Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

CMA
IADCOM - UBA
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN METODOS CUANTITATIVOS APLICADOS A LA ECONOMÍA Y LA GESTIÓN

DIRECTORA: PROFESORA EMÉRITA DRA. MARÍA TERESA CASPARRI

NOTAS DE ÁLGEBRA TEÓRICO - PRÁCTICAS

CÁTEDRA DE ÁLGEBRA

PRÓLOGO DE MARÍA TERESA CASPARRI

PRIMERA EDICIÓN

ALICIA FRAQUELLI[1]
ANDREA GACHE[2]

[1] Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas. Cátedra de Álgebra. Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.
[2] Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas. Cátedra de Álgebra .Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.

Fraquelli, Alicia Delia
Notas de álgebra teórico-prácticas: cátedra de Álgebra / Alicia Delia Fraquelli; Andrea Leonor Gache. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas, 2019.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-950-29-1771-9

1. Álgebra. I. Gache, Andrea Leonor. II. Título.
CDD 512

Autores:

Alicia Fraquelli

Andrea Gache

Editor Responsable
Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires
Av. Córdoba 2122, 2do. Piso
Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.
Contacto: cma@fce.uba.ar
Tel: 0054 011 5285-6539

ISBN 978-950-29-1771-9

9 789502 917719

Autoridades

Universidad de Buenos Aires

Rector: Dr. Alberto E. Barbieri

Facultad de Ciencias Económicas

Decano: Dr. Ricardo Pahlen Acuña

Instituto de Investigaciones en Administración, Contabilidad y Matemática

Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión

Directora: Dra. María Teresa Casparri

Proyecto de Formación Docente en técnicas cuantitativas aplicadas (TCA)

Directora: Dra. María José Bianco

Subdirector: Roberto Armando García

Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión (CMA - IADCOM)

Inaugurado en el año 2001, el **Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión (CMA)** es actualmente parte del Instituto de Investigaciones en Administración, Contabilidad y Métodos Cuantitativos para la Gestión (IADCOM) de la Universidad de Buenos Aires, con sede en la Facultad de Ciencias Económicas.

El Centro se ha especializado en el estudio del riesgo de diversas actividades económicas y financieras en el contexto de países emergentes, haciendo especial énfasis en el bloque latinoamericano y particularmente en el caso de Argentina.

A lo largo del tiempo el Centro ha explotado diversos marcos conceptuales para la estimación del riesgo de activos financieros, proyectos de inversión real y de sectores económicos en su conjunto, en el marco de los principios de la gobernanza macroprudencial responsable.

CMA
IADCOM - UBA

Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Buenos Aires
Av. Córdoba 2122 2º Piso
Página web: www.economicas.uba.ar/cma
Teléfono: 5285-6539 – Correo Electrónico: cma@fce.uba.ar

CONTENIDOS

INDICE

CAPÍTULO 5

APÉNDICES

PRÓLOGO

Notas de Álgebra Teórico – Prácticas es el resultado de la labor de docencia e investigación desarrollada por las profesoras Alicia Fraquelli y Andrea Gache de nuestro Departamento Pedagógico de Matemática, en articulación con el Programa de Formación Docente en Métodos Cuantitativos del Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos aplicados a la Economía y la Gestión (IADCOM), de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires.

Para mí es muy grato tener el honor de prologar este trabajo de las profesoras, producto de más de 20 años de estar al frente de cursos de Algebra, con el fin de presentar a los alumnos un material procesado didácticamente para su fácil comprensión pero con la rigurosidad que la asignatura exige.

Debo destacar el entusiasmo y la dedicación con las que Alicia y Andrea asumen diariamente su tarea docente, siendo este trabajo una extensión de lo que realizan dentro del aula, razón por la cual les deseo el mayor de los éxitos, ya que considero muy importante que este material se publique en la Facultad y permita el acceso libre de los estudiantes.

Profesora Emérita Dra. María Teresa Casparri

CAPÍTULO 1

VECTORES-RECTA-PLANO

MAPA CONCEPTUAL

Mapa conceptual Vectores-Recta-Plano

Escaneando el QR observarás el mapa conceptual del Capítulo 1

VECTORES

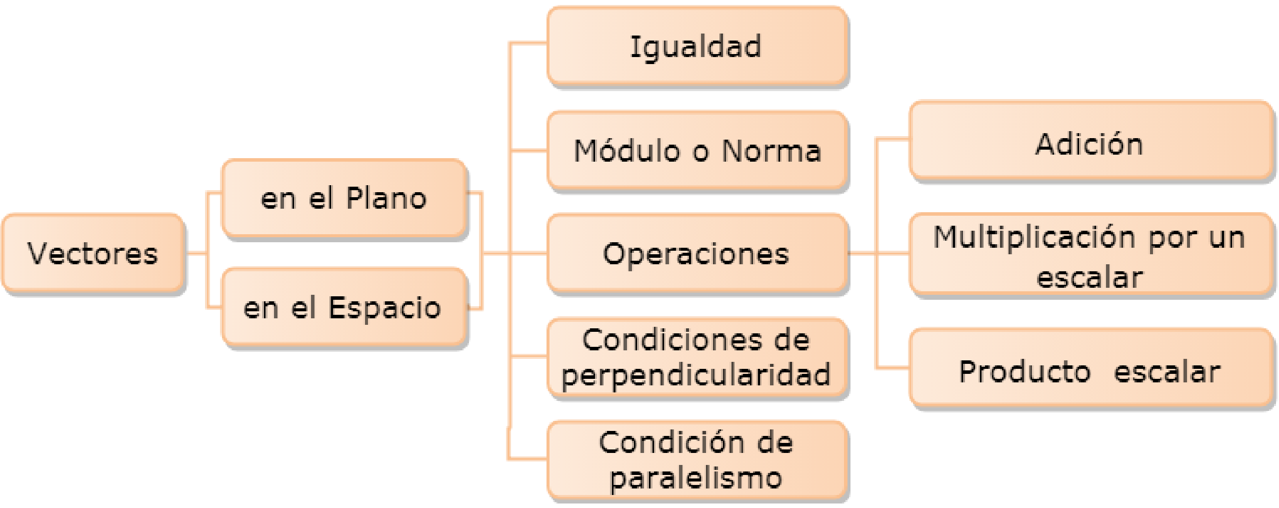
Los vectores permiten representar situaciones de la vida cotidiana vinculadas a la física: como la velocidad de un móvil, el peso de un cuerpo, la dirección del viento, entre otras, como así también sus aplicaciones en la matemática y la economía son múltiples, algunas de las cuales serán abordadas más adelante.

A través de los contenidos de este capítulo intentaremos ayudarlos a adquirir conocimientos teóricos y prácticos que permitan utilizar el álgebra vectorial en la resolución de problemas aplicados a fenómenos sociales y/o económicos.

Vamos a estudiar a los vectores, tanto en el plano como en el espacio. Para ello es necesario en primer lugar identificarlos gráfica y analíticamente mediante pares y ternas ordenadas de números reales. Ya que estos objetos matemáticos, los vectores, pueden representarse geométricamente a partir de puntos en el espacio bidimensional y tridimensional.

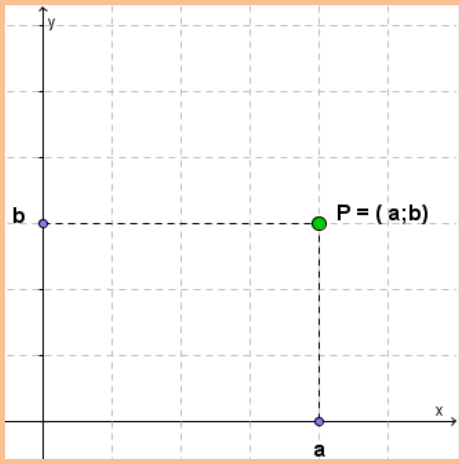
Una vez definidos a partir de su dirección, sentido y módulo definiremos la relación de igualdad y las principales operaciones y sus propiedades: adición de vectores, multiplicación por un escalar, producto escalar de vectores. Analizaremos también la posición relativa entre dos vectores definiendo las condiciones de paralelismo y perpendicularidad.

Todo lo anterior les permitirá iniciar el estudio de los conceptos de recta y plano.



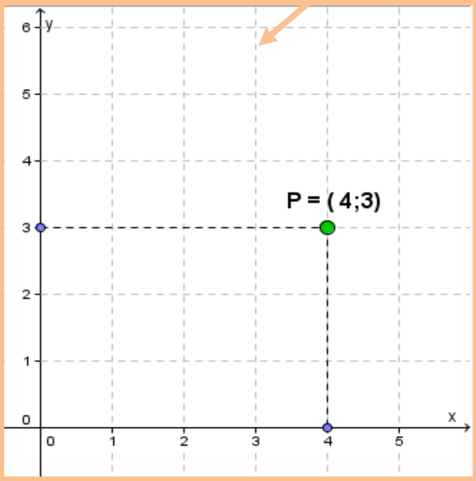
REPRESENTACIÓN DE PUNTOS EN $\Re^2$ Y $\Re^3$

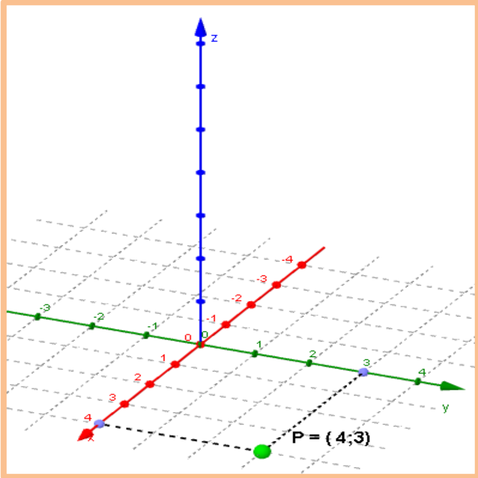
Los elementos de $\Re^2$, se asocian con los puntos del plano, cada punto $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$ se asocia con un punto de coordenada $\boldsymbol{a}$ en el eje $\boldsymbol{x}$ y la coordenada $\boldsymbol{b}$ en el eje $\boldsymbol{y}$.



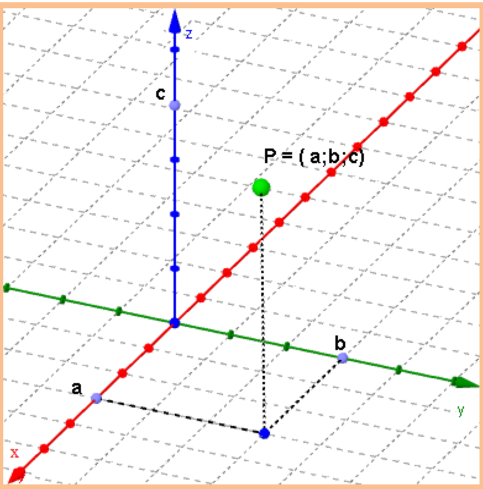
Ejemplo

La representación del punto $\boldsymbol{P}=(4;3)$ *de* $\Re^2$

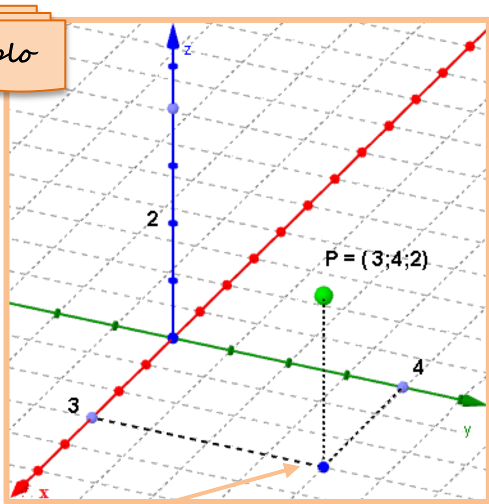




Los elementos de $\Re^3$, se asocian con los puntos del espacio, cada punto $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\boldsymbol{c})$ se asocia con un punto de coordenada $\boldsymbol{a}$ en el eje $\boldsymbol{x}$, la coordenada $\boldsymbol{b}$ en el eje $\boldsymbol{y}$ la coordenada $\boldsymbol{c}$ en el eje $\boldsymbol{z}$

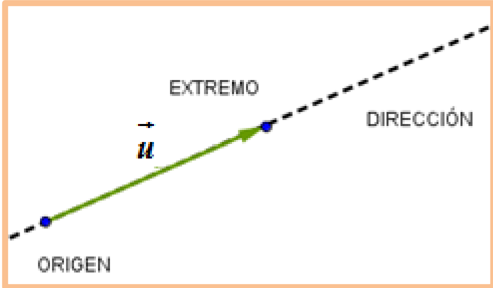


Ejemplo



La representación del punto $P=(3;4;2)$ *de* $\Re^3$

VECTORES EN $\Re^2$ Y $\Re^3$



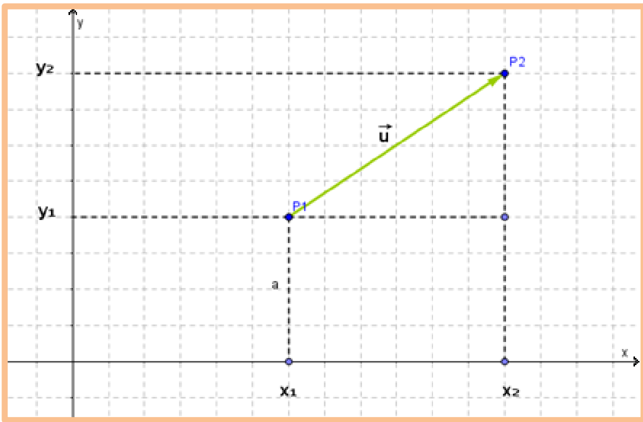
Un vector es un segmento orientado que se representa gráficamente por una flecha que va desde el punto llamado ***origen*** al punto llamado ***extremo***.
La ***longitud del vector*** es su ***módulo o norma***.
La ***recta a la que pertenece*** da la ***dirección*** y la *orientación* nos indica el ***sentido***. Por lo tanto un vector tiene **origen**, **módulo**, **dirección** y **sentido**.
Un vector se simboliza como $\vec{u}$. El módulo se indica $|\vec{u}|$.

COMPONENTES CARTESIANAS O RECTANGULARES DE UN VECTOR

En $\Re^2$:

Dado el vector $\vec{u}$ definido por los puntos $P_1=(x_1;y_1)$ y $P_2=(x_2;y_2)$ las componentes cartesianas o rectangulares son las proyecciones de ese vector sobre los ejes de coordenadas: $u_x = x_2 - x_1$, $u_y = y_2 - y_1$
Se puede definir un vector como un par ordenado de números reales. Esos números son las componentes del vector, en el orden ***x***, ***y***.
Es decir:

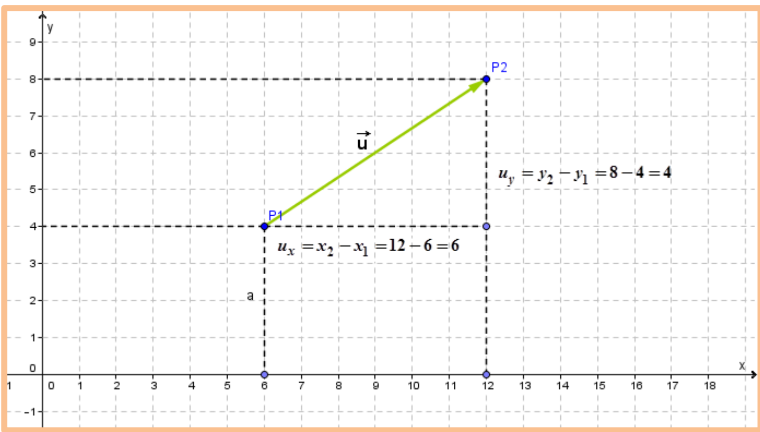
$$\boxed{\vec{u}=(u_x;u_y)=(x_2-x_1;y_2-y_1)}$$



Ejemplo 1

➩ Sean los puntos $P_1=(6;4)$ y $P_2=(12;8)$. Las coordenadas del vector definido por ellos son:

$$\vec{u}=(u_x;u_y)=(x_2-x_1;y_2-y_1)=(6;4)$$



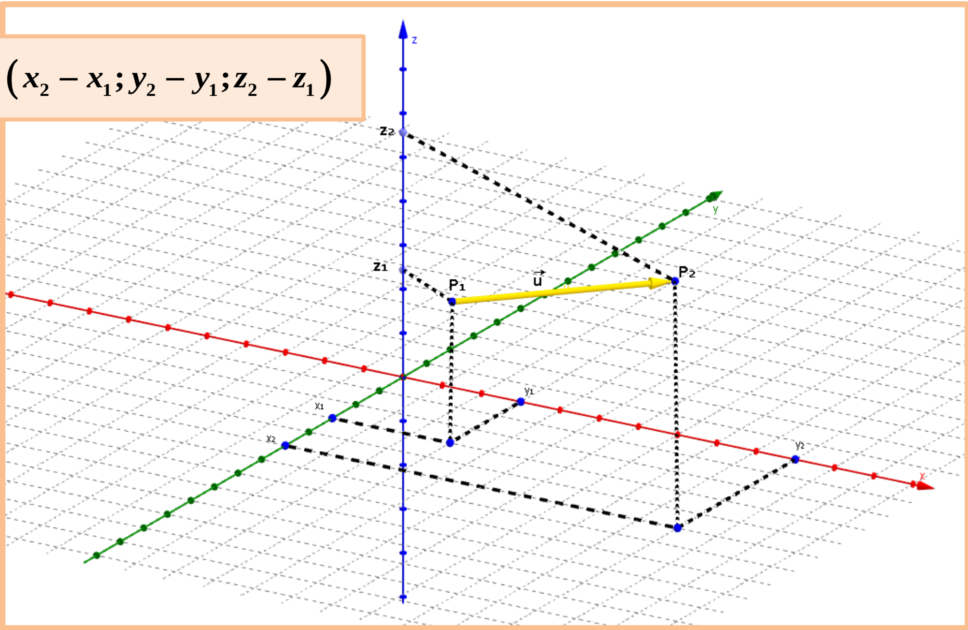
En $\Re^3$

Dado el vector $\vec{u}$ definido por los puntos $P_1=(x_1;y_1;z_1)$ y $P_2=(x_2;y_2;z_2)$ las componentes cartesianas o rectangulares son las proyecciones de ese vector sobre los ejes de coordenadas: $u_x = x_2-x_1$, $u_y=y_2-y_1$, $u_z=z_2-z_1$

Se puede definir un vector como una terna ordenada de números reales. Esos números son las componentes del vector, en el orden ***x***, ***y***, ***z***.

Es decir:

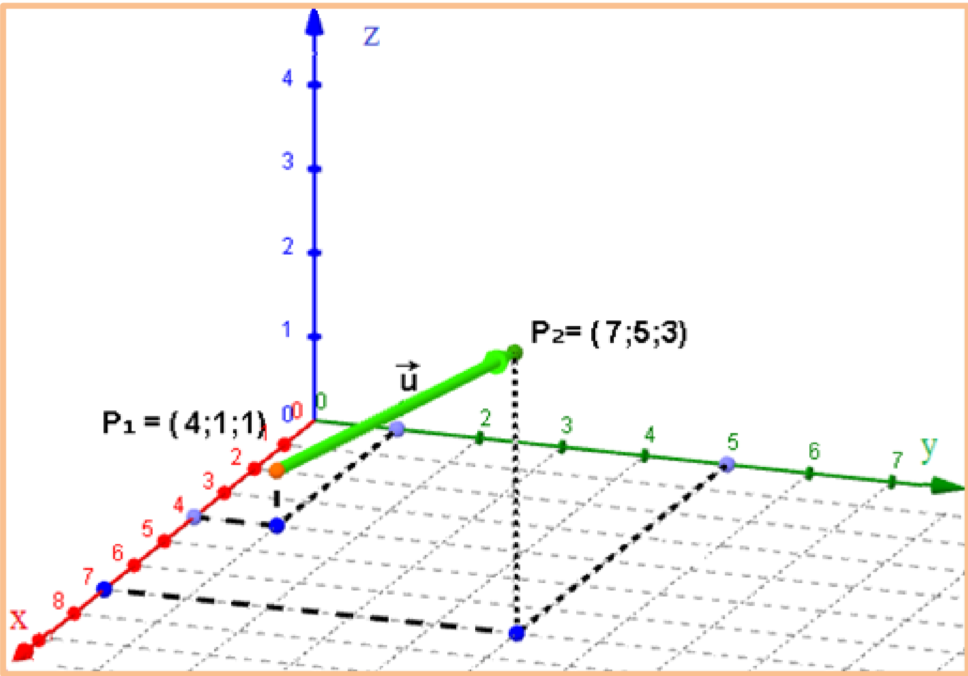
$$\vec{u}=(u_x;u_y;u_z)=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$$



Ejemplo 1

➩ Sean los puntos $P_1=(4;1;1)$ y $P_2=(7;5;3)$. Las coordenadas del vector definido por ellos son:

$$\vec{u}=(u_x;u_y;u_z)=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)=(7-4;5-1;3-1)=(3;4;2)$$



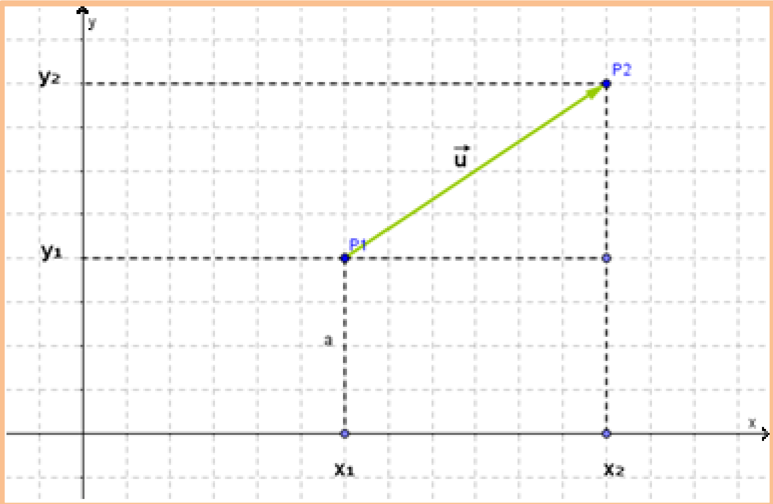
MÓDULO O NORMA DE UN VECTOR

Dado el vector $\vec{u}=\left(u_x;u_y\right)=\left(x_2-x_1;y_2-y_1\right)$, definido por los puntos $P_1=\left(x_1;x_2\right)$ y $P_2=\left(y_1;y_2\right)$, aplicando el teorema de Pitágoras podemos afirmar que:

$$|\vec{u}|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$$

En el espacio el módulo de un vector se define:

$$|\vec{u}|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}$$



Ejemplo 1

Tomando como ejemplo el vector de $\Re^2$ (página 5) de componentes $\vec{u}=\left(u_x;u_y\right)=\left(6;4\right)$, su módulo es:

$$|\vec{u}|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}=\sqrt{\left(12-6\right)^2+\left(8-4\right)^2}=\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}=2.\sqrt{13}$$

Ejemplo 2

Tomando como ejemplo el vector de $\Re^3$ (página 7) de componentes $\vec{u}=\left(u_x;u_y;u_z\right)=\left(3;4;2\right)$, su módulo es:

$$|\vec{u}|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}=\sqrt{3^2+4^2+2^2}=\sqrt{9+16+4}=\sqrt{29}$$

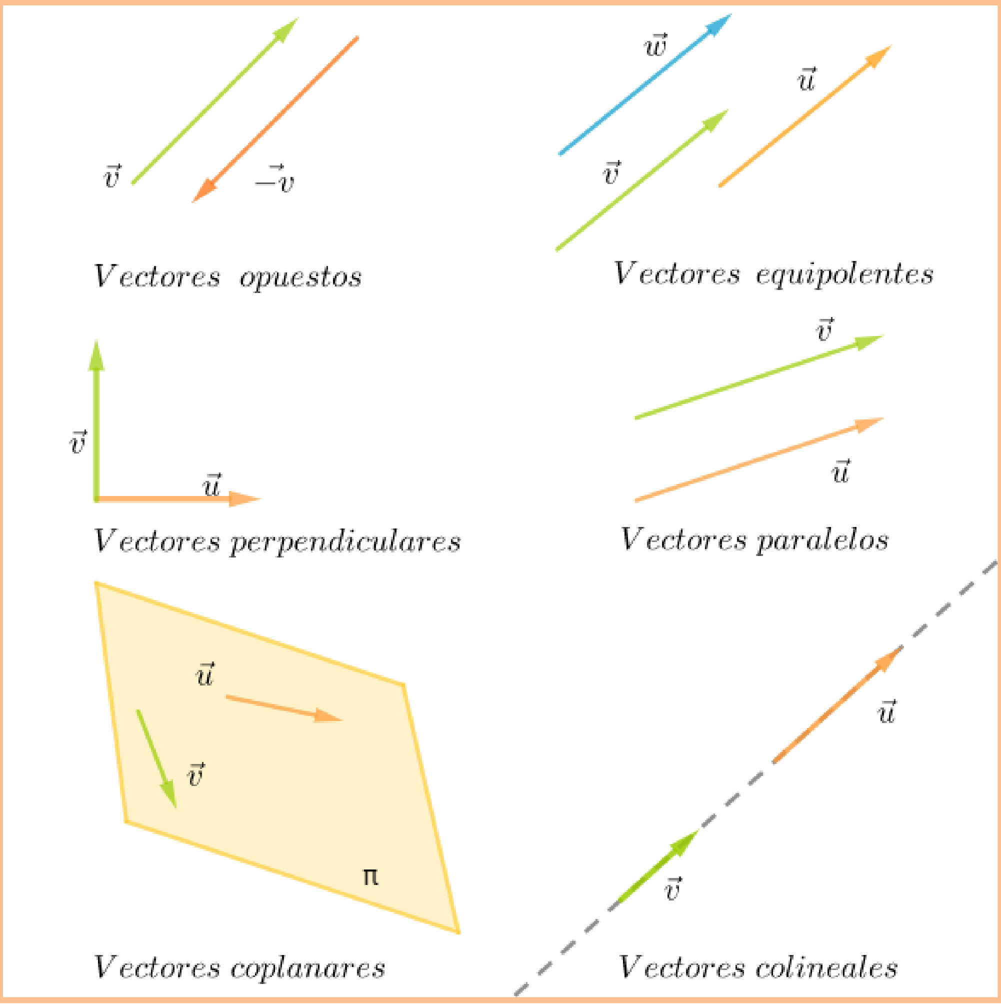
CLASIFICACIÓN DE VECTORES

Los vectores podemos clasificarlos en:

- ✓ *Vectores libres:* no están aplicados en ningún punto en particular.
- ✓ *Vectores fijos o ligados:* están aplicados en un punto en particular.

Según su posición, dirección, sentido y módulo:

- ✓ *Vectores opuestos:* Son los vectores que tiene igual dirección y módulo pero, sentido contario.
- ✓ *Vectores equipolentes:* Son vectores libres iguales en magnitud, dirección y sentido.
- ✓ *Vector nulo:* Es el vector de módulo 0
- ✓ *Vectores unitarios:* Son vectores de módulo 1
- ✓ *Vectores perpendiculares:* Tienen direcciones perpendiculares
- ✓ *Vectores paralelos:* Tiene direcciones paralelas
- ✓ *Vectores coplanares:* Están contenidos en el mismo plano.
- ✓ *Vectores colineales:* Están contenidos en una misma recta.



OPERACIONES CON VECTORES

ADICIÓN

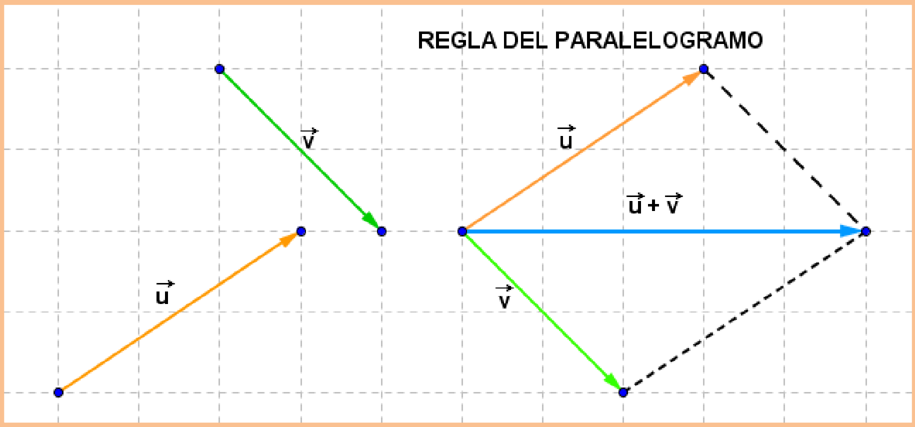
El ***vector suma*** o vector resultante de varios vectores libres es el que tiene por componentes la suma de las componentes correspondientes de los sumandos.

$$\vec{u}=\left(u_x;u_y\right)\ ,\ \vec{v}=\left(v_x;v_y\right)\ ,\ \vec{u}+\vec{v}=\left(u_x+v_x\ ;\ u_y+v_y\right)$$

1) REGLA DEL PARALELOGRAMO

Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, si se toman vectores equipolentes a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ con el mismo origen, se define al vector suma $\vec{u}+\vec{v}$ como la diagonal de paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que pasa por dicho origen.

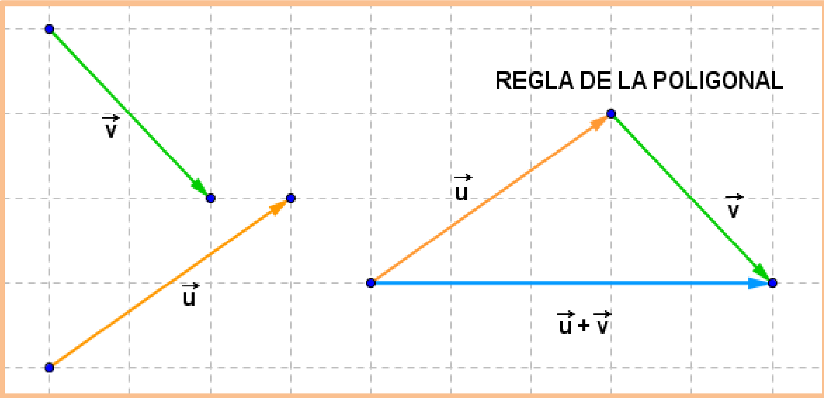
Ejemplo



2) REGLA DE LA POLIGONAL

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, si se lleva a partir de un punto cualquiera del plano un vector equipolente a $\vec{u}$ y desde su extremo un vector equipolente a $\vec{v}$, el vector suma $\vec{u}+\vec{v}$ es el que tiene como origen el origen del vector $\vec{u}$ y como extremo el extremo del vector $\vec{v}$.

Ejemplo



Observación

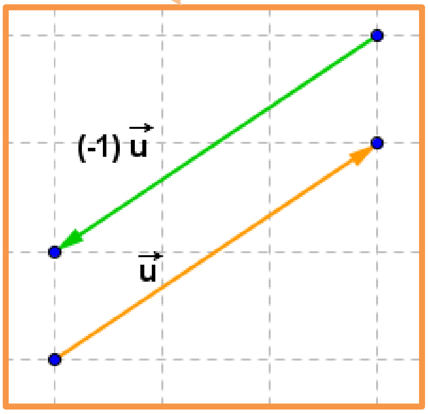
El vector suma es el mismo, independiente del método aplicado para hallarlo.

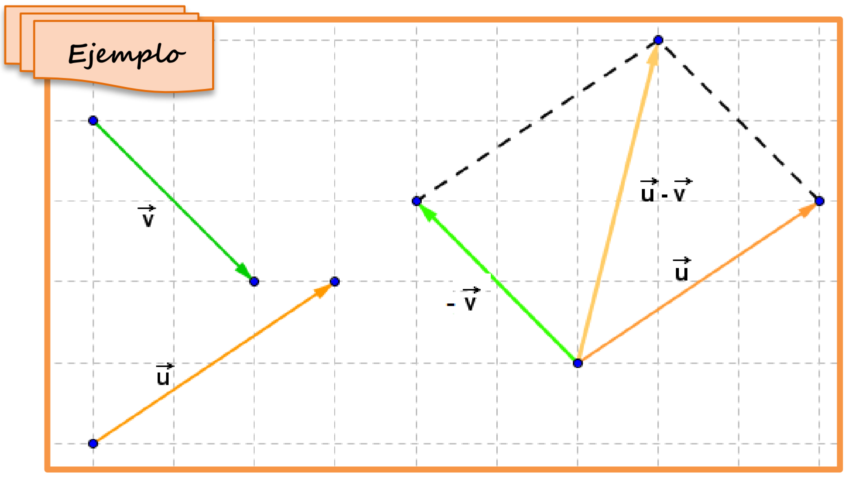
SUSTRACCIÓN

El vector diferencia de dos vectores es el que tiene por componentes la resta de las componentes correspondientes a ambos vectores. Para restar dos vectores se suma al minuendo el vector opuesto al sustraendo. Se puede emplear cualquiera de los métodos descriptos para la adición.

$$\vec{u}=\left(u_x;u_y\right)\ ,\ \vec{v}=\left(v_x;v_y\right)\ ,\ \vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+\left(-\vec{v}\right)=\left(u_x+\left(-v_x\right)\ ;\ u_y+\left(-v_y\right)\right)=\left(u_x-v_x\ ;\ u_y-v_y\right)$$

Aclaración:
El vector opuesto es el que tiene igual módulo y dirección, pero sentido contrario





MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

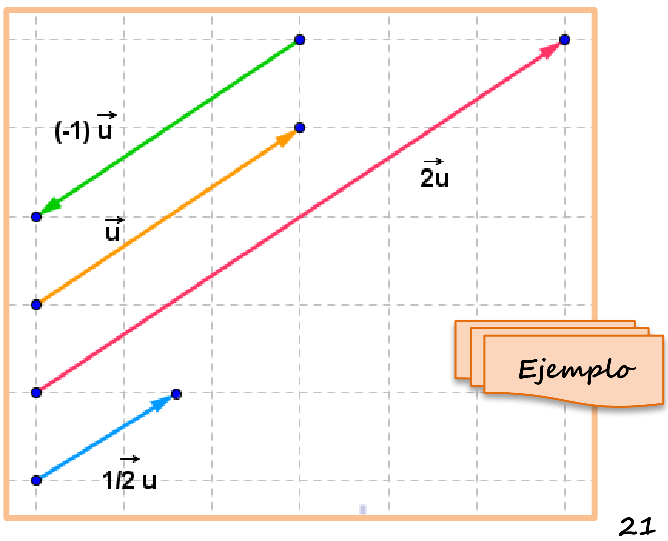
El producto $\lambda.\vec{u}$ y $\lambda \in \Re - \left\{0\right\}$ es otro vector cuyos elementos son:

Módulo $|\lambda.\vec{u}| = |\lambda|.|\vec{u}|$

Dirección $\lambda.\vec{u}$ es igual a la dirección de $\vec{u}$

Sentido

- Si $\lambda < 0$ el sentido de $\lambda.\vec{u}$ es opuesto al del vector $\vec{u}$
- Si $\lambda > 0$ el sentido de $\lambda.\vec{u}$ es igual al del vector $\vec{u}$
- Cuando $\lambda = 0$ se obtiene el vector nulo
- Cuando $\lambda = -1$ entonces $\lambda\vec{u} = -\vec{u}$



PRODUCTO ESCALAR

El producto escalar de dos vectores en $\Re^n$ es la función:

$$\text{“}\bullet\text{”}: \Re^n \times \Re^n \to \Re \,/\, \vec{x} \bullet \vec{y} = x_1 . y_1 + x_2 . y_2 + \ldots + x_n . y_n$$

Donde: $\vec{x} = (x_1;\ x_2;\ x_3;\ \ldots\ ;\ x_n) \in \Re^n$ e $\vec{y} = (y_1;\ y_2;\ y_3;\ \ldots\ ;\ y_n) \in \Re^n$

Ejemplo

Sean los vectores $\vec{a} = (1;2)$, $\vec{b} = (5;4)$ y $\vec{c} = (-5;9)$ hallar el producto escalar indicado:

a) $\vec{a} \bullet \vec{b}$ *b)* $\vec{a} \bullet \vec{c}$ *c)* $\vec{c} \bullet \vec{b}$ *d)* $\vec{a} \bullet \vec{a}$

a) $\vec{a} \bullet \vec{b} = (1;2) \bullet (5;4) = 1.5 + 2.4 = 5 + 8 = 13 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a} \bullet \vec{b} = 13}$

b) $\vec{a} \bullet \vec{c} = (1;2) \bullet (-5;9) = 1.(-5) + 2.9 = -5 + 18 = 13 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a} \bullet \vec{c} = 13}$

c) $\vec{c} \bullet \vec{b} = (-5;9) \bullet (5;4) = (-5).5 + 9.4 = -25 + 36 = 11 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{c} \bullet \vec{b} = 11}$

d) $\vec{a} \bullet \vec{a} = (1;2) \bullet (1;2) = 1.1 + 2.2 = 1 + 4 = 5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a} \bullet \vec{a} = 5}$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR

1. Conmutatividad

$\vec{x} \bullet \vec{y} = \vec{y} \bullet \vec{x}$

2. Distributividad respecto de la adición de vectores:

$\vec{x} \bullet (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \bullet \vec{y} + \vec{x} \bullet \vec{z}$

3. Asociatividad mixta

$\alpha (\vec{x} \bullet \vec{y}) = (\alpha \vec{x}) \bullet \vec{y}$

4. El producto escalar de un vector no nulo por sí mismo es siempre positivo

$\vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{x} \bullet \vec{x} > 0$

5. Dos vectores son ortogonales si y sólo si su producto escalar es nulo

$\vec{x}$ es ortogonal a $\vec{y} \iff \vec{x} \bullet \vec{y} = 0$

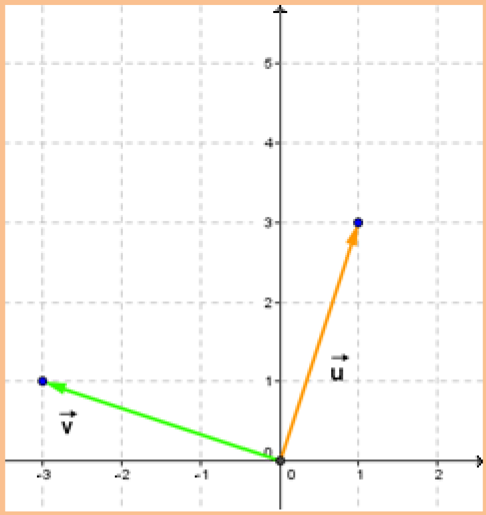
CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD

Ejemplos

Dados los vectores $\vec{u}=(1;\ 3)$ y $\vec{v}=(-3;\ 1)$ de $\Re^2$

a) Representarlos gráficamente. ¿Qué ángulo forman entre ellos?

Observa que los vectores son ortogonales, ya que forman un ángulo de 90°



b) Verificar que su producto escalar es igual a **0**.

$$\vec{u}\bullet\vec{v}=(1;3)\bullet(-3;1)\ =\ 1.(-3)+3.1=(-3)+3=0\quad\Rightarrow\ \boxed{\vec{u}\bullet\vec{v}=0}$$

Hallar el valor de x, para que el vector $\vec{v}=(4;-1;\ 5)$ sea ortogonal al vector $\vec{u}=(x;-2;\ 2)$ es:

$$\vec{u}\bullet\vec{v}=(x;\ -2;2)\bullet(4;-1;5)\ =\ 4x+2+10=\ 0\Rightarrow 4x+12=0\Rightarrow\boxed{x=-3}$$

CONDICIÓN DE PARALELISMO

Dos vectores son paralelos si sus componentes son proporcionales $\boxed{\vec{u}\,/\!/\,\vec{v}\Leftrightarrow\vec{v}=\lambda.\vec{u}}$

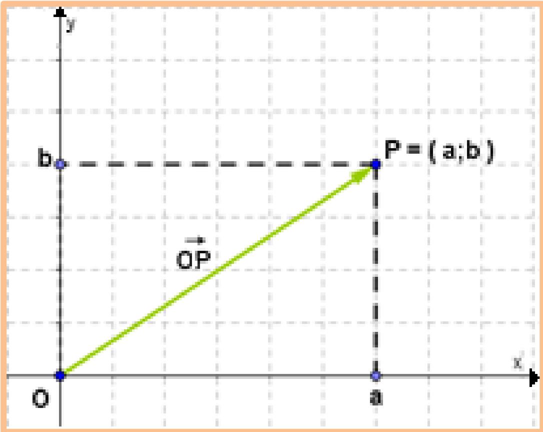
Ejemplo

Los vectores $\vec{u}=(1;3)$ y $\vec{v}=(3;9)$ de $\Re^2$ son paralelos ya que sus componentes son proporcionales $\dfrac{u_x}{u_y}=\dfrac{v_x}{v_y}=\lambda\rightarrow\boxed{\dfrac{1}{3}=\dfrac{3}{9}=\lambda}$

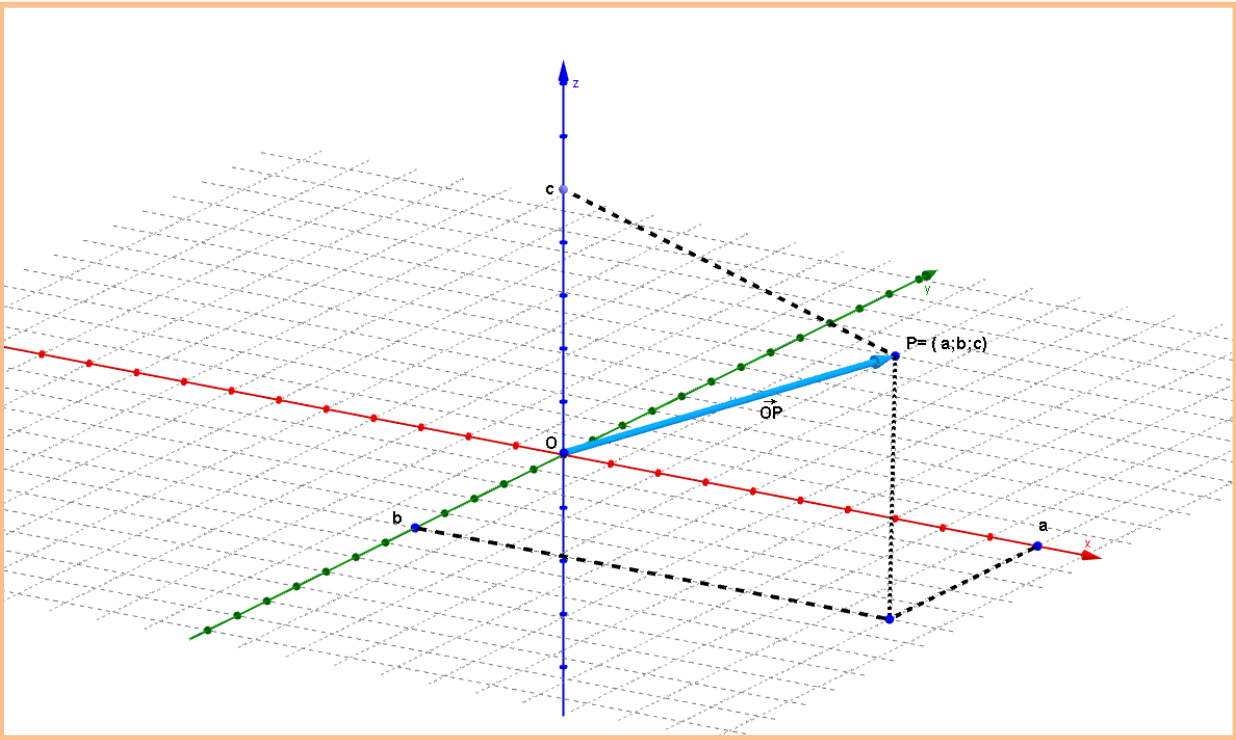
VECTOR ASOCIADO A UN PUNTO

Se llama así al vector que tiene origen en el origen de coordenadas y extremos en el punto $\boldsymbol{P}$

En $\Re^2$ sean los puntos de coordenadas $\boldsymbol{O}=(0;0)$ y $\boldsymbol{P}=(a;b)$ el vector asociado al punto $\boldsymbol{P}$ es el vector $\overrightarrow{OP}=(a;b)$ porque $\overrightarrow{OP}=(a-0;b-0)=(a;b)$

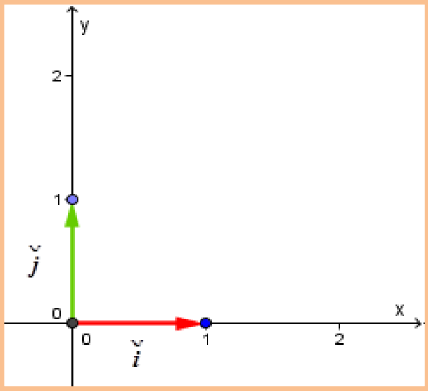


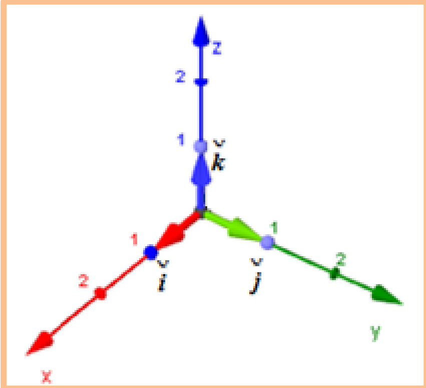
En $\Re^3$ sean los puntos de coordenadas $\boldsymbol{O}=(0;0;0)$ y $\boldsymbol{P}=(a;b;c)$ el vector asociado al punto $\boldsymbol{P}$ es el vector $\overrightarrow{OP}=(a;b;c)$ porque $\overrightarrow{OP}=(a-0;b-0;c-0)=(a;b;c)$



VERSORES FUNDAMENTALES

Se llama así a los vectores de módulo **1** que tienen la dirección y el sentido de los semiejes positivos





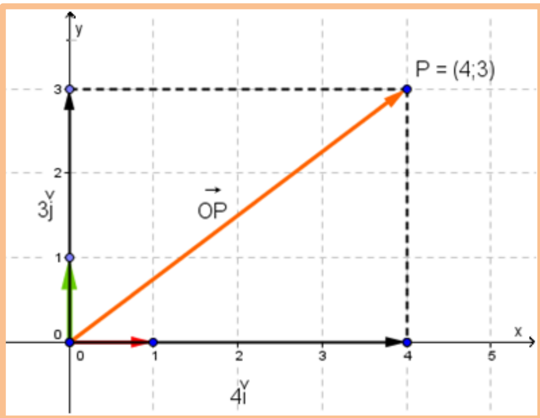
EXPRESIÓN CARTESIANA DE UN VECTOR

Dado un vector $\vec{OP} = (a;b)$ de $\Re^2$ el mismo puede descomponerse como suma de los vectores $\vec{OP} = a\,\check{i} + b\,\check{j}$

Si el vector es de $\Re^3$, $\vec{OP} = (a;b;c)$ el mismo puede descomponerse como suma de los vectores $\vec{OP} = a\,\check{i} + b\,\check{j} + c\,\check{k}$

Ejemplos

Dado un vector $\vec{OP} = (4;3)$ de $\Re^2$ su expresión cartesiana es $\boxed{\vec{OP} = 4\,\check{i} + 3\,\check{j}}$



Dado un vector $\vec{OP} = (4;2;3)$ de $\Re^3$ su expresión cartesiana es $\boxed{\vec{OP} = 4\,\check{i} + 2\,\check{j} + 3\,\check{k}}$

OPERACIONES CON VECTORES EN FORMA CARTESIANA

Ejemplos

⇨ Sean los vectores $\vec{u}=(2;3)$ $\vec{v}=(5;-3)$ $\vec{w}=(-1;2)$ **de** $\Re^2$

a) Expresarlos en forma cartesiana

$$\vec{u}=(2;3)\to\vec{u}=2\check{i}+3\check{j} \qquad \vec{v}=(5;-3)\to\vec{v}=5\check{i}-3\check{j} \qquad \vec{w}=(-1;2)\to\vec{w}=-\check{i}+2\check{j}$$

b) Calcular $\vec{u}+2\vec{v}-4\vec{w}$

$$\vec{u}+2\vec{v}-4\vec{w}=(2;3)+2(5;-3)-4(-1;2)=(2;3)+(10;-6)-(-4;8)\Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{u}+2\vec{v}-4\vec{w}=(16;-11)}$$

$$\vec{u}+2\vec{v}-4\vec{w}=\left(2\check{i}+3\check{j}\right)+2\left(5\check{i}-3\check{j}\right)-4\left(-1\check{i}+2\check{j}\right)=\left(2\check{i}+3\check{j}\right)+\left(10\check{i}-6\check{j}\right)-\left(-4\check{i}+8\check{j}\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{u}+2\vec{v}-4\vec{w}=16\check{i}-11\check{j}}$$

⇨ Dados los puntos de $\Re^3$: $A=(2;-1;3)$, $B=(0;1;-2)$, $C=(1;1;-1)$ y $D=(3,0,2)$ realizar las siguientes operaciones:

a) $\vec{AB}+2\vec{CD}$ *b)* $\vec{OA}-2\vec{BC}+\frac{1}{3}\vec{CD}$

Calculamos los vectores necesarios para realizar las operaciones indicadas:

$$\vec{AB}=B-A=(0;1;-2)-(2;-1;3)\Rightarrow\boxed{\vec{AB}=(-2;2;-5)}$$

$$\vec{OA}=A-O=(2;-1;3)-(0;0;0)\Rightarrow\boxed{\vec{OA}=(2;-1;3)}$$

$$\vec{CD}=D-C=(3;0;2)-(1;1;-1)\Rightarrow\boxed{\vec{CD}=(2;-1;3)}$$

$$\vec{BC}=C-B=(1;1;-1)-(0;1;-2)\Rightarrow\boxed{\vec{BC}=(1;0;1)}$$

Para hallar las componentes del vector restamos extremo menos origen

a) $$\vec{AB}+2\vec{CD}=(-2;2;-5)+2(2;-1;3)=(-2;2;-5)+(4;-2;6)$$

$$\Rightarrow\boxed{\vec{AB}+2\vec{CD}=(2;0;1)\to\vec{AB}+2\vec{CD}=2\check{i}+\check{k}}$$

b) $$\vec{OA}-2\vec{BC}+\frac{1}{3}\vec{CD}=(2;-1;3)-2(1;0;1)+\frac{1}{3}(2;-1;3)=(2;-1;3)-(2;0;2)+\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3};1\right)$$

$$\Rightarrow\boxed{\vec{OA}-2\vec{BC}+\frac{1}{3}\vec{CD}=\left(\frac{2}{3};-\frac{4}{3};2\right)\to\vec{OA}-2\vec{BC}+\frac{1}{3}\vec{CD}=\frac{2}{3}\check{i}-\frac{4}{3}\check{j}+2\check{k}}$$

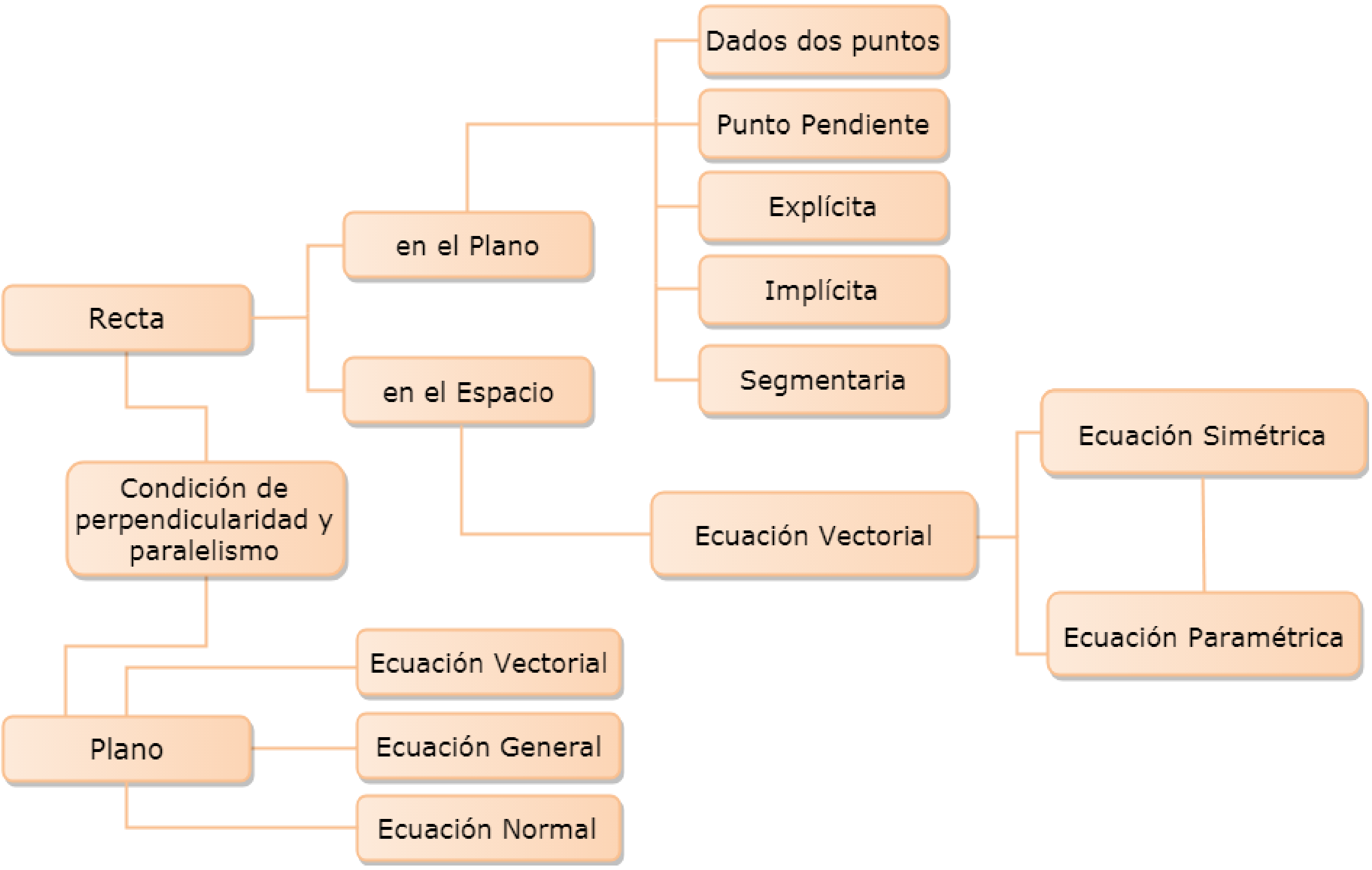
RECTA Y PLANO

En este apartado estudiaremos las rectas y los planos en el espacio bidimensional y tridimensional, cuyas aplicaciones en el campo de las ciencias, y en particular, en la matemática y la economía, son múltiples.

Podemos definir una recta en el plano a través de una función lineal cuya representación gráfica es una recta que expresamos analíticamente a través de una ecuación lineal en dos variables. La misma recta puede expresarse simbólicamente de diferentes modos dando lugar a las distintas ecuaciones: vectorial, implícita, explícita, paramétrica, segmentaria, punto–pendiente, por dos puntos.

También trabajaremos con rectas en el espacio tridimensional y planos.

Utilizando conceptos aprendidos con anterioridad analizaremos como los vectores nos permiten resolver distintas situaciones geométricas referidas al paralelismo y perpendicularidad entre rectas, entre planos y entre rectas y planos.



RECTA

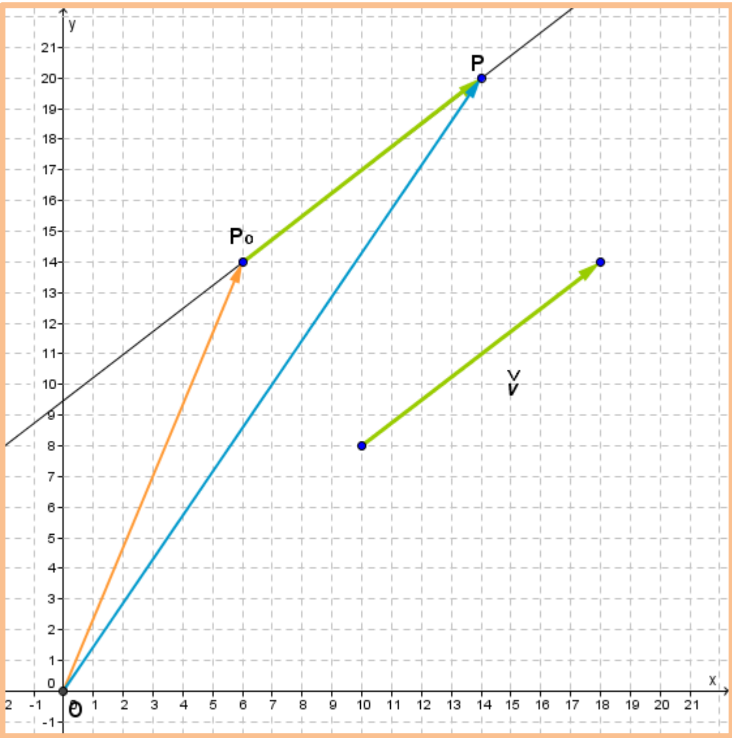
ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA EN EL PLANO

Una recta está determinada por dos puntos. La misma también queda determinada por un punto y una dirección, por consiguiente, por un punto de la recta y un vector paralelo a la recta.
Consideremos una recta $\boldsymbol{l}$ en el plano, sea un P_0 punto de $\boldsymbol{l}$ y $\vec{v}$ un vector paralelo a $\boldsymbol{l}$.

Un punto $P \neq P_0$ pertenece a la recta $\boldsymbol{l}$ si y solo si $\overrightarrow{P_0P}$ es paralelo a $\vec{v}$, es decir, $\overrightarrow{P_0P} = \lambda\vec{v}$ para cualquier $\lambda \neq 0$. Si $\lambda = 0$, entonces $P_0 = P$, si colocamos un sistema coordenado de tal forma que el origen O, coincida con el origen del vector $\vec{v}$.
Por adición de vectores $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}$, reemplazando $\overrightarrow{P_0P} = \lambda\vec{v}$ obtenemos la ecuación que se conoce con el nombre de ***ecuación vectorial de la recta l que pasa por el punto P y tiene la dirección del vector*** $\vec{v}$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\vec{v}$$
$$(x;y) = (x_0;y_0) + \lambda(v_x;v_y) \quad \text{con} \quad -\infty < \lambda < \infty$$

Ecuación Vectorial de la recta



Ejemplo 1

➪ Pasa por el punto $P_0 = (-1;4)$ y tiene por vector director a $\vec{v} = (3;1)$

De acuerdo con los datos escribimos $\boxed{(x;y) = (-1;4) + \lambda(3;1) \ \ \textit{con} \ \ -\infty < \lambda < \infty}$

ECUACIÓN PARAMÉTRICA Y SIMÉTRICA DE LA RECTA EN EL PLANO

A partir de la ecuación vectorial de la recta podemos hallar las llamadas ***ecuación paramétrica*** y la ***ecuación simétrica*** de una recta.

Sea $P=(x;y)$ un punto genérico de la recta, $P_0=(x_0;y_0)$ un punto de la recta y $\vec{v}=(v_x;v_y)$ una dirección en el espacio.

Sabemos que la ecuación vectorial de la recta es $(x;y)=(x_0;y_0)+\lambda(v_x;v_y)$ con $-\infty<\lambda<\infty$

Si realizamos las operaciones, es decir multiplicamos por λ el vector $\vec{v}=(v_x;v_y)$ y sumamos los vectores obtenemos por igualdad de vectores la ecuación paramétrica de la recta.

