



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Económicas
Maestría en Gestión Económica y Financiera de Riesgos

**Funciones de densidad neutrales al riesgo y de volatilidad implícita que
contemplan profundidad de mercado.**

Tesis para obtener el título de Magister
en Gestión Económica y Financiera de Riesgos
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Buenos Aires

Dr. Nicolás S. Botbol

Director de tesis: Mg. Mauro de Jesús

Buenos Aires, Septiembre 2015.

Resumen

Dado un activo de renta variable con precio S_t al momento t , la familia de especies de opciones con subyacente S y diferentes strikes (en tiempo T y precio K) determinan -mediante modelos teóricos de valuación de opciones- para cada par (T, K) , un valor de volatilidad implícita, que conforman una superficie de volatilidad implícita, que para cada tiempo de observación fijo T_0 , se conocen como sonrisa de volatilidad. Estas canaletas se desforman de acuerdo a las “sensaciones” bullish o bearish del mercado. Existe una amplia familia de técnicas que se utilizan para modelar estas superficies, que luego son utilizadas para obtener modelos de funciones de distribuciones de probabilidades de los precios esperados por los operadores del mercado.

Los modelos tradicionales calibran superficies sin contemplar la liquidez de los activos considerados, conduciendo a distorsiones entre los datos observados y el verdadero sentimiento de mercado, observaciones que realizamos y fundamentamos empíricamente en cinco ‘Hechos’. En los modelos tradicionales, no se contempla que la falta de liquidez -presente en todo el mercado de equity- conlleva a la invalidez de la put-call parity, y por lo tanto a la necesidad de considerar ambos tipos de opciones. Tampoco contemplan que las opciones más fuera del dinero o profundamente en él son generalmente muy ilíquidas y los precios relevados a un instante determinado, no corresponde a opciones operadas en igual instante de tiempo.

En este trabajo se describe en primera instancia la teoría relativa al pricing de opciones y la construcción de curvas y superficies de volatilidad, se exhiben los modelos más tradicionales que permiten derivar fórmulas para éstas y para el cálculo de las funciones de densidad mencionadas. A continuación, proponemos un modelo para la elaboración de curvas y superficies de volatilidad implícita que sí consideran la iliquidez en las opciones fuera del dinero, y por lo tanto capta más adecuadamente el sentimiento real de mercado. Para el modelo propuesto se consideran las cotas de Merton de no arbitraje y se muestra que para vencimientos largos este modelos satisface mejor las restricciones teóricas. Finalmente, se propone una construcción de funciones de densidades neutrales al riesgo que contemplan tanto el problema de la iliquidez, las violaciones de las cotas de no arbitraje, y la invalidez empírica de la put-call parity.

Índice general

1. Introducción.	7
2. Volatilidad implícita.	13
2.1. Introducción a las opciones financieras.	14
2.1.1. Definiciones y notación.	14
2.1.2. Interpretación y utilización de las opciones.	15
2.1.3. Notación.	16
2.1.4. Valuación y la ecuación diferencial de Black-Scholes-Merton.	16
2.1.5. Volatilidades y Griegas.	19
2.2. Volatilidad implícita.	22
2.2.1. Definición de volatilidad implícita.	22
2.2.2. Consideraciones sobre las hipótesis de Black-Scholes y la volatilidad implícita.	23
2.3. Sonrisa y superficie de volatilidad implícita.	23
2.3.1. Sonrisa y superficie: consideraciones previas.	24
2.3.2. Definición de sonrisa de volatilidad implícita.	26
2.3.3. Reversal risk y Flyes. Asimetría y curvatura de la sonrisa.	28
2.3.4. Desigualdades de no arbitraje de Merton para la pendiente de la sonrisa de volatilidad implícita.	31
3. Función de densidad de probabilidades.	33
3.1. Función de densidad neutral al riesgo.	33
3.2. Función de densidad real.	36
4. Modelado de la sonrisa de volatilidad.	39
4.1. Modelo cuadrático para la volatilidad del call, vs sonrisa de volatilidad.	39
4.2. Observaciones sobre el modelo planteado.	40
4.3. Evidencia empírica de las observaciones.	41
4.4. Propuesta alternativa para un modelo de sonrisa de volatilidad.	43

4.4.1.	Elaboración de las sonrisas de volatilidad de call y put.	44
4.5.	Ajustes y resultados del modelo propuesto.	45
4.5.1.	Ajustes y resultados del modelo para la sonrisa de volatilidad de call y put.	45
4.5.2.	Desigualdades de no arbitraje de Merton.	46
5.	Modelos de funciones de densidad.	49
5.1.	Ajustes y resultados del modelo propuesto.	50
5.2.	Dificultades que persisten en el modelo propuesto.	52
6.	Conclusiones y trabajo futuro.	55
6.1.	Conclusiones.	55
6.2.	Trabajo futuro.	55
	Referencias	57

Capítulo 1

Introducción.

La ingeniería financiera - rephraseando a Emanuel Derman (Derman, 2008) - se basa fuertemente en herramientas matemáticas, de análisis matemático y cálculo, teoría de probabilidades y procesos estocásticos, la simulación numérica y estocástica, entre otros. Ahora, si bien estas áreas pueden ser axiomatizadas y pueden capturar algunas de las características esenciales de la incertidumbre que tratamos en los mercados, la pregunta principal es ¿cuán exactamente describen el comportamiento de los activos o instrumentos financieros? Los mercados están plagados de anomalías que violan las teorías estándares (o, más exactamente, las teorías se ven afectadas por su incapacidad para dar cuenta de manera sistemática para las distribuciones de activos reales). Por ejemplo, la magnitud de la rentabilidad negativa en un solo día durante la crisis de 1987 es tantas desviaciones estándar de distancia de una distribución normal con desviación estándar histórica del mercado, con probabilidad de ocurrencia casi nula a lo largo de una vida humana (cf. (Bates, 1991)). Pero estos fenómenos tan fuera de escala y de patrones deben ser modelados, y son una evidencia clara de que muchos de los modelos ajustan bien en condiciones normales, pero no ajustan en contextos de estrés. En la vida cotidiana, toda la física es newtoniana.

La volatilidad es una de las variables de mercado más importantes de la práctica y la teoría financiera. Al no ser directamente observable *spot*, se requiere deducirla a partir de aquellas que sí lo son. El modelo de Black-Scholes se puede utilizar para estimar la volatilidad a partir de precios de las opciones que sí son observables. Invertiendo la fórmula Black-Scholes con datos de mercado del precio de una opción se obtiene la volatilidad implícita. Estos precios muestran una fuerte dependencia de los valores de la volatilidad en el precio de ejercicio y el tiempo hasta el vencimiento, lo cual hace que la volatilidad implícita se pueda escribir como función de estas dos variables. Esta dependencia, muestra una distorsión respecto de la volatilidad plana que el modelo prediría, conocida como la sonrisa de la volatilidad. El enfoque de la volatilidad implícita constante, que utiliza diferentes volatilidades de las opciones con diferentes precios de

ejercicios y vencimientos, funciona bien para la fijación de precios de opciones europeas simples (opciones vainilla) pero no ofrece soluciones adecuadas para la valoración de opciones exóticas o americanas, para lo cual es útil contar con funciones de densidades de precios (neutrales al riesgo). Este enfoque también produce factores de cobertura incorrectos (Gamma, Vega, Delta, etc.), incluso para las opciones simples. Uno de los enfoques usados prácticamente es utilizar un proceso de difusión de un factor con una función de la volatilidad dependiendo tanto del precio de los activos y momento actual, $\sigma(S_t, t)$. Este es un enfoque determinista y $\sigma(S_t, t)$ se conoce como la volatilidad local a partir de (Wilmott, 2007). Una clase diferente de los métodos se basa en los modelos de volatilidad estocástica (ver (Wilmott, 2007) y (Gatheral, 2006) para más detalles). Se demostró en (Dupire, 1997) y (Andersen y Brotherton-Ratcliffe, 1998) que la función de la volatilidad local puede ser determinada de forma única a partir de los call europeos de todas las precios de ejercicios y los vencimientos. En la práctica, los precios de calls europeos se limitan a un conjunto discreto muy escaso, lo cual dificulta la construcción de la sonrisa, lo cual lleva a interpolar y extrapolar los datos de precios de calls que faltan. Es fácil demostrar que este enfoque introduce potencialmente información de no-mercado en los datos. Un problema de reconstrucción de volatilidad (también conocida como una calibración de la volatilidad local) pertenece a una clase de problemas llamados ‘problemas inversos’. Se llaman mal planteado cuando un pequeño cambio en la entrada puede resultar en un gran cambio en la salida, y, como resultado, hay un número infinito de soluciones $\sigma(S_t, t)$ que coinciden con los datos de precios de mercado de opciones. Las letras griegas que representan las sensibilidades a un cambio en los parámetros subyacentes son muy sensibles a los perfiles de la superficie de volatilidad reconstruidas y no se puede calcular correctamente sin regularización del problema mal planteado. Muchos trabajos anteriores sobre la calibración de volatilidad local tal como (Derman y Kani, 1994), (Jackwerth y Rubinstein, 1996), y (Bouchouev y Isakov, 1997) utilizan un supuesto de un continuo juego completo de precios de las opciones call europeas, lo que tiene graves deficiencias, a saber, una necesidad de datos muy grande difícil de conseguir en la práctica. La regularización de Tikhonov se aplicó para estabilizar el problema inverso en (Jackson, Suli, y Howison, 1998), (Crépey, 2003), (Egger y Engl, 2005), y (Hanke y Rösler, 2005) y ha mostrados resultados razonables.

Para la calibración de la volatilidad se puede utilizar la fórmula Dupire (ver también (Hull, 2009)), que es una relación directa entre un continuo de precios (con diferentes precios de ejercicios y vencimientos) y la volatilidad local. Sin embargo, cuando sólo se conocen unos pocos precios, el cálculo de los derivados de la fórmula Dupire no es efectivo y otros métodos tienen que ser utilizados, como los desarrollados en (Avellaneda, Friedman, Holmes, y Samperi, 1997) y (Bodurtha Jr, 1998). Entre ellos, en (Coleman y Li, 1996) se introduce un procedimiento paramétrico que mejora las contribuciones anteriores. Además, en (Jiang, Chen, Wang, y Zhang, 2003) los autores han establecido una base matemática para la formulación de este problema como un problema de control.

Una de las principales aplicaciones de la determinación de funciones de volatilidad implícitas es la obtención de funciones de densidad neutrales al riesgo. Las funciones de densidad implícitas neutrales al riesgo (RND por su sigla en inglés), obtenidas de las secciones transversales de precios de las opciones observadas en el mercado han ganado considerable atención en los últimos años, gracias a sus múltiples aplicaciones en finanzas. Entre estas, en el campo de la valuación de opciones, la RND implícita permite determinar el precio de los derivados exóticos ilíquidos de una manera consistente con el de aquellos con suficiente liquidez. Por otro lado, los bancos centrales, entre otros, utilizan el RND para evaluar las expectativas de los participantes del mercado acerca del precio del subyacente de los activos en el futuro (cf. (Bahra, 1997), (Cooper y Talbot, 1999),). AitSahlia y Lo (Ait-Sahalia y Lo, 2000) y Jackwerth (Jackwerth, 2000) comparan el RND con la densidad objetivo de recuperar las preferencias de riesgo de los inversores, mientras que Bates (Bates, 1996) utiliza la RND para estimar los parámetros del proceso estocástico subyacente que genera la RND, y obtener información sobre el proceso de precios.

Siempre que exista un continuo de opciones call europeas con el mismo tiempo hasta el vencimiento (time-to-maturity) y precios de de ejercicios (strikes) que vayan desde cero hasta el infinito con un solo activo subyacente, podemos aplicar el resultado fundamental de Breeden y Litzenberger (Breeden y Litzenberger, 1978) para recuperar plenamente la RND (el trabajo de Breeden y Litzenberger se basa en los trabajos germinales de Arrow (Arrow, 1964) y Debreu (Debreu, 1959)). En ese trabajo, los autores han demostrado que la RND descontada a tiempo t es igual a la segunda derivada del precio del call europeo respecto al precio de ejercicio. Sin embargo, en la práctica, los contratos de opciones sólo están disponibles para un conjunto discreto de precios de ejercicio dentro de un rango relativamente pequeño alrededor de los valores de strikes at-the-money. Por lo tanto, todos los métodos para estimar funciones de RND se reducen a la determinación de funciones de volatilidad implícita por interpolación entre precios de ejercicio disponibles, extrapolando.

De acuerdo con el artículo de Jackwerth (Jackwerth, 1999), las técnicas de estimación de DNR podrían ser esencialmente clasificadas en tres enfoques: un enfoque que consiste en la estimación de la función precio de la opción, un enfoque de determinación de la sonrisa volatilidad implícita y los métodos de aproximación directa de la RND. En los dos primeros, luego, se utilizan los resultados de Breeden y Litzenberger (Breeden y Litzenberger, 1978) para recuperar el RND. En todos estos casos, se encuentran problemas prácticos de suma relevancia, principalmente metodológico-computacionales debido a las complicadas optimizaciones involucradas, y de mercado a causa de la constante falta de datos e iliquidez. En el método directo se presume explícitamente una determinada forma funcional del RND como, por ejemplo, una mezcla de distribuciones lognormal o una densidad de tipo GB2 (cf. (Bookstaber y McDonald, 1987)). El método indirecto, por otro lado, especifica el proceso estocástico que conduce el precio del activo subyacente como por ejemplo procesos de volatilidad estocástica y procesos

con saltos (cf. (Bates, 1996) y (Trautmann y Beinert, 1999)). En el enfoque basado en la determinación de la sonrisa de volatilidad, originalmente introducido por Shimko (Shimko, Tejima, y Van Deventer, 1993) se ajusta a una función a través de las volatilidades implícitas observadas. Entonces, de esta función de volatilidad implícita se traduce en la RND como en el primer enfoque, superand muchas de las dificultades numéricas emergentes que surgen de la estimación directa de la función de precio del call. La razón principal es que la traducción de precios de las opciones en las volatilidades implícitas elimina una cantidad sustancial de no-linealidades (cf. (Rosenberg, 1999)). En (Shimko y cols., 1993), el autor señala que las volatilidades implícitas tienden a ser más suave que el precio de las opciones lo que conduce a una mejor performance del modelo.

Al comparar el enfoque de sonrisa volatilidad implícita y el enfoque de aproximación directa de la función RND hay cierta evidencia empírica de que la primera propuesta es superadora. El enfoque de sonrisa de volatilidad implica en primer lugar, abordar la problemática de que la función de la volatilidad implícita es desconocida más allá de la familia de precios de ejercicio negociados. Con el fin de obtener una RND bien definida, la función de la volatilidad implícita debe ser interpolada o, equivalentemente, las colas de la RND tienen que ser modeladas ad-hoc. En segundo lugar, hay que asegurarse de que la función de la volatilidad implícita construida no permite el arbitraje. Este es un punto crucial para determinar modelos robustos y consistentes con las prácticas de mercado. Esto requiere, en primera medida que la correspondiente RND no sea negativa en ningún strike, pero esta condición no basta, y este último problema, si bien ha sido abordado en la literatura existente, consideramos que no con la rigurosidad necesaria.

Shimko, en (Shimko y cols., 1993), supone que la volatilidad implícita es una función cuadrática del precio de ejercicio para los contratos negociados, y que es constante fuera de este rango, lo que es equivalente a suponer que colas se distribuyen lognormalmente, y, por construcción, el método no puede garantizar que los precios sean martingalas. La misma crítica se aplica el método de Campa et al. (Campa, Chang, y Reider, 1998). En esta sintonía, Brown y Toft (Brown y Toft, 1999) realizan una modelización polinómica de mayor grado para determinar la sonrisa de la volatilidad implícita. Para evitar el arbitraje, se suele requerir que la función converja con algunas volatilidades implícitas dadas de forma exógena correspondientes a precio de ejercicio mayores e inferiores. En primer lugar, esto es en general insuficiente para asegurar no-arbitraje, y ah-doc. El método tiene la desventaja de que la forma de la función de la volatilidad implícita depende de los valores límite correspondientes a las volatilidades implícitas dadas.

Este trabajo consiste en considerar las muy cotidianas situaciones de mercado en donde los modelos tradicionales de relevamiento de expectativas via opciones fallan, y proponer un modelo alternativo que -creemos- se adecua mejor y refleja mejor el sentimiento de mercado.

Puntualmente, en este trabajo, la suprema imperfección de mercado a considerar es la

iliquidez del mercado de opciones, principalmente en los tramos extremos (profundamente en dinero o profundamente fuera del dinero). Este problema, es causante de buena parte de otros problemas que hemos denominado Hechos (1) a (5) a lo largo del trabajo, y que motivan los artilugios teóricos y prácticos a considerar para un mejor ajuste del modelo tanto a los resultados teóricos como a la práctica de mercado.

En sintonía con lo mencionado anteriormente, la iliquidez genera en los modelos dificultades que suelen conducir a parametrizaciones de la sonrisa que no satisfacen las condiciones de no-arbitraje, y que se traducen luego a determinaciones de funciones de densidades no-robustas. El modelo que se plantea en este trabajo toma parte de las optimizaciones consideradas en (Monteiro, Tütüncü, y Vicente, 2011), incorporando ponderadores por *open interest* para la optimización en la determinación de la función de volatilidad, pero en lugar de minimizar el cuadrado de la diferencia de los precios de opciones teóricas y de mercado, directamente se minimiza el error de volatilidad como se describe en la Sección 4.4. Esto conlleva, además de mejoras de eficiencia computacional en los cálculos de optimización, mayor permanencia en las regiones de no-arbitraje. Estas últimas condiciones son evaluadas en término de la verificación de cotas de no-arbitraje de Merton, descritas en la Sección 2.3.4, y cuyos resultado se muestran en la Sección 4.5.2. Los volúmenes de open interest son, al igual el volumen operado al momento de relevamiento de los datos, elementos de fundamental consideración. En particular, los primeros reflejan de manera más clara los valores de strikes de interés de los operadores de mercado, y llevan a nuestro juicio a menores distorsiones provocada por el trading en el corto plazo.

En relación a la determinación de la función RND, luego de la determinación de la función de densidad implícita, abordamos la problemática desde una perspectiva diferente que permite incorporar el “sentimiento de mercado” expresado no sólo en las opciones call, sino también puts. Para esto, ponderamos las DNR que se obtienen a partir de las call y puts por el volumen de interés abierto existente strike a strike, metodología que puede verse en el Capítulo 5.

Capítulo 2

Volatilidad implícita.

La aceptación de la volatilidad implícita (cf. Sección 2.2.1) como una clase de activos que puede ser negociado directamente está creciendo (Neftci, 2008, Cap. 11), así como la utilización de este instrumento como indicador de sentimiento de mercado (Black y Scholes, 1973; Black, 1989; Black y Litterman, 1991a, 1991b, 1992; Bookstaber y McDonald, 1987; Weinberg, 2001). Los principales actores en el trading de volatilidad son los inversores institucionales, los fondos de cobertura, y los bancos. Este aumento de la liquidez facilita la ingeniería de productos estructurados fundamentados en volatilidad, sin embargo veremos que muchas de las críticas que se puede hacer a los modelos actualmente en vigencia y utilizados en el mercado se basan en que la liquidez no es constante, ni suficiente para los distintos precios de *strike*. Esto ha llevado a prestar principal atención a distintas deformaciones de la curva de volatilidad implícita, en particular, al trading de la *skewness* de la sonrisa de volatilidad, y naturalmente de la volatilidad de la volatilidad.

Parece que los inversores institucionales están migrando a varios tipos de estrategias para ir larga exposición a la volatilidad implícita. Las demanda de estrategias de volatilidad a futuro para cubrir los productos estructurados también va en aumento, sobre todo entre los bancos privados. Estos instrumentos de volatilidad puros tienen sentido para los inversores institucionales, porque la volatilidad es a la vez un diversificador a la baja y una cobertura global en una cartera de renta variable.

Los inversores institucionales, como los fondos de pensiones y compañías de seguros claramente necesitan diversificar. Si bien durante un período se estuvieron moviendo a otras clases de activos, como los fondos de cobertura, no han querido reducir su exposición a los mercados de renta variable, sobre todo cuando hay una buena probabilidad de alza en los mercados de renta variable impulsada por políticas monetarias como los QE en Estados Unidos y actualmente en Europa y Japón que se desarrollaron post-subprime.

El lanzamiento de productos de volatilidad, como es el índice de volatilidad VIX del CBOE S & P500, y sus variantes, fue un factor clave de la demanda de los inversores para los productos

de volatilidad, no simplemente porque hizo más fácil su trading, sino porque en el VIX muchos inversores ven una de las herramientas más potentes para medir miedo en el mercado, es decir, la volatilidad como medida de expectativas de precios de mercado.

En este capítulo se apunta a estudiar qué es la volatilidad implícita, cómo se construye la superficie de volatilidad, cuáles son los principales factores de mercado que determinan la estructura temporal, cómo se adaptan las condiciones de tasa no-constante en el modelo de cálculo de volatilidad, y otras preguntas relacionadas que conforman el background teórico necesario para la correcta comprensión de los resultados centrales. Este estudio implica en particular adentrarse en el estudio de las opciones y revisar la óptica desde la cual se estudia la volatilidad y otros momentos de la función de densidad descontadas por el mercado para el precio del subyacente. Con este fin, nos detenemos en el modelo teórico de base sobre el cuál se construyen los pilares esenciales, modelo de valuación de opciones de Black-Scholes, y el estudio del comportamiento de las Griegas asociadas a cada opción, que nos revelan información extra sobre las opciones, y sobre su volatilidad.

2.1. Introducción a las opciones financieras.

Este capítulo es una introducción a los métodos utilizados en el tratamiento y utilización de opciones sobre instrumentos financieros.

En este capítulo y el siguiente, desarrollaremos un resumen de la relación entre los precios y la volatilidad de las opciones, y las principales funciones (las Griegas) que permiten estudiar el comportamiento de estos derivados financieros.

