$ $\rho \frac{S_x}{N_x}$

De la observación del cuadro surge que el error límite previsto $\mathcal{E}_1$, es bastante pr'óximo al error real R_1, de manera pues que considerando a $\mathcal{E}_1$, como valor del resto de la serie R_1, se obtendrá en el presente caso, valores más próximos a los verdaderos, pero por exceso, puesto que $R_1 < \mathcal{E}_1$. En el cuadro siguiente se vé nuevamente confirmada, la observación.

Cuadro comparativo de los resultados obtenidos al calcular rentas vitalicias al $5\frac{1}{2}$, en base a los valores de conmutación al 5% de la tabla de mortalidad H^m

x	$a_x^{5\%}$	$\rho \frac{S_x}{D_x}$	$\rho^2 \frac{S_x^{(2)}}{D_x}$	1º aprox. $5\frac{1}{2}\%$ $_1a'_x = a_x - \rho \frac{S_x}{D_x}$	2º aprox. $5\frac{1}{2}\%$ $_2a'_x = a_x - \rho \frac{S_x}{D_x} + \rho^2 \frac{S_x^{(2)}}{D_x}$	valor exacto $a_x^{5\frac{1}{2}\%}$	error observ. 1º apr $\lvert R_1 \rvert$	error observ. 2ºapr $\lvert R_2 \rvert$	límite error previsto 1º apr $\lvert \mathcal{E}_1 \rvert$	límite error previsto 2ºapr $\lvert \mathcal{E}_2 \rvert$
20	16.063	1.141	.071	14.922	14.993	14.988	.066	.005	.081	.0044
30	14.991	.964	.053	14.027	14.080	14.077	.050	.003	.062	.0029
40	13.468	.756	.036	12.712	12.748	12.747	.035	.001	.043	.0017
50	11.371	.530	.021	10.841	10.862	10.861	.020	.001	.025	.0008
60	8.767	.320	.010	8.447	8.457	8.457	.010	.000	.012	.0003
70	5.962	.157	.004	5.805	5.809	5.809	.005	.000	.004	.0001
80	3.443	.061	.001	3.382	3.383	3.383	.001	.000	.001	.0000
90	1.612	.018	.000	1.594	1.594	1.594	.000	.000	.000	.0000

CONMUTACIONES DE 2º ORDEN, DE LA TABLA DE MORTALIDAD H^m

x	$S_x^{(2)}$ (4%)	$S_x^{(2)}$ (5%)	x	$S_x^{(2)}$ (4%)	$S_x^{(2)}$ (5%)
0	758.136.480,6	482.253.137	50	12.858.096,62	5.838.168,6
1	713.523.885,6	450.898.144	51	11.391.848,62	5.131.018,7
2	671.243.307,6	421.399.003	52	10.064.101,32	4.496.051,2
3	631.167.466,6	393.648.164	53	8.864.612,026	3.927.315,4
4	593.187.782,6	367.545.794	54	7.783.686,326	3.419.238,3
5	557.203.515,6	343.002.818	55	6.812.157,826	2.966.605,9
6	523.119.908,6	319.929.900	56	5.941.368,326	2.564.545,5
7	490.847.255,6	298.246.854	57	5.163.148,426	2.208.508,9
8	460.300.391,6	277.877.152	58	4.469.799,426	1.894.256,4
9	431.398.265,6	258.748.515	59	3.854.075,926	1.617.841,7
10	404.063.589,6	240.792.568	60	3.309.169,026	1.375.597,4
11	378.222.549,6	223.944.551	61	2.828.690,026	1.164.121,3
12	353.804.560,6	208.143.072	62	2.406.655,326	1.080.263,3
13	330.742.065,6	193.329.902	63	2.037.471,326	821.112,7
14	308.970.372,6	179.449.790	64	1.715.919,926	683.986,3
15	288.427.507,6	166.450.299	65	1.437.144,626	566.416,9
16	269.054.086,6	154.281.660	66	1.196.636,826	466.142,0
17	250.793.205,6	142.896.636	67	990.222,426	381.093,2
18	233.590.336,6	132.250.404	68	814.048,726	309.385,9
19	217.393.239,6	122.300.443	69	664.571,526	249.309,1
20	202.151.882,6	113.006.434	70	538.542,126	199.315,6
21	187.818.367,6	104.330.161	71	432.994,626	158.012,46
22	174.346.858,6	96.235.420	72	345.233,126	124.151,37
23	161.693.514,6	88.687.928	73	272.818,726	96.619,88
24	149.816.421,6	81.655.232	74	213.556,726	74.432,01
25	138.675.522,6	75.106.623	75	165.483,326	56.719,42
26	128.232.549,6	69.013.050	76	126.852,426	42.722,61
27	118.450.951,6	63.347.037	77	96.122,126	31.782,30
28	109.295.825,6	58.082.601	78	71.941,026	23.330,91
29	100.733.848,6	53.195.175	79	53.134,556	16.884,22
30	92.733.210,6	48.661.533	80	38.690,996	12.033,20
31	85.263.548,6	44.459.720	81	27.747,506	8.436,05
32	78.565.885,6	40.568.985	82	19.576,156	5.810,56
33	72.072.569,6	36.969.717	83	13.570,136	3.926,73
34	66.027.217,6	33.643.386	84	9.230,146	2.599,794
35	60.404.660,6	30.572.486	85	6.151,216	1.683,611
36	55.180.891,6	27.740.482	86	4.009,986	1.064,573
37	50.333.016,6	25.131.758	87	2.552,646	655,998
38	45.839.207,6	22.731.570	88	1.583,676	393,099
39	41.678.656,6	20.526.000	89	955,540	228,541
40	37.831.532,6	18.501.914	90	559,405	128,579
41	34.278.941,6	16.646.920	91	316,939	69,802
42	31.002.886,6	14.949.331,8	92	173,276	36,442
43	27.986.229,6	13.398.129,2	93	91,106	18,224
44	25.212.657,6	11.982.927,0	94	45,882	8,687
45	22.666.647,6	10.693.941,1	95	22,023	3,916
46	20.333.434,6	9.521.957,9	96	9,993	1,647
47	18.198.980,6	8.458.305,4	97	4,230	,629
48	16.249.945,6	7.494.825,7	98	1,626	,206
49	14.473.659,6	6.623.848,9	99	,536	,052
			100	,136	,007

BIBLIOGRAFIA

Sobre el punto:

Cambio de interés en las rentas vitalicias.

1.- E. F. Spurgeon - Life Contingencies (Cambridge 1929 pag.40)

2.- H. Poterin du Motel - " Théorie des Assurances sur la vie" (1899 pag. 198)

3.- Henri Galbrum - Assurances sur la vie, Calcul des primes (pag125).

En el Giornalle dell'instituto Italiano degli Attuari.

4.- P. Crosato - Sulla variazione delle rendite al variare del tasso del interesse.(Enero 1933).

5.- R. Frucht e A. Vellat - " Un modo semplice di extrapolare le rendite vitalizie, secondo il tasso de interesse. (Octubre 1931).

6.- P. Mazzoni - Sul metodi dei quozienti per extrapolare le rendite vitalizie. (Abril 1932).

7.- G. Usai - Sui metodi di extrapolarzione parabólica e dei quozienti e loro applicazione alle rendite vitalizie. (Oct.1933)

En el "Journal of The Institute of Actuaries."

8.- Meikle, I - On a Method of Obtaining the Value of a Life Annuaity of Interest from the Value at another Given Rate.,III page 325.