Dos vectores son iguales si y sólo si sus componentes respectivas lo son.

$$(x;y)=(x_0;y_0)+(\lambda v_x;\lambda v_y) \quad \text{con} \quad -\infty<\lambda<\infty$$

$$(x;y)=(x_0+\lambda v_x;y_0+\lambda v_y)$$

$$\boxed{\begin{cases} x=x_0+\lambda v_x \\ y=y_0+\lambda v_y \end{cases} \quad \text{con} \quad -\infty<\lambda<\infty}$$

Ecuación paramétrica de la recta

Despejando λ en las tres igualdades e igualando los términos, obtenemos la expresión simétrica de la recta

$$\begin{cases} x=x_0+\lambda v_x \to x-x_0=\lambda v_x \to \dfrac{x-x_0}{v_x}=\lambda \\ y=y_0+\lambda v_y \to y-y_0=\lambda v_y \to \dfrac{y-y_0}{v_y}=\lambda \end{cases} \quad \text{con} \quad -\infty<\lambda<\infty$$

$$\boxed{\frac{x-x_0}{v_x}=\frac{y-y_0}{v_y}}$$

Ecuación simétrica de la recta

Ejemplo 1

Hallar la ecuación paramétrica y simétrica de la recta que pasa por el punto $P_0 = (-1;4)$ y tiene por vector director a $\vec{v} = (3;1)$

De acuerdo con los datos escribimos

$$\boxed{(x;y) = (-1;4) + \lambda(3;1) \quad \text{con} \quad -\infty < \lambda < \infty}$$

Ecuación vectorial

$$\rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = \ \ 4 + \lambda \end{cases}} \rightarrow \begin{cases} x + 1 = 3\lambda \\ y - 4 = \lambda \end{cases}$$

Ecuación paramétrica

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{3} = \lambda \\ y - 4 = \lambda \end{cases} \rightarrow \boxed{\dfrac{x+1}{3} = y - 4}$$

Ecuación simétrica

Ejemplo 2

Hallar la ecuación paramétrica y cartesiana de la recta que pasa por el punto $P_0 = (-1;4)$ y tiene por vector director a $\vec{v} = (3;0)$

De acuerdo con los datos escribimos

$$\boxed{(x;y) = (-1;4) + \lambda(3;0) \quad \text{con} \quad -\infty < \lambda < \infty}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = \ \ 4 + 0\lambda \end{cases}} \rightarrow \begin{cases} x + 1 = 3\lambda \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{3} = \lambda \\ y = 4 \end{cases} \rightarrow \boxed{\dfrac{x+1}{3}\,;\, y = 4}$$

Atención: Como no se puede dividir por 0, la ecuación queda expresada de esta forma:

ECUACIÓN DE LA RECTA A PARTIR DE UN PUNTO Y SU PENDIENTE

Partiendo nuevamente de la ecuación simétrica de una recta $\frac{x-x_0}{v_x}=\frac{y-y_0}{v_y}$, donde $P_0=(x_0;y_0)$ es un punto de la recta y $\vec{v}=(v_x;v_y)$ su vector director, operando se obtiene:

$$\frac{x-x_0}{v_x}=\frac{y-y_0}{v_y} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_y}{v_x}(x-x_0)=(y-y_0)$$

Si llamamos $m=\frac{v_y}{v_x}$ $\Rightarrow y-y_0=m(x-x_0)$

$$\boxed{y=m(x-x_0)+y_0 \quad \textit{Ecuación explícita de la recta}}$$

ECUACIÓN GENERAL O IMPLÍCITA DE LA RECTA EN EL PLANO

Partiendo de la ecuación simétrica de una recta $\frac{x-x_0}{v_x}=\frac{y-y_0}{v_y}$, donde $P_0=(x_0;y_0)$ es un punto de la recta y $\vec{v}=(v_x;v_y)$ su vector director, operando se obtiene:

$$\frac{x-x_0}{v_x}=\frac{y-y_0}{v_y} \quad \Rightarrow \quad v_y(x-x_0)=v_x(y-y_0) \quad \Rightarrow \quad v_yx-v_yx_0-v_xy+v_xy_0=0$$

Si llamamos $A=v_y$ $\quad B=-v_x$ $\quad C=v_xy_0-v_yx_0$ $\Rightarrow$

$$\boxed{Ax+By+C=0 \quad \textit{Ecuación general o implícita de la recta}}$$

ECUACIÓN DE LA RECTA EN FORMA SEGMENTARIA

Partiendo de la ecuación general de la recta, cuando $A\neq 0,\ B\neq 0$ y $C\neq 0$ la recta corta a los ejes cartesianos, una forma para encontrar esos puntos de corte es expresar a la recta en forma segmentaria

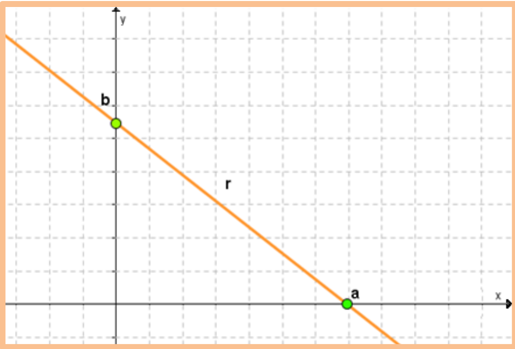
$$Ax+By+C=0 \quad \Rightarrow \quad Ax+By=-C \quad \Rightarrow \quad \frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=\frac{-C}{-C}$$

Dividiendo miembro a miembro por $-C\neq 0$ y operando se obtiene:

$\Rightarrow$ dado que $A\neq 0$ y $B\neq 0$ $\quad \dfrac{x}{\frac{-C}{A}}+\dfrac{y}{\frac{-C}{B}}=1$

$\Rightarrow$ Llamando $a=\frac{-C}{A}$ y $b=\frac{-C}{B}$ $\quad \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \textit{Ecuación de la recta en forma segmentaria}}$$



Ejemplo 1

➯ Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_0 = (1;4)$ y cuyo vector director es $\vec{v} = (2;5)$, expresarla en forma general, explícita y segmentaria

Sabemos que su ecuación en forma simétrica es: $\boxed{\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{5}}$, operando obtenemos

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{5} \Rightarrow 5(x-1) = 2(y-4) \Rightarrow 5x-5 = 2y-8$$

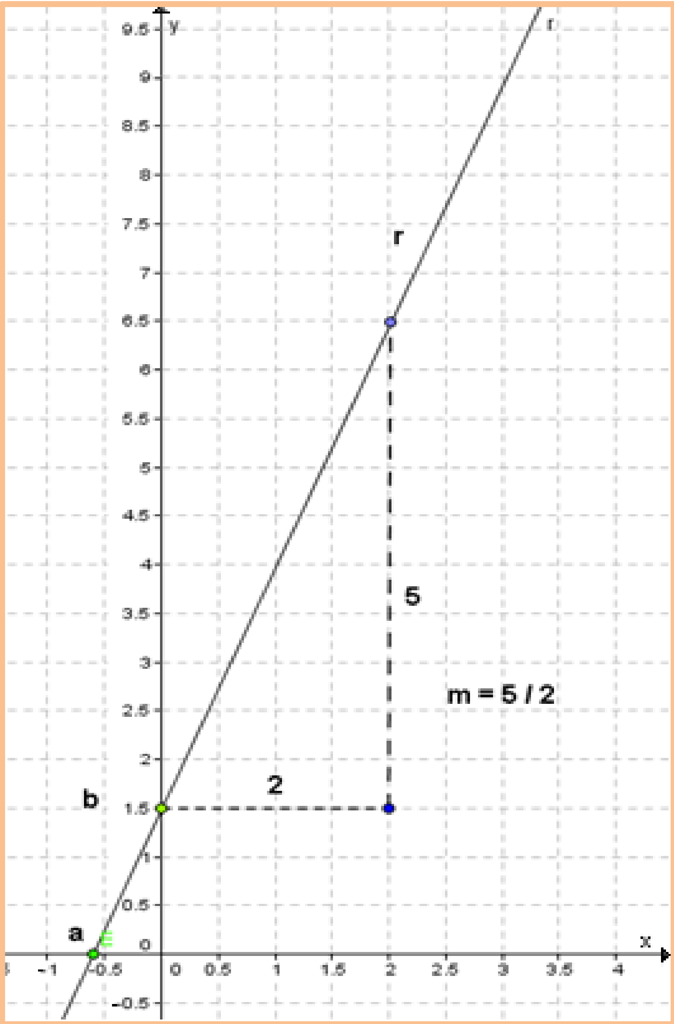
$$\Rightarrow 5x-2y-5+8=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{5x-2y+3=0}$$ ***Ecuación general***

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{2}(x-1) = y-4 \Rightarrow y-4 = \frac{5}{2}(x-1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}}$$ ***Ecuación explícita***

$$5x-2y+3=0 \quad \Rightarrow \quad 5x-2y=-3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{-3}x - \frac{2}{-3}y = \frac{-3}{-3}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{x}{\frac{-3}{5}} + \frac{y}{\frac{3}{2}} = 1}$$ ***Ecuación segmentaria***



Ejemplo 2

Hallar las ecuaciones paramétricas y en forma simétrica de la recta cuya ecuación general es: $2x-3y+6=0$

De la expresión implícita de la recta obtenemos la expresión explícita

$$\boxed{2x-3y+6=0} \Rightarrow 2x+6=3y \Rightarrow \frac{2}{3}x+\frac{6}{3}=y \Rightarrow \boxed{y=\frac{2}{3}x+2} \quad \textit{Ecuación explícita}$$

Si $m=\frac{2}{3} \Rightarrow \vec{u}=(3;2)$ y si la ordenada al origen es 2, la recta pasa por el punto $(0;2)$ entonces

la ***Ecuación vectorial*** es $\boxed{(x;y)=(0;2)+\lambda(3;2)} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=3\lambda \\ y=2+2\lambda \end{cases}}$ ***Ecuación paramétrica***

Ejemplo 3

Hallar las ecuaciones vectorial, explícita, implícita, segmentaria y en forma paramétrica de la recta que pasa por $P=(4;5)$ y tiene pendiente 2.

El punto $P=(4;5)$ pertenece a dicha recta.

Si su pendiente es 2: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow m=2=\frac{2}{1} \Rightarrow \vec{v}=(1;2)$ $\boxed{(x;y)=(4;5)+\lambda(1;2)}$

Ecuación vectorial

Escribimos la ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene pendiente m

$$y-y_A=m(x-x_A) \Rightarrow y-5=2(x-4) \Rightarrow y=2x-8+5 \Rightarrow \boxed{y=2x-3} \quad \textit{Ecuación explícita}$$

$\boxed{-2x+y+3=0}$ ***Ecuación implícita***

Como $-2x+y+3=0$

$$\Rightarrow -2x+y=-3 \Rightarrow \frac{-2x}{-3}+\frac{y}{-3}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{x}{3/2}+\frac{y}{-3}=1} \quad \textit{Ecuación segmentaria}$$

$$\textit{Si } (x;y)=(4;5)+\lambda(1;2) \Rightarrow (x;y)=(4+\lambda;5+2\lambda) \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=4+\lambda \\ y=5+2\lambda \end{cases}} \quad \textit{Ecuación paramétrica}$$

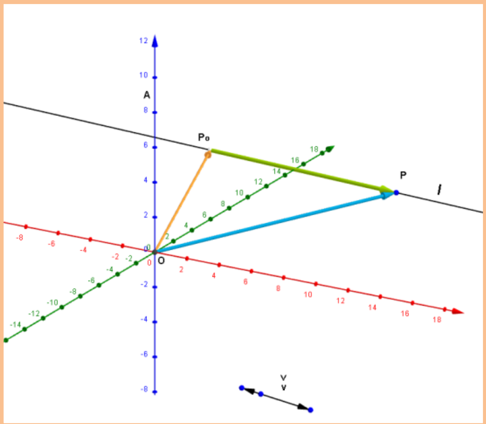
$$\text{Si } \begin{cases} x=3\lambda \\ y=2+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=\frac{x}{3} \\ \lambda=\frac{y-2}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{3}=\frac{y-2}{2}} \quad \textit{Forma simétrica}$$

ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA EN EL ESPACIO

Consideremos una recta $\boldsymbol{l}$ en el espacio, sea un $\boldsymbol{P_0}$ punto de $\boldsymbol{l}$ y $\vec{v}$ un vector paralelo a $\boldsymbol{l}$.

Un punto $\boldsymbol{P \neq P_0}$ estará en la recta $\boldsymbol{l}$ si y solo si $\overrightarrow{\boldsymbol{P_0P}}$ es paralelo a $\vec{\boldsymbol{v}}$, es decir, $\overrightarrow{\boldsymbol{P_0P}} = \lambda \vec{\boldsymbol{v}}$ para cualquier $\lambda \neq \mathbf{0}$.

Si $\lambda = \mathbf{0}$, entonces $\boldsymbol{P_0} = \boldsymbol{P}$, si colocamos un sistema coordenado de tal forma que el origen O, coincida con el origen del vector $\vec{v}$ Por adición de vectores $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}$, reemplazando $\overrightarrow{P_0P} = \lambda\vec{v}$ obtenemos la ecuación que se conoce con el nombre de ***ecuación vectorial de la recta l que pasa por el punto P y tiene la dirección del vector*** $\vec{\boldsymbol{v}}$



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\vec{v}$$
$$(x;y;z) = (x_0;y_0;z_0) + \lambda(v_x;v_y;v_z) \quad \textit{con} \quad -\infty < \lambda < \infty$$

Ejemplo 1

Pasa por el punto $P_0 = (2;4;1)$ y tiene por vector director a $\vec{v} = (3;1;2)$

De acuerdo con los datos escribimos $\boxed{(x;y;z) = (2;4;1) + \lambda(3;1;2) \quad \text{con} \quad -\infty < \lambda < \infty}$

Ejemplo 2

Pasa por el punto $P_0 = (4;-3;2)$ y la dirección del vector $\vec{v} = (1;3;3)$

Reemplazando en $(x;y;z) = (x_0;y_0;z_0) + \lambda(v_x;v_y;v_z)$

$\Rightarrow \boxed{(x;y;z) = (4;-3;2) + \lambda(1;3;3) \quad \text{con} \quad -\infty < \lambda < \infty}$

Ejemplo 3

Pasa por el punto $P_0 = (1;-6;-6)$ y la dirección del vector $\vec{v} = (1;0;-3)$

Reemplazando en $(x;y;z) = (x_0;y_0;z_0) + \lambda(v_x;v_y;v_z)$

$\Rightarrow \boxed{(x;y;z) = (1;-6;6) + \lambda(1;0;-3) \quad \text{con} \quad -\infty < \lambda < \infty}$

ECUACIÓN PARAMÉTRICA Y SIMÉTRICA DE LA RECTA EN EL ESPACIO

A partir de la ecuación vectorial de la recta podemos hallar las llamadas ***ecuación paramétrica*** y la ***ecuación simétrica*** de una recta.

Sea $P=(x;y;z)$ un punto genérico de la recta, $P_0=(x_0;y_0;z_0)$ un punto de la recta y $\vec{v}=(v_x;v_y;v_z)$ una dirección en el espacio.

Sabemos que la ecuación vectorial de la recta es
$(x;y;z)=(x_0;y_0;z_0)+\lambda(v_x;v_y;v_z)$ *con* $-\infty<\lambda<\infty$

Si realizamos las operaciones, es decir multiplicamos por λ el vector $\vec{v}=(v_x;v_y;v_z)$ y sumamos los vectores obtenemos por igualdad de vectores la ecuación paramétrica de la recta.

Dos vectores son iguales si y sólo si sus componentes respectivas lo son.

$$(x;y;z)=(x_0;y_0;z_0)+(\lambda v_x;\lambda v_y;\lambda v_z) \text{ con } -\infty<\lambda<\infty$$

$$(x;y;z)=(x_0+\lambda v_x;y_0+\lambda v_y;z_0+\lambda v_z)$$

$$\begin{cases} x=x_0+\lambda v_x \\ y=y_0+\lambda v_y \quad \text{con } -\infty<\lambda<\infty \\ z=z_0+\lambda v_z \end{cases}$$

Ecuación paramétrica de la recta

Despejando λ en las tres igualdades e igualando los primeros miembros, obtenemos la expresión simétrica de la recta

$$\begin{cases} x=x_0+\lambda v_x \to x-x_0=\lambda v_x \to \boxed{\dfrac{x-x_0}{v_x}=\lambda} \\ y=y_0+\lambda v_y \to y-y_0=\lambda v_y \to \boxed{\dfrac{y-y_0}{v_y}=\lambda} \quad \text{con } -\infty<\lambda<\infty \to \boxed{\dfrac{x-x_0}{v_x}=\dfrac{y-y_0}{v_y}=\dfrac{z-z_0}{v_z}} \\ z=z_0+\lambda v_z \to z-z_0=\lambda v_z \to \boxed{\dfrac{z-z_0}{v_z}=\lambda} \end{cases}$$

Ecuación simétrica de la recta

Ejemplo 1

Hallar la ecuación paramétrica y simétrica de la recta que pasa por el punto $P_0(4;-3;2)$ y tiene la dirección del vector $\vec{v}=(1;3;3)$

Reemplazando en $(x;y;z)=(x_0;y_0;z_0)+\lambda(v_x;v_y;v_z)$

$$\Rightarrow \boxed{(x;y;z)=(4;-3;2)+\lambda(1;3;3) \quad \text{con} \quad -\infty<\lambda<\infty}$$

Para obtener la expresión simétrica podemos reemplazar directamente en la fórmula o realizar los siguientes pasos

$$\text{Si } \boxed{(x;y;z)=(4;-3;2)+\lambda(1;3;3)} \Rightarrow \begin{cases} x=\ \ \ 4+\lambda \ \Rightarrow \ \lambda = x-4 \\ y=-3+3\lambda \ \Rightarrow \ \lambda=\dfrac{y+3}{3} \\ z=\ \ 2+3\lambda \ \Rightarrow \ \lambda=\dfrac{z-2}{3} \end{cases}$$

Ecuación vectorial

Ecuación paramétrica

$$\text{igualando se obtiene} \quad \boxed{\frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-2}{3}}$$

Ecuación simétrica

Ejemplo 2

Hallar la ecuación paramétrica y simétrica de la recta que pasa por el punto $P_0(5;-3;1)$ y tiene la dirección del vector $\vec{v}=(0;3;2)$

$$\Rightarrow \boxed{(x;y;z)=(5;-3;1)+\lambda(0;3;2) \quad \text{con} \quad -\infty<\lambda<\infty}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\ \ \ 5+0\lambda \ \Rightarrow \ x=5 \\ y=-3+3\lambda \ \Rightarrow \ \lambda=\dfrac{y+3}{3} \\ z=\ \ 1+2\lambda \ \Rightarrow \ \lambda=\dfrac{z-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{y+3}{3}=\frac{z-1}{2};\ x=5}$$

CONDICIÓN DE PARALELISMO ENTRE RECTAS

La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean **paralelas** es que sus vectores directores sean proporcionales. Si las rectas están dadas en forma explícita la condición es que sus pendientes sean iguales, para que tengan la misma dirección.

Ejemplo 1

Las rectas $r_1:\ (x;y)=(-1;4)+\lambda(3;1)$ con $-\infty<\lambda<\infty$ y $r_2:$ $(x;y)=(0;5)+\lambda(6;2)$ con $-\infty<\lambda<\infty$ son paralelas dado que sus vectores directores son proporcionales, dado que $(6;2)=2(3;1)$

Si expresamos las rectas en forma explícita: $\begin{matrix} r_1: y=\frac{1}{3}x+\frac{13}{3} \ \Rightarrow\ m_1=\frac{1}{3} \\ r_2: y=\frac{1}{3}x+5 \ \Rightarrow\ m_2=\frac{1}{3} \end{matrix}$ $\Rightarrow \boxed{m_1=m_2 \ \Rightarrow\ r_1 \parallel r_2}$

Ejemplo 2

Hallar la ecuación de la recta en forma vectorial de que pasa por el punto $P_1(4;2;-1)$ y es paralela a la recta $\frac{x-1}{2}=\frac{z-3}{-2};\ y=2$

Si la recta debe ser paralela a $\frac{x-1}{2}=\frac{z-3}{-2};\ y=2$ entonces su vector director es:

$\vec{v}=(2;0;-2)$

Reemplazando en $(x;y;z)=(x_0;y_0;z_0)+\lambda(v_x;v_y;v_z)$

$$\Rightarrow \boxed{(x;y;z)=(4;2;-1)+\lambda(2;0;-2) \quad con \quad -\infty<\lambda<\infty}$$

Ejemplo 3

Hallar el vector director de la recta y dar la ecuación de la paralela que pasa por el punto indicado en cada caso, expresarla en forma vectorial $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+1}{2}$ $\quad P=(1;-1;5)$

Recordando que la expresión simétrica es: $\frac{x-x_0}{v_x}=\frac{y-y_0}{v_y}=\frac{z-z_0}{v_z}$ entonces

$\vec{v}=(v_x;v_y;v_z)=(3;4;2)$

Reemplazando en $(x;y;z)=(x_0;y_0;z_0)+\lambda(v_x;v_y;v_z)$

$$\Rightarrow \boxed{(x;y;z)=(1;-1;5)+\lambda(3;4;2) \quad \text{con} \quad -\infty<\lambda<\infty}$$

Ejemplo 4

Hallar el vector director de la recta y dar la ecuación de la paralela que pasa por el punto indicado en cada caso, expresarla en forma vectorial $\frac{x-1}{2}=y-3\ ;z=2 \quad R=(-2;1;1)$

Observando la forma simétrica dada, los denominadores son las componentes del vector director de la recta por lo tanto $\vec{v}=(v_x;v_y;v_z)=(2;1;0)$

Reemplazando en $(x;y;z)=(x_0;y_0;z_0)+\lambda(v_x;v_y;v_z)$

$$\Rightarrow \boxed{(x;y;z)=(-2;1;1)+\lambda(2;1;0) \quad con \quad -\infty<\lambda<\infty}$$

CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTAS

La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean ***perpendiculares*** es que el producto escalar de sus vectores directores sea nulo.
Si las rectas están expresadas en forma explícita la condición de ***perpendicularidad*** es que las pendientes de las rectas sean ***recíprocas y opuestas.***

Ejemplo 1

Las rectas $r_1:\ (x;y)=(-1;4)+\lambda(3;1)$ con $-\infty<\lambda<\infty$ y $r_2:(x;y)=(0;5)+\lambda(1;-3)$ con $-\infty<\lambda<\infty$ son perpendiculares dado que si realizamos el producto escalar entre el vector director de $r_1:\vec{v}_1=(3;1)$ y el de $r_2:\vec{v}_2=(1;-3)$, dicho producto es nulo.

$$r_1\perp r_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1\bullet\vec{v}_2=0 \qquad \vec{v}_1\bullet\vec{v}_2=(3;1)\bullet(1;-3)=3.1+1.(-3)=0 \Rightarrow r_1\perp r_2$$

Si expresamos las rectas en forma explícita
$$r_1: y=\frac{1}{3}x+\frac{13}{3} \Rightarrow m_1=\frac{1}{3}$$
$$r_2: y=-3x+5 \Rightarrow m_2=-3$$

$$\Rightarrow \boxed{m_2=-\frac{1}{m_1} \Rightarrow r_1\perp r_2}$$

Ejemplo 2

Las rectas $r_1:(x;y;z)=(0;4;2)+\lambda(3;-1;2)$ con $-\infty<\lambda<\infty$ y $r_2:(x;y;z)=(1;1;6)+\lambda(2;2;-2)$ con $-\infty<\lambda<\infty$ son perpendiculares dado que si realizamos el producto escalar entre el vector director de $r_1:\vec{v}_1=(3;-1;2)$ y el de $r_2:\ \vec{v}_2=(2;2;-2)$, dicho producto es nulo.

$$r_1\perp r_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1\bullet\vec{v}_2=0$$
$$\vec{v}_1\bullet\vec{v}_2=(3;-1;2)\bullet(2;2;-2)=3.2+(-1).2+2.(-2)=0 \Rightarrow r_1\perp r_2$$

ECUACIÓN DE LA RECTA DADO DOS PUNTOS EN EL PLANO

Sea $P=(x;y)$ un punto genérico de la recta y dos puntos de la misma $P_0=(x_0;y_0)$ y $P_1=(x_1;y_1)$ el vector $\overrightarrow{P_0P_1}=(x_1-x_0;y_1-y_0)$ determina la dirección de la recta, luego:

$$(x;y)=(x_0;y_0)+\lambda(x_1-x_0;y_1-y_0) \text{ con } -\infty<\lambda<\infty$$

Ecuación vectorial de la recta

$$\begin{cases} x=x_0+\lambda(x_1-x_0) \\ y=y_0+\lambda(y_1-y_0) \end{cases} \text{con } -\infty<\lambda<\infty$$

Ecuación paramétrica de la recta

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0} \text{ con } x_1\neq x_0, y_1\neq y_0$$

Ecuación simétrica de la recta

Ejemplo

➩ Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_0=(1;2)$ y $P_1=(4;3)$

Reemplazando en $(x;y)=(x_0;y_0)+\lambda(x_1-x_0;y_1-y_0)$

$$\Rightarrow (x;y)=(1;2)+\lambda(4-1;3-2)$$

$$\Rightarrow \boxed{(x;y)=(1;2)+\lambda(3;1) \quad \text{con} \quad -\infty<\lambda<\infty}$$

Ecuación vectorial de la recta

Si $(x;y)=(1;2)+\lambda(3;1) \Rightarrow \begin{cases} x=1+3\lambda \Rightarrow \lambda=\dfrac{x-1}{3} & (1) \\ y=2+\lambda \Rightarrow \lambda=y-2 & (2) \end{cases}$

Ecuación paramétrica de la recta

De (1) y (2) igualando se obtiene: $\boxed{\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{1}}$

Ecuación simétrica de la recta

ECUACIÓN DE LA RECTA DADO DOS PUNTOS EN EL ESPACIO

Sea $P=(x;y;z)$ un punto genérico de la recta y dos puntos de la misma $P_0=(x_0;y_0;z_0)$ y $P_1=(x_1;y_1;z_1)$, el vector $\overrightarrow{P_0P_1}=(x_1-x_0;y_1-y_0;z_1-z_0)$ es la dirección de la recta, luego:

$$\boxed{(x;y;z)=(x_0;y_0;z_0)+\lambda(x_1-x_0;y_1-y_0;z_1-z_0) \text{ con } -\infty<\lambda<\infty}$$

Ecuación vectorial de la recta

Ecuación paramétrica

$$\begin{cases} x=x_0+\lambda(x_1-x_0) \\ y=y_0+\lambda(y_1-y_0) \text{ con } -\infty<\lambda<\infty \\ z=z_0+\lambda(z_1-z_0) \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0} \quad \text{con} \quad x_1\neq x_0, y_1\neq y_0, z_1\neq z_0}$$

Ecuación simétrica de la recta

Ejemplo

- Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_0=(1;2;3)$ y $P_1=(3;2;1)$

Reemplazando en $(x;y;z)=(x_0;y_0;z_0)+\lambda(x_1-x_0;y_1-y_0;z_1-z_0)$

$\Rightarrow \quad (x;y;z)=(1;2;3)+\lambda(3-1;2-2;1-3)$

$\Rightarrow \boxed{(x;y;z)=(1;2;3)+\lambda(2;0;-2) \quad \text{con} \quad -\infty<\lambda<\infty}$ ***Ecuación vectorial de la recta***

Si $(x;y;z)=(1;2;3)+\lambda(2;0;-2) \Rightarrow \begin{cases} x=1+2\lambda & \Rightarrow \lambda=\dfrac{x-1}{2} & (1) \\ y=2 & \Rightarrow y=2 & (2) \\ z=3-2\lambda & \Rightarrow \lambda=\dfrac{z-3}{-2} & (3) \end{cases}$

Ecuación paramétrica de la recta

De (1), (2) y (3) igualando se obtiene: $\boxed{\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{z-3}{-2};\ y=2}$

Ecuación simétrica de la recta

PLANO

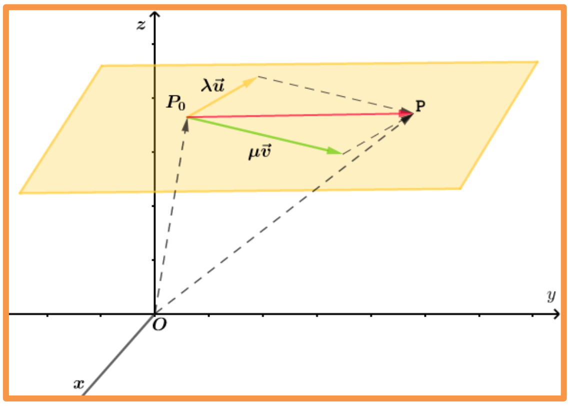
Existen diferentes formas de expresar la ecuación de un plano.

ECUACIÓN EN FORMA VECTORIAL

El plano π que contiene al punto $P_0=(x_0;y_0;z_0)$ y tiene como vectores directores los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el conjunto de puntos del espacio que verifican la siguiente relación vectorial:

$\overrightarrow{P_0P}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$ con $\lambda,\mu\in\Re$

Teniendo en cuenta que $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_0}+\overrightarrow{P_0P}$, resulta: $\boxed{\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_0}+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}}$ expresión que se conoce como ***ecuación vectorial*** del plano.



ECUACIÓN EN FORMA PARAMÉTRICA

Desarrollando la ecuación vectorial expresada en componentes, resulta:

$$\pi:\begin{cases}x=x_0+\lambda u_x+\mu v_x\\ y=y_0+\lambda u_y+\mu v_y\\ z=z_0+\lambda u_z+\mu v_z\end{cases}$$ Expresión que se conoce como ecuación en ***forma paramétrica.***

ECUACIÓN EN FORMA GENERAL

Como $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$ en el determinante $\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\end{vmatrix}$ la primera fila es combinación lineal de la segunda y de la tercera. Por lo tanto, dicho determinante es cero. Desarrollando el determinante, agrupando términos e igualando a 0, nos queda una ecuación de la forma:

$\boxed{\pi: ax+by+cz+d=0 \text{ con } a,b,c \text{ y } d \text{ reales}}$ que es la ecuación en ***forma general, cartesiana o implícita*** del plano.

ECUACIÓN NORMAL

Otra forma de determinar la ecuación de un plano es conociendo un punto del mismo y un vector normal al plano.

Sea $P_0 = (x_0; y_0; z_0)$ un punto dado del plano π y sea $\vec{n} = (a; b; c)$ un vector normal a π.

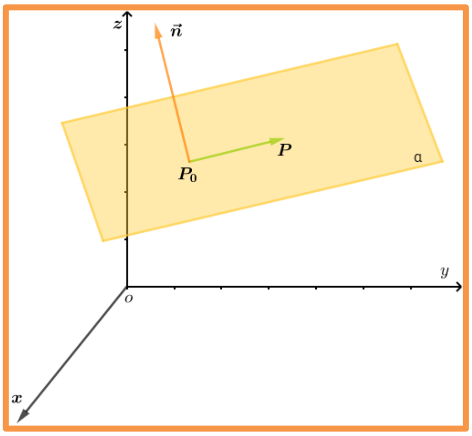
Entonces, para cualquier punto $P = (x; y; z)$ del plano π, el vector $\overrightarrow{P_0P}$ es perpendicular a $\vec{n}$, de manera que:

$\boxed{\vec{n} \,.\, \overrightarrow{P_0P} = 0}$ Expresión que recibe el nombre de ***ecuación normal*** del plano.

A partir de la ecuación normal del plano se puede obtener muy fácilmente su ***ecuación general***:

$$\vec{n} \,.\, \overrightarrow{P_0P} = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{ax + by + cz + d = 0} \text{ donde } -ax_0 - by_0 - cz_0 = d$$

Ecuación general del plano



Ejemplo 1

➪ Determinemos las ecuaciones vectorial y general del plano que contiene a los puntos $P_0 = (1; 0; 0)$, $P_1 = (0; 1; 0)$ y $P_2 = (0; 0; 1)$

Tanto $\overrightarrow{P_0P_1} = P_1 - P_0$, como $\overrightarrow{P_0P_2} = P_2 - P_0$ son vectores directores del plano π, de manera que:

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\, \overrightarrow{P_0P_1} + \mu\, \overrightarrow{P_0P_2}$, es decir: $\overrightarrow{P_{0;}P_1} = P_1 - P_0 = (0; 1; 0) - (1; 0; 0) = (-1; 1; 0)$

$\overrightarrow{P_0P_2} = P_2 - P_0 = (0; 0; 1) - (1; 0; 0) = (-1; 0; 1) \Rightarrow \boxed{(x; y; z) = (1; 0; 0) + \lambda(-1; 1; 0) + \mu(-1; 0; 1)}$ es la ***ecuación vectorial del plano*** π.

De la cual se deduce la ecuación del plano π en forma paramétrica: $\pi : \begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$

Como $(x - 1; y; z)$ es una combinación lineal de $(-1; 1; 0)$ y de $(-1; 0; 1)$ se ha de tener que:

$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ de lo que se deduce la ecuación del plano π en **forma general, cartesiana o implícita:** $\boxed{x + y + z - 1 = 0}$

Ejemplo 2

Hallar la ecuación del plano: que pasa por $P_0=(1;2;3)$ y cuyo vector normal es $\vec{n}=(-1;2;1)$

$$\overrightarrow{P_0P}=P-P_0=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)\Rightarrow \overrightarrow{P_0P}=(x-1;y-2;z-3)$$

$$\overrightarrow{P_0P}\bullet\vec{n}=0\Rightarrow(x-x_0;y-y_0;z-z_0)\bullet\vec{n}=0\Rightarrow(x-1;y-2;z-3)\bullet(-1;2;1)=0$$

$$\Rightarrow\boxed{(x-1)(-1)+(y-2).2+(z-3).1=0}\Rightarrow$$

Ecuación cartesiana

$$\Rightarrow -x+1+2y-4+z-3=0\quad\Rightarrow\boxed{-x+2y+z-6=0}$$

Ecuación general del plano

Ejemplo 3

Hallar la ecuación del plano: que pasa por $P_0=(-1;3;2)$ y es perpendicular a la recta:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{5}$$

La recta es perpendicular al plano por lo tanto su vector director es perpendicular al mismo. El vector director de la recta es normal al plano o sea tiene la misma dirección que la normal del plano.

El vector director de la recta $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{5}$ es $\vec{v}=(v_x;v_y;v_z)=(4;2;5)$

La ecuación del plano buscada es:

$$(x-x_0).v_x+(y-y_0).v_y+(z-z_0).v_z=0$$
$$(x+1).4+(y-3).2+(z-2).5=0$$

$$\boxed{4x+2y+5z-12=0}$$

CASOS PARTICULARES

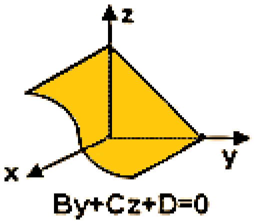
La ecuación general del plano es $Ax + By + Cz + D = 0$

Si $D = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz = 0$ ***Plano que pasa por el origen de coordenadas***

Primer Caso: Es nulo un coeficiente

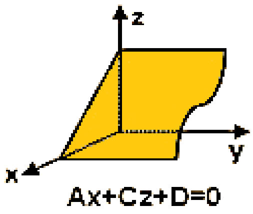
a) $A = 0 \Rightarrow By + Cz + D = 0$ ***Plano paralelo al eje x***

Si además $D = 0 \Rightarrow By + Cz = 0$ ***Plano que contiene al eje x***



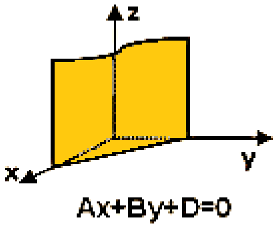
b) $B = 0 \Rightarrow Ax + Cz + D = 0$ ***Plano paralelo al eje y***

Si además $D = 0 \Rightarrow Ax + Cz = 0$ ***Plano que contiene al eje y***



c) $C = 0 \Rightarrow Ax + By + D = 0$ ***Plano paralelo al eje z***

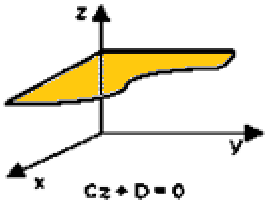
Si además $D = 0 \Rightarrow Ax + By = 0$ ***Plano que contiene al eje z***



Segundo Caso: Son nulos dos coeficientes

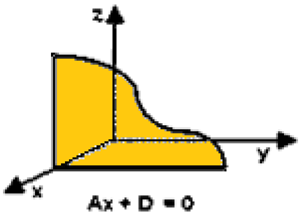
a) $A = 0 \wedge B = 0 \Rightarrow Cz + D = 0 \Rightarrow z = -\dfrac{D}{C}$ ***Plano paralelo al plano xy***

Si además $D = 0 \Rightarrow z = 0$ ***Plano que contiene al plano xy***



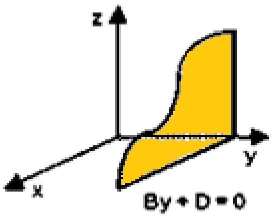
b) $B = 0 \wedge C = 0 \Rightarrow Ax + D = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{D}{A}$ ***Plano paralelo al plano yz***

Si además $D = 0 \Rightarrow x = 0$ ***Plano que contiene al plano yz***



c) $A = 0 \wedge C = 0 \Rightarrow By + D = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{D}{B}$ ***Plano paralelo al plano xz***

Si además $D = 0 \Rightarrow y = 0$ ***Plano que contiene al plano xz***



Dados los siguientes planos:

i) $x + y + 3 = 0$ ***ii)*** $2x + 3 = 0$

Indicar:

a) Si pasa por el origen de coordenadas
b) Si es paralelo a algún eje coordenado (indicar a cuál)
c) Si contiene a algún eje coordenado (indicar a cuál)
d) Si es paralelo a algún plano coordenado (indicar a cuál)
e) Si es un plano coordenado

Ejemplo 1

i) $x + y + 3 = 0$

En $x + y + 3 = 0$ los coeficientes son $A = 1$ $B = 1$ $C = 0$ $D = 3$ entonces:

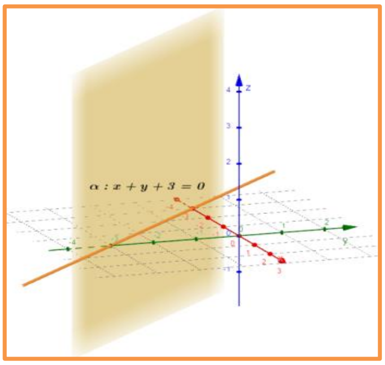
a) El plano no pasa por el origen de coordenadas (***D*** = **3**)

b) El plano es paralelo al eje *z* (***C*** = **0**)

c) El plano no contiene a ningún eje coordenado (***D*** ≠ **0**)

d) El plano no es paralelo a ningún plano coordenado porque no tiene al menos dos coeficientes nulos (segundo caso)

e) El plano no es ninguno de los planos coordenados



Ejemplo 2

ii) $2x + 3 = 0$

En $2x + 3 = 0$ $\Rightarrow$ $A = 2$ $B = 0$ $C = 0$ $D = 3$ entonces:

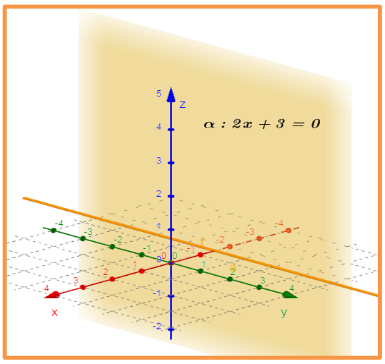
a) El plano no pasa por el origen de coordenadas (***D*** = **3**)

b) El plano es paralelo al eje *y* (***B*** = **0**) y es paralelo al eje *z* (***C*** = **0**)

c) El plano no contiene a ningún eje coordenado (***D***≠**0**)

d) El plano es paralelo al plano ***yz*** (***B*** = ***C*** = **0**)

e) El plano no es ninguno de los planos coordenados

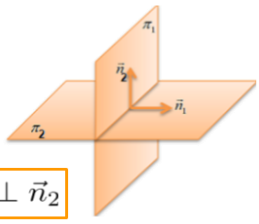


CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD, PARALELISMO ENTRE PLANOS

Sean π_1 y π_2 dos planos cualesquiera, $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ sus vectores normales respectivamente:

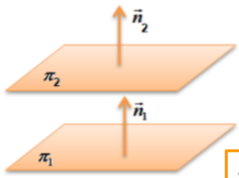
- $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ (Las componentes de los vectores normales son proporcionales)
- $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ (El producto escalar de los vectores normales es cero)

➔ Planos perpendiculares



$\pi_1 \perp \pi_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

➔ Planos Paralelos



$\pi_1 \parallel \pi_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$

Ejemplo

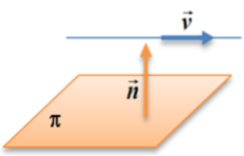
⇨ Determinar cuáles de los siguientes planos son paralelos y cuáles perpendiculares

$$\begin{array}{lll} \alpha: 2x - y + z = 1 & \text{el vector normal es} & \vec{n}_1 = (2;-1;1) \\ \beta: 3x + y - 2z = 4 & \text{el vector normal es} & \vec{n}_2 = (3;1;-2) \\ \gamma: 4x - 2y + 2z = 5 & \text{el vector normal es} & \vec{n}_3 = (4;-2;2) \\ \delta: -x + y - z = -1 & \text{el vector normal es} & \vec{n}_4 = (-1;1;-1) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2\vec{n}_1 = \vec{n}_3 \Rightarrow \alpha \parallel \gamma \\ \vec{n}_2 \bullet \vec{n}_4 = 0 \Rightarrow \beta \perp \delta \end{array}$$

CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD Y PARALELISMO ENTRE RECTA Y PLANO

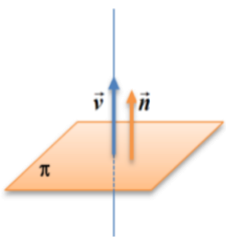
Sean r y π, una recta y un plano, siendo $\vec{v}$ el vector director de la recta y $\vec{n}$ el vector normal del plano respectivamente:

- $r \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{n}$ (El producto escalar de los vectores es cero)
- $r \perp \pi \Leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{n}$ (Las componentes de los vectores son proporcionales)



La recta y el plano son paralelos

La recta y el plano son perpendiculares



CAPÍTULO 2

MATRICES Y DETERMINANTES

MAPA CONCEPTUAL

Mapa Conceptual
Matrices y Determinantes

Escaneando el QR observarás el mapa conceptual del Capítulo 2

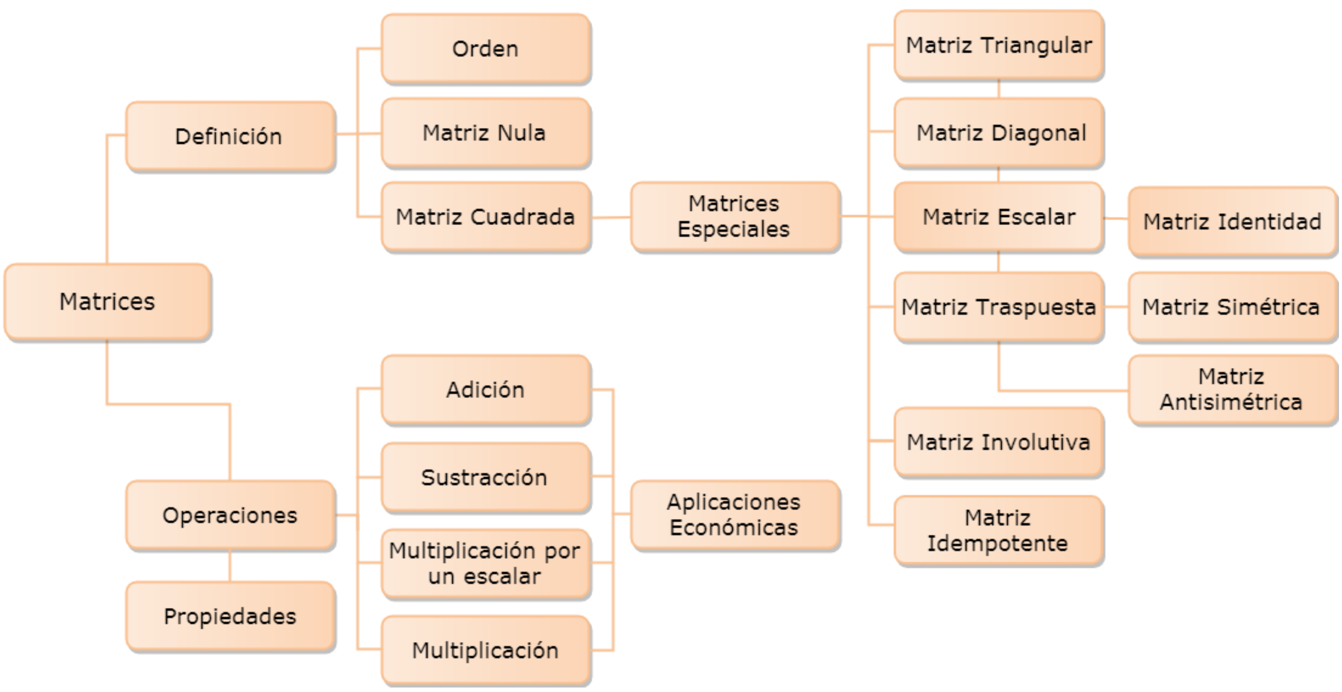
En este apartado estudiaremos a las matrices, que son una importante herramienta para el almacenamiento y tratamiento de gran cantidad de datos numéricos de forma ordenada y ágil.

Dicho tratamiento se ve facilitado por la existencia de programas informáticos que reducen extraordinariamente los extensos cálculos numéricos.

Tienen múltiples aplicaciones en todos los campos y en especial en lo económico ya que permiten modelizar situaciones económicas, una aplicación que estudiaremos es la matriz de insumo producto.

Aprenderemos a definir y clasificar distintos tipos de matrices.

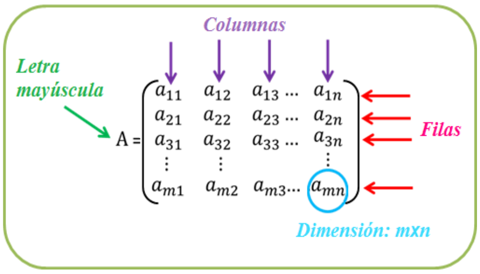
Definiremos las operaciones: adición, sustracción, multiplicación de matrices y multiplicación de una matriz por un escalar. También estudiaremos las propiedades de dichas operaciones.



MATRICES

El conjunto de todas las matrices de ***m*** filas y ***n*** columnas definidas sobre un cuerpo[3] se anota con $K^{m x n}$
Notación rectangular:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m\,x\,n}$$



$A=\left(a_{ij}\right)\in K^{m\,x\,n}$ es la matriz de ***m*** filas y ***n*** columnas definida sobre el cuerpo ***K*** (racionales, reales o complejos)

Cada elemento a_{ij} posee dos subíndices: el primero "***i***" hace referencia a la fila que ocupa el mismo en la matriz y el segundo "***j***" a la columna.

Una matriz es un arreglo rectangular de números reales, si está definida sobre el cuerpo de los números reales.

Ejemplos

Los siguientes arreglos son ejemplos de matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

*La matriz **A** es de orden* **3x3** ***ya que tiene tres filas y tres columnas**, **B** es de orden* **3x1** *y **C** es de orden* **2x3**

ORDEN DE UNA MATRIZ

Se llama orden de una matriz al número de filas por el número de columnas de dicha matriz.
El orden de una matriz de ***m*** filas y ***n*** columnas es ***mxn***.

[3] Un **cuerpo** es una estructura algebraica en la cual las operaciones llamadas adición y multiplicación se pueden realizar y cumplen las propiedades: asociativa, conmutativa y distributiva de la multiplicación respecto de la adición, además de la existencia de inverso aditivo, de inverso multiplicativo y de un elemento neutro para la adición y otro para la multiplicación, los cuales permiten efectuar las operaciones de sustracción y división (excepto la división por cero).

IGUALDAD DE MATRICES

Dos matrices A y B del ***mismo orden son iguales*** si y sólo si los elementos que ocupan idénticas posiciones son iguales, es decir $\forall i, \forall j : a_{ij} = b_{ij}$

Ejemplo 1

Sean $A = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ c \end{pmatrix} \in \Re^{3x1}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 5 \end{pmatrix} \in \Re^{3x1}$, hallar los valores de a, b y c para que las matrices A y B sean iguales.

Aplicando la definición de igualdad de matrices

$$\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2 = b \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = B \Leftrightarrow a = 1 \wedge b = 2 \wedge c = 5}$$

Ejemplo 2

Hallar los valores de $x, y \in \Re$ para que las matrices A y B sean iguales, siendo $A = \begin{pmatrix} 2x + y & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -1 & x - y \end{pmatrix}$ matrices de $\Re^{2x2}$

Aplicando la definición de igualdad de matrices escribimos:

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 9 \\ 4 = 4 \\ -1 = -1 \\ 3 = x - y \end{cases}$$ entonces debemos resolver el sistema $$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Aplicamos el método de reducción por sumas y restas.

Si sumamos miembro a miembro las ecuaciones, resulta $3x = 12 \rightarrow \boxed{x = 4}$

Reemplazando el valor de x en cualquiera de las ecuaciones del sistema, por ejemplo en la primera:

$y = 9 - 2x \rightarrow \boxed{y = 1}$

Luego $\boxed{A = B \Leftrightarrow x = 4 \wedge y = 1}$

MATRIZ NULA

N es la matriz nula $\Leftrightarrow \forall i, \forall j : n_{ij} = 0$

Ejemplos

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \Re^{3x3} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \Re^{3x1} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \Re^{2x3}$$

Para cada tipo de matrices, existe una matriz nula

MATRIZ FILA

Es la matriz que tiene una fila y n columnas. El orden de una matriz fila es $1 \, x \, n$

Ejemplos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

*La matriz **A** es de orden* **1x3** ***ya que tiene una fila y tres columnas**, **B** es de orden* **1x2** *y **C** es de orden* **1x4**

MATRIZ COLUMNA

Es la matriz que tiene m filas y una columna. El orden de una matriz columna es $m \, x \, 1$

Ejemplos

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

*La matriz **A** es de orden* **3x1** ***ya que tiene tres filas y una columna**, **B** es de orden* **2x1**

MATRIZ OPUESTA

Es la matriz cuyos elementos son opuestos a los de la matriz A

Ejemplos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad (-A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

*Los elementos de la matriz opuesta de **A** son opuestos a los elementos de la matriz **A***

MATRIZ CUADRADA

Una matriz cuadrada es aquella donde el número de filas es igual al número de columnas, en cualquier otro caso es una matriz rectangular.

Ejemplos

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 6\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 5 & 0\end{pmatrix}\qquad C=\left(2\right)$$

*La matriz **A** es de orden* **2x2** ***ya que tiene dos filas y dos columnas***, ***B*** *es de orden* **3x3** *y* ***C*** *es de orden* **1x1**

DIAGONAL DE UNA MATRIZ CUADRADA

$$A\in\Re^{n\times n}\Rightarrow\ Diagonal\ de\ A=\left\{a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn}\right\}$$

Ejemplos

$$Diagonal\ \ principal\ \ B=\{1,2,0\}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 6\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 5 & 0\end{pmatrix}$$

$$Diagonal\ \ principal\ \ A=\{1,3\}$$

TRAZA DE UNA MATRIZ CUADRADA

$$A\in\Re^{nxn}\Rightarrow\ Traza\ de\ A=\sum_{1}^{n}a_{ii}=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$$

Ejemplos

$$Tr(B)=1+2+0=3$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 6\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 5 & 0\end{pmatrix}$$

$$Tr(A)=1+3=4$$

PROPIEDADES DE LA TRAZA DE UNA MATRIZ

- $Tr(A+B)=Tr(A)+Tr(B)$
- $Tr(\alpha A)=\alpha Tr(A)$

OPERACIONES CON MATRICES

ADICIÓN DE MATRICES DEL MISMO ORDEN SOBRE EL MISMO CUERPO

Sean $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_{ij})\in\Re^{mxn}\wedge\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_{ij})\in\Re^{mxn}:\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ siendo $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{c}_{ij})\in\Re^{mxn}\,/\,\forall\boldsymbol{i},\forall\boldsymbol{j}:\boldsymbol{a}_{ij}+\boldsymbol{b}_{ij}=\boldsymbol{c}_{ij}$

PROPIEDADES DE LA ADICIÓN DE MATRICES

- "+" es ley de composición interna[4] en $\Re^{m\times n}$
- "+" es asociativa en $\Re^{m\times n}$
- "+" es conmutativa en $\Re^{m\times n}$
- "+" tiene neutro en $\Re^{m\times n}$ y es la ***Matriz Nula***
- "+" tiene simétrico en $\Re^{m\times n}$ para cada matriz ***A*** y es la ***Matriz Opuesta (–A)***

Ejemplo

Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}\in\Re^{3x3}:\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&2\\3&0&3\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&2&-1\\-1&3&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&2\\3&0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&2&-1\\-1&3&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4&0+2&1+(-1)\\2+(-1)&0+3&2+0\\3+0&0+1&3+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2&0\\1&3&2\\3&1&4\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5&2&0\\1&3&2\\3&1&4\end{pmatrix}}$$

SUSTRACCIÓN DE MATRICES DEL MISMO ORDEN SOBRE EL MISMO CUERPO

Sean $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_{ij})\in\Re^{mxn}\wedge\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_{ij})\in\Re^{mxn}:\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$

Ejemplo

Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}\in\Re^{3x3}$ del ejemplo anterior $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&2\\3&0&3\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&2&-1\\-1&3&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&2\\3&0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&2&-1\\-1&3&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-4&0-2&1-(-1)\\2-(-1)&0-3&2-0\\3-0&0-1&3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-2&2\\3&-3&2\\3&-1&2\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-3&-2&2\\3&-3&2\\3&-1&2\end{pmatrix}}$$

[4] Ley de Composición Interna definida en un conjunto no vacío $\boldsymbol{A}$ es toda función $"*":\boldsymbol{AxA}\ \boldsymbol{en}\ \boldsymbol{A},$ es decir : $\forall\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{A},\forall\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{A}:\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{A}$

MULTIPLICACIÓN DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR

$$\text{“.”}: \Re x \Re^{mxn} \to \Re^{mxn} / \forall \alpha \in \Re \wedge \forall A = (a_{ij}) \in \Re^{mxn} : \alpha . A = B / \forall i , \forall j : \alpha . a_{ij} = b_{ij}$$

Ejemplos

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \Re^{3x3}$ entonces si queremos calcular:

$$5.A = 5.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.1 & 5.0 & 5.1 \\ 5.2 & 5.0 & 5.2 \\ 5.3 & 5.0 & 5.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & 10 \\ 15 & 0 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{5.A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & 10 \\ 15 & 0 & 15 \end{pmatrix}}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot C = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

$$0.A = 0.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.0 & 0.1 \\ 0.2 & 0.0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{0.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

PROPIEDADES:

- El neutro de $(\Re;+)$ es el cero y cualquiera sea A : $0.A = N$
- $\alpha . N = N$
- $\alpha . A = N \Rightarrow \alpha = 0 \vee A = N$
- El neutro de $(\Re;.)$ es el uno y cualquiera sea A: $1.A = A$
- Distributividad del “.” respecto de la adición de matrices: $\alpha.(A+B) = \alpha.A + \alpha.B$
- Distributividad del “.” respecto de la adición de escalares: $(\alpha+\beta).A = \alpha.A + \beta.A$
- Asociatividad mixta: $\alpha.(\beta.A) = (\alpha.\beta).A$

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Dadas dos matrices ***A*** y ***B***, su producto es otra matriz ***P*** cuyos elementos se obtienen multiplicando escalarmente los elementos de las filas de ***A*** por los elementos de las columnas de ***B***; los elementos de ***P*** son de la forma:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Para poder realizar la multiplicación, el número de columnas de ***A*** debe coincidir con el número de filas de ***B***.
Si ***A*** tiene orden ***m x n*** y ***B*** orden ***n x p***, la matriz ***P*** será de orden ***m x p,*** es decir ***P*** tendrá tantas filas como la matriz ***A*** y tantas columnas como la matriz ***B***.

FILAS

$$A \cdot B = P$$

$$m \times n \quad n \times p \quad m \times p$$

$$n = n$$

COLUMNAS

Ejemplo 1

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ Comprobamos que se puede realizar la multiplicación de la matriz ***A*** y ***B*** ya que el número de columnas de ***A*** es igual al número de filas de ***B*.** El resultado de la multiplicación es una matriz ***P*** de orden **2x2**

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2 \times 3 \qquad 3 \times 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

$$2 \times 3 \qquad 3 \times 2 \qquad 2 \times 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$p_{11} = 1.3 + 0.0 + (-1).1 = 2 \qquad p_{12} = 1.1 + 0.2 + (-1).(-1) = 2$$

$$p_{21} = 2.3 + 3.0 + 0.1 = 6 \qquad p_{22} = 2.1 + 3.2 + 0.(-1) = 8$$

Ejemplo 2

*La matriz **A** es de orden 3x3, lo mismo que la matriz **B**, por lo tanto la matriz **P** =**A.B** es de orden 3x3*

$$\text{Sean } A=\underset{3x3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}} \quad \text{y} \quad B=\underset{3x3}{\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$A.B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 8 & 6 & 0 \\ 12 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_{11}=1.4+0.(-1)+1.0=4$$

Ejemplo 3

*La matriz **A** es de orden 3x3 y la matriz **B** es de orden 3x1, por lo tanto la matriz **P** =**A.B** es de orden 3x1*

$$\text{Sean } A=\underset{3x3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}} \quad \text{y} \quad B=\underset{3x1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

$$A.B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$$

La multiplicación $B.A$ ***no puede resolverse ya que el número de columnas de B no es el mismo que el número de filas de A, requisito para poder realizarlo***.

Observación

Ejemplo 4

$$\text{Sean } A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$ Hallar, si es posible **A.B** y **B.A**

*La matriz **A** es de orden 2x4 y la matriz **B** es de orden 4x2, por lo tanto, la matriz **A.B** es de orden 2x2*

$$A.B=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 32 \\ 15 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A.B=\begin{pmatrix} -5 & 32 \\ 15 & 15 \end{pmatrix}}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & -4 & -1 & 6 \\ 4 & 10 & 6 & -4 \\ 1 & 28 & 21 & 2 \\ 14 & 18 & 8 & -16 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{B\cdot A=\begin{pmatrix} -5 & -4 & -1 & 6 \\ 4 & 10 & 6 & -4 \\ 1 & 28 & 21 & 2 \\ 14 & 18 & 8 & -16 \end{pmatrix}}$$

*La matriz **B** es de orden 4x2 y la matriz **A** es de orden 2x4, por lo tanto, la matriz **B.A** es de orden 4x4*

Observación *Al resolver ambos productos podemos observar que* $A.B \neq B.A$ *Por lo tanto podemos concluir:*
La multiplicación de matrices en general ***NO*** *es conmutativa.*

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

1. La multiplicación de matrices es asociativa: $A\,.\,(B\,.\,C) = (A\,.\,B)\,.\,C$

2. La multiplicación de matrices es distributiva respecto de la adición de matrices, es decir: $A\,.\,(B+C) = A\,.\,B + A\,.\,C$

PARA TENER EN CUENTA...

Definimos al inicio, a las matrices sobre el cuerpo de los números reales, pero a pesar de las aparentes similitudes entre el álgebra de matrices y el álgebra de los números reales, las matrices presentan ciertas características que nos advierten de algunas diferencias a tener en cuenta.

Hemos visto, que en general $A.B \neq B.A$, o sea la multiplicación de matrices no es conmutativa, por tal razón, si bien en reales se verifica $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ en matrices:

1. En general $(A+B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2AB$, ya que $A\,.\,B \neq B\,.\,A$

2. En general $(A+B).(A-B) \neq A^2 - B^2$, ya que $A\,.\,B \neq B\,.\,A$

A continuación, consideramos otras dos características del álgebra de matrices.
En reales $a.b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$, como así también $x.b = x.c \wedge x \neq 0 \Rightarrow b = c$
Esto no se cumple para matrices.

3. Si $A\,.\,B = N$ no implica que $A = N \vee B = N$

4. Si $A\,.\,B = A\,.\,C$ no implica que $B = C$

Ejemplos Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, verificar que:

a) Si $A\,.\,B = N$ no implica que $A = N \vee B = N$

b) Si $A\,.\,B = A\,.\,C$ no implica que $B = C$

a) Efectuamos $A.D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y vemos que $\boxed{A.D = N \text{ sin embargo } A \neq N \text{ y } D \neq N}$

b) Efectuamos $A.B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ y $A.C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ pero $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$,

luego $\boxed{A.B = A.C \text{ no implica que } B = C}$

Estos resultados se dan en realidad para un tipo de matrices llamadas ***matrices singulares*** como lo son en este caso A y D, que estudiaremos más adelante

MATRICES CUADRADAS ESPECIALES

MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR

Es toda matriz cuadrada A tal que: $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$

Ejemplos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observa que los elementos que se encuentran por debajo de la diagonal principal son nulos ya que en todos se cumple que $i > j$

MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

Es toda matriz cuadrada A tal que: $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$

Observa que los elementos que se encuentran por encima de la diagonal principal son nulos ya que en todos se cumple que $i < j$

Ejemplos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ DIAGONAL

$A = (a_{ij}) \in \Re^{nxn}$ es diagonal $\Leftrightarrow \forall i, \forall j : i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$

Ejemplos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observa que en toda matriz Diagonal los elementos que se encuentran fuera de la diagonal principal son nulos, ya que en ellos se cumple que $i \neq j$

MATRIZ ESCALAR

Es toda matriz diagonal tal que $\forall i : a_{ii} = k$

Ejemplos

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Observa que en toda matriz Escalar los elementos que se encuentran en la diagonal principal son iguales.

MATRIZ IDENTIDAD O UNIDAD

Es toda matriz escalar tal que $\forall i : a_{ii} = 1$

Podemos definir también diciendo I es la identidad $\Leftrightarrow \forall i, \forall j : \begin{cases} a_{ij} = 1 & si \quad i = j \\ a_{ij} = 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$

Ejemplos

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *En toda matriz Identidad los elementos que se encuentran en la diagonal principal son siempre igual a* **1**
- *La matriz Identidad, cualquiera sea su orden siempre se simboliza* I

TRASPOSICIÓN DE MATRICES CUADRADAS Y RECTANGULARES

MATRIZ TRASPUESTA

Dada $A=(a_{ij})\in\Re^{mxn}$ se llama matriz traspuesta de A y se anota A^T y $A^T = (a_{ji})\in\Re^{nxm}$

PROPIEDADES:

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(A\,.\,B)^T = B^T.A^T$
- $(k\,A)^T = k\,.\,A^T \wedge k\in\Re$

Ejemplos

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}\in\Re^{2x4} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\in\Re^{4x2}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\in\Re^{3x2} \rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}\in\Re^{2x3}$$

Observa que al trasponer una matriz se cambian las filas por las columnas o viceversa.

MATRIZ SIMÉTRICA

Sea $A = (a_{ij})\in\Re^{nxn}$

A es simétrica $\Leftrightarrow A=A^T$

A es simétrica $\Leftrightarrow \forall i\,,\forall j: a_{ij} = a_{ji}$

Ejemplos

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Observa que los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son iguales.

MATRIZ ANTISIMÉTRICA

Sea $A=(a_{ij})\in\Re^{nxn}$

A es antisimétrica $\Leftrightarrow A=-A^T$

A es antisimétrica $\Leftrightarrow \forall i\,,\forall j: a_{ij} = -a_{ji}$

Analicemos que sucede cuando $i=j$, por definición:

$$a_{11}=-a_{11} \Rightarrow 2a_{11}=0 \Rightarrow a_{11}=0$$
$$a_{22}=-a_{22} \Rightarrow 2a_{22}=0 \Rightarrow a_{22}=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{nn}=-a_{nn} \Rightarrow 2a_{nn}=0 \Rightarrow a_{nn}=0$$

Después del planteo observamos que los a_{ii} son cero

Observa que los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son opuestos y que los elementos de la diagonal principal son nulos.

Ejemplos

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRIZ INVERSA

Sea $A=(a_{ij})\in\Re^{nxn}$ es inversible, es no singular, es regular o admite inversa si existe una matriz denominada A^{-1} que multiplicada a izquierda o a derecha por la matriz A da la matriz identidad.