2.1.1. Definiciones y notación.

Los contratos de opciones generalmente se dividen en las categorías de *opciones vainilla* y *opciones exóticas* en cuanto a la complejidad del contrato, en opciones americanas o europeas en cuanto a libertad para el plazo de ejercicio dentro del período de madurez de la opción, y opciones de venta o compra en función de la naturaleza del derecho que otorga sobre el subyacente al tener del derivado. Al discutir las opciones, es una buena práctica para comenzar con un modelo de referencia simple, comprender los fundamentos de las opciones, y luego extender el enfoque de los instrumentos más complicados. Este simple punto de referencia será una *opción plain vanilla* tratada en el marco del modelo Black-Scholes.

El comprador de una opción no compra el activo subyacente, sino que compra un derecho. Si este derecho sólo puede ejercerse en la fecha de vencimiento, la opción es europea. Si se puede ejercer en cualquier momento durante el período especificado, la opción se dice que es americana. Una opción de Bermudas es un contrato intermedio, dado que puede ser ejercida en más de una de las fechas durante la vida de la opción.

En el caso de un *call plain vanilla Europea*, el tenedor de la opción ha comprado el derecho a comprar el activo subyacente a un precio determinado, llamado precio de ejercicio o strike price, en una fecha específica, llamada fecha de caducidad o vencimiento. En el caso de la opción de *venta plain vanilla Europea*, el tenedor de la opción ha comprado el derecho a vender el subyacente al precio de ejercicio y en la fecha de caducidad pactada.

Opciones de estilo americano pueden ejercerse en cualquier momento hasta el vencimiento y por lo tanto suelen ser más caras (ya que otorgan un derecho extra que las opciones europeas). En la fecha de vencimiento, las opciones dejan de existir.

2.1.2. Interpretación y utilización de las opciones.

Existe al menos dos perspectivas muy distintas para interpretar qué es una opción financiera, asumiendo que el lector ya conoce su definición formal.

En un primer lugar, en el enfoque de libro de texto tradicional (cf. (Hull, 2009)), las opciones se presentan como instrumentos de dirección. Es decir, una opción de compra se convierte in-the-money con la suba y por lo tanto rentable si el precio del subyacente aumenta, indirectamente, asociándola con una visión optimista (bullish). El tratamiento de las opciones de venta es similar. Una posición larga en Puts es vista como apropiada para un inversor que cree que el precio del activo subyacente va a disminuir. En este sentido, un long-call representa y capitaliza el upside del subyacente, mientras que un long-put capitaliza la baja de su precio (para un tratamiento diferente sobre esta perspectiva consultar (Guziec, 2009)).

En segundo lugar, ortogonalmente al comportamiento del precio, hay quienes sostienen, que ver a las opciones de esta manera es engañosa si estamos interesados en analizar el mercado interbancario o interdealer. De hecho, para algunos inversores institucionales, y desde un rol *market-maker* entender a las opciones como herramientas direccionales es disfrazar el aspecto fundamental de estos instrumentos, a saber, que las opciones son herramientas para negociar la volatilidad de las cotizaciones del subyacente. La intuición detrás de estos dos puntos de vista de opciones es bastante diferente. Un creador de mercado con una posición larga neta en opciones es alguien que está esperando un aumento en la volatilidad, y recíprocamente. Esto se puede resumir, como que las principales variables de nuestro interés son valores y variaciones de las Griegas *Theta* y *Vega*. En este sentido, los creadores de mercado miran a los Calls y Puts europeos como si fueran objetos idénticos, ya que ambos sirven para tradear volatilidad. No así a las opciones americanas, ya que ahí se produce discrepancia por la asimetría de la conveniencia de ejercer antes del vencimiento. Además, en algunos mercados pequeños, la falta de liquidez de alguna de estas especies hacen que este tratamiento conceptualmente adecuado, no sea implementable.

En este texto, la posición que adoptamos es que las opciones son ambas cosas, instrumentos direccionales fuertemente sensibles a la volatilidad, y por lo tanto, para determinar que

perspectiva adoptar depende fuertemente del plazo al vencimiento $T - t$, y de las magnitudes de los coeficientes de tendencia y volatilidad del subyacente.

Desde el punto de vista de un operador de mercado, las opciones son instrumentos de volatilidad. Un pequeño inversor que es dueño de call en un activo, S_t , puede sentir que un movimiento al alza persistente del precio de este activo le es favorable o desfavorable, en cambio, para un creador de mercado, le puede resultar más conveniente un aumento en la volatilidad, para conducir a una suba en el precio de la prima, independientemente de la dirección del mercado, y lo mismo si está long en puts. Este sentido, se observa que en primer lugar, las opciones de compra y venta son considerados como instrumentos similares por parte de los profesionales del mercado, y por lo tanto desde esta óptica tienen que ver con las volatilidades y no con la dirección de los precios. Los profesionales del mercado están interesados en la diferencia entre las volatilidades diarias reales de precios de las acciones y las volatilidades implícitas en las opciones. Entonces, podemos referirnos a dos tipos diferentes de las ganancias derivadas de la volatilidad. Uno, en relación a grandes movimientos en el precio del subyacente, que conduce a *ganancias gamma*, y el otro, de la volatilidad implícita, que conduce a *ganancias vega*.

2.1.3. Notación.

Los precios de ejercicio o *strikes* los denotamos por K , la fecha de vencimiento por T y el precio o valor del instrumento subyacente al momento t se denotará por S_t . El precio justo del contrato al instante t se denota por $C(t)$ si es un call, y por $P(t)$ si es un put. Estos precios dependen de las variables y parámetros en los que se basa el contrato. Supongamos que se trata de un contrato call sobre un subyacente que cotiza a precio S_t , escribimos la función de valuación de opciones correspondiente como $C(t) = C(t, S_t | r, \sigma, T, K)$, donde, σ es la volatilidad (histórica) de S_t y r es la tasa de interés al contado libre de riesgo y D la tasa de dividendos que paga el subyacente que se suponen constantes. En lo sucesivo, en forma compacta, esta fórmula se puede expresar como $C(t) = C(S_t, t)$ y similarmente $P(t) = P(S_t, t)$.

2.1.4. Valuación y la ecuación diferencial de Black-Scholes-Merton.

La convexidad del payoff da un argumento de arbitraje que dice que para $t < T$ (siendo T el momento de strike) debe satisfacerse la siguiente ecuación diferencial estocástica con su condición de borde (cf. (Black y Scholes, 1973; Hull, 2009; Lin y cols., 2006; Neftci, 2008)):

$$\begin{cases} \frac{1}{2}C_{ss}\sigma^2S_t^2 + rC_sS_t - rC + C_t = 0 \\ C(T) = \text{máx}\{S_T - K; 0\} \end{cases} \quad (2.1)$$

La ecuación anterior, se interpreta como que el precio del call C en momento t debe

satisfacer la primera condición, con condición de contorno para tiempo $t = T$ la segunda condición, que representa el pay-off de un call al vencimiento del contrato. La Ecuación (2.1) puede ser resuelta analíticamente bajo las condiciones mencionadas en 2.1.1, dando origen a la conocida fórmula de Black-Scholes para valorar opciones europeas.

Hipótesis 2.1.1. La opción es un *plain vanilla call*, con strike (T, K) . Para cada $t < T$, sea S_t el valor del subyacente al tiempo t , y $\{S_t\}_t$ es un proceso estocástico que satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = \mu(S_t)S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

donde W_t es un proceso de Wiener con la medida de probabilidad observable (Lin y cols., 2006). En particular, acá se asume que la volatilidad σ es constante, pero sin embargo el drift $\mu(S_t)S_t$ puede ser arbitrario, y la tasa de interés de referencia (risk-free) r es constante.

Si bien el subyacente puede pagar dividendos o cupones, no hay splits ni otros eventos corporativos durante el período $[t, T]$ que modifiquen el precio, y no existen costos de operaciones ni bid-ask spread en el mercado.

Bajo las hipótesis 2.1.1, suponiendo por simplicidad que $D = 0$, la ecuación diferencial 2.1 da origen a la siguiente solución única

$$C(t) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (2.2)$$

donde para $i = 1, 2$,

$$d_i = \frac{\log(S_t/K) + (r + (-1)^{i-1} \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \quad (2.3)$$

y $N(x)$ denota la función de distribución acumulada de una Normal estándar

$$N(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du,$$

y $f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ es la función de densidad.

Los detalles y deducciones de estos resultados pueden encontrarse en (Lin y cols., 2006).

A continuación exhibimos un resultado técnico, pero inmediato, que nos permite entender el comportamiento de la solución (2.2) a la Ecuación (2.1) cercanos al vencimiento del contrato.

Observación 2.1.2. Si $K = S_t$, se tiene que $d_i = (r + (-1)^{i-1} \sigma^2/2) \sqrt{T-t}/\sigma$.

En particular, si r, σ y (T, K) se asumen constante, se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow T} f(d_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_t \neq K \\ +\infty & \text{si } S_t = K \end{cases}$$

y más aún,

$$\lim_{t \rightarrow T} f(d_i)/\sqrt{T-t} = \begin{cases} 0 & \text{si } S_t \neq K \\ +\infty & \text{si } S_t = K \end{cases}$$

La Observación 2.1.2 tiene una clara interpretación en término de las funciones de densidad del precio conforme se acerca el vencimiento. La función de densidad converge a una delta, incluso “más rápido que radicalmente sobre el tiempo restante”.

Observación 2.1.3. En esta fórmula, r, σ y (T, K) se asumen constante, y por lo tanto, son parámetros de la ecuación 2.2. Las variables de la ecuación son t y S_t , y por lo tanto, podemos escribir

$$C(t) = C(t, S_t | r, \sigma, T, K),$$

y que $C(t)$ como familia de funciones de S_t parametrizada por t converge uniformemente en S_t a $C(T)$, lo que escribimos $C(t) \xrightarrow{u} C(T)$.

El propósito de los resultados mencionados, es que comúnmente en el mercado esto no incide con los datos observados por problemas de liquidez:

Hecho 2.1.4 (1). *En la práctica, los restados en la Observación 2.1.3 no se ven reflejados ya que los contratos muy fuera del dinero dejan de operarse varios días antes de su vencimiento. Esto hace que los precios observados de las opciones out-of-the money no sean nulos, ya que corresponden a precios de fechas (muy) anteriores a t .*

Este hecho, motiva a la hora de construir una sonrisa de volatilidad (cf. Sección 2.3.2) y la función de densidad de probabilidades de precios implícitos (cf. Capítulo 3) la incorporación del volumen operado (cf. Hecho (3) 4.2.1 y Capítulo 4.4).

Se puede ver fácilmente que si $\sigma = 0$, el modelo de Black-Merton-Scholes no puede ser aplicado, pero además, carece de sentido ya que la ecuación diferencial de Black-Scholes pasa a ser una ecuación diferencial determinística. Cuando la volatilidad tiende a 0, a partir de la Fórmula 2.3, se tiene que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} d_i = \begin{cases} +\infty & \text{si } S_t > Ke^{-r(T-t)} \\ -\infty & \text{si } S_t < Ke^{-r(T-t)}, \text{ y por lo tanto, } \lim_{\sigma \rightarrow 0} C(t) = |S_t - Ke^{-r(T-t)}|. \\ 0 & \text{si } S_t = Ke^{-r(T-t)} \end{cases}$$

Esto dice que cuando la volatilidad es muy baja, el modelo valúa la opción (para que no haya arbitraje) como la diferencia entre el strike actualizado y el precio spot.

Los supuestos que subyacen a la derivación de la fórmula Black-Scholes son bastante restrictivos, esto se hace especialmente evidente por la forma en que tratamos opciones aquí,

enfaticando su uso como instrumentos de volatilidad. En particular, si las opciones se utilizan para negociar volatilidad, entonces ¿cómo se puede sostener el supuesto de volatilidad constante? En la Sección 2.2.1 discutiremos cómo se puede utilizar la fórmula de Black-Scholes para negociar volatilidad incluso cuando las hipótesis para su correcta derivación no se cumplen.

En este sentido, resulta interesante observar al menos desde el punto de vista teórico, que sucede con los precios de las primas cuando la volatilidad aumenta. En este caso, a partir de la Fórmula 2.3, se tiene que

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} d_1 = +\infty, \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} d_2 = -\infty, \quad \text{y por lo tanto, } \lim_{\sigma \rightarrow \infty} C(t) = S_t, \quad (2.4)$$

lo cual dice que la opción tiende en estos casos a capturar todo el valor del subyacente. Esto permite interpretar al precio de la prima como un proporcional del precio del subyacente en función de la volatilidad.

Cuando el activo subyacente es un instrumento de tipo de interés o en una moneda extranjera, aún más supuestos para el modelo de Black-Scholes dejan de ser válidos, tal es el caso de las (micro)devaluaciones que experimenta una moneda extranjera, que puede ser vista como un pago de dividendos desde el punto de vista de la depreciación del subyacente. Cuando estos supuestos están relajados, no se puede derivar una fórmula cerrada tipo (2.2) para resolver la Ecuación (2.1).

Por lo tanto, un operador de mercado puede que desee utilizar la fórmula Black-Scholes o variantes de la misma y, a continuación, ajuste la fórmula de alguna forma *ad hoc* a necesidad. Esto puede ser preferible a tratar de derivar nuevas fórmulas complicadas que pueden admitir supuestos más realistas. Además, aunque la fórmula Black-Scholes no es válida cuando los supuestos subyacentes cambian, su utilización incluso fuera de las hipótesis produce resultados que son sorprendentemente robustos (Fortune y cols., 1996). Esto es exactamente lo que sucede cuando los operadores ajustan el parámetro de volatilidad en función del precio spot de la opción bajo consideración.

2.1.5. Volatilidades y Griegas.

El conjunto de herramientas que traders y market makers utilizan rutinariamente tiene que ver con la sensibilidad de la solución (2.2) a variaciones de las variables y parámetros. Estas herramientas son esenciales para la correcta gestión de riesgo.

Es importante conocer la relevancia de estas eventuales variaciones ya que la prima de la opción $C(t)$ cambia a medida que las variables o los parámetros de la fórmula se modifican y las coberturas realizadas se alterarán ante cualquier cambio de éstos. Y, claramente, al menos el valor de t variará siempre a lo largo de la vida de la opción, así como S_t (a menos que σ sea nulo en cuyo caso la teoría completa carece de interés). Entonces, visto que los supuestos

utilizados para derivar la fórmula Black-Scholes no son realistas, traders, market makers, o los gestores de riesgos deben monitorear constantemente la sensibilidad de sus libros de opciones con respecto a los cambios en t, S_t, r, σ para los distintos valores de K elegidos.

Ejemplo 2.1.5. Un cambio en σ es un buen ejemplo para entender esta dependencia, y en este sentido hemos visto en la Fórmula (2.4) la opción tiende a capturar todo el valor del subyacente a medida que la volatilidad aumenta. En la práctica, está claro que la volatilidad no es constante ni respecto del tiempo t como se supone en el mundo de Black-Scholes, ni tampoco respecto del strike K . Una vez que una opción se compra y se establece un delta-hedge, el ratio de cobertura dependen de C_s (*Delta*) y C_{ss} (*Gamma*) y por lo tanto, dependen de los movimientos en el parámetro de volatilidad σ , es decir de las derivadas cruzadas $C_{s\sigma}$ (*Vanna*) y $C_{ss\sigma}$ (*Zomma*). Por lo tanto, la posición de la opción cubierta seguirá siendo arriesgada en muchos sentidos. Por ejemplo, dependiendo de la forma en que los cambios en σ y C_t afecta a la C_{ss} , un creador de mercado puede ser correcto en su previsión de cuánto S_t fluctuará, pero todavía puede perder dinero en una posición larga en opciones.

La *Delta* permite medir la sensibilidad a los cambios en el precio de la opción respecto de la variación en el precio del subyacente, es decir, es la derivada del valor de $C(t)$ con respecto al precio S_t , concretamente $Delta = \frac{\partial C}{\partial S_t}$. La *Gamma*, en cambio, mide el cambio en la *Delta*, y es entonces la segunda derivada de $C(t)$ con respecto al precio del subyacente, es decir, $Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}$. *Gamma* muestra cómo reaccionará un instrumento frente a un cambio importante en el precio del subyacente, y es fundamental para conocer cómo ajustar coberturas cuando la variación en el precio es grande.

Entonces, derivando respecto de la variable S_t , se obtienen las distintas griegas:

$$Delta = C_s = N(d_1),$$

$$Gamma = C_{ss} = f(d_1) \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{T-t}}.$$

Es claro que si S_t aumenta, el precio de opción de compra, $C(t)$, también aumenta. Si S_t disminuye, el precio disminuye. Pero los cambios en $C(t)$ nunca superarán los del activo subyacente, S_t . Por lo tanto, debe tener $0 < C_s < 1$.

Por otro lado, la *Delta* de un call at-the money es

$$Delta|_{S_t=K} = N((r/\sigma + \sigma/2)\sqrt{T-t}) \simeq 0,5. \quad (2.5)$$

La ecuación (2.5) es de gran relevancia, ya que cuando nos refiramos a sonrisa de volatilidad (cf. Sección 2.3), será común graficar volatilidad vs *Delta*, entendiendo que $Delta = 0,5$ representa moneyness. Y podemos estudiar la curvatura y la skewness de la sonrisa (cf. Sección 2.3) a partir de estrategias con opciones en función de la *Delta*.

Obsérvese que, tomando límite puntual, por la continuidad de C_s , se tiene que

$$C_s(t) \xrightarrow{t \rightarrow T} \frac{\partial C(T)}{\partial S_t} = \begin{cases} 0 & \text{si } S_t < K \\ 1 & \text{si } S_t > K \end{cases}$$

no siendo $C(T)$ derivable en $S_t = K$. Y derivando nuevamente, se obtiene

$$C_{ss}(t) \xrightarrow{t \rightarrow T} \delta_K = \begin{cases} 0 & \text{si } S_t \neq K \\ \infty & \text{si } S_t = K \end{cases}$$

El comportamiento de la *Delta* y la *Gamma* son importantes ya que al volatilidad vs *Delta*, para opciones muy cercanas al vencimiento, la sonrisa se distorsiona respecto del habitual gráfico de volatilidad vs strike o volatilidad vs strike/spot. Es decir, el comportamiento de la *Delta*, y su variación, la *Gamma* cuantifican esa distorsión.

Para comprender mejor la relevancia del paso del tiempo en el precio de la opción, debemos recordar la función *Theta*. La *Theta* mide la sensibilidad al paso del tiempo, ya que es la derivada del precio de opción con respecto al tiempo restante hasta la finalización del derivado, $Theta = -\frac{\partial C}{\partial T}$.

$$Theta = -e^{-(T-t)} \frac{Sf(d_1)\sigma}{2\sqrt{(T-t)}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

Observación 2.1.6. En término de las Griegas, la ecuación $\frac{1}{2}C_{ss}\sigma^2S_t^2 + rC_sS_t - rC + C_t = 0$ en 2.1 puede ser reescrita como

$$\frac{1}{2}Gamma \sigma^2 S_t^2 + rDelta S_t - rC + Theta = 0$$

Volviendo al estudio de la volatilidad, obtuvimos de la Ecuación (2.4) que la opción tiende a capturar todo el valor del subyacente a medida que la volatilidad aumenta, pero esto no dice cómo se comporta la prima en función del cambio en la volatilidad, sino que simplemente nos habla de su comportamiento asintótico. Para ello, estudiamos la *Vega* de la opción. La *Vega*, (que no es una letra griega, pero que se simboliza a veces con ν), mide la sensibilidad a la volatilidad y es la derivada de C con respecto a la volatilidad σ del subyacente, $Vega = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$. La *Volga* mide la sensibilidad de segundo orden a la volatilidad, $\frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^2}$, y permite estudiar cambios bruscos en la volatilidad, así como la *Gamma* lo hace respecto de cambios bruscos en el precio. Estas dos Griegas son importantes ya que como mencionamos, las opciones son instrumentos de volatilidad, y el modelo teórico considerado asume volatilidad constante (al menos en el corto plazo). Por lo tanto, estas Griegas permiten entender y medir posibles defectos de medición del modelo teórico, y la necesidad de grandes ajustes *ad hoc*.

$$Vega = Se^{-(T-t)}f(d_1)\sqrt{(T-t)} \quad (2.6)$$

$$Volga = Se^{-(T-t)}f(d_1)\sqrt{\tau}\frac{d_1d_2}{\sigma} = \nu\frac{d_1d_2}{\sigma}$$

A veces, como se mostró en el Ejemplo 2.1.5, son importantes las derivadas cruzadas. Un clásico problema de maximización de precios de C frente a cambios en dos de esas variables involucra todos los términos de orden 2, para construir la matriz hessiana de C . En este sentido, $Vanna$ mide la sensibilidad cruzada del valor del instrumento con respecto a la volatilidad y el precio del subyacente, $\frac{\partial^2 C}{\partial S_t \partial \sigma}$, que coincide con la derivación en orden inverso los ser C infinitamente derivable (si $t < T$), y se calcula como

$$Vanna = -e^{-(T-t)}f(d_1)\frac{d_2}{\sigma}.$$

$Zomma$ mide la sensibilidad $Gamma$ con respecto a la volatilidad, es decir, $Zomma = \frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma} = \frac{\partial vanna}{\partial S_t} = \frac{\partial^3 C}{\partial S_t^2 \partial \sigma}$ y se calcula como

$$Zomma = Gamma \cdot \left(\frac{d_1d_2 - 1}{\sigma} \right)$$

2.2. Volatilidad implícita.

En el modelo Black-Scholes, el valor teórico de una opción plain vanilla es una función monótona creciente de la volatilidad de Black-Scholes. Además, salvo en el caso de las opciones americanas con dividendos cuyo ejercicio temprano podría ser grande, el precio es una función estrictamente creciente de volatilidad. Esto significa que por lo general es posible derivar una única volatilidad implícita de un precio de mercado determinado para una opción (ver Definición 2.2.1).

