NOTAS DE CLASE
MATEMÁTICA APLICADA I
OPTIMIZACIÓN ESTÁTICA

MARÍA JOSÉ BIANCO

.UBA ECONÓMICAS

CMA IADCOM - UBA
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN METODOS CUANTITATIVOS APLICADOS A LA ECONOMÍA Y LA GESTIÓN

Bianco, Maria jose
Notas de clase matemática aplicada I: optimización estática / Maria Jose Bianco. - 1ºa ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas, 2025.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-950-29-2063-4

1. Educación Universitaria. 2. Matemática Aplicada. I. Título.
CDD 510.711

ISBN 978-950-29-2063-4
9 789502 920634

AUTORIDADES

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

RECTOR: DR. RICARDO JORGE GELPI

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

DECANO: PROF. EMÉRITO DR. RICARDO PAHLEN ACUÑA

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN ADMINISTRACIÓN, CONTABILIDAD Y MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA GESTIÓN (IADCOM)

DIRECTORA: PROF. EMÉRITA DRA. MARÍA TERESA CASPARRI

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MÉTODOS CUANTITATIVAS APLICADOS A LA ECONOMÍA Y LA GESTIÓN (CMA)

DIRECTORA: PROF. EMÉRITA DRA. MARÍA TERESA CASPARRI

ÍNDICE

PRÓLOGO

Las presentes "Notas de Clase de Matemática Aplicada I", elaboradas por la Dra. María José Bianco, son una contribución esencial para la formación académica de los futuros profesionales en Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires. Estas notas, gestadas dentro del Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión (IADCOM), ofrecen una introducción a la optimización estática, una disciplina matemática de vital importancia en el ámbito de la Facultad de Ciencias Económicas.

La estructura de estas notas se ha diseñado en dos secciones principales. La primera, titulada "Conceptos Previos", sienta las bases matemáticas para abordar los problemas de optimización. Aquí, se les presenta a los y las estudiantes temas fundamentales como los autovalores y autovectores, la diagonalización de matrices, y las formas cuadráticas. Se hace un énfasis particular en la determinación del signo de estas formas cuadráticas, ya que estos conceptos preliminares son cruciales para comprender la concavidad y convexidad de funciones, propiedades matemáticas que desempeñan un papel central en la teoría de la optimización. La segunda parte del documento está dedicada a la "Optimización Estática", abordando, de forma sistemática, los problemas de optimización sin restricciones, con restricciones de igualdad y con restricciones de desigualdad.

Estas notas de clase van más allá de la mera resolución de problemas, también profundizan en el análisis de sensibilidad, ofreciendo una comprensión de cómo los cambios en los parámetros de un problema afectan el valor óptimo de la función objetivo. Otro aspecto destacado es la interpretación económica de los multiplicadores de Lagrange, una herramienta fundamental para entender las implicaciones de las restricciones en los modelos económicos. Un tema transversal y de gran relevancia que se explora detalladamente es la convexidad de funciones y su aplicación directa en la optimización, lo que capacita a los y las estudiantes para identificar y caracterizar de manera robusta los óptimos en diversos escenarios económicos.

En síntesis, estas "Notas de Clase de Matemática Aplicada I" proporcionan las herramientas analíticas y conceptuales necesarias para abordar con éxito los problemas de optimización en el ámbito de la economía y la gestión.

Javier I. García Fronti

PRIMERA PARTE: CONCEPTOS PREVIOS

En esta primera parte del libro se presentan los conceptos necesarios para analizar la concavidad y convexidad de funciones. Los temas abordados son autovalores y autovectores, formas cuadráticas y el signo de estas formas cuadráticas.

1.1. AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Definición 1:

Sea A una matriz $n \times n$. Un vector $v \neq 0$ se dice ***autovector*** (o ***vector propio*** o ***eigenvector***) de la matriz A asociado al ***autovalor*** λ (o ***valor propio*** o ***eigenvalor***) (real o complejo) si:

$$Av = \lambda v$$

Observación:

$$Av = \lambda v \quad \Leftrightarrow \quad Av - \lambda v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I)v = 0$$

Al ser un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, sólo puede ser compatible determinado o compatible indeterminado. Como por definición el autovector no puede ser nulo, el sistema sólo podría ser compatible indeterminado y, por lo tanto, presentar infinitas soluciones (una de las cuales es la trivial). En ese caso (al ser un sistema de ecuaciones lineales cuadrado) el determinante de la matriz asociada debe ser igual a cero.

El polinomio $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ se denomina ***polinomio característico*** de la matriz A y es de grado n.

Ejemplo 1

Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar los autovalores y autovectores de la matriz A.

Resolución

1) Se halla el polinomio característico de la matriz A, es decir:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$P(\lambda) = \lambda[-\lambda^2 + 3\lambda + 4]$$

2) Se buscan las raíces de la ecuación $\lambda[-\lambda^2 + 3\lambda + 4] = 0$.

   Los autovalores de la matriz A son $\lambda = 0 \quad \lambda = -1 \quad \lambda = 4$

3) Se buscan los autovectores correspondientes a cada autovalor resolviendo el sistema homogéneo.

$\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v_1 = v_3 = 0$$

Autovector asociado a $\lambda = 0$ $\boxed{w_1 = (0;1;0)}$

$\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v_1 = -2v_3 \qquad v_2 = -v_3$$

Autovector asociado a $\lambda = -1$ $\boxed{w_2 = (-2;-1;1)}$

$\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 0 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v_1 = 3v_3 \qquad v_2 = \frac{1}{4}v_3$$

Autovector asociado a $\lambda = 4$ $\boxed{w_3 = \left(3;\frac{1}{4};1\right)}$

Ejemplo 2

Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar los autovalores y autovectores de la matriz A.

Resolución

1) Se halla el polinomio característico de la matriz A, es decir:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$P(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

2) Se buscan las raíces de la ecuación: $(1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0$

Los autovalores de la matriz A son: $\lambda = 1\ \ doble \qquad \lambda = 2$

3) Se buscan los autovectores correspondientes a cada autovalor resolviendo el sistema homogéneo.

$\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v_3 = 0$$

$$\boxed{w_1 = (1;0;0) \quad w_2 = (0;1;0)}$$

$\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v_1 = v_3 \qquad v_2 = 3v_3$$

$$\boxed{w_3 = (1;3;1)}$$

Teorema 1:
Los autovectores correspondientes a autovalores distintos son linealmente independientes

Propiedades de autovalores y autovectores

1) Los autovalores de una matriz triangular son los elementos de la diagonal.

2) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
   - A y A^t tienen el mismo polinomio característico (y por lo tanto, los mismos autovalores)
   - A es invertible sí y sólo sí $\lambda = 0$ no es autovalor de A.
   - Si λ es autovalor de A y A es invertible entonces $1/\lambda$ es autovalor de A^{-1}.
   - Si λ es autovalor de A entonces λ^n es autovalor de A^n.

3) Sea A una matriz $n \times n$ y sea $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
   i) El coeficiente de λ^n del polinomio característico es $(-1)^n$
   ii) El coeficiente de λ^{n-1} del polinomio característico es $(-1)^{n-1}$ por la traza de la matriz A
   iii) El término independiente del polinomio característico es el determinante de la matriz A

4) Sea A una matriz $n \times n$ y sea $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
   i) El coeficiente de λ^{n-1} del polinomio característico es $(-1)^{n-1}$ por la suma de los autovalores de la matriz A.
   ii) El término independiente del polinomio característico es el producto de los autovalores de la matriz A

Observación: De las propiedades anteriores se deduce que

$$\mathbf{tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad\qquad \mathbf{det}\,(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Autovalores y autovectores de matrices simétricas

Teorema 2:
Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica
   i) Los autovalores de A son reales
   ii) Los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales

Ejemplo 3

Hallar los autovalores y autovectores de la siguiente matriz simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Resolución

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 24\lambda^2 - 180\lambda + 432 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 6\ \ doble \quad \lambda = 12$$

- $\lambda = 6$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow v_1 = 2v_2 - v_3$$

$$\boxed{w_1 = (2; 1; 0) \quad w_2 = (-1; 0; 1)}$$

- $\lambda = 12$

$$\begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow v_2 = -2v_3 \qquad v_1 = v_3$$

$$\boxed{w_3 = (1; -2; 1)}$$

Observemos que

$$w_1 \cdot w_3 = (2; 1; 0) \cdot (1; -2; 1) = 0$$
$$w_2 \cdot w_3 = (-1; 0; 1) \cdot (1; -2; 1) = 0$$

1.2. DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

Definición 2: Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, Se dice que A y B son ***matrices semejantes*** sí y sólo si existe una matriz $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no singular tal que $B = P^{-1} A\, P$.

Teorema 3:

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son matrices semejantes entonces tienen el mismo polinomio característico (y por lo tanto los mismos autovalores)

Definición 3: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es ***diagonalizable*** sí y sólo si existe una matriz $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no singular tal que $D = P^{-1} A\, P$ donde $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz diagonal

Observación: Se deduce de la definición anterior que las matrices A y D son semejantes. Entonces tienen los mismos autovalores. Como los autovalores de una matriz diagonal son los elementos de la diagonal concluimos que la matriz diagonal D tiene en la diagonal los autovalores de la matriz A. La matriz P tiene como columnas los autovectores asociados.

Teorema 4:
$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalizable sí y sólo si tiene n autovectores linealmente independientes

Observación importante: Para que una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sea diagonalizable los autovectores deben formar una base del espacio $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 4

Dada la siguiente matriz indicar si es diagonalizable. En caso de que lo sea, calcular las matrices D y P que verifican: $D = P^{-1}A\,P$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolución

En el Ejemplo 2 se calcularon los autovalores y los autovectores de esta matriz. Como los autovectores forman una base de $\mathbb{R}^3$ se concluye que la matriz A es diagonalizable.
Luego:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 5

Dada la siguiente matriz indicar si es diagonalizable. En caso de que lo sea, calcular las matrices D y P que verifican: $D = P^{-1}A\,P$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 4 & -8 & -6 \\ -4 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

Resolución

Los autovalores de la matriz A son: $\lambda = -2 \;\; doble \quad \lambda = 3$.

Los autovectores asociados a ambos autovalores son:

- $\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 4 & -6 & -6 \\ -4 & 11 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow v_2 = -v_3 \qquad v_1 = 0$$

$$\boxed{w_1 = (0; -1; 1)}$$

- $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 4 & -11 & -6 \\ -4 & 11 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow v_1 = -\frac{5}{59} v_3 \qquad v_2 = -\frac{34}{59} v_3$$

$$\boxed{w_2 = (5; 34; -59)}$$

Por lo tanto, no es una matriz diagonalizable ya que los autovectores no forman una base de $\mathbb{R}^3$.

Diagonalización ortogonal

Definición 4: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica es ***diagonalizable ortogonalmente*** sí y sólo si existe una matriz $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal tal que $D = Q^t A\, Q$ donde $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz diagonal.

Observación: En la definición la matriz diagonal D tiene en la diagonal los autovalores de la matriz A y la matriz Q tiene como columnas una base ortonormal de autovectores de la matriz A

Ejemplo 6

Dada la siguiente matriz simétrica A:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Determinar la matriz diagonal (D) y la matriz ortogonal (Q) que verifican: $D = Q^t A\, Q$

Resolución

En el Ejemplo 3 se calcularon los autovalores y los autovectores de la matriz A

Los autovalores de la matriz A son: $\lambda = 6\ \ doble \quad \lambda = 12$

Por lo tanto, la matriz diagonal es:

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Los autovectores asociados al autovalor $\lambda = 6$ son: $w_1 = (2; 1; 0)$ $\ w_2 = (-1; 0; 1)$

El autovector asociado al autovalor $\lambda = 12$ es $w_3 = (1; -2; 1)$

Los autovectores de la matriz simétrica A correspondientes a autovalores distintos son ortogonales, pero se observa que w_1 y w_2 (asociados al mismo autovalor) no son ortogonales:

$$w_1 \cdot w_2 = (2; 1; 0) \cdot (-1; 0; 1) = -2 \neq 0$$

Con lo cual vamos a buscar autovectores correspondientes al autovalor doble que cumplan con la condición de ser ortogonales

Para ello fijo uno de los dos autovectores encontrados, por ejemplo, w_2.

Ahora debo buscar un autovector $v = (v_1;\ v_2;\ v_3)$ que cumpla las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} v_1 = 2v_2 - v_3 \\ w_2 \cdot v = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad v = (1;1;1)$$

El vector v cumple la condición de ser autovector del autovalor $\lambda = 6$ y además es ortogonal al autovector w_2.

Sólo falta para finalizar normalizar los vectores

$$w_2 = (-1;0;1) \;\Longrightarrow\; |w_2| = \sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{w_2}{|w_2|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}};\ 0;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$v = (1;1;1) \;\Longrightarrow\; |v| = \sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{v}{|v|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$w_3 = (1;-2;1) \;\Longrightarrow\; |w_3| = \sqrt{6} \quad \Longrightarrow \quad \frac{w_3}{|w_3|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{-2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Luego la matriz Q es

$$Q = \begin{pmatrix} {}^{-1}\!/_{\sqrt{2}} & {}^{1}\!/_{\sqrt{3}} & {}^{1}\!/_{\sqrt{6}} \\ 0 & {}^{1}\!/_{\sqrt{3}} & {}^{-2}\!/_{\sqrt{6}} \\ {}^{1}\!/_{\sqrt{2}} & {}^{1}\!/_{\sqrt{3}} & {}^{1}\!/_{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

1.3. FORMAS CUADRÁTICAS

Conceptos introductorios

Definición 5: Sea A una matriz $n \times n$. Se denomina ***menor de orden k de la matriz A*** al determinante que se obtiene de eliminar $(n-k)$ filas y las mismas $(n-k)$ columnas

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matriz 2×2

a) Menores de orden 1
- Eliminando la primera fila y la primera columna se obtiene a_{22}
- Eliminando la segunda fila y la segunda columna se obtiene a_{11}

b) **Menor de orden 2**: $\det(A)$

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ una matriz 3×3

a) **Menores de orden 1**
- Eliminando la segunda y la tercera fila y las mismas columnas se obtiene a_{11}
- Eliminando la primera y la tercera fila y las mismas columnas se obtiene a_{22}
- Eliminando la primera y la segunda fila y las mismas columnas se obtiene a_{33}

b) **Menores de orden 2**
- Eliminando la primera fila y la primera columna se obtiene $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

- Eliminando la segunda fila y la segunda columna se obtiene $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$
- Eliminando la tercera fila y la tercera columna se obtiene $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

c) **Menor de orden 3**: $\det(A)$

Observación: Toda matriz A $n \times n$ tiene $2^n - 1$ menores de orden k. Además, los menores de orden 1 son siempre los elementos de la diagonal y el menor de orden n es el determinante de la matriz A.

Sea A una matriz $n \times n$ llamaremos ***menor principal de orden k de la matriz A*** al determinante que se obtiene de eliminar las últimas $(n-k)$ filas y las mismas $(n-k)$ columnas. Es decir:

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

Formas cuadráticas

Definición 6: Una ***forma cuadrática*** es una aplicación $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_i a_{ii}\, x_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij}\, x_i\, x_j$$

La matriz A asociada a la forma cuadrática $\varphi(x)$ es una matriz $n \times n$ y **simétrica:**

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \ldots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x^t A\, x$$

Ejemplo 7

a) Buscar la expresión polinómica de la forma cuadrática asociada a la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3/2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3/2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \;\; x_2 \;\; x_3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3/2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3/2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_1x_3 - 4x_2x_3 - x_3^2$$

b) Buscar la matriz asociada a la siguiente forma cuadrática

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 + 5x_1x_2 - 6x_1x_3 - x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5/2 & -6/2 \\ 5/2 & -1 & -1/2 \\ -6/2 & -1/2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5/2 & -3 \\ 5/2 & -1 & -1/2 \\ -3 & -1/2 & 4 \end{pmatrix}$$

Observación: La matriz A asociada a una forma cuadrática es $n \times n$ y simétrica, por lo tanto, es diagonalizable ortogonalmente. Es decir, existe una matriz $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal tal que $D = Q^t A\, Q$ donde

$D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz diagonal (los elementos de la diagonal son los autovalores λ_i de la matriz A) y la matriz Q tiene como columnas una base ortonormal de autovectores de la matriz A.