En símbolos: $\forall A\in\Re^{nxn}$, $si\ \exists\ A^{-1}\in\Re^{nxn}\Rightarrow A\,.\,A^{-1}=A^{-1}.\,A\ =\ I$

Las matrices A y B son inversas ya que $A\,.\,B=B\,.\,A\ =\ I$

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\3&0&-1\\1&3&-2\end{pmatrix}\quad\wedge\quad B=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&1&-\frac{1}{2}\\-\frac{5}{2}&1&-\frac{1}{2}\\-\frac{9}{2}&2&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$ Efectuamos $A.B$ y $B.A$

$$A.B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\3&0&-1\\1&3&-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&1&-\frac{1}{2}\\-\frac{5}{2}&1&-\frac{1}{2}\\-\frac{9}{2}&2&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$B.A=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&1&-\frac{1}{2}\\-\frac{5}{2}&1&-\frac{1}{2}\\-\frac{9}{2}&2&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&-1&0\\3&0&-1\\1&3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

De las operaciones realizadas resulta que: $A.B=I\quad\wedge\quad B.A=I\quad\therefore\quad\boxed{B=A^{-1}}$

PROPIEDADES:

- $(A^{-1})^{-1}=A$
- $(A\,.\,B)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$
- $(A^{-1})^{T}=(A^{T})^{-1}$
- $(k\ A)^{-1}=k^{-1}.\,A^{-1}\ \wedge\ k\neq 0\wedge k\in\Re$

Observación

No toda matriz cuadrada tiene inversa, que la ***matriz sea cuadrada*** *es* ***condición necesaria****, pero* ***no condición suficiente****, para su existencia.*
Si una matriz cuadrada A tiene inversa, se dice que la matriz A es no singular*.*
Si A no posee inversa, se la denomina MATRIZ SINGULAR*.*

MATRIZ ORTOGONAL

Una matriz cuadrada es ortogonal si y sólo si su inversa es igual a su traspuesta

$A=(a_{ij})\in\Re^{nxn}$ es ortogonal $\Leftrightarrow A^{-1}=A^{T}$

Una expresión equivalente a la anterior es:

$A=(a_{ij})\in\Re^{nxn}$ es ortogonal $\Leftrightarrow A.A^{T}=I$

Ejemplo

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \text{ es ortogonal ya que: } A.A^{T}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

Observación

- Si una matriz cuadrada A es ortogonal entonces es una matriz inversible.
- La matriz identidad de cualquier orden es ortogonal.
- La inversa de una matriz ortogonal es ortogonal.
- La traspuesta de una matriz ortogonal es ortogonal.
- Si A y B son ortogonales entonces el producto $A.B$ y $B.A$ es ortogonal

MATRIZ IDEMPOTENTE

$A=(a_{ij})\in\Re^{nxn}$ es idempotente $\Leftrightarrow A^{2}=A$

Ejemplo

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix} \text{ es idempotente ya que: } A.A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=A^{2}$$

MATRIZ INVOLUTIVA

$A=(a_{ij})\in\Re^{nxn}$ es involutiva $\Leftrightarrow A^{2}=I$

Ejemplo

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix} \text{ es involutiva ya que: } A.A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

Observación

- Las ***matrices involutivas***, son inversas de sí mismas

DETERMINANTES

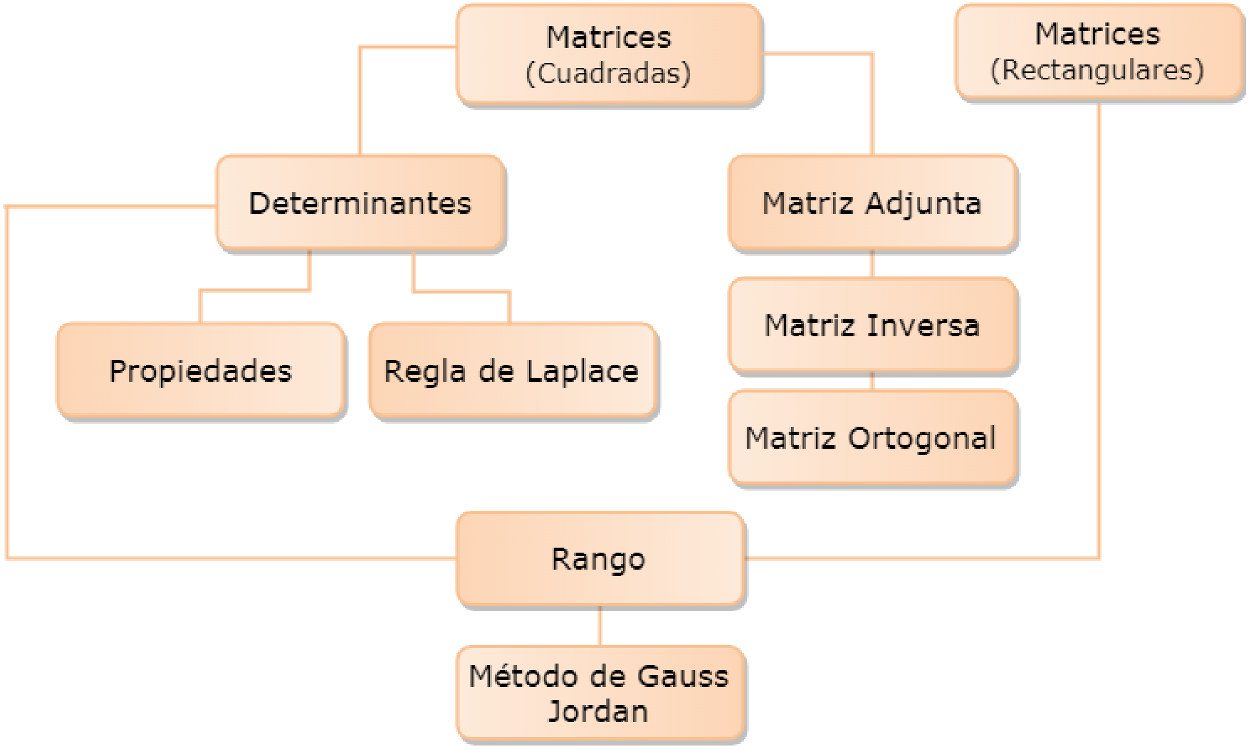
En este apartado definiremos el concepto de determinante, como una función, que se define sólo para matrices cuadradas y aprenderemos a calcularlo.

Enunciaremos las propiedades de los determinantes y aprenderemos a aplicarlas para simplificar su cálculo.

Utilizando determinantes analizaremos la existencia de la matriz inversa, y cuando sea posible la hallaremos.

Calcularemos la inversa de una matriz utilizando su definición o el método de Gauss-Jordan.

Definiremos el concepto de rango de una matriz y lo calcularemos.



DETERMINANTES

Dada una matriz cuadrada

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La función que le asigna a dicha matriz un número real se denomina determinante de A y se simboliza por $|A|$ ó **det(*A*)** ó **Δ(*A*)**. También se suele escribir:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

CÁLCULO DE DETERMINANTES DE ÓRDENES 1, 2 Y 3

- $Si\ \ A\in\Re^{1x1}:\ \ A=(a_{11})\ \Rightarrow\ \det(A)=a_{11}$.

Ejemplos

$A\in\Re^{1x1}:A=(2)\Rightarrow\ \det(A)=2$ $\qquad$ $B\in\Re^{1x1}:B=\left(\frac{2}{3}\right)\Rightarrow\ \det(B)=\frac{2}{3}$

$$C\in\Re^{1x1}:C=\left(-\frac{5}{2}\right)\Rightarrow\ \det(B)=-\frac{5}{2}$$

- $Si\ \ A\in\Re^{2x2}:\ \ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}.a_{22}-a_{12}.a_{21}$

Ejemplos

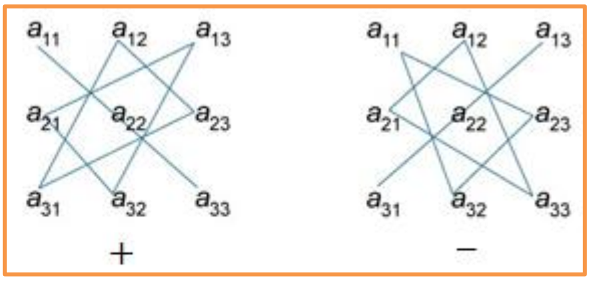
$$A\in\Re^{2x2}:\ \ A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4\end{vmatrix}=1.4-5.2=-6$$

$$B\in\Re^{2x2}:\ \ B=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 6\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \det(B)=\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 6\end{vmatrix}=(-1).6-5.3=-21$$

$$C\in\Re^{2x2}:\ \ C=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 6\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \det(B)=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 6\end{vmatrix}=1.6-5.(-3)=21$$

- *Si* $A \in \Re^{3x3} : A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \det(A) = \left(a_{11}\ a_{22}\ a_{33} + a_{12}\ a_{23}\ a_{31} + a_{13}\ a_{21}\ a_{32}\right) - \left(a_{13}\ a_{22}\ a_{31} + a_{12}\ a_{21}\ a_{33} + a_{11}\ a_{23}\ a_{32}\right)$$



Ejemplos

$$A \in \Re^{3x3} : A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -7 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -7 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \left(2.\ 1.\ (-3) + 0.\ 2.\ 4 + 5.\ (-7).4\right) - \left(5.\ 1.\ 4 + 2.\ 2.\ 4 + 0.\ (-7).\ (-3)\right) =$$

$$= (-6 + 0 - 140) - (20 + 16 + 0) = \underline{-182}$$

$$B \in \Re^{3x3} : \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \left(2.\ 1.\ (-3) + 1.\ 0.\ 5 + 4.\ 0.2\right) - \left(5.\ 1.\ 4 + 2.\ 0.\ 2 + (-3).0\ .\ 1\right) =$$

$$= \ (-6 + 0 + 0) - (20 + 0 + 0) = \underline{-26}$$

CÁLCULO DE UN DETERMINANTE POR LOS ADJUNTOS DE UNA LÍNEA (REGLA DE LAPLACE)

Sea A una matriz cuadrada y a_{ij} uno cualquiera de sus elementos:

Si se suprime la fila i y la columna j de la matriz A se obtiene una submatriz M_{ij} que recibe el nombre de ***matriz complementaria del elemento*** a_{ij}.

Sea la matriz:

$$A=\left(\begin{array}{c|cccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{array}\right)$$

La matriz complementaria del elemento a_{11} es la matriz que resulta de suprimir en la matriz A la fila **1** y la columna **1**: $M_{11}=\begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Llamamos ***menor complementario del elemento*** a_{ij} al determinante de la matriz complementaria del elemento a_{ij}, y se representa por α_{ij}

Se llama ***adjunto de*** a_{ij}, y se representa por A_{ij}, al número $(-1)^{i+j}.\alpha_{ij}$

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}.\alpha_{ij}$$

Regla de Laplace

El determinante de una matriz cuadrada es igual a la suma de los elementos de una fila o columna cualquiera, multiplicados por sus respectivos adjuntos.

Si desarrollamos un determinante de orden n por los adjuntos de la primera fila se tiene:

$$|A|=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}.A_{1j}=a_{11}.A_{11}+a_{12}.A_{12}+\ldots+a_{1n}.A_{1n}$$

Nota

Esta regla permite transformar el cálculo de un determinante de orden n; en n determinantes de orden $n-1$

Ejemplos

Calculemos nuevamente el determinante la matriz A, aplicando la regla enunciada

Desarrollaremos el determinante para su cálculo por los adjuntos de la fila **1**

$$A \in \Re^{3x3}: \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -7 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Elemento $\boldsymbol{a_{13}}$

Adjunto del elemento $\boldsymbol{a_{13}}$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -7 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 2.(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 0.(-1)^3 \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 5.(-1)^4 \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2.(-1)^2(-11) + 0.(-1)^3 13 + 5.(-1)^4(-32) = -22 + 0 - 160 = -182$$

Desarrollaremos el determinante para su cálculo por los adjuntos de la columna **2**.

$$A \in \Re^{3x3}: A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -7 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -7 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0.(-1)^3 \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 1.(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 4.(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 0.(-1)^3 13 + 1.(-1)^4(-26) + 4.(-1)^5 39 = 0 - 26 - 156 = -182$$

El determinante de una matriz no cambia si lo desarrollamos por una fila o una columna

Observación

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1. El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta: $\boxed{|A| = |A^T|}$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 5.2 = -6$$

Aplicamos para resolver los determinantes de orden dos la definición:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A^T) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2.5 = -6$$

2. Si una matriz cuadrada tiene una línea con todos los elementos nulos, su determinante vale cero.

Ejemplos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1.0 - 0.2 = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow det(B) = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 4.0 - 5.0 = 0$$

3. Si una matriz cuadrada tiene dos líneas paralelas iguales, su determinante vale cero.

Ejemplos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1.2 - 1.2 = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow det(B) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 3.5 - 5.3 = 0$$

Observa que en $\boldsymbol{A}$: $C_1 = C_2$ *y en la matriz* $\boldsymbol{B}$: $F_1 = F_2$

4. Si dos líneas paralelas de una matriz cuadrada son proporcionales, su determinante se anula.

Ejemplos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1.2 - 1.2 = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow det(B) = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 3.8 - 6.4 = 0$$

Observa que en $\boldsymbol{A}$: $F_2 = 2F_1$ *y en la matriz* $\boldsymbol{B}$: $C_2 = 2C_1$

5. Si permutamos dos líneas paralelas de una matriz cuadrada, su determinante cambia de signo con respecto al inicial

Ejemplo

$$A=\begin{pmatrix}1&5\\2&4\end{pmatrix}\;\Rightarrow\;det(A)=\begin{vmatrix}1&5\\2&4\end{vmatrix}=1.4-5.2=-6$$

$$A'=\begin{pmatrix}2&4\\1&5\end{pmatrix}\;\Rightarrow\;det(A')=\begin{vmatrix}2&4\\1&5\end{vmatrix}=2.5-1.4=6$$

*Observa que, el determinante de **A** y de **A'** son opuestos.*

6. Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, entonces se verifica: $\boxed{|A.B|=|A|.|B|}$

Ejemplos

$$A=\begin{pmatrix}1&5\\2&4\end{pmatrix}\;\Rightarrow\;det(A)=\begin{vmatrix}1&5\\2&4\end{vmatrix}=1.4-5.2=-6$$

$$B=\begin{pmatrix}3&1\\1&5\end{pmatrix}\;\Rightarrow\;det(B)=\begin{vmatrix}3&1\\1&5\end{vmatrix}=3.5-1.1=14$$

$$A.B=\begin{pmatrix}1&5\\2&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3&1\\1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&26\\10&22\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow det(A.B)=\begin{vmatrix}8&26\\10&22\end{vmatrix}=8.22-26.10=-84\quad\Rightarrow\quad det(A.B)=det(A).det(B)=(-6)\;.14=-84$$

7. Si se multiplican todos los elementos de una línea de una matriz cuadrada por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número.
Esta propiedad permite factorear una fila o una columna del determinante de una matriz.

Ejemplo

*Observa la primera fila de la matriz que se ha multiplicado, la primera fila de A' es la primera fila de A por **3**, por lo tanto el determinante de la matriz A' se obtiene multiplicando al determinante de A por dicho número.*

$$A=\begin{pmatrix}1&5\\2&4\end{pmatrix}\;\Rightarrow\;det(A)=\begin{vmatrix}1&5\\2&4\end{vmatrix}=1.4-5.2=-6$$

$$A'=\begin{pmatrix}3&15\\2&4\end{pmatrix}\;\Rightarrow\;det(A')=\begin{vmatrix}3&15\\2&4\end{vmatrix}=3.4-15.2=-18$$

$$det(A')=3.\begin{vmatrix}1&5\\2&4\end{vmatrix}=3.(-6)=-18$$

- ***Consecuencia***: Si A es una matriz de orden n, se verifica que $\boxed{|kA|=k^n\,|A|}$

8. En todo determinante la suma de los productos de los elementos una línea cualquiera por los adjuntos de otra paralele es cero

Ejemplo

*Observa que se han multiplicado los elementos de la fila **1** de **A** por los adjuntos de la fila **2***

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -7 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 2.(-1)^3\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 0.(-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 5.(-1)^5\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$=2.(-1)(-20)+0.(-26)+5.(-1)8=40+0-40=0$$

9. Si a una línea de una matriz cuadrada se le suma otra paralela, su determinante no varía.

Ejemplo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1.4-5.2=-6$$

*Observa que la fila **2** de **A'** (F_2') se obtuvo sumando a la fila **2** (F_2) de **A** la fila **1** (F_1), es decir:* $F_2' = F_2 + F_1$

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad det(A')=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 1.9-5.3=-6$$

10. Si a una línea de una matriz cuadrada se le suma otra paralela multiplicada por un número, su determinante no varía.

Ejemplo

*Observa que la fila **2** de **A'** (F_2) se obtuvo sumando a la fila (F_2) de **A** la (F_1) multiplicada por **2**, es decir:* $F_2' = F_2 + 2F_1$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1.4-5.2=-6$$

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad det(A')=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 14 \end{vmatrix} = 1.14-5.4=-6$$

- ***Consecuencia***:
  Si una fila (columna) de una matriz cuadrada es combinación lineal de las restantes filas (columnas), su determinante vale cero.

Ejemplo

Desarrollamos el determinante por la primera fila por la Regla de Laplace

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{2 \quad 0 \quad 3} \\ 1 \quad 1 \quad 2 \\ 3 \quad 1 \quad 5 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A)=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2.(-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 0.(-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3.(-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=2.3+0.(-1)(-1)+3.(-2)=6+0-6=0$$

Observa que la fila 3 (F_3) *es* $F_3 = F_1 + F_2$ *, es decir es una combinación lineal de las dos primeras filas*

11. Si todos los elementos de una línea (fila o columna) de una matriz cuadrada se descomponen en dos sumandos, entonces su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en esa línea los primeros y segundos sumandos, respectivamente, y en las demás los mismos elementos que el determinante inicial

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j}+b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j}+b_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij}+b_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj}+b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Desarrollamos el determinante por la segunda columna por la Regla de Laplace

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -7 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A)=\begin{vmatrix} 2 & \boxed{0} & 5 \\ -7 & \boxed{1} & 2 \\ 4 & \boxed{4} & -3 \end{vmatrix} = 0.(-1)^3\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 1.(-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 4.(-1)^5\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} = -182$$

*Observa que se ha descompuesto la tercera columna del determinante de **A***

$$det(A)=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -7 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -7 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix}}_{1} + \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix}}_{2} =$$

$$= \underbrace{\left(2.(-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 3.(-1)^4\begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}\right)}_{\text{desarrollamos el determinante "1" por la primera fila}} + \underbrace{\left(2.(-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 2.(-1)^4\begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}\right)}_{\text{desarrollamos el determinante "2" por la primera fila}}$$

$$= 2.(-5)+3.(-32)+2.(-6)+2.(-32) = -182$$

12. El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal: $|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11}.a_{22}.a_{33}\dots a_{nn}$

Ejemplos

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A)=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2.3 = 6$$

*Observa que **A** es una matriz diagonal, que es un caso particular de matriz triangular*

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow det(B)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1.2.4 = 8$$

- ***Consecuencia :***

Si **I** es la matriz identidad de orden n su determinante vale **1**.

Ejemplos

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow det(I)=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1.1=1$$

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow det(I)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1.1.1=1$$

13. A es una matriz regular, entonces $\boxed{\left|A^{-1}\right|=\dfrac{1}{|A|}}$

Ejemplos

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow det(A)=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2.2-1.2=2$$

*Observa que el determinante de **A** y el de su inversa son recíprocos.*

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -\dfrac{1}{2} & 1\end{pmatrix} \Rightarrow det(A^{-1})=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -\dfrac{1}{2} & 1\end{vmatrix}=1.1-(-1).\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

14. Si A es una matriz ortogonal, entonces se verifica que $|A|=1 \lor |A|=-1$

Ejemplos

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \text{ es ortogonal } \Rightarrow det(A)=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)-0\cdot 0=-1$$

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \text{ es ortogonal } \Rightarrow det(B)=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=0\cdot 0-1.(-1)=1$$

La recíproca de esta propiedad no es cierta, es decir si una matriz tiene determinante 1 o −1 no implica que sea ortogonal

Observación

DETERMINANTES Y SUS PROPIEDADES

Resolveremos a continuación ejercicios para aplicar las propiedades de los determinantes.

Ejercicio 1

Sabiendo que: $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ r & s & t \end{vmatrix} = 2$ y $|B| = \begin{vmatrix} 3m & 3n & 3p \\ -a & -b & -c \\ \frac{1}{3}r & \frac{1}{3}s & \frac{1}{3}t \end{vmatrix}$

a) Hallar el ***det (B)*** aplicando propiedades. Justificar

b) Hallar el $\det\left(\frac{1}{2} A^{-1} B^T\right)$

c) Hallar el $det(C)$ si $det\left(4\, A^T A^{-1} B^{-1} C\, B^T\right) = 27$

a)

$$|B| = \begin{vmatrix} 3m & 3n & 3p \\ -a & -b & -c \\ \frac{1}{3}r & \frac{1}{3}s & \frac{1}{3}t \end{vmatrix} = \underbrace{3.(-1).\frac{1}{3}}_{\substack{\text{Factoreamos} \\ \text{las tres filas}}} . \begin{vmatrix} m & n & p \\ a & b & c \\ r & s & t \end{vmatrix} = 3.(-1).\frac{1}{3}.\underbrace{(-1)}_{\substack{\text{Cambio de} \\ \text{signo por} \\ \text{permutación} \\ \text{de filas}}} . \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ r & s & t \end{vmatrix}}_{|A|} = 3.(-1).\frac{1}{3}.(-1).2 = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{|B| = 2}$$

b) $$\left|\frac{1}{2}.A^{-1}.B^T\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^3.|A^{-1}|.|B^T| = \frac{1}{8}.\frac{1}{|A|}.|B| = \frac{1}{8}.\frac{1}{2}.2 = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left|\frac{1}{2}.A^{-1}.B^T\right| = \frac{1}{8}}$$

c)

$$|4.A^T.A^{-1}.B^{-1}.C.B^T| = 27 \Rightarrow (4)^3.|A^T|.|A^{-1}|.|B^{-1}|.|C|.|B^T| = 27 \quad \Rightarrow 64.\cancel{|A|}.\frac{1}{\cancel{|A|}}.\frac{1}{\cancel{|B|}}.|C|.\cancel{|B|} = 27$$

simplificando resulta: $64|C| = 27 \quad \Rightarrow \boxed{|C| = \frac{27}{64}}$

Ejercicio 2

Sabiendo que : $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ r & s & t \end{vmatrix} = 3$ y $|B| = \begin{vmatrix} 2m & 2n & 2p \\ a+3m & b+3n & c+3p \\ \frac{2}{3}r & \frac{2}{3}s & \frac{2}{3}t \end{vmatrix}$

a) Hallar el ***det (B)*** aplicando propiedades. Justificar

b) Hallar el $\mathbf{det}\left(4\,A^T\,B^{-1}\right)$

c) Hallar el $\boldsymbol{det}\left(A^{-1}B^2\right)$

a) $|B| = \underbrace{2.\frac{2}{3}}_{\substack{\text{Factoreamos}\\ \text{la primera y}\\ \text{tercera fila}}} . \underbrace{(-1)}_{\substack{\text{Cambio de}\\ \text{signo por}\\ \text{permutación}\\ \text{de filas}}} .|A| = 2.\frac{2}{3}.(-1).3 = -4 \Rightarrow \boxed{|B| = -4}$

Recuerda que en la segunda fila cuando sumamos o restamos el determinante no se altera.

b) $\left|4.\,A^T.B^{-1}\right| = (4)^3.\left|A^T\right|.\left|B^{-1}\right| = 64.|A|.\frac{1}{|B|} = 64.3.\frac{1}{-4} = -48 \Rightarrow \boxed{\left|4.\,A^T.B^{-1}\right| = -48}$

c) $\left|A^{-1}.B^2\right| = \left|A^{-1}\right|.\left|B^2\right| = \frac{1}{|A|}\cdot|B|^2 = \frac{1}{3}\cdot(-4)^2 = \frac{16}{3} \Rightarrow \boxed{\left|A^{-1}.B^2\right| = \frac{16}{3}}$

Ejercicio 3

Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} m & n & p \\ q & r & s \\ t & u & v \end{vmatrix} = 7$ y $|B| = \begin{vmatrix} q & r & s \\ m+4t & n+4u & p+4v \\ 3t & 3u & 3v \end{vmatrix}$

a) Calcular el $|B|$ aplicando propiedades. Justificar

b) Calcular $\left|\left(\frac{2}{3}A^T\right)^{-1}.B^T\right|$ aplicando propiedades. Justificar

c) Calcular el $|C|$ sabiendo que $\left|3\,A^T B^{-1} A^{-1} C^{-1} B^T\right| = -6$

a) $|B| = \underbrace{3}_{\substack{\text{Factoreamos}\\ \text{la primera}\\ \text{fila}}} . \underbrace{(-1)}_{\substack{\text{Cambio de}\\ \text{signo por}\\ \text{permutación}\\ \text{de filas}}} .|A| = 3.(-1).7 = -21 \Rightarrow \boxed{|B| = -21}$

b)

$$\left|\left(\frac{2}{3}A^T\right)^{-1}\cdot B^T\right| = \left|\left(\frac{2}{3}A^T\right)^{-1}\right|\cdot\left|B^T\right| = \frac{1}{\left|\left(\frac{2}{3}A^T\right)\right|}\left|B^T\right| = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3|A|}|B| = \frac{1}{\frac{8}{27}\cdot|A|}\cdot|B| = \frac{27}{8\cdot|A|}\cdot|B| = \frac{27}{8\cdot 7}\cdot(-21) = \boxed{-\frac{81}{8}}$$

c)

$$\left|3\,A^T B^{-1} A^{-1} C^{-1} B^T\right| = -6 \Rightarrow 3^3\left|A^T\right|\left|B^{-1}\right|\left|A^{-1}\right|\left|C^{-1}\right|\left|B^T\right| = -6 \Rightarrow 27\cdot\cancel{|A|}\cdot\frac{1}{\cancel{|B|}}\cdot\frac{1}{\cancel{|A|}}\cdot\frac{1}{|C|}\cdot\cancel{|B|} = -6 \Rightarrow$$

$$\textit{simplificando} \Rightarrow 27\cdot\frac{1}{|C|}\cdot = -6 \Rightarrow \boxed{|C| = -\frac{9}{2}}$$

CÁLCULO DE DETERMINANTES POR EL MÉTODO DE GAUSS

El método de Gauss facilita el cálculo de los determinantes usando las propiedades de éstos.
Dicho método consiste en hallar un determinante equivalente al dado con el mismo valor del original pero triangular.
De esta forma el problema se reduce al cálculo del determinante de una matriz triangular, usando la propiedad "11" de los determinantes.
Para conseguir triangular el determinante se pueden aplicar las siguientes operaciones:

- Permutar 2 filas ó 2 columnas.
- Multiplicar o dividir una línea por un número no nulo.
- Sumarle o restarle a una línea otra paralela multiplicada por un número no nulo.

Ejemplos

a)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1.2.3 = 6$$

Observa el determinante de la matriz, la misma no es triangular, permutamos sus filas y así la obtenemos.
Calculamos el determinante como multiplicación de los elementos de la diagonal.

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 1.1.(-4) = -4$$

c)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ F_4 - 6F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -12 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_3 + F_2 \\ F_4 - F_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} = 1.1.(-1).(-11) = 11$$

Observa los determinantes de las matrices, las mismas no son triangulares, por lo tanto efectuamos operaciones entre sus filas para obtenerlas.
Calculamos el determinante de las mismas como multiplicación de los elementos de su diagonal.

MATRIZ ADJUNTA

Dada una matriz cuadrada A, se llama matriz adjunta de A, y se representa por *Adj(A)*, a la traspuesta de la matriz que resulta de sustituir cada elemento por su adjunto.

$$\boxed{Adj(A) = (A_{ij})^T}$$

Ejemplos

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Reemplazamos cada elemento por su adjunto $A_{ij}=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Trasponer la matriz de los adjuntos $Adj(A)=(A_{ij})^T=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Reemplazamos cada elemento por su adjunto $A_{ij}=\begin{pmatrix} 8 & -12 & -7 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Trasponer la matriz de los adjuntos $Adj(A)=(A_{ij})^T=\begin{pmatrix} 8 & -12 & -7 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}^T=$

$$=\begin{pmatrix} 8 & 1 & -2 \\ -12 & -1 & 3 \\ -7 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

PROPIEDAD:

Sea $A \in \Re^{nxn}$ se verifica que: $\boxed{A\,.\,Adj\,A\ = Adj\,A\,.\,A\ = |A|\,.\,I}$

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $|A|=2 \wedge Adj(A)=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$A.Adj(A)=Adj(A).A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=2.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=|A|.I$$

CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE PARA LA EXISTENCIA DE MATRIZ INVERSA

Es condición necesaria y suficiente para la existencia de la inversa de una matriz $A = \left(a_{ij}\right) \in \Re^{nxn}$ que $|A| \neq 0$

- Si existe A^{-1}, entonces: $|A| \neq 0$

Demostración:

Por definición de matriz inversa...

$A \,.\, A^{-1} = I$

Aplicando determinantes en ambos miembros...

$\left|A \,.\, A^{-1}\right| = |I|$

Por propiedad del determinante del producto y propiedad del determinante de la Identidad....

$|A| \,.\, \left|A^{-1}\right| = 1 \;\wedge\; 1 \neq 0$

Por lo tanto...

$|A| \neq 0$

- Si $|A| \neq 0$ entonces: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} Adj\left(A\right)$

Demostración:

Partiendo de la propiedad de la matriz Adjunta $A \,.\, Adj\left(A\right) = |A| . I$

Si tomamos en consideración que $|A| \neq 0$ podemos dividir miembro a miembro la expresión anterior, simplificando y sabiendo que la inversa si existe es única, entonces

A^{-1} ya que $A \,.\, A^{-1} = I$

$$\frac{A \,.\, Adj\left(A\right)}{|A|} = \frac{|A| . I}{|A|} \Rightarrow A \cdot \frac{Adj\left(A\right)}{|A|} = I \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj\left(A\right)}$$

CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA USANDO DETERMINANTES

Ejemplos

Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ **1)** Calculamos el determinante de A: $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=2\neq 0 \Rightarrow$ **A es regular**

2) Hallamos la matriz Adjunta de A: $Adj(A)=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

3) Hallamos la matriz inversa de A aplicando la relación:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}.Adj(A)=\frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ **1)** Calculamos el determinante de B: $|B|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}=1\neq 0 \Rightarrow$ **B es regular**

2) Hallamos la matriz Adjunta de B: $Adj(B)=\begin{pmatrix} 8 & 1 & -2 \\ -12 & -1 & 3 \\ -7 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

3) Hallamos la matriz inversa de **A** aplicando la relación:

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}.Adj(B)=\frac{1}{1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & -2 \\ -12 & -1 & 3 \\ -7 & -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 1 & -2 \\ -12 & -1 & 3 \\ -7 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{B^{-1}=\begin{pmatrix} 8 & 1 & -2 \\ -12 & -1 & 3 \\ -7 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

Se denominan transformaciones elementales a ciertas transformaciones que se realizan en una matriz y que nos serán de utilidad en el cálculo de la matriz inversa de una matriz regular y en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

TRANSFORMACIONES ELEMENTALES FILA

- **Transformaciones** $F_i \rightleftarrows F_j$

Permuta las filas i y j de una matriz $A \in \Re^{mxn}$

- **Transformaciones** αF_i

Multiplica la fila i de una matriz $A \in \Re^{mxn}$ por un número $\alpha \neq 0$, siendo $\alpha \in \Re$

- **Transformaciones** $F_i + \alpha F_j$

Suma a la fila i de una matriz $A \in \Re^{mxn}$ su fila j multiplicada por $\alpha \neq 0$, siendo $\alpha \in \Re$

MÉTODO DE GAUSS JORDAN PARA HALLAR LA INVERSA DE UNA MATRIZ

Sea A una matriz cuadrada regular de orden n, consideremos la matriz $(A \mid I)$ de orden $n \times 2n$ formada por la matriz A y la matriz $I \in \Re^{mxn}$.

Se aplican sucesivas transformaciones elementales a las filas de la matriz $(A \mid I)$, de modo que la matriz A se trasforme en la matriz Identidad.

Si las primeras n columnas de $(A \mid I)$ corresponden luego de aplicar las transformaciones elementales a la matriz Identidad, entonces las últimas n columnas corresponden a la matriz A^{-1} (matriz inversa de A)

$$(A \mid I) \sim \cdots \sim (I \mid A^{-1})$$

Ejemplo 1

Veamos a partir de un ejemplo la aplicación del método para hallar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{(A \mid I)} \begin{matrix} \\ F_2 - 2F_1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \frac{1}{2}F_2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{matrix} F_1 - 3F_2 \\ \\ \end{matrix} \sim \underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)}_{(I \mid A^{-1})}$$

Ejemplo 2

Hallar la matriz inversa de $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{(B\,|\,I)}\begin{array}{l} \\ F_2-3F_1 \\ F_3-5F_1 \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \frac{1}{2}F_2 \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ F_3-F_2 \end{array}\sim$$

*Se aplican transformaciones elementales a las filas de la matriz $(B\,|\,I)$ con el objetivo de crear ceros debajo de la diagonal principal de **B** y **1** en su diagonal principal*

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ 2F_2 \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -1 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ F_2+\frac{3}{2}F_3 \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -12 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -1 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} F_1-F_3 \\ \\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -12 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -1 & 2 \end{array}\right)}_{(I\,|\,B^{-1})}$$

*Se aplican transformaciones elementales a las filas de la matriz $(B\,|\,I)$ con el objetivo de crear ceros por encima de la diagonal principal de **B***

Ejemplo 3

Hallar la matriz inversa de $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{(C\,|\,I)}\begin{array}{l} \\ F_2-3F_1 \\ F_3-4F_1 \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \frac{1}{2}F_2 \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ F_3-2F_2 \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Atención!!! *Si al aplicar una transformación elemental en una fila se obtiene una fila completa de ceros en las n primeras columnas de, $(C\,|\,I)$ entonces debemos concluir que la matriz C no admite inversa, es decir no existe C^{-1}*

RANGO DE UNA MATRIZ USANDO DETERMINANTES

El rango de una matriz $A \in \Re^{nxn}$ se define como el orden del determinante de mayor orden no nulo que puede obtenerse de la matriz

Consideremos la matriz $A = (a_{ij})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1. Si ***det(A)* $\neq 0$** entonces el ***rango de A*** coincide con el orden de la matriz ***r(A) = n***
2. Si ***det(A)* = 0** entonces ***r(A) < n*** y el ***rango de A*** coincide con el orden del primer determinante no nulo que se pueda obtener a partir de la matriz ***A.***

Ejemplo 1

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ determinar el rango usando determinantes

Calculamos el determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ \boxed{0} & 1 & 2 \\ \boxed{3} & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 0.(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) = 3$$

Ejemplo 2

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ determinar el rango usando determinantes

Calculamos el determinante de A $\quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$ dado que $F_3 = F_1 + F_2 \ \Rightarrow \ r(A) \neq 3$

Calculamos los determinantes de orden 2 hasta hallar uno no nulo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) = 2$

Ejemplo 3

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ determinar el rango usando determinantes

Teniendo en cuenta que es una matriz de orden **2*x*3**, concluimos que el rango de A no puede ser **3**, calculamos entonces los determinantes de orden **2** $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=3\neq 0 \;\Rightarrow\; r(A)=2$

Ejemplo 4

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ determinar el rango usando determinantes

Teniendo en cuenta que es una matriz de orden **2*x*3**, concluimos que el rango de A no puede ser **3**.

Consideramos entonces los determinantes de orden **2**, los que son nulos dado que las filas son proporcionales.

Finalmente calculamos los determinantes de orden 1, hasta encontrar un determinante no nulo $|2|=2\neq 0 \;\Rightarrow\; r(A)=1$

Ejemplo 5

El rango de la matriz $I\in\Re^{nxn}$ es $r(I)=n$

Dada la matriz $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ determinar su rango usando determinantes

Sabemos por propiedades de los determinantes que $|I|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1$ por lo tanto $r(I)=3$

Observación

El rango de la matriz $N\in\Re^{mxn}$ es $r(N)=0$

CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ POR EL MÉTODO DE GAUSS –JORDAN

Sea una matriz $\boldsymbol{A}$ no nula debemos elegir **cualquier elemento de la misma distinto de cero** al que llamaremos **pivote**

Supongamos que la matriz $\boldsymbol{A}$ es $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ y elegimos como elemento a *“a”*

Si $a \neq 1$ entonces debemos dividir la fila por dicho número

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{a}{a} & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} & \frac{d}{a} & \frac{e}{a} \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \overset{\text{Pivote}}{1} & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} & \frac{d}{a} & \frac{e}{a} \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

A continuación escribimos la matriz donde la fila del pivote queda como está y la columna que lo contiene se completa con ceros.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} & \frac{d}{a} & \frac{e}{a} \\ 0 & \square & \square & \square & \square \\ 0 & \square & \square & \square & \square \\ 0 & \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

Los restantes números que son los transformados de los coeficientes “*g*”, “*h*”, “*i*”, “*j*”, “*l*”, “*m*”, “*n*”, “*o*”, “…” se calculan utilizando la regla del rectángulo

El transformado de ***“j”*** es: $\begin{array}{cc} 1 & \frac{e}{a} \\ f & j \end{array}$ **o sea** $\boxed{1.j - f.\frac{e}{a}}$

El transformado de ***“i”*** es: $\begin{array}{cc} 1 & \frac{d}{a} \\ f & i \end{array}$ **o sea** $\boxed{1.i - f.\frac{d}{a}}$

El transformado de ***“h”*** es: $\begin{array}{cc} 1 & \frac{c}{a} \\ f & h \end{array}$ **o sea** $\boxed{1.h - f.\frac{c}{a}}$

El transformado de ***“g”*** es: $\begin{array}{cc} 1 & \frac{b}{a} \\ f & g \end{array}$ **o sea** $\boxed{1.g - f.\frac{b}{a}}$

Obtenidos todos los transformados, en la etapa siguiente se reitera el procedimiento eligiendo un ***“pivote”*** que no figure ni en las filas ni en las columnas de los ***pivotes anteriores***.

¿Cuándo finaliza el procedimiento?

El procedimiento finaliza cuando no es posible obtener ningún ***“pivote”*** (distinto de cero) en las condiciones ya señaladas anteriormente.

Estamos entonces en condiciones de determinar el rango de la matriz, observamos las columnas de la misma y concluimos:

Rango de una matriz es el número de columnas canónicas distintas.

Llamamos columna canónica a la columna que tiene un elemento igual a 1 y los restantes elementos son ceros.

RESUMEN DEL PROCEDIMIENTO:

Para calcular el rango de una matriz por Gauss Jordan procedemos según los siguientes pasos:

Se elige como pivote cualquier elemento no nulo de la matriz dada, y si éste no es un 1 se divide por dicho número la fila correspondiente

A continuación se escribe la fila del pivote

Los restantes elementos de la columna del pivote se transforman en ceros

El transformado de todo elemento que no figure en la fila, ni en la columna del pivote, se determina siguiendo la "regla del rectángulo"

Se reitera el mecanismo eligiendo como pivote un elemento no nulo que no pertenezca ni a las filas, ni a las columnas de los pivotes anteriores

El procedimiento finaliza cuando no es posible obtener ningún "pivote" (distinto de cero) en las condiciones señaladas

Concluido el procedimiento se cuenta la cantidad de columnas canónicas distintas, y ese es el rango de la matriz

Ejemplo 1

Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Recordemos que: El "pivote" puede ser cualquier elemento no nulo (≠0). Si algún elemento es la unidad, se lo elegirá como "pivote" para evitar cálculos.

Elegimos el 1 como pivote

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{-1} & \boxed{-1} & \boxed{3} \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{-1} \\ 0 & \boxed{-2} & \boxed{-3} & \boxed{4} \end{pmatrix}$$

La fila del pivote queda igual

Los restantes números se calculan aplicando la regla del rectángulo

La columna del pivote se completa con ceros

Escribimos la matriz obtenida en el paso anterior y volvemos a pivotear.

Elegimos el 1 como pivote

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \boxed{-3} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{1} & \boxed{2} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{1} & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

Elegimos el 1 como pivote

Escribimos la matriz obtenida en el paso anterior y volvemos a pivotear.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & 0 & \boxed{7} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & \boxed{-5} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

El procedimiento ha terminado, ya que no es posible elegir otro nuevo "pivote"

Resumiendo, esta es la secuencia de pasos realizados:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El **rango** de la matriz $\boldsymbol{A}$ es **3** y se anota $r(A) = 3$ ya que el número de ***columnas canónicas distintas*** *es* **3**

Ejemplo 2

Aclaración
En la fila 1 no podemos elegir pivotes porque todos los elementos son nulos. El procedimiento terminó.

$$B=\begin{pmatrix}4&-2&0\\-2&1&0\\1&1&-2\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0&-6&8\\0&3&-4\\1&1&-2\end{pmatrix}\frac{1}{3}.F_2\approx\begin{pmatrix}0&-6&8\\0&1&-\frac{4}{3}\\1&1&-2\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}}&\begin{matrix}0\\-\frac{4}{3}\\-\frac{2}{3}\end{matrix}\end{pmatrix}$$

Importante!
La fila 3 no puede volver a ser elegida y decidimos pivotear en la 2, como no hay unos multiplicamos por 1/3para obtenerlo

$r(B)=2$ ya que hemos obtenido dos columnas canónicas distintas

Ejemplo 3

$$C=\begin{pmatrix}1&1&-2&1&3\\2&-1&2&2&6\\3&2&-4&-3&-9\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&1&-2&1&3\\0&-3&6&0&0\\0&-1&2&-6&-18\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\cdot F_2\approx\begin{pmatrix}1&1&-2&1&3\\0&1&-2&0&0\\0&-1&2&-6&-18\end{pmatrix}\approx$$

$$\approx\begin{pmatrix}1&0&0&1&3\\0&1&-2&0&0\\0&0&0&-6&-18\end{pmatrix}-\frac{1}{6}\cdot F_3\approx\approx\begin{pmatrix}1&0&0&1&3\\0&1&-2&0&0\\0&0&0&1&3\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}}&\begin{matrix}0\\-2\\0\end{matrix}&\boxed{\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}}&\begin{matrix}0\\0\\3\end{matrix}\end{pmatrix}$$

$r(C)=3$ ya que hemos obtenido tres columnas canónicas distintas

Ejemplo 4

$$D=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\2&2&0&2\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}}&\begin{matrix}1\\0\end{matrix}&\begin{matrix}0\\0\end{matrix}&\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\end{pmatrix}$$

$r(D)=1$

NO podemos tomar pivotes en la segunda fila porque todos los elementos son nulos.
El procedimiento terminó.
Nos quedan tres columnas canónicas iguales pero la definición exige columnas canónicas distintas por ello tomamos a una sola de ellas y el rango es 1

Aclaración

TEOREMAS SOBRE MATRICES

1) *La suma de una matriz cuadrada y su traspuesta es una matriz simétrica*.

En símbolos: $\forall\, A \in \Re^{nxn} : A + A^T$ es simétrica

Datos: $A \in \Re^{nxn}$ **Tesis:** $A + A^T$ es simétrica $\boxed{A + A^T = \left(A + A^T \right)^T}$

Demostración: Partiendo de uno de los miembros de la tesis

$$\left(A + A^T \right)^T \underset{1}{=} A^T + \left(A^T \right)^T \underset{2}{=} A^T + A \underset{3}{=} A + A^T$$

1. Por propiedad de la traspuesta de una suma.

2. Por propiedad de la traspuesta de la traspuesta de una matriz.

3. Por propiedad conmutativa de la adición.

2) *La diferencia de toda matriz cuadrada y su traspuesta es una matriz antisimétrica*

En símbolos: $\forall\, A \in \Re^{nxn} : A - A^T$ es antisimétrica

Datos: $A \in \Re^{nxn}$ **Tesis:** $A - A^T$ es antisimétrica $\boxed{A - A^T = -\left(A - A^T \right)^T}$

Demostración: Partiendo de uno de los miembros de la tesis

$$-\left[\left(A - A^T \right)^T \right] \underset{1}{=} -\left[A^T - \left(A^T \right)^T \right] \underset{2}{=} -\left[A^T - A \right] \underset{3}{=} -A^T + A \underset{4}{=} A - A^T$$

1. Por propiedad de la traspuesta de una suma.

2. Por propiedad de la traspuesta de la traspuesta de una matriz.

3. Por propiedad distributiva de "." con respecto a "+"

4. Por propiedad conmutativa de la adición.

3) *El producto de una matriz cuadrada y su traspuesta es una matriz simétrica.*

En símbolos: $\forall\, A \in \Re^{nxn} : A\,.\,A^T$ es simétrica

Datos: $A \in \Re^{nxn}$ **Tesis:** $A\,.\,A^T$ es simétrica $\boxed{A.A^T = \left(A\,.\,A^T\right)^T}$

Demostración: Partiendo de uno de los miembros de la tesis

$$\left(A\,.\,A^T\right)^T \underset{1}{=} \left(A^T\right)^T .A^T \underset{2}{=} A\,.\,A^T$$

1. Por propiedad de la traspuesta de un producto.

2. Por propiedad de la traspuesta de la traspuesta de una matriz.

4) *Si A y B son ortogonales, entonces A. B es ortogonal*

Datos: **Tesis:** $\boxed{\left(A.B\right)^T = \left(A.B\right)^{-1}}$

A y $B \in \Re^{nxn}$

A es ortogonal $A^T = A^{-1}$

B es ortogonal $B^T = B^{-1}$

Demostración: Partiendo de uno de los miembros de la tesis

$$\left(A.B\right)^T \underset{1}{=} B^T.A^T \underset{2}{=} B^{-1}.A^{-1} \underset{3}{=} \left(A.B\right)^{-1}$$

1. Por propiedad de la traspuesta de un producto.

2. Por datos.

3. Por propiedad de la inversa de un producto.

5) Si A y B son cuadradas y regulares, entonces $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

Datos:

A y $B \in \Re^{nxn}$

A es regular $\Rightarrow$ existe A^{-1}

B es regular $\Rightarrow$ existe B^{-1}

Tesis:

$$\boxed{(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}}$$

Demostración:

$(A.B).(A.B)^{-1} = I$ .... Por definición de matriz inversa

$A^{-1}.(A.B).(A.B)^{-1} = A^{-1}.I$ .... Premultiplicando ambos miembros por A^{-1}

$I.B.(A.B)^{-1} = A^{-1}$ .... Por asociativa, elemento neutro y matriz inversa

$B.(A.B)^{-1} = A^{-1}$ .... Por definición de elemento neutro

$B^{-1}.B.(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$ .... Premultiplicando ambos miembros por B^{-1}

$I.(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$ .... Por definición de matriz inversa, asociatividad

$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$ .... Por definición de elemento neutro

ECUACIONES MATRICIALES

Sean A y B matrices inversibles resolvemos las siguientes ecuaciones:

$A.X = B$

$A^{-1}.(A.X) = A^{-1}.B$ .... multiplicamos ambos miembros por izquierda por A^{-1}

$(A^{-1}.A).X = A^{-1}.B$ .... aplicamos la propiedad asociativa

$I.X = A^{-1}.B$ .... aplicamos la definición de matriz inversa

$X = A^{-1}.B$ .... por definición de neutro en la multiplicación de matrices

$X.A = B$

$(X.A).A^{-1} = B.A^{-1}$ .... multiplicamos ambos miembros por derecha por A^{-1}

$X.(A.A^{-1}) = B.A^{-1}$ .... aplicamos la propiedad asociativa

$X.I = B.A^{-1}$ .... aplicamos la definición de matriz inversa

$X = B.A^{-1}$ .... por definición de neutro en la multiplicación de matrices

$$\begin{aligned}
A.X.B &= C \\
A^{-1}.(A.X).B &= A^{-1}.C \text{.............. multiplicamos ambos miembros por izquierda por } A^{-1} \\
(A^{-1}.A).X.B &= A^{-1}.C \text{.............. aplicamos la propiedad asociativa} \\
I.X.B &= A^{-1}.C \text{.............. aplicamos la definición de matriz inversa} \\
X.B &= A^{-1}.C \text{.............. por definición de neutro en la multiplicación de matrices} \\
(X.B).B^{-1} &= A^{-1}.C.B^{-1} \text{....... multiplicamos ambos miembros por derecha por } B^{-1} \\
X.(B.B^{-1}) &= A^{-1}.C.B^{-1} \text{....... aplicamos la propiedad asociativa} \\
X.I &= A^{-1}.C.B^{-1} \text{....... aplicamos la definición de matriz inversa} \\
X &= A^{-1}.C.B^{-1} \text{....... por definición de neutro en la multiplicación de matrices}
\end{aligned}$$

Ejemplos

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ Calcular el valor de X en las siguientes ecuaciones

a) $X.A=B+I$

$$\begin{aligned}
X.A &= B+I \\
X.A.A^{-1} &= (B+I).A^{-1} \\
X.I &= (B+I).A^{-1} \\
X &= (B+I).A^{-1}
\end{aligned}$$

$$\text{Si } A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \to X=\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right).\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 3\end{pmatrix}}$$

b) $A.X+B.X=C$

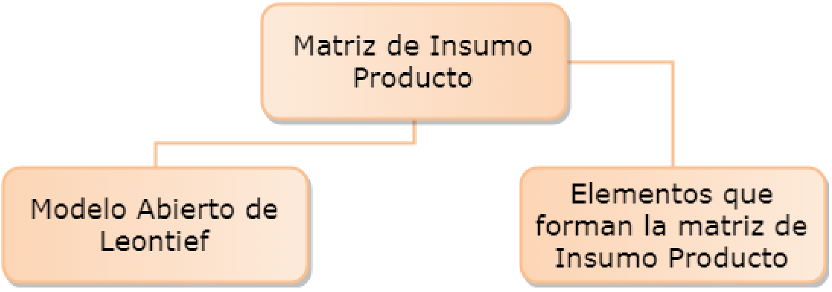
$$\begin{aligned}
A.X+B.X &= C \\
(A+B).X &= C \\
(A+B)^{-1}.(A+B).X &= (A+B)^{-1}C \\
I.X &= (A+B)^{-1}C \\
X &= (A+B)^{-1}C
\end{aligned}$$

$$X=\left[\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\right]^{-1}.\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{7} & -\frac{1}{7}\\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{7} & \frac{4}{7}\\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7}\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix}\frac{3}{7} & \frac{4}{7}\\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7}\end{pmatrix}}$$

MATRIZ INSUMO – PRODUCTO (MIP)

En este apartado continuamos con los temas vinculados a Matrices y Determinantes, pero nos enfocaremos en las aplicaciones de los mismos referidas a la economía. Estudiaremos el modelo de Matriz Insumo-Producto. Entre sus aplicaciones, además de describir las transacciones entre diversos sectores de la economía real, estudia el efecto que la variación de la demanda final de cualquiera de ellos tiene sobre todos los demás cuando se alcanza la situación de equilibrio.

Trabajaremos con cada uno de los elementos que compone la matriz insumo producto y con el modelo abierto de Leontief



COMPRENDIENDO LA MATRIZ INSUMO – PRODUCTO (MIP)

El Gobierno, mediante el decreto 1098/97 del 22/10/97, declaró de interés nacional la realización de un proyecto para la elaboración de una Matriz de Insumo Producto (MIP). Tal proyecto fue llevado a cabo en el ámbito de la Secretaría de Política Económica con la participación conjunta del Instituto Nacional de Estadística y Censos (INDEC) y la Subsecretaría de Programación Macroeconómica.

Con relación al proyecto el INDEC hizo un relevamiento de la información de las empresas referida a 1997, desde abril de ese año.

El **modelo de insumo producto fue desarrollado en la década del 30 por Wassily Leontief** culminando con la publicación, durante 1941, de las matrices de Estados Unidos de los años 1919 y 1929. A partir de entonces, diversos países comenzaron a elaborar los cuadros de insumo producto. La Argentina elaboró el cuadro del año 1950, con la colaboración de la Comisión Económica para América Latina (CEPAL) y para los años 1953, 1963 y 1973, con la intervención del Banco Central de la República Argentina (BCRA).

¿Qué es la Matriz Insumo Producto?

La MIP es un registro ordenado de las transacciones entre los sectores productivos orientadas a la satisfacción de la demanda final: consumo de las familias o del gobierno, inversiones físicas o exportaciones; en el proceso de generación de dichos bienes intermedios que se compran y se venden entre sí. De esta manera se puede ilustrar la interrelación entre los diversos sectores productivos y los impactos directos e indirectos que tiene sobre éstos un incremento en la demanda final. Así, **la MIP permite cuantificar el incremento de la producción de todos los sectores, derivado del aumento en la demanda final de uno de ellos en particular.**

¿Cuál es su utilidad?

*En materia de **decisiones empresariales***

Para el empresario, que conoce al sector de la economía, al que pertenecen los compradores de los bienes y servicios que él produce, pero no conoce al sector al que pertenecen los clientes de sus compradores, **la MIP le ofrece una descripción detallada de la ruta que siguen los bienes y servicios hasta llegar a la demanda final;** y le da la posibilidad de evaluar la participación de su empresa y así expandirse en el mercado.

Finalidad Estadística

La MIP otorga un marco de consistencia para las estimaciones que provienen de distintas fuentes: encuestas industriales, encuestas de gastos de los hogares, estadísticas de comercio exterior, etc.

Proyecciones de Comercio Exterior

Cuando la balanza de pagos impone restricciones a la política económica, el nivel de importaciones puede ser determinado a través de ejercicios de insumo- producto y se puede obtener la demanda directa de importaciones, como también la demanda indirecta de todos los sectores involucrados.
También se puede analizar las exportaciones y los insumos directos o indirectos que ellas requieran, algunos de los cuales pueden ser importados.

Análisis de Precios y Costos

La MIP permite determinar el efecto en el nivel general de los precios de la economía, ya sea como consecuencia de la modificación de alguno de los precios de los bienes o servicios (nacionales e importados), así como de la modificación de las tasas tributarias **al ofrecer una completa interrelación entre los sectores productivos.**

Políticas de empleo

La MIP permite medir los impactos directos e indirectos de las decisiones que se toman para reducir el desempleo. Por ejemplo la expansión de la actividad de la construcción, por obras públicas o el sector privado, tendrán influencia en la actividad misma, así como en todos los sectores vinculados a la misma, y el efecto que se produce con la incorporación de mano de obra se puede cuantificar sólo con una matriz de estas características.

Consideraciones Finales

La MIP es un importante instrumento analítico que describe en forma cuantitativa las relaciones entre los sectores, productos e insumos de la economía.
Constituye una herramienta central en el análisis económico ya que permite indagar las repercusiones sectoriales frente a las variaciones que son consecuencia de las decisiones de los particulares o de los responsables de la definición de la política económica.
Esta herramienta permite analizar las debilidades y fortalezas del sistema de estadísticas económicas del país.
En tiempos donde la tecnología y las comunicaciones generan sobreabundancia de información, los servicios estadísticos nacionales deben favorecer su adecuada interpretación en base a esquemas integradores, entre los cuales la MIP ocupa un lugar destacado.

Nota: Se utilizó como bibliografía la publicación del Indec “Comprendiendo la Matriz de Insumo Producto”. Si deseas conocer cómo se construyó la MIPA 97, las distintas matrices que se elaboraron y los resultados que se obtuvieron, ingresa a la página de Internet **http://www.indec.mecon.gov.ar/** y utilizando el buscador hallaras toda la información.

Una economía nacional o conjunto de todas las actividades económicas que se realizan en un país, puede resumirse, en forma más o menos detallada, mediante una matriz que recoge las transacciones que tienen lugar entre los distintos sectores de actividades en que fue dividido aquel sistema económico nacional.
El método, debido principalmente a ***W. Leontief***, busca estudiar la interdependencia entre los distintos sectores de la economía.
Consideraremos una economía hipotética donde hay **n** sectores (fábricas) que producen ***un solo tipo*** de producto final cada uno. Cada uno de dichos sectores necesita para su producción, ciertos insumos (materia prima), que son los productos finales de los otros sectores. Es decir que **la producción de una industria depende de los requerimientos de insumo de las n industrias.**
La tabla **Insumo Producto** nos sirve para registrar el destino de las mercaderías y servicios elaborados por un sector (productos), los que a su vez son adquiridos por otros sectores (como insumos) o por sus demandantes finales.
También existen otros factores de la producción tales como mano de obra, utilidades, etc. Además influye la demanda final, es decir el consumo de los hogares, el gobierno, etc.
El análisis de **la matriz insumo – producto** consiste en determinar la producción de cada uno de los sectores si **la demanda final** cambia, suponiendo que el resto de la economía no varía.
Podemos decir también que el análisis muestra como la producción de bienes primarios, intermedios y terminados se ve afectada por un cambio en la demanda de bienes terminados.
La tabla viene determinada por un cuadro de doble entrada, donde cada fila o columna está asociada a algún sector productivo que pertenece al sistema económico nacional.

ELEMENTOS QUE FORMAN LA MATRIZ INSUMO – PRODUCTO

	S_1	S_2	$\dots$	S_n	***Demanda Final*** (H)	***Producto Total*** (X)
S_1	b_{11}	b_{12}	$\dots$	b_{1n}	h_1	x_1
S_2	b_{21}	b_{21}	$\dots$	b_{2n}	h_2	x_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
S_n	b_{n1}	b_{n1}	$\dots$	b_{nn}	h_n	x_n
Valor Agregado $(V.A)$	VA_1	VA_2	$\dots$	VA_n	$\sum h_i = \sum VA_j$	
Producto Total (X)	x_1	x_2	$\dots$	x_n		$\sum x_i = \sum x_j$

Llamaremos S_1, S_2,..., S_n a los n sectores o industrias. Estos pueden ser: Agricultura, Industrias Extractivas, Industrias Fabriles, Construcción y Obras Públicas, Agua, Gas y Electricidad, Comercio Interior, Transportes, Servicios, etc.
La Tabla constituye una matriz de orden n+1 que puede particionarse en las siguientes submatrices:

La matriz $B = \left(b_{ij} \right) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ de n por n, llamada ***<u>matriz de las transacciones interindustriales</u>*** y representa el valor de los productos de la industria o sector i que son usados como insumos por la industria o el sector j en un año.
Los b_{ij} son mayores o iguales a cero.

Los b_{ij} pueden ser interpretados económicamente de dos maneras:

- Si se lee la matriz por filas representa el valor de las ventas realizadas por el sector i al sector j.

- Si se lee por columnas, representa el valor de las compras que el sector j efectuó al sector i. Estos valores suelen efectuarse a precio de productor, es decir, descontando del valor de la compra o de la venta, los márgenes comerciales, los gastos de transporte y los impuestos indirectos.

La matriz H (demanda final) $= \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ de una sola columna (n x 1) tiene como elementos a los h_i que representan la demanda final del sector **i**. Es decir representa el valor de las ventas efectuadas a los países extranjeros (exportaciones), consumo privado, consumo público (es decir las ventas a familias e instituciones estatales), bienes de capital (edificios, maquinaria, medios de transporte) vendidos, además de las diferencias de los stocks o existencias de bienes del sector que no fueron consumidos durante el año al que se refiere la tabla.

La matriz ***V.A*** (valor agregado) = $\begin{pmatrix} V.A_1 & V.A_2 & \cdots & V.A_n \end{pmatrix}$ de una sola fila (1 x n), tiene como elementos a los $V.A_j$ que representan lo gastado por la industria **j** en otros factores de la producción, es decir es la suma de las remuneraciones percibidas por los factores de producción. Detallamos a continuación estos factores y las remuneraciones que le corresponden:

FACTOR	REMUNERACIÖN
Trabajo	Salarios
Capital	Intereses
Recursos Materiales	Rentas
Capacidad Empresaria	Beneficios

La matriz ***X*** (producto total o valor bruto de producción), de una sola columna (n x 1), tiene como elementos x_i que son los valores de producción del sector ***i.***

La suma de los elementos de la fila i representa el total de bienes producidos por el sector i y consumidos por el sector j incluyendo al propio sector i.

$$\boxed{x_i = \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \right) + h_i}$$

Producto total de la industria i = Valor bruto de las ventas = Salidas totales de cada sector = Output total

La suma de los elementos de la columna j representa el total de los insumos de ese sector provenientes de los n sectores incluyendo el propio sector j.

$$\boxed{x_j = \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij} \right) + V.A_j}$$

Producto total de la industria j = Valor bruto de las compras = Entradas totales de cada sector = Imput total

Definimos una nueva matriz, que llamaremos $\boldsymbol{A}$ (matriz de los coeficientes técnicos o tecnológicos o coeficientes de utilización directa), cuyos elementos son los $\mathbf{a_{ij}}$ tal que: $a_{ij} = \dfrac{b_{ij}}{x_j} \Rightarrow b_{ij} = a_{ij} . x_j$

luego $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Como cada columna representa la estructura de costos de cada sector, si se divide cada elemento $\boldsymbol{b_{ij}}$ por el producto total del sector $\boldsymbol{j}$ o sea $\boldsymbol{x_j}$ se obtienen los coeficientes tecnológicos. Dichos elementos son adimensionales.

a_{ij} es el valor de los bienes intermedios producidos por el sector i, que el sector j necesita adquirir para producir una unidad.

Se debe recordar que el subíndice $\boldsymbol{i}$ indica la industria vendedora y el subíndice $\boldsymbol{j}$ la industria compradora.

La regla práctica para calcular los coeficientes es dividir cada elemento $\boldsymbol{b_{ij}}$ de la columna por el producto total que figura al pie de la misma.

MODELO ABIERTO DE LEONTIEF

Sabemos que:

$$x_i = \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \right) + h_i \qquad \wedge \qquad b_{ij} = a_{ij} \cdot x_j \qquad \text{luego} \qquad x_i = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \right) + h_i$$

Expresión que satisface cada fila de la **M.I.P**

En forma matricial:

$$\boxed{X = A \cdot X + H}$$

$$\boxed{X - A \cdot X = H}$$

$$\boxed{(I - A) \cdot X = H}$$

Expresión de la ecuación de Leontief para una economía abierta

Como $(I - A)$ es una matriz regular o sea inversible entonces

$$\boxed{X = (I - A)^{-1} \cdot H}$$

Expresión usada para determinar el producto total ante una variación de la demanda.

Cabe recordar:

- $\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} \right)$ es la ***matriz de Leontief***
- $\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} \right)^{-1}$ es la ***matriz de los coeficientes de requerimientos directos o indirectos.***

Los coeficientes técnicos no tienen en cuenta la forma en que cada sector está relacionado con los demás.

Si en un sector de la economía se produce un aumento en la demanda final, este sector deberá incrementar su producción y con ella se incrementará el nivel de insumos para satisfacer el nuevo nivel de demanda final, es decir va a demandar mayor cantidad de insumos de cada uno de los sectores e incluso de sí mismo.

El aumento en la demanda final de un sector influye sobre él y sobre los sectores que le proveen insumos.

Para medir las repercusiones directas e indirectas que resultan del aumento en una unidad de la demanda final debemos recurrir a la matriz de los coeficientes de requerimientos directos e indirectos.

Ejemplo 1 Planteamos el siguiente problema:

Una economía cerrada de un país (sin intercambio con el sector externo) dividida en tres sectores: ***A*** (agricultura), ***I*** (industria) y ***S*** (servicios) presenta la siguiente tabla de insumo producto correspondiente a un año base.

Sectores	*Agricultura A*	*Industria I*	*Servicios S*	*Demanda Final (H)*	*Producto Total (X)*
Agricultura A	**50**	**100**	**50**	**800**	**1000**
Industria I	**100**	**100**	**100**	**700**	**1000**
Servicios S	**100**	**300**	**100**	**1500**	**2000**
Valor Agregado V.A	**750**	**500**	**1750**	**3000**	**-----**
Producto Total (X)	**1000**	**1000**	**2000**	**-----**	**4000**

El análisis imput - output tiene múltiples aplicaciones, veamos en nuestro ejemplo.

Supongamos que las producciones de los sectores y las demandas finales están limitadas según lo indican las matrices $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1500 \\ 2000 \\ 2500 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1500 \end{pmatrix}$.

Se desea saber qué sucederá si la demanda aumenta al máximo.

Para resolver debemos aplicar: $\boldsymbol{X} = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} \right)^{-1} . \boldsymbol{H}$

Comencemos a calcular: $B=\begin{pmatrix} 50 & 100 & 50 \\ 100 & 100 & 100 \\ 100 & 300 & 100 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$A=\begin{pmatrix} \frac{50}{1000} & \frac{100}{1000} & \frac{50}{2000} \\ \frac{100}{1000} & \frac{100}{1000} & \frac{100}{2000} \\ \frac{100}{1000} & \frac{300}{1000} & \frac{100}{2000} \end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{20} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow I-A=\begin{pmatrix} \frac{19}{20} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{40} \\ -\frac{1}{10} & \frac{9}{10} & -\frac{1}{20} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & \frac{19}{20} \end{pmatrix} \Rightarrow |I-A|=\frac{157}{200}$$

$$(I-A)^T=\begin{pmatrix} \frac{19}{20} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{9}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{40} & -\frac{1}{20} & \frac{19}{20} \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\,(I-A)=\begin{pmatrix} \frac{21}{25} & \frac{41}{400} & \frac{11}{400} \\ \frac{1}{10} & \frac{9}{10} & \frac{1}{20} \\ \frac{3}{25} & \frac{59}{200} & \frac{169}{200} \end{pmatrix}$$

$$(I-A)^{-1}=\frac{1}{|I-A|}.Adj(I-A)=\begin{pmatrix} \frac{168}{157} & \frac{41}{314} & \frac{11}{314} \\ \frac{20}{157} & \frac{180}{157} & \frac{10}{157} \\ \frac{24}{157} & \frac{59}{157} & \frac{169}{157} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X=(I-A)^{-1}.H=\begin{pmatrix} \frac{168}{157} & \frac{41}{314} & \frac{11}{314} \\ \frac{20}{157} & \frac{180}{157} & \frac{10}{157} \\ \frac{24}{157} & \frac{59}{157} & \frac{169}{157} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1500 \end{pmatrix}$$

Aproximadamente: $X=\begin{pmatrix} 1253 \\ 1369 \\ 2143 \end{pmatrix}$

Como los límites productivos, estaban dados por $X=\begin{pmatrix} 1500 \\ 2000 \\ 2500 \end{pmatrix}$ vemos que la demanda puede ser satisfecha.