2.2.1. Definición de volatilidad implícita.

En el apartado anterior definimos $Vega$ como la sensibilidad a la volatilidad, y la calculamos en la ecuación 2.6 como $Vega = Se^{-(T-t)}f(d_1)\sqrt{(T-t)}$.

Es importante observar que como f es una función de densidad, es decir $f(x) > 0 \forall x$, y $t < T$, se tiene que $Vega > 0$ para cualquier valor de las variables y parámetros del modelo. En consecuencia, $C(t, S_t | r, \sigma, T, K)$ es estrictamente creciente respecto de σ , y por lo tanto, dado un valor de C , si existe, el valor de σ^* que hace que $C = C(t, S_t | r, \sigma^*, T, K)$ es único.

Definición 2.2.1. Cuando un tal valor σ^* como el descrito en el párrafo anterior existe se lo llama *volatilidad implícita* asociada a la opción para strike K y vencimiento T .

Muchas veces se habla de volatilidad implícita del subyacente. En este caso, los profesionales del mercado se refieren al parámetro de volatilidad implícita para las opciones at-the-money. En caso contrario, es necesario que se especifique el tipo de contrato call o put con su vencimiento T y strike K .

2.2.2. Consideraciones sobre las hipótesis de Black-Scholes y la volatilidad implícita.

En los mercados actuales, los temas discutidos aquí se deben aplicar con cuidado, porque habrá desviaciones significativas de la teoría aplicable a la ecuación de Black-Scholes. Los traders y gestores de riesgo consideran habitualmente el contexto de Black-Scholes como punto de referencia a utilizar y adaptan luego los resultados a lo que el mercado muestra.

Cada supuesto en el mundo de Black-Scholes se puede violar. A veces, estas desviaciones son inofensivas o se pueden acomodar fácilmente modificando la fórmula. Algunas de estas modificaciones de la fórmula serían de menor relevancia, y otras más importantes. Sin embargo, hay dos casos que requieren modificaciones sustanciales. La primera se refiere el comportamiento de la volatilidad. En los mercados financieros, no sólo la volatilidad no es constante respecto de t ni de K , sino que también tiene algunas características inesperadas: la anomalía más frecuente es que la volatilidad implícita, lejos de ser constante tiene forma de sonrisa, pero además tiene una estructura temporal. Justamente, la deformación en ambas dimensiones t y K , provienen de que $\sigma = \sigma(t, K)$ no es constante respecto de ninguno de los “parámetros” (más correctamente, variables).

Sumado a esto, se le agregan comportamientos mucho más difíciles de modelar como ser el comportamiento estocástico, y con eventuales saltos del precio del subyacente, la variación en la tasa de dividendos proveniente del pago fijo en función del precio variable, el movimiento dinámico de la tasa de interés de mercado, etc. En relación al modelado de precios de activos con volatilidades con saltos es frecuente (y necesarios) en escenarios de crisis, donde los cambios en la volatilidad puede ser muy brusco, y las distorsiones de la sonrisa de volatilidad mayores, como mencionaremos en lo que sigue en el presente texto.

El segundo caso es cuando las tasas de interés son estocásticas (en lugar de constantes), y el activo subyacente es un instrumento sensible a estas variaciones de tasa. Aquí, la desviación de las hipótesis teóricas del modelo de Black-Scholes, de nuevo, conduce a cambios significativos en el modelado.

2.3. Sonrisa y superficie de volatilidad implícita.

En los mercados se negocian muchas opciones con los mismos subyacentes, pero diferentes precios de ejercicio y diferentes vencimientos. Las opciones que son idénticas en todos los

aspectos, a excepción de su strike-price, en general, tienen diferentes volatilidades implícitas como ya hemos mencionado. En general, cuanto más out-of-the-money una opción, mayor es la volatilidad implícita correspondiente. Este hecho empírico bien establecido es conocida como la sonrisa de la volatilidad, o sesgo la volatilidad, y tiene importantes implicaciones para la cobertura, la fijación de precios, y la valoración a precios de mercado de muchos instrumentos importantes. En el resto de este capítulo, se discute la sonrisa volatilidad y skews usando estrategias con opciones como vehículos para cuantificarlas.

Desde este punto en adelante, en este trabajo vamos a utilizar sólo el término sonrisa, incluso cuando la sonrisa es, de hecho, una inclinación de un solo lado (una mueca).

La sonrisa de volatilidad tiene implicaciones importantes para el trading, cobertura y precio de los instrumentos financieros.

2.3.1. Sonrisa y superficie: consideraciones previas.

La sonrisa de volatilidad puede ser *a priori* una noción confusa cuando a partir del modelo de Black-Scholes se deducen volatilidades implícitas distintas en función del strike siendo que el modelo supone volatilidad constante para su aplicación. Esto lleva a tener que discutir algunas ideas preliminares antes de entrar en la mecánica de cálculo de sonrisas.

Es bien sabido que los supuestos Black-Scholes no son muy realistas, sin embargo, la fórmula Black-Scholes es habitualmente utilizada por los operadores de opciones, aunque éstos saben mejor que nadie que los supuestos detrás de la modelo son problemáticos. Una de las principales hipótesis Black-Scholes, por ejemplo, es que la volatilidad es constante durante la vida de una opción en función del tiempo. ¿Cómo puede un comerciante seguir utilizando la fórmula Black-Scholes si la volatilidad observada se conoce a fluctuar significativamente durante la vida de la opción?

Si se viola esta suposición Black-Scholes, ¿no sería el precio dado por la fórmula Black-Scholes “incorrecto”, y, por lo tanto, la volatilidad implícita por la fórmula sea errónea? Esta pregunta debe ser considerada cuidadosamente. Veamos que realmente no hay inconsistencias en el comportamiento de los comerciantes. Podemos explicar de la siguiente manera: para cada instante t y cada strike K fijo aplicamos la fórmula de Black-Scholes. La volatilidad como función del tiempo puede suponerse *localmente constante*, es decir, constante para intervalos de tiempo pequeños, lo cual permite -fijado K - aplicar el modelo para deducir una volatilidad implícita para cada K . Naturalmente, estas volatilidades sólo son comparables cuando cuando el instante de tiempo t en el que fueron calculadas coinciden, aspecto que desarrollamos en el Hecho (3) 4.2.1.

En primer lugar, hay que tener en cuenta que la fórmula Black-Scholes es simple y depende de un pequeño número de parámetros. De hecho, el principal parámetro importante del cual depende es de la volatilidad, σ . Una fórmula sencilla tiene algunas ventajas: Es fácil de enten-

der y recordar. Pero, más importante aún, también es fácil darse cuenta de dónde o cuando pueda fallar. Una fórmula sencilla permite el desarrollo de formas de corregir por inexactitudes informalmente haciendo ajustes subjetivos durante la jornada de trading. Que la fórmula de Black-Scholes dependa principalmente de este único parámetro permite ajustarlo fácilmente para cubrir las imperfecciones. En la teoría de la predicción, existe la noción de la parsimonia que dice que es costoso tener demasiados parámetros porque los errores son más probable que ocurra. Si un modelo tiene un menor número de parámetros a ser calibrados, la probabilidad de cometer errores disminuye.

Un aspecto fundamental de la fórmula Black-Scholes (y por eso nuestra utilización en este trabajo) es que además de su simplicidad y riqueza teórica, se ha convertido en una convención. En otras palabras, se ha convertido en un estándar entre los profesionales y también en plataformas informáticas. La fórmula ofrece una manera de conectar una volatilidad a un valor en dólares y a un precio del subyacente y plazo. De esta manera los comerciantes utilizan la misma fórmula de poner un valor monetario a un número volatilidad citado por el mercado. Esto ayuda en el desarrollo de plataformas comunes para la cobertura y gestión de riesgos.

Los operadores podrían añadir una prima de riesgo a volatilidades citadas. Al igual que la prima de riesgo que figura en el precio de los activos, las cotizaciones de volatilidad pueden incorporar una prima de riesgo. La sonrisa de volatilidad y su generalización, la superficie de volatilidad, entonces podrían contener gran cantidad de información acerca de las volatilidades implícitas y eventuales relaciones de arbitraje entre ellos. Trading, fijación de precios, cobertura, y perseguir el arbitraje de la sonrisa por lo tanto se vuelven importantes.

Cuando la volatilidad implícita se representa en función del precio de ejercicio, la gráfica resultante es generalmente inclinada hacia abajo en los mercados de equity, o en un valle en los mercados monetarios. Para los mercados donde la gráfica está inclinada hacia abajo, como las opciones sobre acciones, se utiliza a menudo el término “volatilidad oblicua”. En otros mercados, tales como opciones de divisas u opciones sobre índices bursátiles, en los que aparece el gráfico típico en ambos extremos, se utiliza el término *sonrisa de volatilidad* más familiar. A diferencia de lo observado en opciones sobre acciones, donde la sonrisa se empina hacia los valores out-of-the-money, la volatilidad implícita de las opciones sobre contratos de divisas tienden a subir en ambas direcciones descendente y ascendente.

A continuación enumeramos una serie de hechos conocidos (cf. por ejemplo (Derman, 2008)) sobre volatilidad implícita para el mercado de equity:

- Las volatilidades son más empinadas para vencimientos cercanos en función del strike, y más aplanadas para vencimientos más largos.
- La volatilidad de la volatilidad implícita (at the money) es mayor para vencimientos cortos.

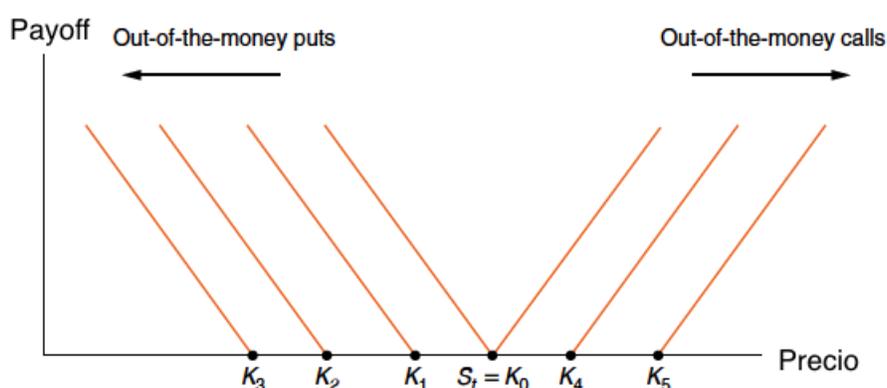
- La volatilidad mínima en función del strike se produce cerca de los valores at the money o para strikes que corresponden a calls ligeramente out of the money.
- Las volatilidades correspondientes a strikes bajos son generalmente mayores que las volatilidades correspondientes a strikes altos.
- Existe una correlación negativa entre los cambios en la volatilidad implícita at the money y los cambios en el propio activo subyacente.
- La volatilidad implícita parece tener reversión a la media (fijado el strike) con una vida de unos 60 días.
- La volatilidad implícita tiende a subir rápido y declinar lentamente.
- La volatilidad implícita es generalmente mayor que la reciente volatilidad histórica.

2.3.2. Definición de sonrisa de volatilidad implícita.

Considere una serie de opciones Put, líquidos, out-of-the-money, libres de arbitraje, con fecha de vencimiento T , indexados por los precios de ejercicio K_i , denotado por P_{K_i} sus precios, respectivamente P_{K_1}, \dots, P_{K_n} , donde $K_n < \dots < K_1 < K_0 = S_t$.

De acuerdo con esto, el K_0 -put está at-the-money y, como K disminuye, los pone más profundas fuera del dinero. Entonces, dados los precios de las opciones, podemos usar la fórmula Black-Scholes a la inversa y extraer el σ_i la del que operador utilizado para calcular el precio P_{K_i} , como se explicó en 2.2.1.

Similarmente se procede con los precios de las opciones call out-of-the-money.



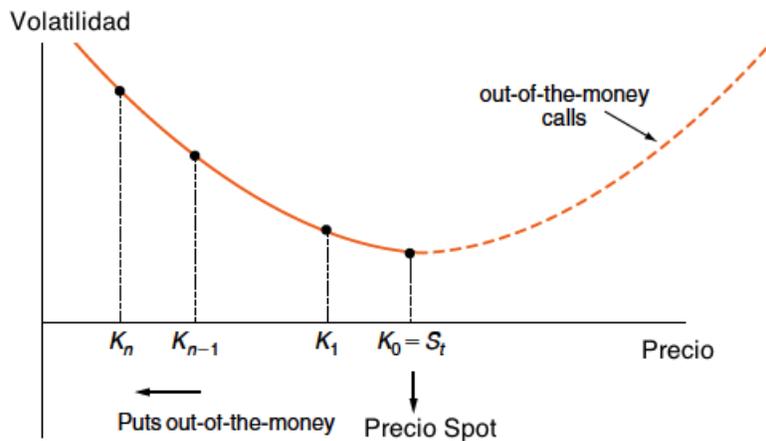
Así, en un mercado que se ajuste al mundo Black-Scholes, los traders usarían la misma σ en la fórmula Black-Scholes fue capaz de obtener cada P_{K_i} , $i = 0, \dots, N$. Yendo hacia atrás, entonces podríamos recuperar el σ constante fijado el precio. Sin embargo, si se lleva a cabo en la realidad con esta opción ejercicio precios observados, nos encontraríamos con la del que

las volatilidades implícitas satisfarían $\sigma_{K_0} < \sigma_{K_1} < \dots < \sigma_{K_n}$. Juntando estos valores con los obtenidos a partir de los precios de los call, se obtiene lo que denominamos la sonrisa de volatilidad implícita

La forma en que una sonrisa se dibuja varía de un mercado a otro como ya mencionamos. La volatilidad implícita, denotado por σ_i , siempre aparece en el eje y . Salvo indicación contraria, extraemos esta volatilidad de la fórmula Black-Scholes en los mercados de renta variable (y más concretamente en este trabajo, sobre las acciones de las empresas Petrobras y Exxon Mobile), y de la fórmula Black en el caso de las tasas de interés. Las volatilidades implícitas son tratadas como si fueran aleatorias y variables en el tiempo.

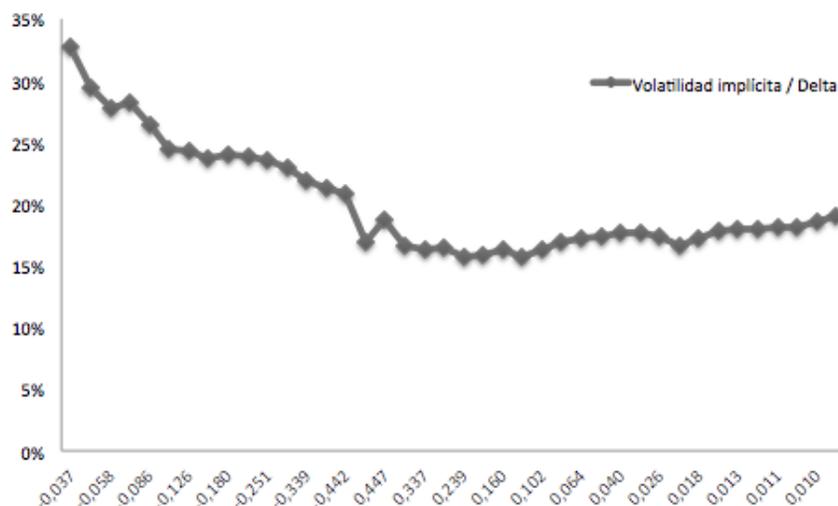
Qué poner en el eje horizontal es una cuestión más delicada y depende de cómo definimos “estar en-dinero” (moneyness) de una opción. A veces, la sonrisa se representa en relación a cuán en-dinero está medido por la relación entre el precio de ejercicio al precio de mercado actual, K_i/S_t . Si la sonrisa es una función de cuán fuera-del-dinero está la opción solamente, entonces esta normalización permite compensar los efectos de la variación del precio spot a lo largo del tiempo, en el sentido que a medida que S_t cambie, la sonrisa permanecerá más o menos invariables. Pero hay casi siempre otros factores aparte de los que moneyness, ya que por ejemplo, el rol de la tasa de interés es relevante para determinar el precio de la opción, y por lo tanto puede influir en la volatilidad, como se vio en la sección anterior. Por ejemplo, a veces la sonrisa se representa frente $K_i e^{-r(T-t)}/S_t$. Para las opciones de próximo vencimiento, hace que esta pequeña diferencia es irrelevante, pero para las opciones de lejano vencimiento, la diferencia puede ser muy relevante. Al incluir este factor de descuento, los operadores del mercado esperan para eliminar el efecto del cambio en la vida útil restante de la opción. A veces, el eje horizontal representa el delta de la opción, donde, a partir de la Ecuación (2.5), se tiene que 0,5 representa moneyness.

La sonrisa graficada respecto del *Delta* se ilustra de forma teórica en el siguiente gráfico:



A continuación se muestra un ejemplo del mercado americano, con subyacente XOM, Exxon Mobile, Relevado el 20 de Julio de 2015, vencimiento 20 de Enero de 2017.

Subyacente	XOM	St	79,26
Fecha	27/07/2015	N días háb.	389
Vencimiento	20/01/2017	T (Hábiles)	1,544
RiskFree NA	3,00%	Div yield	4,00%
r	2,96%	Anual Div.	3,1704



Los datos utilizados para la confección del gráfico se adjuntan en el Anexo, en la Tabla A.1.

Puede observarse en el gráfico anterior, que la sonrisa está efectivamente inclinada, y no presenta la simetría del gráfico teórico. En la siguiente sección desarrollamos las herramientas para poder estudiar esta asimetría, así como su curvatura.

2.3.3. Reversal risk y Flyes. Asimetría y curvatura de la sonrisa.

Cuando se habla de volatilidad implícita del subyacente, los profesionales del mercado se refieren al parámetro de volatilidad implícita para las opciones at-the-money, a menos que se especifique algo diferente, en cuyo caso se refiere a la volatilidad implícita del contrato call o put con vencimiento T y strike K . Como puede verse en el gráfico anterior, la volatilidad no es constante, y se curva en general de forma asimétrica. Los ajustes para estimar la volatilidad implícita at-the-money a partir de otras volatilidades implícitas y recíprocamente se realizan mediante la incorporación de los valores de *Risk Reversals*, *Flys* o *Butterflies*, y permiten por lo tanto determinar la medida de la volatilidad actual que se puede utilizar para las opciones con un delta que no es 0,50 (que corresponde al delta at-the-money cf. (2.5)). Como corolario, estas estructuras permiten extraer la asimetría y curvatura de la sonrisa respectivamente.

Las Risk Reversals (RR), son generalmente denominados como X %-delta-RR, y consiste en estructuras armadas como *collars* cuando se la combina con una posición en el subyacente

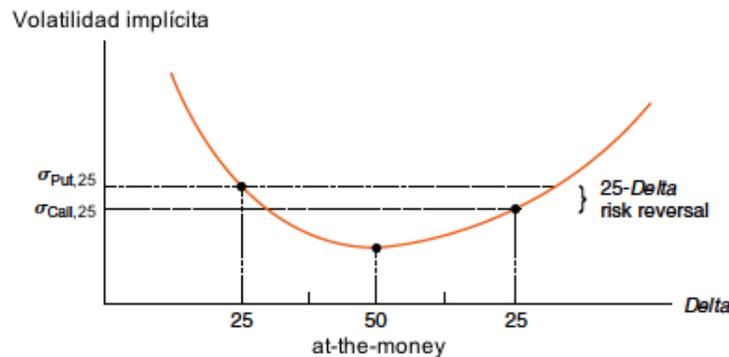
o *synthetic assets* donde los strikes se determina en función del delta de la opción. Concretamente, un X %-delta-RR es estar long en un call X %-delta y short en un put X %-delta

Risk Reversal suele referirse en la forma en la que los operadores estructuran calls y puts idénticamente out-of-the-money, pero en este contexto, idénticamente se refiere en relación a su volatilidad y no a su precio, y por eso se estructuran en función de la delta de la opción y del strike. En este sentido, resulta importante y muy utilizado el cálculo del spread de volatilidad asociado a un 25-delta RR:

$$spread(RR_{25}) = \sigma_{call,25} - \sigma_{put,25}$$

En otras palabras, dada una cierta maturity de la opción, el spread de 25-delta-RR es la volatilidad del call 25-delta menos la del put 25-delta, donde un call o put 25-delta se refiere a la opción cuyo strike fue elegido de forma tal que la delta sea 25 % para el call y -25 % para el put, respecto del call o put at-the-money, que suele ubicarse (ambos) en torno al 50 %.

Cuanto mayor es la demanda de un contrato, mayor es su precio, y por lo tanto mayor es la volatilidad implícita. Entonces esto dice que un RR positivo (negativo) implica que la volatilidad implícita del call (put) es mayor que la del put (call) y que entonces la sonrisa tiene un skew hacia la derecha (izquierda), es decir está más empujada del lado derecho (izquierdo). Si la volatilidad del call (put) es mayor que la del put (call), esto indica que el mercado paga (relativamente al delta) más por un call (put) que por un put (call), más dispuesto entonces a apostar por la suba (baja) que por la baja (suba) del precio del subyacente. A continuación se gráfica un caso esquemático de expectativas bajistas de mercado.



Esto implica una distribución esperada de retornos del subyacente skewed hacia la derecha, compuesta por un número relativamente mayor de pequeños movimientos a la baja y mayores movimientos al alza.

En el ejemplo exhibido mercado americano, con subyacente XOM, Exxon Mobile, Relevado el 20 de Julio de 2015, vencimiento 20 de Enero de 2017, se ve que que la volatilidad del put

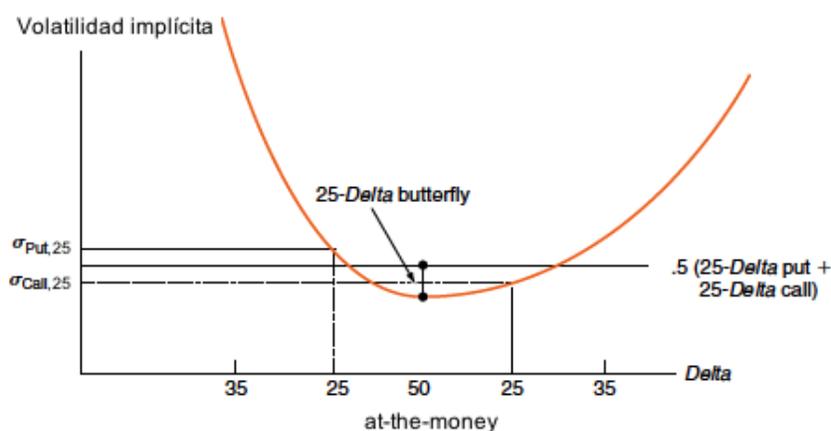
es 6,18% mayor que la del put, lo cual muestra la asimetría izquierda que tiene la sonrisa (evidencia clara de perspectivas bajistas).