Luego,

$$D = Q^t A\, Q \implies A = Q\, D\, Q^t$$

Reemplazando en la expresión matricial de la forma cuadrática

$$\varphi(x) = x^t A\, x = x^t (Q\, D\, Q^t) x = (x^t Q) D\, (Q^t x) = (Q^t x)^t D\, (Q^t x)$$

Si se emplea el cambio de variables

$$\tilde{x} = Q^t x$$

Obtenemos

$$\varphi(x) = \tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \tilde{x}^t D\, \tilde{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \tilde{x}_i^2$$

Se dice que $\tilde{\varphi}(\tilde{x})$ es la ***forma canónica*** o ***forma diagonal*** de la forma cuadrática $\varphi(x)$

Signo de una forma cuadrática

Definición 7: Sea $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática

a) φ es ***definida positiva*** $\Leftrightarrow \quad \varphi(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0$

b) φ es ***semidefinida positiva*** $\Leftrightarrow \quad \varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

c) φ es ***definida negativa*** $\Leftrightarrow \quad \varphi(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0$

d) φ es ***semidefinida negativa*** $\Leftrightarrow \quad \varphi(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

e) En cualquier otro caso φ es ***indefinida***

Teorema 5

Sea la forma cuadrática $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y A la matriz simétrica asociada a la forma cuadrática φ. Donde λ_i son los autovalores de la matriz A.

a) φ es definida positiva sí y sólo si todos los autovalores de la matriz A son positivos ($\lambda_i > 0\ \ \forall i$)

b) φ es semidefinida positiva sí y sólo si todos los autovalores de A son mayores o iguales a cero ($\lambda_i \geq 0\ \ \forall i$)

c) φ es definida negativa sí y sólo si todos los autovalores de A son negativos ($\lambda_i < 0\ \ \forall i$)

d) φ es semidefinida negativa sí y sólo si todos los autovalores de A son menores o iguales a cero ($\lambda_i \leq 0\ \ \forall i$)

e) En cualquier otro caso φ es indefinida

Ejemplo 8

Determinar el signo de las siguientes formas cuadráticas a partir del signo de sus autovalores

a) $\varphi(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2$ es definida positiva

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Autovalores} \quad \begin{cases} \lambda = 3 > 0 \\ \lambda = 1 > 0 \end{cases}$$

b) $\varphi(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2\,x_1 x_2 + x_2^2$ es semidefinida positiva

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Autovalores} \quad \begin{cases} \lambda = 2 > 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

c) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = -7x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_3^2$ es definida negativa

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{Autovalores} \quad \begin{cases} \lambda = -7 < 0 \\ \lambda = -2 < 0 \\ \lambda = -4 < 0 \end{cases}$$

d) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^2 - (x_2 - 2x_3)^2 = -3x_1^2 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2$ es semidefinida negativa

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{Autovalores} \quad \begin{cases} \lambda = -3 < 0 \\ \lambda = -5 < 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

e) $\varphi(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 7x_2^2$ es indefinida

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{Autovalores} \quad \begin{cases} \lambda = 5 > 0 \\ \lambda = -7 < 0 \end{cases}$$

Teorema 6:

Sea A una matriz $n \times n$ simétrica real y sean A_i $(1 \leq i \leq n)$ los menores principales de orden i de la matriz A

a) A es definida positiva sí y sólo sí todos los menores principales son positivos, es decir, si $A_1 > 0, A_2 > 0, \dots, A_n > 0$,
b) A es definida negativa sí y sólo si los menores principales de orden impar son negativos y los de orden par son positivos, es decir, si $A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, \dots$
c) Si A es semidefinida positiva o negativa entonces $\det A = 0$
d) Si $A_1 > 0, A_2 > 0, \dots, A_{n-1} > 0$ y $\det A = 0$ entonces A es semidefinida positiva
e) Si $A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, \dots$ y $\det A = 0$ entonces A es semidefinida negativa
f) A es semidefinida positiva sí y sólo sí todos los menores de la matriz A son mayores o iguales a cero.
g) A es semidefinida negativa sí y sólo sí los menores de la matriz A de orden impar son menores o iguales a cero y los de orden par son mayores o iguales a cero.
h) Si no se cumplen estas condiciones, la matriz A es indefinida

Ejemplo 9

Determinar el signo de las siguientes formas cuadráticas a partir del signo de sus menores principales

a) $\varphi(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2$ es definida positiva

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Los menores principales son} \quad \begin{cases} A_1 = 3 > 0 \\ A_2 = \det A = 3 > 0 \end{cases}$$

b) $\varphi(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2\,x_1 x_2 + x_2^2$ es semidefinida positiva

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Los menores principales son} \quad \begin{cases} A_1 = 1 > 0 \\ A_2 = \det A = 0 \end{cases}$$

c) $\varphi(x_1, x_2, x_3\,) = -7x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_3^2$ es definida negativa

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{Los menores principales son} \quad \begin{cases} A_1 = -7 < 0 \\ A_2 = 14 > 0 \\ A_3 = \det A = -56 < 0 \end{cases}$$

d) $\varphi(x_1, x_2, x_3\,) = -3x_1^2 - (x_2 - 2x_3)^2 = -3x_1^2 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2$ es semidefinida negativa

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{Los menores principales son} \quad \begin{cases} A_1 = -3 < 0 \\ A_2 = 3 > 0 \\ A_3 = \det A = 0 \end{cases}$$

e) $\varphi(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 7x_2^2$ es indefinida

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{Los menores principales son} \quad \begin{cases} A_1 = 5 > 0 \\ A_2 = \det A = -35 < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 10

Analizar el signo de la siguiente forma cuadrática

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 6x_1x_2 - 9x_2^2 - 2x_3^2$$

La matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) *Resolución por menores*

$$\text{Los menores principales son} \quad \begin{cases} A_1 = -1 < 0 \\ A_2 = 0 \\ A_3 = \det A = 0 \end{cases}$$

Este es un ejemplo donde hay que calcular todos los menores de la matriz

- Menores de orden 1 (elementos de la diagonal)

$$a_{11} = -1 < 0 \qquad a_{22} = -9 < 0 \qquad a_{33} = -2 < 0$$

- Menores de orden 2

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 > 0 \qquad \begin{vmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 18 > 0$$

- Menores de orden 3

$$\det A = 0$$

Luego, como los menores de orden impar son negativos o cero y los menores de orden para son positivos o cero concluimos (por Teorema 6 g) que la forma cuadrática es semidefinida negativa

b) *Resolución por autovalores*

Los autovalores son $\begin{cases} \lambda = -2 < 0 \\ \lambda = -10 < 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$

Por lo tanto, por Teorema 5 d) concluimos que la forma cuadrática es semidefinida negativa

Observación importante

Considere las siguientes matrices asociadas a dos formas cuadráticas

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

En las dos matrices el primer menor principal es positivo y los dos siguientes son cero.
Esto no define el signo de la forma cuadrática.
Luego si calculamos los autovalores concluimos que en la matriz A son 3, 0 y 4 y por lo tanto la forma cuadrática será semidefinida positiva mientras que en la matriz B son 3, 0 y -4 con lo cual la forma cuadrática es indefinida

---

Formas cuadráticas restringidas

Sea la forma cuadrática $\varphi(x) = x^t A\, x$ ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica) restringida al subespacio $Bx = 0$ ($B \in \mathbb{R}^{m\times n}$) donde $m < n$.

n = número de variables

m = número de ecuaciones

Se considera la matriz orlada

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & B \\ B^t & A \end{pmatrix} \qquad \bar{A} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)} \qquad \mathbb{O} \text{ matriz nula de orden } m \times m$$

Un criterio para determinar el signo de si $\varphi(x) = x^t A\, x$ restringida al subespacio $Bx = 0$ lo da el siguiente teorema.

Teorema 7:

a) La forma cuadrática $\varphi(x) = x^t A\, x$ restringida al subespacio $Bx = 0$ es definida positiva sí y sólo sí los $n - m$ últimos menores principales de la matriz orlada $\bar{A}$ tienen el mismo signo que $(-1)^m$

b) La forma cuadrática $\varphi(x) = x^t A\, x$ restringida al subespacio $Bx = 0$ es definida negativa sí y sólo sí los $n - m$ últimos menores principales de la matriz orlada $\bar{A}$ alternan signo comenzando por el signo que $(-1)^{m+1}$

c) Si las condiciones a) y b) no se cumplen (y son distintas de cero) entonces la forma cuadrática $\varphi(x) = x^t A\, x$ restringida al subespacio $Bx = 0$ es indefinida

---

Ejemplo 11

$$\begin{cases} \varphi(x_1, x_2, x_3) = -11x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1x_3 + 4x_3^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} n = 3 \\ m = 2 \end{matrix}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -11 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Como: $\left.\begin{matrix} n = 3 \\ m = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad n - m = 1$

Sólo hay que calcular un determinante que se corresponde con el determinante de la matriz $\bar{A}$

¿Cuáles serían las condiciones?

Para que la forma cuadrática restringida sea definida positiva el signo del determinante de la matriz $\bar{A}$ debería tener el mismo signo que $(-1)^2 = 1$. Es decir

$$|\bar{A}| > 0$$

Para que la forma cuadrática restringida sea definida negativa el signo del determinante de la matriz $\bar{A}$ debería tener el mismo signo que $(-1)^{2+1} = -1$. Es decir

$$|\bar{A}| < 0$$

Como $\det \bar{A} = 7 > 0$ concluimos que la forma cuadrática restringida es **definida positiva**

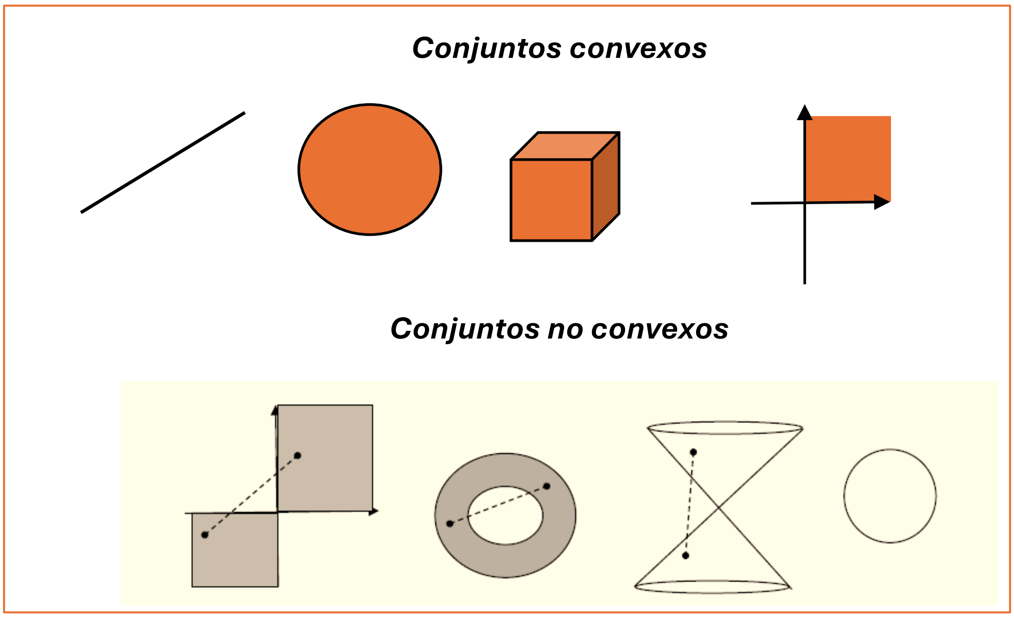
1.4. CONVEXIDAD DE FUNCIONES

Conceptos introductorios

Definición 8: Sean x e y dos puntos de $\mathbb{R}^n$. Se llama ***segmento*** de extremos x e y al conjunto de puntos $z \in \mathbb{R}^n$ tales que $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ con $0 \leq \alpha \leq 1$

Definición 9: Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es ***convexo*** si $\forall x, y \in S$ y $\forall \alpha \in [0,1]$ se verifica que $\alpha x + (1 - \alpha)y \in S$

Por lo tanto, un conjunto es convexo cuando el segmento que une cualquier par de puntos del conjunto está completamente contenido en el conjunto.



Funciones cóncavas y convexas

Definición 10: Sea $f: D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo no vacío.

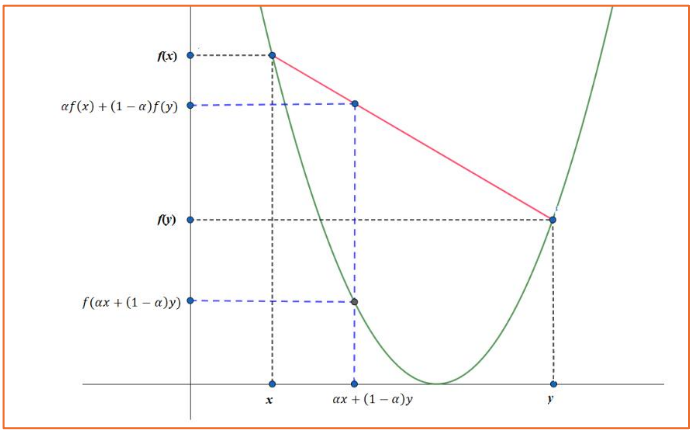
a) f es ***convexa*** en D sí y sólo sí $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ $\forall x, y \in D$, $\forall \alpha \in [0; 1]$
b) f es ***estrictamente convexa*** en D sí y sólo sí $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ $\forall x, y \in D$, $\forall \alpha \in (0; 1)$
c) f es ***cóncava*** en D sí y sólo sí $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ $\forall x, y \in D$, $\forall \alpha \in$

[0; 1]

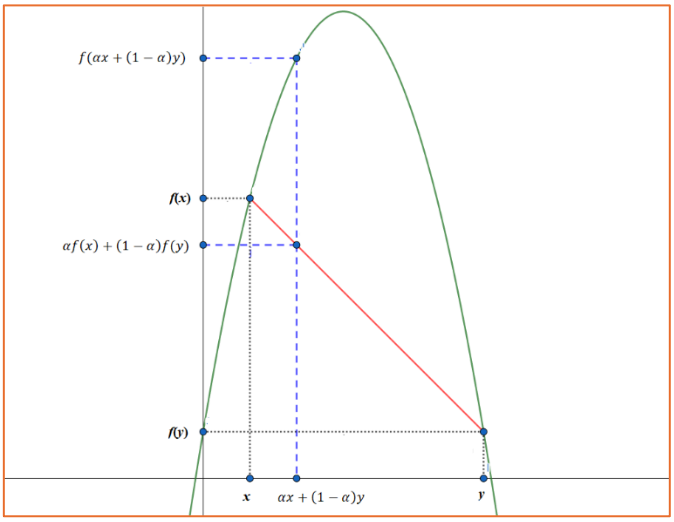
d) f es ***estrictamente cóncava*** en D sí y sólo sí $f(\alpha x + (1-\alpha)y) > \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$ $\forall x, y \in D$, $\forall \alpha \in (0;1)$

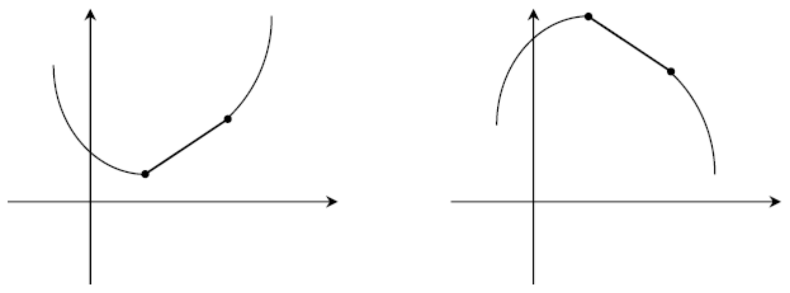
Gráficamente las funciones convexas son aquellas en las cuales los segmentos que unen cualquier par de puntos de su gráfica quedan siempre por encima de la gráfica (en el caso de cóncava los segmentos quedan por debajo). Si la función es estrictamente convexa los segmentos no pueden tocar a la gráfica salvo en los extremos.

Función estrictamente convexa



Función estrictamente cóncava





Teorema 8: Sea $f: D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^n$ conjunto abierto convexo no vacío, $f \in C^2(D)$

i) f es convexa en D sí y sólo sí la matriz $Hf(x)$ es semidefinida o definida positiva $\forall x \in D$

ii) f es cóncava en D sí y sólo sí la matriz $Hf(x)$ es semidefinida o definida negativa $\forall x \in D$

iii) Si la matriz $Hf(x)$ es definida positiva $\forall x \in D$, entonces f es estrictamente convexa en D

iv) Si la matriz $Hf(x)$ es definida negativa $\forall x \in D$, entonces f es estrictamente cóncava en D

Observación: La matriz $Hf(x)$ se denomina ***matriz Hessiana*** de la función f

$$Hf(x) = Hf(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1} & \cdots & f''_{x_1x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_1x_n} & \cdots & f''_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 12

$$f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad (x > 0 \ \wedge \ y > 0)$$

Calculamos las derivadas parciales

$$\begin{cases} f'_x = -\dfrac{1}{x^2} \\ f'_y = -\dfrac{1}{y^2} \end{cases}$$

La matriz Hessiana es:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{x^3} & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{y^3} \end{pmatrix}$$

¿Cómo se determina el signo de la matriz Hessiana?