Ejemplo 2

Dada la matriz de insumo - producto de una economía hipotética de dos industrias ***A*** y ***B*** en millones de pesos, construir el cuadro completo si la demanda final se duplica para la industria ***A*** y se duplica para la industria ***B***.

	A	***B***	***DF***	***PT***
A	**4**	**4**	**4**	**12**
B	**6**	**6**	**12**	**24**
VA	**2**	**14**	**16**	**-**
PT	**12**	**24**	**-**	**36**

$$\boxed{X=(I-A)^{-1}H} \qquad A=\begin{pmatrix}\frac{4}{12} & \frac{4}{24}\\ \frac{6}{12} & \frac{6}{24}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix} \qquad I-A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} |I-A|=\begin{vmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\end{vmatrix}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{12} \\ (I-A)^{T}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{6} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}\Rightarrow Adj(I-A)=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow (I-A)^{-1}=\frac{1}{|I-A|}Adj(I-A)$$

$$\Rightarrow (I-A)^{-1}=\frac{1}{\frac{5}{12}}\cdot\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3}\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad (I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{9}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{6}{5} & \frac{8}{5}\end{pmatrix}$$

$$X=(I-A)^{-1}H=\begin{pmatrix}\frac{9}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{6}{5} & \frac{8}{5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\ 24\end{pmatrix} \qquad \boxed{X=\begin{pmatrix}24\\ 48\end{pmatrix}}$$

Tabla para la nueva demanda

	A	***B***	***DF***	***PT***
A	**8**	**8**	**8**	**24**
B	**12**	**12**	**24**	**48**
VA	**4**	**28**	**32**	**–**
PT	**24**	**48**	**–**	**72**

CAPÍTULO 3

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

MAPA CONCEPTUAL

Mapa Conceptual
Sistemas de Ecuaciones

Escaneando el QR observarás el mapa conceptual del Capítulo 3

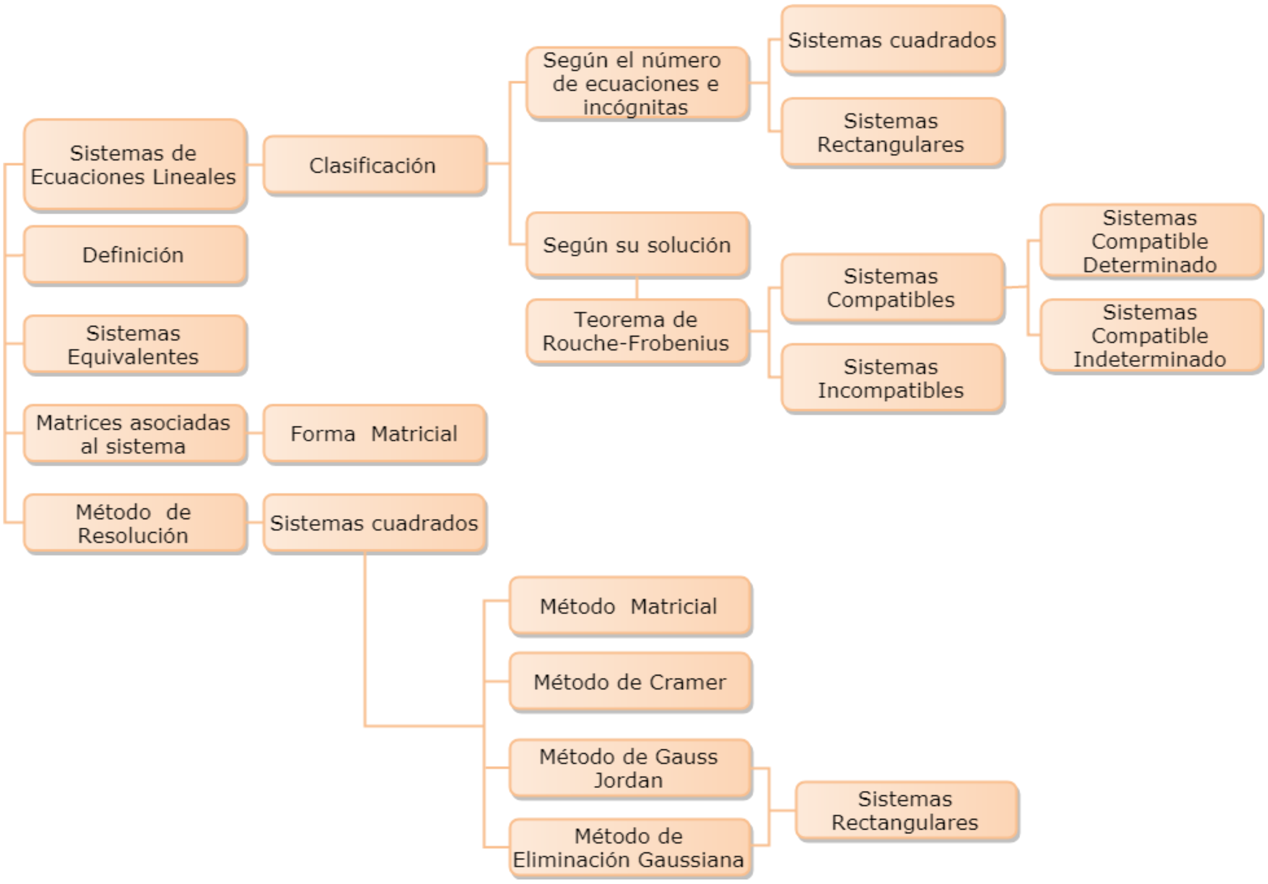
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En este apartado abordaremos el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales.

A través de los contenidos del capítulo intentaremos ayudarlos a desarrollar habilidades para modelizar, resolver e interpretar problemas sobre cuestiones económicas y/o administrativas.

Es importante destacar la vinculación de estos nuevos temas con los ya desarrollados en los capítulos anteriores, ya que todo sistema de ecuaciones puede expresarse en forma matricial y en algunos casos pueden resolverse a través de una ecuación matricial.

Estudiaremos diversos métodos para hallar la solución de los sistemas lineales y las condiciones necesarias para su aplicación. Entre ellos mencionaremos: matriz inversa. Cramer, Gauss y Gauss Jordan. Realizaremos un análisis de las soluciones y una clasificación de los sistemas de acuerdo con ellas.



Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ***m*** ecuaciones lineales con ***n*** incógnitas que se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \dots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \dots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \dots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \dots + a_{mn}\,x_n = b_m \end{cases}$$

Una ecuación lineal es aquella donde sus incógnitas están relacionadas entre sí mediante sumas y afectadas por el exponente uno.

Los números reales $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ en general a_{ij} son los coeficientes de las incógnitas.
Las incógnitas del sistema están representadas por $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$.
Los números reales $b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_m$ son los términos independientes del sistema.

Ejemplos

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 3x_4 = -1 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$$

Sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas

$$\begin{cases} 5x - 2y + z = 3 \\ -x + 3y + 2z = 1 \\ 2x + y - 4z = 7 \end{cases}$$

Sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ -x + 4y = 3 \\ 2x + y = 1 \\ 5x - y = 0 \end{cases}$$

Sistema de cuatro ecuaciones con dos incógnitas

En el caso que las incógnitas sean 2 se suelen designar simplemente por x e y en vez de x_1 y x_2, y en el caso de tres, x, y, z en lugar de x_1, x_2 y x_3 pero esto es indiferente a la hora de resolver el sistema.

<u>Solución del sistema</u>: es el conjunto de valores de la n-upla $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ que satisfacen simultáneamente a todas y cada una de las ecuaciones del sistema.

<u>Conjunto solución</u>: es el conjunto formado por todas las soluciones del sistema.

Frente a un sistema de ecuaciones se presentan dos situaciones sobre las que debemos prestar atención, su discusión y resolución:

Resolución de un Sistema

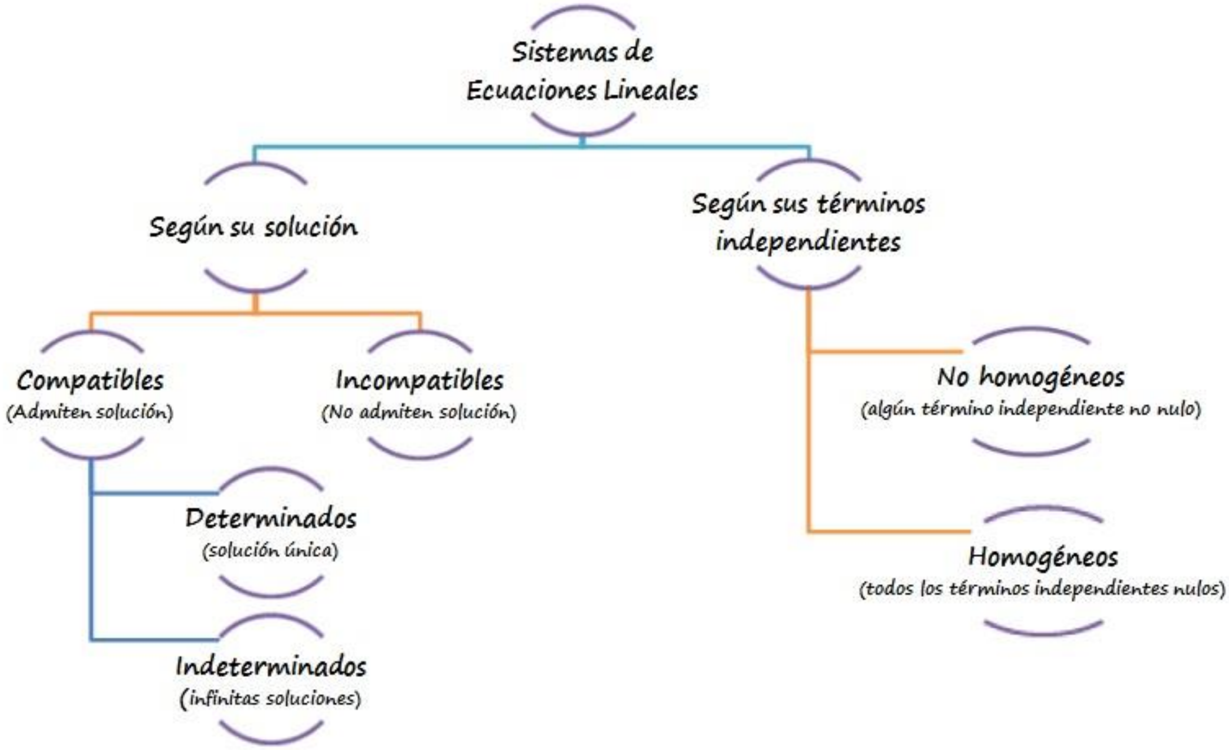
- Es resolver el sistema o sea encontrar la o las soluciones, si tas tiene.

Discusión de un Sistema

- Es analizar todas las posibilidades de solución, dependiendo del número de ecuaciones, el número de incógnitas y de la relación existente entre unas y otras
- Es determinar si el sistema tiene solución o no y en caso de tener solución, determinar cuántas tiene.

A lo largo del transcurso de la siguiente unidad desarrollaremos como discutir y resolver los sistemas de ecuaciones lineales proponiéndoles distintas alternativas desde la teoría y la práctica.

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES



A continuación les proponemos observar los dos mapas conceptuales referidos a los sistemas de ecuaciones de dos ecuaciones con dos incógnitas y de tres ecuaciones con tres incógnitas, los métodos de resolución, su representación en el plano y en el espacio y su clasificación.

MAPA CONCEPTUAL EN $\Re^2$

Dado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, cada ecuación del sistema representa gráficamente una recta en el plano.
A partir del siguiente mapa conceptual sintetizamos los posibles métodos de resolución analítica, la resolución gráfica y su interpretación geométrica

MAPA CONCEPTUAL EN $\Re^3$

Dado un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, cada ecuación del sistema representa gráficamente un plano en el espacio.
A partir del siguiente mapa conceptual sintetizamos los posibles métodos de resolución analítica, la resolución gráfica y su interpretación geométrica

EXPRESIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Usando la multiplicación de matrices un sistema de ecuaciones lineales se puede expresar de la siguiente forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{mxn} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}_{nx1} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}}_{mx1} \text{ O bien } \boldsymbol{A.X = B}$$

La matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *es la matriz de los coeficientes, de orden* $m\,x\,n$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ *es la matriz de las incógnitas, de orden* $n\,x\,1$

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ *es la matriz de los términos independientes, de orden* $m\,x\,1$

La matriz de las incógnitas X y la matriz de los términos independientes B son ambas matrices columna.

También usaremos la ***matriz ampliada***, que se representa por A', que es la matriz de los coeficientes a la cual le hemos agregado la matriz columna de los términos independientes:

Matriz ampliada

$$A' = \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Ejemplo 1 Dado el sistema $\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 3x-2y-4z=-3 \\ 5x-y-z=4 \end{cases}$ entonces las matrices del sistema son:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

En forma matricial el sistema se expresa $A.X=B \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ y si efectuamos la operación en el primer miembro obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 2x+3y+z \\ 3x-2y-4z \\ 5x-y-z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Dos matrices del mismo orden son iguales si los elementos que ocupan idénticas posiciones son iguales

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 3x-2y-4z=-3 \\ 5x-y-z=4 \end{cases}}_{\textit{Sistema original}}$$

Ejemplo 2 Dado el sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=0 \\ z-x=2 \end{cases}$ si queremos escribir las matrices correspondientes al sistema deberemos observar que las variables en la tercera ecuación no están ordenadas, debiera estar primero la "x" y después la "z" entonces escribimos nuevamente el sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=0 \\ -x+z=2 \end{cases}$ luego escribimos las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

La forma matricial del sistema es $A.X=B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ejemplo 3 Dado el sistema $\begin{cases} 2x-3y+z+t=3 \\ x-5y-4z-t=5 \end{cases}$ entonces las matrices del sistema son:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad A'=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -4 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

La forma matricial del sistema es $A.X=B \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}}_{2x4}.\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{4x1}=\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{2x1}$

TRANSFORMACIONES ELEMENTALES EN UN SISTEMA DE ECUACIONES

Para resolver un sistema hay que transformarlo en otro sistema más simple, ***equivalente*** al sistema original, o sea debe tener las mismas soluciones.

Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes sí y sólo si tienen el mismo conjunto solución

Se llaman ***operaciones*** o ***transformaciones elementales*** a aquellas modificaciones en un sistema de ecuaciones que lo transforman en otro equivalente.

$$\textit{Recordar que: } A = B \ \ y \ \ C = D \ \ \textit{se cumple que} \begin{cases} \bullet \quad n.A = n.B \\ \bullet \quad n.A + C = n.B + D \end{cases}$$

Las siguientes transformaciones son elementales:

a) Permutar el orden de las ecuaciones del sistema.

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 & E_1 \\ 3x - 2y - 4z = -3 & E_2 \\ 5x - y - z = 4 & E_3 \end{cases} \quad \textit{es equivalente al sistema que resulta de permutar } E_2 \textit{ con } E_1 \quad \begin{cases} 3x - 2y - 4z = -3 & E_2 \\ x - 3y + z = 1 & E_1 \\ 5x - y - z = 4 & E_3 \end{cases}$$

b) Multiplicar una ecuación del sistema por un número real distinto de cero.

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 & E_1 \\ 3x - 2y - 4z = -3 & E_2 \\ 5x - y - z = 4 & E_3 \end{cases} \quad \textit{es equivalente al sistema que resulta de multiplicar } E_3 \textit{ por } -\frac{1}{5} \quad \begin{cases} x - 3y + z = 1 & E_1 \\ 3x - 2y - 4z = -3 & E_2 \\ -x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z = -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5}E_3 \end{cases}$$

c) Sumar a una ecuación otra cualquiera del sistema.

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 & E_1 \\ 3x - 2y - 4z = -3 & E_2 \\ 5x - y - z = 4 & E_3 \end{cases} \quad \textit{es equivalente al sistema que resulta de sumar } E_3 \textit{ con } E_1 \quad \begin{cases} x - 3y + z = 1 & E_1 \\ 3x - 2y - 4z = -3 & E_2 \\ 6x - 4y = 5 & E_3 + E_1 \end{cases}$$

d) Sumar a una ecuación otra cualquiera del sistema multiplicada por un número real distinto de cero.

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 & E_1 \\ 3x - 2y - 4z = -3 & E_2 \\ 5x - y - z = 4 & E_3 \end{cases} \quad \textit{es equivalente al sistema que resulta de reemplazazar } E_2 \textit{ por } E_2 - 3E_1 \quad \begin{cases} x - 3y + z = 1 & E_1 \\ 7y - 7z = -6 & E_2 - 3E_1 \\ 5x - y - z = 4 & E_3 \end{cases}$$

Observación

Los sistemas obtenidos en cada caso son equivalentes al dado y tienen el mismo conjunto solución.

RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

a) ELIMINACIÓN GAUSSIANA

El método de Gauss consiste en la aplicación de las transformaciones elementales presentadas anteriormente, por ejemplo, dado un sistema de ecuaciones lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad \textit{Se transforme en otro sistema más simple equivalente al anterior} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ \qquad\qquad a'_{33}x_3 = b'_3 \end{cases}$$

Los sistemas con estas características los llamamos <u>triangulares</u> o <u>escalonados</u> ya que si observamos la matriz de los coeficientes del sistema transformado es <u>triangular superior</u>.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{pmatrix}$$

Conseguida la triangulación resolvemos por sustituciones sucesivas empezando desde la última ecuación hasta llegar a la primera ecuación.

Generalizamos para un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Mediante transformaciones elementales obtenemos:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

O sea, el método consiste entonces en:

1) ***Reducir*** la matriz ampliada del sistema de ecuaciones lineales mediante operaciones elementales de filas a una ***matriz escalonada por filas*** donde: $\forall i \ ,\forall j : \ i \ > \ j \Rightarrow a_{i\,j} \ = \ 0$

En lenguaje coloquial la implicación anterior significa que los elementos que se encuentran por debajo de la diagonal principal de la matriz de los coeficientes del sistema deben ser cero.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{33} & \dots & a'_{3n} & b'_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right)$$

Si el sistema de ecuaciones lineales es cuadrado, la matriz de los coeficientes se transforma en una matriz triangular superior.

2) ***Discutir*** el sistema para determinar si existe o no solución y de existir determinar si la solución es única o son infinitas soluciones.

Después de aplicar el método de eliminación gaussiana se obtiene el sistema escalonado equivalente.

El sistema puede presentar las siguientes situaciones:

- Que haya alguna ecuación de la forma $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \dots + 0x_n = c$ ***o sea*** $0 = c$ y $c \neq 0$ entonces el sistema que resulta es un ***Sistema incompatible que no tiene solución.***

- Que el número de ecuaciones no nulas sea igual al número de incógnitas y entonces el sistema que resulta es un ***Sistema compatible determinado que tiene una solución única***.

- Que el número de ecuaciones no nulas sea menor que el número de incógnitas y entonces el sistema que resulta es un ***Sistema compatible indeterminado que tiene infinitas soluciones***.

3) ***Resolver*** el sistema, es decir hallar la solución del mismo para ello debemos encontrar el valor de las incógnitas del mismo una vez reducida la matriz ampliada a la forma escalonada por filas y lo haremos utilizando el método de sustitución por retroceso.

A continuación, trabajaremos con ejemplos para reafirmar los pasos del método.

Ejemplo 1

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = -2 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

Observación

Para que el proceso resulte más sencillo trabajaremos con la matriz ampliada del sistema.

Efectuamos las transformaciones elementales para escalonar la matriz de los coeficientes:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \approx F_2 - F_1 \\ F_3 \quad F_3 - F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} \\ \\ F_3 - 2F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

entonces el sistema equivalente es: $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ \quad y - 3z = -3 \\ \qquad 5z = 10 \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = 2} \end{cases}$

El sistema escalonado obtenido tiene la misma cantidad de ecuaciones que de incógnitas y por lo tanto es un sistema compatible determinado.

Sabiendo que $z = 2$ hacemos sustitución por retroceso y hallamos las incógnitas restantes.

Se sustituye en la segunda ecuación $y - 3z = -3$ o sea

$$y - 3.2 = -3$$

$$y - 6 = -3$$

$$y = -3 + 6 \text{ y se obtiene } \boxed{y = 3}$$

Se sustituye en la tercera ecuación $x + y + 2.z = 1$ o sea

$$x + 3 + 2.2 = 1$$

$$x + 3 + 4 = 1$$

$$x = 1 - 3 - 4 \text{ y se obtiene } \boxed{x = -6}$$

luego $\boxed{S = \{(-6; 3; 2)\} \Rightarrow SCD}$

Ejemplo 2

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 5y + 7z = 1 \end{cases}$$

Escribimos la matriz ampliada del sistema dado y mediante operaciones elementales procedemos a obtener el sistema escalonado

La primera columna de la matriz ampliada corresponde a los coeficientes de la incógnita "x", la segunda a los de "y", la tercera a los de "z"

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ F_3 - 2F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Observando la última fila de la matriz ampliada vemos que resulta: $0x + 0y + 0z = 1$ o sea $0 = 1$ Absurdo**.**

Entonces el sistema ***no tiene solución*** o sea es un Sistema Incompatible y el conjunto solución se expresa $\boxed{S = \varnothing} \Rightarrow \boxed{SI}$

Ejemplo 3

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 4 \\ 2x - y = 3 \\ -8y + 16z = -8 \end{cases}$$

Observamos que en la matriz ampliada la última fila tiene todos sus coeficientes nulos o sea que resulta: 0x + 0y + 0z = 0 o sea 0 = 0

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -8 & 16 & -8 \end{array}\right) F_2 - 2F_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & -5 & 10 & -5 \\ 0 & -8 & 16 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -1/5F_2 \\ -1/8F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente obtenido tiene dos ecuaciones no nulas con tres incógnitas, o sea tiene menos ecuaciones que incógnitas por lo tanto es un sistema compatible indeterminado $\begin{cases} x + 2y - 5z = 4 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$

Para poder hallar el conjunto solución del sistema obtenido debemos calcular el grado de libertad y lo hallamos de la siguiente forma:

n° de incógnitas	**–**	***n° de ecuaciones***	**=**	***grado de libertad***
3	**–**	**2**	**=**	**1**

Elegimos como variable libre a la variable "***z***" y obtenemos a ***"x"*** y a ***"y"*** en función de ella:

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 4 \quad (1) \\ y - 2z = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 1 + 2z} \end{cases}$$

Reemplazamos en (1): $x + 2(1 + 2z) - 5z = 4 \Rightarrow x + 2 + 4z - 5z = 4 \Rightarrow x = 4 - 2 - 4z + 5z \Rightarrow \boxed{x = 2 + z}$

Hacemos $\boxed{z = \lambda}$ obtenemos $\boxed{y = 1 + 2\lambda} \wedge \boxed{x = 2 + \lambda}$

El conjunto solución se expresa: $\boxed{S = \left\{(x; y; z) \in \Re^3 / x = 2 + \lambda \wedge y = 1 + 2\lambda \wedge z = \lambda \wedge \lambda \in \Re\right\}}, \boxed{SCI}$

También podemos expresar el conjunto solución como:

$$\boxed{S = \left\{(x; y; z) = (2 + \lambda; 1 + 2\lambda; \lambda) \wedge \lambda \in \Re\right\} = \left\{(x; y; z) = (2; 1; 0) + \lambda(1; 2; 1) \wedge \lambda \in \Re\right\}}$$

b) MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

Es aplicable a cualquier sistema de ecuaciones lineales

Se escribe la matriz ampliada del sistema de ecuaciones dado $A'=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ y a continuación se calculan los rangos de ***A*** y ***A'*** aplicando Gauss-Jordan lo que nos permite ***discutir el sistema, clasificarlo*** aplicando la tesis del ***Teorema de Rouché Fröbenius*** y posteriormente obtener el conjunto solución.

TEOREMA DE ROUCHÉ – FRÖBENIUS

Dado un sistema de ecuaciones con matriz de coeficientes ***A***, matriz ampliada ***A'*** y rangos respectivos ***r*** y ***r'*** se verifica:

1. El sistema de ecuaciones es compatible cuando **rango(*A*) = rango(*A'*)**

2. En caso de que el sistema sea compatible existen dos posibilidades:

- Si $r = r' = n$ **(nº de incógnitas)** $\Rightarrow$ **Sistema compatible determinado** (una única solución)
- ***Si*** $r = r' = h < n$ **(nº de incógnitas)** $\Rightarrow$ **Sistema compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

Al valor $n - h$ se le llama ***grado de libertad*** del sistema.

Ejemplo 1

Discutir la compatibilidad y resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = -2 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes ***A*** y matriz ampliada ***A'*** aplicando Gauss Jordan y a continuación clasificamos, utilizamos el teorema de Rouché - Fröbenius

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & (1) & -3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right) \; 1/5 \cdot F_3 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & (1) & 2 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$r(A) = 3 \wedge r(A') = 3 \Rightarrow r(A) = r(A') = 3 = n^o \, de \; incógnitas$$

$$\boxed{S = \{(-6;3;2)\}}$$

SCD

Ejemplo 2

Discutir la compatibilidad y resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + \ \ y + \ \ z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 5y + 7z = 1 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & (1) & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$r(A) = 2 \ \wedge \ r(A') = 3 \Rightarrow r(A) \neq r(A') \Rightarrow$ $\boxed{S = \varnothing \quad SI}$ No existe solución

Ejemplo 3

Discutir la compatibilidad y resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x - y + 2z = 2 \\ x \qquad - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases}$

Escribimos la matriz ampliada del sistema de ecuaciones, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes **A** y matriz ampliada **A'** aplicando Gauss Jordan, a continuación clasificamos el sistema y si es posible encontramos el conjunto solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 2 \\ (1) & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \end{array}\right) F_3.(-1) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & (1) & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \end{array}\right) \approx \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{r(A)=2,\ r(A')=2}$$

Aplicando Rouché – Frobenius

$r(A) = r(A') = 2 < 3 \Rightarrow$ ***el sistema tiene infinitas soluciones o sea es SCI***

El sistema equivalente obtenido es

$\begin{cases} y - 5z = 1 \\ x \ - \ z = 1 \end{cases}$ Sabemos que $n - h =$ ***grado de libertad***, en nuestro caso $3 - 2 = 1$

Elegimos como variable libre a "z" entonces

$\begin{cases} y = 1 + 5z \\ x = 1 + \ z \end{cases}$ Si le asignamos a z el número real λ entonces $\begin{cases} y = 1 + 5\lambda \\ x = 1 + \ \lambda \end{cases}$

$$\boxed{S = \left\{ (x;y;z) \in \Re^3 \,/\, x = 1 + \lambda \ \wedge \ y = 1 + 5\lambda \ \wedge \ z = \lambda \ \wedge \ \lambda \in \Re \right\}} \Rightarrow \boxed{SCI}$$

También podemos expresar el conjunto solución como:

$$\boxed{S = \left\{ (x;y;z) = (1+\lambda; 1+5\lambda; \lambda) \ \wedge \ \lambda \in \Re \right\} = \left\{ (x;y;z) = (1;1;0) + \lambda(1;5;1) \wedge \ \lambda \in \Re \right\}}$$

c) POR INVERSIÓN DE LA MATRIZ DE LOS COEFICIENTES DEL SISTEMA

Si $\boldsymbol{A.X = B}$, entonces $\boldsymbol{X = A^{-1}B}$.
Es aplicable si la matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones lineales es ***cuadrada*** y ***regular*** o sea es inversible.
El sistema de ecuaciones resulta compatible determinado o sea tiene una única solución.

Ejemplo 1

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x + 5y = 7 \end{cases} \qquad \boldsymbol{A.X = B \;\Rightarrow\; X = A^{-1}B}$$

La matriz de los coeficientes es $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 14 \neq 0, \quad \exists \quad A^{-1}$

Entonces se puede resolver por el método matricial, calculamos la inversa de A

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{AdjA} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{AdjA} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{14} & \frac{1}{14} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{14} & \frac{1}{14} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} \frac{5}{14} & \frac{1}{14} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{7} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} \frac{11}{7} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix}}$$

Ejemplo 2

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ -5x_1 + 13x_2 - 10x_3 = 0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{A.X = B \;\Rightarrow\; X = A^{-1}B}$$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 3 \\ -5 & 13 & -10 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 3 \\ -5 & 13 & -10 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 13 & -10 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -10 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 13 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(40-39) - 2(-20+15) - 2(26-20) = 2(1) - 2(-5) - 2(6) =$$

$$= 2 + 10 - 12 = 0 \Rightarrow \textit{como } |A| = 0 \Rightarrow \nexists\ A^{-1}$$

El sistema **no** es compatible determinado, no se puede resolver por el método matricial.

d) REGLA DE CRAMER

Esta regla se puede aplicar si la matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones lineales es cuadrada y regular.
Esto significa que el sistema de ecuaciones tiene la misma cantidad de ecuaciones que de incógnitas y que el determinante de la matriz de los coeficientes del sistema es distinto de cero.
El sistema que cumple estas condiciones resulta ser compatible determinado o sea tiene solución única.
A un sistema de ecuaciones lineales que cumple estas condiciones se lo llama: ***Sistema de Cramer***.
Sabemos que dado un sistema de ecuaciones de la forma $\boldsymbol{A.X = B}$ donde la matriz $\boldsymbol{A}$ es de orden n y regular es $\boldsymbol{X = A^{-1}.B}$.
Podemos deducir, a partir de la expresión anterior, usando operaciones y propiedades de las matrices y de los determinantes, la regla de Cramer.

$$AX = B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad X = \frac{1}{|A|}\cdot Adj\ A\ \cdot B$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\cdot \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{12}b_2 + \cdots A_{1n}b_n \\ A_{21}b_1 + A_{22}b_2 + \cdots A_{2n}b_n \\ \vdots \\ A_{n1}b_1 + A_{n2}b_2 + \cdots A_{nn}b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\cdot \begin{pmatrix} |A_1| \\ |A_2| \\ \vdots \\ |A_n| \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|A_1|}{|A|} \\ \frac{|A_2|}{|A|} \\ \vdots \\ \frac{|A_n|}{|A|} \end{pmatrix}$$

Vemos entonces que el valor de cada incógnita $\boldsymbol{x_i}$ se obtiene como un cociente cuyo denominador es el determinante de la matriz de coeficientes del sistema, y cuyo numerador es el determinante que se obtiene al sustituir la columna de los coeficientes de la incógnita considerada del determinante anterior por la columna de los términos independientes.

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}\ ,\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}\cdots,\cdots,\ x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

Siendo el denominador $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ y los respectivos numeradores los siguientes:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}\ ,\quad |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}\ ,\ \dots\ |A_n| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Observa las columnas señaladas: surgen de sustituir la columna de los coeficientes de la incógnita considerada del determinante anterior por la columna de los términos independientes del sistema.

Ejemplo 1

Dado el siguiente sistema $\begin{cases} 4x_1 - 3x_3 = 6 \\ 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ -2x_1 + 5x_3 = 4 \end{cases}$

Observa con atención las incógnitas del sistema para escribir correctamente la matriz de los coeficientes del mismo.

El primer paso es escribir la matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ y calcular su determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 15 - 0 \cdot (8) + (-3) \cdot 6 = 42 \Rightarrow \boxed{|A| = 42 \neq 0}$$

Como el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero se puede aplicar Cramer, entonces calculamos los determinantes de cada una de las incógnitas

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 6 \cdot 15 - 0 \cdot 9 + (-3) \cdot (-12) = 126 \Rightarrow \boxed{|A_1| = 126}$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9 - 6 \cdot 8 + (-3) \cdot 10 = -42 \Rightarrow \boxed{|A_2| = -42}$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot (12) - 0 \cdot 10 + 6 \cdot 6 = 84 \Rightarrow \boxed{|A_3| = 84}$$

Observación: Todos los determinantes los desarrollamos por la primera fila.

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{126}{42} = 3, \qquad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-42}{42} = -1, \qquad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{84}{42} = 2 \qquad \Rightarrow \boxed{S = \{(3;-1;2)\}}$$

Ejemplo 2

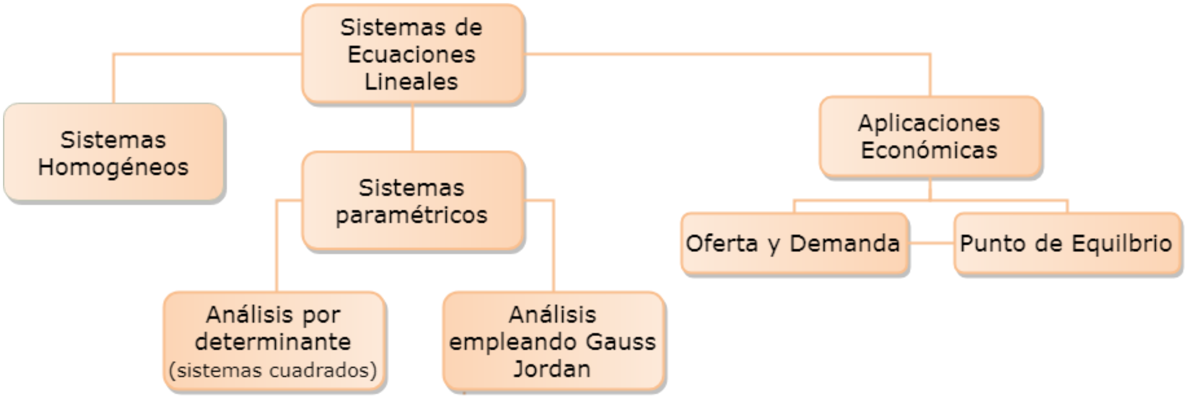
Consideramos el siguiente sistema $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 8x - 2y + z = 2 \\ x + 3y + 5z = 6 \end{cases}$

Como en el caso anterior calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes del sistema, o sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 8 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 8 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-13) - (-1) \cdot 39 - 1 \cdot 26 = 0 \Rightarrow \boxed{|A| = 0}$$

La matriz de los coeficientes es cuadrada pero no es regular, entonces el sistema, no es un sistema de Cramer, por lo tanto, esto implica que el sistema dado no es compatible determinado.
En apartado continuaremos con el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales.
Abordaremos los sistemas homogéneos y los definidos con parámetros y realizaremos el análisis de la solución de dichos sistemas.
Estudiaremos detalladamente la variación de la solución en función de los parámetros.
Plantearemos problemas de aplicación a las ciencias y en especial a la economía que se resuelven a través de sistemas de ecuaciones lineales.
Hallaremos el punto de equilibrio del mercado, como solución de un sistema lineal cuyas ecuaciones representan a la oferta y a la demanda



SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Sea el sistema de ecuaciones lineales expresado en forma matricial ***A.X* = *B***, si ***B*** matriz de los términos independientes es la matriz nula, el sistema de ecuaciones lineales se llama homogéneo.

Observación

Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo siempre admite solución ya que se cumple **SIEMPRE** que $r(A) = r(A')$

a) Si $r(A) = r(A') = n$ (número de incógnitas) ***SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO***

Estos sistemas siempre son compatibles, pues $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0$ es una solución del sistema; esta solución se llama **solución trivial.**

b) Si $r(A) = r(A') < n$ ***SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO***

Infinitas soluciones entre las cuales está la trivial

Propiedades:

- Cualquier múltiplo de una solución de un sistema homogéneo es solución del mismo.
- La suma de dos soluciones de un sistema homogéneo es solución del mismo.
- La diferencia de dos soluciones de un sistema homogéneo es solución del mismo.
- Cualquier combinación lineal de dos soluciones de un sistema homogéneo es solución del mismo

Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuadrado tiene solución única si el determinante de los coeficientes es distinto de cero y esa solución es la nula o trivial.

Ejemplo 1

$$\begin{cases} x+\ \ y+2z=0 \\ 3x-\ \ y-2z=0 \\ -x+2y+\ z=0 \end{cases}$$ La matriz de los coeficientes del sistema homogéneo es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de A, esto es posible porque es una matriz cuadrada de orden 3:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=1(3)-1(1)+2(5)=12\neq 0$$

Si el determinante es distinto de cero entonces el rango de la matriz A es tres y es igual que el número de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado o sea tiene una única solución y es la nula o trivial. La solución del sistema homogéneo es $\boxed{S=\{(0;0;0)\}}$

- Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuadrado tiene infinitas soluciones si el determinante de los coeficientes es igual a cero y la solución nula o trivial es una de las infinitas soluciones.

Ejemplo 2

$$\begin{cases} x+\ y+\ z=0 \\ x-\ y\ \ \ \ \ =0 \\ x+3y+2z=0 \end{cases}$$ La matriz de los coeficientes del sistema homogéneo es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de A, esto es posible porque es una matriz cuadrada de orden 3:

Desarrollamos el determinante por la segunda fila

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-1(-1)-1(1)+0(2)=1-1+0=0$$

El determinante es cero, el rango de A no es tres y es menor que el número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

Si queremos conocer las infinitas soluciones deberemos resolver el sistema por eliminación gaussiana o por Gauss - Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & (1) & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$ El sistema equivalente es $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$

Tomamos **"y"** como variable libre $\begin{cases} x = y \\ z = -2y \end{cases}$ y si hacemos $\boxed{y = \lambda}$ entonces

$\boxed{S = \left\{ (x; y; z) \in \Re \,/\, x = \lambda \wedge z = -2\lambda \ \wedge \ y = \lambda \wedge \lambda \in \Re \right\}}$ o bien

$\boxed{S = \left\{ (\lambda; \lambda; -2\lambda), \forall \lambda \in \Re \right\} = \left\{ \lambda(1;1;-2), \forall \lambda \in \Re \right\}}$

Obtenemos algunas de las infinitas soluciones del sistema si le damos distintos valores al parámetro λ

$\boxed{\lambda = 0 : S_1 = \{(0;0;0)\}}$, $\boxed{\lambda = 1 : S_2 = \{(1;1;-2)\}}$, $\boxed{\lambda = 2 : S_3 = \{(2;2;-4)\}}$,

$\boxed{\lambda = 3 : S_4 = \{(3;3;-6)\}}$, $\boxed{\lambda = 7 : S_5 = \{(7;7;-14)\}}$ …

Ejemplo 3

Sea el sistema homogéneo $\boldsymbol{A.X = 0}$ tal que $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 2x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

Escribimos la matriz ampliada correspondiente al sistema dado y calculamos los rangos de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{A'}$ usando Gauss Jordan

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 2 & (1) & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right) F_3.(-1) \approx \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ (1) & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{r(A)=2,\ r(A')=2}$$ luego

$\boxed{r(A) = r(A') = \text{nro.de incógnitas}}$

$\Rightarrow \boxed{SCD}$

Luego el ***sistema equivalente*** es $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ y la solución del sistema es $\boxed{S = \{(0;0)\}}$ solución nula o trivial

¿Por qué es el sistema equivalente?
Observando la última matriz ampliada vemos que:

- la primera fila se escribe como $0.x + 0.y = 0$ entonces $0 = 0$
- la segunda fila se escribe como $0.x + 1.y = 0$ entonces $\boxed{y = 0}$
- la tercera fila se escribe como $1.x + 0.y = 0$ entonces $\boxed{x = 0}$

Ejemplo 4

Sea el sistema homogéneo $\boldsymbol{A.X=0}$ tal que: $\begin{cases} x-\ \ y+\ \ z=0 \\ 2x+2y+4z=0 \\ 3x+\ \ y+5z=0 \\ x+3y+3z=0 \end{cases}$

Escribimos la matriz ampliada correspondiente al sistema dado y calculamos los rangos de ***A*** y ***A'*** usando Gauss Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc:c} (1) & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \frac{1}{4}.F_2 \approx \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & (1) & 1/2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \approx \underbrace{\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{r(A)=2,\ r(A')=2}$$

$$r(A)=r(A')=2<3\ (\text{número de incógnitas}) \Rightarrow \boxed{SCI}$$

Luego el sistema equivalente al dado es: $\begin{cases} x+\dfrac{3}{2}z=0 \\ y+\dfrac{1}{2}z=0 \end{cases}$ tomamos "*z*" como variable libre, o sea

$\boxed{x=-\dfrac{3}{2}z} \wedge \boxed{y=-\dfrac{1}{2}z}$ y si hacemos $\boxed{z=\lambda}$

La solución del sistema es:

$$\boxed{S=\left\{(x;y;z)\in\Re \,/\, x=-\frac{3}{2}\lambda \wedge y=-\frac{1}{2}\lambda \wedge z=\lambda \wedge \lambda\in\Re\right\}}$$

O bien:

$$\boxed{S=\left\{\left(-\frac{3}{2}\lambda;-\frac{1}{2}\lambda;\ \lambda\right),\forall\lambda\in\Re\right\}=\left\{\lambda\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2};1\right),\forall\lambda\in\Re\right\}}$$

SISTEMA HOMOGÉNEO ASOCIADO

Dado el sistema de ecuaciones lineales expresado en forma matricial ***A.X* = *B***, llamamos sistema homogéneo asociado al sistema de ecuaciones lineales: ***A.X* = *0***

Ejemplo

Consideramos el siguiente sistema no homogéneo $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 8x - 2y + z = 2 \\ x + 3y + 5z = 6 \end{cases}$ el sistema homogéneo asociado al mismo es $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 8x - 2y + z = 0 \\ x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$

RELACIÓN ENTRE LAS SOLUCIONES DEL SISTEMA NO HOMOGÉNEOS Y DEL SISTEMA HOMOGÉNEO ASOCIADO

El conjunto solución de un sistema $A.X = B$ puede expresarse como la suma de una solución particular del sistema y la solución del sistema homogéneo asociado al mismo.

$$\boxed{S = X_p + S_h}$$

Dónde
S : ***conjunto solución del sistema*** $A.X = B$
X_p : ***solución particular del sistema*** $A.X = B$
S_h : ***solución del sistema homogéneo asociado*** $A.X = 0$

Ejemplo 1

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales no homogéneo, que ya hemos resuelto en la pág. 14: $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = -2 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$

Su conjunto solución es: $\boxed{S = \{(-6\ ; 3 ; 2)\} \Rightarrow SCD}$

Para ejemplificar la propiedad indicada resolvemos el sistema homogéneo asociado al sistema de ecuaciones dado:

Siendo $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = -2 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$ su Homogéneo asociado es $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}$

En este caso lo haremos utilizando el método de Eliminación Gaussiana.

Para que el proceso resulte más sencillo trabajaremos con la matriz ampliada del sistema.

Efectuamos las transformaciones elementales para escalonar la matriz de los coeficientes:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array} \approx \begin{array}{r} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{r} \\ \\ F_3 - 2F_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

entonces el sistema equivalente es: $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y - 3z = 0 \\ 5z = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = 0} \end{cases}$

El sistema escalonado obtenido tiene la misma cantidad de ecuaciones que de incógnitas y por lo tanto es un sistema compatible determinado.

Sabiendo que $z = 0$ hacemos sustitución por retroceso y hallamos las incógnitas restantes.

Se sustituye en la segunda ecuación $y - 3z = 0$ o sea

$$y - 3.0 = 0$$
$$y - 0 = 0$$
$$y = 0 \text{ y se obtiene } \boxed{y = 0}$$

Se sustituye en la tercera ecuación $x + y + 2.z = 0$ o sea

$$x + 0 + 2.0 = 0$$
$$x + 0 + 0 = 0$$
$$x = 0 \text{ y se obtiene } \boxed{x = 0}$$

luego $\boxed{S_h = \{(0\,;0\,;0)\} \Rightarrow \textit{SCD solución trivial}}$

La solución del sistema se puede expresar como $S = X_p + S_h$, es decir sumando una solución particular del sistema no homogéneo (en este caso la única ya que el sistema es SCD) y la solución del homogéneo asociado es:

$$\boxed{S_h = \{(-6\,;3\,;2)\} + \{(0\,;0\,;0)\} = \{(-6\,;3\,;2)\} \Rightarrow SCD}$$

Ejemplo 2

Dado el sistema resuelto en la pág. 15 $\begin{cases} x+2y-5z=4 \\ 2x-y=3 \\ -8y+16z=-8 \end{cases}$ su conjunto solución es:

$$\boxed{S=\left\{(x;y;z)\in\Re^3 \,/\, x=2+\lambda \ \wedge \ y=1+2\lambda \ \wedge \ z=\lambda \wedge \ \lambda\in\Re\right\}}, \boxed{SCI}$$

Una solución particular la obtendremos asignándole a λ cualquier valor real, por ejemplo $\lambda=0$

Entonces $\boxed{X_p=\left\{\left(x=2+0\,;\,y=1+2\cdot 0\,;\,z=0\right)\right\}=\left\{(2\,;1\,;0)\right\}}$ es una solución particular.

Debemos resolver el sistema homogéneo asociado, en este caso lo hacemos usando el método de Eliminación Gaussiana

Efectuamos las transformaciones elementales para escalonar la matriz de los coeficientes:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 16 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F_2-2F_1 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 0 \\ 0 & -8 & 16 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -1/5F_2 \\ -1/8F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ F_3-F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente obtenido tiene dos ecuaciones no nulas con tres incógnitas, o sea tiene menos ecuaciones que incógnitas por lo tanto es un sistema compatible indeterminado $\begin{cases} x+2y-5z=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$

Para poder hallar el conjunto solución del sistema obtenido debemos calcular el grado de libertad y lo hallamos de la siguiente forma:

n° de incógnitas	−	n° de ecuaciones	=	grado de libertad
3	−	2	=	1

Elegimos como variable libre a la variable "z" y obtenemos a "x" y a "y" en función de ella:

$$\begin{cases} x+2y-5z=0 \quad (1) \\ y-2z=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y=2z} \end{cases}$$

Reemplazamos en (1): $x+2(2z)-5z=0 \ \Rightarrow \ x+4z-5z=0 \Rightarrow \ x=0-4z+5z \Rightarrow \boxed{x=z}$

Hacemos $\boxed{z=\alpha}$ obtenemos $\boxed{y=2\alpha} \wedge \boxed{x=\alpha}$

El conjunto solución se expresa: $\boxed{S_h=\left\{(x;y;z)\in\Re^3 \,/\, x=\alpha \ \wedge \ y=2\alpha \ \wedge \ z=\alpha \wedge \ \alpha\in\Re\right\}}, \boxed{SCI}$

Por lo tanto, la solución del sistema originalmente planteado, podemos expresarla como la suma entre la solución particular elegida y la solución del homogéneo asociado

$S=X_p+S_h$ luego:

$$\boxed{S=\left\{(2\,;1\,;0)\right\}+\left\{(\alpha;2\alpha;\alpha)\, con\, \alpha\in\Re\right\}=\left\{(2+\alpha\,;1+2\alpha\,;\alpha)\, con\, \alpha\in\Re\right\}\Rightarrow SCI}$$

ANALISIS DE UN SISTEMA EN FUNCIÓN DE UN PARÁMETRO

Ejemplo 1

En el siguiente sistema de ecuaciones lineales determinar todos los valores de $k \in \Re$ para los cuales el sistema tiene:

a) Solución única.

b) Ninguna solución.

c) Infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + (k^2 - 5)x_3 = k \end{cases}$$

Vamos a resolver el ejercicio por dos caminos diferentes:

I) Análisis empleando el método de Gauss - Jordan

II) Análisis empleando determinantes y el método de Gauss Jordan.

I. ANÁLISIS EMPLEANDO EL MÉTODO DE GAUSS – JORDAN

Comenzamos a partir de la matriz ampliada correspondiente al sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & k^2-5 & k \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & k^2-4 & k-2 \end{array}\right) F_2 . \frac{1}{2} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & (1) & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k^2-4 & k-2 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k^2-4 & k-2 \end{array}\right) \approx \underset{k \neq -2 \wedge k \neq 2}{\underset{\Leftrightarrow}{F_3 . \frac{1}{k^2-4}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & (1) & \frac{1}{k+2} \end{array}\right) \approx \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{r(A)=3} & \begin{matrix} \frac{k+5}{k+2} \\ \frac{k}{k+2} \\ \frac{1}{k+2} \end{matrix} \end{array}\right)}_{r(A')=3}$$

Considerando que $r(A') = r(A) = 3 =$ número de incógnitas, aplicando el Teorema de Rouché - Fröbenius clasificamos al sistema como un ***SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO*** (solución única) siempre que $k \neq -2 \wedge k \neq 2$

El sistema equivalente en la forma escalonada reducida es: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{k+5}{k+2} \\ x_2 = \dfrac{k}{k+2} \\ x_3 = \dfrac{1}{k+2} \end{cases}$ Por lo tanto el conjunto solución es:

$$\boxed{S = \left\{ (x_1\,;\,x_2;\,x_3) \in \Re^3 \,/\, x_1 = \frac{k+5}{k+2} \wedge\ x_2 = \frac{k}{k+2} \wedge\ x_3 = \frac{1}{k+2} \right\} \Leftrightarrow k \neq -2 \wedge k \neq 2}$$

- ¿Qué pasa si $k = -2$?

Reemplazamos k por **–2** en la matriz ampliada del sistema antes de pivotear por tercera vez

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k^2-4 & k-2 \end{array}\right) \text{ Reemplazamos por } k=-2 \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)_{F_3 \cdot -\frac{1}{4}} \approx \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (1) \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \underbrace{\left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}_{r(A)=2} \begin{array}{:c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right)}_{r(A')=3}$$

Por lo tanto *r (A) ≠ r (A')*, luego para *k = –2* el sistema resulta un ***SISTEMA INCOMPATIBLE*** **(ninguna solución)**

- ¿Qué pasa si $k = 2$?

Reemplacemos **k** por **2** en la matriz ampliada del sistema antes de pivotear por tercera vez.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k^2-4 & k-2 \end{array}\right) \text{ Reemplazamos por } k=2 \ \underbrace{\left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}_{r(A)=2} \begin{array}{:c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right)}_{r(A')=2}$$

Por lo tanto r *(A) = r (A') =* 2 < 3 (número de incógnitas), luego para *k* = 2 el sistema es un ***SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO*** **(infinitas soluciones)**

II. ANÁLISIS EMPLEANDO DETERMINANTES Y EL MÉTODO DE GAUSS-JORDAN.

Como el sistema de ecuaciones es cuadrado, sabemos que si **| A | ≠ 0** el ***sistema es compatible determinado***, por lo tanto en primer lugar vamos a buscar cuáles son los valores que no anulan al determinante de A para poder determinar cuáles son los valores de ***k*** que hacen que el sistema sea un ***SCD***.

Planteamos | A | ≠ 0

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & k^2-5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & k^2-5 \end{vmatrix} + 1.(-1)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & k^2-5 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$|A| = \left[4\left(k^2-5\right) - 2\right] - \left[2\left(k^2-5\right) - 2\right] - \left[2-4\right] \neq 0$$

$$|A| = \left[4k^2-22\right] - \left[2k^2-12\right] - \left[-2\right] \neq 0$$

$$|A| = 4k^2 - 22 - 2k^2 + 12 + 2 \neq 0$$

$$|A| = 2k^2 - 22 + 12 + 2 \neq 0$$

$$|A| = 2k^2 - 8 \neq 0 \Rightarrow 2k^2 \neq 8 \Rightarrow k^2 \neq 4 \Rightarrow \boxed{k \neq -2 \wedge k \neq 2}$$, el sistema es compatible determinado

Entonces sí $k \neq -2 \wedge k \neq 2$, el sistema es **compatible determinado**. (SCD)

Falta analizar qué ocurre cuando $k = -2 \vee k = 2$

Estas situaciones ya han sido anteriormente analizadas en el ***apartado I*** de todas formas volveremos a estudiar cada situación:

- Para $k = -2$

La matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones inicialmente es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & k^2-5 & k \end{array}\right)$

Reemplazamos por $k = -2$ y aplicamos Gauss - Jordan $\left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$

Si observamos la última fila señalada vemos que se puede expresar como $\mathbf{0x + 0y + 0z = -4}$ o sea $\boxed{0 = -4}$ absurdo, no tiene sentido continuar con el método de Gauss Jordan, entonces el sistema resulta un ***SISTEMA INCOMPATIBLE*** **(S.I)**

- Para $k = 2$

La matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones inicialmente es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & k^2-5 & k \end{array}\right)$

Reemplazamos por $k=2$ y aplicamos Gauss – Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) F_2.\frac{1}{2} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & (1) & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{r(A)=2,\ r(A')=2}$$

luego $r(A) = r(A') = 2 < 3$

El sistema resulta un ***SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO*** **(SCI)**

Ejemplo 2

Discutir en función del parámetro $k \in \Re$ el sistema $\begin{cases} k\,x + ky = k \\ x - ky = 1 \end{cases}$

La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada asociadas a este sistema son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} k & k \\ 1 & -k \end{pmatrix} \text{ y } A' = \left(\begin{array}{cc|c} k & k & k \\ 1 & -k & 1 \end{array}\right)$$

Es un sistema cuadrado, sabemos que si $|A| \neq 0$ el ***sistema es compatible determinado***, por lo tanto en primer lugar vamos a buscar cuáles son los valores que ***no*** anulan al determinante de A para poder determinar cuáles son los valores de k que hacen que el sistema sea un ***SCD***.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes A entonces

$$|A| = \begin{vmatrix} k & k \\ 1 & -k \end{vmatrix} = -k^2 - k = -k.(k+1) \neq 0 \Rightarrow \boxed{k \neq -1 \wedge k \neq 0}$$

Si $\boxed{k \neq -1 \ \wedge \ k \neq 0}$, el sistema resulta un ***SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO***. (SCD**)**

Analizamos ahora que sucede si $k = -1 \vee k = 0$, para ello reemplazamos en la matriz ampliada del sistema cada uno de los valores, aplicamos Gauss-Jordan para determinar los rangos en cada caso y aplicar el teorema de Rouché – Frobenius para clasificar el sistema.

$$A'=\left(\begin{array}{cc|c} k & k & k \\ 1 & -k & 1 \end{array}\right) \boxed{k=-1} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -1 \\ (1) & 1 & 1 \end{array}\right) \approx \underbrace{\underbrace{\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right.}_{r(A)=1}\left|\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right)}_{r(A')=1} \Rightarrow r(A) = r(A') = 1 < 2$$

$$A'=\left(\begin{array}{cc|c} k & k & k \\ 1 & -k & 1 \end{array}\right) \boxed{k=0} \Rightarrow \underbrace{\underbrace{\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right.}_{r(A)=1}\left|\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right)}_{r(A')=1} \Rightarrow r(A) = r(A') = 1 < 2$$

$\boxed{k=-1 \vee k=0}$ *SCI*

$\boxed{\nexists\ k \in \Re}$ para que el sistema resulte ***SISTEMA INCOMPATIBLE.***

Ejemplo 3

Dado el siguiente sistema
$$\begin{cases} -9x + 14y + (k+1)z = -2 \\ 3x - 4y + z = 0 \\ (k+1)x + 2y + 3z = 2k \end{cases}$$

a) Analizarlo para los distintos valores de k

b) Hallar el conjunto solución del sistema homogéneo asociado al dado para k = –1

a)

$$\begin{cases} -9x + 14y + (k+1)z = -2 \\ 3x - 4y + z = 0 \\ (k+1)x + 2y + 3z = 2k \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 14 & k+1 & -2 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \\ k+1 & 2 & 3 & 2k \end{array}\right)$$

Si el determinante de un sistema no homogéneo es distinto de cero entonces el sistema es compatible determinado

$$\begin{vmatrix} -9 & 14 & k+1 \\ 3 & -4 & 1 \\ k+1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 4k^2 + 28k + 24 \neq 0 \Rightarrow \boxed{SCD \Leftrightarrow k \neq -1 \quad \wedge \quad k \neq -6}$$

$$Si\ k=-1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 14 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & (1) & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 14 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \\ -9 & 14 & 0 & -2 \end{array}\right)^{F_1 \cdot \frac{1}{14}} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{9}{14} & (1) & 0 & -\frac{1}{7} \\ 3 & -4 & 1 & 0 \\ -9 & 14 & 0 & -2 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{9}{14} & 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & 0 & 1 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad r(A)=r(A')=2<3 \Rightarrow \boxed{SCI \Leftrightarrow k=-1}$$

$$Si\ k=-6 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 14 & -5 & -2 \\ 3 & -4 & (1) & 0 \\ -5 & 2 & 3 & -12 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -6 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \\ -14 & 14 & 0 & -12 \end{array}\right)^{F_1 \cdot \frac{1}{6}} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 3 & -4 & 1 & 0 \\ -14 & 14 & 0 & -12 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-50}{3} \end{array}\right) F_3 \cdot \frac{-3}{50} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (1) \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$r(A)=2 \quad y \quad r(A')=3 \quad r(A)\neq r(A') \Rightarrow \boxed{SI \Leftrightarrow k=-6}$$

$$b)\begin{cases} -9x+14y \qquad =0 \\ \ \ 3x-\ 4y+\ z=0 \\ \qquad\quad 2y+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 14 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & (1) & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 14 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \\ -9 & 14 & 0 & 0 \end{array}\right)^{F_1 \cdot \frac{1}{14}} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{9}{14} & (1) & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \\ -9 & 14 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{9}{14} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{7} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$r(A)=r(A')=2 \ < 3(n^o\ de\ incognitas) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{9}{14}x+y=0 \ \Rightarrow\ y=\frac{9}{14}x \\ \frac{3}{7}x+z=0 \ \Rightarrow\ z=-\frac{3}{7}x \end{cases}$$

Hacemos $\boxed{x=\lambda}$ $\Rightarrow \boxed{S=\left\{(x;y;z)\in\Re^3 \ /\ x=\lambda \wedge y=\frac{9}{14}\lambda \ \wedge\ z=-\frac{3}{7}\lambda \ \wedge \lambda\in\Re\right\}}$

$$\boxed{S=\left\{(x;y;z)=\left(\lambda;\frac{9}{14}\lambda;-\frac{3}{7}\lambda\right)\wedge\lambda\in\Re\right\}=\left\{(x;y;z)=\lambda\left(1;\frac{9}{14};-\frac{3}{7}\right)\wedge\lambda\in\Re\right\}}$$

Ejemplo 4

Volvamos a aplicar sólo Gauss Jordan para resolver el siguiente ejercicio:

En el siguiente sistema de ecuaciones lineales determinar todos los valores de $\boldsymbol{k} \in \Re$ para los cuales el sistema resultante tenga:

a) solución única *b)* ninguna solución *c)* infinitas soluciones

$$\begin{cases} x + y + kz = 4 \\ z = 2 \\ (k^2-4)z = k-2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & k & 4 \\ 0 & 0 & (1) & 2 \\ 0 & 0 & k^2-4 & k-2 \end{array}\right) \approx \underbrace{\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 4-2k \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2k^2+k+6 \end{array}\right)}_{*} F_3 \cdot \frac{1}{-2k^2+k+6} \Leftrightarrow -2k^2+k+6 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq -\frac{3}{2} \wedge k \neq 2 \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 4-2k \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & (1) \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad r(A)=2 \wedge r(A')=3 \Rightarrow 2 \neq 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible ¿cuándo?

Observando los pasos realizados $\boxed{SI \Leftrightarrow k \neq -\frac{3}{2} \wedge k \neq 2}$

Debemos ahora resolver el sistema para $k = -\frac{3}{2} \wedge k = 2$ y clasificarlo para dichos valores.

a) ***Si*** $k = -\frac{3}{2}$ ***reemplazamos en la matriz ampliada señalada con "*" obtenemos***

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 4-2\left(-\frac{3}{2}\right) \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)+6 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ luego } r(A)=r(A')=2 \wedge 2<3 \Rightarrow \boxed{S.C.I \Leftrightarrow k=-\frac{3}{2}}$$

b) ***Si*** $k = 2$ ***reemplazamos en la matriz ampliada señalada con "*" obtenemos***

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 4-2.2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2.2^2+2+6 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ luego } r(A)=r)A')=2 \wedge 2<3 \Rightarrow \boxed{S.C.I \Leftrightarrow k=2}$$

Del análisis realizado se desprende que no existen valores de $\boldsymbol{k}$ para que el sistema sea compatible determinado.

APLICACIONES ECONÓMICAS DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES: DEMANDA, OFERTA Y EQUILIBRIO

Partiendo del concepto de mercado perfecto, en el sentido que hay un número muy grande de compradores y vendedores, de forma que cada uno realiza transacciones que son pequeñas en relación con el volumen total de transacciones; vamos a centrarnos en el estudio de la oferta y la demanda en un mercado para un bien determinado.

DEMANDA

Existen factores que determinan las cantidades que los consumidores desean adquirir de cada bien por unidad de tiempo, tales como las preferencias, la renta o los ingresos en el período, los precios de los demás bienes y, por sobre todo, el precio del bien en cuestión.

DEMANDA

Es la relación entre el precio de un bien y las cantidades que está dispuesto a adquirir en el mercado en un determinado momento, manteniendo constante los demás factores que puedan afectarla.

- **LEY DE LA DEMANDA:**

El precio de un bien y la cantidad demandada del mismo, poseen una relación inversa debido a que mientras mayor sea el precio, menor será la cantidad demandada, y por el contrario, cuando el precio disminuye aumenta la cantidad demandada. Esta relación inversa se conoce como ***"Ley de la Demanda"***, y se cumple para casi todos los bienes. Si un supermercado aumenta el precio de una gaseosa, la cantidad vendida en el corto plazo disminuirá.

Excepciones a esta ley la constituyen por ejemplo la demanda de servicios necesarios como el agua, o de medicamentos oncológicos, entre otros.

CURVA DE DEMANDA:

Si se consideran constantes todos los factores salvo el precio del bien, esto es, si aplicamos la condición ceteris paribus, podemos hablar de la tabla de demanda del bien ***A*** por un consumidor determinado. Esta ofrece información sobre la cantidad que el mercado absorbería a cada uno de los precios. A partir de la recolección de datos reales de la demanda individual de un comprador, se confecciona la tabla de Demanda

Bajo la condición ceteris paribus y para un precio del bien ***A*** determinado, la suma de las demandas individuales nos dará la ***demanda global o de mercado*** de ese bien.

Observamos que la ***relación empírica*** entre el precio del bien y la cantidad demandada es inversa, a medida que aumenta el precio del bien disminuye la cantidad de artículos que los compradores están dispuestos a adquirir.