Reversal Risk	Call-25	put-25	Spread RR-25
Real	17,36%	23,54%	-6,18%

Butterfly o $-X$ %-delta-fly es una estrategia que consiste en entrar Long en un call X %-delta, Long en un put X %-put, short en un at-the-money call y short en un at-the-money put. Así como se hizo en el caso del RR-spread, resulta importante el cálculo del spread de volatilidad asociado a un 25-delta Butterfly:

$$spread(Bfly_{25}) = \sigma_{call,25} + \sigma_{put,25} - 2 \cdot \sigma_{50},$$

donde el σ_{50} se refiere a la volatilidad del call o put at-the-money. Este spread se grafica de forma esquemática de la siguiente forma:



Obsérvese que si el Butterfly-25 fuera nulo, entonces el promedio del 25-put con el 25-call sería la volatilidad at-the-money, indicio de linealidad. Si el Butterfly-25 fuera suficientemente grande, entonces el promedio del 25-put con el 25-call sería muy superior a la volatilidad at-the-money, indicio de mucha curvatura.

En el ejemplo exhibido mercado americano, con subyacente XOM, Exxon Mobile, Relevado el 20 de Julio de 2015, vencimiento 20 de Enero de 2017, se ve que, considerando la asimetría ya descrita y observada por el $RR - 25$, vemos que el bajo spread Butterfly denota que o bien los valores mínimos de volatilidad no se alcanzan en la posición at-the-money, sino para valores de $K > S_t$, expresando además cierta linealidad en la sonrisa para ese rango de deltas.

Butterfly	Call-25	put-25	call-put-50	Spread Bfly-25
Real	17,36%	23,54%	19,00%	2,90%

2.3.4. Desigualdades de no arbitraje de Merton para la pendiente de la sonrisa de volatilidad implícita.

De la misma forma en la que se debe pensar en la curva de rendimiento hasta el vencimiento de un bono como el parámetro que determina los precios de las cotizaciones de los bonos, la volatilidad σ se puede interpretar como el parámetro que determina precios de las opciones a través del modelo. La ausencia necesaria de ganancias sin riesgo (arbitraje) pone restricciones sobre los rendimientos de los bonos, y siguiendo la analogía, existen igualmente limitaciones a los precios de las opciones que conducen a limitaciones en la sonrisa. Estas condiciones pueden ser expresables en términos de la pendiente de la curva de volatilidad y se las conocen como *desigualdades Merton para el strike*.

Para mayor simplicidad inicial, supongamos que $D = 0$, es decir no hay pagos de dividendos, en ese caso, $C \geq S - Ke^{-r(T-t)}$. Una fácil demostración de este hecho proviene de que un contrato forward F vale $S - K$ al vencimiento, y por lo tanto, suponiendo que no hay pago de dividendos y una tasa libre de riesgo r , vale $S - Ke^{-r(T-t)}$ en tiempo t . Una call vale siempre más que un forward, ya que tiene la misma recompensa cuando $S_T > K$, y mayor recompensa cuando $S_T < K$.

Por otro lado, para el mismo vencimiento, los precios de las opciones satisfacen dos restricciones en sus derivadas primeras y segundas respecto del strike: $C_K < 0$ y $C_{KK} > 0$. Una demostración de esto se desprende del cálculo de un call-spread (para la derivada primera), y un butterfly (para la derivada segunda).

Similarmente, para opciones Put, se tiene que $P_K > 0$ y $P_{KK} > 0$.

Las restricciones $C_K < 0$ y $C_{KK} > 0$ imponen condiciones sobre la pendiente de la sonrisa. Supóngase que se parametriza los precios de los call y puts de mercado en términos de la fórmula de Black-Scholes permitiendo que la volatilidad implícita varíe con el strike y vencimiento. Entonces, si la volatilidad aumentara (disminución) con el nivel del strike en la fórmula de Black-Scholes, un aumento demasiado rápido (disminución) de la volatilidad podría compensar el decrecimiento natural (aumento) con el strike para un call (put) y así hacer que el precio del call (put) aumente (disminuya) con el nivel del strike. Estas cotas en los precios de los calls y puts imponen cotas respectivas de la pendiente positiva y negativa en la inclinación de la sonrisa.

Mas precisamente, sea $C = C(t, S_t, r, \sigma, T, K)$ el precio del call a partir del modelo de Black-Scholes, como en la Sección 2.1.4. Recordando que $\sigma = \sigma(K)$, y derivando respecto de K , se obtiene que

$$C_K = C_K(t, S_t, r, \sigma, T, K) + C_\sigma(t, S_t, r, \sigma, T, K) \cdot \sigma_K(K).$$

Además, $C_\sigma(t, S_t, r, \sigma, T, K) = S_t \sqrt{t} f(d_1) = Ke^{-r(T-t)} \sqrt{t} f(d_2)$. Por lo tanto, a partir de lo

anterior, y de que $C_K < 0$, despejando se tiene que

$$\sigma_K(K) < -\frac{C_K(t, S_t, r, \sigma, T, K)}{C_\sigma(t, S_t, r, \sigma, T, K)} = \frac{N(d_2)}{K\sqrt{t}f(d_2)} \quad (2.7)$$

conocida *desigualdad Merton para el strike*.

Hecho 2.3.1 (2). *En contextos de estrés de mercado, la desigualdad de Merton para el strike, para el modelo clásico de parametrización de la volatilidad implícita (cf. Sección 4.1), no se verifica en un gran número de casos.*

Esto motiva plantear un modelo alternativo (cf. Sección 4.4) que ajuste mejor. La principal motivación no consiste en forzar que el modelo se ajuste a una desigualdad teórica, sino a que los datos relevados de mercado pueden tener descalces temporales -consecuencia de la iliquidez-, que llevan a que el modelo cuadrático clásico (cf. Sección 4.1) no esté capturando el *sentimiento real de mercado*. Este último concepto es tan subjetivo como abstracto, pero si algo el mercado el general no permite son las situaciones de arbitraje, y por lo tanto, consideramos que el modelo mejor ajusta cuando satisface las desigualdades de Merton (2.7) para todo strike. Referimos al lector a la Sección 4.5.2 para los resultados empíricos de estas desigualdades en los distintos modelos.

Capítulo 3

Función de densidad de probabilidades.

El precio de los derivados financieros, o más generalmente de varios productos estructurados puede calcularse como el valor descontado de los pagos futuros esperados, bajo los supuestos estándares de mercados completos y sin fricción y comportamiento estocástico para el precio del subyacente (cf. (Brunner y Hafner, 2003; Lin y cols., 2006; Perillo, 2006)). Sin embargo, las probabilidades utilizadas en el proceso de fijación de precios, deducidas a partir de estos contratos derivados son probabilidades de precios esperados para agentes neutrales al riesgo, y por lo tanto, no representan probabilidades reales de los precios esperados.

En el Capítulo 2 nos concentramos en el estudio de la volatilidad implícita del subyacente a partir del precio de las opciones sobre éste. Más ambicioso que esto resulta el objetivo de obtener, no sólo información sobre un momento de la distribución del precio esperado del subyacente, como la volatilidad, sino la función de densidad del subyacente que permite caracterizar completamente su comportamiento. Esta información, es la lectura al momento del relevamiento de los datos de las expectativas de los agentes del mercado sobre las probabilidades de los distintos escenarios para el subyacente en todo instante futuro hasta el vencimiento.

Con este propósito, en este capítulo revisaremos la teoría matemático-financiera necesaria para el cálculo de las funciones RND (risk-neutral density) y aquellas no-neutrales al riesgo RWD (real-world density). Comenzamos con el estudio de la RND en la próxima subsección, para luego analizar algunos detalles de las funciones de densidades reales RWD.

3.1. Función de densidad neutral al riesgo.

En los trabajos de Harrison, Kreps y Pliska (Harrison y Kreps, 1979; Harrison y Pliska, 1981) los autores dieron origen a lo que se conoce como *probabilistic approach* de valuación

de activos financieros, que se apoya en la riqueza teórica de la teoría de probabilidades en general y la teoría de martingalas en particular. Estos trabajos se han convertido en la fuente de referencia principal para el actual estado de la teoría de valuación de opciones y valuación libre de arbitraje, para el desarrollo de los modelos que actualmente se utilizan.

En el artículo (Harrison y Kreps, 1979) los autores desarrollan la teoría necesaria para poder unificar dos líneas de investigación en origen distintas en la teoría de valuación de activos, la primera, la valuación libre de arbitraje y la segunda, la valuación de opciones (cf. (Ross, 1989)). Concretamente, los autores demuestran que en ausencia de oportunidades de arbitraje, y bajo ciertas condiciones de regularidad atribuidas a los procesos estocásticos que satisfacen los precios de los activos, existe una medida de martingala equivalente ¹ a la medida de probabilidad real, bajo la cual el precio de los activos descontado a la tasa de interés libre de riesgo constituye una martingala. A dicha medida de probabilidad se la conoce también como *medida de probabilidad neutral al riesgo*.

En términos más concretos, el Primer Teorema Fundamental de Valuación de activos establece que

Teorema 3.1.1 (Primer Teorema Fundamental de Valuación de activos). *Un modelo para un mercado financiero es libre de arbitraje si y solo si existe al menos una medida de probabilidades Q equivalente a la medida P que hace que el proceso de precios descontados es una Q -martingala.*

Este teorema fue demostrado por Harrison y Pliska en (Harrison y Pliska, 1981) para el caso en que el espacio de probabilidad subyacente (Ω, \mathcal{F}, P) es finito, y extendido ese mismo año por Harrison y Kreps en (Harrison y Kreps, 1979) al contexto más general. En el caso general, la condición de no arbitraje resulta ser demasiado débil y tiene que ser reemplazada por un supuesto fuerte (cf. (Harrison y Kreps, 1979)).

Como corolario se desprende que si una tal medida Q existe, el precio de un activo puede expresarse como:

$$S_t = e^{-r(T-t)} E_Q(S_T) = e^{-r(T-t)} \int_0^{+\infty} S_T f_Q(S_T) dS_T$$

donde hemos representado por Q a la nueva medida de probabilidad, denominada *medida neutral al riesgo* o *medida de martingala*, a diferencia de la medida P , llamada *medida de probabilidad real*.

La existencia de la medida Q depende entonces sólo de la inexistencia de oportunidades de arbitraje, pero ello esta condición no basta en general para asegurar la unicidad de Q .

¹Sea (Ω, \mathcal{F}) un espacio medible, P, Q dos medidas (de probabilidades) sobre (Ω, \mathcal{F}) , P se dice equivalente a Q si $\forall A \subset \mathcal{F} P(A) = 0$ si y solo si $Q(A) = 0$.

Se conocen contextos en los que existen varias medidas de probabilidad compatibles con la inexistencia de oportunidades de arbitraje (cf. (Schachermayer, 2008) y (Battig y Jarrow, 1999)).

En relación a este punto tenemos el siguiente resultado

Teorema 3.1.2 (Segundo Teorema Fundamental de Valuación de activos). *Un modelo libre de arbitraje es completo si y solo si existe una única medida de probabilidades Q equivalente a la medida P que tiene como numerario al activo libre de riesgo.*

En este contexto podemos representar al precio libre de arbitraje de una opción de compra europea de la siguiente forma:

$$C(t) = e^{-r(T-t)} E_Q(\text{máx}\{S_T - K; 0\}) = e^{-r(T-t)} \int_K^{+\infty} (S_T - K) f_Q(S_T) dS_T \quad (3.1)$$

En la Sección 2.1.4 hemos derivado a partir de la Ecuación diferencial (2.1) la solución (2.2) que permite expresar el precio de la prima del call en los términos conocidos y habitualmente utilizado. Sin embargo, no resulta evidente que la Ecuación (2.2) coincida con la Ecuación (3.1). La equivalencia se desprende del teorema de Feynman-Kac² establece un vínculo entre las ecuaciones diferenciales parciales parabólicas y procesos estocásticos, y permite constituir la ecuación diferencial de Black, Merton y Scholes a partir de soluciones de ecuaciones diferenciales funcionales.

A partir de la Ecuación (3.1), derivando respecto de C , podemos obtener la relación entre el precio de una opción y la densidad neutral al riesgo como

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(t) = e^{-r(T-t)} f_Q(K) \quad (3.2)$$

Bajo las hipótesis 2.1.1, vimos que la ecuación diferencial 2.1 da origen a la siguiente solución única descrita en 2.2

$$C(t) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (3.3)$$

Con lo cual, derivando dos veces, se obtiene que:

$$f_Q(K) = f(d_2) \left(\frac{1}{\sigma K \sqrt{T-t}} + \frac{2d_1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial K} + \frac{d_1 d_2 K \sqrt{T-t}}{\sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial K} \right)^2 + K \sqrt{T-t} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial K^2} \right) \quad (3.4)$$

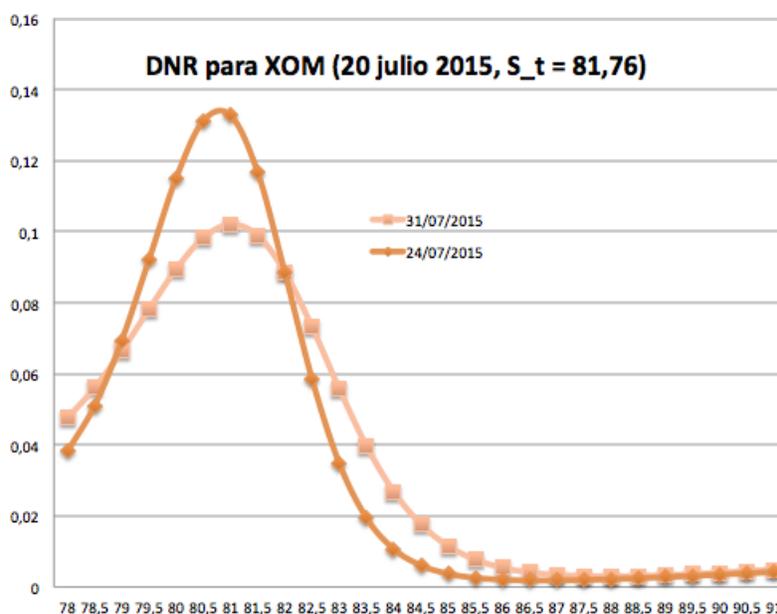
²La solución a la ecuación diferencial $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \mu(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - V(x, t) u(x, t) + f(x, t) = 0$, con condición de borde $u(x, T) = \psi(x)$, y μ, σ, ψ, V y f funciones conocidas, puede escribirse como $u(x, t) = E^Q \left[\int_t^T e^{-\int_t^\tau V(X_\tau, \tau) d\tau} f(X_\tau, \tau) d\tau + e^{-\int_t^T V(X_\tau, \tau) d\tau} \psi(X_T) \middle| X_t = x \right]$ bajo la medida de probabilidad Q que hace a X un proceso de Ito de la forma $dX = \mu(X, t) dt + \sigma(X, t) dW^Q$ (cf. (Lin y cols., 2006, Sec. 5.5)).

A partir de la Observación 2.1.2, se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow T} f_Q(K) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_t \neq K \\ +\infty & \text{si } S_t = K \end{cases}$$

lo cual exhibe que a medida que la opción se acerca al vencimiento, en un escenario neutral al riesgo, las expectativas de los agentes se concentran completamente sobre el precio spot S_T , obteniendo como distribución límite una delta de Dirac sobre S_T .

Puede apreciarse en siguiente ejemplo de los precios de dos series de opciones sobre Exxon Mobile (XOM) relevados el 20 de Julio de 2015, con vencimientos a 4 y 11 días:



3.2. Función de densidad real.

El precio de los derivados financieros, o más generalmente de varios productos estructurados puede calcularse como el valor descontado de los pagos futuros esperados, bajo los supuestos estándares de mercados completos, sin fricción y comportamiento estocástico para el precio del subyacente (cf. (Brunner y Hafner, 2003; Lin y cols., 2006; Perillo, 2006)). Sin embargo, las probabilidades utilizadas en el proceso de fijación de precios, deducidas a partir de estos contratos derivados son probabilidades de precios esperados para agentes neutrales al riesgo, y por lo tanto, no representan probabilidades reales de los precios esperados. En este sentido, esta neutralidad es aceptable para la estimación de rentabilidad esperadas, pudiendo corregir precio esperado neutral al riesgo mediante el ajuste de un factor de descuento estocástico.

En gestión de riesgo, en general, es importante contar con adecuados factores de descuento

estocásticos ya que sería engañoso utilizar probabilidades neutrales al riesgo calcular precios futuros, y por lo tanto para la construcción de estrategias de cobertura de carteras. A las funciones de densidades esperadas neutrales al riesgo se las suelen denominar RND, mientras que a aquellas no-neutrales al riesgo RWD.

La problemática que esto genera es que mismo producto puede tener diferentes escenarios de probabilidad, debido a los diferentes enfoques posibles para estimar la prima por riesgo. Muy comúnmente, y también de forma incorrecta se suele utilizar la RND para comparar activos distintos, asumiendo que la prima por riesgo sólo depende del agente y no del par agente-activo.

La aplicación de algunos de los resultados generales de la teoría de probabilidades permiten demostrar que en los cálculos del precio esperado del activo, el cambio de la medida de probabilidad real P a una medida de probabilidad neutral al riesgo Q se obtiene tan solo con cambiar el drift del proceso estocástico (y no de la volatilidad) de precios del subyacente (cf. (Lin y cols., 2006)). Estos resultados matemáticos demuestran formalmente que es posible calcular también el precio de un derivado, según la medida de probabilidad neutral al riesgo con sólo cambiar la tendencia del proceso estocástico del activo subyacente, con lo cual, mediante la aplicación de la ecuación (3.1) para determinar el precio de las opciones call y put.

En relación a la determinación de las funciones de densidad de precios relativas a las medidas de probabilidad P y Q , la derivada de Radon-Nikodym³ y el teorema Girsanov⁴ definen los pasos técnicos para realizar la traducción.

Grundy subraya en (Grundy, 1991) que las probabilidades neutrales al riesgo no son verdaderas probabilidades del mundo real ya que no hay agentes neutrales al riesgo, y mediante la comparación de las dos distribuciones el autor deriva una estimación de la aversión al riesgo de los inversores.

Del mismo modo otros artículos tratan de corregir probabilidades neutrales al riesgo para obtener probabilidades del mundo real, que dan una representación más exacta de las expectativas de los inversores con aversión al riesgo (Liu, Shackleton, Taylor, y Xu, 2007) y (Vincent-Humphreys, Noss, y cols., 2012).

En consecuencia, decimos que las expectativas del comportamiento real del precio del activo está caracterizado por la función de densidad de la medida de probabilidad real que identificamos como P , ya que los inversores son no-neutrales al riesgo.

A continuación deducimos la función de densidad real RWD a partir de la RND. Para ello, existen muy diversas metodologías, y por ello, nos apoyamos para ello en resultados

³El teorema de Radon-Nikodym dice en líneas generales que $\int_A dQ = \int_A f dP$ y por lo tanto f se interpreta como dQ/dP y se denomina *derivada de Radon-Nikodym* (cf. (Wheeden, 2015, Teo. 10.39)).

⁴Sea $\{W_t\}$ un proceso de Wiener en un espacio de probabilidades $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$, X_t un proceso medible respecto de la filtración natural, $\{\mathcal{F}\}$. Si $Z_t = \mathcal{E}(X)_t$, con $\mathcal{E}(X)$ es una martingala exponencial estocástica estrictamente positiva de X existe una medida de probabilidades Q en $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ que tiene como derivada de Radon-Nikodym $\frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_t} = Z_t$ (cf. (Lin y cols., 2006, Sec. 6.3)).

teóricos conocidos y reflejados en la literatura económica. Todos estas estimaciones de la relación entre ambas funciones de densidad, es decir de la derivada de radon-Nikodym, se sustentan en argumentos netamente económicos que consisten esencialmente en estimaciones de los coeficiente de aversión al riesgo y con ello de ciertas funciones de utilidad.

Hemos mostrado anteriormente que el precio de una opción de compra europea puede representarse mediante la expresión 3.1, donde

$$C(t) = e^{-r(T-t)} E_Q(\text{máx}\{S_T - K; 0\}) = e^{-r(T-t)} \int_K^{+\infty} (S_T - K) f_Q(S_T) dS_T$$

A partir del Teorema de Radon-Nikodym, podemos relacionar la densidades RND y RWD describiendo el valor del call de la siguiente forma:

$$C(t) = e^{-r(T-t)} \int_K^{+\infty} (S_T - K) \frac{f_Q(S_T)}{f_P(S_T)} f_P(S_T) dS_T = e^{-r(T-t)} E_P(m_{P,Q}(S_T) \text{máx}\{S_T - K; 0\}) \quad (3.5)$$

donde la función $m(S_T)$ representa lo que se ha denominado en la literatura como factor de descuento estocástico o Pricing Kernel al momento de vencimiento del contrato derivado T , y está dado por la expresión

$$m_{P,Q}(S_T) = \frac{f_Q(S_T)}{f_P(S_T)}$$

aunque muy comúnmente en la literatura se incorpora en $m_{P,Q}(S_T)$ el factor de descuento $e^{-r(T-t)}$.

De la Ecuación (3.5) se deduce una representación alternativa para el precio del derivado y por lo tanto para el precio esperado del subyacente, presentándose como un valor esperado respecto de la medida de probabilidad real, P .