- Por menores principales

$$\begin{cases} |H_1| = \dfrac{2}{x^3} > 0 \\ |H_2| = \det Hf(x,y) = \dfrac{4}{x^3y^3} > 0 \end{cases}$$

La matriz Hessiana es definida positiva.

- Por autovalores
  Observemos que la matriz Hessiana es una matriz diagonal por lo tanto los elementos de la diagonal son los autovalores. Como ambos autovalores son positivos, la matriz Hessiana es definida positiva

En cualquiera de los dos casos concluimos que la función es estrictamente convexa

---

Ejemplo 13

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1-1)^2 + 2x_2^3 + 5x_3^2$$

Calculamos las derivadas parciales

$$\begin{cases} f'_{x_1} = 2(x_1-1) \\ f'_{x_2} = 6x_2^2 \\ f'_{x_3} = 10x_3 \end{cases}$$

La matriz Hessiana es:

$$Hf(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Observemos que si se considera $D = \mathbb{R}^3$ la función no es cóncava ni convexa, pero si consideramos como dominio $D = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \ | \ x_2 > 0\}$ (conjunto abierto y convexo) entonces f es estrictamente convexa en D.

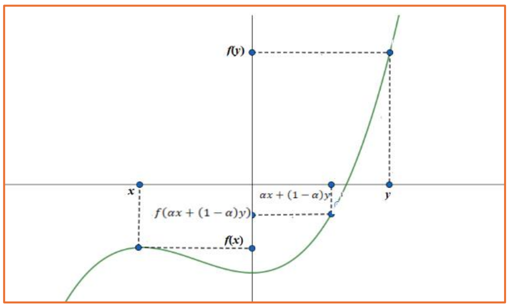
Funciones cuasicóncavas y cuasiconvexas

Definición 11: Sea $f: D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo no vacío

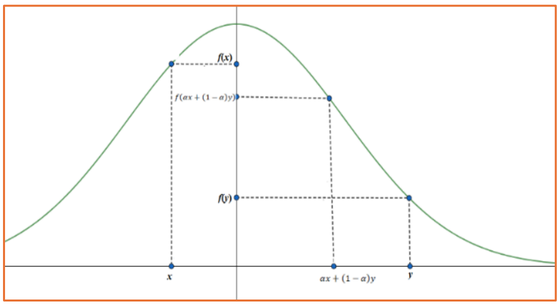
a) f es ***cuasiconvexa*** en D sí y sólo sí $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \max\{f(x); f(y)\} \quad \forall x, y \in D, \ \forall \alpha \in [0;1]$

b) f es ***cuasicóncava*** en D sí y sólo sí $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \min\{f(x); f(y)\} \quad \forall x, y \in D, \ \forall \alpha \in [0;1]$

Función cuasiconvexa



Función cuasicóncava



Importante:
Toda función monótona en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ es siempre cuasicóncava y cuasiconvexa.

Observación: Para la proposición que se enuncia a continuación definimos la siguiente matriz de $(n+1) \times (n+1)$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Además, consideramos los siguientes menores principales de la matriz B

$$|B_k| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_k} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \end{vmatrix} \qquad k = 1, \ldots, n$$

Teorema 9: Sea $f: D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^n$ conjunto abierto convexo no vacío, $f \in C^2(D)$

i) Si $|B_1| < 0, |B_2| < 0, \ldots, |B_n| < 0 \quad \forall x \in D$ entonces f es cuasiconvexa en D

ii) Si $|B_1| < 0, |B_2| > 0, |B_3| < 0, \ldots. \quad \forall x \in D$ entonces f es cuasicóncava en D

Ejemplo 14

Función de Cobb-Douglas

Consideremos la función $f(x,y)=x^a y^b$ con $a>0$ y $b>0$ en $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\ x>0 \wedge y>0\}$

a) Veamos para qué valores de los parámetros a y b la función es cóncava, convexa, estrictamente cóncava, estrictamente convexa o nada

Calculemos las derivadas parciales

$$\begin{cases} f'_x = a x^{a-1} y^b \\ f'_y = b x^a y^{b-1} \end{cases}$$

La matriz Hessiana

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} a\,(a-1)x^{a-2}y^b & abx^{a-1}y^{b-1} \\ abx^{a-1}y^{b-1} & b(b-1)x^a y^{b-2} \end{pmatrix}$$

Para estudiar el signo de la forma cuadrática a través de los menores principales, debemos tener en cuenta:

$$\begin{cases} |H_1| = \underbrace{a}_{>0}\ (a-1)\ \underbrace{x^{a-2}}_{>0}\ \underbrace{y^b}_{>0} \\ |H_2| = \det Hf(x,y) = \underbrace{a}_{>0}\ \underbrace{b}_{>0}\ \underbrace{x^{2a-2}}_{>0}\ \underbrace{y^{2b-2}}_{>0}\ [-a-b+1] \end{cases}$$

Observemos que el signo del determinante de la matriz Hessiana depende del signo del término

$-a-b+1$. Por lo tanto

- $-a-b+1>0 \Leftrightarrow a+b<1 \quad \Rightarrow \quad 0<a<1$
  $\left.\begin{matrix} |H_1|<0 \\ |H_2|>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ la matriz Hessiana es definida negativa
  Concluimos que **la función es estrictamente cóncava**

- $-a-b+1=0 \Leftrightarrow a+b=1 \quad \Rightarrow \quad 0<a<1$
  $\left.\begin{matrix} |H_1|<0 \\ |H_2|=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ la matriz Hessiana es semidefinida negativa
  Concluimos que **la función es cóncava**

- $-a-b+1<0 \Leftrightarrow a+b>1$
  La matriz Hessiana es indefinida y por lo tanto la **función no es cóncava ni convexa**

b) Veamos para qué valores de los parámetros a y b la función es cuasicóncava o cuasiconvexa

La matriz B está dada por:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & ax^{a-1}y^b & bx^a y^{b-1} \\ ax^{a-1}y^b & a\,(a-1)x^{a-2}y^b & abx^{a-1}y^{b-1} \\ bx^a y^{b-1} & abx^{a-1}y^{b-1} & b(b-1)x^a y^{b-2} \end{pmatrix}$$

Debemos tener en cuenta el signo de los siguientes menores de la matriz

$$|B_1| = -\left(ax^{a-1}y^b\right)^2 = -a^2x^{2a-2}\,y^{2b} < 0$$

$$|B_2| = \det B = abx^{3a-2}y^{3b-2}(a+b) > 0$$

Por lo tanto, *f es* cuasicóncava en *D*

Conclusión

La función $f(x,y) = x^a y^b$ con $a > 0$ y $b > 0$ en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x > 0 \ \wedge \ y > 0\}$

Es **estrictamente cóncava** cuando $\boldsymbol{a + b < 1}$

Es **cóncava** cuando $\boldsymbol{a + b = 1}$

No es cóncava ni convexa cuando $a + b > 1$

Para cualquier valor $a > 0$ y $b > 0$ la función es **cuasicóncava**

Propiedades de las funciones cóncavas y convexas

1) Sea $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Si *f* es cóncava (convexa) en *D* entonces es continua en el interior de *D*
2) Sea $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo no vacío
   a) Si *f* es estrictamente convexa (estrictamente cóncava) en *D*, entonces *f* es convexa (cóncava) en *D*.
   b) *f* es convexa (estrictamente convexa) en *D* sí y sólo sí $-f$ es cóncava (estrictamente cóncava) en *D*.
   c) Si *f* es convexa (cóncava) en *D* y $\alpha \geq 0$, entonces αf es convexa (cóncava) en *D*.
   d) Si $f(x) > 0$ y cóncava en *D*, entonces $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ es convexa en *D*
3) Sean $f_i: D \to \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq k)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo no vacío funciones convexas (cóncavas) en *D*.
   a) La suma de dichas funciones es una función convexa (cóncava) en *D*.
   b) Si $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ son escalares no negativos, entonces $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, f_i$ es una función convexa (cóncava) en *D*.
4) Sea $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo no vacío
   a) Si *f* es convexa en *D*, entonces $S_\alpha = \{x \in D \ / \ f(x) \leq \alpha\}$ es un conjunto convexo $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
   b) Si *f* es cóncava en *D*, entonces $T_\alpha = \{x \in D \ / \ f(x) \geq \alpha\}$ es un conjunto convexo $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
5) Sea $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo no vacío y sea $g: E \to \mathbb{R}$, tal que $\operatorname{Im} f \subset E \subset \mathbb{R}$
   a) Si *f* es convexa y *g* es creciente y convexa, entonces $g \circ f$ es convexa en *D*.
   b) Si *f* es convexa y *g* es decreciente y cóncava, entonces $g \circ f$ es cóncava en *D*.
   c) Si *f* es cóncava y *g* es decreciente y convexa, entonces $g \circ f$ es convexa en *D*.
   d) Si *f* es cóncava y *g* es creciente y cóncava, entonces $g \circ f$ es cóncava en *D*.

Observación: La propiedad 4 se puede interpretar de la siguiente forma: El conjunto por encima (debajo) de cualquier curva de nivel de una función cóncava (convexa) es convexo. Esto es de gran utilidad en funciones económicas.

Importante: Toda función lineal $f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b$ es cóncava y convexa

Propiedades de las funciones cuasicóncavas y cuasiconvexas

1) Sea $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo no vacío
   a) Si *f* es cuasiconvexa en *D* sí y sólo sí $S_\alpha = \{x \in D \ / \ f(x) \leq \alpha\}$ es un conjunto convexo $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
   b) Si *f* es cuasicóncava en *D* sí y sólo sí $T_\alpha = \{x \in D \ / \ f(x) \geq \alpha\}$ es un conjunto convexo $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
2) Sea $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo no vacío
   a) *f* es convexa (cóncava) en *D* entonces *f* es cuasiconvexa (cuasicóncava) en *D*.
   b) *f* es estrictamente convexa (estrictamente cóncava) en *D* entonces *f* es estrictamente cuasiconvexa (estrictamente cuasicóncava) en *D*.
   c) *f* es cuasiconvexa (cuasicóncava) en *D* sí y sólo sí $-f$ es cuasicóncava (cuasiconvexa) en *D*.
   d) Si *f* es cuasiconvexa (cuasicóncava) en *D* y $\alpha \geq 0$, entonces αf es cuasiconvexa (cuasicóncava) en *D*.
3) Sea $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo no vacío y sea $g: E \to \mathbb{R}$, tal que $\operatorname{Im} f \subset E \subset \mathbb{R}$
   a) Si *f* es cuasiconvexa y *g* es monótona creciente, entonces $g \circ f$ es cuasiconvexa en *D*.
   b) Si *f* es cuasiconvexa y *g* es monótona decreciente, entonces $g \circ f$ es cuasicóncava en *D*.
   c) Si *f* es cuasicóncava y *g* es monótona creciente, entonces $g \circ f$ es cuasicóncava en *D*.
   d) Si *f* es cuasicóncava y *g* es monótona decreciente, entonces $g \circ f$ es cuasiconvexa en *D*.
4) Sea $f: D \to \mathbb{R}$, $D = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ x > 0\}$, $f \in C^1(D)$, *f* positiva y homogénea de grado *r*. Se verifica
   a) $r \geq 1$ o $r < 0$: La función *f* es convexa sí y sólo si es cuasiconvexa
   b) $0 < r \leq 1$: La función *f* es cóncava sí y sólo si es cuasicóncava

***Observación*:** Hay propiedades que tienen las funciones convexas (cóncavas) que no se verifican en las funciones cuasiconvexas (cuasicóncavas). Por ejemplo:

- No se puede afirmar que la suma de dos funciones cuasiconvexas (cuasicóncavas) sea cuasiconvexa (cuasicóncava).
- No se puede afirmar que una función cuasiconvexa (cuasicóncava) sea continua en un conjunto abierto.

Importante: De la propiedad 2) a) y la propiedad 3) se deduce que:

- Toda transformación monótona creciente de una función cóncava (convexa) es una función
- cuasicóncava (cuasiconvexa).
- Toda transformación monótona decreciente de una función cóncava (convexa) es una función cuasiconvexa (cuasicóncava)

SEGUNDA PARTE: OPTIMIZACIÓN ESTÁTICA

Autoras: María José Bianco y Verónica García Fronti

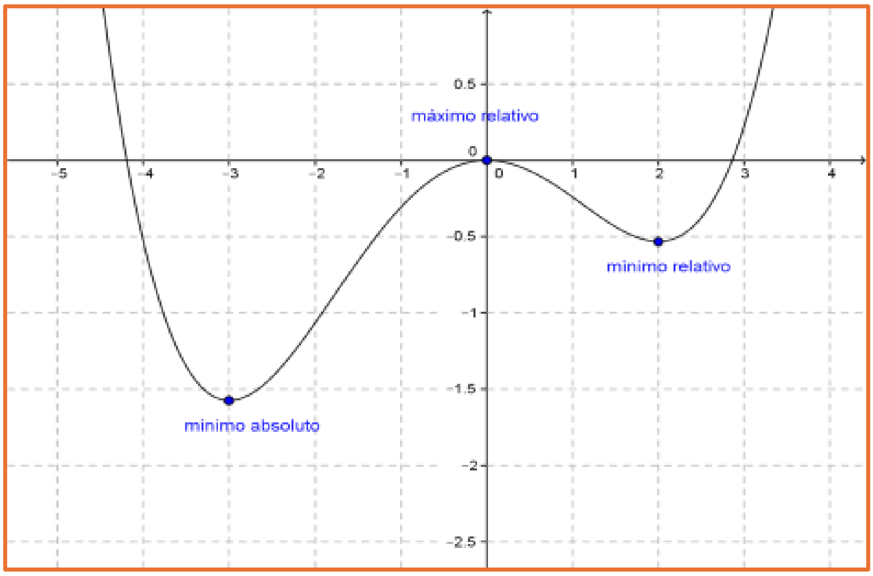
2.1. OPTIMIZACIÓN SIN RESTRICCIONES

Extremos locales y globales

Una función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n})$ alcanza un *máximo relativo* o *local* en un punto $\boldsymbol{x_0} = (\boldsymbol{x_1^0}, \dots, \boldsymbol{x_n^0})$ de su dominio si se verifica que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})$ para todo punto $\boldsymbol{x}$ perteneciente a un entorno de $\boldsymbol{x_0}$.

Una función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n})$ alcanza un *mínimo relativo* o *local* en un punto $\boldsymbol{x_0} = (\boldsymbol{x_1^0}, \dots, \boldsymbol{x_n^0})$ de su dominio si se verifica que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})$ para todo punto $\boldsymbol{x}$ perteneciente a un entorno de $\boldsymbol{x_0}$.

Observación: Si las desigualdades de las definiciones anteriores se cumplen para todos los puntos x pertenecientes al dominio de la función f, entonces f alcanza un ***máximo absoluto o global*** (o ***mínimo absoluto o global***) en el punto $\boldsymbol{x_0}$.



Un programa matemático sin restricciones se formula de la siguiente manera:

$$\text{Optimizar} \quad f(x) \quad \text{siendo} \quad f: D \to \mathbb{R} \ \text{ con } D \subseteq \mathbb{R}^n$$

En este tipo de programas, el conjunto de soluciones factibles coincide con el dominio D de la función objetivo.

2.1.1. Condición necesaria para la existencia de óptimos locales

Teorema 10: Sea $f: D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, $f \in C^1(D)$. Si en $\boldsymbol{x_0} \in D$ la función f presenta un óptimo local entonces $\nabla f(\boldsymbol{x_0}) = 0$ (es decir, $f'_{x_1}(\boldsymbol{x_0}) = 0, \ldots, f'_{x_n}(\boldsymbol{x_0}) = 0$).

Definición 12: Sea $f: D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, $f \in C^1(D)$ y sea $\boldsymbol{x_0} \in D$. Se dice que $\boldsymbol{x_0}$ es un ***punto crítico*** de f si $\nabla f(\boldsymbol{x_0}) = 0$.