- **TABLA DE DEMANDA**

Precio (p)	*Cantidad demandada (q)*
\$2	10
\$4	8
\$6	6
\$8	4
\$10	2

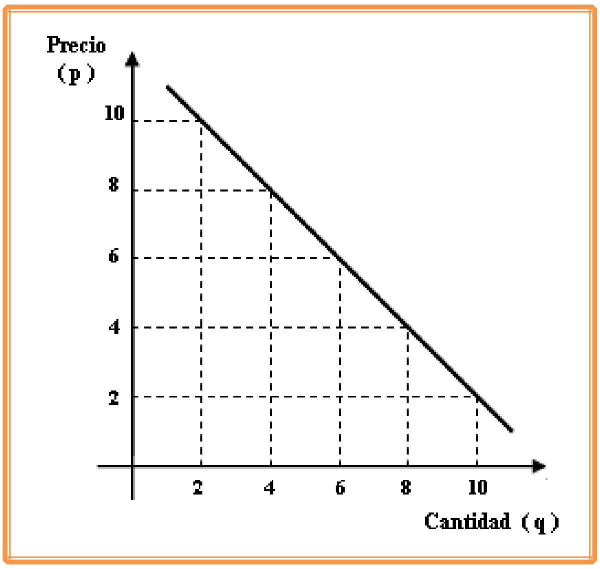
- **LA CURVA Y LA FUNCIÓN DE LA DEMANDA**

La curva de la demanda de un bien, como expresión gráfica de la demanda, muestra las cantidades del bien en cuestión que serán demandadas durante un periodo de tiempo determinado por una población específica a cada uno de los posibles precios.

Decimos entonces que la cantidad demandada de un bien (Q_A) es función del precio de ese bien (P_A), pudiendo expresar esta relación de la siguiente forma:

$$Q_A = f(P_A)$$

La función de ***demanda - precio*** recoge ceteris paribus la relación entre la cantidad demandada de un bien y su precio. Al trazar la curva de demanda suponemos que se mantienen constantes los demás factores que pueden afectar a la cantidad demandada, tales como la renta o ingresos.



Con los datos obtenidos se confecciona el gráfico de la demanda.

OFERTA

De igual manera que en el caso de la demanda, la oferta individual que realiza un productor dependerá de numerosos factores, entre los que podemos nombrar la tecnología utilizada, los precios de los factores de la producción (Tierra, Capital, Trabajo, etc.), y el precio del bien que se desea ofrecer.

Para analizar la oferta individual de un bien, aplicaremos la condición de "ceteris paribus", y consideraremos temporariamente constantes todos los factores, a excepción del precio del bien que se analiza.

OFERTA

Es la relación entre la cantidad que el productor está dispuesto a ofrecer a la venta de un bien, y el precio al que dicha cantidad se ofrece en el mercado, en un determinado momento.

- ### TABLA DE OFERTA

Mientras que la tabla de demanda muestra el comportamiento de los consumidores, la tabla de oferta señala el comportamiento de los productores.

La tabla de oferta relaciona los precios con las cantidades que los productores estarían dispuestos a ofrecer. A precios bajos, los costos de producción no se llegarían a cubrir y los productores no producirían nada.

Tomemos por ejemplo, las cantidades ofrecidas del bien ***A*** para distintos precios

p_A	q_A
2	0
3	2
4	4
5	6
6	8

- ### LA CURVA Y LA FUNCIÓN DE OFERTA

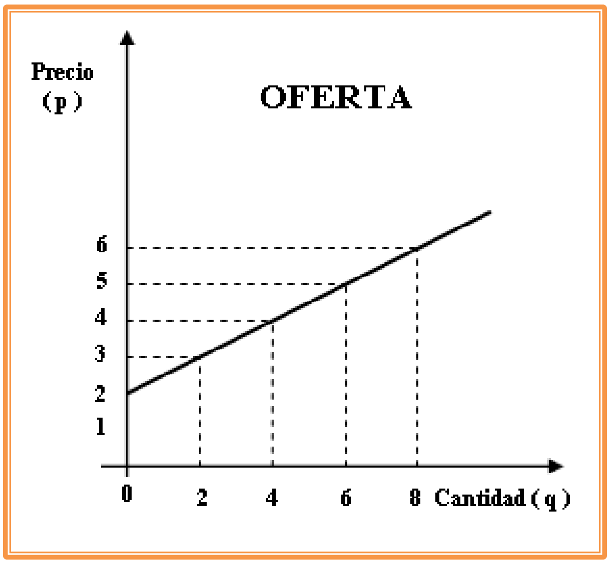
Representamos gráficamente los valores de la tabla y obtenemos una curva, donde a cada precio le corresponde una cantidad ofrecida determinada. La unión de todos los puntos conforma la "Curva de la Oferta".

A cada precio p_A le corresponde una cantidad ofrecida q_A, si unimos los distintos puntos $(p_A; q_A)$, obtenemos la curva de oferta del bien ***A***

La gráfica corresponde a una función lineal

$$\boxed{O = f(P)}$$

y es la representación de la relación que existe entre la cantidad ofrecida de un bien ***(O)*** en un determinado momento y el precio de dicho bien ***(P)***, manteniendo constante todos los demás factores que puedan afectar a la cantidad ofrecida, por ejemplo: tecnología.



Se caracteriza por tener pendiente positiva, ya que al aumentar el precio aumentará también la cantidad ofrecida.

Si confeccionamos una tabla donde se relacionen los diferentes precios con las cantidades que un productor está dispuesto a ofrecer en cada unidad de tiempo, obtenemos una relación a la que llamaremos *"Oferta individual"* de un determinado bien. La suma de las ofertas individuales para cada productor se conoce como ***"Oferta global o de Mercado".***

¿Qué sucede si los precios son muy bajos? Los productores no ofrecerán nada, debido a que no se cubren los costos de producción. Pero si los precios aumentan, la situación cambia y empezarán a ofrecer sus productos en el mercado, en forma creciente, porque a mayor precio del producto, mayor será la oferta del mismo.

EQUILIBRIO DE MERCADO

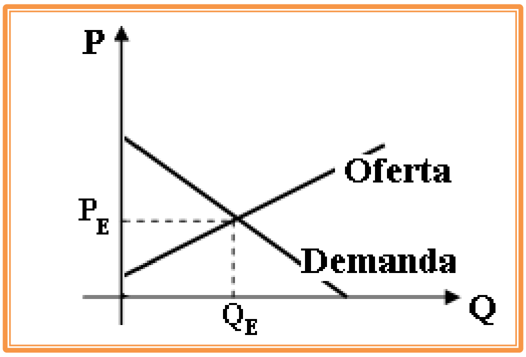
Cuando ponemos en contacto a consumidores y productores con sus respectivos planes de consumo y producción, podemos analizar cómo se lleva a cabo la coordinación de ambos tipos de agentes. El precio de equilibrio es aquel para el que la cantidad demandada es igual a la cantidad ofrecida. Esta cantidad es la cantidad de equilibrio.

Para analizar la determinación del precio de equilibrio de un mercado dibujemos en un mismo gráfico las curvas de oferta y demanda.

Analíticamente la determinación de dicho punto corresponde a la resolución del sistema de ecuaciones lineales formado por la ecuación de la oferta y demanda.

Solo al precio P_E (precio de equilibrio) se igualan la cantidad demandada y ofrecida. Si el precio fuese mayor que P_E, el exceso de oferta o excedente haría descender el precio hasta P_E y, si fuese menor, el exceso de demanda o escasez, lo haría subir.

Son el exceso de oferta, entendido como la cantidad en que la oferta es mayor que la demanda cuando el precio es superior al de equilibrio, y el exceso de demanda, entendido como la magnitud en que la cantidad demandada excede a la ofrecida, cuando el precio es menor al de equilibrio, los elementos que presionan sobre el precio y lo hacen tender hacia el precio de equilibrio y, por tanto, a igualar la oferta y la demanda.



INCIDENCIA DE UN IMPUESTO EN EL PRECIO DE EQUILIBRIO

Cuando se establece un impuesto por unidad de producto vendida, el productor no se conformará con el mismo precio que anteriormente obtenía, de modo que la función de oferta se desplazará hacia arriba indicando que el precio que obtiene por cada unidad de producto es el que le permite cubrir el impuesto. El desplazamiento de la curva de oferta tendrá la cuantía del mismo. Según que la demanda sea más o menos rígida, el consumidor pagara una menor o mayor parte del impuesto. En cualquier caso, el efecto del impuesto ha sido disminuir la cantidad total producida.

La incidencia del impuesto depende entonces, de la inclinación de la curva de demanda. Si ésta es vertical (la cantidad inicial no varía), todo el impuesto lo pagan los consumidores, mientras que, si es horizontal, el impuesto recae íntegramente en el productor ya que el precio del bien no aumenta, y por tanto, esto supone solo una disminución de la cantidad ofrecida.

¿CUÁL ES EL DOMINIO Y EL CONJUNTO DE LAS IMÁGENES DE LA FUNCIÓN?

Nos enfrentamos aquí con un problema: al fijar el dominio y el conjunto imagen, hemos supuesto que la cantidad demandada depende del precio, y no el precio de la cantidad demandada.

Desde el punto de vista matemático es indiferente considerarlo de una u otra forma, y desde la óptica económica el análisis se simplifica al suponer que el precio está determinado por el mercado, o sea el conjunto de todos los oferentes y demandantes, por lo tanto, para cada uno individualmente el precio es un dato. Observe en la gráfica que la variable independiente precio se mide sobre el eje vertical, mientras que la variable dependiente cantidad se mide en el eje horizontal.

Esta forma responde a una convención entre los economistas para poder comparar gráficos, siempre los valores monetarios se representan en el eje "y", y como tal lo mantendremos en este curso, pero desde el punto de vista matemático, en realidad no graficamos a la función oferta o demanda, sino, sus funciones inversas.

Fuente: Economía. Principios y Aplicaciones. Francisco Mochón-Víctor Beker. Editorial Mc Graw Hill Capítulo 3 “La oferta, la demanda y el mercado”. Pps 42-48. Capítulo 4 “El papel del Estado en la Economía” pps. 68-69

Ejemplo 1

Sea $p = 8/100\ q + 50$ la ecuación de oferta para cierto fabricante, y supóngase que la ecuación de demanda para su producto sea $p = -\ 7/100\ q + 65$.

a) Determine el precio de equilibrio

b) Si se carga un impuesto de **$ 1,50** por unidad al fabricante ¿Cómo se verá afectado el precio original de equilibrio si la demanda permanece igual?

c) Determine los ingresos totales que obtiene el fabricante en el punto de equilibrio tanto antes como después del impuesto.

$$\textit{Ecuación de la oferta} \quad \boxed{p = \frac{8}{100}q + 50}$$

$$\textit{Ecuación de la demanda} \quad \boxed{p = -\frac{7}{100}q + 65}$$

Antes del impuesto

$$p_v = p_c$$

$$\frac{8}{100}q + 50 = -\frac{7}{100}q + 65$$

$$\frac{8}{100}q + \frac{7}{100}q = 65 - 50$$

$$\frac{15}{100}q = 15 \quad \Rightarrow \quad q = 100 \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = \ \$58}$$

$$\therefore \quad I = D.p = 100.58 = \$5800 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = \$5800}$$

Después del impuesto

$$\underset{\text{precio nuevo de compra}}{p_{nc}} = \underset{\text{precio viejo de venta}}{p_{vv}} + \underset{\text{impuesto}}{1,50}$$

$$-\frac{7}{100}q + 65 = \frac{8}{100}q + 50 + 1,50 =$$

$$65 - 50 \quad -1,50 \quad = \frac{8}{100}q + \frac{7}{100}q$$

$$13,50 \quad = \frac{15}{100}q \quad \Rightarrow \quad q = 90 \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = \ \$58,70}$$

$$\therefore \quad I = D.p = 90.58,70 = \$5283 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = \$5283}$$

Ejemplo 2

Las ecuaciones de oferta y demanda para cierto producto son: $3q-200p+1800=0$ y $3q+100p-1800=0$ respectivamente, en donde "p" representa el precio por unidad y "q" el número de unidades por intervalo.

a) Obtenga el precio de equilibrio. Grafique.

b) Determine el precio de equilibrio cuando se carga al proveedor con un impuesto de **27** centavos por unidad.

$$\textit{Ecuación de la oferta}: 3q-200p+1800=0 \Rightarrow \boxed{p_v=\frac{3}{200}q+9}$$

$$\textit{Ecuación de la demanda}: 3q+100p-1800=0 \Rightarrow \boxed{p_c=-\frac{3}{100}q+18}$$

Antes del impuesto

$$\begin{aligned} p_v &= p_c \\ \frac{3}{200}q+9 &= -\frac{3}{100}q+18 \\ \frac{3}{200}q+\frac{3}{100}q &= 18-9 \\ \frac{9}{200}q &= 9 \Rightarrow \boxed{q=200} \Rightarrow \boxed{p=\$12} \end{aligned}$$

Después del impuesto

$$\underset{\substack{\textit{precio nuevo}\\ \textit{de compra}}}{p_{nc}} = \underset{\substack{\textit{precio viejo}\\ \textit{de venta}}}{p_{vv}} + \underset{\textit{impuesto}}{0,27}$$

$$\begin{aligned} -\frac{3}{100}q+18 &= \frac{3}{200}q+9+0,27 \\ 18-9-0,27 &= \frac{3}{200}q+\frac{3}{100}q \\ 8,73 &= \frac{9}{200}q \Rightarrow \boxed{q=194} \Rightarrow \boxed{p=\$12,18} \end{aligned}$$

CAPÍTULO 4

ESPACIOS VECTORIALES

MAPA CONCEPTUAL

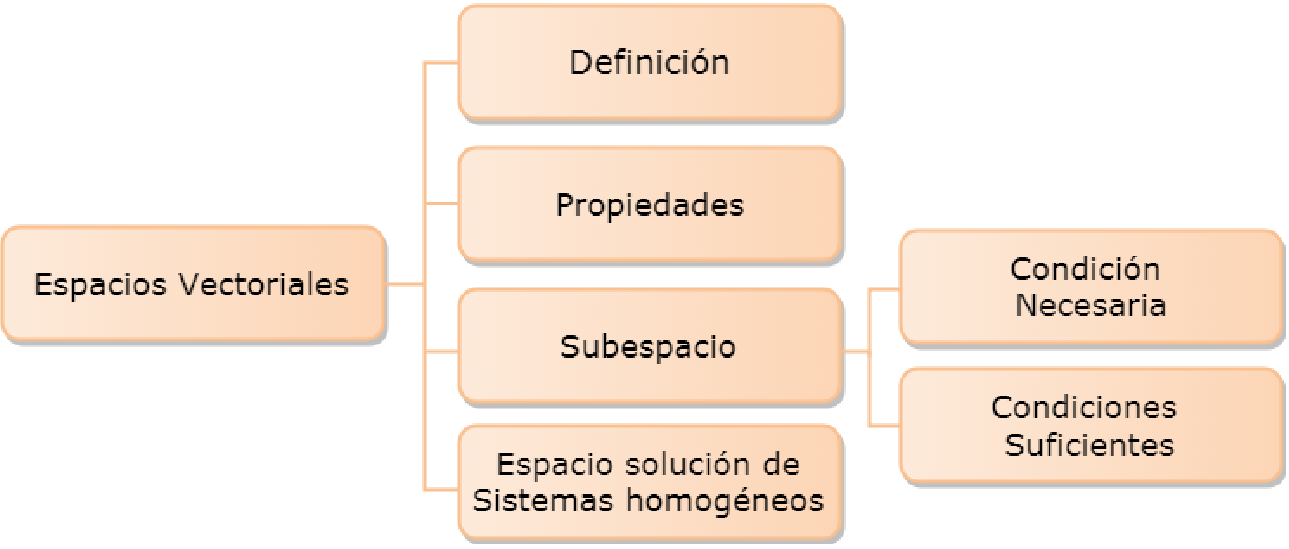
Escaneando el QR observarás el mapa conceptual del Capítulo 4

ESPACIOS VECTORIALES

En este apartado comenzaremos el estudio de los Espacios Vectoriales, concepto fundamental del Álgebra lineal que tiene numerosas aplicaciones en distintas ramas de las ciencias y en particular en las ciencias económicas. Para entender este concepto primero hemos estudiado en el Capítulo 1 el concepto de vector en el plano y en el espacio tridimensional. La estructura llamada espacio vectorial tiene la ventaja que puede generalizarse y extenderse a vectores con n componentes y los resultados obtenidos pueden aplicarse a casos particulares.

Definiremos los axiomas y las propiedades de los espacios vectoriales y analizaremos algunos espacios particulares como el de matrices cuadradas, funciones, polinomios, etc.

También estudiaremos la noción de subespacio vectorial como subconjunto de un espacio vectorial que hereda todas las propiedades del mismo. Para determinar si un subconjunto es un subespacio utilizaremos las condiciones necesarias y suficientes de subespacio.



ESPACIOS VECTORIALES

Sea **V** un conjunto no vacío, **K** un cuerpo, $\oplus$ y $\otimes$ dos funciones que llamaremos ***suma*** y ***producto por un escalar*** se dice que $(V;\oplus;K;\otimes)$ es un espacio vectorial si y sólo si se verifican las siguientes propiedades:

1. $\oplus$ es ***L.C.I*** en ***V***

$\oplus: V\times V\to V \;/\; \forall\vec{u}\in V\wedge\forall\vec{v}\in V\to\vec{u}\oplus\vec{v}\in V$

2. $\oplus$ es ***asociativa*** en ***V***

$\forall\vec{u}\in V\wedge\forall\vec{v}\in V\wedge\forall\vec{w}\in V:\ \vec{u}\oplus(\vec{v}\oplus\vec{w}) = (\vec{u}\oplus\vec{v})\oplus\vec{w}$

3. $\oplus$ es ***conmutativa*** en ***V***

$\forall\vec{u}\in V\wedge\forall\vec{v}\in V:\vec{u}\oplus\vec{v}=\vec{v}\oplus\vec{u}$

4. Existe ***elemento neutro*** para la suma en ***V***, el neutro es el vector nulo al que se denota con $\vec{0}$

$\exists\vec{0}\in V \;/\; \forall\vec{u}\in V:\vec{u}\oplus\vec{0}=\vec{0}\oplus\vec{u}=\vec{u}$

5. Todo elemento de ***V*** admite ***opuesto*** en ***V***. El opuesto de $\vec{u}$ se denota con $-\vec{u}$

$\forall\vec{u}\in V,\exists-\vec{u}\in V \;/\; \vec{u}\oplus(-\vec{u}) = (-\vec{u})\oplus\vec{u} = \vec{0}$

6. $\otimes$ es L.C.E en ***V*** con operadores o escalares en ***K***

$\otimes: K\times V\to V \;/\; \forall\alpha\in K\wedge\vec{u}\in V\to\alpha\otimes\vec{u}\in V$

7. El producto satisface la ***asociatividad mixta***

$\forall\alpha\in K,\forall\beta\in K,\forall\vec{u}\in V:\alpha\otimes(\beta\otimes\vec{u}) = (\alpha\,.\beta)\otimes\vec{u}$

8. El producto es distributivo respecto de la suma en ***K***

$\forall\alpha\in K,\forall\beta\in K,\forall\vec{u}\in V:(\alpha+\beta)\otimes\vec{u} = (\alpha\otimes\vec{u})\oplus(\beta\otimes\vec{u})$

9. El producto es distributivo respecto de la suma en ***V***

$\forall\alpha\in K,\forall\vec{u}\in V,\forall\vec{v}\in V:\alpha\otimes(\vec{u}\oplus\vec{v}) = (\alpha\otimes\vec{u})\oplus(\alpha\otimes\vec{v})$

10. La unidad del cuerpo es neutro del producto en ***V***, donde **1** es la unidad o identidad de ***K***

$1\in K,\forall\vec{u}\in V:\ 1\otimes\vec{u}=\vec{u}$

Los elementos del espacio vectorial ***V*** se los denomina vectores.

En general usamos ***K*** = $\mathfrak{R}$, entonces ***V*** es un espacio vectorial real.

En adelante, designaremos a los vectores con letras latinas minúsculas: $\vec{u},\vec{v},\vec{w},\ldots$ y a los escalares con letras griegas minúsculas: **α**, **β…**

Utilizaremos en adelante para las operaciones $\oplus$ y $\otimes$ ***suma*** *y* ***producto por un escalar*** respectivamente, simplemente "+" y **"."**

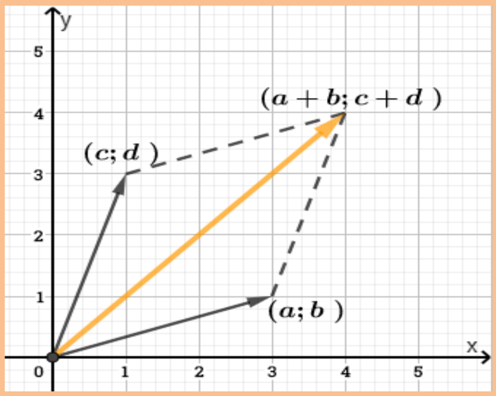
Si $V=\Re^2$ y $K=\Re$

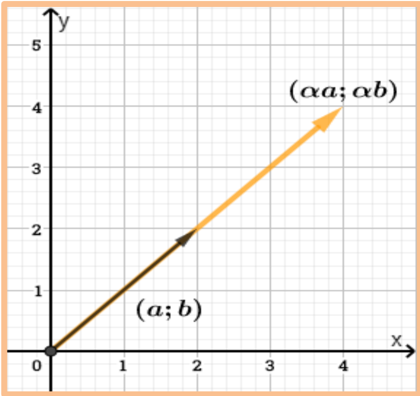
- La adición se define:
  $$“+”:\Re^2\times\Re^2\to\Re^2 \ / \ \forall(a;b)\in\Re^2,\forall(c;d)\in\Re^2 : (a;b)+(c;d) = (a+c;b+d)$$

- El producto por un escalar se define:
  $$“.”:\Re\times\Re^2\to\Re^2 \ /\forall\alpha\in\Re,\forall(a;b)\in\Re^2 :\alpha.(a;b)=(\alpha a;\alpha b)$$

$(\Re^2;+;\Re;\ .\ )$ es un espacio vectorial porque cumple con los axiomas enumerados anteriormente.

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DE “+” Y “.”





- $\alpha>0$ el vector $\alpha.(a;b)$ resulta del mismo sentido que $(a;b)$
- $\alpha<0$ el vector $\alpha.(a;b)$ resulta de sentido contrario que $(a;b)$
- $\alpha=0$ el vector $\alpha.(a;b)$ es el vector nulo
- $|\alpha|>1$ el vector $\alpha.(a;b)$ es una dilatación de $(a;b)$
- $|\alpha|<1$ el vector $\alpha.(a;b)$ es una contracción de $(a;b)$

DEFINICIÓN DE SUBESPACIO

Un subconjunto no vacío S de un espacio vectorial real V es subespacio de V si S es un espacio vectorial con las mismas leyes definidas en V y sobre el mismo cuerpo $K=\Re$

$(S;+;\Re;\ .\ )$ es subespacio vectorial de $(V;+;\Re;\ .\ )$

Cualquiera sea $(V;+;\Re;\ .\ )$ se define:

Subespacios triviales: son los subespacios de V: V y $\{\vec{0}\}$

Subespacio propio: es todo subespacio de V que no sea trivial.

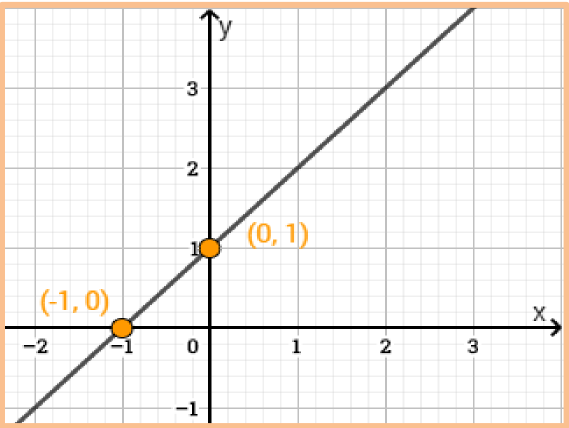
Ejemplo

❖ Sea $(\Re^2;+;\Re;\,.)$ **un espacio vectorial, T y S subconjuntos de** $\Re^2$ **tal que**

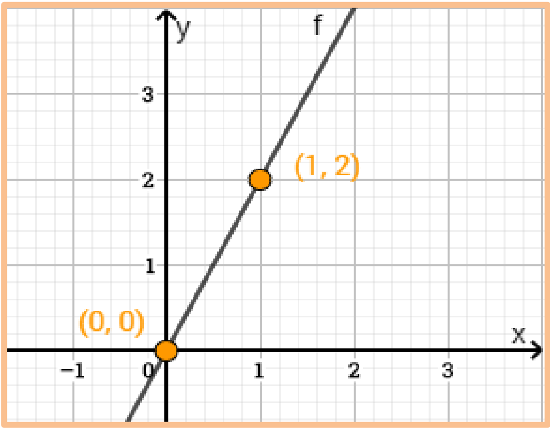
$T=\{(x\,;y)\in\Re^2 \,/\, y = x+1\}$ y $S=\{(x\,;y)\in\Re^2 \,/\, y=2x\}$

Representamos gráficamente en el plano ambos conjuntos

T no es Subespacio de $\Re^2$ porque el $(0;0)\notin T$



S es Subespacio de $\Re^2$ ya que cumple con todos los axiomas de espacio vectorial.



CONDICIONES SUFICIENTES

Si el conjunto no vacío $S\subset V$ es cerrado para la suma y para el producto por un escalar entonces $(S;+;\Re;\,.)$ es subespacio de $(V;+;\Re;\,.)$

H) $(V;+;\Re;\,.)$ **espacio vectorial real**

- $S\neq\varnothing$
- $S\subset V$
- $\forall\vec{u}\in S\wedge\forall\vec{v}\in S\rightarrow\vec{u}+\vec{v}\in S$
- $\forall\alpha\in\Re\wedge\forall\vec{u}\in S\rightarrow\alpha.\vec{u}\in S$

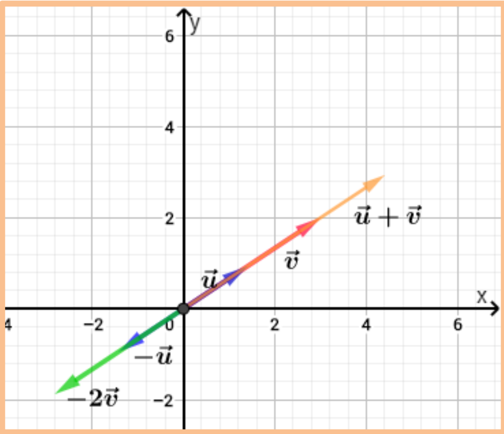
T) $(S;+;\Re;\,.)$ **es subespacio vectorial de** $(V;+;\Re;\,.)$

Estas condiciones además son necesarias

Ejemplo 1

❖ En $\Re^2$ toda recta $\boldsymbol{S}$ que pase por el origen de coordenadas es un subespacio.

Esta afirmación puede justificarse utilizando las condiciones suficientes antes mencionadas y las interpretaciones geométricas de la adición de vectores en el plano (regla del paralelogramo) y la multiplicación de vectores por un escalar.



Veamos, $\boldsymbol{S}$ no es vacío porque el origen de coordenadas pertenece a $\boldsymbol{S}$.

Además, si sumamos dos vectores contenidos en la recta $\boldsymbol{S}$ aplicando la adición de vectores se comprueba fácilmente que el vector resultante pertenece a la misma recta.

Por último, si multiplicamos un vector cualquiera de $\boldsymbol{S}$ por un escalar, el vector que se obtiene tiene la misma dirección que el primero y por lo tanto pertenece a $\boldsymbol{S}$

Ejemplo 2

❖ En $\Re^3$ todo plano $\boldsymbol{\pi}$ que contenga al origen de coordenadas o una recta que pasa por el origen es un subespacio.

Para justificar esta afirmación utilizamos los mismos argumentos que en el ejemplo anterior

Ejemplo 3

❖ Sea $(\Re^3;+;\Re;.)$ espacio vectorial demostrar que $S=\{(x;\ y;\ z)\in\Re^3\ /\ x=y+z\}$ es un subespacio vectorial de $\Re^3$

- **¿$S\neq\varnothing$?** sí, **porque** $(3;1;2)\in S$ ya que **3 = 1 + 2**
- **¿$S\subset V$?** si por definición de S
- **¿$\vec{u}\in S\wedge\vec{v}\in S\Rightarrow\vec{u}+\vec{v}\in S$?**

$$\vec{u}\in S\rightarrow\vec{u}=(x_1;y_1;z_1)\in S\rightarrow x_1=y_1+z_1\rightarrow\vec{u}=(y_1+z_1;y_1;z_1)$$

$$\vec{v}\in S\rightarrow\vec{v}=(x_2;y_2;z_2)\in S\rightarrow x_2=y_2+z_2\rightarrow\vec{v}=(y_2+z_2;y_2;z_2)$$

$$\vec{u}+\vec{v}=(y_1+z_1;y_1;z_1)+(y_2+z_2;y_2;z_2)=(y_1+z_1+y_2+z_2;y_1+y_2;z_1+z_2)=$$

$$=(\underbrace{(y_1+y_2)+(z_1+z_2)};y_1+y_2;z_1+z_2)$$

La primera componente es la suma de la segunda y la tercera, por lo tanto $\vec{u}+\vec{v}\in S$

- **¿$\alpha\in\Re\wedge\forall\vec{u}\in S\rightarrow\alpha.\vec{u}\in S$?**

$$\alpha\in\Re\wedge\vec{u}\in S\rightarrow\vec{u}=(x_1;y_1;z_1)\in S\rightarrow x_1=y_1+z_1\rightarrow\vec{u}=(y_1+z_1;y_1;z_1)$$

$$\alpha.\vec{u}=\alpha.(y_1+z_1;y_1;z_1)=(\alpha(y_1+z_1);\alpha y_1;\alpha z_1)=(\underbrace{\alpha y_1+\alpha z_1};\alpha y_1;\alpha z_1)$$

La primera componente es la suma de la segunda y la tercera, por lo tanto $\alpha.\vec{u}\in S$

Como en $\boldsymbol{S}$ se cumplen las condiciones suficientes enunciadas entones $\boldsymbol{S}$ es subespacio vectorial de $\Re^3$

Ejemplo 4

❖ Sea $(\Re^2;+;\Re;.)$ espacio vectorial demostrar que $S=\{(x\,;\,y)\in\Re^2\ /\ x+y=\}$ no es un subespacio vectorial de $\Re^2$

S no es subespacio ya que para que un vector pertenezca a ***S*** la suma de sus componentes debe ser **5** entonces el vector nulo no pertenece a **S**

Ejemplo 5

❖ Demostrar que $H=\left\{\begin{pmatrix} x & 5x \\ 0 & -x \end{pmatrix} / x\in\Re\right\}$ es un ***S.E.V*** de $\Re^{2x2}$

1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in H$ (cuando $x=0$) además de asegurarnos que tiene el vector nulo con esto demostramos que $H\neq\varnothing$ (1ra.condición de subespacio)

2) $H\subseteq\Re^{2x2}$ por definición de ***H*** (2da.condición de subespacio)

3) Probaremos que "+" es ley interna en ***H***:

$$\begin{pmatrix} x & 5x \\ 0 & -x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y & 5y \\ 0 & -y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y & 5x+5y \\ 0 & -x-y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y & 5(x+y) \\ 0 & -(x+y) \end{pmatrix}\in H$$

4) Demostramos que "**.**" es ley externa sobre ***H***:

$$\alpha\begin{pmatrix} x & 5x \\ 0 & -x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha x & \alpha(5x) \\ \alpha.0 & \alpha(-x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha x & 5(\alpha x) \\ 0 & -(\alpha x) \end{pmatrix}\in H$$

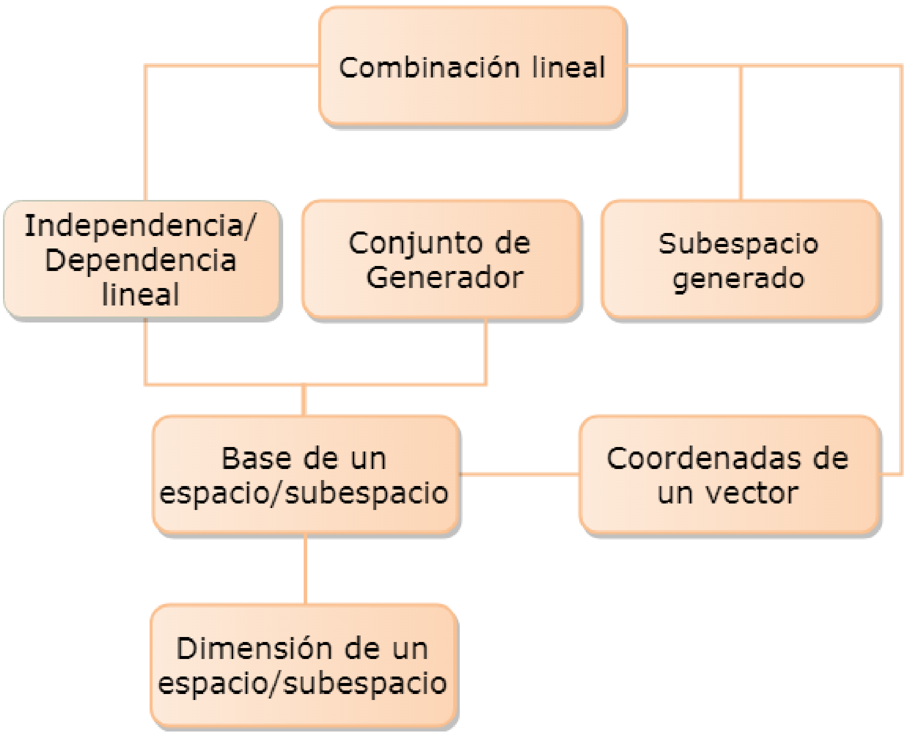
Con **1), 2), 3)** y **4)** se demuestra que ***H*** es un ***S.E.V*** de $\Re^{2x2}$

COMBINACIÓN LINEAL

En este apartado continuaremos el estudio de los espacios vectoriales agregando el concepto de combinación lineal para definir luego la dependencia o independencia lineal de un conjunto de vectores y el concepto de subespacio generado.

Con estos conceptos definiremos base de un espacio o subespacio vectorial como el conjunto de vectores linealmente independientes que puede generar cualquier vector de dicho espacio.

Para culminar con las nociones de dimensión de un espacio vectorial y coordenadas de un vector.



COMBINACIÓN LINEAL

Sea $A=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\ldots,\vec{v}_n\}$ una familia de vectores del espacio vectorial real $(V;+;\Re;.)$; se llama ***combinación lineal*** de la familia $A \subset V$ a todo vector cuya expresión es de la forma:

$$\boxed{\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{v}_i=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n \,/\, \alpha_i\in\Re \wedge \vec{v}_i\in A}$$

Un vector $\vec{x}\in V$ es combinación lineal de $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\ldots,\vec{v}_n\}$ si existen escalares $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ tales que el vector $\vec{x}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\ldots+\alpha_n\vec{v}_n$

Si los escalares son todos nulos se obtiene el vector nulo.

El **vector nulo** es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\ldots,\vec{v}_n\}$ ya que: $\vec{0}=0\vec{v}_1+0\vec{v}_2+\cdots+0\vec{v}_n$.

Ejemplo 1

❖ En $\Re^3$, $\vec{w} = (2;2;2)$ es combinación lineal de la familia $A = \{\vec{v}_1 = (2;1;3), \vec{v}_2 = (1;0;2)\}$ porque $\vec{w} = 2\vec{v}_1 + (-2)\vec{v}_2$.

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \cdot \vec{v}_i = \alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2$$

$$\alpha_1 \cdot (2;1;3) + \alpha_2 \cdot (1;0;2) = (2;2;2) \Rightarrow (2\alpha_1;\ \alpha_1; 3\alpha_1) + (\alpha_2;\ 0\ ; 2\alpha_2) = (2;2;2)$$

$$\Rightarrow (2\alpha_1 + \alpha_2\ ;\ \alpha_1\ ;\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2) = (2;2;2)$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ \alpha_1 = 2 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & (1) & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ (1) & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 2 \quad \wedge \quad \alpha_2 = -2}$$

$\therefore$ el vector se puede escribir como **CL** de la familia ***A*:** $2 \cdot (2;1;3) + (-2) \cdot (1;0;2) = (2;2;2)$

Ejemplo 2

❖ En $\Re^3$ $\vec{w} = (4;4;4)$ es combinación lineal de $A = \{(1;1;1)\}$ ya que $(4;4;4) = 4.(1;1;1)$

Ejemplo 3

❖ En $\Re^3$, $\vec{w} = (1;2;3)$ **no** es **C.L** de la familia $A = \{\vec{v}_1 = (1;0;-1), \vec{v}_2 = (0;1;-1), \vec{v}_3 = (1;1;-2)\}$

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \cdot \vec{v}_i = \alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{v}_3$$

$$\alpha_1 \cdot (1;\ 0\ ;-1) + \alpha_2 \cdot (0;\ 1\ ;-1) + \alpha_3 \cdot (1;\ 1\ ;\ -2) = (1;\ 2;\ 3)$$

$$(\alpha_1; 0\ ; -1\alpha_1) + (0; \alpha_2\ ; -1\alpha_2) + (\alpha_3; \alpha_3\ ; -2\alpha_3) = (1;\ 2;\ 3)$$

$$(\alpha_1 + \alpha_3\ ;\ \alpha_2 + \alpha_3\ ;\ -\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3) = (1;\ 2;\ 3)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 2 \Rightarrow \text{escribimos la matriz ampliada y resolvemos el sistema planteado:} \\ -\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & (1) & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)_{F_3 \cdot \frac{1}{6}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & (1) \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow r(A) = 2 \wedge r(A') = 3 \Rightarrow S.I \Rightarrow \nexists\ \alpha_i \in \Re \ \therefore\ \vec{w}$ no es combinación lineal de la familia A

SUBESPACIO GENERADO

El conjunto de todas las combinaciones lineales de una familia de vectores A de un espacio vectorial real V es un subespacio que se denota con $\bar{A}$ y se lee **subespacio generado por A**.

$$\text{Si } A=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\ldots,\vec{v}_n\}\subset V \text{ entonces } \bar{A}=\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{v}_i \,/\, \alpha_i\in\Re\wedge\vec{v}_i\in A\right\}\subset V$$

A los **vectores** del subespacio generado se los denomina **generadores**

Ejemplo 1

- Sea $A=\{\vec{v}_1=(1;0;1)\,,\vec{v}_2=(0;1;1)\}\subset\Re^3\to\bar{A}=\{\alpha_1(1;0;1)+\alpha_2(0;1;1)\}/\,\alpha_1\in\Re\wedge\alpha_2\in\Re\}$

$$\alpha_1\cdot(1;0;1)\;+\;\alpha_2\cdot(0;1;1)\;=\;(x;y;z)$$

$$(\alpha_1;\,0\,;\alpha_1)\;+\;(0;\,\alpha_2\,;\alpha_2)\;=\;(x;y;z)\Rightarrow(\;\alpha_1\;;\;\alpha_2\;;\;\alpha_1+\alpha_2\;)=(x;y;z)$$

$$\therefore\begin{cases}\alpha_1 & =x\\ & \alpha_2=y\\ \alpha_1+\alpha_2 & =z\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}(1)&0&x\\0&1&y\\1&1&z\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|c}1&0&x\\0&(1)&y\\0&1&z-x\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|c}1&0&x\\0&1&y\\0&0&z-x-y\end{array}\right)$$

Para que el sistema tenga solución debe ser compatible y para eso $z-x-y=0$
Luego el conjunto de vectores que se pueden escribir como combinación lineal de los vectores de A son aquellos que cumplen: $z-x-y=0$ o sea $z=x+y$, entonces

$$\boxed{\bar{A}=\{(x;y;z)\in\Re^3\,/\,z=x+y\}}$$

Ejemplo 2

- Analice si el vector $\vec{g}=(2,14,-34,7)$ pertenece al subespacio de $\Re^4$ generado por los vectores $\vec{v}_1=(1,\,4,-5,\,2)$ y $\vec{v}_2=(1,\,2,\,3,\,1)$.

$$\alpha(1;4;-5;2)+\beta(1;2;3;1)=(a;b;c;d)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}(1)&1&a\\4&2&b\\-5&3&c\\2&1&d\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|c}1&1&a\\0&-2&b-4a\\0&8&c+5a\\0&-1&d-2a\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|c}1&1&a\\0&-2&b-4a\\0&8&c+5a\\0&(1)&-d+2a\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|c}1&0&a-1(-d+2a)\\0&0&b-4a+2(-d+2a)\\0&0&c+5a-8(-d+2a)\\0&1&-d+2a\end{array}\right)\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{cc|c}1&0&-a+d\\0&0&b-2d\\0&0&c-11a+8d\\0&1&-d+2a\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}b-2d=0\\-11a+c+8d=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=2d\\c=11a-8d\end{cases}$$

Una alternativa es hallar el subespacio generado por los vectores. Y luego determinar si el vector $\vec{g}$, cumple con la condición del mismo

$$\boxed{\bar{A}=\{(a;b;c;d)\,/\,b=2d\wedge c=11a-8d\}}$$

El vector $\vec{g}=(2,14,-34,7)$ cumple con esta condición del subespacio que generan los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$
El otro método se fundamenta en que si un vector pertenece a un subespacio se puede escribir como **CL** de los vectores que lo genera.

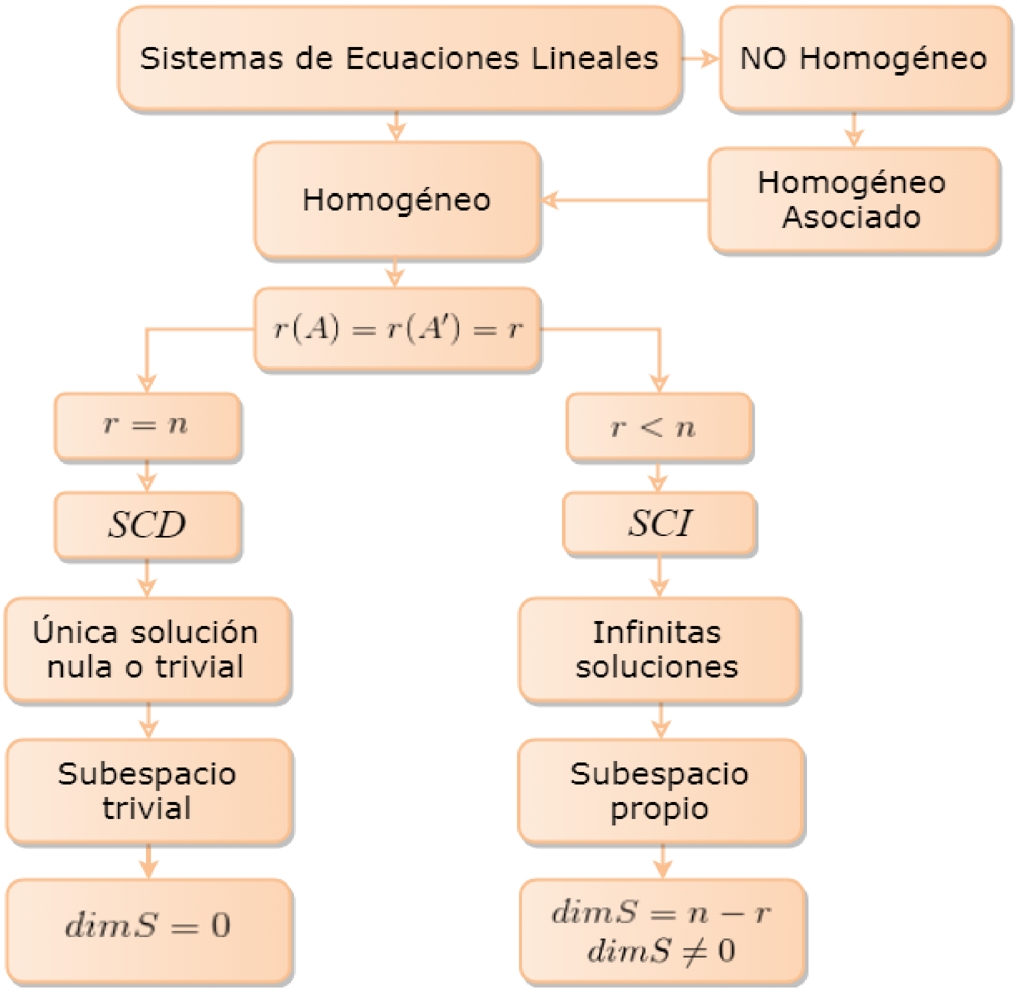
$$\alpha(1;4;-5;2)+\beta(1;2;3;1)=(2;14;-34;7)$$

$\therefore$ Resolviendo $\boxed{\alpha=5 \quad \text{y} \quad \beta=-3}$

Otra alternativa es, empleando la definición de subespacio generado, determinar si el vector $\vec{g}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEOS Y LOS ESPACIOS VECTORIALES

El conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneos es un subespacio vectorial, es por ello que nos referimos al espacio solución de un sistema $\boldsymbol{A.X} = \mathbf{0}$



Ejemplo 1

❖ Sea el sistema homogéneo $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ hallar el conjunto solución ¿es un subespacio?

$$\left(\begin{array}{cc|c} (1) & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right)_{F_2 . -\frac{1}{3}} \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & (1) & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \boldsymbol{r(A) = r(A') = 2 =}$ n$^{\text{ro}}$de incog.

$\Rightarrow \boldsymbol{SCD}$ $\therefore$ el conjunto solución es $\boldsymbol{S = \{(0;0)\}}$ o sea $\boldsymbol{S}$ es un subespacio trivial

Ejemplo 2

❖ Sea el sistema homogéneo $\begin{cases} 4x-2y=0 \\ 2x-\ \ y=0 \end{cases}$ hallar el conjunto solución ¿es un subespacio?

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \ \{2x-y=0$$

$\Rightarrow r(A)=r(A')=1<2$ (n$^{\text{ro}}$de incog.)

$\Rightarrow SCI \quad \therefore$ el conjunto solución es $S=\{(x;y)\in\Re^2 \ / \ y=2x\}$

La solución es el conjunto de puntos de la recta que pasa por el origen: $y = 2x$

S es un subespacio propio.

Se puede demostrar que el conjunto solución es un subespacio verificando las condiciones suficientes para la existencia de un subespacio.

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Una familia $A=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\dots,\vec{v}_n\}\subset V$ es **linealmente independiente** si y sólo si la única solución de la ecuación $\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\dots+\alpha_n\vec{v}_n=\vec{0}$ es la trivial, es decir: $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$.

$$A \text{ es } L.I \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\vec{v}_i=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_i=0$$

Una familia $A=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\dots,\vec{v}_n\}\subset V$ es **linealmente dependiente** si y sólo si **no** es linealmente independiente.

Una familia $A=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\dots,\vec{v}_n\}\subset V$ es **linealmente dependiente** si y sólo si la ecuación $\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\dots+\alpha_n\vec{v}_n=\vec{0}$ admite una solución no trivial, es decir, existen escalares $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n$ no todos nulos

$$A \text{ es } L.D \Leftrightarrow \exists\, i \ / \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\vec{v}_i=\vec{0} \ \wedge \ \alpha_i\neq 0$$

Ejemplo 1

❖ ¿ $A=\{(1;0;1)\ ,(0;1;1),(1;1;0)\}\subset\Re^3$ es un conjunto linealmente independiente?

$$\alpha_1\cdot(1;0;1)\ +\ \alpha_2\cdot(0;1;1)\ +\ \alpha_3\cdot(1;1;0)=(0;0;0)$$
$$(\alpha_1;\ 0\ ;\ \alpha_1)+\ (0;\ \alpha_2\ ;\alpha_2)+\ (\alpha_3;\ \alpha_3;0)=(0;0;0)$$
$$(\alpha_1+\alpha_3\ \ ;\ \ \alpha_2+\alpha_3\ ;\ \alpha_1+\alpha_2)=(0;0;0)$$

*Para analizar si los vectores son **LI**, planteamos la combinación lineal del vector nulo*

$$\begin{cases}\alpha_1 \qquad + \alpha_3 = 0\\ \qquad \alpha_2+\alpha_3=0\\ \alpha_1+\alpha_2 \qquad =0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c}(1)&0&1&0\\0&1&1&0\\1&1&0&0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&1&0\\0&(1)&1&0\\0&1&-1&0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&-2&0\end{array}\right)\approx_{F_3.(-1/2)}\approx\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&(1)&0\end{array}\right)\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)\qquad r(A)=3\wedge r(A')=3\wedge\ \ n=3\quad S.C.D$$

$$\alpha_1=0\ \ \wedge\ \ \alpha_2=0\ \wedge\alpha_3=0$$

$$\therefore A \text{ es } L.I$$

Observa que el vector nulo es combinación lineal de los vectores, todos los escalares son cero

Ejemplo 2

❖ ¿ $A=\{(1;-1;0)\ ,(1;1;2),(1;0;1)\}\subset\Re^3$ es un conjunto linealmente dependiente?

$$\alpha_1\cdot(1;-1;0)+\ \alpha_2\cdot(1;\ 1;\ 2)+\ \ \alpha_3\cdot(1;0;1)=(0;0;0)$$
$$(\alpha_1;-\alpha_1\ ;\ 0)+\ (\alpha_2;\alpha_2;2\alpha_2)+\ (\alpha_3;\ 0\ ;\alpha_3)=(0;0;0)$$
$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\ \ ;\ \ -\alpha_1+\alpha_2\ \ \ ;\ \ 2\alpha_2+\alpha_3\ )=(0;0;0)$$

Para analizar si los vectores son LD, planteamos la combinación lineal del vector nulo

$$\begin{cases}\alpha_1+\ \alpha_2+\alpha_3=0\\ -\alpha_1+\ \alpha_2 \qquad =0\\ \qquad 2\alpha_2+\alpha_3=0\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}(1)&1&1&0\\-1&1&0&0\\0&2&1&0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&2&(1)&0\\0&2&1&0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$r(A)=2\wedge r(A')=2\wedge n=3\ \ \Rightarrow SCI$$

$$\alpha_1-\alpha_2=0\ \ \wedge\ \ 2\alpha_2+\alpha_3=0\ \Rightarrow\alpha_1=\alpha_2\wedge\alpha_3=-2\alpha_2\qquad\therefore\qquad A \text{ es } L.D$$

Observa que el vector nulo es combinación lineal de los vectores, pero con escalares distintos de cero

PROPIEDADES

- Todo vector no nulo de un espacio vectorial constituye un conjunto ***L.I***
- El vector nulo de cualquier espacio vectorial constituye un conjunto ***L.D***
- Todo conjunto al que pertenezca el vector nulo es ***L.D***
- Un conjunto finito y no vacío de vectores es ***L.D*** si y solo si algún vector es ***C.L*** de los demás
- Un conjunto finito y no vacío de vectores es ***L.I*** si y solo si ningún vector es ***C.L*** de los demás

Son equivalentes las siguientes proposiciones:

a) ***A*** es ***L.I***

b) Toda combinación lineal de la familia A cuyo resultado sea el vector nulo es la trivial

c) Ningún vector de A es combinación lineal de los demás

a') ***A*** es ***L.D***

b') Existe una combinación lineal de la familia ***A*** con escalares no todos nulos, cuyo resultado es el vector nulo

c') Algún vector de ***A*** es combinación lineal de los demás

PROPIEDADES

Sea $(V;+;\Re;\,.\,)$ un espacio vectorial real y $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\ldots,\vec{v}_n$ vectores de ***V***

Si $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\ldots,\vec{v}_n\}$ son vectores linealmente independientes entonces:

a) $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\alpha\vec{v}_3,\ldots,\vec{v}_n\}$ $\alpha\in\Re\wedge\alpha\neq 0$, son linealmente independientes

b) $\{\vec{v}_1+\alpha.\vec{v}_2,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3,\vec{v}_4\}$ $\alpha\in\Re$, son linealmente independientes

Ejemplo

- Demostrar que si $\{\vec{u}\ ,\vec{v}\}$ $L.I.$ en $V \Rightarrow \{\vec{u}\ ;\ \vec{v}-\vec{u}\}$ $L.I.$ en V

Planteamos la *C.L.* nula de $\vec{u}$ y $\vec{v}-\vec{u}$: $\alpha.\vec{u}+\beta.(\vec{v}-\vec{u})=\vec{0}$ **(I)**
Aplicando la propiedad distributiva de la ley externa "**.**" del **E.V**. y la propiedad asociativa de "+" del **E.V**. de vectores $\alpha.\vec{u}+\beta.\vec{v}-\beta.\vec{u}=\vec{0}$

Luego: $(\alpha-\beta).\vec{u}+\beta.\vec{v}=\vec{0}$ (por propiedad distributiva recíproca de la ley externa respecto de la "+"de escalares)

Como por hipótesis $\{\vec{u}\ ,\ \vec{v}\}$ es **L.I**. en ***V*** esto implica que en la **C.L**. nula los escalares son ceros (únicamente), entonces debe cumplirse:

$\alpha-\beta=0$ y $\beta=0$ Resolviendo este sistema resulta un **S.C.D**.: $\alpha=\beta=0$ esto implica que en **(I)** los escalares de la **C.L**. nula son únicamente ceros, por lo tanto $\{\vec{u}\ ,\ \vec{v}-\vec{u}\}$ es **L.I**. en ***V***, que es la tesis.

SISTEMA DE GENERADORES

Si todo elemento de ***V*** es una combinación lineal de $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\ldots,\vec{v}_n$ se dice que la familia

$A=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\ldots,\vec{v}_n\}$ genera ***V*** o que $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\ldots,\vec{v}_n\}$ es un **sistema de generadores de *V***.

Ejemplo 1

- ¿ $A=\{(1;1;0)\ ,(2;2;0),(0;0;1)\}\subset\Re^3$ es sistema de generadores de $\Re^3$?

Se debe demostrar que cualquier vector de $\Re^3$ se puede expresar como combinación lineal de ***A***

$$\alpha_1\cdot(1;1;0)+\alpha_2\cdot(2;2;0)+\alpha_3\cdot(0;0;1)=(x;y;z)$$
$$(\alpha_1;\ \alpha_1\ ;\ 0)+(2\alpha_2;\ 2\alpha_2\ ;\ 0)+(0;\ 0\ ;\ \alpha_3)=(x;y;z)$$
$$(\alpha_1+2\alpha_2\ ;\ \alpha_1+2\alpha_2\ ;\ \alpha_3)=(x;y;z)$$

$$\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2 = x\\ \alpha_1+2\alpha_2 = y\\ \alpha_3=z\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}(1)&2&0&x\\1&2&0&y\\0&0&1&z\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&0&x\\0&0&0&y-x\\0&0&1&z\end{array}\right)$$

Para que el sistema tenga solución debe ser compatible y para ello $y-x=0$

La familia ***A*** no genera $\Re^3$, sino un subespacio del mismo $\boxed{S=\{(x;y;z)\in\Re^3\ /\ x=y\}}$

Ejemplo 2

¿ $A=\{(1;1;1),(1;1;0),(1;0;0)\}\subset\mathfrak{R}^3$ es sistema de generadores de $\mathfrak{R}^3$?

*Se debe demostrar que cualquier vector de $\mathfrak{R}^3$ se puede expresar como combinación lineal de **A**, para ello planteamos la combinación del vector*

$$\alpha_1\cdot(1;1;1) + \alpha_2\cdot(1;1;0) + \alpha_3\cdot(1;0;0) = (x;y;z)$$
$$(\alpha_1;\ \alpha_1;\ \alpha_1) + (\alpha_2;\ \alpha_2;\ 0) + (\alpha_3;\ 0;\ 0) = (x;y;z)$$
$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\ ;\ \alpha_1+\alpha_2\ ;\ \alpha_1) = (x;y;z)$$

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = x\\ \alpha_1+\alpha_2 = y\\ \alpha_1 = z\end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}(1)&1&1&x\\1&1&0&y\\1&0&0&z\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&x\\0&0&-1&y-x\\0&-1&-1&z-x\end{array}\right)\approx F_2\cdot(-1)\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&x\\0&0&(1)&x-y\\0&-1&-1&z-x\end{array}\right)\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&y\\0&0&1&x-y\\0&-1&0&z-y\end{array}\right)\approx_{F_3\cdot(-1)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&y\\0&0&1&x-y\\0&(1)&0&y-z\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&z\\0&0&1&x-y\\0&1&0&y-z\end{array}\right)\Rightarrow r(A)=3\wedge r(A')=3\wedge n=3\quad S.C.D$$

Dado que el sistema es compatible determinado, tiene solución única, por lo tanto para cada vector de la forma *(x; y; z)* encuentro los valores de $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ para obtener cualquier vector de $\mathfrak{R}^3$

Ejemplo 3

¿ $A=\{(1;3),(3;9)\}\subset\mathfrak{R}^2$ es sistema de generadores de $\mathfrak{R}^2$?

Se debe demostrar que cualquier vector de $\mathfrak{R}^2$ se puede expresar como combinación lineal de ***A***

$$\alpha_1\cdot(1;3) + \alpha_2\cdot(3;9) = (x;y)$$
$$(\alpha_1;\ 3\alpha_1)+(3\alpha_2;\ 9\alpha_2)=(x;y)$$
$$(\alpha_1+3\alpha_2;3\alpha_1+9\alpha_2)=(x;y) \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1+3\alpha_2=x\\3\alpha_1+9\alpha_2=y\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}(1)&3&x\\3&9&y\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|c}1&3&x\\0&0&y-3x\end{array}\right)$$

Para que el sistema tenga solución debe ser compatible y para ello $\boldsymbol{y-3x=0}$
*La familia **A** no genera $\mathfrak{R}^2$, sino un subespacio del mismo.*

BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL

Sea $A=\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ una familia de vectores del espacio vectorial real $(V;+;\Re;.)$

> $A \subset V$ es una base de V si y sólo si A es un conjunto linealmente independiente y sistema de generadores de V.
>
> En símbolos: $A \subset V$ **es base de** $V \Leftrightarrow A$ **es** $L.I \wedge \bar{A} = V$

Ejemplo 1

❖ Verificar que el conjunto $B=\{(1;1;1),(1;1;0),(1;0;0)\}$ es una base del espacio $(\Re^3,+,\Re,.)$

$$\alpha(1;1;1) + \beta(1;1;0) + \gamma(1;0;0) = (0;0;0)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)(-1)F_3 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & (1) & 1 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)(-1)F_1$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1) & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad r(A) = r(A') = 3 = \text{n}^{\text{ro}} \text{ de incógnitas} \Rightarrow SCD$$

$$\alpha(1;1;1) + \beta(1;1;0) + \gamma(1;0;0) = (x;y;z)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ 1 & 0 & 0 & z \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & -1 & y-x \\ 0 & -1 & -1 & z-x \end{array}\right)(-1)F_3 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & -1 & y-x \\ 0 & (1) & 1 & x-z \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & -1 & y-x \\ 0 & 1 & 1 & x-z \end{array}\right)(-1)F_1$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & (1) & x-y \\ 0 & 1 & 1 & x-z \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & x-y \\ 0 & 1 & 0 & -z+y \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} r(A) = r(A') = 3 = \text{n}^{\text{ro}} \text{ de incógnitas} \\ \Rightarrow SCD \quad \text{genera todo el espacio} \end{array}$$

> *La familia de vectores es linealmente independiente y generadora de $\Re^3$ por lo tanto es una base de $\Re^3$.*

Observación

> N vectores de $\Re^n$ constituyen una base de $\Re^n$, siempre que sean L.I. o Sistemas de generadores, ya que si se cumple una de las condiciones se verifica la otra.

Ejemplo 2

- Verificar que el conjunto $B=\{(1;1),(1;2)\}$ es una base del espacio $(\mathfrak{R}^2;+;\mathfrak{R};.)$

*Dado que el conjunto **B** está formado por dos vectores de $\mathfrak{R}^2$ basta con probar que el conjunto de vectores es **LI** o Generador de $\mathfrak{R}^2$, observa que siendo **LI** se cumple que también es generador y al mismo tiempo si se prueba primero que es generador, podemos asegurar que es **LI***

$$\alpha(1;1)+\beta(1;2)=(0;0)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}(1) & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 0 & (1) & 0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{array}\right)\quad r(A)=r(A')=2=\text{n}^{\text{o}}\text{ de incógnitas}\Rightarrow \boldsymbol{SCD}\text{ entonces } \boldsymbol{B}\text{ es } \boldsymbol{LI}$$

$$\alpha(1;1)+\beta(1;2)=(x;y)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}(1) & 1 & x\\ 1 & 2 & y\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & x\\ 0 & (1) & y-x\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 2x-y\\ 0 & 1 & y-x\end{array}\right)\quad r(A)=r(A')=2=\text{n}^{\text{ro}}\text{ de incógnitas}\Rightarrow \boldsymbol{SCD}\text{ entonces } \boldsymbol{B}\text{ genera todo el espacio}$$

Ejemplo 3

- ¿Qué valores del número real k hacen que el conjunto de vectores $\{(1;0;k),(k;1;0),(k+1;1;k)\}$ sea una base de $\mathfrak{R}^3$?

Para que el conjunto dado sea una base de $\mathfrak{R}^3$, como tiene tres vectores es suficiente exigir que sean **LI**.

Formamos la combinación lineal nula:

$$\alpha_1.(1;0;k)+\alpha_2.(k;1;0)+\alpha_3(k+1;1;k)=(0;0;0)$$

llegamos al sistema :

$$\begin{cases}\alpha_1+k\alpha_2+(k+1)\alpha_3=0\\ \qquad\alpha_2+\alpha_3=0\\ k\alpha_1+k\alpha_3=0\end{cases}$$

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix}1 & k & k+1\\ 0 & 1 & 1\\ k & 0 & k\end{vmatrix}=k+k^2-k(k+1)=k+k^2-k^2-k=0$$

El sistema es compatible indeterminado, o sea existen infinitas soluciones no triviales, y por lo tanto el conjunto es siempre **LD**. Esto significa que **no es base** para ningún valor de $\boldsymbol{k}$.

BASE DE UN SUBESPACIO VECTORIAL

De igual forma un conjunto $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n\}$ es base de un subespacio S de un espacio vectorial V si y sólo si B es un conjunto linealmente independiente que genera S.

En símbolos: $B \subset S$ **es base de** $S \Leftrightarrow B$ **es** $L.I \wedge \overline{B} = S$

Observación

El subespacio nulo carece de base, pues el conjunto $\{\vec{0}\}$ es linealmente dependiente

Ejemplo

❖ Determinar una base del subespacio de $(\Re^3;+;\Re;.)$ si $S = \{(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \Re^3\ /\ z = x + y\}$

$(x\ ;\ y\ ;\ z) = (x\ ;\ y\ ;\ x+y) = (x\ ;\ 0\ ;\ x) + (0\ ;\ y\ ;\ y) = x(1\ ;\ 0\ ;\ 1) + y(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$

$\therefore\ \vec{v}_1 = (1\ ;\ 0\ ;\ 1)\ \ y\ \ \vec{v}_2 = (0\ ;\ 1\ ;\ 1)$ generadores de S ¿son $L.I$?