La literatura establece que la teoría económica permite relacionar el factor de descuento estocástico con las preferencias del agente (Perillo, 2006; Liu y cols., 2007; Giordano y Siciliano, 2015). En (Perillo, 2006) el autor menciona que bajo ciertos supuestos, Lucas (Lucas Jr, 1978), Merton (Merton y Samuelson, 1992), Cochrane (Cochrane, 2009), el factor de descuento estocástico es proporcional a la utilidad marginal del consumo de un agente representativo.

Capítulo 4

Modelado de la sonrisa de volatilidad.

En este capítulo comenzamos explicando el modelo más utilizado para estimar las sonrisas de volatilidad descritas en la Sección 2.3. Concretamente se aproxima la sonrisa de volatilidad mediante una función cuadrática $\sigma_{mod}(K) = aK^2 + bK + c$, con K el strike price y parámetros a, b, c . Este modelo tiene la ventaja de ser el modelo más parsimonioso que permite capturar la forma de sonrisa que efectivamente tiene la función de volatilidad implícita. Sin embargo, este modelo no captura problemáticas esenciales y ubicuas que se presentan en el mercado, y que son detalladas en la Sección 4.2 y cuya evidencia exponemos en la Sección 4.3. Finalmente en la Sección 4.4 se propone un modelo alternativo que contempla estos problemas, y los ajustes a los datos de mercado se exhiben en la Sección 5.2.

4.1. Modelo cuadrático para la volatilidad del call, vs sonrisa de volatilidad.

En varios trabajos en el área (cf. (Shimko y cols., 1993; Perillo, 2006; Andersen, 2011)) se aproxima la volatilidad de un call mediante una función cuadrática $\sigma_{mod}(K) = aK^2 + bK + c$, con K el strike price y parámetros a, b, c . Este modelo tiene la ventaja de ser el más sencillo, y más fácil de implementar en mercados inflacionarios (bullish en moneda local), ya que las opciones call suelen tener mayor liquidez que los puts.

Una ventaja de este modelo es que es el más parsimonioso que permite capturar la forma de sonrisa asociada al call que efectivamente tiene la función de volatilidad implícita.

Así como $\sigma(K)$ (la volatilidad implícita) provee, para cada K , a partir de la fórmula de BSM el valor $C(K)$ de mercado del call; $\sigma_{mod}(K)$ da un valor teórico $C_{mod}(K)$. Los parámetros a, b, c pueden ser obtenidos minimizando el error cuadrático de la estimación del precio de la opción: $\min \sum_K (C(K) - C_{mod}(K))^2$.

Naturalmente, este modelo propone para la sonrisa una simetría respecto de su x -vértice, que contribuye en sesgar el modelo propuesto para la función de densidad neutral al riesgo.

Puede observarse sustituyendo σ por el modelo propuesto de σ_{mod} en la Fórmula (3.4) que la función de densidad obtenida $f_Q(K)$ no presenta ninguna simetría. Esto se debe en parte a que no existe una relación directa entre el eje de simetría de la función σ_{mod} , es decir $-b/2a$ respecto del precio spot S_t .

Sin embargo, siendo que un call representa el *upside* de la acción sobre el strike, esto incorpora un sesgo extra en el análisis de volatilidad que también se traslada a la función de densidad neutral al riesgo y es uno de los puntos que trataremos a continuación.

4.2. Observaciones sobre el modelo planteado.

Como hemos mencionado, es de vital relevancia para el análisis de expectativas de los agentes económicos, modelar correctamente la sonrisa de volatilidad para poder posteriormente elaborar funciones de densidad que se ajusten a los datos de mercado.

A continuación se elaboran un serie de observaciones al modelo propuesto, y que se agregan al ya mencionado Hecho (1) 2.1.4, que no son tenidas en cuenta en ninguno de los modelos considerados en la literatura sobre esta materia, y que indexamos bajo los siguientes títulos:

Hecho 4.2.1 (3). *Los modelos propuestos asumen suficiente liquidez en el mercado, motivo por el cual las sonrisas de volatilidad observada se desforma perdiendo la homogeneidad temporal.*

Hecho 4.2.2 (4). *Los modelos basados en una única sonrisa cuadrática para el call asumen cierta simetría de la volatilidad de la familia de opciones considerada.*

Hecho 4.2.3 (5). *Los modelos propuestos asumen implícitamente la validez de la put-call parity.*

En relación al primer punto 4.2.1, se da por un lado que ni siquiera los títulos más operados en el mercado de equity poseen la liquidez suficiente que los modelos requieren. Concretamente, al considerar la sonrisa de volatilidad elaborada como se detalla en la Sección 2.3.2, traficando los valores implícitos de volatilidad deducidos a partir del modelo de BSM, se asume que el instante temporal t en el que se relevan estos valores es el mismo. De no ser así, carece de sentido hablar de sonrisa al instante t . Esta situación es casi nula ocurrencia ya que las opciones profundamente en dinero como fuera del dinero suelen ser muy poco operadas, llevando a que los datos en general tomados no correspondan siquiera al mismo día de relajamiento de datos que para las opciones at-the-money. Esto nos lleva, como primera consideración, agregar una dimensión extra a la construcción de la sonrisa, incorporando la liquidez del derivado en cuestión. Esto se llevará a cabo en el modelo propuesto en la Sección 4.4 mediante la incorporación del valor del *open interest*.

Asumiendo por un instate que el mercado contara con la profundidad necesaria - o más realistamente, obviando por completo el problema señalado en el item anterior - los modelos

de sonrisas, típicamente elaboradas a partir de modelados cuadráticos para las opciones de compra, asumen simetría. Por lo general, los modelos ajustan el eje de simetría cerca de aquellos strikes K para los cuales la volatilidad implícita σ_K es mínima, siendo entonces el par (K, σ_K) el vértice de la función cuadrática detallada en la Sección 4.1.

Sumado a los dos puntos anteriores, el modelo descrito en la Sección 4.1 sólo considera la curvatura proveniente de los precios de las opciones call. En mercados en distress (este es el ejemplo de casi todo activo en épocas de crisis, o puntualmente de algún sector en derrumbe de precios como es el caso de activos vinculados a commodities a la fecha, o más específicamente de empresas en situaciones críticas) las sonrisas suelen mostrar fuerte asimetría, con mayores valores de volatilidad en los puts in-the-money, y menores valores de volatilidad para los calls (in-the-money). De forma análoga se da en mercado especialmente *bullish*.

4.3. Evidencia empírica de las observaciones.

Los activos seleccionados para la elaboración de este trabajo, en particular para las observaciones (1)-(5) realizadas a los modelos mencionados y elaboración del modelo alternativo fueron: Exxon Mobile (NYSE:XOM) y Petrobras (NYSE:PBR). Se tomaron datos precios de los subyacentes y de las opciones Call y Put diarios (al cierre del día de cotización) desde 5 de julio al 20 de agosto de 2015, de para todos los valores de strikes existentes, y con fechas de vencimiento dentro del mes y a Enero de 2016 y Enero de 2017. Esto representa un relevamiento de (aproximadamente) 12000 precios. De estos datos, se tomó una muestra aleatoria de cuatro días, para dos vencimientos cortos y dos largos, con un total de (aproximadamente) 713 datos sobre los cuales se calibró y comparó el modelo clásico (cf. Sección 4.1) con el modelo propuesto (cf. Sección 4.4).

La elección se sustenta en la necesidad de tomar datos de activos con la mayor liquidez posible, pero dentro de un sector con las particularidades de pesimismo mencionadas para poder observar con claridad las distorsiones obtenidas mediante los modelos clásicos. La gran liquidez relativa (al sector) de estos activos, pero suficientemente escasa en el sentido de lo planteado en la Observación 4.2.1 nos permiten sostener con más fuerza lo señalado en ese párrafo: ni siquiera títulos muy líquidos en el mercado de equity tienen la liquidez suficiente que los modelos tradicionales asumen.

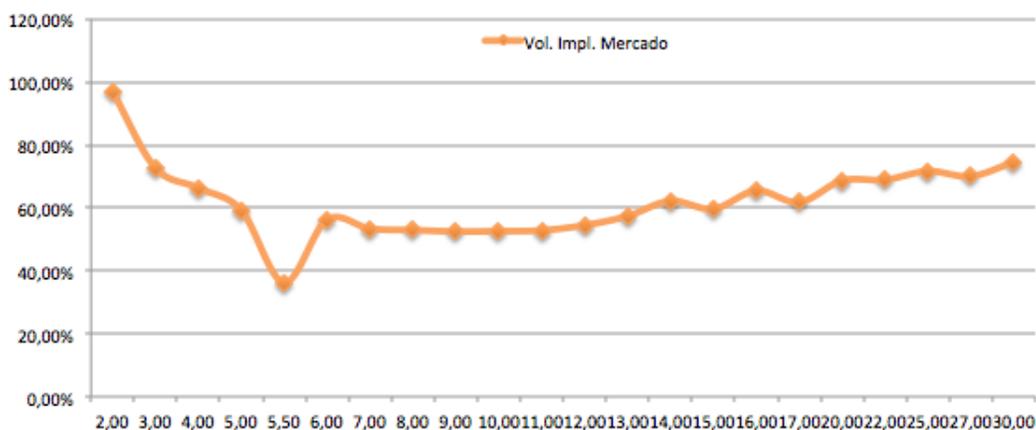
Petrobras (PBR) opera diariamente un promedio de 29 millones de títulos, y Exxon un promedio diario de 11 millones, estando en el 5% de las empresas de mayor liquidez en el mercado estadounidense NYSE (el de mayor liquidez mundial).

Ejemplo 4.3.1. Para la fecha del 30 de Julio de 2015, las opciones de Petrobras con vencimiento en Enero de 2016 y Enero de 2017, y strikes profundamente en dinero o fuera del dinero (casi) no fueron operadas (observar la columna ‘volume’ en las tablas incluidas abajo),

K	Contract Name	ine	Last	Bid	Ask	romedio pu	Change	Change%	Volume	Ointerés	Vol. Impl. Mercad	
2,00	PBR160115C00002000	C	OTM	3,65	4,65	5,15	4,9	0	0,00%	0	100	96,95%
3,00	PBR160115C00003000	C	OTM	3,35	3,7	4,15	3,925	0	0,00%	4	1175	72,78%
4,00	PBR160115C00004000	C	OTM	5,51	2,8	3,25	3,025	0	0,00%	0	196	66,37%
5,00	PBR160115C00005000	C	OTM	2,22	2,13	2,25	2,19	-0,04	-1,77%	320	27216	59,28%
5,50	PBR160115C00005500	C	OTM	1,42	0,84	2,27	1,555	0	0,00%	3	21	36,29%
6,00	PBR160115C00006000	C	OTM	1,44	1,48	1,54	1,51	-0,19	-11,66%	257	3038	56,24%
7,00	PBR160115C00007000	C	ITM	0,99	0,96	0,99	0,98	-0,07	-6,60%	59	2492	53,41%
8,00	PBR160115C00008000	C	ITM	0,62	0,60	0,65	0,63	-0,1	-13,89%	170	77038	52,94%
9,00	PBR160115C00009000	C	ITM	0,41	0,37	0,41	0,39	-0,03	-6,82%	265	20274	52,50%
10,00	PBR160115C00010000	C	ITM	0,25	0,23	0,26	0,25	-0,05	-16,67%	221	101215	52,60%
11,00	PBR160115C00011000	C	ITM	0,15	0,14	0,17	0,16	-0,03	-16,67%	15	1904	52,85%
12,00	PBR160115C00012000	C	ITM	0,13	0,09	0,13	0,11	0	0,00%	127	36681	54,49%
13,00	PBR160115C00013000	C	ITM	0,09	0,06	0,12	0,09	0,01	12,50%	50	61517	57,40%
14,00	PBR160115C00014000	C	ITM	0,07	0,03	0,15	0,09	0	0,00%	5	2965	62,21%
15,00	PBR160115C00015000	C	ITM	0,05	0,03	0,07	0,05	0	0,00%	150	154008	59,69%
16,00	PBR160115C00016000	C	ITM	0,06	0,00	0,12	0,06	0	0,00%	0	451	65,49%
17,00	PBR160115C00017000	C	ITM	0,04	0,01	0,05	0,03	0	0,00%	8	16624	61,79%
20,00	PBR160115C00020000	C	ITM	0,03	0,02	0,03	0,03	0	0,00%	68	61796	68,69%
22,00	PBR160115C00022000	C	ITM	0,01	0,01	0,02	0,02	0	0,00%	0	7725	68,94%
25,00	PBR160115C00025000	C	ITM	0,02	0,00	0,02	0,01	0	0,00%	0	7056	71,69%
27,00	PBR160115C00027000	C	ITM	0,01	0,00	0,01	0,01	0	0,00%	0	733	70,06%
30,00	PBR160115C00030000	C	ITM	0,01	0,00	0,01	0,01	0	0,00%	0	7570	74,59%

algunas de ellas no habiendo sido operadas tampoco los días anteriores, en los que el activo tuvo fluctuaciones en su valor de $\pm 5\%$.

Vencimiento en Enero de 2016:

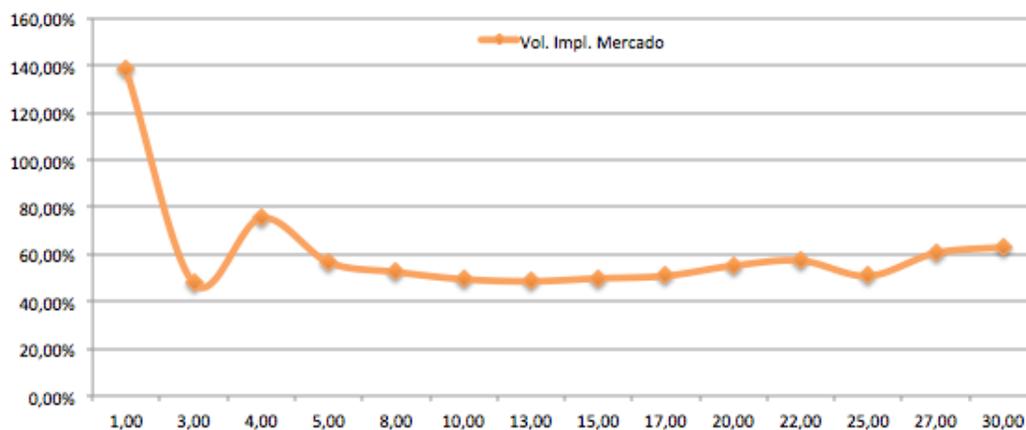


En este ejemplo, es remarcable la relevancia que tiene en el modelado de la sonrisa la volatilidad observada para el strike $K = 5,5$. Esto no da lugar un arbitraje ya que si se observa, los strikes $K = 5$ y $K = 6$ fueron operados en volúmenes de 320 y 257 lotes, mientras que $K = 5,5$ sólo en 3 lotes. Ese día (elegido completamente al azar), la acción cae 4,7% en la primera hora con un volumen operado en ese lapso de un tercio del volumen total del día (el gráfico de la cotización se puede consultar en el Anexo, Gráfico A.2). Las tres operaciones registradas para $K = 5,5$ se registran en ese momento, lo que conlleva a la distorsión de la volatilidad calculada en $\sigma_{5,50} = 36,29\%$.

Vencimiento en Enero de 2017:

4.4. PROPUESTA ALTERNATIVA PARA UN MODELO DE SONRISA DE VOLATILIDAD.43

K	Contract Name	Line	Last	Bid	Ask	romedio pu	Change	Change%	Volume	Ointeres	Vol Impl. Mercado
1,00	PBR170120C00001000	C OTM	8	5,45	6,75	6,1	0	0,00%	0	7	139,28%
3,00	PBR170120C00003000	C OTM	3,7	3,7	4,35	4,025	0	0,00%	10	2054	47,71%
4,00	PBR170120C00004000	C OTM	3,2	3,2	4,25	3,725	0	0,00%	1	1398	75,33%
5,00	PBR170120C00005000	C OTM	2,7	2,7	2,87	2,785	-0,25	-8,47%	1118	17394	56,59%
8,00	PBR170120C00008000	C ITM	1,38	1,35	1,53	1,44	-0,14	-9,21%	36	34977	52,46%
10,00	PBR170120C00010000	C ITM	0,95	0,81	0,92	0,87	0	0,00%	291	42616	49,41%
13,00	PBR170120C00013000	C ITM	0,44	0,43	0,45	0,44	-0,06	-12,00%	507	25290	48,52%
15,00	PBR170120C00015000	C ITM	0,35	0,31	0,33	0,32	0	0,00%	1	22205	49,76%
17,00	PBR170120C00017000	C ITM	0,25	0,05	0,43	0,24	0	0,00%	2	1906	50,83%
20,00	PBR170120C00020000	C ITM	0,15	0,12	0,30	0,21	0	0,00%	1	5263	55,15%
22,00	PBR170120C00022000	C ITM	0,19	0,06	0,32	0,19	0	0,00%	0	489	57,26%
25,00	PBR170120C00025000	C ITM	0,10	0,02	0,11	0,07	0	0,00%	10	3580	50,82%
27,00	PBR170120C00027000	C ITM	0,19	0,01	0,27	0,14	0	0,00%	0	43	60,51%
30,00	PBR170120C00030000	C ITM	0,14	0,00	0,26	0,13	0	0,00%	0	117	63,00%



Esta situación, presente en el 90 % de las operaciones diarias, sobre el total de días observados correspondiente a Julio y Agosto de 2015, evidencia: (1) la distorsión que genera la falta de liquidez “en las puntas”, debiendo ponderarlas adecuadamente, (2) la completa asimetría que muestra la sonrisa de volatilidad elaborada para los call, y consecuentemente el sesgo en el que se incurriría al deducir una función de distribuciones a partir suponer comportamiento cuadrático e ignorar esta información (3) de suponer que el comportamiento de la volatilidad implícita en los puts se deduce de aquella de los call via put-call parity o el supuesto teórico que se invoque.

4.4. Propuesta alternativa para un modelo de sonrisa de volatilidad.

Como consecuencias de las críticas elaboradas en la sección anterior, resumidas en los puntos Hechos (1), (2) y (3)-(5), se propone el siguiente modelo que contempla y soluciona tales falencias. Para poder distinguir al modelo clásico del modelo propuesto, nos referiremos a este segundo como *Modelo woi (with open interest)*.

4.4.1. Elaboración de las sonrisas de volatilidad de call y put.

Se propone un modelo cuadrático para describir la sonrisa de volatilidad implícita de los calls y puts sobre un subyacente determinado, a tiempo t , con vencimiento a tiempo T , y que cotiza a precio S_t . Dados la tasa de interés libre de riesgo r y la tasa de dividendos D , que se asumen constantes para el período $[t, T]$, se calcula la volatilidad implícita tanto de call $\sigma_{call, mod. woi}(K)$ como puts $\sigma_{put, mod. woi}(K)$ de como:

$$\sigma_{opción, mod. woi}(K) = a_{opción}K^2 + b_{opción}K + c_{opción}, \quad (4.1)$$

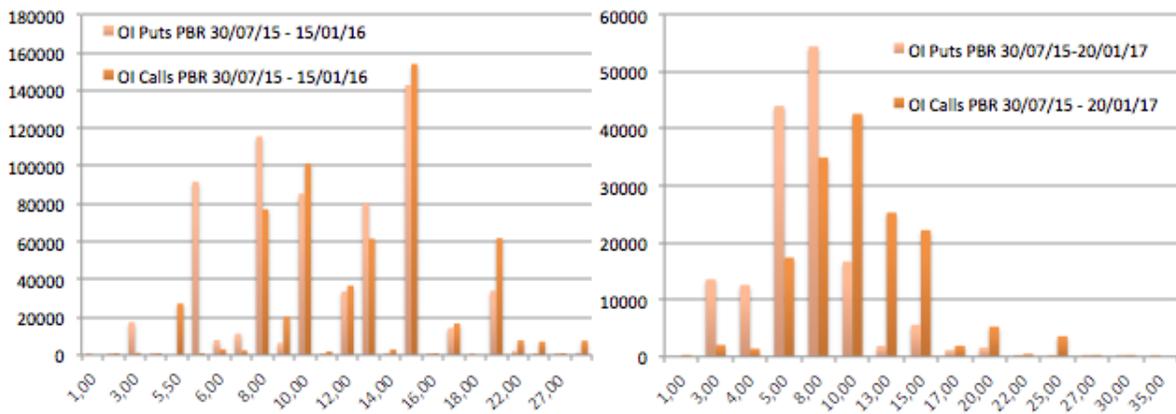
con K el strike price y parámetros a, b, c determinados de forma tal que

$$\min_K \sum (\sigma_{opción, mercado}(K) - \sigma_{opción, mod. woi}(K))^2 \cdot OI_{opción}(K),$$

donde $\sigma_{opción, mercado}(K)$ corresponde a la volatilidad implícita para la opción (call o put) obtenida de los datos de mercado, $OI_{opción}(K)$ corresponde al *Open Interest* para el strike K para esa opción.

De esta forma, la Ecuación 4.1 determina dos curvas $\sigma_{call, mod. woi}(K)$ y $\sigma_{put, mod. woi}(K)$ para cada instante de tiempo t (fijados r, D y T). Por lo tanto, haciendo variar t se obtienen dos superficies de volatilidad implícitas, una para calls y una para puts.

Antes de ver los resultados de ajustes de calibración del modelo a los datos recolectados, se exhiben los histogramas de OI_{call} y OI_{put} para la fecha del 30 de Julio de 2015, las opciones de Petrobras con vencimiento en Enero de 2016 y Enero de 2017 siguiendo con el Ejemplo 4.3.1.