2.1.2. Condición suficiente para la existencia de óptimos locales

Teorema 11: Sea $f: D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, $f \in C^2(D)$ y sea $\boldsymbol{x_0} \in D$ un punto crítico de f.
Se verifica:

i) Si la forma cuadrática dada por $Hf(\boldsymbol{x_0})$ es definida positiva, entonces f presenta en $\boldsymbol{x_0}$ un mínimo local.

ii) Si la forma cuadrática dada por $Hf(\boldsymbol{x_0})$ es definida negativa, entonces f presenta en $\boldsymbol{x_0}$ un máximo local.

iii) Si la forma cuadrática dada por $Hf(\boldsymbol{x_0})$ es indefinida, entonces f presenta en $\boldsymbol{x_0}$ un punto silla

Observación Si $\boldsymbol{x_0}$ es un punto crítico de $\boldsymbol{f}$ pero $\boldsymbol{f}$ no tiene un óptimo local en $\boldsymbol{x_0}$, se dice que $\boldsymbol{x_0}$ es un ***punto silla*** o ***punto de ensilladura*** de $\boldsymbol{f}$.

Es decir, $\boldsymbol{x_0}$ es un punto silla de $\boldsymbol{f}$ sí y sólo sí existen puntos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ en un entorno de $\boldsymbol{x_0}$ que verifican $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$

2..1.3. ¿Cuándo falla?

- *Matriz hessiana semidefinida en un punto crítico*. El Teorema 2.2 no da información sobre un punto donde la forma cuadrática sea semidefinida positiva o negativa. En esos casos habrá que hacer un estudio de la función en un entorno del punto

- *Función no derivable en un punto perteneciente al dominio de la función*. Un punto crítico es un candidato a óptimo local. Otros candidatos serían todos aquellos puntos que pertenecen al dominio de la función, pero en los cuales la función no es derivable

2.1.4. Paso a paso

1) Hallar el dominio de la función objetivo.
2) Calcular el gradiente de la función.
3) Buscar los puntos que anulan el gradiente (puntos críticos)
4) Fijarse si existen puntos pertenecientes al dominio de la función donde la función no es derivable. En caso afirmativo realizar un estudio local.
5) Hallar la matriz Hessiana.
6) Reemplazar cada uno de los puntos críticos en la matriz Hessiana y definir el carácter de cada uno de ellos.
7) Si en alguno de los puntos críticos la matriz Hessiana es semidefinida (positiva o negativa) realizar un estudio local.

Ejemplo 15

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 2x - 10y + 5$$

Hallamos las derivadas parciales primeras, las igualamos a cero y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} f'_x = 2x + y - 2 = 0 \\ f'_y = 2y + x - 10 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad (-2;6) \quad \text{es el punto crítico}$$

Ahora hallamos las derivadas parciales segundas y construimos matriz Hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Los menores principales son:

$$\begin{cases} |H_1| = 2 > 0 \\ |H_2| = \det Hf = 3 > 0 \end{cases}$$

Como la matriz Hessiana es definida positiva concluimos que la función presenta en $(-2;6)$ un mínimo relativo.

Observemos que otra forma de expresar la solución hubiese sido: en $\big(-2;6;f(-2,6)\big) = (-2;6;-23)$ hay un mínimo relativo.

Ejemplo 16

$$f(x,y) = 2 - 3x^2 + 3x^2y + y^3 - 3y^2$$

Hallamos las derivadas parciales primeras, las igualamos a cero y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} f'_x = -6x + 6xy = 6x\,(-1+y) = 0 \\ f'_y = 3x^2 + 3y^2 - 6y = 0 \end{cases}$$

Observemos que la primera ecuación se satisface para $x = 0$ e $y = 1$

- Al reemplazar $x = 0$ en la derivada respecto de y nos queda:

$$3y^2 - 6y = y\,(3y - 6) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0 \;\wedge\; y = 2$$

$$P_1 = (0;0) \qquad P_2 = (0;2)$$

- Al reemplazar $y = 1$ en la derivada respecto de y nos queda

$$3x^2 - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1 \;\wedge\; x = -1$$

$$P_3 = (1;1) \qquad P_4 = (-1;1)$$

La matriz Hessiana para esta función es:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -6+6y & 6x \\ 6x & 6y-6 \end{pmatrix}$$

Reemplazamos por los puntos críticos

- $Hf(0;0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

Los menores principales son:

$$\begin{cases} |H_1| = -6 < 0 \\ |H_2| = \det Hf = 36 > 0 \end{cases}$$

Como la matriz Hessiana es definida negativa concluimos que la función presenta en $P_1 = (0;0)$ un máximo relativo.

- $Hf(0;2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

Los menores principales son:

$$\begin{cases} |H_1| = 6 > 0 \\ |H_2| = \det Hf = 36 > 0 \end{cases}$$

Como la matriz Hessiana es definida positiva concluimos que la función presenta en $P_2 = (0;2)$ un mínimo relativo.

- $Hf(1;1) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

Como la matriz Hessiana es indefinida, concluimos que la función presenta en $P_3 = (1;1)$ es un punto silla

- $Hf(-1;1) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

Como la matriz Hessiana es indefinida concluimos que la función presenta en $P_4 = (-1; 1)$ un punto silla

Ejemplo 17

$$f(x, y) = e^{x^2+y^2}$$

Hallamos las derivadas parciales primeras, las igualamos a cero y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} f'_x = 2xe^{x^2+y^2} = 0 \\ f'_y = 2ye^{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad (0; 0) \text{ es el punto crítico}$$

Ahora hallamos las derivadas parciales segundas y construimos matriz Hessiana:

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} (4x^2 + 2)e^{x^2+y^2} & 4xye^{x^2+y^2} \\ 4xye^{x^2+y^2} & (4y^2 + 2)e^{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Reemplazamos por le punto crítico

$$Hf(0; 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Los menores principales son:

$$\begin{cases} |H_1| = 2 > 0 \\ |H_2| = \det Hf = 4 > 0 \end{cases}$$

Como la matriz Hessiana es definida positiva concluimos que la función presenta en $(0; 0)$ un mínimo relativo.

Ejemplo 18

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^3 + 3x_1x_3 + 2x_2 - x_2^2 - 3x_3^2$$

Hallamos las derivadas parciales primeras, las igualamos a cero y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} f'_{x_1} = -3x_1^2 + 3x_3 = 0 \\ f'_{x_2} = 2 - 2x_2 = 0 \\ f'_{x_3} = 3x_1 - 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Los puntos críticos son $P_1 = \left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{4}\right)$ y $P_2 = (0; 1; 0)$

La matriz Hessiana para este problema es:

$$Hf(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -6x_1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Reemplazamos por los puntos críticos

- $Hf\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

Como la matriz Hessiana es definida negativa concluimos que la función presenta en $P_1 = \left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{4}\right)$ un máximo relativo

- $Hf(0;1;0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

Como la matriz Hessiana es indefinida concluimos que la función presenta en $P_2 = (0;1;0)$ un punto silla

---

2.1.5. Condición suficiente de optimalidad global

Teorema 12: Sea $f: D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto y convexo, $f \in C^1(D)$ y sea $\boldsymbol{x_0} \in D$ un punto crítico de f . Se verifica:

i) Si f es convexa en D entonces f presenta en $\boldsymbol{x_0}$ un mínimo global.

ii) Si f es estrictamente convexa en D entonces f presenta en $\boldsymbol{x_0}$ un mínimo global único.

iii) Si f es cóncava en D entonces f presenta en $\boldsymbol{x_0}$ un máximo global.

iv) Si f es estrictamente cóncava en D entonces f presenta en $\boldsymbol{x_0}$ un máximo global único.

Observación: Si f es cóncava (convexa) en D, con D abierto y convexo y $f \in C^1(D)$ la condición $\nabla f(\boldsymbol{x_0}) = 0$ para $\boldsymbol{x_0} \in D$ es **necesaria y suficiente** para que la función f alcance en $\boldsymbol{x_0}$ un máximo (mínimo) global.

En el Ejemplo 15 se observa que la función es estrictamente convexa por lo que una vez que encontrado el punto crítico (-2,6) se puede concluir que la función alcanza en ese punto un mínimo global único.

2.1.6 Composición de funciones

Proposición 13: Sea $f: D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, y sea $g: A \to \mathbb{R}$ de manera que $\operatorname{Im} f \subset A \subset \mathbb{R}$. $f \in C^1(D)$ y sea $\boldsymbol{x_0} \in D$ un punto crítico de f . Se verifica:

i) Si g es creciente entonces los puntos donde f alcanza máximos (mínimos) en D coinciden con los puntos donde $g \circ f$ alcanza máximos (mínimos) en D.

ii) Si g es decreciente entonces los puntos donde f alcanza máximos (mínimos) en D coinciden con los puntos donde $g \circ f$ alcanza mínimos (máximos) en D.

Ejemplo 19

Consideremos la función $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$ y sea $g(x)=\ln x$ (función estrictamente creciente)

Busco los extremos de la función:

$$h(x,y)=g\circ f(x,y)=x^2+y^2$$

$$\begin{cases} h'_x=2x=0 \\ h'_y=2y=0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad (0;0) \text{ es el punto crítico}$$

La matriz Hessiana es:

$$Hh(x;y)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como la matriz Hessiana es definida positiva concluimos que la función h presenta en $(0;0)$ un mínimo relativo. Luego en ese punto la función f también alcanza un mínimo relativo

---

2.1.7. Análisis de sensibilidad

Consideremos el siguiente problema

$$\underset{x}{\operatorname{opt}} f(x,a) \qquad (P)$$

donde $f\in C^1(D)$ con $x\in\mathbb{R}^n$ (variables de decisión) y $a\in\mathbb{R}$ (parámetro).

Sea $A\subset\mathbb{R}$ un conjunto abierto y supongamos que para todo $a\in A$ existe $x^*(a)=(x_1^*(a),\dots,x_n^*(a))$ solución óptima del problema (P) con x^* una función C^1

Si definimos la *función objetivo indirecta* o *función valor* como $\varphi(a)=f(x^*(a),a)$ se verifica:

$$\frac{d\varphi(a)}{da}=\frac{\partial f(x^*(a),a)}{\partial a}$$

El resultado anterior se conoce como ***Teorema de la Envolvente***

Ejemplo 20

La función de beneficios de una empresa competitiva es $B(K,L)=p\,f(K,L)-rK-wL$

donde K y L son las respectivas cantidades a emplear de capital y trabajo ($K>0, L>0$ y $f(K,L)>0$) p es el precio unitario al que puede vender el output ($p>0$), r y w son los respectivos precios unitarios a los que paga los factores capital y trabajo ($r,w>0$). Además, consideramos que la función $f(K,L)$ es estrictamente cóncava.

a) Indicar si la función beneficio es cóncava, convexa, estrictamente cóncava o estrictamente convexa

b) Si la función presenta en $(K^*;L^*)$ un punto crítico, ¿qué puede concluir?

c) Obtener la función objetivo indirecta y calcular las derivadas parciales.

d) Demostrar que un aumento de p conlleva un aumento del beneficio óptimo y un aumento de r o w produce una disminución del beneficio óptimo.

e) ¿Cómo impacta en la variable capital óptima un aumento en r y en la variable trabajo óptima un aumento de w?

Resolución

a) Como la función $f(K,L)$ es estrictamente cóncava sabemos que:$Hf = \begin{pmatrix} f''_{KK} & f''_{KL} \\ f''_{KL} & f''_{LL} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{cases} |H_1| = f''_{KK} < 0 \\ |H_2| = |Hf| > 0 \end{cases}$$

Luego, la matriz Hessiana de la función beneficio está dada por

$$\begin{cases} B'_K = pf'_K - r \\ B'_L = pf'_L - w \end{cases} \Rightarrow \quad HB = \begin{pmatrix} pf''_{KK} & pf''_{KL} \\ pf''_{KL} & pf''_{LL} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |H_1| = pf''_{KK} < 0 \\ |H_2| = |HB| = p^2|Hf| > 0 \end{cases}$$

Concluimos que la función beneficio es estrictamente cóncava

b) Como la función beneficio es estrictamente cóncava el punto crítico es un máximo global único

c y d)

$$B_{max} = B(K^*; L^*) = p\,f(K^*; L^*) - rK^* - wL^*$$

$\frac{\partial B(K^*; L^*)}{\partial p} = f(K^*; L^*) > 0$ Ante un ligero aumento de p aumenta el beneficio óptimo.

$\frac{\partial B(K^*; L^*)}{\partial r} = -K^* < 0$ Ante un ligero aumento de r disminuye el beneficio óptimo

$\frac{\partial B(K^*; L^*)}{\partial w} = -L^* < 0$ Ante un ligero aumento de w disminuye el beneficio óptimo.

e) Para saber cómo impactan cambios en r o w sobre las variables óptimas lo que hay que aplicar es *estática comparativa.*

En efecto, para calcular los puntos críticos

$$\begin{cases} B'_K = pf'_K - r = 0 \\ B'_L = pf'_L - w = 0 \end{cases}$$

Es decir, nos queda un sistema de dos ecuaciones que definen en forma implícita a las variables K y L en función de p, w y r.

$$\begin{cases} pf''_{KK}dK + pf''_{KL}dL = dr \\ pf''_{LK}dK + pf''_{LL}dL = dw \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} pf''_{KK} & pf''_{KL} \\ pf''_{KL} & pf''_{LL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dK \\ dL \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ dw \end{pmatrix}$$

Claramente el Jacobiano es distinto de cero ya que $|J| = |HB| = p^2|Hf| > 0$

Luego

$$\frac{\partial K^*}{\partial r} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & pf''_{KL} \\ 0 & pf''_{LL} \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{pf''_{LL}}{|HB|} = \frac{-}{+} < 0$$

Un aumento de r produce una disminución de la variable capital óptima

$$\frac{\partial L^*}{\partial w} = \frac{\begin{vmatrix} pf''_{KK} & 0 \\ pf''_{KL} & 1 \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{pf''_{KK}}{|HB|} = \frac{-}{+} < 0$$

Un aumento de w produce una disminución de la variable trabajo óptima

---

2.2. OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES DE IGUALDAD

Un programa matemático con restricciones de igualdad se formula de la siguiente manera ($m < n$):

$$(P)\begin{cases} opt \quad z = f(x_1, \dots, x_n) \\ sa \quad g_1(x_1, \dots, x_n) = b_1 \\ \quad\vdots \\ \quad g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m \end{cases} \quad \text{o bien en forma resumida} \quad \begin{cases} opt \quad z = f(x) \\ sa \quad g(x) = b \end{cases}$$

En este caso el ***conjunto de soluciones factibles*** es

$$S = \{x \in D / g_i\,(x) = b_i, 1 \leq i \leq m\}$$

2.2.1. Condición necesaria para la existencia de óptimos locales

Teorema 14 (*Teorema de Lagrange*): Sea $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{D} \to \mathbb{R}$ y sean $\boldsymbol{g_i}: \boldsymbol{D} \to \mathbb{R}$ $(\boldsymbol{1 \leq i \leq m})$, $\boldsymbol{D} \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, abierto, $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g_i} \in \boldsymbol{C^1(D)}$. Sea $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{S}$ tal que $\boldsymbol{rg[Jg(x_0)] = m}$.
Si el problema $(\boldsymbol{P})$ presenta en $\boldsymbol{x_0}$ un óptimo local, entonces existen números reales únicos $\boldsymbol{\lambda_1, \dots, \lambda_m}$ soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\boldsymbol{\nabla f(x_0) - \lambda_1 \nabla g_1(x_0) - \cdots - \lambda_m \nabla g_m(x_0) = 0}$$

Definición 13: Los números reales $\boldsymbol{\lambda_1, \dots, \lambda_m}$ se denominan multiplicadores de Lagrange asociados al punto $\boldsymbol{x_0}$

Definición 14: Un punto del conjunto factible *S* que verifique la condición de Lagrange se denomina ***punto crítico*** del programa.

Observaciones importantes:

1) La condición de Lagrange se puede escribir como

$$\boldsymbol{\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(x_0)}$$

La interpretación de esta expresión es la siguiente: el gradiente de la función objetivo *f* en el punto es $\boldsymbol{x_0}$ es una combinación lineal de los gradientes de las restricciones en dicho punto. Esto se debe a la propiedad de perpendicularidad que existe entre la curva de nivel de una función diferenciable y su gradiente y, por encontrarse la solución óptima en el punto de tangencia de la curva de nivel de la función que define la restricción y una curva de nivel de la función objetivo

2) La condición $\boldsymbol{rg[Jg(x_0)] = m}$ se denomina ***condición de regularidad*** y significa que vectores gradientes de las restricciones en el punto x0 son linealmente independientes. Esta condición es necesaria para que se verifiquen las hipótesis del teorema de la función implícita, el cual se utiliza para la demostración del teorema de Lagrange

Para obtener los puntos críticos del problema (P) se deberá resolver un sistema de $n + m$ ecuaciones formado por las n ecuaciones que dan las condiciones de Lagrange y las m restricciones. En la práctica se utiliza una función auxiliar denominada ***función de Lagrange***:

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \boldsymbol{\lambda_1}, \dots, \boldsymbol{\lambda_m}) = f(x_1, \dots, x_n) + \boldsymbol{\lambda_1}[b_1 - g_1(x_1, \dots, x_n)] + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_m[b_m - g_m(x_1, \dots, x_n)]$$

Esta es una función de $n + m$ variables donde sus derivadas parciales igualadas a cero nos dan el sistema que debemos resolver.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 & 1 \le i \le n \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = 0 & 1 \le j \le m \end{cases}$$

Por lo tanto, un punto crítico de la función de Lagrange asociada al problema (P)es un punto crítico del problema (P).