Debemos demostrar que son $L.I$

$\alpha.(1\ ;\ 0\ ;\ 1) + \beta.(0\ ;\ 1\ ;\ 1) = (0\ ;\ 0\ ;\ 0)$

$(\alpha\ ;\ 0\ ;\ \alpha) + (0\ ;\ \beta\ ;\ \beta) = (0\ ;\ 0\ ;\ 0)$

$(\alpha\ ;\ \beta\ ;\ \alpha+\beta) = (0\ ;\ 0\ ;\ 0) \Rightarrow \alpha = 0 \wedge \beta = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = (1\ ;\ 0\ ;\ 1)$ y $\vec{v}_2 = (0\ ;\ 1\ ;\ 1)$ son $L.I$

Base de $S \Rightarrow B = \{(1\ ;\ 0\ ;\ 1)\ ,\ (0\ ;\ 1\ ;\ 1)\}$

DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

La dimensión de un espacio vectorial es el cardinal de cualquiera de sus bases. Dimensión de V se denota: **dim** (V).

Observación

Por definición el subespacio nulo posee dimensión cero.

Ejemplo 1

- Cuando definimos base de un espacio vectorial, demostramos que:
  - ✓ El conjunto $B=\{(1;1;1),(1;1;0),(1;0;0)\}$ constituye una base de $(\Re^3;+;\Re;.)$. Por lo tanto $\dim(\Re^3)=3$
  - ✓ El conjunto $B=\{(1;2),(1;1)\}$ constituye una base de $(\Re^2;+;\Re;.)$. Por lo tanto $\dim(\Re^2)=2$
  - ✓ $\dim(\Re^n)=n$

Ejemplo 2

- Determinar la dimensión del subespacio de $(\Re^3;+;\Re;.)$ $S=\{(x\,;\,y\,;\,z)\in\Re^3\ /\ z=x+y\}$

  Teniendo en cuenta que la base del S la hallamos en el apartado anterior y que la misma es:

$$\textbf{Base de } S \Rightarrow B=\{(1\,;\,0\,;\,1)\,,\ (0\,;\,1\,;\,1)\}\Rightarrow \dim(S)=2$$

COORDENADAS DE UN VECTOR

Una base ordenada de un espacio vectorial V de dimensión finita es una base en la cual se ha establecido un orden.

Por ejemplo:

Si consideramos la base ordenada de $\Re^2$: $B_1=\{(1;0),\ (0;1)\}$:

(1;0) es el primer elemento de **B₁**, mientras que **(0;1)** es el segundo elemento de B_1.

La base ordenada de $\Re^2$, $B_2=\{(0;1),(1;0)\}$ es distinta de la base B_1, a pesar de que los vectores que las componen son los mismos.

Sea $B=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\}$ una base ordenada de $(V;+;\Re;.)$:

Cada $\vec{v}\in V$ puede expresarse de modo único como combinación lineal de los vectores de la base B o sea: $\vec{v}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\ldots+\alpha_n\vec{v}_n$ siendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ las coordenadas de $\vec{v}$ en la base B del espacio vectorial real V

$$\vec{v}_{[B]}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}_B$$

Ejemplo 1

- Las coordenadas del vector $\vec{v}=(2\,;3)$, respecto de la base $B_1=\{(1;0),(0;1)\}$ **son:** $\vec{v}_{[B]}=[2 \quad 3]_B$, dado que $2.(1;0)+3.(0;1)=(2;3)$

Ejemplo 2

- Vamos a determinar las coordenadas del vector $\vec{v}=(2\,;3)$ respecto de:

$a)\quad B_1=\{(1;0),(0\,;1)\}$

$b)\quad B_2=\{(0\,;1),(1\,;0)\}$

$c)\quad B_3=\{(1;1),(1\,;2)\}$

$a)\ \alpha_1\cdot(1;0) + \alpha_2\cdot(0;1) = (2;3)$

$(\alpha_1;\ 0) + (0\,;\ \alpha_2) = (2;3)$

$(\alpha_1\ ;\ \alpha_2)=(2;3) \Rightarrow \alpha_1=2 \wedge \alpha_2=3 \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{[B_1]}=[2 \quad 3]}$

$b)\ \alpha_1\cdot(0;1) + \alpha_2\cdot(1;0) = (2;3)$

$(0\,;\ \alpha_1) + (\ \alpha_2;\ 0) = (2;3)$

$(\alpha_2\ ;\ \alpha_1) = (2;3) \Rightarrow \alpha_1=3 \wedge \alpha_2=2 \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{[B_2]}=[3 \quad 2]}$

$c)\ \alpha_1\cdot(1;1) + \alpha_2\cdot(1;2) = (2;3)$

$(\alpha_1\ ;\ \alpha_1) + (\ \alpha_2;\ 2\ \alpha_2) = (2;3)$

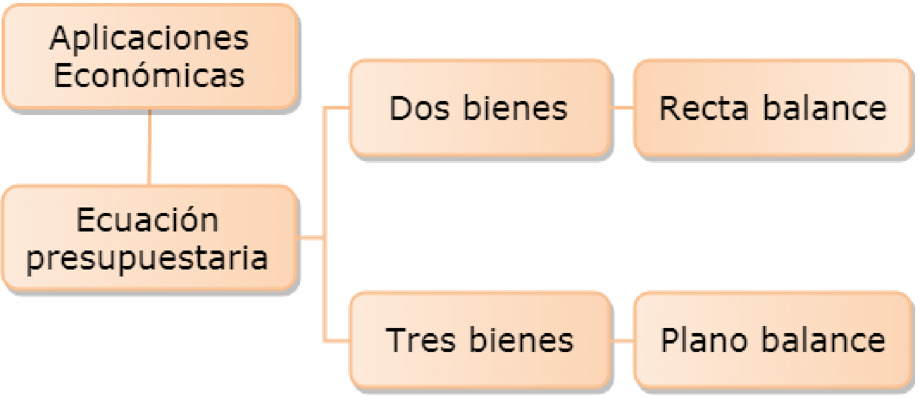
$(\ \alpha_1+\alpha_2\ ;\ \alpha_1+2\alpha_2\ ) = (2;3)$

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2 = 2\\ \alpha_1+2\alpha_2 = 3\end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}\boxed{1} & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 2\\ 0 & \boxed{1} & 1\end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$\Rightarrow \alpha_1=1 \wedge \alpha_2=1 \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{[B_3]}=[1 \quad 1]}$

Observa que las coordenadas del vector dependen de la base elegida

APLICACIONES ECONÓMICAS
VECTOR DE PRECIOS–ECUACIÓN PRESUPUESTARIA– PLANO BALANCE



EN EL CASO DE DOS BIENES

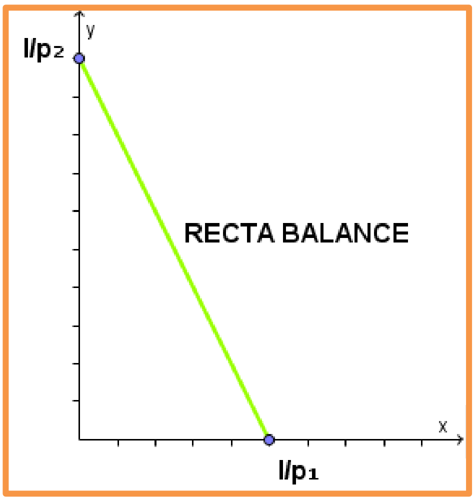
Si el poseedor de un ingreso ***I*** lo destina en su totalidad a la compra de dos tipos de bienes que designaremos ***A*** y ***B***, cuyos precios respectivamente son p_1 y p_2, podemos escribir el vector de precios $\vec{p} = (p_1;\, p_2)$ y el vector cantidad adquirida de bienes $\vec{q} = (x_1;\, x_2)$ donde x_1 es la cantidad adquirida de bien ***A*** y x_2 es la cantidad adquirida de bien ***B***.

El producto escalar de los vectores ***p*** y ***q*** da el ingreso destinado a la compra de los bienes

$$\vec{p}.\vec{q} = \mathrm{I} \Rightarrow (p_1;\, p_2).(x_1;\, x_2) = I$$

$$\boxed{p_1 x_1 + p_2 x_2 = I}$$

Expresión de la ecuación presupuestaria o recta balance



Esta es la ecuación que contiene todos los presupuestos que tienen el mismo gasto

Dividiendo miembro a miembro por **I** se obtiene $\dfrac{p_1 x_1}{I} + \dfrac{p_2\, x_2}{I} = 1$ luego

$$\boxed{\dfrac{\mathrm{x}_1}{\dfrac{\mathrm{I}}{p_1}} + \dfrac{\mathrm{x}_2}{\dfrac{\mathrm{I}}{p_2}} = 1}$$

Expresión segmentaria de la recta balance o recta de posibilidades de consumo

$\dfrac{I}{p_1}$ Cantidad máxima del bien ***A*** si se destina todo el ingreso ***I*** para la compra de ese bien

$\dfrac{I}{p_2}$ Cantidad máxima del bien ***B*** si se destina todo el ingreso ***I*** para la compra de ese bien

Ejemplo 1

❖ Un consumidor tiene un ingreso de **$ 900** y lo destina a la compra de dos bienes ***A*** y ***B***, cuyos precios unitarios son respectivamente p_1 **= $180** y p_2 **= $90**.

a) Escribir el vector de precios y representarlo gráficamente. $\vec{p} = (p_1 ; p_2) = (180 ; 90)$

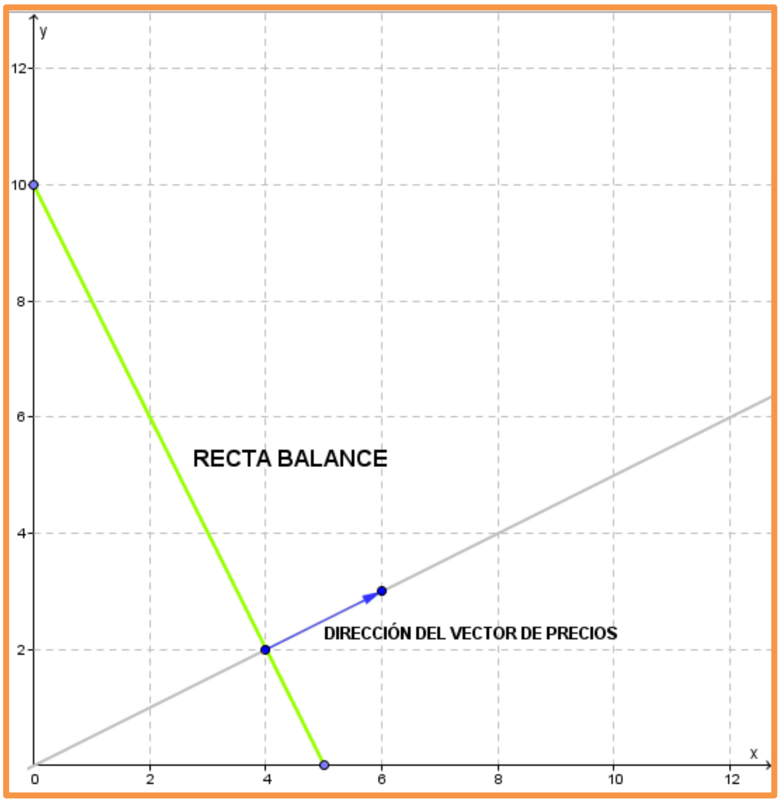
b) Escribir la ecuación presupuestaria y grafique la recta de posibilidades de consumo. ¿Cómo es la posición del vector de precios y la recta de posibilidades de consumo?

$\boxed{180x_1 + 90\,x_2 = 900}$ ***Ecuación presupuestaria***

$$\frac{180x_1 + 90\,x_2}{900} = \frac{900}{900} \Rightarrow \frac{180x_1}{900} + \frac{90\,x_2}{900} = 1 \Rightarrow$$

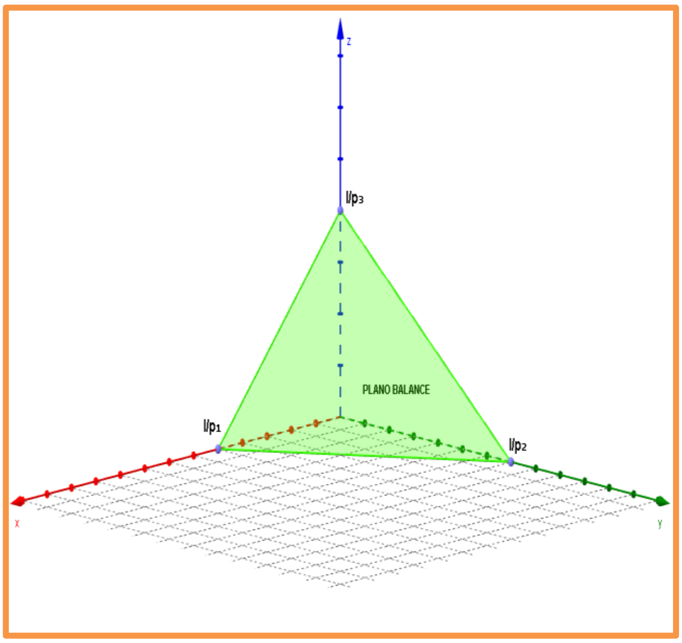
$\boxed{\frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{10} = 1}$ ***Recta de posibilidades de consumo o Recta Balance***

El vector precios es ortogonal a la recta de posibilidades de consumo



EN EL CASO DE TRES BIENES:

Si el poseedor de un ingreso I lo destina en su totalidad a la compra de tres tipos de bienes que designaremos A, B y C, cuyos precios respectivamente son p_1, p_2 y p_3, podemos escribir el vector de precios $\vec{p}=(p_1;\, p_2;\, p_3)$ y el vector cantidad adquirida de bienes $\vec{q}=(x_1;\, x_2;\, x_3)$ donde x_1 es la cantidad adquirida de bien A, x_2 es la cantidad adquirida de bien B y x_3 es la cantidad adquirida de bien C



El producto escalar de los vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$ da el ingreso destinado a la compra de los bienes

$$\vec{p}.\vec{q}=I \Rightarrow (p_1;\, p_2;\, p_3).(x_1;\, x_2;\, x_3)=I \Rightarrow$$

$$\boxed{p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = I}$$

Expresión de la ecuación presupuestaria o plano balance

Esta es la ecuación que contiene todos los presupuestos que tienen el mismo gasto. Dividiendo miembro a miembro por I se obtiene

$$\frac{p_1 x_1}{I} + \frac{p_2\, x_2}{I} + \frac{p_3 x_3}{I} = 1 \quad \text{luego}$$

$$\boxed{\frac{x_1}{\frac{I}{p_1}} + \frac{x_2}{\frac{I}{p_2}} + \frac{x_3}{\frac{I}{p_3}} = 1}$$

Expresión segmentaria de plano balance

$\frac{I}{p_1}$ Cantidad máxima del bien A si se destina todo el ingreso para la compra de ese bien

$\frac{I}{p_2}$ Cantidad máxima del bien B si se destina todo el ingreso para la compra de ese bien

$\frac{I}{p_3}$ Cantidad máxima del bien C si se destina todo el ingreso para la compra de ese bien

PROPIEDAD

El vector de precios es perpendicular al plano balance.

Ejemplo 2

- El plano balance que contiene todos los presupuestos que tienen un gasto de **$ 300** para la adquisición de tres bienes, escrito en forma segmentaria es $\frac{x_1}{6}+\frac{x_2}{6}+\frac{x_3}{3}=1$

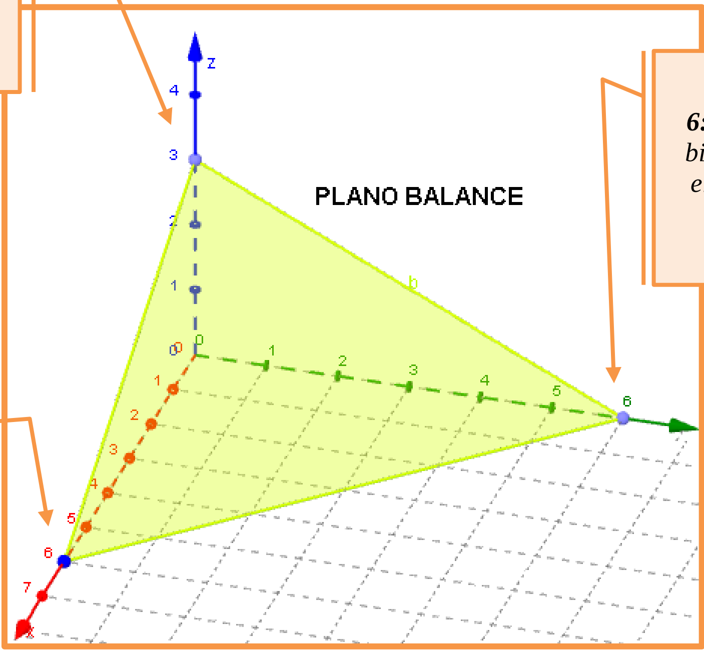
  a) Representarlo

  b) Escribir la ecuación presupuestaria

__3:__ Cantidad máxima del bien __C__ si se destina todo el ingreso __$300__ para la compra de ese bien

__6:__ Cantidad máxima del bien __B__ si se destina todo el ingreso __$300__ para la compra de ese bien

__6:__ Cantidad máxima del bien __A__ si se destina todo el ingreso__$300__ para la compra de ese bien



$$\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{6} + \frac{x_3}{3} = 1$$

Como el ingreso es de $\$\,300$, se multiplica miembro a miembro por 300

$$\frac{300x_1}{6} + \frac{300x_2}{6} + \frac{300x_3}{3} = 300 \Rightarrow \quad 50x_1 + 50x_2 + 100x_3 = 300$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{precios} = \vec{p} = (p_1; p_2; p_3) = (50;50;100)$$

$\boxed{50x_1 + 50x_2 + 100x_3 = 300}$ ***Ecuación presupuestaria***

Ejemplo 3

- Sabiendo que:
  - ***i)*** El vector de precios es un múltiplo escalar del vector **(6; 8; 7)**.
  - ***ii)*** Una de las posibilidades de consumo es $(x_1;\ x_2;x_3) = (20;\ 25;15)$
  - ***iii)*** El ingreso es igual a **$ 5100.**

Hallar:

a) La ecuación presupuestaria. ***b)*** El vector de precios.

$$\vec{p} = (p_1;\, p_2;\, p_3) = \alpha(\ 6;8;7) = (6\alpha;8\alpha;7\alpha)$$

$$20.6\alpha + \ 25.8\alpha\ +\ 15.7\alpha = 5100 \Rightarrow\ 120\alpha + 200\alpha + 105\alpha = 5100 \Rightarrow$$

$$425\alpha = 5100 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 12$$

$$b) \quad \vec{p} = (p_1;\, p_2;\, p_3) = 12(6;8;7) = (72;96;84) \Rightarrow \boxed{\vec{p} = (72;96;84)}$$

$$a) \quad \boxed{72x_1 +\ 96x_2 +\ 84x_3 = 5100} \quad \textbf{\textit{Ecuación presupuestaria}}$$

*Para hallar un múltiplo escalar del vector, multiplicamos por **α** al vector, y obtenemos el vector de precios. Teniendo en cuenta que conocemos una posibilidad de consumo podemos plantear que:*

CAPÍTULO 5

PROGRAMACIÓN LINEAL

ICONOGRAFÍA

Dada que las Notas están pensadas para facilitar la lectura y comprensión de los estudiantes, hemos diseñado una iconografía sencilla para que el lector pueda identificar rápidamente el carácter, prioridad y pertinencia de cada objeto.

CONTENIDO		Es el cuerpo más extenso de la obra y contiene desde definiciones y teoremas hasta demostraciones y aplicaciones frecuentes. Integra los contenidos fundamentales del libro.
BOOKMARK		Es una señalización que indica que un tema, concepto, teorema o aplicación es importante y merece ser resaltado.
AMPLIAMOS		Es una sección donde se completa la información o teoría trabajada. Allí se puede encontrar información importante pero que, en una primera lectura, puede ser omitida hasta tanto se manejen algunos conceptos fundamentales.
GRÁFICO		Dado que gran parte de la obra se apoya en gráficas en el plano y en el espacio, se incluyen QR y enlaces para que se pueda acceder fácilmente y desde cualquier dispositivo a las gráficas más frecuentes.
APOYO CON SOFTWARE Y SIMULADORES		Es un apartado pensado para complementar la teoría con el uso de software de cómputo y simuladores como el CDF Player de Wolfram Alpha, tanto en su versión en línea como en la aplicación para dispositivos móviles.
APOYO CON SMARTPHONE		Es una pastilla para ampliar un tema con el uso del smartphone. Se sugiere utilizar las apps CasioEdu+ y Wolfram Alpha para poder acceder al contenido disponible en los QR.
ADJUNTO		Es un apartado para descargar material extra que complementa los temas que se abordan en la obra. Podrá encontrar acceso a aplicaciones, emuladores y archivos varios que se usan en las unidades de este libro.
REFERENCIA		Es una sección de interés donde podrá encontrar enlaces a citas, obras célebres o noticias que puedan guardar relación con el contenido que se aborda.
EVALUACIÓN		Es una señalización que indica la presencia de una evaluación. Se sugiere la autoevaluación como una estrategia que permite consolidar el aprendizaje.

MAPA CONCEPTUAL

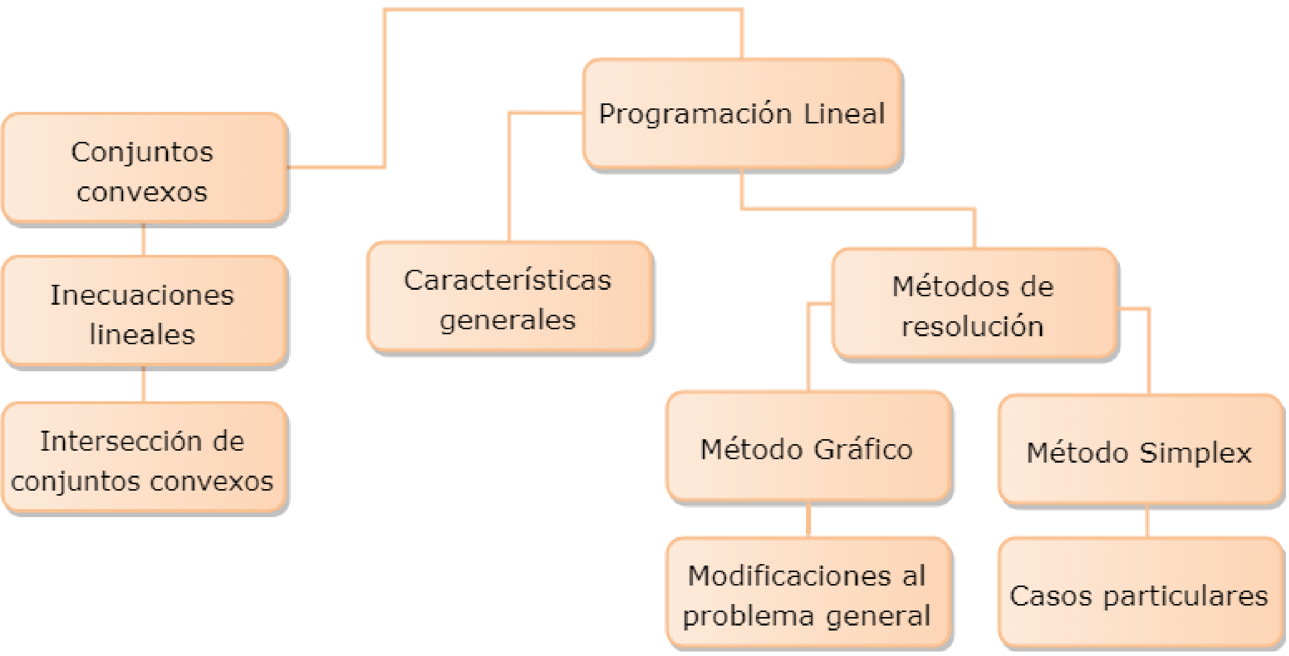
Mapa conceptual
Programación Lineal

Escaneando el QR observarás el mapa conceptual del Capítulo 5

PROGRAMACIÓN LINEAL

En este apartado estudiaremos el tema de programación lineal, el cual se integra con temas estudiados anteriormente como matrices y sistemas de ecuaciones. La programación lineal es una técnica muy potente que se utiliza para construir modelos de optimización de funciones, que pueden aplicarse a cualquier rama de las ciencias económicas. En cada problema de programación lineal se deben tomar decisiones de maximización o minimización de objetivos representados por funciones lineales, las cuales están sujetas a determinadas condiciones llamadas restricciones, que se representan a través de ecuaciones y/o desigualdades también lineales.

Estudiaremos dos métodos para resolver estos problemas: un método gráfico que utilizaremos cuando tengamos problemas que se plantean solamente con dos variables de decisión, y un método analítico llamado simplex, que podremos utilizar para resolver problemas con cualquier número de variables. Para realizar el método simplex se convierten todas las restricciones en igualdades y se plantea un sistema de ecuaciones que se resuelve utilizando el método de Gauss Jordan.



INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN LINEAL

CONJUNTOS CONVEXOS

El estudio de la convexidad de conjuntos tiene especial importancia en el desarrollo de los algoritmos de resolución de los problemas de optimización, tema que desarrollaremos en este capítulo.

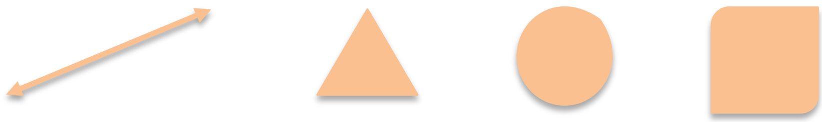
DEFINICIÓN:

Un conjunto S de puntos de $\Re^n$ es un conjunto convexo si y sólo si, dados dos puntos P y Q de S, el segmento que los une está incluido totalmente en S.

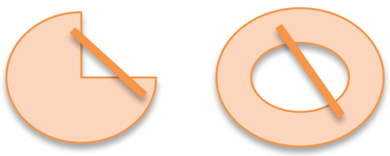
En símbolos:

$$\boldsymbol{S} \text{ es un conjunto convexo} \Leftrightarrow \text{Si } \boldsymbol{P} \in \boldsymbol{S} \wedge \boldsymbol{Q} \in \boldsymbol{S} \Rightarrow \overline{\boldsymbol{PQ}} \subset \boldsymbol{S}$$

Te presentamos ejemplos de conjuntos convexos de $\Re^2$, en todos se verifica la definición



Los siguientes ejemplos corresponden a conjuntos **no convexos** en el plano



Atención:
Si tomamos dos puntos cualesquiera del conjunto, el segmento que ellos determinan NO está totalmente incluido dentro de él.

Antes de definir formalmente a un conjunto convexo es necesario enunciar la definición de segmento:

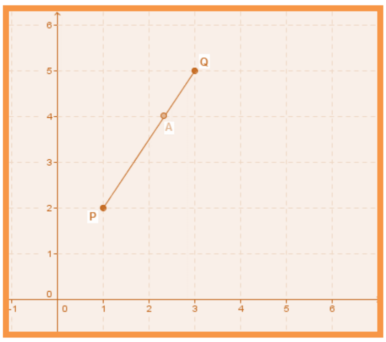
Dados dos puntos de $\Re^n$, $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$ se llama segmento cerrado de extremo P y Q al conjunto $\lambda \boldsymbol{P} + (1-\lambda)\boldsymbol{Q} \subset \Re^n$, con $\lambda \in [0;1]$

Para que comprendas esta definición, vamos a ejemplificarla en $\Re^2$, determinemos el segmento que une a los puntos $\boldsymbol{P} = (1;2)$ y $\boldsymbol{Q} = (3;5)$ dicho segmento está formado por todos los puntos de la forma

$$\lambda(1;2) + (1-\lambda)(3;5) \ \textit{con}\ \lambda \in [0;1]$$

Si $\lambda = 0$ obtenemos el punto $\boldsymbol{Q}$, si $\lambda = 1$ obtenemos el punto $\boldsymbol{P}$

y si por ejemplo $\lambda = \frac{1}{3}$ obtenemos el punto $\boldsymbol{A} = \frac{1}{3}(1;2) + \frac{2}{3}(3;5) = \left(\frac{7}{3};4\right)$

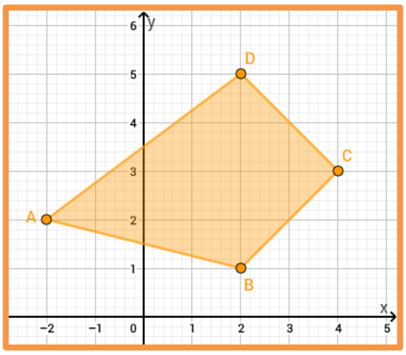


Observación:
Lo que estamos planteando no es más que una combinación lineal de vectores. Toda combinación lineal que tenga los escalares no negativos y que sumen uno, se la llama ***combinación lineal convexa.***

Podemos ahora definir formalmente a un conjunto convexo

Un conjunto $\boldsymbol{S} \subset \Re^{\boldsymbol{n}}$ es convexo sí y sólo se cumple que: $\forall \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q} \in \boldsymbol{S} \rightarrow \lambda \boldsymbol{P} + (1-\lambda)\boldsymbol{Q} \in \boldsymbol{S}$, con $\lambda \in [0;1]$ es decir, dados dos puntos P y q cualesquiera del conjunto, el segmento determinado por ellos está totalmente contenido en el conjunto.

En $\Re^2$, un conjunto convexo coincide con lo que llamamos un polígono convexo.



PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS CONVEXOS

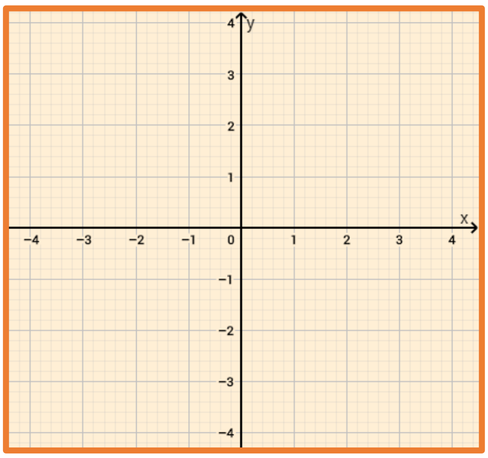
Son conjuntos convexos "por definición"

a) El conjunto vacío ($\varnothing$) es un conjunto convexo.

b) Los conjuntos de un único punto **{*P*}**, también son conjuntos convexos.

c) También el conjunto $\Re^{\boldsymbol{n}}$ es un conjunto convexo.

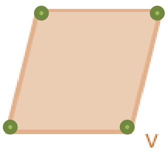
Por ejemplo $\Re^2$ es un conjunto convexo



VÉRTICES O PUNTOS EXTREMOS DE UN CONJUNTO CONVEXO

Un punto $\boldsymbol{V}$ de un conjunto convexo $\boldsymbol{S}$ es un vértice o punto extremo del conjunto, si se cumple que:
$\forall \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{Q} \in \boldsymbol{S} \rightarrow$ si $\mathbf{V} = \lambda \boldsymbol{P} + \ (\mathbf{1} - \lambda)\ \boldsymbol{Q} \in \boldsymbol{S},$ entonces $\lambda = \mathbf{0} \vee \lambda = \mathbf{1}$

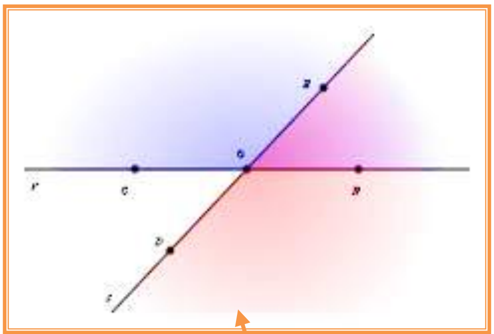
En palabras, si $\boldsymbol{V}$ pertenece a algún segmento incluido en un conjunto poliédrico $\boldsymbol{S}$, entonces $\boldsymbol{V}$ debe pertenecer a uno de sus extremos:

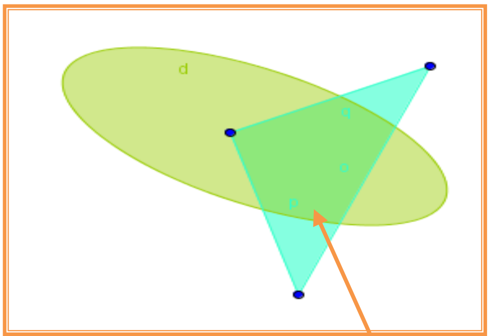


Vértice o
Punto Extremo

INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS CONVEXOS

La intersección, finita o infinita, de conjuntos convexos es un conjunto convexo.





Intersección Infinita

Intersección Finita

CONJUNTOS POLIÉDRICOS CONVEXOS

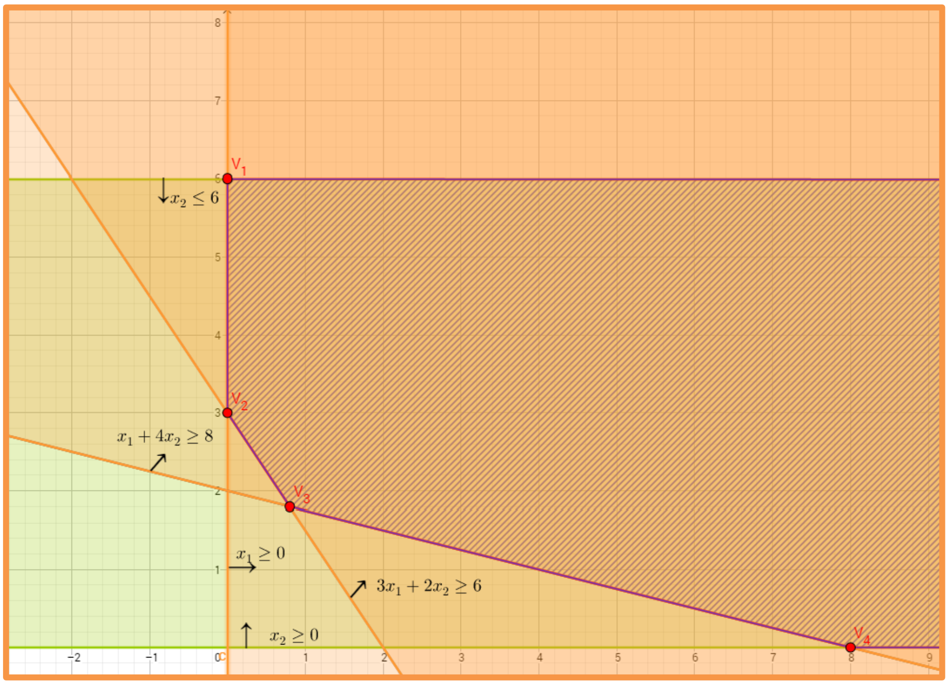
Aquí encontrarás la definición de conjuntos poliédricos

Veamos los siguientes ejemplos en $\Re^2$

Ejemplo 1

Representar el siguiente conjunto convexo en $\Re^2$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 + 4x_2 \geq 8 \\ x_1 \geq 0 \\ 0 \leq x_2 \leq 6 \end{cases}$ y hallar las coordenadas de sus vértices, si éstos existen.

Los vértices del conjunto convexo son:



- $V_1 = (0;6)$
- $V_2 = (0;3)$
- $V_3 = \left(\frac{4}{5};\frac{9}{5}\right)$
- $V_4 = (8;0)$

Sugerencia

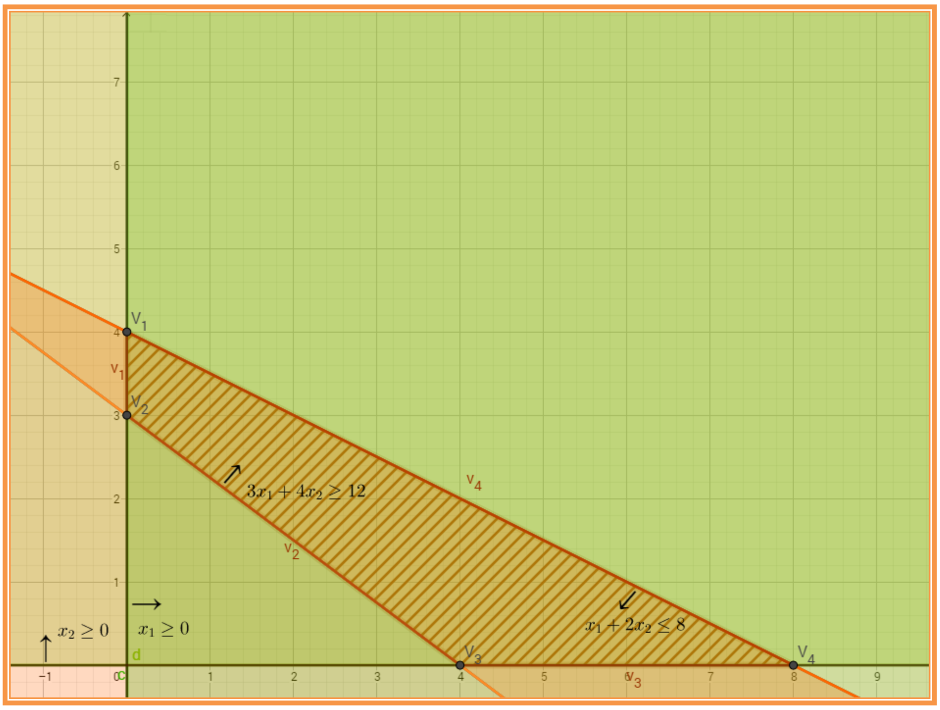
En caso que lo necesites podés consultar como se representa una inecuación lineal en $\Re^2$.

Ejemplo 2

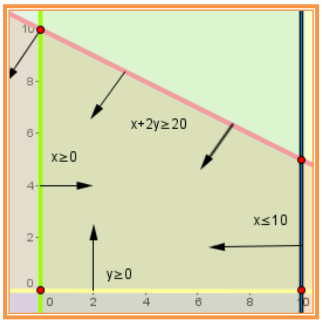
Te presentamos aquí un segundo ejemplo, sea el siguiente conjunto convexo $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$, su representación es:

Los vértices del mismo son:

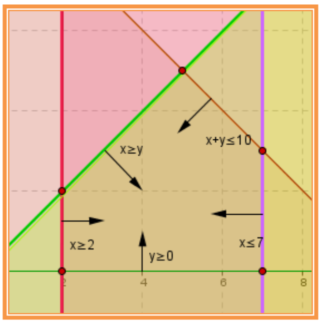
- $V_1 = (0;4)$
- $V_2 = (0;3)$
- $V_3 = (4;0)$
- $V_4 = (8;0)$



Ejemplo 3



Ejemplo 4



En los QR podrás visualizar otros ejemplos de conjuntos poliédricos.

PROGRAMACIÓN LINEAL

En cualquier empresa, muchas de las decisiones que se toman tienen por objeto hacer el mejor uso posible (optimización) de los recursos de la misma. Por recursos de una empresa entendemos la maquinaria que ésta posea, sus trabajadores, capital financiero, instalaciones, y las materias primas que disponga.

Tales recursos pueden ser usados para fabricar productos (electrodomésticos, muebles, comida, ropa, etc.) o servicios (horarios de producción, planes de marketing y publicidad, decisiones financieras, etc.).

La Programación Lineal (PL) es un modelo matemático diseñado para ayudar a los directivos de las empresas en la planificación y toma de decisiones referentes a la asignación de los recursos.

Como ejemplos de problemas donde la Programación Lineal desarrolla un papel fundamental, podemos citar:

Amplía leyendo el archivo

CARACTERÍSTICAS DE UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Las técnicas de Programación Lineal han sido ampliamente utilizadas en ámbitos tan diferentes como el militar, industrial, financiero, de marketing, e incluso agrícola. A pesar de tal diversidad de aplicaciones, todos los problemas de Programación Lineal tienen cuatro propiedades comunes:

1. ***Variables no negativas.***
   Todas las variables que intervienen en el problema deben ser no negativas

2. ***Existencia de una función lineal de las variables cuyo valor se desea optimizar.***
   Pretenden optimizar (maximizar o minimizar) alguna cantidad (función objetivo). Así, por ejemplo, el principal objetivo de un banquero sería maximizar beneficios, mientras que el principal objetivo de una empresa transportista podría ser minimizar los costos de los envíos.

3. ***Las variables están sometidas a ciertas restricciones que se expresan matemáticamente a través de un conjunto de inecuaciones y/o ecuaciones lineales.***
   Habrá que tener en cuenta las restricciones que limitan el grado en el cual es posible modificar las variables que afectan a nuestra función objetivo.
   Así, a la hora de decidir cuántas unidades de cada bien se han de producir, se deberá considerar, entre otras, las limitaciones de personal y maquinaria de la que se dispone.

4. ***El problema debe presentar distintas alternativas posibles***
   Si una compañía produce cuatro bienes diferentes, la dirección puede usar Programación Lineal para determinar las cantidades de recursos que asigna a la producción de cada uno de ellos (podría optar por hacer una asignación ponderada, dedicar todos los recursos a la producción de un único bien abandonando la producción del resto, etc.).

SUPUESTOS BÁSICOS DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

Desde un punto de vista técnico, hay cinco supuestos que debe cumplir todo problema de programación lineal:

Amplía leyendo el archivo

PLANTEO DE UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Una empresa fabrica dos modelos de mesas de computación: $\mathbf{M_1}$ y $\mathbf{M_2}$.
Para su producción se necesita un **trabajo manual** de **20 minutos** para el modelo $\mathbf{M_1}$ y de **30 minutos** para el modelo $\mathbf{M_2}$ y un **trabajo de máquina** de **20 minutos** para $\mathbf{M_1}$ y de **10 minutos** para $\mathbf{M_2}$.
Se dispone de **100 horas** al mes de **trabajo manual** y de **80 horas** al mes de **trabajo de máquina**.
Sabiendo que el **beneficio** por unidad es de **$1,5** para $\mathbf{M_1}$ y **$1** para $\mathbf{M_2}$, planificar la producción para obtener el máximo beneficio.

Nos limitamos ahora a plantear formalmente el problema (ya lo resolveremos más adelante):

Llamaremos: ***X*** *al "número de unidades producidas al mes de* $\mathbf{M_1}$*"*

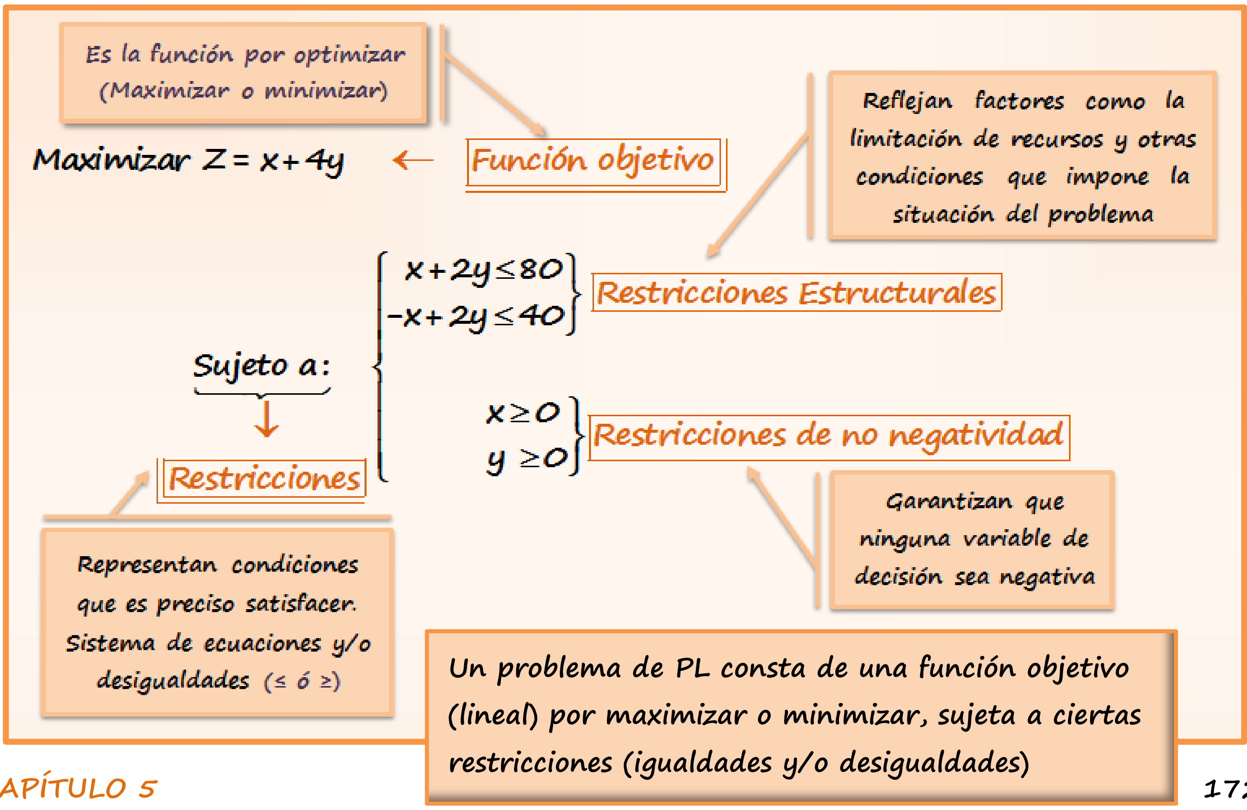
Y *al "número de unidades producidas al mes de* $\mathbf{M_2}$*"*

Datos : Función objetivo : $Z(x;y)=1,5x+y$

Restricciones : $\begin{cases} 20x+30y\le 6000 \\ 20x+10y\le 4800 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$

Problema: Maximizar Z

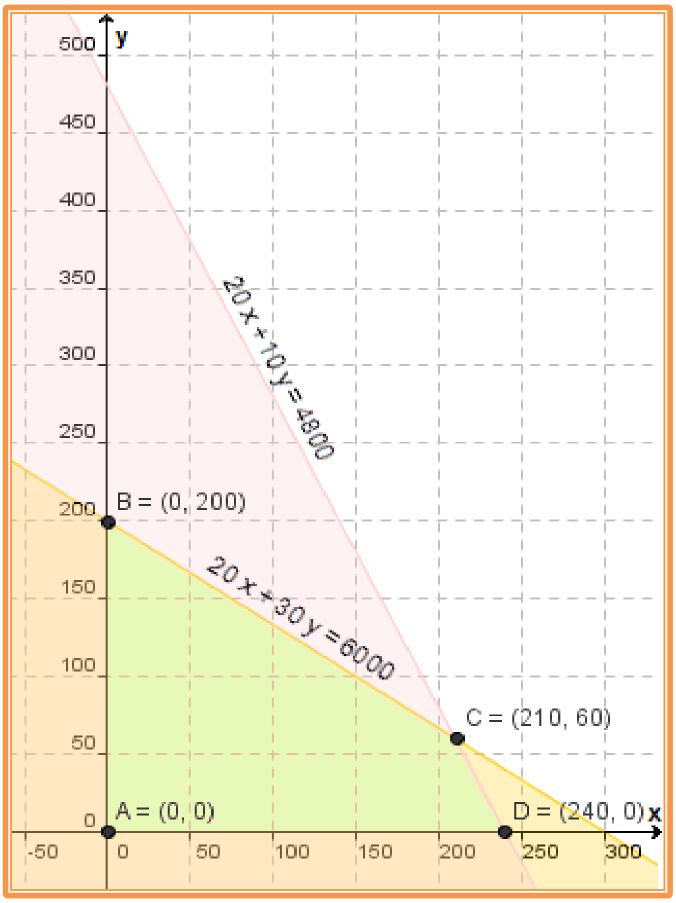
Las dos últimas restricciones, si bien no constan de forma explícita en el enunciado del problema, sí figuran de forma implícita, pues el número de mesas a producir no puede ser inferior a **0**.



RESOLUCIÓN GRÁFICA

El método gráfico de resolución tan sólo es aplicable a problemas con dos variables "*x*" e "*y*". Para aquellos casos en que el número de variables del problema sea superior a dos, no será posible encontrar la solución a partir de un gráfico bidimensional y, por lo tanto, tendremos que usar métodos de resolución analíticos. Aun así, el método gráfico es de un gran valor pedagógico dado que nos permite vislumbrar de una forma intuitiva las ideas básicas de la ***Programación Lineal***.

Volviendo al ejemplo de las mesas de computación, dado que en él tenemos sólo dos variables, podremos representar cada una de las restricciones en el plano real, la intersección de las mismas se denomina ***región factible*** (polígono **ABCD**):



La teoría establece que, dado un problema de Programación Lineal que tenga solución, ésta vendrá dada por uno de los vértices (o puntos extremos) del polígono que configura la región factible.

Por lo tanto, será suficiente hallar las coordenadas de dichos vértices (intersecciones de rectas) y determinar (sustituyendo en la función objetivo) cuál de ellos es la solución óptima.

En nuestro ejemplo, tenemos sólo cuatro puntos posibles a ser solución del problema (los cuatro vértices del polígono), sustituyendo sus coordenadas en la función objetivo obtenemos:

$Z(0;0)=0$	$Z(0;200)=200$	$Z(210;60)=375$	$Z(240;0)=360$

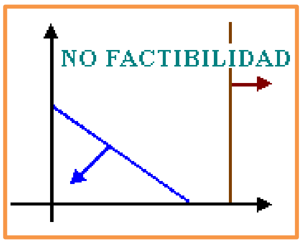
Como en este caso buscamos ***maximizar*** $Z(x;y)$, concluimos que el punto óptimo es el $(210;60)$, dado que con él obtenemos el valor máximo de la función objetivo. Así pues, la solución a nuestro problema es fabricar **210** ***mesas de tipo*** M_1 y sólo **60** ***mesas de tipo*** M_2, y con ello conseguimos el mayor beneficio de $**375.**

Amplía observando...

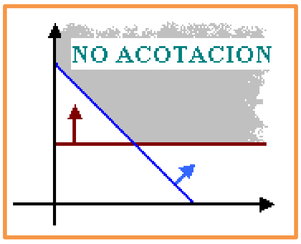
CASOS ESPECIALES

A la hora de resolver un problema de Programación Lineal, nos podemos encontrar con cualquiera de estas cuatro situaciones especiales que conviene conocer:

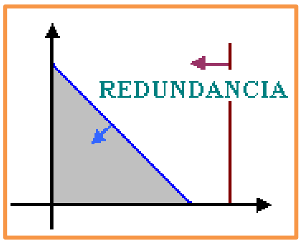
- **No Factibilidad**: Puede ocurrir que el problema propuesto no tuviese solución. Éste sería el caso en que las restricciones fuesen incompatibles, que ningún punto del plano (o, en general, del espacio real n-dimensional) puede cumplir simultáneamente todas las limitaciones a las que estamos sometidos, es decir, la región factible es un conjunto vacío.



- **No Acotación**: En ocasiones, podemos encontrarnos con problemas que no tengan una solución finita; así, por ejemplo, en un problema de maximización podríamos tener alguna variable que pudiese incrementarse indefinidamente sin violar ninguna de las restricciones, permitiendo a la función objetivo tomar valores tan grandes como se desee. Gráficamente, tendríamos una región factible no acotada.



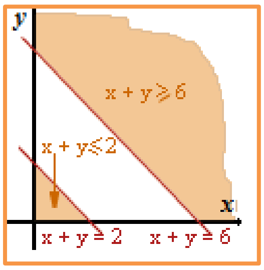
- **Redundancia**: Algunas restricciones pueden “estar de más” por no aportar nada nuevo a la “forma” de la región factible, ya que hay otras que resultan ser más restrictivas (esto suele ocurrir en problemas extensos, donde resulta difícil reconocer restricciones redundantes).



- **Soluciones Múltiples**: Un problema de Programación Lineal puede tener más de una solución óptima (e incluso infinita). En el caso gráfico de dos variables, si dos vértices consecutivos de la región factible son solución óptima del problema, entonces todos los puntos del segmento comprendido entre ellos también serán óptimos.

No factibilidad

Ejemplo

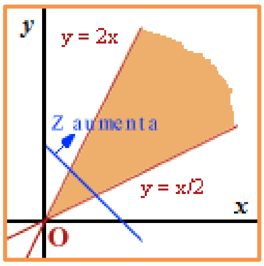


Casos especiales desarrollados.

No acotación

Con solución no acotada

Ejemplo



Redundancia

Ejemplo

Unos grandes almacenes desean liquidar **200 camisas** y **100 pantalones** de la temporada anterior. Para ello lanzan dos ofertas, ***A*** y ***B***: la oferta ***A*** consiste en un **lote de tres camisas y un pantalón**, que se vende a **$ 30**; y la oferta ***B*** consiste en **un lote de una camisa y un pantalón, que se vende a $ 50**. No se desea ofrecer menos de **20 lotes de la oferta *A*** ni menos de **10 lotes de la *B***. ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar la ganancia?

Sean: x = **“nº de lotes tipo *A*”** e y = **“nº de lotes tipo *B*”**

$$\boldsymbol{Maximizar:}\ Z(x;y) = 30x + 50y \quad \boldsymbol{Sujeto\ a} \begin{cases} 3x + y \le 200 \\ x + y \le 100 \\ x \ge 20 \\ y \ge 10 \end{cases}$$

Aclaración

Es redundante agregar las restricciones de no negatividad.

Representando el conjunto de restricciones y determinando los vértices de la región de soluciones factibles se obtiene la poligonal ABCD:

Evaluando en los vértices de la misma se obtiene:

Z **(20; 80) = 4.600**	***Z*** **(50; 50) = 4.000**
Z **(190/3; 10) = 2.400**	***Z*** **(20; 10) = 1.100**

Observar que, en este caso, se hace innecesario calcular ***Z*** **(20; 10)**, pues es claro que su valor será inferior al de ***Z*** **(20; 80)** y al de ***Z*** **(190/3; 10).**

En definitiva, la empresa debe ***vender* 20 *lotes de tipo A*** y **80 *de tipo B*,** para una ***ganancia (máxima) de $* 4.600**

Soluciones Múltiples

Ejemplo

La tabla adjunta muestra las unidades de **nitrógeno** (**N**) y de **fósforo** (**P**) que contiene cada kilo de los abonos ***A*** y ***B***. Se desea obtener un abono que, como mínimo, contenga **9 unidades de N** y **9 unidades de P**. El precio de ***A*** es de **10 $ / kg**. y el de ***B*** es de **30 $/ kg**. Calcular las cantidades que deben comprarse de ***A*** y de ***B*** para satisfacer las necesidades minimizando el costo.

	Abono A	***Abono B***	***Requerimientos***
Nitrógeno	**3**	**1**	**9**
Fósforo	**1**	**3**	**9**
Costo	**10 $ / kg.**	**30 $ / kg.**	

Llamamos
X** al **nº de kilos de A
Y** al **nº de kilos de B

$$\text{Planteo}: \textit{Minimizar} \;\; Z(x;y) = 10x + 20y \quad \textit{Sujeto a}: \begin{cases} 3x + y \geq 9 \\ x + 3y \geq 9 \\ x \;,\; y \geq 0 \end{cases}$$

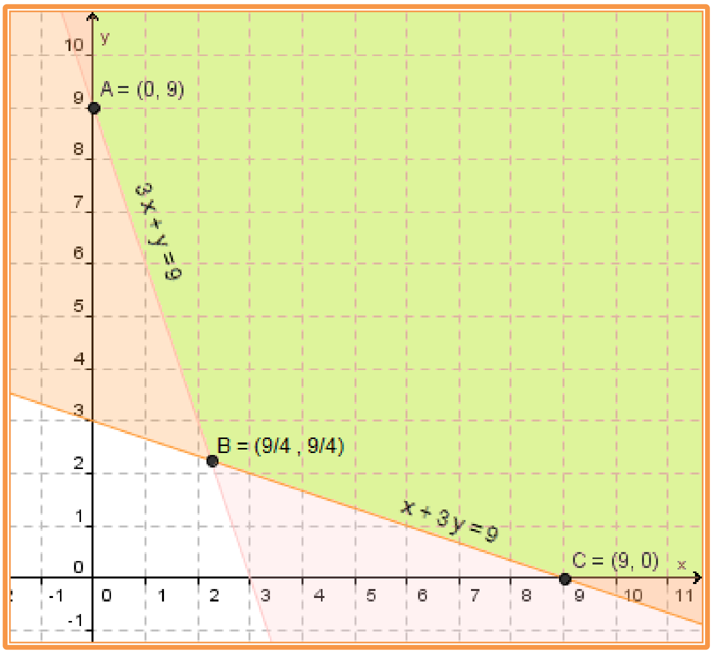
Al representar la región de soluciones factibles observamos que es una región abierta y evaluando $Z(x;y)$ en cada uno de los vértices se obtiene:

***Z*(0 ; 9) = 270**	***Z* (9/4 ; 9/4) = 90**	***Z* (9 ; 0) = 90**

Observamos que dos vértices consecutivos arrojan el mismo valor óptimo por lo tanto, tendremos infinitas soluciones ya que cualquier punto del segmento que une los dos últimos vértices (éstos incluidos) será un óptimo, obteniéndose en ellos un **costo (mínimo) de** $ **90.**

Dichas soluciones las dejaremos indicadas a través de la combinación lineal convexa de dichos vértices:

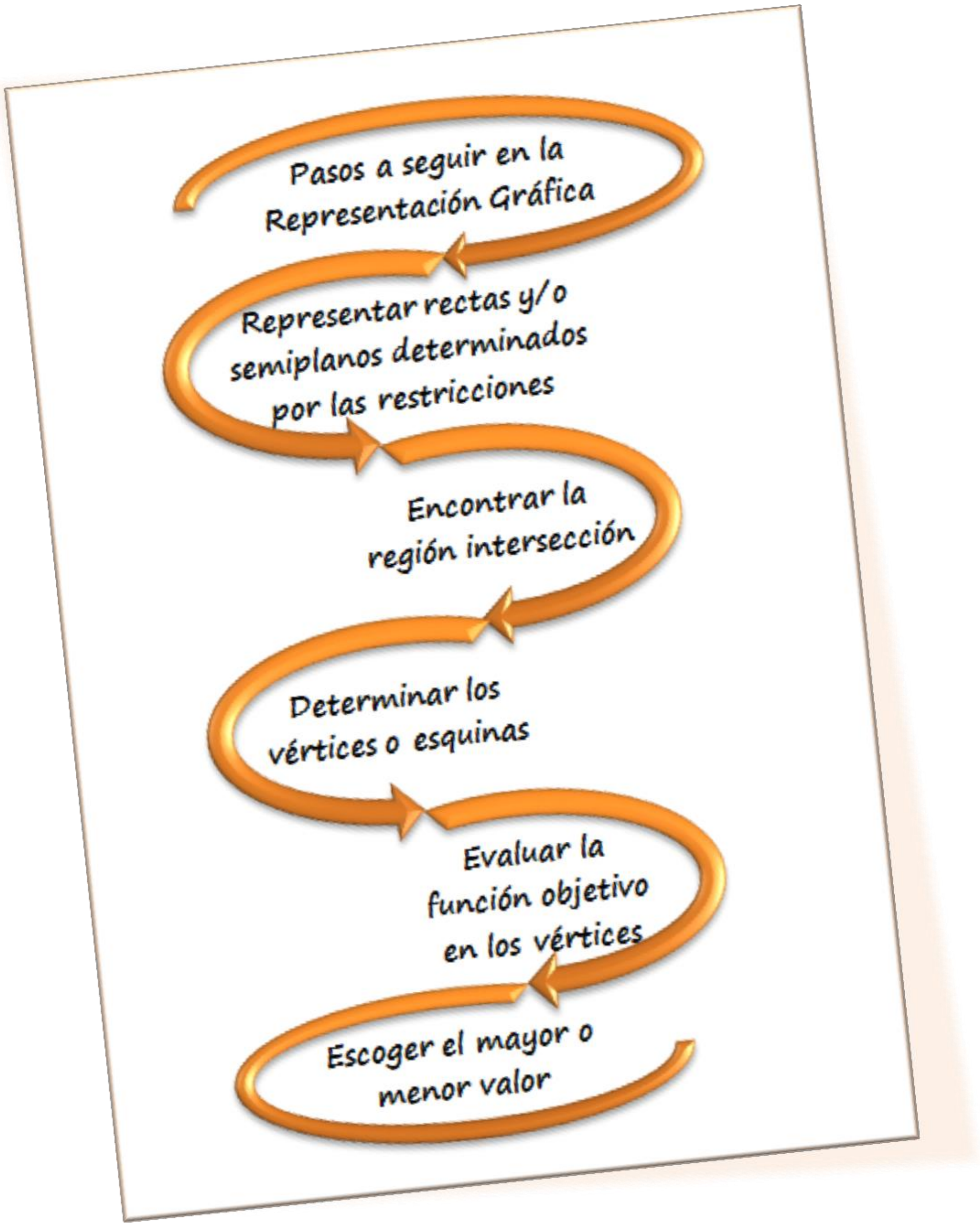
$$S = \left\{ \alpha\left(\frac{9}{4};\frac{9}{4}\right) + (1-\alpha)\,(9;0)\; con \;\; 0 \leq \alpha \leq 1 \right\}$$



RESUMEN MÉTODO GRÁFICO

Sintetizamos en este esquema los pasos a seguir para resolver un problema de programación lineal por el método gráfico.

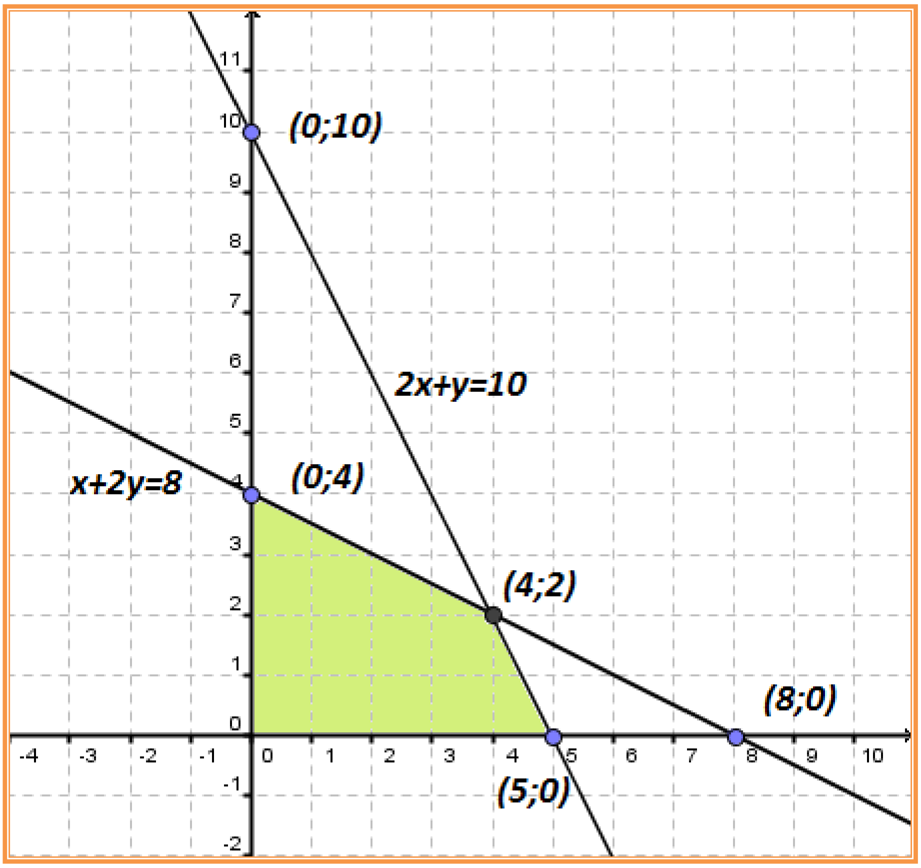
A continuación resolveremos algunos ejercicios de la práctica para afianzar los conceptos.