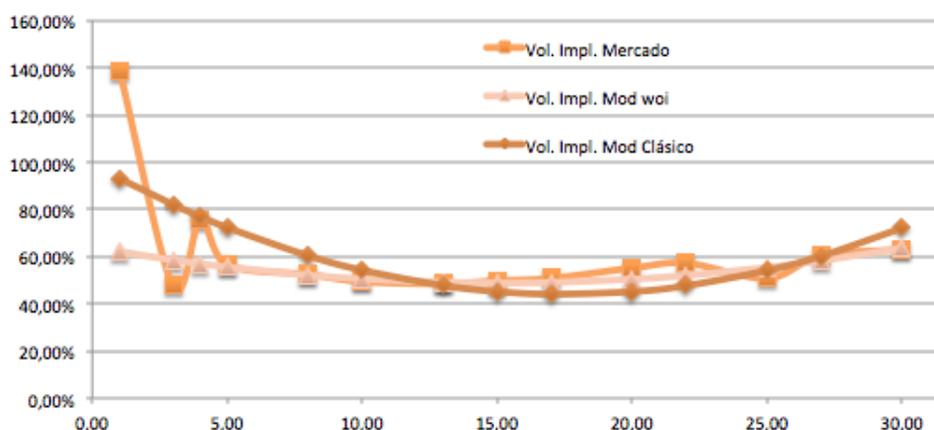
4.5. Ajustes y resultados del modelo propuesto.

4.5.1. Ajustes y resultados del modelo para la sonrisa de volatilidad de call y put.

Los siguientes dos gráficos muestran como ajustan las curvas de volatilidades planteadas a la curva de volatilidad implícita de mercado, en relación a la curva de volatilidad estimada por el modelo clásico, para los call con vencimiento corto en Julio y Agosto de 2015, y call con vencimientos largos a Enero de 2016 y Enero de 2017.

En la Tabla A.3 se adjuntan los datos utilizados para la confección de los siguientes gráficos.

Gráfico 4.5.1. Subyacente PBR, Sorinsa correspondiente a contratos Call con settlement 30 de Julio y vencimiento al 15 de Enero de 2016.



De la muestra aleatoria de 713 datos¹ sobre los cuales se calibró y comparó el modelo clásico (cf. Sección 4.1) con el modelo propuesto (cf. Sección 4.4), se obtienen los siguientes resultados para las curvas de volatilidad de calls y puts.

Resultados de ajustes del modelo para la sonrisa de volatilidad para Petrobras (PBR):

¹Se tomaron los siguientes grupos de datos de forma de contemplan al menos 4 vencimientos largos y 3 cortos, habiendo sido la elección de días completamente aleatoria: Para PBR se tomaron datos del 30/07/2015 y 10/08/2015 con vencimientos a 15/01/2016 y 20/01/2017 cada día; y datos del 10/08/2015 a las fechas de vencimiento 14/08/2015, 21/08/2015 y 28/08/2015. Para XOM se tomaron datos del 30/07/2015 y 31/07/2015 con vencimientos a 15/01/2016 y 20/01/2017 cada día; y datos del 01/07/2015 a las fechas de vencimiento 02/07/2015, 10/07/2015, 17/07/2015, 24/07/2015 y 31/07/2015.

PBR - Opciones de vencimiento largo									
Variables				Modelo woi			Modelo Clásico		
Fecha Settl.	Fecha Vto.	S	Tipo	a	xv	yv	a	xv	yv
30/07/2015	20/01/2017	6,85	P	0,001740	11,895660	0,573323	0,000817	10,066775	0,643498
30/07/2015	20/01/2017	6,85	C	0,000665	15,074391	0,488502	0,001803	17,522320	0,440480
30/07/2015	15/01/2016	6,85	P	0,002517	8,841101	0,595675	0,002388	11,389325	0,658785
30/07/2015	15/01/2016	6,85	C	0,000379	1,508649	0,523386	0,000960	13,426619	0,562193
10/08/2015	20/01/2017	6,45	P	0,001168	9,716595	0,639048	0,000562	5,028935	0,689523
10/08/2015	20/01/2017	6,45	C	0,000000	0,000000	0,534830	0,000064	0,000000	0,534830
10/08/2015	15/01/2016	6,45	P	0,001762	2,981600	0,634238	0,002464	11,105845	0,798299
10/08/2015	15/01/2016	6,45	C	0,000824	6,677794	0,560715	0,001089	11,849199	0,589847
Opciones de vencimiento corto									
Variables				Modelo woi			Modelo Clásico		
Fecha Settl.	Fecha Vto.	S	Tipo	a	xv	yv	a	xv	yv
10/08/2015	14/08/2015	6,45	P	0,020413	12,030260	0,000000	0,000655	11,889815	0,478383
10/08/2015	14/08/2015	6,45	C	0,121548	6,532749	0,568034	0,099308	6,423306	0,694213
10/08/2015	21/08/2015	6,45	P	0,072494	6,483578	0,802440	0,025078	8,815664	0,939180
10/08/2015	21/08/2015	6,45	C	0,009778	3,068617	0,506780	0,071113	11,760957	0,559636
10/08/2015	28/08/2015	6,45	P	0,038863	11,117646	0,000000	0,000655	11,889815	0,478383
10/08/2015	28/08/2015	6,45	C	0,081679	6,712098	0,479983	0,117561	6,862923	0,470941

Resultados de ajustes del modelo para la sonrisa de volatilidad para Exxon Mobile (XOM):

XOM - Opciones de vencimiento largo									
Variables				Modelo woi			Modelo Clásico		
Fecha Settl.	Fecha Vto.	S	Tipo	a	xv	yv	a	xv	yv
30/07/2015	20/01/2017	83,01	P	0,000059	88,776443	0,188257	0,000061	87,150236	0,190503
30/07/2015	20/01/2017	83,01	C	0,000053	106,984754	0,150609	0,000091	107,143610	0,129518
30/07/2015	15/01/2016	83,01	P	0,000142	83,440483	0,193108	0,000104	85,200096	0,204208
30/07/2015	15/01/2016	83,01	C	0,000076	96,274277	0,149727	0,000125	104,071051	0,129122
31/07/2015	20/01/2017	79,21	P	0,000068	81,756575	0,181539	0,000063	82,099937	0,187007
31/07/2015	20/01/2017	79,21	C	0,000089	102,144825	0,163684	0,000080	106,582749	0,147676
31/07/2015	15/01/2016	79,21	P	0,000100	83,233770	0,211832	0,000031	78,126149	0,210653
31/07/2015	15/01/2016	79,21	C	0,000130	100,512896	0,136159	0,000156	99,111106	0,103001
Opciones de vencimiento corto									
Variables				Modelo woi			Modelo Clásico		
Fecha Settl.	Fecha Vto.	S	Tipo	a	xv	yv	a	xv	yv
01/07/2015	02/07/2015	82,37	P	0,016983	81,715485	0,121975	0,009824	80,879673	0,162948
01/07/2015	02/07/2015	82,37	C	0,012093	82,902124	0,119230	0,004159	78,872871	0,116438
01/07/2015	10/07/2015	82,37	P	0,004168	81,839932	0,156138	0,003510	81,533516	0,162058
01/07/2015	10/07/2015	82,37	C	0,005069	83,659385	0,143507	0,004433	83,473387	0,148238
01/07/2015	17/07/2015	82,37	P	0,000742	79,877627	0,165712	0,000715	78,948439	0,200077
01/07/2015	17/07/2015	82,37	C	0,000213	63,074235	0,036628	0,000572	92,981557	0,173711
01/07/2015	24/07/2015	82,37	P	0,001205	83,183309	0,156051	0,001282	82,784764	0,158672
01/07/2015	24/07/2015	82,37	C	0,001361	86,029035	0,147065	0,001330	86,266329	0,148312
01/07/2015	31/07/2015	82,37	P	0,001789	83,096527	0,155466	0,001109	83,910661	0,159624
01/07/2015	31/07/2015	82,37	C	0,001126	86,838846	0,153003	0,001113	86,731439	0,154296

En la muestra tomada, en el 40,63% de los casos $a_{mod.woi} < a_{mod}$. Analizando más precisamente, se observa que la situación cambia si se trata de opciones calls y puts: entre las calls, el 62,5% de las mediciones da $a_{mod.woi} < a_{mod}$, mientras que entre las puts apenas 18,75%.

4.5.2. Desigualdades de no arbitraje de Merton.

En esta sección nos concentramos en mostrar los resultados de ajustes del modelo clásico descrito en la Sección 4.1 y del modelo propuesto desarrollado en la Sección 4.4.

En primera instancia es de esperar, desde un punto de vista intuitivo que ya que el modelo propuesto pondera con menor relevancia los datos profundamente en dinero y fuera de dinero,

la calibración de este modelo debería satisfacer con mayor holgura las cotas de Merton para la pendiente de la sonrisa en función de los strikes (cf. Sección 2.3.4). En este sentido, hacemos referencia a lo que hemos denominado Hecho (2) 2.3.1 la sección anterior.

De la muestra aleatoria de 713 datos² sobre los cuales se calibró y comparó el modelo clásico (cf. Sección 4.1) con el modelo propuesto (cf. Sección 4.4), sólo se consideraron los 354 datos correspondientes a opciones call. A continuación describimos las situaciones que se observan.

A partir de la cota de Merton (2.7), admitiendo un umbral de tolerancia $\epsilon \geq 0$ para la violación de la cota (es decir, entendiéndose que podría haber pseudo-arbitraje por costos de transacción), estimamos para $\epsilon = 0$ (no arbitraje perfecto), $\epsilon = 0,001$ y $\epsilon = 0,005$

$$P\left(\sigma_K(K) < \frac{N(d_2)}{K\sqrt{t}f(d_2)} + \epsilon\right) \quad (4.2)$$

$\epsilon = 0$								
PBR								
Corto Plazo			Largo Plazo			Total		
Violaciones (%)	# Violaciones	# Muestra	Violaciones (%)	# Violaciones	# Muestra	Violaciones (%)	# Violaciones	# Muestra
29,17%	14	48	12,33%	9	73	19,01%	23	121
29,17%	14	48	15,07%	11	73	20,66%	25	121
XOM								
Corto Plazo			Largo Plazo			Total		
Violaciones (%)	# Violaciones	# Muestra	Violaciones (%)	# Violaciones	# Muestra	Violaciones (%)	# Violaciones	# Muestra
23,20%	29	125	18,52%	20	108	21,03%	49	233
18,40%	23	125	45,37%	49	108	30,90%	72	233
Totales (PBR + XOM)								
Corto Plazo			Largo Plazo			Total		
Violaciones (%)	# Violaciones	# Muestra	Violaciones (%)	# Violaciones	# Muestra	Violaciones (%)	# Violaciones	# Muestra
24,86%	43	173	16,02%	29	181	20,34%	72	354
21,39%	37	173	33,15%	60	181	27,40%	97	354

$\epsilon = 0,001$								
PBR								
Corto Plazo			Largo Plazo			Total		
Violaciones (%)	# Violaciones	# Muestra	Violaciones (%)	# Violaciones	# Muestra	Violaciones (%)	# Violaciones	# Muestra
29,17%	14	48	10,96%	8	73	18,18%	22	121
29,17%	14	48	13,70%	10	73	19,83%	24	121
XOM								
Corto Plazo			Largo Plazo			Total		
Violaciones (%)	# Violaciones	# Muestra	Violaciones (%)	# Violaciones	# Muestra	Violaciones (%)	# Violaciones	# Muestra
21,60%	27	125	13,89%	15	108	18,03%	42	233
17,60%	22	125	41,67%	45	108	28,76%	67	233
Totales (PBR + XOM)								
Corto Plazo			Largo Plazo			Total		
Violaciones (%)	# Violaciones	# Muestra	Violaciones (%)	# Violaciones	# Muestra	Violaciones (%)	# Violaciones	# Muestra
23,70%	41	173	12,71%	23	181	18,08%	64	354
20,81%	36	173	30,39%	55	181	25,71%	91	354

²Se tomaron los siguientes grupos de datos de forma de contemplan al menos 4 vencimientos largos y 3 cortos, habiendo sido la elección de días completamente aleatoria: Para PBR se tomaron datos del 30/07/2015 y 10/08/2015 con vencimientos a 15/01/2016 y 20/01/2017 cada día; y datos del 10/08/2015 a las fechas de vencimiento 14/08/2015, 21/08/2015 y 28/08/2015. Para XOM se tomaron datos del 30/07/2015 y 31/07/2015 con vencimientos a 15/01/2016 y 20/01/2017 cada día; y datos del 01/07/2015 a las fechas de vencimiento 02/07/2015, 10/07/2015, 17/07/2015, 24/07/2015 y 31/07/2015.

$\epsilon = 0,005$								
PBR								
Corto Plazo			Largo Plazo			Total		
Violaciones (%)	# Violaciones	# Muestra	Violaciones (%)	# Violaciones	# Muestra	Violaciones (%)	# Violaciones	# Muestra
29,17%	14	48	6,85%	5	73	15,70%	19	121
27,08%	13	48	10,96%	8	73	17,36%	21	121
XOM								
Corto Plazo			Largo Plazo			Total		
Violaciones (%)	# Violaciones	# Muestra	Violaciones (%)	# Violaciones	# Muestra	Violaciones (%)	# Violaciones	# Muestra
19,20%	24	125	2,78%	3	108	11,59%	27	233
15,20%	19	125	12,04%	13	108	13,73%	32	233
Totales (PBR + XOM)								
Corto Plazo			Largo Plazo			Total		
Violaciones (%)	# Violaciones	# Muestra	Violaciones (%)	# Violaciones	# Muestra	Violaciones (%)	# Violaciones	# Muestra
21,97%	38	173	4,42%	8	181	12,99%	46	354
18,50%	32	173	11,60%	21	181	14,97%	53	354

En particular, esto evidencia que en todos los casos de violaciones de la cota de Merton (2.7) registrados, el modelo propuesto registra globalmente valores de $\sigma_K(K)$ inferiores a los del modelo clásico, aunque los resultados son muy distintos en los vencimientos cortos vs largos. Satisfaciendo el modelo woi mejor las cotas para los vencimientos largos que cortos (cf. comentarios sobre ponderación por volumen operado diario en la Sección 6).

Todos los casos en los que se detectan condiciones de arbitraje utilizando el modelo de sonrisa woi, corresponden a casos en donde no hay puntas compradoras para opciones en ese strike, al momento del cierre de mercado (momento en que fue relevado el precio). Esto motiva una serie de comentarios sobre perfeccionamientos a considerar en función de la utilidad que se le quiera dar al modelo, y que son tratados en la Sección 6.

Capítulo 5

Modelos de funciones de densidad.

En esta sección abordemos la confección de un modelo para la construcción de una función de densidad neutral al riesgo que contemple los Hechos (1), (2) y (3)-(5) (cf. 2.1.4, 2.3.1, 4.2.1, 4.2.2 y 4.2.3 resp.)

Para poder distinguir al modelo clásico del modelo propuesto, nos referiremos a este segundo como *Modelo woi (with open interest) de función de densidad neutral al riesgo*.

Dados los valores volatilidad implícitas modelados para la volatilidad implícita $\sigma(K) = aK^2 + bK + c$ se computa la función de densidad asociada mediante la fórmula 3.4, que -reemplazando las derivadas de σ - conduce a

$$f_Q(K) = f(d_2) \left(\frac{1}{\sigma K \sqrt{T-t}} + \frac{2d_1}{\sigma} (2aK + b) + \frac{d_1 d_2 K \sqrt{T-t}}{\sigma} (2aK + b)^2 + K \sqrt{T-t} 2a \right) \quad (5.1)$$

Esta fórmula conduce -para cada K- a valores distintos en función de que los parámetros a, b, c se estimen utilizando el modelos clásico descrito en 4.1 o 4.4. Sin embargo, la teoría indica que de valer la put-call parity, de la fórmula 3.2, se tiene que

$$\frac{\partial^2 P}{\partial K^2}(t) = \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(t) = e^{-r(T-t)} f_Q(K) \quad (5.2)$$

las funciones de densidad obtenidas a partir de calls y puts deberían coincidir. Por el contrario, mencionamos en el Hecho (5) 4.2.3 que los modelos propuestos asumen implícitamente la validez de la put-call parity, situación que no suele darse (nunca). Esto indica que no es conveniente sesgar el análisis y la modelización a tomar solamente datos de calls para la elaboración de función de densidad neutral al riesgo.

En términos más financieros, las opciones calls y puts están relevando distintas informaciones de los sentimientos de mercados de los inversores ya que como mencionamos en este trabajo, las opciones calls están asociadas al potencial upside del subyacente y los puts al potencial downside.

Por todo esto, el modelo propuesto contempla y pondera dos RND, una extraída a partir de la información de las opciones call, y otra a partir de puts, y son integradas en una única RND ponderando strike-a-strike por open interest.

Concretamente:

Sea $f_{Q,call}(K)$ la función de densidad neutral al riesgo que se obtiene a partir de los precios (y open interest) de las opciones call, y $f_{Q,put}(K)$ aquella obtenida a partir de los puts. Se define $f_{Q,woi}$ de la siguiente forma:

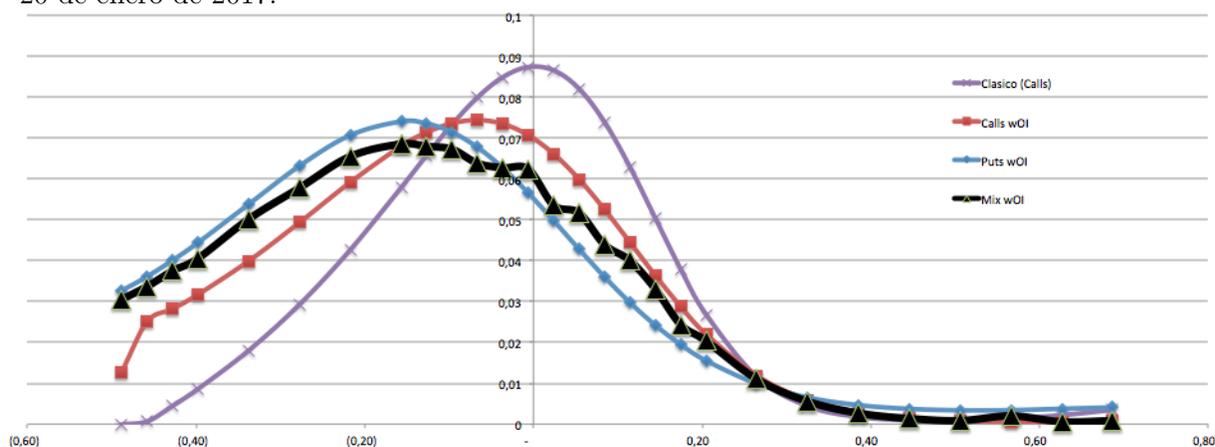
$$f_{Q,woi} := \frac{f_{Q,call}(K) \cdot OI_{call}(K) + f_{Q,put}(K) \cdot OI_{put}(K)}{OI_{call}(K) + OI_{put}(K)} \lambda, \quad (5.3)$$

donde $\lambda > 0$ es una constante de normalización para que $f_{Q,woi}$ integre 1.

5.1. Ajustes y resultados del modelo propuesto.

A continuación se muestran algunos de los resultados obtenidos para las funciones de densidad de RND de Calls, RND de Puts, RND woi obtenidas a partir de las estimaciones de volatilidades implícitas parametrizadas utilizando el modelo woi descrito en la Sección 4.4. Se gráfica también la función de densidad RND que se obtiene mediante la utilización del modelo clásico descrito en la Sección 4.1.

Gráfico 5.1.1. Subyacente: XOM, con fecha de settlement 30 de Julio de 2015 y vencimiento 20 de enero de 2017.



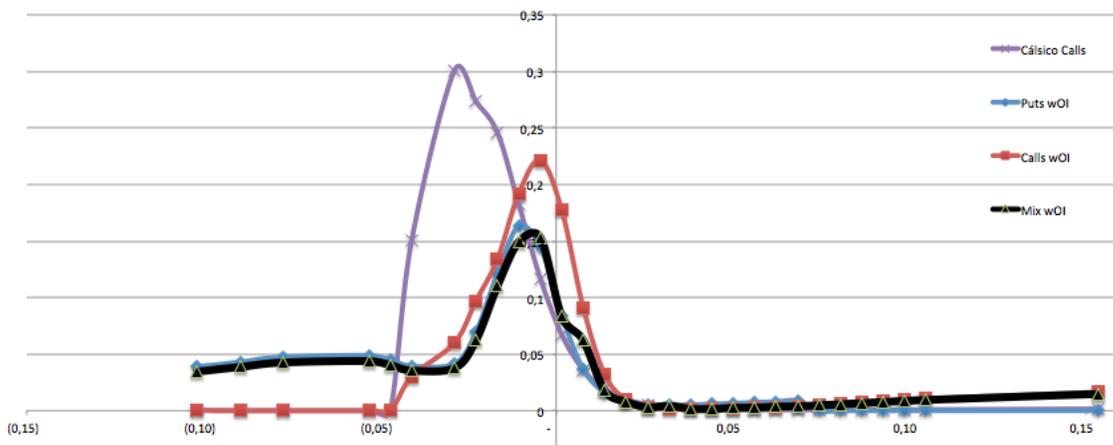
Resultados de Esperanza y Varianza obtenida a partir de la RND con datos de XOM, con fecha de settlement 30 de Julio de 2015 y vencimiento 20 de enero de 2017.

XOM	30/07/2015	20/01/2017
St = 83,01	Mix	Clasico
Varianza	5868,54487	5853,92192
Esperanza	74,0543502	81,9722983

Los datos para la confección del Gráfico 5.1.1 se encuentran en la Tabla A.4

Este segundo ejemplo corresponde al subyacente XOM, con fecha de settlement 1 de Julio de 2015 y vencimiento el día siguiente. Esto permite observar que en este caso la existencia de interés abierto en posiciones puts deep-in-the-money hacen que la cola izquierda de la función de densidad sea más pesada que la derecha, y por lo tanto, además de asimetría, presenta mayor varianza que la RND correspondiente al modelo clásico.

Gráfico 5.1.2. Subyacente: XOM, con fecha de settlement 1 de Julio de 2015 y vencimiento el día siguiente.