Además, $\forall x \in S$ se verifica que $\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \boldsymbol{\lambda_1}, \dots, \boldsymbol{\lambda_m}) = f(x_1, \dots, x_n)$.

2.2.2. Condición suficiente para la existencia de óptimos locales

Se define como ***matriz Hessiana orlada*** asociada al problema (P) a la matriz

$$\overline{H}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & g'_{1x_1} & \cdots & g'_{1x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & g'_{mx_1} & \cdots & g'_{mx_n} \\ g'_{1x_1} & \cdots & g'_{mx_1} & L''_{x_1x_1} & \cdots & L''_{x_1x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g'_{1x_n} & \cdots & g'_{mx_n} & L''_{x_1x_n} & \cdots & L''_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

Recordar

Un criterio para determinar el signo de una matriz asociada a una forma cuadrática restringida está dado por ($n =$ cantidad de variables, $m =$cantidad de restricciones, $m < n$)

a) La matriz $\overline{H}(x_0, \lambda_0)$ es definida positiva sí y sólo sí los $n - m$ últimos menores principales de $\overline{H}(x_0, \lambda_0)$ tienen el mismo signo de $(-1)^m$

b) La matriz $\overline{H}(x_0, \lambda_0)$ es definida negativa sí y sólo sí los $n - m$ últimos menores principales de $\overline{H}(x_0, \lambda_0)$ alternan signo comenzando por el signo de $(-1)^{m+1}$

c) Si las condiciones a) y b) no se cumplen y los determinantes son distintos de cero entonces la matriz $\overline{H}(x_0, \lambda_0)$ es indefinida

Teorema 15: Sea $f: D \to \mathbb{R}$ y sean $g_i: D \to \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq m)$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, $f, g_i \in C^2(D)$. Sea x_0 un punto crítico del programa (P) con λ_0 multiplicadores de Lagrange asociados

i) Si la matriz $\overline{H}(x_0, \lambda_0)$ es definida positiva entonces el problema (P) presenta en x_0 un mínimo local.

ii) Si la matriz $\overline{H}(x_0, \lambda_0)$ es definida negativa entonces el problema (P) presenta en x_0 un máximo local.

2.2.3 ¿Cuándo falla?

- *No se verifica la condición de regularidad.* Si esto sucede la condición de Lagrange no tiene que verificarse necesariamente. Como consecuencia, para resolver un problema con restricciones de igualdad, siempre hay que tener en cuenta los puntos del conjunto de soluciones factibles que no cumplen la condición de regularidad
- *No existencia de extremos del programa*. Si la hipótesis de funciones C^1 se cumple y la condición de regularidad se verifica, pero no existen puntos críticos, entonces el problema planteado carece de extremos locales
- *Matriz hessiana orlada semidefinida en un punto crítico.* En esos casos habrá que hacer un estudio de la función en un entorno del punto

2.2.4. Paso a paso

1) Hallar el dominio de la función objetivo y el conjunto de soluciones factibles.
2) Plantear la función de Lagrange.
3) Calcular el gradiente de la función de la función de Lagrange.
4) Buscar los puntos que anulan el gradiente (puntos críticos)
5) Fijarse si existen puntos pertenecientes al conjunto de soluciones factibles donde no se cumpla la condición de regularidad. En caso afirmativo realizar un estudio local.
6) Hallar la matriz hessiana orlada.
7) Reemplazar cada uno de los puntos críticos en la matriz hessiana orlada y definir el carácter de cada uno de ellos.
8) Si en alguno de los puntos críticos la matriz hessiana es semidefinida (positiva o negativa) realizar un estudio local.

Ejemplo 21

$$\begin{cases} f(x,y) = xy \\ x + y = 12 \end{cases}$$

Consideramos la función de Lagrange

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy + \lambda(12 - x - y)$$

Derivamos respecto de x, y y λ e igualamos a cero

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = y - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_y = x - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda = 12 - x - y = 0 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones despejamos lambda

$$\begin{cases} \lambda = y \\ \lambda = x \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad y = x$$

Reemplazamos en la tercera ecuación

$$12 - x - x = 0 \qquad x = 6 \;\therefore\; y = 6 \;\wedge\; \lambda = 6$$

El punto crítico $P = (6; 6)$ con $\lambda = 6$

Armamos la matriz Hessiana orlada

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como

$$\left.\begin{matrix} n = 2 \\ m = 1 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \quad n - m = 1$$

Solo hay que calcular un determinante que se corresponde con el determinante de la matriz Hessiana orlada

¿Cuáles serían las condiciones?

Para mínimo relativo, la matriz debería ser definida positiva. Por lo tanto, el signo del determinante de la matriz Hessiana orlada tendría que tener el mismo signo que $(-1)^1 = -1$. Es decir

$$|\bar{H}| < 0$$

Para máximo relativo, la matriz debería ser definida negativa. Por lo tanto, el signo del determinante de la matriz Hessiana orlada debería tener el mismo signo que $(-1)^{1+1} = 1$. Es decir

$$|\bar{H}| > 0$$

Luego, como $\det(\bar{H}) = 2 > 0$ concluimos que el problema presenta en el punto $P = (6; 6)$ un máximo relativo.

Ejemplo 22

$$\begin{cases} f(x,y) = 3x + 2y \\ 2x^2 + 3y^2 = 210 \end{cases}$$

Consideramos la función de Lagrange

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 3x + 2y + \lambda[210 - 2x^2 - 3y^2]$$

Derivamos respecto de x, y y λ e igualamos a cero

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 3 - 4\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 2 - 6\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda = 210 - 2x^2 - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones despejamos lambda

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{3}{4x} \\ \lambda = \dfrac{1}{3y} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \frac{3}{4x} = \frac{1}{3y} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{4}{9}x$$

Reemplazamos en la restricción

$$2x^2 + 3y^2 = 210$$

$$2x^2 + 3\left(\frac{4}{9}x\right)^2 = 210$$

$$2x^2 + \frac{16}{27}x^2 = 210$$

$$\frac{70}{27}x^2 = 210$$

$$x^2 = 81$$

Entonces

$$\begin{cases} x = 9 \quad \Longrightarrow \quad y = 4 \quad \wedge \quad \lambda = \dfrac{1}{12} \\ x = -9 \quad \Longrightarrow \quad y = -4 \quad \wedge \quad \lambda = -\dfrac{1}{12} \end{cases}$$

Por lo tanto, los puntos críticos son $P_1 = (9,4)$ con $\lambda = \frac{1}{12}$ y $P_2 = (-9,-4)$ con $\lambda = -\frac{1}{12}$

Armamos la matriz Hessiana orlada

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & 4x & 6y \\ 4x & -4\lambda & 0 \\ 6y & 0 & -6\lambda \end{pmatrix}$$

Como

$$\left.\begin{matrix} n=2 \\ m=1 \end{matrix}\right\} \implies n-m=1$$

Solo hay que calcular un determinante que se corresponde con el determinante de la matriz Hessiana orlada

¿Cuáles serían las condiciones?

Para mínimo relativo, la matriz debería ser definida positiva. Por lo tanto, el signo del determinante de la matriz Hessiana orlada debería tener el mismo signo que $(-1)^1 = -1$. Es decir

$$|\overline{H}| < 0$$

Para máximo relativo, la matriz debería ser definida negativa. Por lo tanto, el signo del determinante de la matriz Hessiana orlada tendría que tener el mismo signo que $(-1)^{1+1} = 1$. Es decir

$$|\overline{H}| > 0$$

Reemplazando por el primer punto crítico

$$\overline{H}(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 36 & 24 \\ 36 & -{}^1\!/_3 & 0 \\ 24 & 0 & -{}^1\!/_2 \end{pmatrix}$$

$$\det \overline{H}(P_1) = 840 > 0$$

Por lo tanto, el problema presenta en el punto $P_1 = (9,4)$ un máximo relativo

Reemplazando por el segundo punto crítico

$$\overline{H}(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & -36 & -24 \\ -36 & {}^1\!/_3 & 0 \\ -24 & 0 & {}^1\!/_2 \end{pmatrix}$$

$$\det \overline{H}(P_2) = -840 < 0$$

Por lo tanto, el problema presenta en el punto $P_2 = (-9,-4)$ un mínimo relativo

---

Ejemplo 23

$$\begin{cases} f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \\ x+y=2 \end{cases}$$

Consideramos la función de Lagrange

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+z^2+\lambda[2-x-y]$$

Derivamos respecto de x, y y λ e igualamos a cero

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 2x - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 2y - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_z = 2z = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda = 2 - x - y = 0 \end{cases}$$

De la tercera ecuación obtenemos que $z = 0$.

De las dos primeras ecuaciones despejamos lambda

$$\begin{cases} \lambda = 2x \\ \lambda = 2y \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad y = x$$

Reemplazamos en la restricción

$$x + y = 2 \quad \Longrightarrow \quad 2x = 2 \quad \Longrightarrow \quad x = 1 \quad \therefore \quad y = 1 \quad \wedge \quad \lambda = 2$$

Por lo tanto, el punto crítico es $P = (1, 1, 0)$ con $\lambda = 2$

Armamos la matriz Hessiana orlada

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como

$$\left. \begin{matrix} n = 3 \\ m = 1 \end{matrix} \right\} \quad \Longrightarrow \quad n - m = 2$$

Se deben calcular los dos últimos determinantes de la matriz Hessiana orlada, es decir:

$$|\bar{H}_1| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad |\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

¿Cuáles serían las condiciones?

Para mínimo relativo, la matriz debería ser definida positiva. Por lo tanto, el signo de los determinantes tendría que tener el mismo signo que $(-1)^1 = -1$. Es decir

$$|\bar{H}_1| < 0 \qquad |\bar{H}| < 0$$

Para máximo relativo, la matriz debería ser definida negativa. Por lo tanto, el signo de los determinantes debe alternar signo comenzando por el signo de $(-1)^{1+1} = 1$. Es decir

$$|\bar{H}_1| > 0 \qquad |\bar{H}| < 0$$

Calculemos los determinantes

$$|\bar{H}_1| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0 \qquad |\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -8 < 0$$

Como los dos determinantes son negativos, concluimos que el problema presenta en el punto $P = (1, 1, 0)$ un mínimo relativo

Ejemplo 24

$$\begin{cases} f(x,y,z) = x + 2y + 2z \\ x^2 + y^2 = 25 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Consideramos la función de Lagrange

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x + 2y + 2z + \lambda_1[25 - x^2 - y^2] + \lambda_2[-x - y - z]$$

Derivamos e igualamos a cero

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 1 - 2x\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 2 - 2y\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \mathcal{L}'_z = 2 - \lambda_2 = 0 \\ \mathcal{L}'_{\lambda_1} = 25 - x^2 - y^2 = 0 \\ \mathcal{L}'_{\lambda_2} = -x - y - z = 0 \end{cases}$$

De $\mathcal{L}'_z$ se obtiene que $\lambda_2 = 2$.

Reemplazando en $\mathcal{L}'_x$ y en $\mathcal{L}'_y$ se obtiene

$$\begin{cases} 1 - 2x\lambda_1 - \lambda_2 = -1 - 2x\lambda_1 = 0 \\ 2 - 2y\lambda_1 - \lambda_2 = -2y\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \vee \quad \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

Observemos que:

- $y = 0 \quad \Rightarrow$ reemplazando en $\mathcal{L}'_{\lambda_1}$ nos queda $\quad x^2 = 25$

Si $\ x = 5 \ \Rightarrow z = -5$ (reemplazando en $\mathcal{L}'_{\lambda_2}$) y $\lambda_1 = -\frac{1}{10}$ (reemplazando en $\mathcal{L}'_x$)

Si $\ x = -5 \ \Rightarrow z = 5$ (reemplazando en $\mathcal{L}'_{\lambda_2}$) y $\lambda_1 = \frac{1}{10}$ (reemplazando en $\mathcal{L}'_x$)

- $\lambda_1 = 0$ al reemplazar en $\mathcal{L}'_x$ se llega a un absurdo

Por lo tanto, los puntos críticos son

$P_1 = (5, 0, -5)$ con $\lambda_1 = -\frac{1}{10}$ y $\lambda_2 = 2$

$P_2 = (-5, 0, 5)$ con $\lambda_1 = \frac{1}{10}$ y $\lambda_2 = 2$

Armamos la matriz Hessiana orlada

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2x & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2x & 1 & -2\lambda_1 & 0 & 0 \\ 2y & 1 & 0 & -2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como

$$\left.\begin{matrix} n=3 \\ m=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad n-m=1$$

Solo hay que calcular un determinante que se corresponde con el determinante de la matriz Hessiana orlada

¿Cuáles serían las condiciones?

Para mínimo relativo, la matriz debería ser definida positiva. Por lo tanto, el signo del determinante de la matriz Hessiana orlada debería tener el mismo signo que $(-1)^2 = 1$. Es decir

$$|\overline{H}| > 0$$

Para máximo relativo, la matriz debería ser definida negativa. Por lo tanto, el signo del determinante de la matriz Hessiana orlada debería tener el mismo signo que $(-1)^{2+1} = -1$. Es decir

$$|\overline{H}| < 0$$

Reemplazando por el primer punto crítico

$$\overline{H}(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 1 & {}^{1}/_{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & {}^{1}/_{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \overline{H}(P_1) = 20 > 0$$

Por lo tanto, el problema presenta en el punto $P_1 = (5, 0, -5)$ un mínimo relativo

Reemplazando por el segundo punto crítico

$$\overline{H}(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -10 & 1 & -{}^{1}/_{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -{}^{1}/_{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \overline{H}(P_2) = -20 < 0$$

Por lo tanto, el problema presenta en el punto $P_2 = (-5, 0, 5)$ un máximo relativo

Ejemplo 25

$$\begin{cases} f(x,y) = x^4 + y^4 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Consideramos la función de Lagrange

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^4 + y^4 + \lambda(-x+y)$$

Derivamos respecto de x, y y λ e igualamos a cero

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 4x^3 - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 4y^3 + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda = -x + y = 0 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones despejamos lambda

$$\begin{cases} \lambda = 4x^3 \\ \lambda = -4y^3 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad 4x^3 = -4y^3 \quad \Longrightarrow \quad x = -y$$

Reemplazamos en la tercera ecuación se obtiene que el punto crítico del problema es $P = (0;0)$ con $\lambda = 0$

Armamos la matriz Hessiana orlada

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 12x^2 & 0 \\ -1 & 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

Al reemplazar por el punto crítico

$$\overline{H}(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\det \overline{H}(P) = 0$ no podemos concluir con respecto al punto crítico. Tendríamos que hacer un estudio local (por ejemplo, tomar la restricción y reemplazarla en la función objetivo). Este ejercicio se retoma en el apartado que sigue.

2.2.5. Condiciones suficientes de optimalidad global

Teorema 16: Sea $f: D \to \mathbb{R}$ y sean $g_i: D \to \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq m)$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, $f, g_i \in C^1(D)$. Sea el conjunto de soluciones factibles S convexo y $x_0 \in S$ un punto crítico del programa (P).

Se verifica

a) Si f es convexa en S entonces en x_0 el problema (P) presenta un mínimo global.

b) Si f es estrictamente convexa en S entonces en x_0 el problema (P) presenta un mínimo global único.

c) Si f es cóncava en S entonces en x_0 el problema (P) presenta un máximo global.

d) Si f es estrictamente cóncava en S entonces en x_0 el problema (P) presenta un máximo global único.

Teorema 17: Sea $f: D \to \mathbb{R}$ y sean $g_i: D \to \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq m)$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, $f, g_i \in C^1(D)$. Sea el conjunto de soluciones factibles S convexo y $x_0 \in S$ un punto crítico del programa (P).