Ejemplo 1

Maximizar: $Z = 2x + 3y$

Sujeto a $\begin{cases} 2x + y \le 10 \\ x + 2y \le 8 \end{cases}$ Con $x \ge 0, y \ge 0$



La región factible es acotada
Hallamos los vértices:
$(0;0)$ $(0;4)$ $(5;0)$ resultan inmediatos

$(4;2)$ es solución del sistema $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

Evaluamos la función objetivo en los vértices

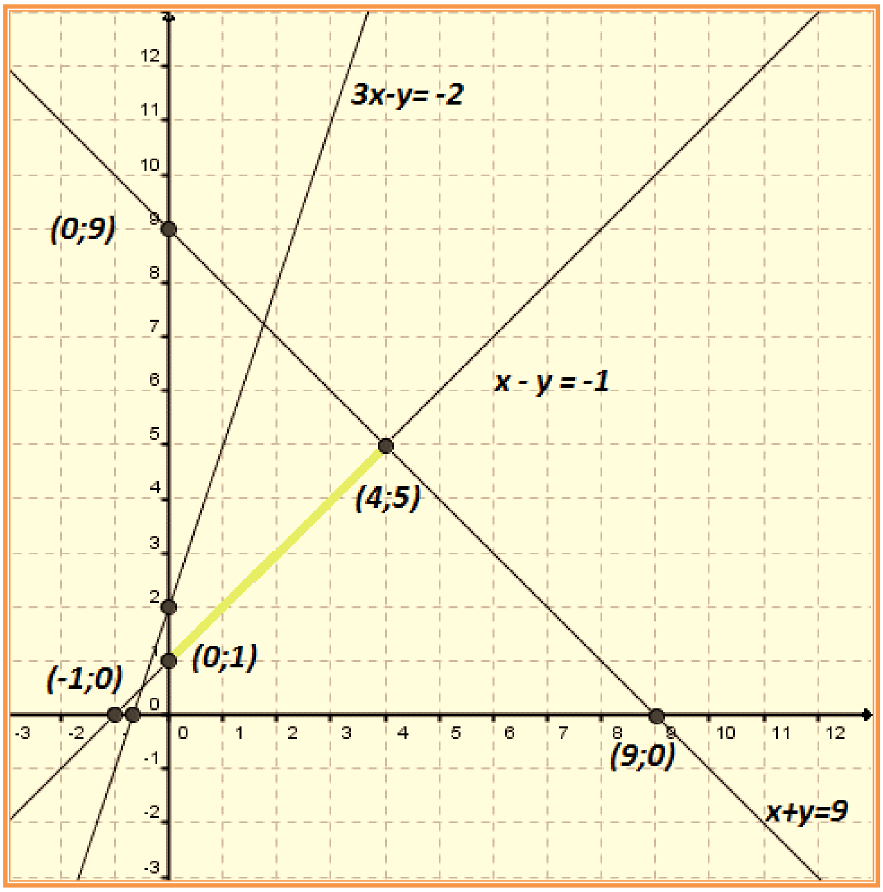
$Z(0;0) = 2.0 + 3.0 = 0 \rightarrow Z(0;0) = 0$
$Z(0;4) = 2.0 + 3.4 = 12 \rightarrow Z(0;4) = 12$
$Z(5;0) = 2.5 + 3.0 = 10 \rightarrow Z(5;0) = 10$
$Z(4;2) = 2.4 + 3.2 = 12 \rightarrow \boxed{Z(4;2) = 14}$

La función tiene máximo en $(4;2)$ y es **14**

Ejemplo 2

Minimizar: $Z = 7x + 3y$

Sujeto a $\begin{cases} 3x - y \geq -2 \\ x + y \leq \ \ 9 \\ x - y = -1 \end{cases}$ Con $x \geq 0, y \geq 0$



La región factible es acotada y es un segmento
Hallamos los extremos (vértices):
$(0;1)$ resulta inmediato

$(4;5)$ es solución del sistema $\begin{cases} x + y = \ \ 9 \\ x - y = -1 \end{cases}$

Evaluamos la función objetivo en los vértices

$Z(0;1) = 7.0 + 3.1 = 3 \rightarrow \boxed{Z(0;1) = 3}$

$Z(4;5) = 7.4 + 3.5 = 12 \rightarrow \boxed{Z(4;5) = 43}$

La función tiene mínimo en $(0;1)$ y es 3

MÉTODO SIMPLEX

INTRODUCCIÓN

Mucha gente sitúa el desarrollo de la programación lineal entre los avances científicos más importantes de la mitad del siglo XX, y esta afirmación es verdadera si tenemos en cuenta que su impacto desde 1950 ha sido extraordinario.

Un modelo de programación lineal proporciona un método eficiente para determinar una decisión óptima, (o una estrategia óptima o un plan óptimo) escogida entre un gran número de decisiones posibles.

El método simplex es un procedimiento matricial para resolver problemas donde se aplique la programación lineal.

En la solución gráfica observamos que la solución óptima está asociada siempre con un vértice de la región de soluciones factibles.

El método simplex está basado fundamentalmente en este concepto. Careciendo de la ventaja visual asociada con la representación gráfica del espacio de soluciones, el método simplex emplea un proceso iterativo que comienza en un vértice factible, normalmente el origen, y se desplaza sistemáticamente de un vértice factible a otro, hasta que se llega por último al vértice óptimo.

Presentaremos este procedimiento matemático que permite obtener la solución de un ***problema de Programación lineal para un conjunto de n variables con m restricciones.***

PROCEDIMIENTO

Trabajaremos sobre un ejercicio e indicaremos los pasos necesarios para resolver el problema de programación lineal, con el fin de ver cómo opera el algoritmo (conjunto de procedimientos, que cuando se siguen en forma ordenada proporcionan una solución óptima a un problema) y analizar e interpretar los resultados que es nuestro objetivo. Cada nueva solución nos dará un valor de la función objetivo igual o mejor que la solución previa.

MÉTODO SIMPLEX: MAXIMIZACIÓN

A continuación analizaremos los tres tipos de solución que se pueden presentar al maximizar la función objetivo sujeta a restricciones estructurales y de no negatividad.

A. SOLUCIÓN ÓPTIMA ÚNICA

Una industria fabrica dos artículos A y B. Cada artículo del tipo A requiere 1 horas de armado y 5 horas de pintura. Cada artículo B requiere 2 horas de armado y 3 horas de pintura.
En una semana la empresa dispone de 35 horas para la línea de armado y 200 horas en el sector de pintura. La empresa puede vender todos los artículos que produce y obtener una utilidad de $160 por cada artículo A y $100 por cada artículo B.
¿Cuántas unidades de cada producto deben fabricarse para maximizar el beneficio?

Recursos \ ***Productos***	***A***	***B***	***Disponibilidad***
Horas de armado	**1**	**5**	**35**
Horas de pintura	**2**	**3**	**200**
Ganancias $ / unidad	**160**	**100**	

FASES PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

I) Planteo del problema

- Identificamos y definimos la función objetivo.
  Para ello consideramos a X_1, X_2 como las variables decisorias que representan las unidades a fabricar de cada uno de los productos respectivos.
  Además los coeficientes de contribución C_j asociados con cada una de estas variables se encuentran en la última fila de la tabla y son: $C_1 = 160 \qquad C_2 = 100$

Teniendo en cuenta que la idea es ***maximizar el beneficio***, obtenemos la ***función objetivo***:

$$\boxed{Max\ Z = 160X_1 + 100X_2}$$

- Escribimos las restricciones del problema por medio de inecuaciones.

$$\begin{array}{llll} \textit{Restricción } 1 & \rightarrow & \textit{armado} & \rightarrow 1X_1 + 2X_2 \leq 35 \textit{ horas} \\ \textit{Restricción } 2 & \rightarrow & \textit{pintura} & \rightarrow 5X_1 + 3X_2 \leq 200 \textit{ horas} \end{array}$$

- Existe además la condición de ***no negatividad*** de las variables: $X_1, X_2 \geq 0$

Recordemos:
Las variables de un problema de programación lineal deben ser no negativas.

En síntesis el problema queda planteado matemáticamente de la siguiente forma:
El problema se transforma entonces en:

$$\boxed{\begin{array}{l} Max\ Z = 160X_1 + 100X_2 \\ Sujeto\ \ a\ \ \begin{cases} 1X_1 + 2X_2 \leq 35 \\ 5X_1 + 3X_2 \leq 200 \end{cases} \end{array}}$$

II) Transformación del conjunto de restricciones en un sistema de ecuaciones lineales.

Las desigualdades que representan las restricciones, se transforman en igualdades, mediante la adición de variables denominadas de ***holgura*** que denominamos "s_j" que no afectarán la función objetivo por cuanto se les asigna un coeficiente de contribución cero.
Las ***variables de holgura*** deben cumplir la restricción de no negatividad, para absorber el faltante que determina la desigualdad.

El problema se transforma entonces en:

$$\boxed{\begin{array}{l} Max\ Z = 160X_1 + 100X_2 + 0S_1 + 0S_2 \\ Sujeto\ \ a\ \ \begin{cases} 1X_1 + 2X_2 + 1S_1 + 0S_2 = 35 \\ 5X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 1S_2 = 200 \\ X_1, X_2 \geq 0 \\ S_1, S_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}}$$

III) Solución Básica Inicial

Se toma una solución básica inicial que es aquella en la cual las variables originales del problema son nulas.
En una solución básica las variables se clasifican en:

Variables Básicas: Aquellas que son no nulas en la solución.
Variables No Básicas: Aquellas que son nulas en la solución

La ***solución básica inicial*** en nuestro problema será entonces:

$$\boxed{\underbrace{X_1 = 0 \quad X_2 = 0}_{variables\ \ no\ \ básicas} \qquad\qquad \underbrace{S_1 = 35 \quad S_2 = 200}_{variables\ \ básicas}}$$

IV) Construcción de la tabla inicial del Simplex

Ahora que el problema tiene la forma que requiere el método simplex, se puede construir la primera tabla o matriz de trabajo.
Las tablas en el método simplex son una serie de cuadros que se construyen con la finalidad de llevar un registro de los cálculos efectuados.
Dicha tabla se construye tomando los coeficientes de las variables del problema y colocándolos en las filas y columnas respectivamente.

La estructura de la tabla del Simplex para nuestro problema es:

	C_j					
C_k	X_k	X_1	X_2	S_1	S_2	b
Z_j						
$C_j - Z_j$						

La primera fila Cj está constituida por los coeficientes de contribución de las variables de la función objetivo-
En nuestro problema observando la función objetivo la fila se completa así:

C_j	160	100	0	0

En la segunda fila están los títulos de las columnas subsiguientes: Nombre de las variables originales del problema, de las variables de holgura y de los términos independientes

C_k	X_k	X_1	X_2	S_1	S_2	b

La primera columna C_k está formada por los coeficientes de contribución de las variables que integran la solución dada.

En este caso las variables s_1 y s_2 forman lo que se denomina la solución inicial básica y factible dada, de la que se parte, y sus coeficientes de contribución son cero (**0**).

C_k	X_k
0	S_1
0	S_2

La segunda columna está integrada por la nombres de las variables de la base de la solución.
Las siguientes columnas contienen los nombres y los coeficientes de las variables que integran las ecuaciones de las restricciones.

160	100	0	0	*Valor de la solución*
X_1	X_2	S_1	S_2	b
1	2	1	0	35
5	3	0	1	200

La penúltima fila Z_j se calcula multiplicando escalarmente el vector columna C_k por los vectores columnas de las variables básicas y no básicas del problema

	C_j	160	100	0	0	*Valor de la solución*
C_k	X_k	X_1	X_2	S_1	S_2	b
0	S_1	1	2	1	0	35
0	S_2	5	3	0	1	200
Z_j		0	0	0	0	0
$C_j - Z_j$		160–0 = 160	100–0 = 100	0–0 = 0	0–0 = 0	

Z se calcula de la siguiente forma:

0. 1+0.5=0 | 0.2+0.3=0 | 0.1+0.0=0 | 0.0+0.1=0 | 0.35+0.200=0

Los valores Z_j pueden interpretarse desde el punto de vista económico como la ***utilidad bruta*** que se obtendría al introducir una unidad de la variable correspondiente, X_j.

Por ejemplo en la columna 1, si se introduce una unidad de X_1 en la solución, el valor de S_1, debe reducirse en 1 para mantener la igualdad en la primera fila (ecuación de restricción), S_2 debe reducirse en **5** para conservar la igualdad en la segunda fila

Finalmente se ubica la fila $C_j - Z_j$ que es el resultado de restar los valores Z_j que se acaban de calcular, de los coeficientes de contribución de la función objetivo C_j:

$C_j - Z_j$	160	100	0	0

$$\underbrace{\quad 160 \quad 100 \quad 0 \quad 0 \quad}_{\text{INDICADORES}}$$

$C_j - Z_j$ representa la ***utilidad neta*** que se obtiene al introducir una unidad X_j en la solución, también se podría interpretar como el costo de oportunidad al no introducir una unidad X_j. Los elementos de la fila $C_j - Z_j$ se los llama indicadores

La primera tabla completa es la que presentamos a continuación:

	C_j	160	100	0	0	*Valor de la solución*
C_k	X_k	X_1	X_2	S_1	S_2	b
0	s_1	1	2	1	0	35
0	s_2	5	3	0	1	200
Z_j		0	0	0	0	0
$C_j - Z_j$		160	100	0	0	

La **TABLA I** nos presenta toda la información que se requiere para resolver un problema de programación lineal, los valores de la solución que se presentan en el lado derecho de la tabla, las razones o tasas de sustitución de una variable por otra, las cuales aparecen en el cuerpo de la tabla y el costo de oportunidad que se muestra en la parte inferior de la tabla.

El método simplex funciona desplazándose de un vértice de la región factible a otro que le sea adyacente.
La tabla original representa el vértice que se encuentra en el origen, ya que se tiene $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, esto significa no fabricar los dos productos, esta sería la ***SOLUCIÓN INICIAL BÁSICA FACTIBLE*** del problema, en la cual: $S_1 = 35$, $S_2 = 200$

$$\boxed{\textit{Solución Básica Inicial } \left(X_1; X_2;\ S_1; S_2; S_3\right) = (0;0;35;200) \textit{ donde } Z = 0}$$

El método simplex funciona incluyendo en la solución la variable que más costo de oportunidad $C_j - Z_j$ tenga y sacando una de las variables de las que menor utilidad bruta Z_j tiene, en cada iteración o cambio de tabla.
Con este método y sin hacer uso de una gráfica, se puede determinar que variable entra en la solución y cuál de ellas sale, aplicando las siguientes reglas:

- **Regla para determinar la variable entrante**: Para determinar qué variable entra en la solución se selecciona la que tenga mayor valor para $C_j - Z_j$
- **Regla para determinar la variable saliente**: Se calcula el cociente entre los valores de la solución (columna **b**) y los coeficientes de la columna de la variable entrante, (sólo para los coeficientes positivos). La variable que sale es la corresponde a la fila que tenga el cociente más pequeño

Observamos la **TABLA I** y aplicamos:

- la ***regla de entrada***: el **mayor valor** $C_j - Z_j$ es **160** entonces seleccionamos X_1 para entrar en la solución y sombreamos la columna correspondiente.
- la ***regla de salida:*** efectuamos los cocientes, uno para cada fila de los coeficientes de la columna b con sus correspondientes de la columna de la variable entrante X_1 y obtenemos los siguientes valores **35/1 = 35, 200/5 = 40**, como el **cociente más pequeño es 35**, correspondiente a la primera fila entonces S_1 será la variable que sale de la solución. Sombreamos la fila correspondiente.

	C_j	160	100	0	0		
C_k	X_k	X_1	X_2	S_1	S_2	b	
0	s_1	①	2	1	0	35	↑ *Variable saliente*
0	s_2	5	3	0	1	200	
Z_j		0	0	0	0	0	
$C_j - Z_j$		*160–0 = 160*	*100–0 = 100*	*0–0 = 0*	*0–0 = 0*		
		↑ *Variable entrante*					

La intersección de la columna de la variable que entra X_1 y la fila de la variable que sale S_1, ambas sombreadas, se denomina ***elemento pivote*** el cual mostramos dentro de un círculo.

Después de aplicar las reglas de entrada y salida el siguiente paso del método simplex es transformar la tabla en una nueva solución, usando el elemento pivote. Esto puede hacerse mediante el proceso de eliminación de Gauss o el método de Gauss-Jordan, el cual transforma la tabla, pero mantiene la misma solución para las ecuaciones de restricción

En el ejemplo el elemento a tomar como pivote es **1**,

Aplicamos Gauss-Jordan y tomando como pivote al elemento mencionado, obtenemos la siguiente tabla:

En lugar de S_1 variable saliente, escribimos el nombre de la variable entrante: X_1 *y* en la columna de la izquierda el coeficiente respectivo de la misma en la función objetivo.

	C_j	160	100	0	0	
C_k	X_k	X_1	X_2	S_1	S_2	b
160	X_1	1	2	1	0	35
0	S_2	0	–7	–5	1	25
Z_j		160	320	160	0	5600
$C_j - Z_j$		0	–220	–160	0	

La fila del pivote ① se escribe como en la tabla anterior y la columna del pivote se completa con ceros (sombreadas en amarillo)

Los restantes números de la segunda fila los completamos con la regla del rectángulo (escritos en verde)

La fila Zj la calculamos multiplicando escalarmente el vector columna C_k por los vectores columnas de las variables básicas y no básicas del problema.

Observando la tabla podemos determinar las variables básicas y las no básicas:

$$\boxed{\underbrace{X_2 = 0 \quad s_1 = 0}_{\textit{variables no básicas}} \qquad \underbrace{X_1 = 35 \quad s_2 = 25}_{\textit{variables básicas}}}$$

Podemos escribir una nueva solución:

$$\boxed{\textit{Segunda Solución Factible } \left(X_1; X_2; S_1; S_2\right) = \left(35;0;0;25\right) \textit{ donde } Z = 5600}$$

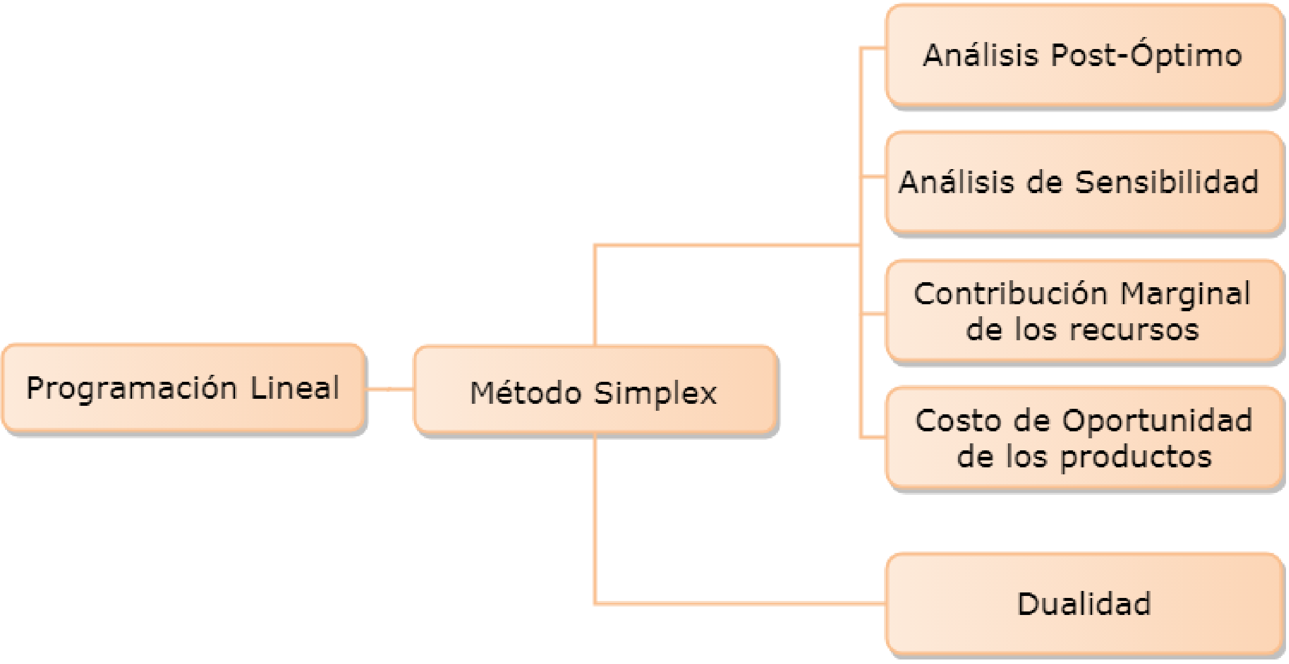
¿Es la solución óptima? Sí, dado que los indicadores son no positivos

En este apartado realizaremos el análisis y la interpretación de los resultados de los problemas de programación lineal, que se conoce con el nombre de Análisis post óptimo e incluye también el análisis de la sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo y de las constantes del lado derecho de las restricciones.

El análisis de la sensibilidad nos permite conocer cuánto pueden variar las constantes de la función objetivo y de las restricciones para que la solución óptima obtenida siga siendo válida.

A través de la dualidad todo problema de programación lineal dado, llamado primal, tiene un problema relacionado con él, llamado dual, que puede plantearse con la información del problema original o primal. Todo problema original de maximización tiene asociado un problema dual de minimización y viceversa.

La importancia del problema dual está dada por aspectos teóricos y sobre todo prácticos. La solución de un problema de programación lineal puede determinarse resolviendo el original o su dual. La estructura más simple de uno de los dos problemas puede favorecer la elección del mismo para resolverlo.



INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

En esta tabla observamos que la utilidad neta $C_j - Z_j$ para cada variable es cero o negativo, lo cual significa que hemos alcanzado la tabla óptima o solución óptima del problema de programación lineal desde el punto de vista matemático.

¿Qué significan estos resultados como ayuda a la toma de decisiones de esta organización?

Recordamos que en nuestro ejercicio tenemos 2 variables decisorias de las cuales solamente en la base se encuentra X_1 esto indica que se deben producir del **producto 1**, **35 unidades** para lograr un **beneficio óptimo** de **$590**.

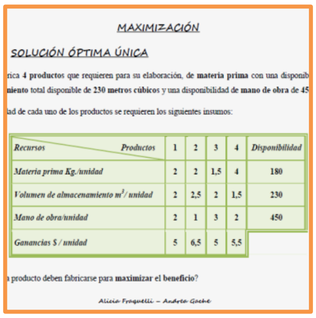
En otras palabras no hay combinación alguna bajo las condiciones de nuestro ejemplo que supere este beneficio.

La variable (holgura) S_1 que en nuestro ejemplo representa las horas de pintura disponibles para la producción de los productos (ver restricciones) significa que hay unas **25** sin producir de un total de **200**.

¿Qué importancia tiene para nosotros la información restante dada por esta solución?

Por ejemplo, el costo de oportunidad de la variable decisoria (no básica) $X_2 = -220$ indica que por cada unidad que se fabrique de este producto nuestro beneficio óptimo se reduce en este valor; también las variables de holgura S_1, S_2 que nos indica armado y mano de obra respectivamente significa que si empleamos una hora más de armado (s_1) nuestro beneficio aumenta en **$160**.

Recuerde que la solución obtenida cumple todas las restricciones



MAXIMIZACIÓN

SOLUCIÓN ÓPTIMA ÚNICA

rica **4 productos** que requieren para su elaboración, de **materia prima** con una disponib

niento total disponible de **230 metros cúbicos** y una disponibilidad de **mano de obra de 45**

ad de cada uno de los productos se requieren los siguientes insumos:

Recursos / Productos	1	2	3	4	Disponibilidad
Materia prima Kg./unidad	2	2	1,5	4	180
Volumen de almacenamiento m^3/ unidad	2	2,5	2	1,5	230
Mano de obra/unidad	2	1	3	2	450
Ganancias $ / unidad	5	6,5	5	5,5	

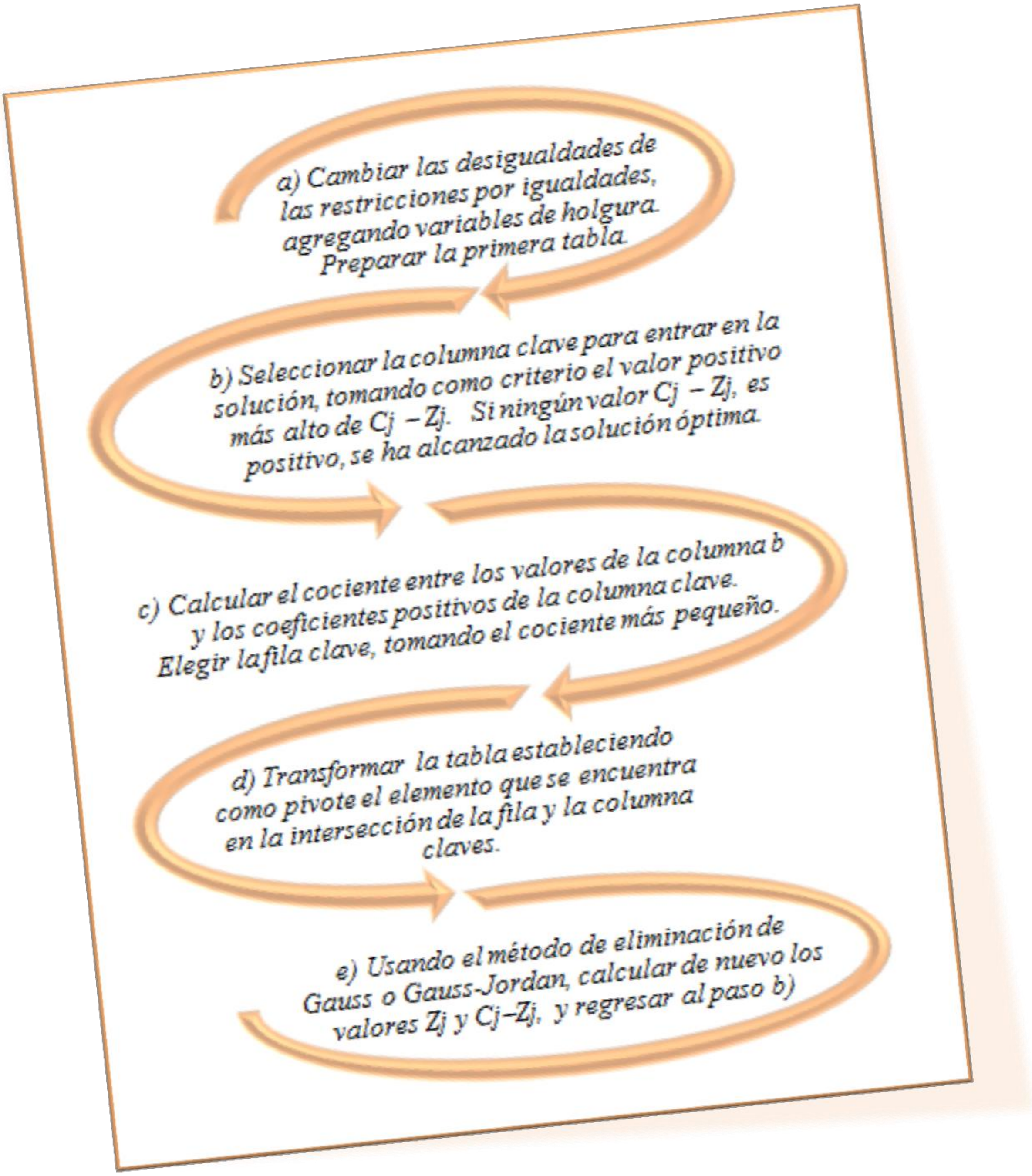
a producto deben fabricarse para **maximizar el beneficio**?

Alicia Fraquelli – Andrea Gache

Ejercicio desarrollado de maximización por simplex.

RESUMEN

El método simplex implica la realización de un número considerable de pasos, un resumen de esos pasos principales es el siguiente:



EJERCICIO DE APLICACIÓN

A continuación resolveremos el Ejercicio***: 4 y 5 a)*** de la guía de Trabajos Prácticos en forma gráfica y analítica para que puedas vincular el procedimiento del Método Simplex con la resolución gráfica del mismo.

Maximizar $Z = x + 2y$ (Funcional lineal o función objetivo)

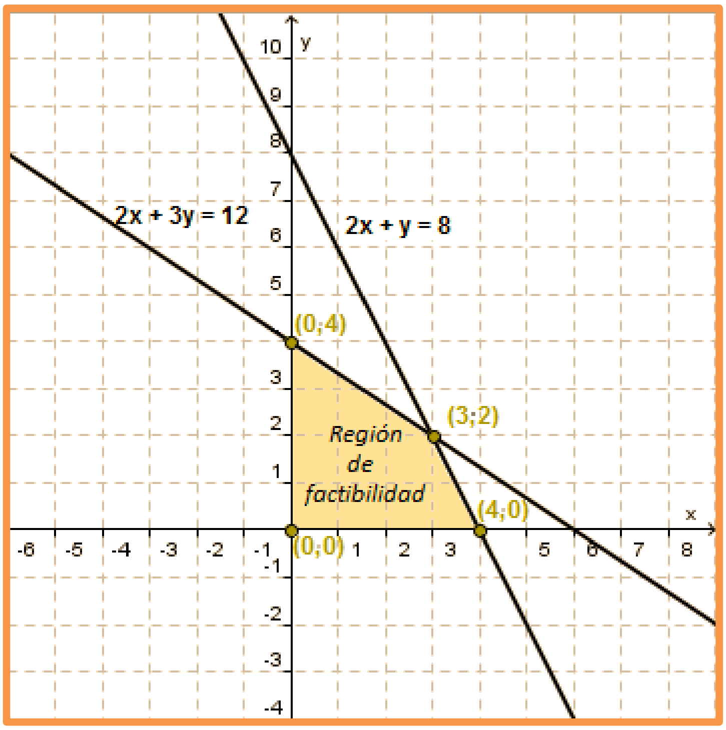
Sujeta a las restricciones $\begin{cases} 2x + \ \ y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 12 \end{cases}$ Con condiciones de no negatividad $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

RESOLUCIÓN GRÁFICA – ANALÍTICA

La región de factibilidad es acotada.
Hallamos los vértices de la región factible:

$(0;0)$, $(4;0)$ y $(0;4)$ resultan inmediatos, mientras que

$(3;2)$ es solución del sistema $\begin{cases} 2x + \ \ y = \ 8 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$



Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$Z(0;0) = 0 + 2.0 = 0$

$\boxed{Z(0;4) = 0 + 2.4 = 8}$

$Z(3;2) = 3 + 2.2 = 7$

$Z(4;0) = 4 + 2.0 = 4$

Maximiza en **(0;4)** y es $\mathbf{Z = 8}$ o sea

$\boxed{\textbf{Máximo:}(0;4;8)}$

RESOLUCION UTILIZANDO MÉTODO SIMPLEX

El simplex nos permite hallar los máximos y los mínimos de una función en cierta región. Se puede aplicar aunque haya más de dos variables.
Primero cada inecuación la convertimos en una ecuación agregando una ***variable de holgura o Slack*** que se suma en caso de menor igual y se resta en caso de mayor o igual.

$$\begin{cases} 2x + \ \ y \leq \ 8 \\ 2x + 3y \leq 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2.x + 1.y + 1.S_1 + 0.S_2 = \ \ 8 \\ 2.x + 3.y + 0.S_1 + 1.S_2 = \ 12 \end{cases}$$

$$\boxed{Z \ = \ x + 2.y \ \ \Rightarrow \ Z \ = \ 1.x + 2.y + 0.S_1 + 0.S_2}$$

Las variables de holgura no aportan nada al valor de la funcional, por eso tienen en la expresión de la funcional coeficiente cero.

En la solución óptima estas variables indican la cantidad de recursos disponibles no utilizados. Si valen cero significa que se han utilizado todos los recursos y se dice que el ***recurso*** está ***saturado***.

	c_j	1	2	0	0		
c_k	x_k	$x_1(x)$	$x_2(y)$	S_1	S_2	b	
0	S_1	2	1	1	0	8	***Primera restricción***
0	S_2	2	3	0	1	12	***Segunda restricción***
Z_j		2.0 + 2.0 = 0	1.0 + 3.0 = 0	1.0 + 0.0 = 0	0.0 + 1.0 = 0	8.0 + 12.0 = 0	***Valor inicial de la función objetivo***
$c_j - z_j$		1 – 0 = 1	2 – 0 = 2	0 – 0 = 0	0 – 0 = 0		

El método distingue dos tipos de variables*:* ***básicas*** y ***no básicas***

Básicas*:*
Se identifican porque en la tabla la columna que encabezan es un vector canónico

No Básicas*:*
En la solución valen cero.

En cada paso se trata de transformar una variable no básica en básica tratando de maximizar la función.

Completamos la tabla con los c_j *que son los coeficientes de la funcional* $Z = 1.x+2.y+0.S_1+0.S_2$

S_1 *y* S_2 son las ***variables básicas*** (encabezan columnas de vectores canónicos), x *e* y son las ***variables no básicas*** $\boxed{\textbf{Solución básica inicial } (x;\ y;\ S_1;\ S_2) = (0;0;8;12) \ \ Z = 0}$

Observa que esta solución inicial corresponde a la que se obtiene en el vértice **(0; 0)** *de la resolución gráfica*

La tabla inicial representa el vértice que se encuentra en el origen. Hemos obtenido el primer vértice de la región de factibilidad $V_1 = (0;0)$

Ahora se debe elegir una ***variable de entrada entre las no básicas*** y una ***variable de salida entre las básicas***

	c_j	1	2	0	0		
c_k	x_k	$x_1(x)$	$x_2(y)$	S_1	S_2	b	
0	S_1	2	1	1	0	8	8/1 = 8
0	S_2	2	3	0	1	12	12/3 = 4
z_j		0	0	0	0	0	
$c_j - z_j$		1	2	0	0		

Entre las no básicas x e y elegimos aquella que corresponde a la columna de coeficiente positivo de mayor valor en la fila $c_j - z_j$

En nuestro caso es *"y"* luego la ***variable de entrada es "y".***

Pintamos la columna.

Entre las básicas S_1 o S_2 elijo la variable de salida, para eso calculo los cocientes entre los elementos de la columna ***b*** con los respectivos coeficientes de la columna de entrada o sea *"y"*

Elegimos la fila cuyo cociente positivo es menor o sea en nuestro caso la ***variable de salida* es "S_2".**

Pintamos le fila correspondiente.

Para transformar la tabla debemos utilizar el método del pivote, el número que resulta de la intersección de la columna y fila elegida es **3**. ***Como el pivote debe ser* 1*, divido la fila por* 3**

	c_j	1	2	0	0	
c_k	x_k	$x_1(x)$	$x_2(y)$	S_1	S_2	b
0	S_1	2	1	1	0	8
2	y	2/3	①	0	1/3	4
z_j		0	0	0	0	0
$c_j - z_j$		1	2	0	0	

Se obtiene el pivote ① y se debe sustituir S_2 y en su lugar poner **"*y*"** y donde está el coeficiente **0** de S_2 poner el **2** de la ***y***.

	c_j	1	2	0	0	
c_k	x_k	$x_1(x)$	$x_2(y)$	S_1	S_2	b
0	S_1		0			
2	y	2/3	1	0	1/3	4
z_j						
$c_j - z_j$						

Escribimos la fila del pivote y completamos la columna con tantos ceros como sean necesarios.

Los restantes números en este caso de la primera fila los calculamos por la regla del rectángulo

Luego calculamos z_j y $c_j - z_j$

	c_j	1	2	0	0	
c_k	x_k	$x_1(x)$	$x_2(y)$	S_1	S_2	b
0	S_1	4/3	0	1	–1/3	4
2	y	2/3	1	0	1/3	4
z_j		4/3	2	0	2/3	Z=8
$c_j - z_j$		–1/3	0	0	–2/3	
		(▲)			(▲▲)	

En esta nueva tabla las ***variables básicas*** son: $S_1 = 4$, $y = 4$, la función $Z = 8$, las ***variables no básicas*** son: $x = 0$, $S_2 = 0$

Obtenemos una nueva solución y la misma nos da otro vértice de la región de factibilidad adyacente al anterior: $V = (0; 4)$

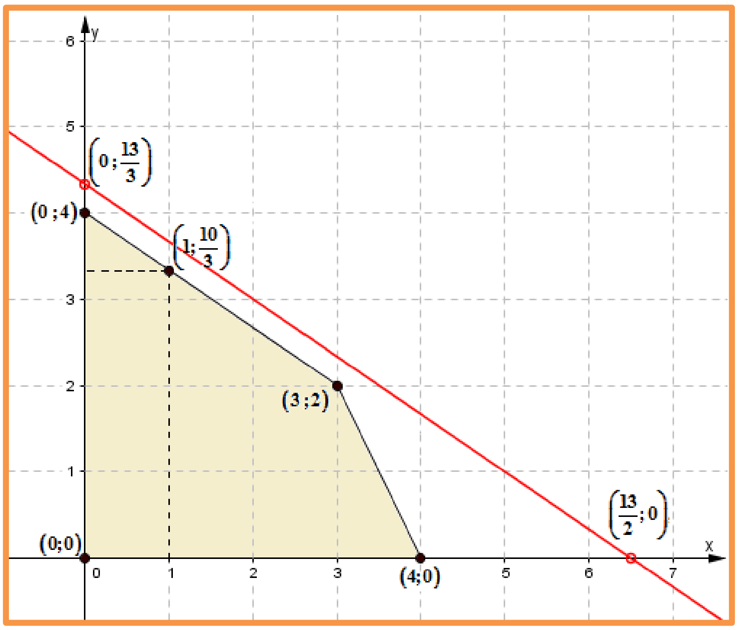
Observando la última fila nos encontramos frente a la solución óptima ya que ninguno de los $c_j - z_j$ es positivo, o sea en este punto no es posible incrementar la utilidad neta. Luego:

$$\boxed{\textit{Solución óptima}\left(x;\ y;\ S_1;\ S_2\right) = \left(0;\ 4;\ 4;\ 0\right) \quad Z = 8}$$

Observa que esta solución óptima coincide con el vértice (0; 4) de la resolución gráfica, en el cual se optimiza Z

Además de la solución se concluye que del ***recurso* 1**: sobran **4 *unidades y del recurso* 2**: ***no sobran unidades*** o sea el ***recurso* 2** se dice está ***saturado***.

Representamos gráficamente para que visualicen la situación:



(▲) **En** la columna de ***x₁(x)*** el valor de $c_j - z_j = -1/3$ significa que: si ***x*** aumenta de **0** a **1** el valor de ***Z*** disminuye en ***$* 1/3,** significa que si quisiéramos fabricar *una* ***unidad del producto*** **1** dejaríamos de ganar ***$* 1/3**, a esto se lo denomina ***"costo de oportunidad del producto*** **1*"***

$$Z(0;4) = 0 + 2.4 = 8$$

$$Z(1;\frac{10}{3}) = 1 + 2.\frac{10}{3} = \frac{23}{3}$$

$$Z(0;4) - Z(1;\frac{10}{3}) = 8 - \frac{23}{3} = \boxed{\frac{1}{3}} \quad (\blacktriangle)$$

$$(x;y) = \alpha(0;4) + (1-\alpha)(3;2)$$

$$\begin{cases} x = (1-\alpha)3 \quad \textit{como} \quad \boxed{x=1} \Rightarrow 1 = (1-\alpha)3 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2}{3}} \\ y = 4\alpha + 2(1-\alpha) \ \textit{reemplazando} \ y = 4.\frac{2}{3} + 2(1-\frac{2}{3}) \ \therefore \ \boxed{y = \frac{10}{3}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{(x;y) = \left(1;\frac{10}{3}\right)}$$

(▲▲) En la columna de S_2 el valor de $c_j - z_j = -2/3$, significa que: si S_2 aumenta en 12 a 13, entonces ***Z*** aumenta en **$ 2/3.** ***A este valor se lo denomina "Contribución marginal del recurso*** 2*"*

La ***contribución marginal*** representa el aumento de la función Objetivo si tuviéramos una unidad más del recurso S_2. Influye directamente en la decisión de incorporar o no más unidades según el costo, ya que si tuviéramos que pagar para obtener una unidad de ese recurso no se pagaría más de esa cifra porque si no perderíamos plata.

Se lo conoce como *"**precio sombra" (precio máximo adicional por cada unidad que se está dispuesto a pagar**).*

En el caso de S_1 la ***contribución marginal*** es cero ya que el recurso no se usó totalmente**.** Frente a esta situación el sistema se modifica, ya que la disponibilidad cambia.

$$\begin{cases} 2x + \ \ y = \ 8 \\ 2x + 3y = 13 \ \text{(1 unidad más).} \end{cases}$$

Intersección con el eje x : $\left(\frac{13}{2};0\right)$, Intersección con el eje y : $\left(0\,;\frac{13}{3}\right)$

$$Z(0;4) = 0 + 2.4 = 8$$

$$Z\left(0;\frac{13}{3}\right) = 0 + 2.\frac{13}{3} = \frac{26}{3}$$

$$Z(0;4) - Z\left(0;\frac{13}{3}\right) = 8 - \frac{26}{3} = \boxed{-\frac{2}{3}} \quad (\blacktriangle\blacktriangle)$$

Si realizamos nuevamente el proceso ahora contando con una unidad más del segundo recurso, es decir en cambio de **12** unidades, **13** unidades.

Podríamos observar que al finalizar el método Simplex, ***Z***, es decir nuestra función objetivo ha aumentado en aproximadamente **$2/3**

	c_j	1	2	0	0		
c_k	x_k	$x_1(x)$	$x_2(y)$	S_1	S_2	b	
0	S_1	2	1	1	0	8	8/1=8
0	S_2	2	3	0	1	13	13/3=4,33 →
Z_j		0	0	0	0	0	
$c_j - z_j$		1	2 ↑	0			

	c_j	1	2	0	0	
c_k	x_k	$x_1(x)$	$x_2(y)$	S_1	S_2	b
0	S_1	2	1	1	0	8
0	S_2	2/3	1	0	1/3	13/3
Z_j		0	0	0	0	0
$c_j - z_j$		1	2	0	0	

	c_j	1	2	0	0	
c_k	x_k	$x_1(x)$	$x_2(y)$	S_1	S_2	b
0	S_1	4/3	0	1	–1/3	11/3
2	y	2/3	1	0	1/3	13/3
Z_j		4/3	2	0	2/3	26/3≈ 8,67
$c_j - z_j$		–1/3	0	0	–2/3	

Observación a tener en cuenta:
El método Simplex es un proceso de iteración, para hallar la solución óptima inicia el proceso en el vértice $(0\,;0)$ de la región de factibilidad y recorre los vértices de la misma a través de las aristas hasta encontrar la solución que optimiza la función objetivo. El criterio de elección de las variables entrante y saliente nos garantiza el recorrido mínimo

B. SOLUCIONES NO ACOTADAS.

Hemos analizado ya gráficamente la posibilidad de que un problema de programación lineal puede no tener valor óptimo máximo debido a que la región de soluciones factibles es no acotada. En este caso decimos que el problema tiene una solución no acotada.

Esta situación se puede advertir a través del método Simplex cuando no hay cocientes posibles en la tabla del simplex para una variable que entra.

Ejemplo

$$\textit{Maximizar } Z = 2x_1 + 7x_2 \quad \textit{sujeta a} \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ 3x_1 - \ \ x_2 \leq 6 \\ 5x_1 \leq 7{,}5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Si analizamos la tabla inicial observamos que:

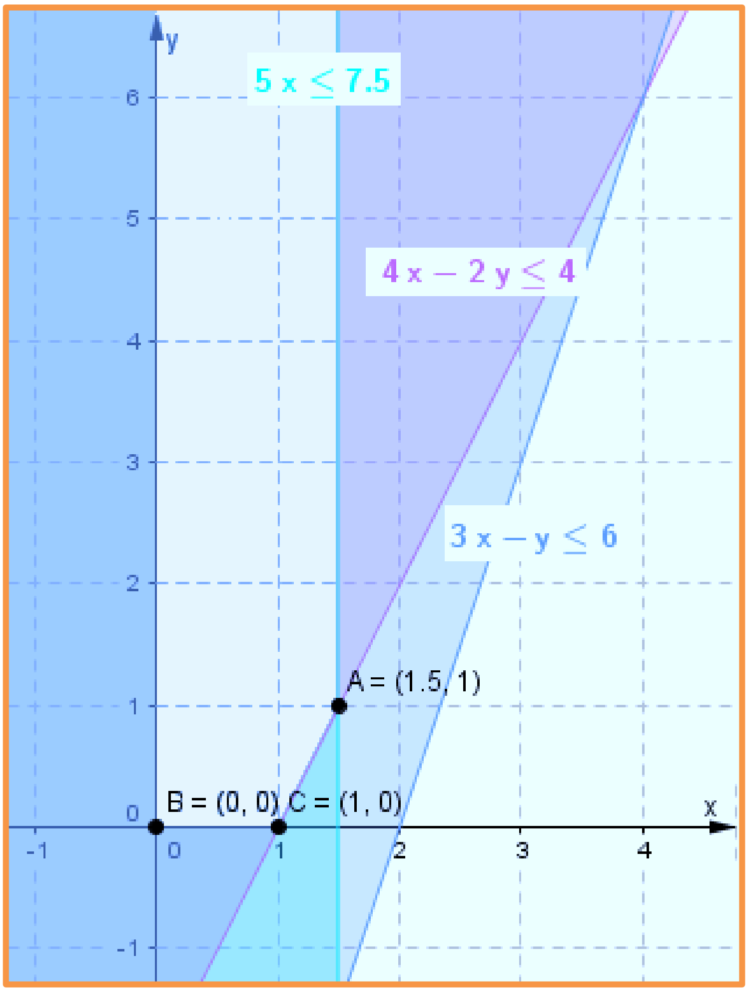
	C_j	2	7	0	0	0		
C_k	X_k	X_1	X_2	s_1	s_2	s_3	b	
0	s_1	4	–2	1	0	0	4	No hay cociente
0	s_2	3	–1	0	1	0	6	No hay cociente
0	s_3	5	0	0	0	1	7.5	No hay cociente
Z_j		0	0	0	0	0	0	
$C_j - Z_j$		2	7	0	0	0		
			↑ Variable Entrante					

La variable entrante en este caso es X_2 y cómo se puede ver en la tabla no hay cocientes posibles de realizar; dado que el divisor es negativo o nulo.
Si recordamos que el cociente representa el valor con el que entra en la próxima solución la variable entrante, se advierte claramente que este valor no puede ser negativo.

En general, tomaremos la siguiente regla:

Si no existen cocientes posibles de realizar en una tabla del simplex, entonces el problema de programación lineal tiene una solución no acotada.

Si representamos gráficamente la región de soluciones factibles vemos que la misma corresponde a una región abierta, por lo tanto como nuestro objetivo es maximizar la función objetivo, ello no es posible.



C. SOLUCIONES ÓPTIMAS MÚLTIPLES

En general, adoptaremos la siguiente regla para el caso de soluciones múltiples:

En una tabla que contiene una solución óptima, un indicador nulo para una variable no básica sugiere la posibilidad de que existan soluciones óptimas múltiples

Ejemplo

$$\textit{Maximizar} \quad Z = -x_1 + 4x_2 + 6x_3, \quad \textit{sujeta a} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 6 \\ -2x_1 - 5x_2 + x_3 \le 10 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

La tabla inicial del simplex es:

	C_j	–1	4	6	0	0			
C_k	X_k	X_1	X_2	X_3	s_1	s_2	b		
0	s_1	1	2	③	1	0	6	6 ÷ 3=2	→ VS
0	s_2	–2	–5	1	0	1	10	10 ÷ 1=10	
Z_j		0	0	0	0	0	0		
$C_j - Z_j$		–1	4	6	0	0			
				↑ V.E					

Aclaración:
V. E (variable entrante)
V. S (variable saliente)

Solución básica inicial $(x_1; x_2; x_3; S_1; S_2) = (0;0;0;6;10) \quad Z = 0$

Tomando como pivote el elemento que se encuentra en la intersección de la variable entrante y saliente, obtenemos la siguiente tabla al dividir la fila del pivote por 3.

	C_j	–1	4	6	0	0		
C_k	X_k	X_1	X_2	X_3	s_1	s_2	b	
0	s_1	1/3	2/3	①	1/3	0	2	→ V.S
0	s_2	– 2	– 5	1	0	1	10	
Z_j		0	0	0	0	0	0	
$C_j - Z_j$		– 1	4	6	0	0		
				↑ V.E				

Aplicamos Gauss-Jordan y calculamos posteriormente los Z_j y los $C_j - Z_j$ la tabla que obtenemos es

	C_j	-1	4	6	0	0	
C_k	X_k	X_1	X_2	X_3	s_1	s_2	b
6	X_3	1/3	2/3	1	1/3	0	2
0	s_2	−7/3	−17/3	0	−1/3	1	8
Z_j		2	4	6	2	0	12
$C_j - Z_j$		−3	0	0	−2	0	

Como todos los indicadores son no positivos, tenemos entonces una solución óptima, que escribimos:

$$\textit{Solución Óptima}\ (x_1; x_2; x_3; S_1; S_2) = (0; 0; 2; 0; 8) \quad Z = 12$$

Si consideramos entonces a X_2 como variable entrante, queda después de efectuar los cocientes que X_3 es la variable saliente.

	C_j	-1	4	6	0	0			
C_k	X_k	X_1	X_2	X_3	s_1	s_2	b		
6	X_3	1/3	2/3	1	1/3	0	2	2÷2/3=3	$\rightarrow$ *V.S*
0	s_2	−7/3	−17/3	0	−1/3	1	8	*No hay cociente*	
Z_j		2	4	6	2	0	12		
$C_j - Z_j$		−3	0	0	−2	0			
			$\uparrow$ *V.E*						

Observación:
El indicador de la variable no básica X_2 vemos que es **nulo**, lo que sugiere la idea de soluciones múltiples.

Multiplicamos la primera fila por **3/2** para obtener como pivote a **1**, luego aplicamos Gauss-Jordan y calculamos posteriormente los Z_j y los $C_j - Z_j$. La tabla que obtenemos es:

	C_j	-1	4	6	0	0	
C_k	X_k	X_1	X_2	X_3	s_1	s_2	b
4	X_2	1/2	1	3/2	1/2	0	3
0	s_2	1/2	0	17/2	5/2	1	25
Z_j		2	4	6	2	0	12
$C_j - Z_j$		−3	0	0	-2	0	

Como los indicadores son no positivos, la solución es óptima

$X_1 = 0 \quad X_2 = 3 \quad X_3 = 0$

$s_1 = 0 \quad s_2 = 25 \quad Z = 12$

$$\textit{Solución Óptima}\ (x_1; x_2; x_3; S_1; S_2) = (0; 3; 0; 0; 25) \quad Z = 12$$

En la última solución X_3 es no básica y su indicador es nulo. Sin embargo, si se repitiera el proceso para determinar otras soluciones óptimas, se volvería a la segunda tabla. Por ello, el procedimiento no ofrece otras soluciones óptimas.

Por lo tanto: las soluciones óptimas múltiples del problema planteado se expresan de la siguiente forma: $\boxed{S = \{\ \alpha\,(0;0;2) + (1-\alpha)\,(0;3;0) \quad \textit{con} \quad 0 \le \alpha \le 1\}}$

MÉTODO DUAL

Dado cualquier problema de programación lineal, al que se denomina ***primal***, se le puede asociar otro problema de programación lineal que se denomina ***dual***.

El dual es un problema de PL que se obtiene matemáticamente de un modelo primal de PL dado.

Los problemas dual y primal están relacionados de tal forma que la solución óptima de cualquiera de los dos problemas conduce en forma automática a la solución óptima del otro. Se dice que ambos problemas son mutuamente duales.

El concepto de dualidad indica que para cada problema de PL hay una asociación y una relación muy importante con otro problema de programación lineal, llamado precisamente dual.

La relación entre el problema dual y su asociado, es decir el problema original, presenta varias utilidades:

- Aporta elementos que aumentan sustancialmente la comprensión de la PL.
- El análisis de dualidad es una herramienta útil en la solución de problemas de PL, por ejemplo: cuando hay más restricciones que variables.

RELACIONES ENTRE LOS PROBLEMAS DUAL Y PRIMAL

Si el original tiene solución óptima, también la tiene el dual, y el valor óptimo de la función objetivo del original es la misma que la de su dual.

Si el problema primal tiene solución factible y región de soluciones factibles no acotada, entonces el problema dual no tiene solución factible.

Si s_i es la variable de holgura asociada con la i-ésima restricción del dual, entonces el indicador de la columna de s_i de la tabla del Simplex final del dual, en valor absoluto, es el valor de X_i de la solución óptima del original.

¿Cómo convertir un problema primal a dual?

Un problema dual se formula a partir del problema primal de la siguiente forma:

1. Si el primal es un problema de maximización su dual será un problema de minimización y viceversa.
2. Los coeficientes de la función objetivo del problema primal se convierten en los coeficientes del vector de la disponibilidad en el problema dual.
3. Los coeficientes del vector de disponibilidad del problema original se convierten en los coeficientes de la función objetivo (vector de costo o precio) en el problema dual.
4. La matriz de los coeficientes de las restricciones del dual es la traspuesta de la matriz de los coeficientes de las restricciones del original.
5. Los signos de desigualdad del problema dual son contrarios a los del primal. Si todas las restricciones del problema original son de $\leq (\geq)$, entonces todas las restricciones de su dual son de $\geq (\leq)$.

   Aclaración: Las restricciones de igualdad, se sustituyen por dos restricciones de desigualdad, una de forma $\leq$ y la otra de forma $\geq$

6. Cada restricción en un problema corresponde a una variable en el otro problema. Si

$$\textbf{\textit{Original (Dual)}}$$

$$\textit{Maximizar} \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\textit{sujeta a}: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1, x_2 \cdots, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

$$\textbf{\textit{Dual (Original)}}$$

$$\textit{Minimizar} \quad W = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m$$

$$\textit{sujeta a}: \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n \\ y_1, y_2 \cdots, \cdots, y_m \geq 0 \end{cases}$$

Así se puede resolver el problema original simplemente resolviendo su dual. En ocasiones esto resulta más conveniente que resolver en forma directa el original.

Ejemplo

Veamos cómo se halla el problema dual de un problema de programación lineal dado (primal)

I) Sea el siguiente **PROBLEMA PRIMAL:**

$$\text{Maximizar } Z = 45x_1 + 17x_2 + 55x_3$$
$$\text{Sujeta a}: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 200 \\ 9x_1 + 8x_2 + 10x_3 \le 5000 \\ 10x_1 + 7x_2 + 21x_3 \le 4000 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

El **PROBLEMA DUAL** queda planteado del siguiente modo:

$$\text{Minimizar } W = 200\,y_1 + 5000\,y_2 + 4000\,y_3$$
$$\text{Sujeta a}: \begin{cases} y_1 + 9y_2 + 10y_3 \ge 45 \\ y_1 + 8y_2 + 7y_3 \ge 17 \\ y_1 + 10y_2 + 21y_3 \ge 55 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

II) Sea el siguiente **PROBLEMA PRIMAL**

$$\text{Minimizar } Z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\text{Sujeta a}: \begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 12 \\ 4x_1 - 2x_2 \ge 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

El **PROBLEMA DUAL** queda planteado del siguiente modo:

$$\text{Maximizar } W = 12y_1 + 3y_2$$
$$\text{Sujeta a}: \begin{cases} y_1 + 4y_2 \le 2 \\ 2y_1 - 2y_2 \le 3 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

¿Cómo se obtiene el dual si las restricciones estructurales tienen distinto signo?

ASPECTOS ECONÓMICOS: ANÁLISIS POST-ÓPTIMO

En Programación Lineal un sistema de producción se representa mediante un **modelo o matriz** en el que se incluyen:

- costos o ingresos generados por unidad de actividad (función objetivo)
- aportes y requerimientos de insumos y productos por unidad de cada actividad considerada (coeficientes insumo/producto).
- disponibilidad de recursos, especificaciones técnicas y empresariales a respetar (RHS**:** Right-Hand-Side, términos independientes del conjunto de restricciones)

TASA MARGINAL DE SUSTITUCIÓN TÉCNICA

Es la relación técnica que define el reemplazo de dos actividades entre sí manteniendo constante el uso de un determinado recurso.

INGRESO MARGINAL

Es el incremento en el resultado provocado por el ingreso en la solución de una unidad adicional de una actividad.

CONTRIBUCIÓN MARGINAL DE LOS RECURSOS (PRECIO SOMBRA)

Cuando el objetivo es maximizar el resultado, el Costo de Oportunidad es el beneficio que se deja de percibir por no contar con una unidad adicional de un recurso
.
El Costo de Oportunidad de un recurso se determina en base al mejor uso alternativo. En términos económicos, es equivalente al Valor del Producto Marginal del recurso (**VPMg**)

Los recursos escasos se asignan a aquellas actividades en las que el valor del producto marginal de cada recurso sea mayor.

El valor de los recursos obtenido de acuerdo con el criterio de **VPMg** es “interno”, propio de cada situación evaluada en función de las alternativas consideradas tanto en sus aspectos de mercado (costos y precios) como técnicos (funciones de producción asociadas a cada alternativa), y de la abundancia o escasez relativa de los recursos disponibles.

Por consiguiente, el Costo de Oportunidad Interno de un recurso puede diferir de su valor de mercado

COSTO DE OPORTUNIDAD DE LOS PRODUCTOS

En un problema de maximización, el Costo Marginal es el incremento en el costo total resultante de agregar una unidad de actividad en la solución.

En PL, el Costo Marginal de una actividad se calcula valuando los recursos consumidos por cada actividad según el Costo de Oportunidad Interno de los recursos.

PRINCIPIO DE OPTIMIZACIÓN (SIMPLEX)

- En un problema de maximización, conviene incrementar la participación de una actividad en el plan en tanto el Ingreso Marginal sea mayor que el Costo Marginal que se incurra.
- Se llega a una solución óptima siguiendo un mecanismo iterativo, en la que cada solución mejora sobre la previa a partir de incluir actividades que aportan más que lo que “cuestan”.
- Se llega a una solución óptima cuando no hay sustituciones factibles que permitan lograr un resultado mayor. Para todas las actividades incluidas en el óptimo se cumple el principio:

Ingreso Marginal = Costo Marginal

COSTO DE SUSTITUCIÓN (COSTO REDUCIDO)

- Indica la diferencia entre el Ingreso Marginal y el Costo Marginal para cada actividad.
- En una solución óptima, las actividades incluidas en el plan cumplen con la condición Ingreso Marginal = Costo Marginal, por lo que el Costo de Sustitución de las mismas es igual a 0.
- Las actividades no incluidas en el plan tienen un Costo Marginal mayor que su Ingreso Marginal. El Costo de Sustitución indica la magnitud de esta diferencia.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

En el mundo real, las condiciones de trabajo no suelen permanecer estáticas, sino en continuo estado de cambio. Así son usuales las variaciones en los precios (tanto de productos finales como de materias primas, mano de obra, etc.), y en las cantidades de recursos disponibles. Además, continuamente se producen cambios en los métodos productivos y mejoras tecnológicas que logran aumentar la productividad.

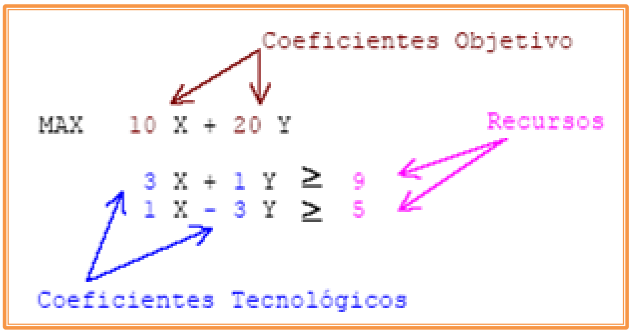
El Análisis de Sensibilidad (o de Post-optimalidad) se encarga precisamente de estudiar cómo afectaría a la solución óptima obtenida y a la función objetivo el cambio (dentro de un rango predeterminado) de uno de los parámetros, manteniendo fijos los restantes.

Por ejemplo, si un fabricante estima al revisar los cálculos que los beneficios por cada unidad de producto vendida son de **$ 5,5** en vez de la estimación inicial de **$5**, o si resulta que ahora disponemos de recursos adicionales (cómo diez horas más de mano de obra, o de una nueva máquina), el Análisis de Sensibilidad nos ayudará a conocer cómo afectarán estos cambios a la solución óptima obtenida y a los beneficios totales.

Conviene hacer notar que este tipo de análisis tan sólo tiene sentido para modelos lineales no enteros (no se usa en modelos enteros ni cuadráticos).

CONCEPTOS BÁSICOS EN ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

El Análisis de Sensibilidad se utiliza para examinar los efectos de cambios en tres áreas diferenciadas del problema:



1. En los coeficientes de la función objetivo (coeficientes objetivo). Los cambios en los coeficientes objetivos NO afectan la forma de la región factible, por lo que no afectarán a la solución óptima (aunque sí al valor de la función objetivo).

2. En los coeficientes tecnológicos (aquellos coeficientes que afectan a las variables de las restricciones, situados a la izquierda de la desigualdad). Los cambios en estos coeficientes provocarán cambios sustanciales en la forma de la región factible. Gráficamente (en el caso de 2 variables) lo que varía es la pendiente de las rectas que representan las restricciones.

3. En los recursos disponibles (los términos independientes de cada restricción, situados a la derecha de la desigualdad). Intuitivamente (para 2 variables), los cambios en los recursos suponen desplazamientos paralelos de las rectas asociadas a las restricciones, lo cual hará variar la forma de la región factible y, con ello, a la solución óptima.

Hay dos maneras de estudiar la "***sensibilidad***" de una solución respecto a cambios en alguna de las áreas antes mencionadas.

- La primera de ellas es volver a resolver todo el problema cada vez que alguno de los datos originales se modifique.

- La otra forma (***Análisis de Sensibilidad***) consiste en, una vez resuelto el problema, analizar cómo afecta a la solución obtenida y al valor de la función objetivo la variación dentro de un rango "tolerable", de uno de los parámetros, manteniendo fijos los restantes.

  Por supuesto, en caso de que queramos estudiar los efectos de la variación de más de un parámetro (o de un parámetro más allá del "rango de tolerancia") deberemos reprogramar el problema.

1) CAMBIOS EN LOS COEFICIENTES OBJETIVO:

Distinguiremos entre variables básicas, que son las que toman valores no nulos en la solución óptima, y variables no básicas, las cuales toman el valor 0.

> Los cambios en uno de los coeficientes de la función objetivo no alterarán la solución óptima, pero sí harán variar el valor final de la función objetivo.

Desarrollaremos a continuación un problema de programación lineal resuelto por el método simplex y realizaremos el análisis de sensibilidad correspondiente.



Utiliza este simulador para analizar cambios en los coeficientes de la función objetivo.

Ejemplo

Queremos resolver el siguiente problema de Programación Lineal referido a una compañía que produce dos tipos de lanchas acuáticas, la que desea maximizar el beneficio.

La Compañía ***AA SA*** *fábrica dos tipos de lanchas acuáticas que requieren para su elaboración, de mano de obra con una disponibilidad diaria de* **1000** ***horas****, y materia prima con un total disponible de* **1200** ***kilos****. El* ***modelo*** **2** *requiere para su elaboración de un motor, de los cuales la empresa dispone de un total de* **200**.
El beneficio que arrojan cada uno de los modelos se halla indicado en la tabla siguiente. Así como las cantidades de cada insumo que son necesarias para su elaboración.