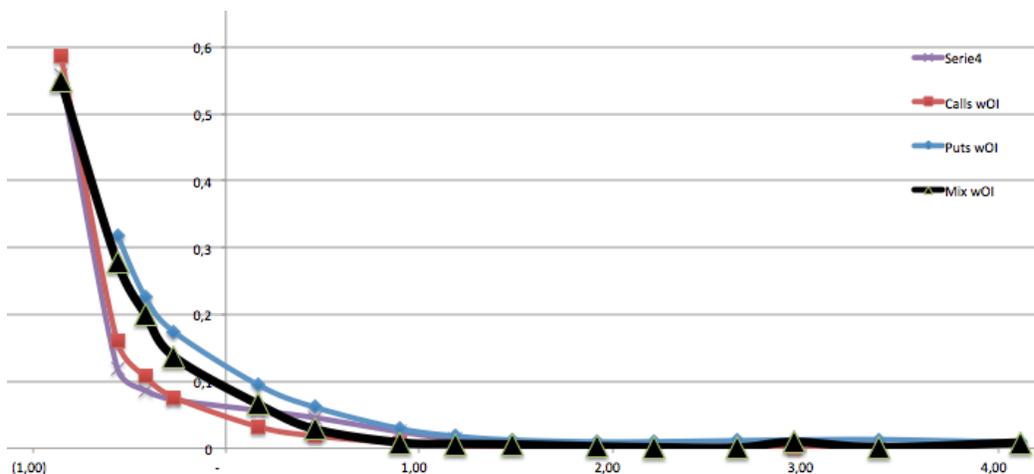
Resultados de Esperanza y Varianza obtenida a partir de la RND con datos de XOM, con fecha de settlement 1 de Julio de 2015 y vencimiento el día siguiente.

XOM	01/07/2015	02/07/2015
St = 82,37	Mix	Clasico
Varianza	14,0018922	5,42778798
Esperanza	81,1985446	80,8963797

Los datos para la confección del Gráfico 5.1.2 se encuentran en la Tabla A.5

Este tercer ejemplo corresponde al subyacente PBR, para vencimientos largos, y permiten ver el pesimismo de mercado con cualquiera de los modelos considerados. Esta deformación que se observa de “media campana” es frecuente en mercados muy bajistas.

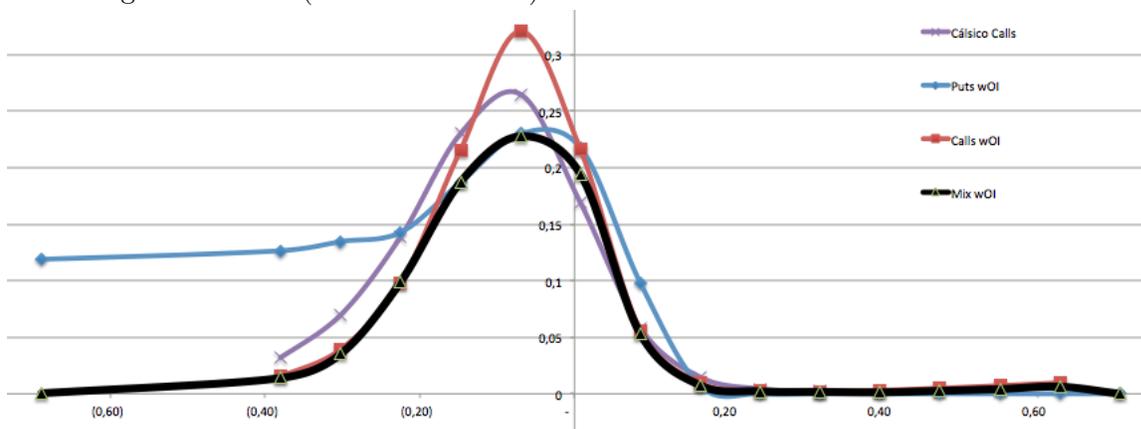
Gráfico 5.1.3. Subyacente PBR, con fecha de settlement 30 de Julio de 2015 y vencimiento 20 de enero de 2017.



Los datos para la confección del Gráfico 5.1.3 se encuentran en la Tabla A.6

Las siguientes funciones de densidad corresponden a PBR para vencimientos cortos. Este gráfico tiene la particularidad que la RND del modelo woi incorpora un ajuste por datos “outliers” (cf. Sección 5.2).

Gráfico 5.1.4. Subyacente PBR, con fecha de settlement 10 de Agosto de 2015 y vencimiento 14 de Agosto de 2015 (la misma semana).



Los datos para la confección del Gráfico 5.1.4 se encuentran en la Tabla A.7

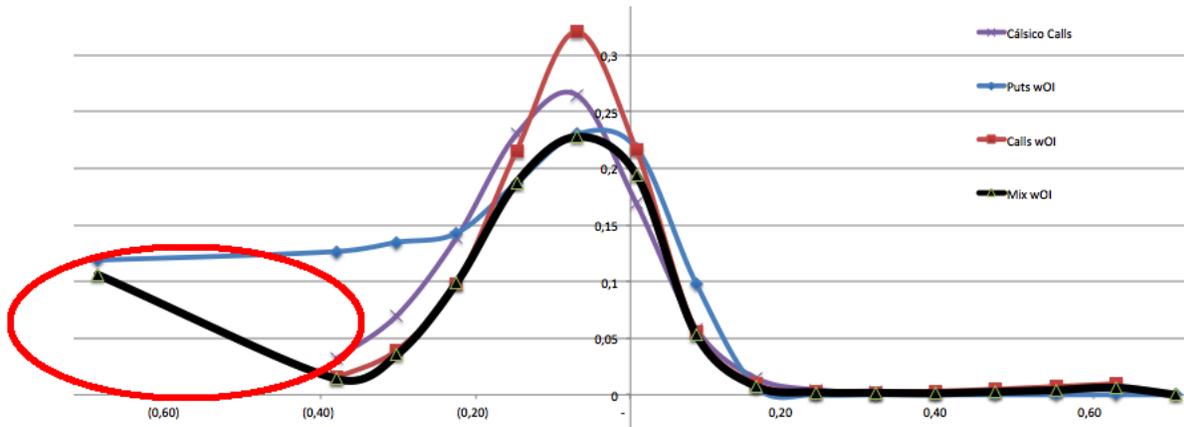
5.2. Dificultades que persisten en el modelo propuesto.

A continuación se muestran algunas dificultades en la sistematización de la construcción, que se encuentran parcialmente en el modelo tradicional y no se resuelven en el modelo propuesto.

Estas dos situaciones mencionadas son infrecuentes, no obstante, se observan con mayor frecuencia entre los vencimientos cortos, donde el volumen de interés abierto decrece rápidamente conforme se acerca el vencimiento de la opción.

1. Cuando se presentan datos ‘outliers’, por ejemplo valores de strikes K con $OI(K) \neq 0$ muy alejados en las puntas, seguidos de strikes más centrales con todas posiciones cerradas, se generan situaciones como las que se ilustran a continuación:

Gráfico 5.2.1. Subyacente PBR, con fecha de settlement 10 de Agosto de 2015 y vencimiento 14 de Agosto de 2015 (la misma semana).

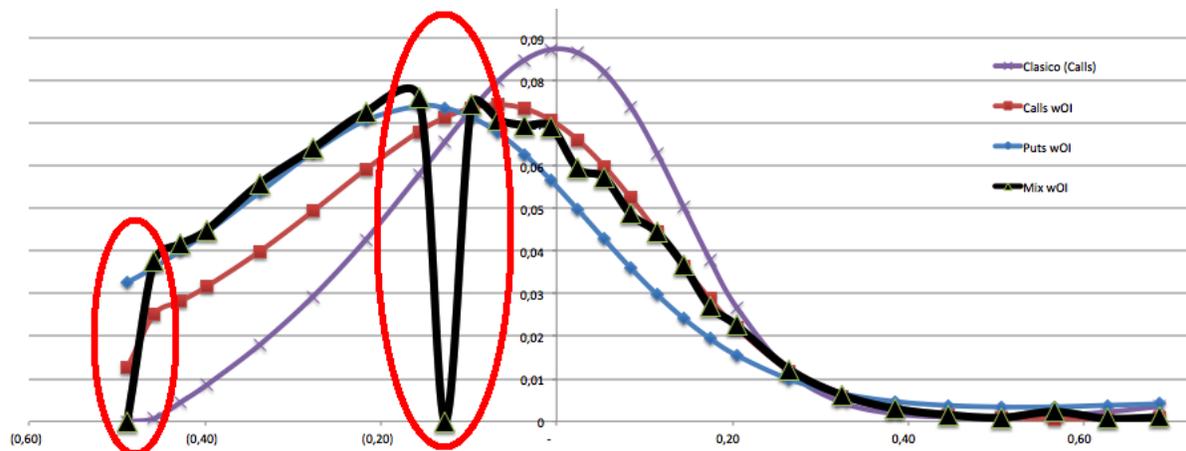


En la Tabla A.8 se adjuntan los datos necesarios para la elaboración y mejor interpretación del problema descrito.

2. Este problema puede ser solucionado, poniendo cotas inferiores μ para el volumen mínimo de interés abierto a ser considerado para la confección del modelo. En el ejemplo anterior, parte de la deformación en la cola izquierda de la RND confeccionada proviene de un dato ‘outlier’ con K y $OI_{put}(K) = 1$, que puede no ser representativo. Esto podría ignorarse requiriendo que al menos el volumen de interés abierto alcance un porcentaje del total del interés abierto para los puts de esa fecha (que en este caso es de 2223 lotes). Los resultados de tomar esta cota en el $\mu = 0,05\%$, se observan en la Tabla A.7 y en el Gráfico 5.1.4 que presentamos en la sección anterior.

Tomar un valor de $\mu = 0,1\%$ en algunos contextos podría conducir a situaciones como la que se describe en el gráfico de abajo. Se ejemplifica en el marco del ejemplo ilustrado en el Gráfico 5.1.1.

Gráfico 5.2.2. Subyacente: XOM, con fecha de settlement 30 de Julio de 2015 y vencimiento 20 de enero de 2017.



Esta es también una situación muy excepcional, ya que debería darse que un determinado strike cercano a moneyness tenga muy poco interés abierto tanto en calls como en puts. En la Tabla A.9 se adjuntan los datos necesarios para la elaboración y mejor interpretación del problema descrito.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro.

6.1. Conclusiones.

En mercados de equity, incluso los activos más líquidos como PBR, presentan algún tipo de iliquidez ya sea en las opciones call o put para alguna fecha de vencimientos. Esta iliquidez se manifiesta en el poco volumen operado en las opciones profundamente en dinero o fuera del dinero, lo que puede observarse estudiando el volumen de open interest como un proxy de liquidez, y conlleva a que los precios relevados no correspondan a mismos momentos temporales. Este descalce de tiempos de relevamiento de datos hace que las sonrisas de volatilidad elaboradas a partir de estos datos tengan sesgo, y por lo tanto que los modelos que se elaboren a partir de esos datos también los tenga. Este sesgo se contagia a las funciones de densidad neutrales al riesgo que se elaboran a partir de ellos, incrementado de otros eventos de mercado que los modelos clásicos no contemplan.

El modelo propuesto en este trabajo para la modelización de la sonrisa de volatilidad, desarrollado en la Sección 4.4 contempla todos los defectos e imperfecciones de mercado señaladas, y responde mejor a cotas teóricas como se muestra en la Sección 4.5.2.

El modelo que proponemos para la determinación de la función de densidad neutral al riesgo, desarrollado en el Capítulo 5, no sólo contempla el problema de la iliquidez, sino que utiliza la información de mercado de precios de calls y puts, ponderados por open interest (proxy de liquidez) y captura de forma más fiel el “sentimiento de mercado”.

6.2. Trabajo futuro.

Este trabajo abre varias líneas de investigación en el campo de la ingeniería financiera, que abarcan desde extender bajo la misma filosofía de contemplar los Hechos (1)-(5), y adaptar otras metodologías de cálculo de parametrizaciones de sonrisas de volatilidad y funciones RND, hasta la calibración fina de parámetros de este modelo para mejores ajustes para el trading de

alta, media o baja frecuencia.

Entre los primeros, es decir adaptar otras metodologías de cálculo de parametrizaciones de sonrisas de volatilidad y funciones RND, se pueden utilizar ponderaciones por open interest para la determinación directa de funciones de RND siguiendo la línea de (Bookstaber y McDonald, 1987)) para conseguir una mezcla de distribuciones lognormal y obtener un proceso estocástico implícito para el precio del activo subyacente como por ejemplo procesos de volatilidad estocástica y procesos con saltos (cf. (Bates, 1996) y (Trautmann y Beinert, 1999)). En cuanto a la construcción de una función para la sonrisa de volatilidad implícita, siguiendo a (Shimko y cols., 1993) se pueden considerar funciones que involucren directamente datos de calls y puts obteniendo una sola sonrisa que contenga toda la información de mercado.

Entre los segundos, enfocados en la calibración fina para el trading, los datos de volumen operado pueden dar mejor información para el corto plazo que los datos de open interest, y, por lo tanto, funciones de volatilidad que determinen RNDs que se adapten mejor a las operaciones de mayor frecuencia. En la práctica de trading en mercados ilíquidos como lo es el mercado local, esta metodología lleva a muchas distorsiones producto de la escasa liquidez.

Contemplar el caso de ponderar Volumen Operado diario en lugar de OI tiene la ventaja de que los plazos observados para el volumen operado corresponden exactamente al día que se observó el precio, y que si una opción no se operó en el día, entonces no es considerada en la construcción del modelo de sonrisa.

En función de cuál fuere el objetivo del modelo, y su utilización, puede ser relevante capturar el impacto del rápido cierre de posiciones short ante movimientos bruscos en el día. Este movimiento por lo general no captura expectativas en el precio a largo plazo, sino a corto plazo, en especial en las posiciones short-put donde el ejercicio anticipado puede ser óptimo.

Estudiar la función de densidad de OI respecto de t y de K (asumiendo k continuo, o de probabilidad puntual)

Referencias

- Ait-Sahalia, Y., y Lo, A. W. (2000). Nonparametric risk management and implied risk aversion. *Journal of econometrics*, 94(1), 9–51.
- Andersen, L. (2011). Option pricing with quadratic volatility: a revisit. *Finance and Stochastics*, 15(2), 191–219.
- Andersen, L., y Brotherton-Ratcliffe, R. (1998). The equity option volatility smile: an implicit finite-difference approach. *Journal of Computational Finance*, 1(2), 5–37.
- Arrow, K. J. (1964). The role of securities in the optimal allocation of risk-bearing. *The Review of Economic Studies*, 91–96.
- Avellaneda, M., Friedman, C., Holmes, R., y Samperi, D. (1997). Calibrating volatility surfaces via relative-entropy minimization. *Applied Mathematical Finance*, 4(1), 37–64.
- Bahra, B. (1997). Implied risk-neutral probability density functions from option prices: theory and application.
- Bates, D. S. (1991). The crash of '87: Was it expected? the evidence from options markets. *Journal of Finance*, 1009–1044.
- Bates, D. S. (1996). Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in deutsche mark options. *Review of financial studies*, 9(1), 69–107.
- Battig, R. J., y Jarrow, R. A. (1999). The second fundamental theorem of asset pricing: A new approach. *Review of Financial Studies*, 12(5), 1219–1235.
- Black, F. (1989). Universal hedging: Optimizing currency risk and reward in international equity portfolios. *Financial Analysts Journal*, 16–22.
- Black, F., y Litterman, R. (1991b). Global asset allocation with equities, bonds, and currencies. *Fixed Income Research*, 2, 15–28.
- Black, F., y Litterman, R. (1992). Global portfolio optimization. *Financial Analysts Journal*, 28–43.
- Black, F., y Litterman, R. B. (1991a). Asset allocation: combining investor views with market equilibrium. *The Journal of Fixed Income*, 1(2), 7–18.
- Black, F., y Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *The journal of political economy*, 637–654.
- Bodurtha Jr, J. N. (1998). Non-parametric estimation of an implied volatility surface.
- Bookstaber, R. M., y McDonald, J. B. (1987). A general distribution for describing security price returns. *Journal of business*, 401–424.
- Bouchouev, I., y Isakov, V. (1997). The inverse problem of option pricing. *Inverse Problems*, 13(5), L11.
- Breeden, D. T., y Litzenberger, R. H. (1978). Prices of state-contingent claims implicit in option prices. *Journal of business*, 621–651.

- Brown, G., y Toft, K. B. (1999). Constructing binomial trees from multiple implied probability distributions. *The Journal of Derivatives*, 7(2), 83–100.
- Brunner, B., y Hafner, R. (2003). Arbitrage-free estimation of the risk-neutral density from the implied volatility smile. *Journal of Computational Finance*, 7(1), 75–106.
- Campa, J. M., Chang, P. K., y Reider, R. L. (1998). Implied exchange rate distributions: evidence from otc option markets. *Journal of International Money and Finance*, 17(1), 117–160.
- Cochrane, J. H. (2009). *Asset pricing:(revised edition)*. Princeton university press.
- Coleman, T. F., y Li, Y. (1996). A reflective newton method for minimizing a quadratic function subject to bounds on some of the variables. *SIAM Journal on Optimization*, 6(4), 1040–1058.
- Cooper, N., y Talbot, J. (1999). The yen/dollar exchange rate in 1998: Views from options markets. *Bank of England Quarterly Bulletin*, 37, 68–77.
- Crépey, S. (2003). Calibration of the local volatility in a trinomial tree using tikhonov regularization. *Inverse Problems*, 19(1), 91.
- Debreu, G. (1959). *Theory of value: An axiomatic analysis of economic equilibrium*. Yale University Press.
- Derman, E. (2008). Lectures on the smile. *Columbia University*.
- Derman, E., y Kani, I. (1994). Riding on a smile. *Risk*, 7(2), 32–39.
- Dupire, B. (1997). *Pricing and hedging with smiles*. Mathematics of derivative securities. Dempster and Pliska eds., Cambridge Uni. Press.
- Egger, H., y Engl, H. W. (2005). Tikhonov regularization applied to the inverse problem of option pricing: convergence analysis and rates. *Inverse Problems*, 21(3), 1027.
- Fortune, P., y cols. (1996). Anomalies in option pricing: The black-scholes model revisited. *New England Economic Review*(Mar), 17–40.
- Gatheral, J. (2006). *The volatility surface: a practitioner's guide* (Vol. 357). John Wiley & Sons.
- Giordano, L., y Siciliano, G. (2015). Real-world and risk-neutral probabilities in the regulation on the transparency of structured products.
- Grundy, B. D. (1991). Option prices and the underlying asset's return distribution. *Journal of Finance*, 1045–1069.
- Guziec, P. (2009). Morningstar guide to equity option investing. *Morningstar OptionInvestor*.
- Hanke, M., y Rösler, E. (2005). Computation of local volatilities from regularized dupire equations. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 8(02), 207–221.
- Harrison, J. M., y Kreps, D. M. (1979). Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic theory*, 20(3), 381–408.
- Harrison, J. M., y Pliska, S. R. (1981). Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic processes and their applications*, 11(3), 215–260.

- Hull, J. (2009). *Options, futures and other derivatives*. Pearson education.
- Jackson, N., Suli, E., y Howison, S. (1998). Computation of deterministic volatility surfaces.
- Jackwerth, J. C. (1999). Option implied risk-neutral distributions and implied binomial trees: A literature review. *Journal of derivatives*, 7(2), 66–82.
- Jackwerth, J. C. (2000). Recovering risk aversion from option prices and realized returns. *Review of Financial Studies*, 13(2), 433–451.
- Jackwerth, J. C., y Rubinstein, M. (1996). Recovering probability distributions from option prices. *The Journal of Finance*, 51(5), 1611–1631.
- Jiang, L., Chen, Q., Wang, L., y Zhang, J. E. (2003). A new well-posed algorithm to recover implied local volatility. *Quantitative Finance*, 3(6), 451–457.
- Lin, X. S., y cols. (2006). *Introductory stochastic analysis for finance and insurance* (Vol. 557). John Wiley & Sons.
- Liu, X., Shackleton, M. B., Taylor, S. J., y Xu, X. (2007). Closed-form transformations from risk-neutral to real-world distributions. *Journal of Banking & Finance*, 31(5), 1501–1520.
- Lucas Jr, R. E. (1978). Asset prices in an exchange economy. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1429–1445.
- Merton, R. C., y Samuelson, P. A. (1992). Continuous-time finance.
- Monteiro, A., Tütüncü, R., y Vicente, L. (2011). Estimation of risk-neutral density surfaces. *Computational Management Science*, 8(4), 387–414.
- Neftci, S. N. (2008). *Principles of financial engineering*. Academic Press.
- Perillo, M. F. (2006). Distribución neutral al riesgo implícita en el mercado de opciones - teoría y aplicaciones en el mercado local. *Universidad del CEMA*.
- Rosenberg, J. V. (1999). Implied volatility functions: A reprise.
- Ross, S. A. (1989). Discussion: Intertemporal asset pricing. *Theory of valuation*, 85–96.
- Schachermayer, W. (2008). *The notion of arbitrage and free lunch in mathematical finance*. Springer.
- Shimko, D. C., Tejima, N., y Van Deventer, D. R. (1993). The pricing of risky debt when interest rates are stochastic. *The Journal of Fixed Income*, 3(2), 58–65.
- Trautmann, S., y Beinert, M. (1999). Impact of stock price jumps on option values. En *Empirical research on the german capital market* (pp. 303–322). Springer.
- Vincent-Humphreys, D., Noss, J., y cols. (2012). Estimating probability distributions of future asset prices: empirical transformations from option-implied risk-neutral to real-world density functions.
- Weinberg, S. A. (2001). Interpreting the volatility smile: an examination of the information content of option prices. *FRB International Finance Discussion Paper*(706).
- Wheeden, R. L. (2015). *Measure and integral: an introduction to real analysis* (Vol. 308). CRC Press.

Wilmott, P. (2007). *Paul wilmott introduces quantitative finance*. John Wiley & Sons.

Anexo

Tabla A.1.