Se verifica

a) Si f es cuasiconvexa en S entonces en x_0 el problema (P) presenta un mínimo global.

b) Si f es cuasicóncava en S entonces en x_0 el problema (P) presenta un máximo global

IMPORTANTE:

- Si f es cóncava o cuasicóncava (convexa o cuasiconvexa) en S con S convexo y $f \in C^1(D)$ la condición necesaria de Lagrange en $x_0 \in S$ es necesaria y suficiente para que el problema (P) alcance un máximo (mínimo) global
- El conjunto de soluciones factibles S es convexo sí y sólo sí **las restricciones son lineales**

Ejemplo 26

Si revisamos los ejemplos vistos previamente:

En el Ejemplo 23 la función objetivo es estrictamente convexa y la restricción es lineal, por lo tanto, el punto crítico obtenido es un mínimo global único

En el Ejemplo 21 la función objetivo es cuasicóncava y la restricción es lineal, por lo tanto, el punto crítico obtenido es un máximo global

En el Ejemplo 25 la función objetivo es convexa, por lo tanto, el punto crítico obtenido es un mínimo global

2.2.6. Composición de funciones

Proposición 18: Sea $f: D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto y sea $g: A \to \mathbb{R}$ de manera que $\operatorname{Im} f \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$. Sea S el conjunto de soluciones factibles del programa (P) entonces se verifica:

a) Si g es creciente, los puntos donde f alcanza máximos (mínimos) en S coinciden con los puntos donde $g \circ f$ alcanza máximos (mínimos) en S.

b) Si g es decreciente, los puntos donde f alcanza máximos (mínimos) en S coinciden con los puntos donde $g \circ f$ alcanza mínimos (máximos) en S.

Ejemplo 27

$$\begin{cases} f(x,y) = e^{x^2+y^2} \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

a. Supongamos que resolvemos este problema como hicimos hasta ahora.

Consideramos la función de Lagrange

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = e^{x^2+y^2} + \lambda(5 - 2x + y)$$

Derivamos e igualamos a cero

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 2xe^{x^2+y^2} - 2\lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 2ye^{x^2+y^2} + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda = 5 - 2x + y = 0 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones despejamos lambda

$$\begin{cases} \lambda = xe^{x^2+y^2} \\ \lambda = -2ye^{x^2+y^2} \end{cases} \Longrightarrow \quad x = -2y$$

Reemplazamos en la tercera ecuación se obtiene que el punto crítico es $P = (2;-1)$ con $\lambda = 2e^5$

Armamos la matriz Hessiana orlada

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & (4x^2+2)e^{x^2+y^2} & 4xye^{x^2+y^2} \\ -1 & 4xye^{x^2+y^2} & (4y^2+2)e^{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Reemplazamos por el punto crítico

$$\bar{H}(P) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 18e^5 & -8e^5 \\ -1 & -8e^5 & 6e^5 \end{pmatrix}$$

Como $\det \bar{H}(P) = -10e^5 < 0$ concluimos que el problema presenta en el punto $P = (2;-1)$ un mínimo relativo

(*Observación*: se podría haber probado que como la función objetivo es estrictamente convexa y la restricción es lineal entonces el punto crítico es un mínimo global único)

b. Utilicemos una composición conveniente

Sea $g(x) = \ln x$ (claramente es una función estrictamente creciente)

Consideremos la función

$$h(x,y) = g \circ f(x,y) = \ln(e^{x^2+y^2}) = x^2 + y^2$$

Por lo tanto, el nuevo problema sería

$$\begin{cases} h(x,y) = x^2 + y^2 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

La función de Lagrange para este nuevo problema es

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(5 - 2x + y)$$

Derivamos respecto e igualamos a cero

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 2x - 2\lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 2y + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda = 5 - 2x + y = 0 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones despejamos lambda

$$\begin{cases} \lambda = x \\ \lambda = -2y \end{cases} \Longrightarrow \quad x = -2y$$

Reemplazamos en la tercera ecuación se obtiene que el punto crítico es $P = (2;-1)$ con $\lambda = 2$

Armamos la matriz Hessiana orlada

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $\det \bar{H} = -10 < 0$ concluimos que el problema presenta en el punto $P = (2;-1)$ un mínimo relativo.

2.2.7. Análisis de sensibilidad

Observemos que si en el problema (P) consideramos distintos valores de $b = (b_1, \dots, b_m)$ se obtendrían diferentes programas cuyas soluciones serían distintas.

Si el nuevo valor de b considerado es muy cercano el valor de b que se tenía en el problema original, ¿se podría concluir algo sobre el óptimo del nuevo problema con los resultados obtenidos en el problema original?

Teorema 19 (Interpretación de los multiplicadores de Lagrange):
Sea $f: D \to \mathbb{R}$ y sean $g_i: D \to \mathbb{R}$ $(1 \le i \le m)$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, $f, g_i \in C^2(D)$. Sea x^* un punto donde el problema (P) alcanza el óptimo con multiplicadores de Lagrange asociados $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$.
Se verifica

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial b_j} = \lambda_j^* \qquad 1 \le j \le m$$

IMPORTANTE:

Del teorema anterior se deduce que el valor del multiplicador λ_j indica la variación del valor óptimo de la función objetivo al variar el valor b_j de la j-ésima restricción.

- Si $\lambda_j > 0$, un incremento en el valor b_j de la j-ésima restricción hace aumentar el valor el valor óptimo de la función objetivo.
- Si $\lambda_j < 0$, un incremento en el valor b_j de la j-ésima restricción hace disminuir el valor el valor óptimo de la función objetivo.
- Si $\lambda_j = 0$, la derivada de primer orden no proporciona información suficiente para conocer el impacto sobre el valor óptimo de la función objetivo de una variación del valor b_j.

Económicamente, λ_j representa la ***tasa marginal de cambio*** del valor óptimo de la función objetivo (*valor sombra de la restricción*)

Observación

Consideremos los siguientes problemas donde Δb_j $(1 \le j \le m)$ es un incremento suficientemente pequeño

$$(P1)\begin{cases} opt \quad z = f(x_1, \dots, x_n) \\ sa \quad g_1(x_1, \dots, x_n) = b_1 \\ \quad \vdots \\ \quad g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m \end{cases} \qquad (P2)\begin{cases} opt \quad z = f(x_1, \dots, x_n) \\ sa \quad g_1(x_1, \dots, x_n) = b_1 + \Delta b_1 \\ \quad \vdots \\ \quad g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m + \Delta b_m \end{cases}$$

Si el problema $(P1)$ admite un óptimo en el punto x^* (con multiplicadores de Lagrange asociados $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$) entonces el valor óptimo de la función está dado por $f_{opt} = f(x^*)$.

Luego, el valor óptimo de la función del problema $(P2)$ se podría calcular aproximadamente de la siguiente forma:

$$f_N \cong \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \, \Delta b_j + f_{opt}$$

Ejemplo 28

Si consideremos el Ejemplo 23, el problema presenta en el punto $P = (1, 1, 0)$ (con $\lambda = \mathbf{2}$) un mínimo relativo, siendo el valor mínimo de la función $f_{min} = f(1,1,0) = \mathbf{2}$

Si ahora consideramos el problema

$$\begin{cases} f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \\ \quad x + y = \mathbf{3} \end{cases}$$

Sin resolver nuevamente se podría encontrar el valor óptimo aproximado de este problema de la siguiente forma

$$f_N \cong \mathbf{2}\,(\mathbf{3} - 2) + \mathbf{2} = 4$$

Consideremos el siguiente problema

$$(Pa)\begin{cases} opt & z = f(x, a) \\ sa & g(x, a) = b \end{cases}$$

Donde $f \in C^1$ con $x \in \mathbb{R}^n$ (variables de decisión) y $a \in \mathbb{R}^k$ (parámetros)

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^k$ un conjunto abierto y supongamos que para todo $a = (a_1, \dots, a_k) \in A$ existe $x^*(a) = (x_1^*(a_1, \dots, a_k); \dots; x_n^*(a_1, \dots, a_k))$ solución óptima del problema (Pa) con multiplicadores de Lagrange asociados $\lambda^*(a) = (\lambda_1^*(a_1, \dots, a_k); \dots; \lambda_m^*(a_1, \dots, a_k))$, siendo x^* y λ^* funciones C^1

Si definimos la *función objetivo indirecta* o *función valor* como $\varphi(a) = f(x^*(a); a)$

Se verifica

$$\frac{\partial \varphi(a)}{\partial a_i} = \frac{\partial \mathcal{L}(x^*(a); \lambda^*(a))}{\partial a_i} \qquad 1 \le i \le k$$

Donde $\mathcal{L}$ es la función de Lagrange asociada al problema (Pa)

El resultado anterior se conoce como ***Teorema de la Envolvente***

Ejemplo 29

Consideremos una empresa que compra sus insumos productivos capital (K) y trabajo (L) en mercados perfectamente competitivos a precios r y w respectivamente y sea $f(L; K)$ la función de producción de la empresa.

El problema consiste en resolver:

$$\begin{cases} \min C(L, K) = wL + rK \\ \quad sa \qquad f(L, K) = Q \end{cases}$$

Consideramos la función de Lagrange

$$\mathcal{L}(L,K,\lambda) = wL + rK + \lambda[Q - f(L,K)]$$

Derivamos e igualamos a cero

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_L = w - \lambda f'_L(L,K) = 0 \\ \mathcal{L}'_K = r - \lambda f'_K(L,K) = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda = Q - f(L,K) = 0 \end{cases}$$

Al despejar de este sistema (si tuviéramos la forma explícita de la función de producción) obtendríamos que

$$L^* = L^*(w,r,Q)$$

$$K^* = K^*(w,r,Q)$$

$$\lambda^* = \lambda^*(w,r,Q)$$

Al reemplazar en la función de costo (sería el valor del costo mínimo) se obtiene la función de costo indirecta, la cual depende de w, r, Q

$$C_{min} = C(L^*,K^*) = C(w,r,Q)$$

Por el teorema de la envolvente

$$\frac{\partial Cmin}{\partial w} = \frac{\partial \mathcal{L}(L^*,K^*,\lambda^*)}{\partial w} = L^*$$

$$\frac{\partial Cmin}{\partial r} = \frac{\partial \mathcal{L}(L^*,K^*,\lambda^*)}{\partial r} = K^*$$

$$\frac{\partial Cmin}{\partial Q} = \frac{\partial \mathcal{L}(L^*,K^*,\lambda^*)}{\partial Q} = \lambda^*$$

Estas derivadas nos indican cómo impactan cambios en los parámetros w, r y Q en el costo mínimo

Observación:

De las ecuaciones del ejemplo anterior se desprende que las funciones de demanda condicionadas de los insumos L y K de la empresa son:

$$L^* = \frac{\partial C(w,r,Q)}{\partial w} \qquad K = \frac{\partial C(w,r,Q)}{\partial r}$$

Los resultados de este ejemplo son conocidos como ***Lema de Shepard*** en la teoría Microeconómica.

Ejemplo 30

Consideremos un individuo que consume dos bienes X e Y en un mercado perfectamente competitivo a precios p_x y p_y respectivamente con una renta monetaria M.

El problema consiste en resolver:

$$\begin{cases} \max U = U(x,y) \\ sa \quad p_x x + p_y y = M \end{cases}$$

Consideramos la función de Lagrange

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = U(x,y) + \lambda[M - p_x x - p_y y]$$

Derivamos e igualamos a cero

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = U'_x(x,y) - p_x\lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_y = U'_y(x,y) - p_y\lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda = M - p_x x - p_y y = 0 \end{cases}$$

Al despejar de este sistema (si tuviéramos la forma explícita de la función de utilidad) obtendríamos que

$$x^* = x^*(p_x, p_y, M)$$

$$y^* = y^*(p_x, p_y, M)$$

$$\lambda^* = \lambda^*(p_x, p_y, M)$$

Al reemplazar en la función de utilidad (sería el valor de la utilidad máxima) se obtiene la función de utilidad indirecta, la cual depende de p_x, p_y, M

$$U_{max} = U(x^*, y^*) = U(p_x, p_y, M)$$

Por el teorema de la envolvente

$$\frac{\partial U_{max}}{\partial p_x} = \frac{\partial \mathcal{L}(p_x, p_y, M)}{\partial p_x} = -x^*\lambda^*$$

$$\frac{\partial U_{max}}{\partial p_y} = \frac{\partial \mathcal{L}(p_x, p_y, M)}{\partial p_y} = -y^*\lambda^*$$

$$\frac{\partial U_{max}}{\partial M} = \frac{\partial \mathcal{L}(p_x, p_y, M)}{\partial M} = \lambda^*$$

Estas derivadas nos indican cómo impactan cambios en los parámetros p_x, p_y y M en la utilidad máxima

Observación:

De las ecuaciones del ejemplo anterior se desprende que las funciones de demanda del individuo son:

$$x^* = -\frac{\frac{\partial U(p_x, p_y, M)}{\partial p_x}}{\frac{\partial U(p_x, p_y, M)}{\partial M}}$$

$$y^* = -\frac{\frac{\partial U(p_x, p_y, M)}{\partial p_y}}{\frac{\partial U(p_x, p_y, M)}{\partial M}}$$

Los resultados de este ejemplo se conocen como ***Lema de Roy*** de la teoría Microeconómica.

Ejemplo 31

La función de utilidad de un consumidor está dada por $U(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{1/2}$ donde x_1 y x_2 representan las cantidades de los bienes 1 y 2 consumidos en un período de tiempo dado. Sean p_1 y p_2 los precios unitarios de cada uno de los bienes y M la cantidad de dinero que el individuo va a gastar en la adquisición de ambos bienes ($x_1 > 0, x_2 > 0, p_1 > 0, p_2 > 0, M > 0$)

a) Indicar si la función de utilidad es cóncava, convexa, estrictamente cóncava, estrictamente convexa. ¿Es cuasicóncava,o cuasiconvexa?

b) Calcular las cantidades a consumir de cada uno de los bienes en función de los parámetros p_1. p_2 y M si se quiere maximizar la utilidad. ¿Es el óptimo absoluto? ¿Es único?

c) Indicar el signo de multiplicador de Lagrange.

d) Obtener la función objetivo indirecta y calcular las derivadas parciales. Probar que un incremento en M produce un incremento en la utilidad máxima y un aumento de p_1 (o p_2) una disminución de la utilidad máxima.

e) Resuelva el punto b) tomando como función objetivo $\overline{U}(x_1, x_2) = \ln[U(x_1, x_2)]$. ¿Qué observa?