Surge entonces el planteo de la siguiente situación:

Insumo \ ***Modelos***	**1**	**2**
Mano de obra/unidad	**2**	**4**
Materia prima Kg./unidad	**6**	**2**
Motores Tipo **2**		**1**
Beneficio $ / unidad	**30**	**80**

Maximizar $B = 30x_1 + 80x_2$

Sujeto a $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 1000 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 1200 \\ x_2 \leq 200 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

(a) ¿Cuál es la mejor combinación productiva? ¿Cuál es el beneficio máximo?

(b) ¿Cuánto valen los precios sombra? Una vez alcanzada la solución óptima, ¿qué recurso tiene un valor marginal más elevado?

(c) Para cada recurso, ¿cuál es el rango de tolerancia en el que son válidos los precios sombra?

(d) ¿Cuáles son los rangos de tolerancia en que pueden variar los coeficientes de la función objetivo?

Comencemos a responder las preguntas formuladas en los ítems anteriores *(a)* La tabla simplex inicial que corresponde a este caso es

	C_j	30	80	0	0	0			
C_k	X_k	X_1	X_2	s_1	s_2	s_3	b		
0	s_1	2	4	1	0	0	1000	1000÷4= 250	
0	s_2	6	2	0	1	0	1200	1200÷2= 600	
0	s_3	0	1	0	0	1	200	200÷1= 200	→V.S
Z_j		0	0	0	0	0	0		
$C_j - Z_j$		30	80	0	0	0			
			↑V.E						

Pivoteando en el elemento indicado obtenemos la siguiente tabla

	C_j	30	80	0	0				
C_k	X_k	X_1	X_2	s_1	s_2	s_3	b		
0	s_1	2	0	1	0	– 4	200	200÷2 = 100	→V.S
0	s_2	6	0	0	1	– 2	800	800÷6= 133.3	
80	X_2	0	1	0	0	1	200	No hay cociente	
Z_j		0	80	0	0	80	16000		
$C_j - Z_j$		30	0	0	0	– 80			
		↑V.E							

	C_j	30	80	0	0	0	
C_k	X_k	X_1	X_2	s_1	s_2	s_3	b
0	s_1	1	0	1/2	0	–2	100
0	s_2	6	0	0	1	–2	800
80	X_2	0	1	0	0	1	200
Z_j		0	80	0	0	80	16000
$C_j - Z_j$		30	0	0	0	–80	

	C_j	30	80	0	0	0	
C_k	X_k	X_1	X_2	s_1	s_2	s_3	b
30	X_1	1	0	1/2	0	–2	100
0	s_2	0	0	–3	1	10	200
80	X_2	0	1	0	0	1	200
Z_j		30	80	15	0	20	19000
$C_j - Z_j$		0	0	–15	0	–20	

Se observa en el "output" que lo óptimo será producir **100** ***lanchas de tipo* 1** y **200 *de tipo* 2**, lo cual nos proporcionará un beneficio de **$19.000**. Dado que la solución óptima alcanzada es:

X_1 = 100 lanchas mod.1 ***X_2 = 200 lanchas mod. 2***

s_1 = 0 mano de obra ***s_2 = 200 kg. Materia prima*** ***s_3 = 0 motores tipo 2***

B = $ 19.000

(b) El precio sombra de la primera restricción es de **$ 15**, lo cual significa que estaríamos dispuestos a pagar hasta **$15** por disponer de una hora más de mano de obra. El precio sombra de la segunda restricción es **0**, lo cual resulta lógico dado que no agotamos toda la materia prima disponible (en el óptimo aún nos sobran **200 kg**.). Finalmente, estaríamos dispuestos a pagar hasta **$20** por disponer de un motor adicional de tipo 2, lo que convierte este recurso en el de mayor valor marginal.

(c) Los precios sombra anteriores son válidos en los rangos establecidos por el "output". Así, por ejemplo, nuestros beneficios aumentarían en **$15** por cada hora extra de que dispusiésemos hasta un máximo de **1.066,67 horas**, cifra a partir de la cual deberíamos replantear el problema para poder hacer un análisis correcto. Por otro lado, perderemos **$15** por cada hora que se deduzca de las disponibles inicialmente (**1.000**) hasta un máximo de **200 horas** deducidas (a partir de aquí cabría reprogramar).

(d) El coeficiente de X_1 en la función objetivo puede variar entre **0** y **40** pesos sin que por ello cambie la solución óptima (aunque sí los beneficios obtenidos). Por su parte, el coeficiente de X_2 podría variar entre **60** e infinito.

Calcularemos dichos valores en cada caso

- **ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DEL COEFICIENTE EN LA FUNCIÓN OBJETIVO DE LA VARIABLE X_1**

Si reemplazamos en la tabla óptima del Simplex el coeficiente de X_1 en la función objetivo por c_1

	C_j	c_1	80	0	0	0	
C_k	X_k	X_1	X_2	s_1	s_2	s_3	b
c_1	X_1	1	0	1/2	0	–2	100
0	s_2	0	0	–3	1	10	200
80	X_2	0	1	0	0	1	200
Z_j		c_1	80	$0,5c_1$	0	$-2c_1+80$	$100c_1+16000$
C_j-Z_j		0	0	$-0,5c_1$	0	$2c_1-80$	

Para que la solución siga siendo óptima los indicadores deben ser no positivos por lo tanto:

$2c_1 - 80 \le 0 \Rightarrow 2c_1 \le 80 \Rightarrow c_1 \le 40$ **(1)** $\qquad -0,5\,c_1 \le 0 \Rightarrow c_1 \ge 0$ **(2)**

Considerando que c_1 representa el beneficio de las ***lanchas tipo* 1**, entonces de **(1)** y **(2)**

$$\boxed{0 \le c_1 \le 40}$$

- **ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DEL COEFICIENTE EN LA FUNCIÓN OBJETIVO DE LA VARIABLE X_2**

Si reemplazamos en la tabla óptima del Simplex el coeficiente de X_2 en la función objetivo por c_2

	C_j	30	c_2	0	0	0	
C_k	X_k	X_1	X_2	s_1	s_2	s_3	b
30	X_1	1	0	1/2	0	–2	100
0	s_2	0	0	–3	1	10	200
c_2	X_2	0	1	0	0	1	200
Z_j		30	c_2	15	0	$-60 + c_2$	$3000 + 200c_2$
$C_j - Z_j$		0	0	–15	0	$60 - c_2$	

Para que la solución siga siendo óptima los indicadores deben ser no positivos, por lo tanto:

$$60 - c_2 \leq 0 \Rightarrow 60 \leq c_2 \Rightarrow c_2 \geq 60$$

Considerando que c_2 representa el beneficio de las ***<u>lanchas tipo 2</u>***, entonces $\boxed{60 \leq c_2 \leq +\infty}$

2) ***CAMBIOS EN LOS COEFICIENTES TECNOLÓGICOS***: Estos cambios se deben a menudo a innovaciones tecnológicas o a mejoras en la productividad.

Los cambios no producirán variación alguna en la función objetivo, pero sí alterarán sustancialmente la "forma" de la región factible, por lo que la solución óptima también variará. Su análisis suele ser muy complejo.

3) ***CAMBIOS EN LOS RECURSOS***: Los valores que quedan a la derecha de las desigualdades (Right-Hand-Side) representan la disponibilidad de recursos de la empresa (horas de mano de obra, materias primas, etc.).

Los cambios que se puedan producir en estos valores afectarán también a la "forma" de la región factible y, por extensión, al valor de la solución óptima. A pesar de ello, si el parámetro que varía lo hace dentro de un rango predeterminado, seremos capaces de predecir (vía precios sombra) cómo este cambio afectará a la función objetivo, pues la base (conjunto de variables básicas de la solución) no variará.

AUTOEVALUACIÓN

Completa tu aprendizaje realizando la siguiente evaluación. Al finalizar los 10 ítems obtendrás tu calificación

APÉNDICES

ALFABETO GRIEGO

Αλφαβετο Γριεγο

	Minúscula	Mayúscula		Minúscula	Mayúscula
alfa	α	Α	nu	ν	Ν
beta	β	Β	xi	ξ	Ξ
gamma	γ	Γ	ómicron	ο	Ο
delta	δ	Δ	pi	π	∏
épsilon	ε	Ε	rho(ro)	φ	Ρ
zeta	ζ	Ζ	sigma	σ	Σ
eta	η	Η	tau	τ	Τ
theta (tita)	θ	Θ	Ípsilon	υ	Υ
iota	ι	Ι	phi(fi)	φ	Φ
kappa	κ	Κ	ji o chi	χ	Χ
lambda	λ	Λ	psi	ψ	Ψ
mu	μ	Μ	omega	ω	Ω

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

Símbolo	Significado
$=$	igual
$<$	menor que...
$\leq$	menor o igual que...
$>$	mayor que...
$\geq$	mayor o igual que...
$\neq$	distinto
$\approx$	aproximadamente igual
$\pm, \mp$	más menos / menos más
$\sum$	sumatoria
$\prod$	productoria

$\forall$	para todo, cuantif. universal
$\exists$	existe, cuantif. existencial
$\Rightarrow$	implica (si…entonces…)
$\Leftrightarrow$	equivale (si y solo si)
$/$	tal que
$\therefore$	por lo tanto, por consiguiente
$\because$	porque, puesto que
$\wedge$	conjunción ("y", "además")
$\vee$	disyunción ("o")
∞	infinito

$\mathbb{N}$	conjunto de los números naturales
$\mathbb{Z}$	conjunto de los números enteros
$\mathbb{Q}$	conjunto de los números racionales
$\mathbb{R}$	conjunto de los números reales
$\mathbb{C}$	conjunto de los números complejos
$\mathbb{R}^+$	conjunto de los reales positivos

(a,b)	intervalo abierto
$[a,b]$	intervalo cerrado
$[a,b),(a,b]$	intervalo semiabierto
$(a,\infty),[a,\infty)$	semirrecta derecha
$(-\infty,a),(-\infty,a]$	semirrecta izquierda
$(-\infty,\infty)$	recta real

$\varnothing$	conjunto vacio
$\cap, \bigcap$	intersección de conjuntos
$\cup, \bigcup$	unión de conjuntos
$\subset$	incluido en el conjunto
$\not\subset$	*no* incluido en el conjunto
$\in$	pertenece a un conjunto
$\notin$	*no* pertenece a un conjunto

INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA

INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA

PROPOSICIÓN

Es todo enunciado o argumento al que se le puede asignar ***valor de verdad***.

Al referirnos al ***valor de verdad***, éste puede ser verdadero o falso, pero nunca ambas cosas.

Para identificar a las proposiciones le asignamos letras minúsculas de imprenta.

Ejemplos

p: todos los triángulos son rectángulos

q: 7 es un número primo

$r: 3+8=24$

$s: -2 < 0$ y $5 > 0$

Son proposiciones

¡Corre más!

¿Cuánto pesa?

Por favor no llores.

$x+3=10$

No son proposiciones

Observación

p es una proposición falsa y su valor de verdad se expresa: $\mathrm{v}(p)=F$
q es una proposición verdadera y su valor de verdad se expresa: $\mathrm{v}(q)=V$
r es una proposición falsa y su valor de verdad se expresa: $\mathrm{v}(r)=F$
s es una proposición verdadera y su valor de verdad se expresa: $\mathrm{v}(s)=V$

Las proposiciones ***p***, ***q*** y ***r*** son ***proposiciones simples***.
La proposición ***s*** es una ***proposición compuesta***.
Para lograr ***proposiciones compuestas*** a partir de ***proposiciones simples*** se usan los ***conectivos lógicos.***

Llamaremos ***operación proposicional*** al procedimiento mediante el que una o más ***proposiciones simples o compuestas*** se transforman en ***una proposición compuesta***.

CONECTIVO	OPERACIÓN ASOCIADA	SIGNIFICADO
$\sim$	*Negación*	*"no es cierto que* ***p****" o "****no p****"*
$\wedge$	*Conjunción o producto lógico*	*"****p y q****"*
$\vee$	*Disyución o suma lógica*	*"****p o q****"(sentido incluyente)*
$\Rightarrow$	*Implicación o condicional*	*"****p implica q****"o "****si p entonces q****"*
$\Leftrightarrow$	*Doble implicacion o bicondicional*	*"****p si y sólo si q****"*
$\veebar$	*Diferencia simétrica*	*"****p o q****"(sentido excluyente)*

NEGACIÓN

Dada una proposición p, llamaremos **~*p*** (***no p***) a la proposición que se obtiene anteponiendo a la acción, el conectivo **~** (***no***).

Ejemplo

La negación de la proposición ***p*:** Los costos han aumentado es **~*p*:** Los costos no han aumentado
Otras expresiones como **~*p*:** No es cierto que los costos han aumentado o bien **~*p*:** Es falso que los costos han aumentado refieren a la misma situación.
La expresión en lenguaje coloquial: No es cierto que los precios no hayan aumentado, se escribe en lenguaje simbólico **~(~*p*)**
Si **p** es verdadera entonces **~*p*** es falsa

Las expresiones ***p*** **y ~ (~*p*)** no son iguales, son equivalentes, ya que una es una proposición simple y la otra es una proposición compuesta.

CONJUNCIÓN

La conjunción de las proposiciones p y q es una nueva proposición $p \wedge q$ (***p* y *q***) que es verdadera sólo cuando ambas son verdaderas

Ejemplo

***p*: 5** es un número impar
***q*: 5** es un número primo
$p \wedge q$**: 5** es un número impar y primo

DISYUNCIÓN

La disyunción de las proposiciones p y q es una nueva proposición $p \vee q$ (***p* o *q***)

Como la conjunción **o** es utilizada en sentido incluyente el valor de verdad de la misma es verdadera cuando alguna de ellas es verdadera o las dos son verdaderas

Ejemplo

***p*:** voy al cine
***q*:** compro caramelos
$p \vee q$**:** voy al cine o compro caramelos

IMPLICACIÓN O CONDICIONAL

Implicación de dos proposiciones ***p*** y ***q*** es la proposición $p \Rightarrow q$ **(*p implica q*, si *p entonces q*)**

Ejemplo

***p*:** apruebas el examen
***q*:** te regalo un pasaje para tus vacaciones
$p \Rightarrow q$**:** Si apruebas el examen entonces te regalo un pasaje para tus vacaciones.

Si el comentario lo hace una madre a su hijo ¿cuándo el hijo se sentirá desilusionado? Sólo cuando habiendo aprobado el examen, su madre no cumpliera con su promesa.
Si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso la implicación es falsa.

Dada la proposición $p \Rightarrow q$ donde ***p*** es el **antecedente** y ***q*** es el **consecuente**
La proposición $q \Rightarrow p$ se denomina **recíproca**
La proposición $\sim q \Rightarrow \sim p$ se denomina **contra recíproca**
La proposición $\sim p \Rightarrow \sim q$ se denomina **contraria**

DOBLE IMPLICACIÓN O BICONDICIONAL

Doble implicación de dos proposiciones ***p*** y ***q*** es la proposición $p \Leftrightarrow q$ **(*p si y sólo si q*)**

Ejemplo

p: n es un número par
q: n + 1 es un número impar
$p \Leftrightarrow q$**: *n es un número par*** si y sólo si ***n*+1 *es un número impar***
Si ***p*** es verdadera, también lo es ***q*** y análogamente si ***p*** es falsa, ***q*** es falsa.

DIFERENCIA SIMÉTRICA

Diferencia simétrica o disyunción excluyente de las proposiciones ***p*** y ***q*** es la proposición $p \veebar q$ (***p*** o ***q*** en el sentido excluyente).

La verdad de $p \veebar q$ está dada por la verdad de una y sólo una de las proposiciones que la componen.

***p*:** es un número natural par
***q*:** es un número natural impar
$p \veebar q$**:** es un número natural par o impar

CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES

Si la proposición $\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}$ es verdadera, se dice que constituye un teorema, siendo ***p*** la hipótesis (lo que sabemos) y ***q*** la tesis (lo que hay que demostrar).

En este caso se dice también que "***p*** es condición suficiente para ***q***" (ya que de ***p*** se deduce ***q***) y "***q*** es condición necesaria para ***p***".

Las condiciones se suelen expresar:

q si p: condición suficiente

p sólo si q: condición necesaria

Ejemplo 1

- En Argentina, si tiene por lo menos dieciseis años entonces puede votar.

¿Quiere esto decir que todas las personas con dieciseis años o más pueden votar en la Argentina?

Por supuesto que no. Porque quienes no son ciudadanos argentinos (inmigrantes con o sin residencia permanente, turistas) no tienen derecho al voto, aunque sean mayores de dieciseis años.

Tener dieciseis años o más es por lo tanto ***una condición necesaria para votar, pero <u>no es una condición suficiente</u>.***

Ejemplo 2

- El candidato que reciba más votos será elegido presidente.

Recibir más votos es una ***condición suficiente*** para ser elegido presidente

Ejemplo 3

- ***T*** es equilátero si y sólo si es equiángulo
  p: ***T*** es equilátero
  q: ***T*** es equiángulo

Si ***p*** es verdadera también lo es ***q*** y viceversa, por lo tanto cada una de las dos proposiciones es condición necesaria y suficiente para la otra.

A continuación te proponemos más ejemplos de la vida cotidiana te ayuden a entender la condición necesaria y suficiente

Ejemplo 4

- Para ***ganar un torneo de futbol*** es suficiente ***ganar todos los partidos***, pero **no es necesario**

p: Ganar todos los partidos

q: Ganar el Torneo de futbol

$$p \Rightarrow q \quad \text{pero} \quad q \not\Rightarrow p$$

Ejemplo 4

- Para ***ganar el mundial de futbol*** es necesario ***llegar a la final del mundial***, pero **no es suficiente**

p: Llegar a la final del mundial

q: Ganar el mundial de futbol

$$q \Rightarrow p \quad \text{pero} \quad p \not\Rightarrow q$$

Ejemplo 5

- Para ***ganar un torneo de tenis*** es *necesario y suficiente* ***ganar todos los partidos***

p: Ganar el torneo de tenis

q: Ganar todos los partidos

$$p \Rightarrow q \quad \text{y} \quad q \Rightarrow p$$

Luego, podemos decir que ***p*** y ***q*** son equivalentes

FUNCIÓN PROPOSICIONAL

Sea un conjunto no vacío llamamos ***función proposicional*** con dominio en ***A*** a toda expresión ***p(x)*** tal que para cualquier elemento de ***A*** se verifique que ***p(x)*** sea una proposición.

Ejemplos

- $p(x)$: $x+2>8$ es una función proposicional sobre $\mathbb{N}$ (números naturales)

- $p(x)$: $x+2>8$ no es una función proposicional sobre $\mathbb{C}$ (números complejos) pues las desigualdades no se definen sobre los números complejos.

Si $p(x)$ es una función proposicional sobre un conjunto A, entonces el conjunto de elementos $a \in A$ que cumplen la propiedad que $p(a)$ sea verdadera se llama ***conjunto de validez*** V_p ***de*** $p(x)$

Ejemplos

- Consideramos la función proposicional $p(x)$: $x+2>8$ definida en $\mathbb{N}$
  El conjunto de validez es: $V_p = \{x \in \mathbb{N} / x+2>8\} = \{7, 8, 9, \ldots\}$

- Consideramos la función proposicional $p(x)$: $x+7<8$ definida en $\mathbb{N}$
  El conjunto de validez es: $V_p = \{x \in \mathbb{N} / x+7<5\} = \varnothing$

- Consideramos la función proposicional $p(x)$: $x+2>1$ definida en $\mathbb{N}$
  El conjunto de validez es: $V_p = \{x \in \mathbb{N} / x+2>1\} = \mathbb{N}$

Se nota en los ejemplos anteriores que V_p puede ser verdadera para todos los elementos del conjunto, para algunos o ninguno de ellos.

CUANTIFICADORES

A partir de las funciones proposicionales es posible obtener proposiciones generales mediante un proceso que se llama cuantificación, anteponiendo los símbolos $\forall x$ y $\exists x$, llamados ***cuantificador universal*** y ***cuantificador existencial*** en x, respectivamente.

La expresión: ***Para todo x, se verifica p(x)*** se anota: $\forall x : p(x)$ donde la función proposicional está cuantificada universalmente

La expresión: ***Existe x, tal que se verifica p(x)*** se anota: $\exists x / p(x)$ donde la función proposicional está cuantificada existencialmente

Ejemplos

Sea la función proposicional $p(x):\ x \text{ es par}$

- "Todos los números naturales son pares" su valor de verdad es **F**

  La expresión equivalente es: "Cualquiera sea ***x*** un número natural, ***x*** es par"

  En símbolos: $\forall x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}$

- Si cuantificamos existencialmente la misma función proposicional

  En símbolos: $\exists\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{N} \,/\, \boldsymbol{x}$ ***es par***

  Sus equivalentes en lenguaje coloquial son:

  "Existe ***x*** un número natural, tal que ***x*** es par" o
  "Existen algunos números naturales que son pares" o
  "Hay números naturales pares"

  El valor de verdad de la misma es verdadero.

NEGACIÓN DE UNA FUNCIÓN PROPOSICIONAL CUANTIFICADA

Para negar una función proposicional cuantificada existencialmente (universalmente) se cambia al cuantificador universal (existencial) y se niega la función proposicional

$$\sim\left[\forall\, \boldsymbol{x} : \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\right] \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{x} / \sim \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$$

$$\sim\left[\exists\, \boldsymbol{x} / \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\right] \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x} : \sim \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$$

Ejemplos

- "Todos los números naturales son pares"

  La negación de la expresión es:

  "No todos los números naturales son pares" que también se puede expresar:

  "Existen números naturales que no son pares"

- "Existen algunos números naturales que son pares"

  La negación de la expresión es:

  "No existen números naturales pares" que también se puede expresar:

  "Cualquiera que sea el número natural, no es par" o bien "Todo número natural es impar"

ECUACIONES –INECUACIONES-

VALOR ABSOLUTO

ECUACIONES

Una ecuación es una igualdad que contiene una o más variables. Resolver una ecuación es determinar el conjunto de valores de la o las variables para los cuales la igualdad es verdadera.

✓ ECUACIONES POLINÓMICAS

La forma general de la ecuación polinómica de ***grado n*** es:

$$\boxed{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0}$$

Las ecuaciones de ***grado n*** tienen siempre ***n*** soluciones (o raíces).
En casos particulares, algunas o todas estas ***n*** soluciones pueden ser iguales entre sí.
Si los coeficientes a_i son números ***reales***, entonces las soluciones pueden ser números ***reales*** *o* ***números complejos***. (Cualquier combinación, con la siguiente restricción: si una de las soluciones es ***compleja***, su ***conjugada*** también es solución. Esto implica que ***las soluciones complejas vienen por parejas*** y por lo tanto las ecuaciones de grado impar tienen al menos una solución ***real***).

✓ RECOMENDACIONES PARA PLANTEAR UNA ECUACIÓN

No existen reglas sencillas que garanticen el éxito en la resolución de problemas. Sin embargo es posible establecer algunas pautas generales y algunos principios que pueden ser útiles en la solución de problemas:

1. ***Leer y comprender el problema.***
2. ***Ubicar la incógnita y relacionarla con los datos del problema.***
3. ***Plantear la ecuación y resolverla.***
4. ***Comprobar el resultado. Ver si la respuesta es razonable.***

LA ECUACIÓN PIENSA POR NOSOTROS

Plantear una ecuación consiste en interpretar, comprender y expresar en una ecuación matemática el enunciado verbal de cualquier problema.

Lenguaje Verbal
Enunciado del problema
→
Lenguaje Matemático
Ecuación

A continuación resolveremos diferentes ejemplos

Ejemplo 1

Resolver la ecuación $4x + 7 = 12$

$$\underbrace{\overbrace{4x + 7}^{\text{Primer miembro}}}_{\text{término en x} \quad \text{término independiente}} = \underbrace{\overbrace{12}^{\text{Segundo miembro}}}_{\text{término independiente}}$$

Se deja el término en x en el primer miembro y los términos independientes se trasponen al segundo miembro.

$$4x = 12 - 7$$

Se reducen los términos semejantes.

$$4x = 5$$

$$\boxed{x = \frac{5}{4}}$$

Ejemplo 2

Términos en x: 6x, 3x
Términos independientes: −5, 4

Resolver la ecuación $6x - 5 = 3x + 4$

$$\overbrace{6x - 5}^{\text{Primer miembro}} = \overbrace{3x + 4}^{\text{Segundo miembro}}$$

Se trasponen los términos para que queden los términos en x en el primer miembro y los términos independientes en el segundo miembro

$$6x - 3x = 4 + 5$$

Se reducen los términos semejantes

$$3x = 9$$

$$x = \frac{9}{3}$$

$$\boxed{x = 3}$$

Ejemplo 3

Resolver la ecuación $2(7 - x) + 7x = 8 - 5(x - 1) + 8x + 4$

Se suprimen los paréntesis aplicando propiedad distributiva

$$\overbrace{2(7 - x) + 7x}^{\text{Primer miembro}} = \overbrace{8 - 5(x - 1) + 8x + 4}^{\text{Segundo miembro}}$$

$$14 - 2x + 7x = 8 - 5x + 5 + 8x + 4$$

$$-2x + 7x + 5x - 8x = 8 + 5 + 4 - 14$$

Se trasponen los términos para que queden los términos en x en el primer miembro y los términos independientes en el segundo miembro

Se reducen los términos semejantes

$$2x = 3$$

$$\boxed{x = \frac{3}{2}}$$

Ejemplo 4

Resolver la ecuación $\frac{7x}{4}+2=\frac{3(x-1)}{6}$

$$\overbrace{\frac{7x}{4}+2}^{\text{Primer miembro}} = \overbrace{\frac{3(x-1)}{6}}^{\text{Segundo miembro}}$$

$$\frac{3(7x)+12.2}{12}=\frac{2[3(x-1)]}{12}$$

Calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores de ambos miembros

$$\frac{21x+24}{12}=\frac{6x-6}{12}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también lo son.

$$21x+24=6x-6$$

$$21x-6x=-6\ -24$$

Se trasponen los términos para que queden los términos en x en el primer miembro y los términos independientes en el segundo miembro

Se reducen los términos semejantes

$$15x = -30$$

$$\boxed{x=-2}$$

Ejemplo 5

Resolver la ecuación $5(x+1)-x = 4x+15$

Se suprimen los paréntesis aplicando propiedad distributiva

$$\overbrace{5(x+1)-x}^{\text{Primer miembro}} = \overbrace{4x+15}^{\text{Segundo miembro}}$$

$$5x+5-x = 4x+15$$

Se reducen los términos semejantes

$$4x+5 = 4x+15$$

$$4x-4x = 15-5$$

Se reducen los términos semejantes

$$0x = 10$$

$$0 = 10 \quad \text{ABSURDO}$$

Luego la ecuación no tiene solución

Ejemplo 6

Resolver la ecuación $2x=2(x+1)-2$

Se suprimen los paréntesis aplicando propiedad distributiva

$$\overbrace{2x}^{\text{Primer miembro}} = \overbrace{2(x+1)-2}^{\text{Segundo miembro}}$$

$$2x = 2x+2-2$$

Se reducen los términos semejantes

$$2x-2x = 2-2$$

$0x = 0$ Cualquiera sea x la ecuación se verifica

Luego la ecuación tiene infinitas soluciones

INECUACIONES

Una inecuación es una desigualdad que contiene una o más variables. Resolver una inecuación es determinar el conjunto de valores de la o las variables para los cuales la desigualdad es verdadera. No existe un método general para resolver una inecuación, sin embargo tal como en la resolución de una ecuación se trata de despejar la variable respetando las propiedades de las desigualdades.

Una inecuación es una desigualdad algebraica en la que sus dos miembros aparecen ligados por uno de estos signos:

$<$	**menor que**	$2x+1<9$
$\leq$	**menor o igual que**	$2x+1\leq 9$
$>$	**mayor que**	$2x+1>9$
$\geq$	**mayor o igual que**	$2x+1\geq 9$

El **conjunto solución** de una inecuación está formado por el **conjunto de valores de la variable que la verifican.**

Podemos expresar al conjunto solución de la inecuación:

1. ***En forma gráfica.***

2. ***A partir de un intervalo.***

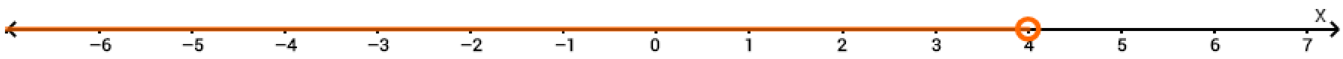
INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Ejemplos

a) $2x + 1 < 9$

$2x < 8 \rightarrow \boxed{x < 4}$ $\boxed{S=(-\infty;4)}$ **Intervalo**

En forma gráfica



b) $2x + 1 \leq 9$

$2x \leq 8 \rightarrow \boxed{x \leq 4}$ $\boxed{S=(-\infty;4]}$ **Intervalo**

En forma gráfica

$c)\ 2x + 1 > 9$

$2x > 8 \rightarrow \boxed{x > 4}$

Intervalo

$\boxed{S = (4;+\infty)}$

En forma gráfica

$d)\ 2x + 1 \geq 9$

$2x \geq 8 \rightarrow \boxed{x \geq 4}$

Intervalo

$\boxed{S = [4;+\infty)}$

En forma gráfica

INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

Consideremos la siguiente inecuación:

$$x^2 - 6x + 8 > 0$$

Para resolverla:

a) Igualamos el polinomio del primer miembro a cero y obtenemos las raíces de la ecuación de segundo grado para poder factorizar la inecuación.

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4.1.8}}{2.1} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{6+2}{2} = 4 \qquad x_2 = \frac{6-2}{2} = 2$$

Resolvemos la ecuación cuadrática aplicando $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a.c}}{2a}$ *y obtenemos los ceros o raíces:*

b) Factorizando la inecuación:

$$(x-2)(x-4)>0 \Leftrightarrow \quad (x-2)>0 \quad \wedge \quad (x-4)>0 \quad \rightarrow \quad x>2 \ \wedge \ x>4 \quad \rightarrow \quad \boxed{x>4}$$

$$\vee$$

$$(x-2)(x-4)>0 \Leftrightarrow \quad (x-2)<0 \quad \wedge \quad (x-4)<0 \quad \rightarrow \quad x<2 \ \wedge \ x<4 \quad \rightarrow \quad \boxed{x<2}$$

Por lo tanto el conjunto solución es: $\boxed{S=(-\infty\,,2)\cup(4\,,+\infty)}$

Expresamos la solución como una operación de intervalos

Solución expresada en forma gráfica

INECUACIONES RACIONALES

Las **inecuaciones racionales** se resuelven de un modo similar a las de **segundo grado**, pero hay que tener presente que **el denominador no puede ser cero**.

$$\frac{x-2}{2x-8} \geq 0$$

a) En primer lugar deberemos calcular las raíces del denominador

$$x-2=0 \rightarrow x=2$$

Hallamos las raíces del numerador y del denominador

$$2x-8 \neq 0 \rightarrow x=4$$

b) Teniendo en cuenta por un lado que en un cociente el denominador no puede ser cero y por otro la regla de los signos para el cociente

$$\frac{x-2}{2x-8} \geq 0 \quad con \quad x \neq 4 \quad si:$$

$$x-2 \geq 0 \quad \wedge \quad 2x-8>0$$

$$x \geq 2 \quad \wedge \quad 2x>8 \rightarrow x>4 \quad \rightarrow \boxed{x>4}$$

$$\vee$$

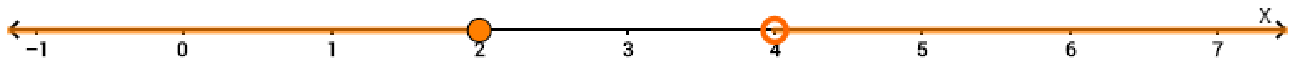
$$x-2 \leq 0 \quad \wedge \quad 2x-8<0$$

$$x \leq 2 \quad \wedge \quad 2x<8 \rightarrow x<4 \quad \rightarrow \boxed{x \leq 2}$$

Por lo tanto el conjunto solución es: $\boxed{S=(-\infty\,,2]\cup(4\,,+\infty)}$

Expresamos la solución como una operación de intervalos

Solución expresada en forma gráfica



Ejemplo 1

Resolver la ecuación $2(x+1)-3(x-2)<x+6$

Suprimimos los paréntesis aplicando la propiedad distributiva

Se reducen los términos semejantes

$$\begin{aligned} 2(x+1)-3(x-2)&<x+6 \\ 2x+2-3x+6&<x+6 \\ -x+8&<x+6 \\ -x-x&<6-8 \\ -2x&<-2 \\ x&>\frac{-2}{-2} \Rightarrow \boxed{x>1} \end{aligned}$$

$\boxed{S=\{x\in\Re \,/\, x>1\}}$ también es posible expresar el conjunto solución: $\boxed{S=(1,+\infty)}$

Solución expresada en lenguaje conjuntista

Solución expresada como intervalo

Solución expresada en forma gráfica

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $3x^2+5x > x^2+3$

Se reducen los términos semejantes Se trasponen todos los términos al primer miembro

$$\begin{aligned} 3x^2+5x &> x^2+3 \\ 3x^2+5x-x^2-3&>0 \\ 2x^2+5x-3&>0 \end{aligned}$$

Factoreamos la expresión, para ello calculamos sus raíces

Aplicando $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4a.c}}{2a}$ *obtenemos los ceros o raíces* $x_1=1/2 \;\wedge\; x_2=-3$ *y factoreamos:* $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)>0$$

$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)>0 \Rightarrow \begin{cases} x-\frac{1}{2}>0 \;\wedge\; x+3>0 \\ \vee \\ x-\frac{1}{2}<0 \;\wedge\; x+3<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2} \;\wedge\; x>-3 \\ \vee \\ x<\frac{1}{2} \;\wedge\; x<-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2} \\ \vee \\ x<-3 \end{cases}$$

$\boxed{S=\left\{x\in\Re \,/\, x<-3 \vee x>\frac{1}{2}\right\}}$

Solución expresada como intervalo

$\boxed{S=(-\infty,-3)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)}$

Solución expresada en lenguaje conjuntista

Solución expresada en forma gráfica

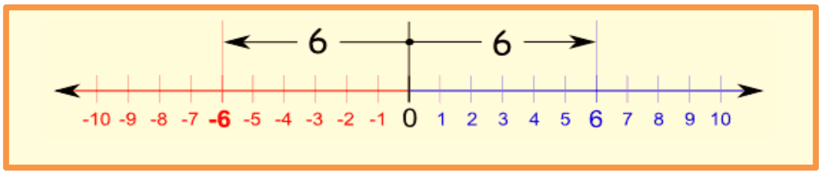
VALOR ABSOLUTO

DEFINICIÓN:

Valor absoluto de un número real ***x***, y se simboliza |***x***|, al **mismo número** ***x*** cuando ***x*** es **positivo o cero**, o al **opuesto** de ***x***, si ***x*** es **negativo**.

En símbolos: $\boxed{|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}}$

Ejemplos:



$|6| = 6$ $\qquad |-6| = 6$ $\qquad |0| = 0$

Geométricamente el valor absoluto de un número ***x*** representa la distancia del punto ***x*** al origen.

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

Propiedad 1:
$\forall x \in \Re : |x| \geq 0$

Propiedad 2:
Si $x \in \Re$: $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Propiedad 3: $\forall\, x \in \Re : |x| = |-x|$

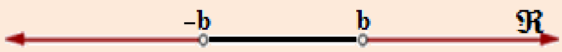
Propiedad 4:
Si $x, y \in \Re$, entonces $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

Propiedad 5:
Si $x, y \in \Re$ e $y \neq 0$, entonces $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Propiedad 6: Si $x, y \in \Re : |x + y| \leq |x| + |y|$

Propiedad 7: Si $b > 0$, $|x| < b \Leftrightarrow -b < x < b$ ***Gráficamente***

Propiedad 8: Si $b > 0$,
$|x| > b \Leftrightarrow x < -b \quad \vee \quad x > b$
Gráficamente



Aplicando las propiedades podemos calcular por ejemplo:

Por propiedad 2 de valor absoluto

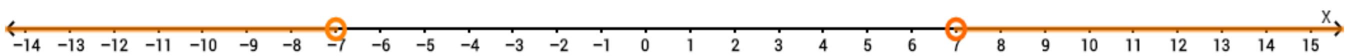
a) $|x| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ -x = 3 \end{cases} \therefore \boxed{x = 3 \quad \vee \quad x = -3}$

Por propiedad 7 de valor absoluto

b) $|x| < 4 \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ -x < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > -4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{-4 < x < 4 \Rightarrow x \in (-4,\ 4)}$

Por propiedad 8 de valor absoluto

c) $|x| > 7 \Rightarrow \begin{cases} x > 7 \\ -x > 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 7 \\ x < -7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x > 7 \vee x < -7 \quad \Rightarrow x \in (-\infty, -7) \cup (7, +\infty)}$

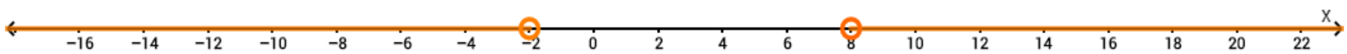


d)

Por propiedad 7 de valor absoluto

$|x-3| > 5 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 > 5 \\ -(x-3) > 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 8 \\ -x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 8 \\ x < -2 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{x > 8 \vee x < -2 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (8,\ +\infty)}$



Desarrollaremos a continuación más ejemplos:

Ejemplo 1

Resolver $3|x-1|+5|x-1|-2|x-1|=6$

Observa la igualdad.
$|x-1|$ es un factor presente en cada uno de los términos del primer miembro de la igualdad

$$3|x-1|+5|x-1|-2|x-1|=6$$

$$6|x-1|=6$$

Sumamos

$$|x-1|=1 \rightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ \vee \\ -x+1=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ \vee \\ x=0 \end{cases}$$

Por definición de valor absoluto

La solución buscada es: $\boxed{S=\{0,2\}}$

Ejemplo 2

Sea el conjunto $C=\{x \;/\; x\in\Re \wedge |3x-(x-6)|\leq 5\}$ Obtener la solución analítica y gráfica.

Planteamos las siguientes desigualdades:

$$|3x-(x-6)|\leq 5 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 3x-(x-6)\leq 5 \\ \vee \\ -[3x-(x-6)]\leq 5 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

Por definición de valor absoluto

$$\Rightarrow \begin{matrix} 3x-x+6\leq 5 \\ \vee \\ -3x+x-6\leq 5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2x+6\leq 5 \\ \vee \\ -2x-6\leq 5 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 2x\leq -1 \\ \vee \\ -2x\leq 11 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \boxed{x\leq -\frac{1}{2}} \\ \vee \\ \boxed{x\geq -\frac{11}{2}} \end{matrix}$$

Podemos escribir en lenguaje conjuntista $\boxed{C=\left\{x \ / \ x \in \Re : -\frac{11}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}\right\}}$

Utilizando los intervalos podemos dar la solución como un intervalo cerrado, ya que es un conjunto de números reales comprendidos, incluidos los extremos entre $-\frac{11}{2}$ y $-\frac{1}{2}$ lo anotamos así:

$$\boxed{\left[-\frac{11}{2}, -\frac{1}{2}\right]}$$

Gráficamente representamos el conjunto en la recta real:

Ejemplo 3

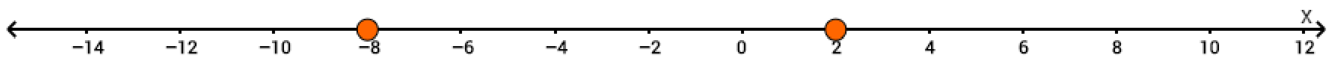
Resolver $|2x+6| - |x+3| = 5$

Observa la igualdad. Podemos factorear $|2x+6|$

Aplicamos la propiedad $|a.b| = |a|.|b|$

Por definición de valor absoluto

$$|2x+6| - |x+3| = 5$$
$$|2(x+3)| - |x+3| = 5$$
$$|2||x+3| - |x+3| = 5$$
$$2|x+3| - |x+3| = 5$$
$$|x+3| = 5 \rightarrow \begin{cases} x+3=5 \\ \vee \\ -x-3=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ \vee \\ x=-8 \end{cases}$$



La solución buscada es: $\boxed{S=\{-8, 2\}}$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un <u>sistema de ecuaciones lineales</u> es un conjunto de ecuaciones lineales de dos o más incógnitas definidas sobre los reales

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 5x - y = 13 \end{cases}$$

La solución del sistema, si existe, está dada por aquellos valores de las incógnitas que satisfacen **simultáneamente** todas las ecuaciones del sistema.
Para resolverlo podemos emplear distintos métodos de resolución.

I) MÉTODO DE IGUALACIÓN

Este método consiste en despejar ***una*** de las dos variables ***en cada una de las dos ecuaciones***, obtenemos entonces un ***sistema equivalente*** (en este caso elegimos despejar y):

Dos sistemas de ecuaciones son <u>equivalentes</u> cuando tienen el mismo conjunto solución.

$$\begin{cases} y = 11 - 3x \\ y = -13 + 5x \end{cases}$$

Recordamos que: ***"Al tener dos ecuaciones, si los primeros miembros son iguales los segundos también lo son"***, por lo tanto:

$$11 - 3x = -13 + 5x$$

Luego resolvemos la ecuación:

$$8x = 24$$

$$\boxed{x = 3}$$

Reemplazamos el valor hallado de x en cualquiera de las ecuaciones del sistema, $\begin{cases} y = 11 - 3x \\ y = -13 + 5x \end{cases}$ por ejemplo en la primera.

$$y = 11 - 3x$$

$$y = 11 - 3.3 \Rightarrow \boxed{y = 2}$$

Verificamos, en ambas ecuaciones, para saber si realmente $(x; y) = (3; 2)$ es la solución buscada

$$3x + y = 11 \rightarrow 3.3 + 2 = 9 + 2 = 11$$

$$5x - y = 13 \rightarrow 5.3 - 2 = 15 - 2 = 13$$

Ahora sí, podemos asegurar que el conjunto solución del sistema es $\boxed{S = \{(3; 2)\}}$

II) MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Vamos a resolver el mismo sistema por el ***método de sustitución***, para ello despejamos ***una*** de las variables ***en una de las ecuaciones*** (en este caso elegimos ***y*** en la primera ecuación):

$$y = 11 - 3x$$

Se sustituye en la otra ecuación la incógnita $\underline{y}$ anteriormente despejada

$$5x - (\underbrace{11 - 3x}_{y}) = 13$$

Operamos para despejar la única variable existente ahora:

Agrupando términos semejantes en cada miembro se obtiene:

$$5x - 11 + 3x = 13$$

$$5x + 3x = 13 + 11$$

$$8x = 24$$

$$\boxed{x = 3}$$

Reemplazamos el valor de ***x*** obtenido en alguna de las ecuaciones (elegimos arbitrariamente la primera):

$$3x + y = 11$$

$$3.3 + y = 11$$

$$9 + y = 11$$

$$\boxed{y = 2}$$

La solución del sistema obviamente igual que en el caso anterior. No verificaremos, dado que ya sabemos que la respuesta es correcta.

¡Importante!

La solución **no** puede depender del método empleado para resolver el sistema.

III) MÉTODO DE REDUCCIÓN POR SUMAS Y RESTAS

Resolveremos nuevamente el sistema, ahora empleando el **método de reducción**, el objetivo de este método es eliminar una de las incógnitas.
Hay que tener en cuenta que para eliminar una de las incógnitas, éstas deben tener el mismo coeficiente (para poder sumar o restar las ecuaciones).
Si la incógnita a eliminar no tiene el mismo coeficiente en ambas ecuaciones, se multiplica una de las ecuaciones o ambas por un factor conveniente para que los coeficientes se igualen.

Sea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 5x - y = 13 \end{cases}$$

Dado que en este sistema los coeficientes de la y en ambas ecuaciones son opuestos, sumamos miembro a miembro las dos ecuaciones que componen el sistema.

Sumamos miembro a miembro las dos ecuaciones

$$\begin{array}{rl} & 3x + y = 11 \\ + & \underline{5x - y = 13} \\ & 8x + 0 = 24 \end{array}$$

$$8x = 24$$

$$\boxed{x = 3}$$

Sustituyendo este valor en cualquiera de las ecuaciones del sistema obtenemos de igual modo que en los casos anteriores.

$$\boxed{y = 2}$$

Si hubiésemos elegido eliminar la variable x deberíamos multiplicar la primera ecuación por 5 y la segunda ecuación por 3 para igualar los coeficientes. ***Restando*** las ecuaciones miembro a miembro se obtiene:

Restamos miembro a miembro las dos ecuaciones

$$\begin{array}{rlcl} & 5\,(3x + y = 11) & \rightarrow & 15x + 5y = 55 \\ - & & & - \\ & 3\,(5x - y = 13) & \rightarrow & \underline{15x - 3y = 39} \\ & & & 0 \quad + 8y = 16 \;\Rightarrow \boxed{y \;=\; 2} \end{array}$$

Reemplazamos en $3x + y = 11$, una de las dos ecuaciones del sistema el valor obtenido de y, resulta $3x + 2 = 11$ *entonces* $3x \;=\; 9$, resolviendo esta ecuación se obtiene $\boxed{x = 3}$.

La solución del sistema es $\boxed{S = \{(3;2)\}}$

IV) MÉTODO DE DETERMINANTES - REGLA DE CRAMER

Sabiendo que dado un determinante de orden 2, el mismo se calcula:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c$$

Sea el sistema:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

El valor de x e y está dado por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Resolvamos el sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 5x - y = 13 \end{cases}$$

¡¡¡ IMPORTANTE!!!
Debemos ser cuidadosos al identificar los coeficientes de cada una de las variables y los términos independientes de cada ecuación.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 13 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-11-13}{-3-5} = \frac{-24}{-8} = 3 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

¡¡¡ Cuidado!!!
El cálculo de x e y resulta de la división de dos determinantes de orden 2.
Para que ésta exista el denominador debe ser distinto de cero!!!

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{39-55}{-3-5} = \frac{-16}{-8} = 2 \Rightarrow \boxed{y = 2}$$

Por lo tanto obtenemos el mismo conjunto solución: $\boxed{S = \{(3;2)\}}$

V) MÉTODO GRÁFICO

Dado que cada una de las ecuaciones que forman el sistema representa una recta, al graficar ambas ecuaciones en un mismo sistema de ejes cartesianos, obtendremos en forma gráfica la solución del sistema.

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 5x - y = 13 \end{cases}$$

Despejamos de ambas ecuaciones la incógnita ***y*** para obtener la ecuación de la recta en forma explícita.

$$\begin{cases} y = 11 - 3x \\ y = -13 + 5x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -3x + 11 \\ y = \quad 5x - 13 \end{cases}$$

Representamos ambas rectas en un mismo sistema de ejes cartesianos, para ello construimos las tablas de valores correspondientes a cada función.

$y = -3x + 11$

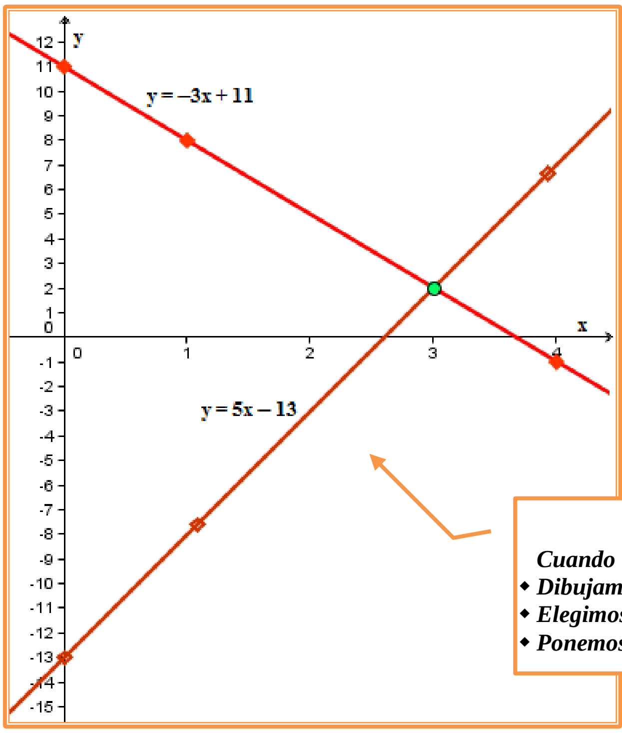
x	$y = -3x + 11$
0	**11**
1	**8**
3	**2**
4	**−1**

Podemos representar las rectas usando su pendiente y ordenada

$y = 5x - 13$

x	$y = 5x - 13$
0	**−13**
1	**−8**
3	**2**
4	**7**

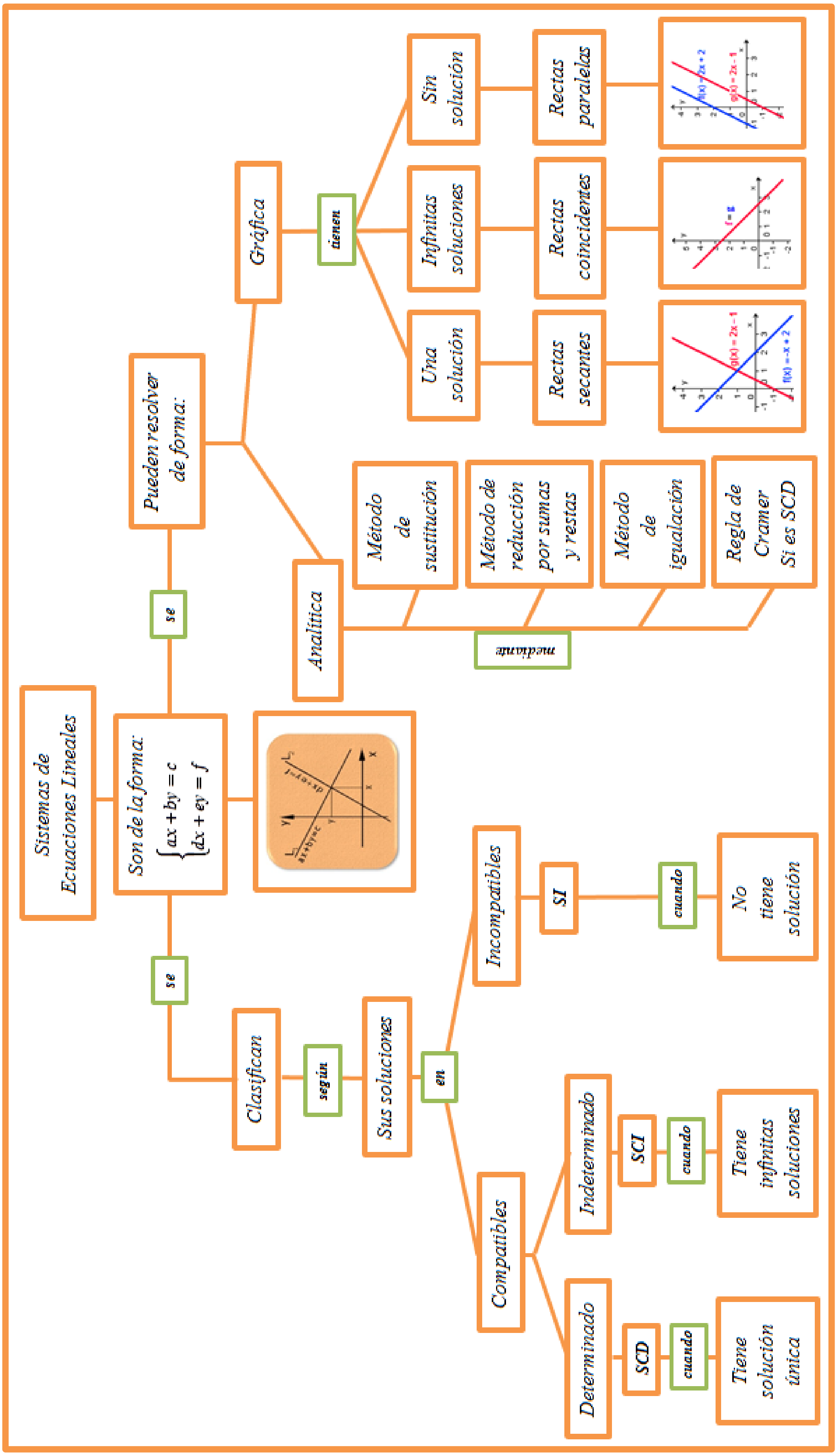
!



¡IMPORTANTE!
Cuando representamos:
- ***Dibujamos un sistema de coordenadas cartesianas.***
- ***Elegimos una escala conveniente en ambos ejes.***
- ***Ponemos nombre a los ejes…***

El punto de intersección de las rectas nos da la solución del sistema: $\boxed{S = \{(3;2)\}}$

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES



EJEMPLOS DESARROLLADOS

Presentamos a continuación ejemplos desarrollados de resolución de sistemas de ecuaciones lineales aplicando los diferentes métodos vistos.

Ejemplo 1

Observa el sistema, tiene dos ecuaciones lineales, las incógnitas son x e y.

Resolver por el ***método de sustitución*** el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 5x+2y=1 \\ -3x+3y=5 \end{cases}$

¿Qué significa resolver?
Es encontrar la solución del sistema, o sea hallar los valores de x e y que lo satisfagan.

Nos piden resolverlo por el método de sustitución.

Despejamos la incógnita "y" en la primera ecuación.

Sustituimos la incógnita "y" en la segunda ecuación

$$\begin{cases} 5x+2y=1 \to y=\dfrac{1-5x}{2} \\ -3x+3y=5 \to -3x+3\left(\dfrac{1-5x}{2}\right)=5 \to -3x+\dfrac{3-15x}{2}=5 \to \end{cases}$$

Obtenemos una ecuación con una sola incógnita y la resolvemos.

$$\to \frac{-6x+3-15x}{2}=5 \to -6x+3-15x=10 \to -21x+3=10 \to -21x=7 \to$$

$$\to x=\frac{7}{-21} \to \boxed{x=-\frac{1}{3}}$$

Sustituimos el valor de la variable "x" hallada en la expresión de "y"

$$y=\frac{1-5x}{2} \to y=\frac{1-5\left(-\frac{1}{3}\right)}{2} \to y=\frac{1+\frac{5}{3}}{2} \to y=\frac{\frac{8}{3}}{2} \to y=\frac{\frac{8}{3}}{2} \to \boxed{y=\frac{4}{3}}$$

La solución se expresa: $\boxed{S=\left\{\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)\right\}}$

Ejemplo 2

Resolver por el ***método de igualación*** el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 5x+2y=11 \\ 2x-3y=12 \end{cases}$

Despejamos la misma incógnita en ambas ecuaciones

$$\begin{cases} 5x+2y=11 \rightarrow & x=\dfrac{11-2y}{5} \\ 2x-3y=12 \rightarrow & x=\dfrac{12+3y}{2} \end{cases} \rightarrow \dfrac{11-2y}{5}=\dfrac{12+3y}{2} \rightarrow$$

Igualamos ambas expresiones y obtenemos una ecuación con una sola incógnita

$$\rightarrow \quad 2(11-2y)=5(12+3y) \rightarrow \quad 22-4y=60+15y$$

$$-38=19y \rightarrow$$

Resolvemos la ecuación

$$\frac{-38}{19}=y \rightarrow$$

$$y=\frac{-38}{19} \rightarrow \boxed{y=-2}$$

El valor obtenido se sustituye en una cualquiera de las dos expresiones en las que aparece despejada la incógnita "x".

$$x=\frac{11-2y}{5} \rightarrow \quad x=\frac{11-2(-2)}{5} \rightarrow \quad x=\frac{11+4}{5} \rightarrow \quad y=\frac{15}{5} \rightarrow \quad \boxed{x=3}$$

La solución se expresa: $\boxed{S=\{(3;-2)\}}$

Ejemplo 3

Resolver por el ***método de reducción*** el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x + \ \ y = 6 \\ 4x + 3y = 14 \end{cases}$

Pensamos cuál es la incógnita a eliminar y multiplicamos por un número conveniente.

$$\begin{cases} 2x + \ \ y = 6 \\ 4x + 3y = 14 \end{cases} \quad \begin{matrix} \xrightarrow{\text{multiplicamos por } (-3)} \\ \xrightarrow{\hspace{3cm}} \end{matrix} \quad \begin{array}{r} -6x - 3y = -18 \\ \underline{4x + 3y = \ \ 14} \end{array}$$

Sumamos miembro a miembro $\quad -2x + 0y = -4$

Resolvemos la ecuación

$$-2x = -4$$

$$x = \frac{-4}{-2} \rightarrow \boxed{x = 2}$$

Sumamos ambas ecuaciones, para eliminar la incógnita "y"

Observación

En este punto podemos tomar cualquiera de las dos ecuaciones y reemplazar por el valor de "x" hallado o repetir el procedimiento para la otra incógnita, como está indicado a continuación.

Como ya calculamos la "x" debemos multiplicar para eliminar la "y".

$$\begin{cases} 2x + \ \ y = 6 \\ 4x + 3y = 14 \end{cases} \quad \begin{matrix} \xrightarrow{\text{multiplicamos por } (-2)} \\ \xrightarrow{\hspace{3cm}} \end{matrix} \quad \begin{array}{r} -4x - 2y = -12 \\ \underline{4x + 3y = \ \ 14} \end{array}$$

Sumamos miembro a miembro $\quad 0x + y = 2$

Resolvemos la ecuación

$$y = 2 \rightarrow \boxed{y = 2}$$

Sumamos ambas ecuaciones, para eliminar la incógnita "x"

La solución se expresa: $\boxed{S = \{(2;2)\}}$

Ejemplo 4

Resolver por el ***método de los determinantes*** el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x-2y=1 \\ x+5y=3 \end{cases}$$

Términos independientes

Coeficientes de "y"

$$x=\frac{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\3\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-2\\5\end{matrix}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix}3\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-2\\5\end{matrix}} \end{vmatrix}}=\frac{1.5-3.(-2)}{3.5-1.(-2)}=\frac{5+6}{15+2}=\frac{11}{17}\Rightarrow \boxed{x=\frac{11}{17}}$$

Coeficientes de "x"

Coeficientes de "y"

¡¡¡ Atención!!!
Debemos ser cuidadosos cuando armamos los determinantes con los coeficientes de cada una de las variables.

Coeficientes de "x"

Términos independientes

$$y=\frac{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix}3\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1\\3\end{matrix}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix}3\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-2\\5\end{matrix}} \end{vmatrix}}=\frac{3.3-1.1}{3.5-1.(-2)}=\frac{9-1}{15+2}=\frac{8}{17}\Rightarrow \boxed{y=\frac{8}{17}}$$

Coeficientes de "x"

Coeficientes de "y"

La solución se expresa: $\boxed{S=\left\{\left(\frac{11}{17};\frac{8}{17}\right)\right\}}$

Ejemplo 5

Resolver por el ***método gráfico*** el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} -x+y=-2 \\ 2x-y=\ \ 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} -x+y=-2 & \rightarrow & y=-2+x & \rightarrow & y=x-2 \\ 2x-y=\ \ 1 & \rightarrow & 2x-1=y & \rightarrow & y=2x-1 \end{cases} \quad \text{luego} \quad \begin{cases} y=x-2 \\ y=2x-1 \end{cases}$$

Despejamos de ambas ecuaciones la incógnita "y" para obtener la ecuación de la recta en forma explícita.

Sistema equivalente que vamos a representar gráficamente.

$y=x-2$

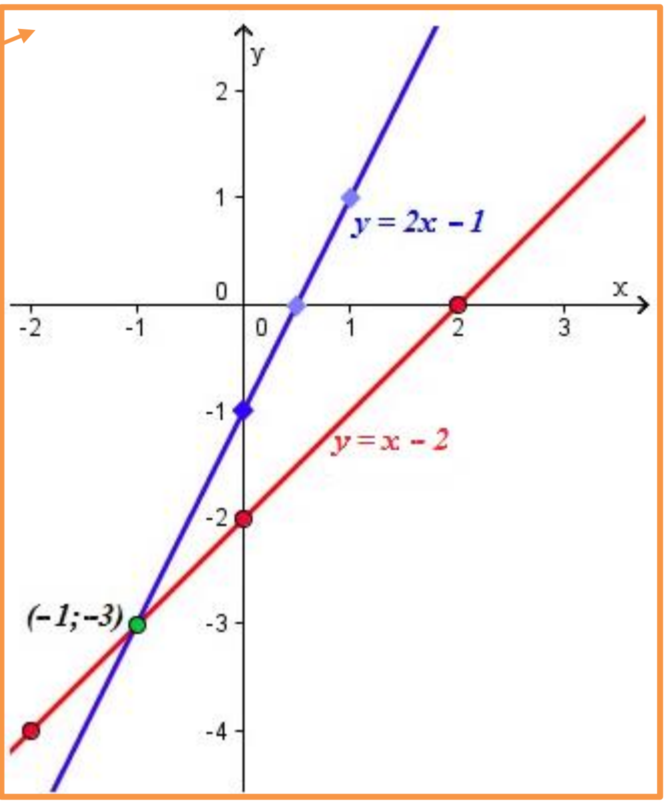
x	$y=x-2$
0	-2
2	0
-1	-3
-2	-4

Podemos representar las rectas usando su pendiente y ordenada

$y=2x-1$

x	$y=2x-1$
0	-1
$\frac{1}{2}$	0
1	1
-1	-3

Representamos ambas rectas en un mismo sistema de ejes cartesianos, para ello debemos construir las tablas de valores correspondientes a cada función.



El punto de intersección de las rectas nos da la solución del sistema: $\boxed{S=\{(-1;-3)\}}$

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

- ***Anton, Howard***. (1997). ***Introducción al Álgebra Lineal***. Tercera edición. México. Editorial Limusa. Grupo Noriega.

- ***Font, E.; Fraquelli, A.; Lazzari, L.; Loiácono, T.; Montero de Diharce, Beatriz; Mouliá, P.; Thompson, S. y Wartenberg, R.*** *(1999):* ***Álgebra con aplicaciones a las ciencias económicas****. Ediciones Macchi. Buenos Aires.*

- ***Grossman, Stanley****. (2008)* ***Álgebra Lineal****. (6ª. Edición.) México DF, México, McGraw-Hill Interamericana.*

- ***Lay D.C., (2007). Algebra Lineal y sus aplicaciones. México, Pearson Educación.***

- ***Kolman B., Hill D.R., (2006). Algebra Lineal. México, Pearson Educación.***

- ***Lipshutz, Seymour****. (1992).* ***Álgebra Lineal****. Serie de Compendios Shaum.*

- ***Haeussler, Ernest. Paul, Richard.*** *(2003)* ***Matemáticas para Administración y Economía****. México. Grupo Editorial Iberoamericana S. A. de C.V.*

- ***Rojo, Armando.*** *(1995). Álgebra lineal I. Buenos Aires. Argentina. Editorial El Ateneo.*

- ***Rojo, Armando.*** *(1998) Álgebra lineal II. Buenos Aires. Argentina. Editorial El Ateneo.*

- ***Indec:*** MIPA 97

- ***Fraquelli, A; Gache, A***: *Material Didáctico Foro de Álgebra*. FCE, UBA

- ***Weber J.E., (1984). Matemáticas para Administración y Economía. México. DF, México, Harla.***