Delta	K/St - 1	K	Símbolo	Último	Bid	Ask	Vol. Operado	Vol. abierto	MP Call (Prom puntas)	Volat Impl Mercado
-0,037	-46,38%	42,50	XOM170120P00042500	0,4	0,3	1	0	0,00%	0,65	33%
-0,047	-43,22%	45	XOM170120P00045000	0,44	0,44	0,75	0,04	10,00%	0,595	29%
-0,058	-40,07%	47,5	XOM170120P00047500	0,8	0,35	0,98	0,3	60,00%	0,665	28%
-0,071	-36,92%	50	XOM170120P00050000	0,7	0	2,01	0	0,00%	1,005	28%
-0,086	-33,76%	52,5			0,2	1,985	0	0	1,0925	26%
-0,105	-30,61%	55	XOM170120P00055000	1,54	0,4	1,96	0,24	18,46%	1,18	25%
-0,126	-27,45%	57,5			1,005	2,13	0	0	1,5675	24%
-0,151	-24,30%	60	XOM170120P00060000	2	1,61	2,3	0,3	17,65%	1,955	24%
-0,180	-21,15%	62,5			2,38	2,85	0	0	2,615	24%
-0,214	-17,99%	65	XOM170120P00065000	3,16	3,15	3,4	0,16	5,33%	3,275	24%
-0,251	-14,84%	67,5			3,9	4,15	0	0	4,025	24%
-0,293	-11,68%	70	XOM170120P00070000	4,5	4,65	4,9	0,15	3,45%	4,775	23%
-0,339	-8,53%	72,5	XOM170120P00072500	5,2	3,45	7,35	0	0,00%	5,4	22%
-0,389	-5,37%	75	XOM170120P00075000	6,61	5,7	6,95	0,21	3,28%	6,325	21%
-0,442	-2,22%	77,5	XOM170120P00077500	8	6,85	8	0,26	3,36%	7,425	21%
0,503	0,93%	80	XOM170120C00080000	5,48	5,25	5,6	-0,22	-3,86%	5,425	17%
0,447	4,09%	82,5	XOM170120C00082500	4,69	3,8	6,5	0,09	1,96%	5,15	19%
0,391	7,24%	85	XOM170120C00085000	3,7	3,25	3,95	-0,05	-1,33%	3,6	17%
0,337	10,40%	87,5	XOM170120C00087500	2,95	2,65	3	0,06	2,08%	2,825	16%
0,286	13,55%	90	XOM170120C00090000	2,26	2,17	2,45	-0,04	-1,74%	2,31	16%
0,239	16,70%	92,5	XOM170120C00092500	1,67	1,5	1,85	-0,18	-9,73%	1,675	16%
0,196	19,86%	95	XOM170120C00095000	1,35	1,2	1,46	0	0,00%	1,33	16%
0,160	23,01%	97,5	XOM170120C00097500	1,04	0,9	1,4	0	0,00%	1,15	16%
0,128	26,17%	100	XOM170120C00100000	0,83	0,7	0,88	0,03	3,75%	0,79	16%
0,102	29,32%	102,5			0,57	0,865	0	0	0,7175	16%
0,081	32,48%	105	XOM170120C00105000	0,54	0,44	0,85	0	0,00%	0,645	17%
0,064	35,63%	107,5			0,295	0,8	0	0	0,5475	17%
0,051	38,78%	110	XOM170120C00110000	0,48	0,15	0,75	0	0,00%	0,45	17%
0,040	41,94%	112,5			0,1	0,66	0	0	0,38	18%
0,032	45,09%	115	XOM170120C00115000	0,2	0,05	0,57	0	0,00%	0,31	18%
0,026	48,25%	117,5			0,075	0,36	0	0	0,2175	17%
0,021	51,40%	120	XOM170120C00120000	0,13	0,1	0,15	-0,05	-27,78%	0,125	17%
0,018	54,55%	122,5			0,05	0,2	0	0	0,125	17%
0,015	57,71%	125	XOM170120C00125000	0,11	0	0,25	-0,02	-15,38%	0,125	18%
0,013	60,86%	127,5			0	0,205	0	0	0,1025	18%
0,012	64,02%	130	XOM170120C00130000	0,2	0	0,16	0	0,00%	0,08	18%
0,011	67,17%	132,5			0	0,135	0	0	0,0675	18%
0,010	70,33%	135	XOM170120C00135000	0,03	0	0,11	0	0,00%	0,055	18%
0,010	73,48%	137,5			0,01	0,095	0	0	0,0525	19%
0,009	76,63%	140	XOM170120C00140000	0,06	0,02	0,08	0	0,00%	0,05	19%

Gráfico A.2.



Tabla A.3.

Parámetros de los modelos					Datos de Mercado				Modelo wOI				Modelo Clásico				
Fecha Settl.	Fecha Vto.	D	r	S	K	Prome dio punta	Volume	Open interest	Vol. Impl. Mercado	a	xv	yv	Vol. Impl. Mod woi	a	xv	yv	Vol. Impl. Mod Clásico
30/07/2015	20/01/2017	0	2%	6,85	1	6,100	0	7	1,383	0,0007	15,074	0,489	0,620	0,0018	17,522	0,440	0,933
30/07/2015	20/01/2017	0	2%	6,85	3	4,025	10	2054	0,477	0,0007	15,074	0,489	0,585	0,0018	17,522	0,440	0,821
30/07/2015	20/01/2017	0	2%	6,85	4	3,725	1	1398	0,753	0,0007	15,074	0,489	0,570	0,0018	17,522	0,440	0,770
30/07/2015	20/01/2017	0	2%	6,85	5	2,785	1118	17394	0,566	0,0007	15,074	0,489	0,556	0,0018	17,522	0,440	0,723
30/07/2015	20/01/2017	0	2%	6,85	8	1,440	36	34977	0,525	0,0007	15,074	0,489	0,522	0,0018	17,522	0,440	0,604
30/07/2015	20/01/2017	0	2%	6,85	10	0,865	291	42616	0,494	0,0007	15,074	0,489	0,506	0,0018	17,522	0,440	0,542
30/07/2015	20/01/2017	0	2%	6,85	13	0,440	507	25290	0,485	0,0007	15,074	0,489	0,491	0,0018	17,522	0,440	0,477
30/07/2015	20/01/2017	0	2%	6,85	15	0,320	1	22205	0,498	0,0007	15,074	0,489	0,489	0,0018	17,522	0,440	0,452
30/07/2015	20/01/2017	0	2%	6,85	17	0,240	2	1906	0,508	0,0007	15,074	0,489	0,491	0,0018	17,522	0,440	0,441
30/07/2015	20/01/2017	0	2%	6,85	20	0,210	1	5263	0,551	0,0007	15,074	0,489	0,505	0,0018	17,522	0,440	0,452
30/07/2015	20/01/2017	0	2%	6,85	22	0,190	0	489	0,573	0,0007	15,074	0,489	0,520	0,0018	17,522	0,440	0,477
30/07/2015	20/01/2017	0	2%	6,85	25	0,065	10	3580	0,508	0,0007	15,074	0,489	0,554	0,0018	17,522	0,440	0,541
30/07/2015	20/01/2017	0	2%	6,85	27	0,140	0	43	0,605	0,0007	15,074	0,489	0,583	0,0018	17,522	0,440	0,602
30/07/2015	20/01/2017	0	2%	6,85	30	0,130	0	117	0,630	0,0007	15,074	0,489	0,637	0,0018	17,522	0,440	0,721

Tabla A.4.

PBR		30/07/2015	20/01/2017	PBR170120P0003000		0,00% <- % mínimo del OI total para considerar el dato									
S	K	Put		Call		Mix				Clásico		Esperanza			
6,85		Ointeres	RND WOI	Esperanza	Ointeres	RND WOI	Esperanza	RND wOI (s/p lambda)	RND WOI	Esperanza	Clásico	Esperanza			
(0,85)	1	0		6,72219344	7	0,58753511	2,60710375	0,58753511	1,39504897	0,55020927	3,60834376	0,55827167	3,57955583		
(0,56)	3	13557	0,31770621		2054	0,15986913		0,29693897		0,27807457		0,11966457			
(0,42)	4	12566	0,22542127		1398	0,10736006		0,2136017		0,20003168		0,08686504			
(0,27)	5	44010	0,17447837		17394	0,07659543		0,1467495		0,13742657		0,07261415			
0,17	8	54461	0,09469394		34977	0,03225926		0,07027727		0,06581259		0,0566659			
0,46	10	16689	0,06148411		42616	0,01859069		0,03066131		0,02871341		0,04582392			
0,90	13	1890	0,0295314		25290	0,00787585		0,0093817		0,00878568		0,02479689			
1,19	15	5577	0,01826949		22205	0,00435296		0,00714658		0,00669257		0,01330788			
1,48	17	1138	0,01247045		1906	0,00240979		0,00617097		0,00577893		0,00638223			
1,92	20	1603	0,00969292		5263	0,00105856		0,00307442		0,0028791		0,00230654			
2,21	22	52	0,00992754		489	0,000678		0,00156705		0,00146749		0,00171225			
2,65	25	209	0,01149888		3580	0,00045835		0,00106734		0,00099953		0,00230129			
2,94	27	170	0,01256503		43	0,00043789		0,01011683		0,00947411		0,00341516			
3,38	30	11	0,0131017		117	0,00051813		0,00159953		0,00149791		0,00587252			
4,11	35	194	0,00916068		0			0,00916068		0,00857871					

Tabla A.5.

XOM		01/07/2015 02/07/2015 XOM150702P00074000						0,00% <- % mínimo del OI total para considerar el dato					
S	K	Puts wOI			Calls wOI			Mix wOI					Cálculo Calls Esperanza
		Ointeres	RND WOI	Esperanza	Ointeres	RND WOI	Esperanza	RND wOI (s/p lambda)	RND WOI	Esperanza	Clasico		
82,37	74	10	0,03860121	80,5947738	0	0	82,298457	0,03860121	1,11530946	0,03461032	81,1985446	0	80,8963797
(0,10)	75	19	0,04305969		0	0		0,04305969		0,03860784		0	
(0,09)	76	40	0,04748389		0	0		0,04748389		0,04257464		0	
(0,08)	78	206	0,04878073		0	0		0,04878073		0,04373739		0	
(0,05)	78,5	518	0,0449622	Varianza	0	0		0,0449622		0,04031366		0	
(0,04)	79	43	0,03954435		0	0		0,03954435		0,03545594		0	
(0,03)	80	278	0,04162636		0	0,06013011		0,04201728		0,03767321		0,30091223	
(0,02)	80,5	76	0,06945262		0	0		0,06945262		0,06227206		0	
(0,01)	81	307	0,12122021		49	0,13390672		0,12296639		0,11025315		0,24587663	
(0,00)	81,5	766	0,16321498		102	0,19213386		0,16661328		0,14938749		0,18212166	
0,00	82	1182	0,14509177		608	0,22126902		0,1709665		0,15329064		0,11703699	
0,00	82,5	562	0,08399823		61	0,17756192		0,09315937		0,08352782		0,06723325	
0,01	83	139	0,03700608		206	0,09133941		0,06944899		0,06226845		0,03611843	
0,01	83,5	2735	0,01576284		894	0,03203536		0,01977155		0,01772742		0,0189576	
0,02	84	1044	0,0080534		1217	0,00939944		0,00877792		0,00787039		0,01006562	
0,03	84,5	376	0,00556328		2606	0,00297748		0,00330118		0,00295988		0,00554368	
0,03	85	2779	0,00501897		225	0,00133386		0,00474295		0,00425259		0,00322523	
0,04	85,5	1097	0,00525111		5297	0,00104086		0,0017632		0,0015809		0,00201096	
0,04	86	240	0,00581374		2243	0,00123542		0,00167795		0,00150447		0,00136022	
0,05	86,5	122	0,00651452		456	0,00170255		0,00271822		0,00243719		0,00100669	
0,06	87	104	0,00726037		643	0,00237646		0,00305642		0,00274042		0,00081655	
0,06	87,5	83	0,0080029		475	0,00321797		0,0039297		0,00352342		0,00072059	
0,07	88	12	0,00871656		304	0,00418681		0,00435883		0,00390818		0,0006817	
0,07	88,5	0	0		104	0,00524009		0,00524009		0,00469833		0,00067928	
0,08	89	0	0		38	0,00633678		0,00633678		0,00568164		0,00070138	
0,09	89,5	0	0		24	0,00744182		0,00744182		0,00667243		0,0007408	
0,09	90	0	0		32	0,008528		0,008528		0,00764631		0,00079298	
0,10	90,5	0	0		20	0,00957601		0,00957601		0,00858597		0,00085488	
0,10	91	0	0		261	0,01057347		0,01057347		0,0094803		0,00092439	
0,15	95	0	0		10	0,01645928		0,01645928		0,01475759		0,00161828	

Tabla A.6.

PBR		30/07/2015 20/01/2017 PBR170120P00003000						0,00% <- % mínimo del OI total para considerar el dato					
S	K	Put			Call			Mix					Cálculo Calls Esperanza
		Ointeres	RND WOI	Esperanza	Ointeres	RND WOI	Esperanza	RND wOI (s/p lambda)	RND WOI	Esperanza	Clasico		
6,85	1	0		6,72219344	7	0,58753511	2,60710375	0,58753511	1,39504897	0,55020927	3,60834376	0,55827167	3,57955583
(0,56)	3	13557	0,31770621		2054	0,15986913		0,29693897		0,27807457		0,11966457	
(0,42)	4	12566	0,22542127		1398	0,10736086		0,2136017		0,20003168		0,08686504	
(0,27)	5	44010	0,17447637		17394	0,07659543		0,1467495		0,13742657		0,07261415	
(0,17)	8	54461	0,09469394		34977	0,03225926		0,07027727		0,06581259		0,0566659	
0,46	10	16689	0,06148411		42616	0,01859069		0,03066131		0,02871341		0,04582392	
0,90	13	1890	0,0295314		25290	0,00787585		0,0093817		0,00878568		0,02479689	
1,19	15	5577	0,01826949		22205	0,00435296		0,00714658		0,00689257		0,01330788	
1,48	17	1138	0,01247045		1906	0,00240979		0,00617097		0,00577893		0,00638223	
1,92	20	1603	0,00969292		5263	0,00105856		0,00307442		0,0028791		0,00230654	
2,21	22	52	0,00992754		489	0,000678		0,00156705		0,00146749		0,00171225	
2,65	25	209	0,01149888		3580	0,00045835		0,00106734		0,00099953		0,00230129	
2,94	27	170	0,01256503		43	0,00043789		0,01011683		0,00947411		0,00341516	
3,38	30	11	0,01310117		117	0,00051813		0,00159953		0,00149791		0,00587252	
4,11	35	194	0,00916068		0			0,00916068		0,00857871			

Tabla A.7.

PBR		10/08/2015 14/08/2015 PBR150814P00002000						0,05% <- % mínimo del OI total para considerar el dato					
S	K	Puts wOI			Calls wOI			Mix wOI					Cálculo Calls Esperanza
		Ointeres	RND WOI	Esperanza	Ointeres	RND WOI	Esperanza	RND wOI (s/p lambda)	RND WOI	Esperanza	Clasico		
6,45	2	1	0,1183443	5,24842461	0	0	5,99216898	0	0,93168463	0	5,9450515	0	5,81972756
(0,38)	4	0			4	0,01555567		0,01555567		0,01669629		0,03226038	
(0,30)	4,5	0			4	0,03928012		0,03928012		0,04216032		0,06971085	
(0,22)	5	30	0,1427635		80	0,09806021		0,11025201		0,1183362		0,13876399	
(0,15)	5,5	113	0,18699547		367	0,21554563		0,20882444		0,22413641		0,23007522	
(0,07)	6	1074	0,22983634		388	0,32032888		0,25385215		0,27246575		0,26476999	
0,01	6,5	507	0,21740612		774	0,21584392		0,21646221		0,23233421		0,16889727	
0,09	7	171	0,09792437		2394	0,05614993		0,05893489		0,06325627		0,058093	
0,16	7,5	179	0,00672532		189	0,00965741		0,00823121		0,00883476		0,01471156	
0,24	8	9	4,58E-06		176	0,00256947		0,00244469		0,00262395		0,00429969	
0,32	8,5	4	3,02E-14		53	0,0020461		0,00190251		0,00204201		0,00226233	
0,40	9	48	8,61E-36		45	0,00306844		0,00148473		0,00159359		0,00233004	
0,47	9,5	72	4,85E-97		103	0,00489505		0,00288109		0,00309234		0,00319499	
0,55	10	12	1,11E-297		21	0,00722987		0,00460083		0,00493818		0,00451717	
0,63	10,5	2	0		5	0,0097693		0,00697807		0,00748974		0,0061135	
0,71	11	1	0		0			0		0			

Tabla A.8.

PBR		10/08/2015	14/08/2015	PBR150814P00002000		0,00% <- % mínimo del OI total para considerar el dato							
S	K	Puts wOI		Calle wOI		Mix wOI							
		Ointeres	RND WOI	Esperanza	Ointeres	RND WOI	Esperanza	RND wOI (s/p lambda)	RND WOI	Esperanza	Clasico	Cálculo Calle Esperanza	
6.45			0,1183443	5,24842461			5,99216696	0,1183443	1,05002893	0,11270575	5,5004215		5,81972756
(0,69)	2	1	0,1183443	5,24842461	0	0,01555567	5,99216696	0,1183443	1,05002893	0,11270575	5,5004215	0,03226038	
(0,38)	4	0			4	0,03928012		0,03928012		0,03928012		0,06971085	
(0,30)	4,5	0			4	0,09806021		0,11025201		0,10499803		0,13876399	
(0,22)	5	30	0,1427635		80	0,21554563		0,20892444		0,19887494		0,23007522	
(0,15)	5,5	113	0,18699547		367	0,32032688		0,25385215		0,24175729		0,26476999	
(0,07)	6	1074	0,22983634		388	0,21584392		0,21646221		0,20614881		0,16889727	
0,01	6,5	507	0,21740612		774	0,05614993		0,05893469		0,05612692		0,058093	
0,09	7	171	0,09792437		2394	0,00965741		0,00244469		0,00783903		0,01471156	
0,16	7,5	179	0,00672532		189	0,00256947		0,00190251		0,00232821		0,00429969	
0,24	8	9	4,58E-06		176	0,0020461		0,00148473		0,00181167		0,00233004	
0,32	8,5	4	3,02E-14		53	0,00489505		0,00288109		0,00274382		0,00319499	
0,40	9	48	8,61E-36		45	0,00722987		0,00697807		0,00664566		0,0061135	
0,47	9,5	72	4,85E-87		103	0,0097693		0,0097693		0,0097693		0,0097693	
0,55	10	12	1,11E-297		21	0,0097693		0,0097693		0,0097693		0,0097693	
0,63	10,5	2			5								
0,71	11	1			0								

Tabla A.9.

XOM		30/07/2015	20/01/2017	XOM170120P00042500		0,10% <- % mínimo del OI total para considerar el dato							
S	K	Put		Call		Mix							
		Ointeres	RND WOI	Esperanza	Ointeres	RND WOI	Esperanza	RND wOI (s/p lambda)	Ointeres	RND WOI	Esperanza	Clasico	Esperanza
83.01							76,4982822	0	0,96302045	0	75,2245337	0	81,9722983
(0,49)	42,5	7	0,03259352	73,4086793	0	0,02504911	76,4982822	0	0,96302045	0	75,2245337	0	81,9722983
(0,46)	45	1531	0,03610607		21	0,02817908		0,03610607		0,03749253		0,00065643	
(0,43)	47,5	455	0,04005777		1	0,02817908		0,04005777		0,04159597		0,00446114	
(0,40)	50	678	0,04438675		65	0,03171726		0,04327838		0,04494025		0,00859739	
(0,34)	55	948	0,05379487		16	0,03992352		0,05379487		0,05586057		0,01801837	
(0,28)	60	1779	0,06317663		209	0,049332		0,06172113		0,0640912		0,02927815	
(0,22)	65	1672	0,07068391		117	0,05917755		0,0699314		0,07281673		0,04265229	
(0,16)	70	3676	0,07403822		631	0,06800198		0,07315428		0,07596338		0,05787344	
(0,13)	72,5	7	0,07353643		6	0,07136046		0		0		0,0657429	
(0,10)	75	4654	0,07141803		989	0,07358923		0,07179856		0,07455559		0,07328562	
(0,07)	77,5	2240	0,06772738		148	0,07437253		0,06813922		0,07075573		0,07991301	
(0,04)	80	3614	0,06265856		2393	0,0734535		0,06695892		0,06953012		0,08487619	
(0,01)	82,5	894	0,05653685		2172	0,07068994		0,06656311		0,0691191		0,08734264	
0,02	85	3408	0,04977355		2828	0,0661053		0,05717993		0,05937581		0,08655371	
0,05	87,5	569	0,04280461		1466	0,05991817		0,0551331		0,05725019		0,08205333	
0,08	90	2777	0,03602875		5348	0,05253453		0,0468931		0,04689378		0,07392575	
0,11	92,5	246	0,0297601		1813	0,04449598		0,0427354		0,04437642		0,06292729	
0,14	95	367	0,02420455		3783	0,03639214		0,03531434		0,0366704		0,05039505	
0,17	97,5	340	0,01946007		796	0,02876054		0,02597695		0,02697445		0,03790867	
0,20	100	357	0,01553462		8143	0,02200393		0,02173223		0,02256674		0,02683549	
0,26	105	85	0,00988668		1354	0,01184487		0,0117292		0,0121796		0,01152808	
0,33	110	83	0,00651644		1304	0,00589719		0,00593425		0,00616212		0,00440624	
0,39	115	9	0,00465521		1722	0,00286412		0,00286412		0,0029741		0,00177282	
0,45	120	17	0,00373496		2255	0,00145445		0,00145445		0,0015103		0,00098383	
0,51	125	4	0,00339521		136	0,00084888		0,00084888		0,00088147		0,00095038	
0,57	130	101	0,00342154		83	0,00063417		0,00216419		0,0022473		0,00136564	
0,63	135	0			329	0,00063022		0,00063022		0,00065442		0,00220286	
0,69	140	41	0,00410852		831	0,00076937		0,00092637		0,00096194		0,00349328	