Resolución

a) La función de utilidad $U(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{1/2}$ es estrictamente cóncava por ser una función de Cobb-Douglas con suma de exponentes menor a uno. Además, por ser cóncava podemos asegurar que es cuasicóncava.

b) El problema que debemos resolver es:

$$\begin{cases} \max U(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{1/2} \\ sa \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = M \end{cases}$$

Consideramos la función de Lagrange

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{1/3} x_2^{1/2} + \lambda[M - p_1 x_1 - p_2 x_2]$$

Derivamos e igualamos a cero

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_{x_1} = \dfrac{1}{3} x_1^{-2/3} x_2^{1/2} - p_1 \lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_{x_2} = \dfrac{1}{2} x_1^{1/3} x_2^{-1/2} - p_2 \lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_{\lambda} = M - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones despejamos lambda

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{3p_1} x_1^{-2/3} x_2^{1/2} \\ \lambda = \dfrac{1}{2p_2} x_1^{1/3} x_2^{-1/2} \end{cases} \Longrightarrow \quad \frac{1}{3p_1} x_1^{-2/3} x_2^{1/2} = \frac{1}{2p_2} x_1^{1/3} x_2^{-1/2} \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \frac{3p_1}{2p_2} x_1$$

Reemplazando en la restricción

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$$

$$p_1 x_1 + p_2 \left(\frac{3p_1}{2p_2} x_1 \right) = M$$

$$p_1 x_1 + \frac{3p_1}{2} x_1 = M$$

$$\frac{5p_1}{2}x_1 = M$$

$$x_1 = \frac{2M}{5p_1}$$

Luego,

$$x_2 = \frac{3p_1}{2p_2}x_1 = \frac{3p_1}{2p_2}\frac{2M}{5p_1} = \frac{3M}{5p_2}$$

Como la función de utilidad es estrictamente cóncava y la restricción es lineal, concluimos que el problema admite en $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{2M}{5p_1}; \frac{3M}{5p_2}\right)$ (con $\lambda^* = \frac{1}{3p_1}\left(\frac{2M}{5p_1}\right)^{-2/3}\left(\frac{3M}{5p_2}\right)^{1/2}$) un máximo global único.

c) Como $p_1 > 0, p_2 > 0, M > 0$ se verifica

$$\lambda^* = \underbrace{\frac{1}{3p_1}}_{>0}\underbrace{\left(\frac{2M}{5p_1}\right)}_{>0}^{-2/3}\underbrace{\left(\frac{3M}{5p_2}\right)}_{>0}^{1/2} > 0$$

d)

$\frac{\partial U_{max}}{\partial p_1} = \frac{\partial \mathcal{L}(p_1.\ p_2, M)}{\partial p_1} = -x_1^*\lambda^* < 0$ $\implies$ ante un aumento de p_1 la utilidad máxima disminuye

$\frac{\partial U_{max}}{\partial p_2} = \frac{\partial \mathcal{L}(p_1.\ p_2, M)}{\partial p_2} = -x_2^*\lambda^* < 0$ $\implies$ ante un aumento de p_2 la utilidad máxima disminuye

$\frac{\partial U_{max}}{\partial M} = \frac{\partial \mathcal{L}(p_1.\ p_2, M)}{\partial M} = \lambda^* > 0$ $\implies$ ante un aumento de M la utilidad máxima aumenta

e) Consideremos ahora el siguiente problema

$$\begin{cases} \max \overline{U}(x_1, x_2) = \ln[U(x_1, x_2)] = \frac{1}{3}\ln x_1 + \frac{1}{2}\ln x_2 \\ sa \quad p_1x_1 + p_2x_2 = M \end{cases}$$

Consideramos la función de Lagrange

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = \frac{1}{3}\ln x_1 + \frac{1}{2}\ln x_2 + \lambda[M - p_1x_1 - p_2x_2]$$

Derivamos e igualamos a cero

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_{x_1} = \frac{1}{3x_1} - p_1\lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_{x_2} = \frac{1}{2x_2} - p_2\lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_{\lambda} = M - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones despejamos lambda

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{3p_1x_1} \\ \lambda = \frac{1}{2p_2x_2} \end{cases} \implies \frac{1}{3p_1x_1} = \frac{1}{2p_2x_2} \implies x_2 = \frac{3p_1}{2p_2}x_1$$

Reemplazando en la restricción

$$p_1x_1 + p_2x_2 = M$$

$$p_1x_1 + p_2\left(\frac{3p_1}{2p_2}x_1\right) = M$$

$$p_1x_1 + \frac{3p_1}{2}x_1 = M$$

$$\frac{5p_1}{2}x_1 = M$$

$$x_1 = \frac{2M}{5p_1}$$

Luego,

$$x_2 = \frac{3p_1}{2p_2}x_1 = \frac{3p_1}{2p_2}\frac{2M}{5p_1} = \frac{3M}{5p_2}$$

Concluimos que el punto crítico es idéntico (Teorema 5) ya que la función logaritmo natural es estrictamente creciente.

Lo único que cambia es el valor del multiplicador de Lagrange ($\lambda^* = \frac{5}{6M}$) y el valor óptimo de la función objetivo.

2.3. OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES DE DESIGUALDAD

Un programa matemático con restricciones de desigualdad se formula de alguna de las siguientes maneras:

$$(P1)\ \begin{cases} max \quad z = f(x_1, \dots, x_n) \\ sa \quad g_1(x_1, \dots, x_n) \le b_1 \\ \qquad \vdots \\ \quad g_m(x_1, \dots, x_n) \le b_m \end{cases} \quad \text{o bien en forma resumida} \quad \begin{cases} max \quad z = f(x) \\ sa \quad g(x) \le b \end{cases}$$

$$(P2)\ \begin{cases} min \quad z = f(x_1, \dots, x_n) \\ sa \quad g_1(x_1, \dots, x_n) \ge b_1 \\ \qquad \vdots \\ \quad g_m(x_1, \dots, x_n) \ge b_m \end{cases} \quad \text{o bien en forma resumida} \quad \begin{cases} min \quad z = f(x) \\ sa \quad g(x) \ge b \end{cases}$$

En este caso el conjunto de soluciones factibles es:

$S = \{x \in D \mid g_j(x) \le b_j, 1 \le j \le m\}$ para el problema (P1)

$S = \{x \in D \mid g_j(x) \ge b_j, 1 \le j \le m\}$ para el problema (P2)

Sea $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{S}$. Se dice que $\boldsymbol{x_0}$ ***satura*** la restricción *j*- ésima si $\boldsymbol{g_j(x_0) = b_j}$

En caso contrario se dice que *no satura* la restricción (es decir, para el problema (P1) $g_j(x_0) < b_j$ y para el problema (P2) $g_j(x_0) > b_j$)

Observación: Sea $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{S}$

- Si $x_0 \in Int\,(S)$, entonces ninguna restricción se satura en $\boldsymbol{x_0}$, por lo tanto, todas las direcciones a partir de $\boldsymbol{x_0}$serán factibles.
- Si $x_0 \in Fr\,(S)$, entonces algunas restricciones se saturan en el punto x_0. A partir de x_0 puede ocurrir que unas direcciones sean factibles y otras no.

2.3.1. Condición necesaria para la existencia de óptimos locales

Teorema 20 (Teorema de Kuhn – Tucker): Sea $f: D \to \mathbb{R}$ y sean $g_j: D \to \mathbb{R}$ $(1 \leq j \leq m)$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, $f, g_j \in C^1(D)$. Sea $x_0 \in S$ y supongamos que las restricciones que se saturan son la p primeras de manera que si llamamos $\bar{g}(x) = (g_1(x), \dots, g_p(x))$ entonces $rg[J\bar{g}(x_0)] = p$.

Si el problema presenta en $\boldsymbol{x_0}$ un óptimo local, entonces existen números reales no negativos únicos $\boldsymbol{\lambda_1, \dots, \lambda_m}$ que son solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla f(x_0) - \lambda_1 \nabla g_1(x_0) - \cdots - \lambda_m \nabla g_m(x_0) = 0} \\ \boldsymbol{\lambda_j [b_j - g_j(x_0)] = 0 \qquad (1 \leq j \leq m)} \end{cases} \qquad \textit{\textbf{Condiciones de Kuhn – Tucker}}$$

Definición 15: Un punto del conjunto factible S que verifique las condiciones de Kuhn – Tucker se denomina ***punto crítico*** del programa.

Definición 16: Los números reales $\boldsymbol{\lambda_1, \dots, \lambda_m}$ se denominan multiplicadores de Lagrange asociados al punto $\boldsymbol{x_0}$

Observación importante:

La condición $\boldsymbol{rg[J\bar{g}(x_0)] = p}$ se denomina ***condición de regularidad*** y significa que los vectores gradientes de las restricciones saturadas en el punto $\boldsymbol{x_0}$ son linealmente independientes. También se cumple la condición de regularidad si en el punto $\boldsymbol{x_0}$ no se satura ninguna restricción.

Para obtener los puntos críticos del problema se utiliza una función auxiliar de $n + m$ variables denominada ***función de Lagrange***:

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \boldsymbol{\lambda_1}, \dots, \boldsymbol{\lambda_m}) = f(x_1, \dots, x_n) + \boldsymbol{\lambda_1}[b_1 - g_1(x_1, \dots, x_n)] + \cdots + \boldsymbol{\lambda_m}[b_m - g_m(x_1, \dots, x_n)]$$

Luego, para obtener un punto crítico se deberá resolver el siguiente sistema:

- Para el programa (P1)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 & 1 \le i \le n \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = \boldsymbol{b_j} - \boldsymbol{g_j}(\boldsymbol{x_0}) \ge 0 & 1 \le j \le m \\ \lambda_j \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = \boldsymbol{\lambda_j}\left[\boldsymbol{b_j} - \boldsymbol{g_j}(\boldsymbol{x_0})\right] = 0 & 1 \le j \le m \\ \lambda_j \ge 0 & 1 \le j \le m \end{cases}$$

- Para el programa (P2)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 & 1 \le i \le n \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = \boldsymbol{b_j} - \boldsymbol{g_j}(\boldsymbol{x_0}) \le 0 & 1 \le j \le m \\ \lambda_j \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = \boldsymbol{\lambda_j}\left[\boldsymbol{b_j} - \boldsymbol{g_j}(\boldsymbol{x_0})\right] = 0 & 1 \le j \le m \\ \lambda_j \ge 0 & 1 \le j \le m \end{cases}$$

2.3.2. Condiciones suficientes de optimalidad global

Sea x_0 un punto crítico del problema.

1) Si en x_0 no se satura ninguna restricción (y, por lo tanto, $\lambda_j = 0 \ \forall j$), el problema planteado se puede resolver como un problema de optimización sin restricciones en el conjunto abierto $Int\ (S)$
2) Si en x_0 se saturan *p* restricciones con el problema planteado se puede resolver como un problema de optimización restringido a las restricciones saturadas.

Teorema 21: Sea $f: D \to \mathbb{R}$ y sean $g_j: D \to \mathbb{R}$ $(1 \le j \le m)$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, $f, g_j \in C^1(D)$. Sea el conjunto de soluciones factibles *S* convexo y $x_0 \in S$ un punto crítico del programa (P).

Se verifica

a) Si *f* es convexa en *S* entonces en x_0 el problema (P) presenta un mínimo global.
b) Si *f* es estrictamente convexa en *S* entonces en x_0 el problema (P) presenta un mínimo global único.
c) Si *f* es cóncava en *S* entonces en x_0 el problema (P) presenta un máximo global.
d) Si *f* es estrictamente cóncava en *S* entonces en x_0 el problema (P) presenta un máximo global único.

Teorema 22: Sea $f: D \to \mathbb{R}$ y sean $g_j: D \to \mathbb{R}$ $(1 \leq j \leq m)$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, $f, g_j \in C^1(D)$. Sea el conjunto de soluciones factibles S convexo y $x_0 \in S$ un punto crítico del programa (P).

Se verifica

a) Si f es cuasiconvexa en S entonces en x_0 el problema (P) presenta un mínimo global.

b) Si f es cuasicóncava en S entonces en x_0 el problema (P) presenta un máximo global.

IMPORTANTE

Para determinar si el conjunto de soluciones factibles S es convexo usamos las siguientes propiedades

Propiedad 4) de funciones cóncavas y convexas

Sea $f: D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto convexo no vacío

i) Si f es convexa en D, entonces $S_\alpha = \{x \in D \mid f(x) \leq \alpha\}$ es un conjunto convexo $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

ii) Si f es cóncava en D, entonces $T_\alpha = \{x \in D \mid f(x) \geq \alpha\}$ es un conjunto convexo $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Propiedad 1) de funciones cuasicóncavas y cuasiconvexas

Sea $f: D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto convexo no vacío

i) f es cuasiconvexa en D sí y sólo sí $S_\alpha = \{x \in D \mid f(x) \leq \alpha\}$ es un conjunto convexo $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

ii) f es cuasicóncava en D sí y sólo sí $T_\alpha = \{x \in D \mid f(x) \geq \alpha\}$ es un conjunto convexo $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Esto significa que para detectar si el conjunto de soluciones factibles es convexo basta con verificar si las funciones de las restricciones son cóncavas o convexas (cuasicóncavas o cuasiconvexas)

2.3.3. Cuadro resumen

$$(P1)\ \begin{cases} max & z = f(x) \\ sa & g(x) \leq b \end{cases} \qquad\qquad (P2)\ \begin{cases} min & z = f(x) \\ sa & g(x) \geq b \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda[b - g(x)]$$

Condiciones necesarias P1	Condiciones necesarias P2
$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda \geq 0 \\ \lambda\mathcal{L}'_\lambda = 0 \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda \leq 0 \\ \lambda\mathcal{L}'_\lambda = 0 \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$

Condiciones suficientes P1	Condiciones suficientes P2
• ***La función f cóncava, estrictamente cóncava o cuasicóncava***	• ***La función f convexa, estrictamente convexa o cuasiconvexa***
• ***La función g convexa, estrictamente convexa o cuasiconvexa***	• ***La función g cóncava, estrictamente cóncava o cuasicóncava***

Ejemplo 32

$$\begin{cases} \boldsymbol{min\ f(x,y) = x^2 + (y+5)^2} \\ \boldsymbol{sa \qquad 2x + y \geq 10} \end{cases}$$

Condiciones necesarias

$$\mathcal{L}(x, y\,, \lambda) = \mathbf{x^2 + (y+5)^2} + \lambda[10 - 2x - y]$$

$\mathbf{(1)}$ $\boldsymbol{\mathcal{L}'_x = 2x - 2\lambda = 0}$

$\mathbf{(2)}$ $\boldsymbol{\mathcal{L}'_y = 2(y+5) - \lambda = 0}$

$\mathbf{(3)}$ $\boldsymbol{\mathcal{L}'_\lambda = 10 - 2x - y \leq 0}$

$\mathbf{(4)}$ $\boldsymbol{\lambda\mathcal{L}'_\lambda = \lambda[10 - 2x - y] = 0}$

$\mathbf{(5)}$ $\boldsymbol{\lambda \geq 0}$

En general en estos problemas comenzamos por ver si lambda es cero (por la ecuación $\boldsymbol{\lambda\mathcal{L}'_\lambda = 0}$)

$\boldsymbol{\lambda = 0 \ \Rightarrow\ x = 0}$ (por (1)) $\wedge$ $\boldsymbol{y = -5}$ (por (2)) $\Rightarrow$ no se verifica la condición (3)

$\boldsymbol{\lambda > 0 \ \Rightarrow\ 2x + y = 10}$ (por (4))

Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} \boldsymbol{2x - 2\lambda = 0} & \Rightarrow & \boldsymbol{\lambda = x} \\ \boldsymbol{2(y+5) - \lambda = 0} & \Rightarrow & \boldsymbol{\lambda = 2(y+5)} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = 2(y+5)}$$

Reemplazamos

$\boldsymbol{2x + y = 10 \ \Rightarrow\ 4(y+5) + y = 10 \ \Rightarrow\ y = -2 \ \Rightarrow\ x = 6 \ \wedge\ \lambda = 6}$

Por lo tanto, el punto crítico es $\mathbf{(6;\ -2)}$ con $\boldsymbol{\lambda = 6}$

Condiciones suficientes

$$f(x,y) = x^2 + (y+5)^2$$

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz Hessiana es definida positiva por lo tanto la función es estrictamente convexa, $g(x,y) = 2x + y$¨ es una función lineal, por lo tanto, es cóncava y convexa

Concluimos que el problema presenta en punto $(6;\ -2)$ un mínimo global único

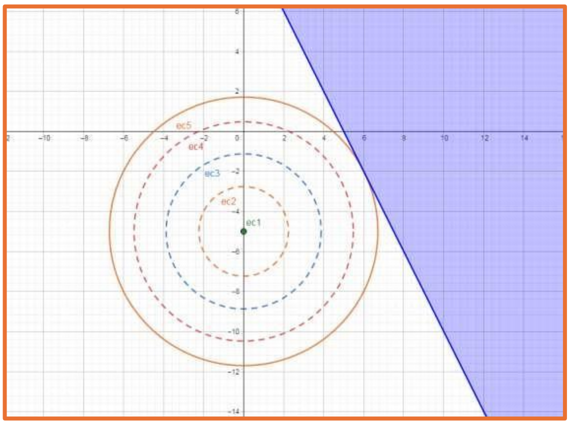
Interpretación geométrica

En el ejercicio anterior se pretende minimizar la función $f(x,y) = x^2 + (y+5)^2$ en el dominio indicado.

Para ello trazamos las curvas de nivel de la función

$$x^2 + (y+5)^2 = k$$

Se busca el mínimo valor de k de manera que la curva de nivel interseque la región factible



Adición de restricciones de no negatividad en el problema

Consideremos ahora los siguientes problemas

$$(P1)\ \begin{cases} max \quad z = f(x) \\ sa \quad g(x) \leq b \\ \qquad x \geq 0 \end{cases} \qquad\qquad (P2)\ \begin{cases} min \quad z = f(x) \\ sa \quad g(x) \geq b \\ \qquad x \geq 0 \end{cases}$$

Podríamos resolver estos problemas como hicimos antes considerando la restricción de no negatividad como una nueva restricción que lleva su propio multiplicador en la función de Lagrange

Otra forma es la siguiente

$$(P1)\ \begin{cases} max \quad z = f(x) \\ sa \quad g(x) \leq b \\ \qquad x \geq 0 \end{cases} \qquad\qquad (P2)\ \begin{cases} min \quad z = f(x) \\ sa \quad g(x) \geq b \\ \qquad x \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda[b - g(x)]$$

Condiciones necesarias P1	Condiciones necesarias P2
$\begin{cases} \mathcal{L}'_x \leq 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda \geq 0 \\ x\mathcal{L}'_x = 0 \\ \lambda\mathcal{L}'_\lambda = 0 \\ x \geq 0 \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \mathcal{L}'_x \geq 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda \leq 0 \\ x\mathcal{L}'_x = 0 \\ \lambda\mathcal{L}'_\lambda = 0 \\ x \geq 0 \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$

Condiciones suficientes P1	*Condiciones suficientes P2*
• *La función f cóncava, estrictamente cóncava o cuasicóncava* • *La función g convexa, estrictamente convexa o cuasiconvexa*	• *La función f convexa, estrictamente convexa o cuasiconvexa* • *La función g cóncava, estrictamente cóncava o cuasicóncava*

Ejemplo 33

$$\begin{cases} \boldsymbol{min} \ \ \boldsymbol{f(x, y) = x^2 + (y + 5)^2} \\ \quad \boldsymbol{sa} \qquad\qquad \boldsymbol{2x + y \geq 10} \\ \qquad\qquad\qquad\quad \boldsymbol{x \geq 0 \quad y \geq 0} \end{cases}$$

Condiciones necesarias

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = \boldsymbol{x^2 + (y + 5)^2} + \lambda[10 - 2x - y]$$

$\boldsymbol{(1)\ \mathcal{L}'_x = 2x - 2\lambda \geq 0}$

$\boldsymbol{(2)\ \mathcal{L}'_y = 2(y + 5) - \lambda \geq 0}$

$\boldsymbol{(3)\ \mathcal{L}'_\lambda = 10 - 2x - y \leq 0}$

(4) $x\mathcal{L}'_x = x[2x - 2\lambda] = 0$

(5) $y\mathcal{L}'_y = y[2(y + 5) - \lambda] = 0$

(6) $\lambda\mathcal{L}'_\lambda = \lambda[10 - 2x - y] = 0$

(7) $x \geq 0$

(8) $y \geq 0$

(9) $\lambda \geq 0$

En general en estos problemas comenzamos por ver si lambda es cero (por la ecuación $\lambda\mathcal{L}'_\lambda = 0$)

$\lambda = 0 \implies x = 0$ *(por (4))*

De la ecuación (5) obtenemos

$y = 0 \implies$ *(0;0) no verifica la condición (3)*

$y = -5 \implies$ *no verifica la condición (8)*

$\lambda > 0 \implies 2x + y = 10$ *(*)*

$x = 0 \wedge y = 0 \implies$ *no se verifica (*)*

$x = 0 \wedge y \neq 0 \implies$ *Si* $x = 0$ *en la condición (1) quedaría que* $\lambda < 0$ *lo cual es un absurdo*

$x \neq 0 \wedge y = 0 \implies$ *de (*) obtenemos que* $x = 5$ *y de (4) que* $\lambda = 5$. *Luego, el punto* $(5; 0)$ *con* $\lambda = 5$ *satisface las nueve condiciones necesarias*

$x \neq 0 \wedge y \neq 0 \implies$ *debemos resolver el siguiente sistema*

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda = 0 & \implies \quad \lambda = x \\ 2(y+5) - \lambda = 0 & \implies \quad \lambda = 2(y+5) \end{cases} \implies \quad x = 2(y+5)$$

Reemplazamos

$2x + y = 10 \implies 4(y + 5) + y = 10 \implies y = -2$ *no verifica la condición (8)*

Condiciones suficientes

$$f(x, y) = x^2 + (y + 5)^2$$

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz Hessiana es definida positiva por lo tanto la función es estrictamente convexa

$\mathbf{g(x, y) = 2x + y}$ es una función lineal, por lo tanto, es cóncava y convexa

Concluimos que el problema presenta en punto $(5;\ 0)$ un mínimo global único

Interpretación geométrica

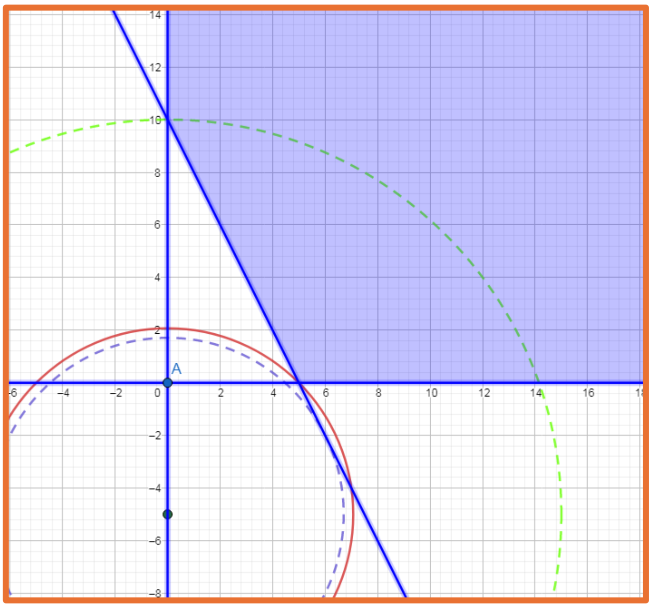
En el ejercicio anterior se pretende minimizar la función $\mathbf{f(x, y) = x^2 + (y + 5)^2}$ en el dominio indicado.

Para ello trazamos las curvas de nivel de la función

$$x^2 + (y + 5)^2 = k$$

Se busca el mínimo valor de k de manera que la curva de nivel interseque la región factible

Observen los puntos que fuimos obteniendo. Partimos de $\boldsymbol{\lambda} = 0$ y obtuvimos dos puntos $(0; -5)$ y el $(0; 0)$. Luego para $\boldsymbol{\lambda} > 0$ y obtuvimos dos puntos $(0; 10)$, $(6; -2)$ y el punto $(5; 0)$ donde el problema presenta el mínimo



Ejemplo 34

$$\begin{cases} \quad \boldsymbol{max\ \ f(x,y) = x + y} \\ \boldsymbol{sa} \qquad\qquad \boldsymbol{x^2 + 2y^2 \leq 6} \\ \qquad\qquad\quad \boldsymbol{x \geq 0 \quad\ y \geq 0} \end{cases}$$

Condiciones necesarias

$$\mathcal{L}(x, y\,, \lambda) = x + y + \lambda[6 - x^2 - 2\mathrm{y}^2]$$

(1) $\boldsymbol{\mathcal{L}'_x = 1 - 2\lambda x \leq 0}$

(2) $\boldsymbol{\mathcal{L}'_y = 1 - 4\lambda y \leq 0}$

(3) $\boldsymbol{\mathcal{L}'_\lambda = 6 - x^2 - 2y^2 \geq 0}$

(4) $\boldsymbol{x\mathcal{L}'_x = x[1 - 2\lambda x] = 0}$

(5) $\boldsymbol{y\mathcal{L}'_y = y[1 - 4\lambda y] = 0}$

(6) $\boldsymbol{\lambda\mathcal{L}'_\lambda = \lambda\left[6 - x^2 - 2y^2\right] = 0}$

(7) $\boldsymbol{x \geq 0}$

(8) $\boldsymbol{y \geq 0}$

(9) $\boldsymbol{\lambda \geq 0}$

Comencemos a resolver

$\boldsymbol{\lambda = 0} \implies$ no se verifican (1) ni (2)

$\boldsymbol{\lambda > 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + 2y^2 = 6}$ (*)

$\boldsymbol{x = 0 \ \wedge \ y = 0} \quad \Longrightarrow$ no se verifica (*)

$\boldsymbol{x = 0 \ \wedge \ y \neq 0} \quad \Longrightarrow$ Si $\boldsymbol{x = 0}$ la condición (1) no se verifica

$\boldsymbol{x \neq 0 \ \wedge \ y = 0} \quad \Longrightarrow$ Si $\boldsymbol{y = 0}$ la condición (2) no se verifica

$\boldsymbol{x \neq 0 \ \wedge \ y \neq 0} \quad \Longrightarrow$ debemos resolver el siguiente sistema

$$\boldsymbol{\begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0 & \Longrightarrow \quad \lambda = \dfrac{1}{2x} \\ 1 - 4\lambda y = 0 & \Longrightarrow \quad \lambda = \dfrac{1}{4y} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = 2y}$$

Reemplazamos

$$\boldsymbol{x^2 + 2y^2 = 6 \quad \Longrightarrow \quad 4y^2 + 2y^2 = 6 \quad \Longrightarrow \quad y^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad y = 1}$$

Luego, el punto crítico es $\boldsymbol{(2;1)}$ con $\boldsymbol{\lambda = \frac{1}{4}}$

Condiciones suficientes

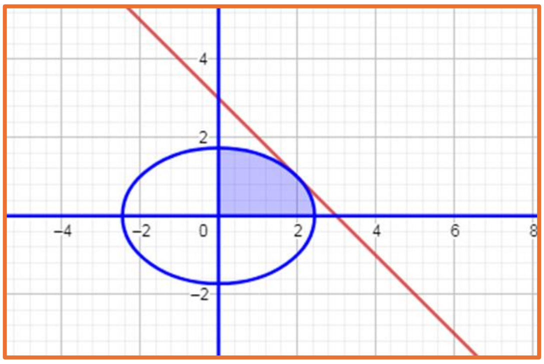
$\boldsymbol{f(x,y) = 2x + y}$ es una función lineal, por lo tanto, es cóncava y convexa

$\boldsymbol{g(x,y) = x^2 + 2y^2}$

$$\boldsymbol{Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

La matriz Hessiana es definida positiva por lo tanto la función es estrictamente convexa

Concluimos que el problema presenta en punto $\boldsymbol{(2;1)}$ un máximo global



Ejemplo 35

La función de producción de una empresa es de tipo Cobb – Douglas $f(K,L) = K^{\alpha}L^{\beta}$ donde $\alpha > 0$ y $0 < \beta < 1$, K es el capital y L trabajo ($K > 0. L > 0$). Supongamos que los precios de capital y trabajo están dados por $p_K > 0$ y $p_L > 0$ respectivamente.

Se desea minimizar el costo cuando la producción debe ser al menos de Q_0 unidades de producto ($Q_0 > 0$)

a) Plantear las condiciones necesarias de Kuhn- Tucker para este problema

b) Sabiendo que $K > 0$ y $L > 0$, ¿cómo quedan las condiciones necesarias? ¿Puedes ser lambda igual a cero?

c) Calcular los puntos críticos del problema planteado

d) Comprobar las condiciones suficientes y concluir

e) ¿Cómo impacta en el costo mínimo un incremento en p_K o de p_L? ¿Y un aumento de Q_0?

Resolución

a) El problema a resolver es

$$\begin{cases} \min C(K,L) = p_K K + p_L L \\ sa \quad K^\alpha L^\beta \geq Q_0 \\ \quad K \geq 0 \quad L \geq 0 \end{cases}$$

La función de Lagrange para este problema es

$$\mathcal{L}(K,L,\lambda) = p_K K + p_L L + \lambda[Q_0 - K^\alpha L^\beta]$$

Condiciones necesarias

(1) $\mathcal{L}'_K = p_K - \lambda\alpha K^{\alpha-1}L^\beta \geq 0$

(2) $\mathcal{L}'_L = p_L - \lambda\beta K^\alpha L^{\beta-1} \geq 0$

(3) $\mathcal{L}'_\lambda = Q_0 - K^\alpha L^\beta \leq 0$

(4) $K\,\mathcal{L}'_K = K[p_K - \lambda\alpha K^{\alpha-1}L^\beta] = 0$

(5) $L\mathcal{L}'_L = L[p_L - \lambda\beta K^\alpha L^{\beta-1}] = 0$

(6) $\lambda\,\mathcal{L}'_\lambda = \lambda[Q_0 - K^\alpha L^\beta] = 0$

(7) $K \geq 0$

(8) $L \geq 0$

(9) $\lambda \geq 0$

b) Si $K > 0$ y $L > 0$

Condiciones necesarias

(1) $\mathcal{L}'_K = p_K - \lambda\alpha K^{\alpha-1}L^\beta = 0$

(2) $\mathcal{L}'_L = p_L - \lambda\beta K^\alpha L^{\beta-1} = 0$

(3) $\mathcal{L}'_\lambda = Q_0 - K^\alpha L^\beta \leq 0$

(4) $\lambda\,\mathcal{L}'_\lambda = \lambda[Q_0 - K^\alpha L^\beta] = 0$

(5) $\lambda \geq 0$

Observemos que λ no puedes ser cero ya que si lo fuera en las primeras dos condiciones p_K y p_L serían cero. Entonces:

(1) $\mathcal{L}'_K = p_K - \lambda\alpha K^{\alpha-1}L^\beta = 0$

(2) $\mathcal{L}'_L = p_L - \lambda\beta K^\alpha L^{\beta-1} = 0$

(3) $\mathcal{L}'_\lambda = Q_0 - K^\alpha L^\beta = 0$

c) De las dos primeras ecuaciones se obtiene

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{p_K}{\alpha K^{\alpha-1} L^{\beta}} \\ \lambda = \dfrac{p_L}{\beta K^{\alpha} L^{\beta-1}} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \frac{p_K}{\alpha K^{\alpha-1} L^{\beta}} = \frac{p_L}{\beta K^{\alpha} L^{\beta-1}} \quad \Longrightarrow \quad K = \frac{\alpha p_L}{\beta p_K} L$$

Reemplazando en la restricción

$$K^{\alpha} L^{\beta} = Q_0 \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{\alpha p_L}{\beta p_K} L\right]^{\alpha} L^{\beta} = Q_0 \quad \Longrightarrow \quad L^{\alpha+\beta} = Q_0 \left[\frac{\beta p_K}{\alpha p_L}\right]^{\alpha}$$

$$\boxed{L^* = Q_0^{1/\alpha+\beta} \left[\frac{\beta p_K}{\alpha p_L}\right]^{\alpha/\alpha+\beta}}$$

$$\boxed{K^* = Q_0^{1/\alpha+\beta} \left[\frac{\alpha p_L}{\beta p_K}\right]^{\beta/\alpha+\beta}}$$

$$\boxed{\lambda^* = \frac{p_K}{\alpha} Q_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}-1} \left[\frac{\alpha p_L}{\beta p_K}\right]^{\beta/\alpha+\beta}}$$

d) Condiciones suficientes

- La función de costo es lineal por lo tanto es cóncava y convexa
- La función de producción es una función de Cobb-Douglas por lo tanto cuasicóncava

Concluimos que el problema presenta en el punto crítico un mínimo global

e) Teorema de la envolvente

$\frac{\partial C_{min}}{\partial p_K} = K^* > 0$ si aumenta p_K aumenta el costo mínimo

$\frac{\partial C_{min}}{\partial p_L} = L^* > 0$ si aumenta p_L aumenta el costo mínimo

$\frac{\partial C_{min}}{\partial Q_0} = \lambda^* > 0$ si aumenta Q_0 aumenta el costo mínimo

BIBLIOGRAFÍA

- Barbolla, R.; Cerdá, E.; Sanz, P. (2001) *Optimización. Cuestiones, ejercicios y aplicaciones a la economía*. Prentice Hall, Madrid.
- Battocchio, M. ;Bianco, M.J.; García Fronti, J. ; Herrera, P.; Rodriguez, E. (2022) *Notas de Matemática para Economistas.* Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires http://www.economicas.uba.ar/wp-content/uploads/2022/05/notas-de-matem%C3%A1tica-para-economistas.pdf
- Bernardello, A.; Bianco, M.J.; Casparri, M.T.; García Fronti, J.; Marzana, S. (2010) *Matemática para Economistas con Excel y Matlab*. Editorial Omicron System, Buenos Aires.
- Bianco M.J., García R., Zorzoli G., Muñoz A., Santos J. (2003) *Matemática para la Economía, Administración y Dirección de Empresas*. Editorial Universitas, Madrid.
- Burgos Román, J. de. (2008). *Cálculo infinitesimal de varias variables* (2.ª ed.). McGraw-Hill Interamericana, Madrid.
- Chiang, Alpha (2006) *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*. Mc Graw – Hill, México.
- Escobar Uribe, D. (2018). Economía matemática. Segunda edición. Universidad de los Andes, Colombia.
- Haeussler, Ernest (2008) Matemáticas para Administración y Economía. Prentice Hall, México,
- Larson, R., & Edwards, B. (2018). *Matemáticas III: Cálculo de varias variables* (1.ª ed.). Cengage Learning.
- Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (2004). *Cálculo vectorial* (5.ª ed.). Addison-Wesley Iberoamericana.
- Perez Grassa, I.; Minguillón, E.; Jarne, G. (2001) Matemática para la Economía. Mc Graw Hill, Madrid
- Stewart, J. (2018). Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas. México: Cengage Learning.