Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Buenos Aires

NOTAS DE MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS

Coordinador

Javier I. García Fronti

Autores

Matías Battocchio

María José Bianco

Pablo Matías Herrera

Eduardo A. Rodriguez

NOTAS DE
MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS

Coordinador
Javier Ignacio García Fronti

Autores
Matías Battocchio
María José Bianco
Pablo Matías Herrera
Eduardo A. Rodriguez

.UBAeconómicas
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

Notas de matemática para economistas / Matias Battocchio ... [et al.] ; coordinación general de Javier Garcia Fronti. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas, 2022.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-950-29-1941-6

1. Matemática para Economistas. I. Battocchio, Matias. II. Garcia Fronti, Javier, coord.
CDD 519.8

ISBN 978-950-29-1941-6
9 789502 919416

AUTORIDADES

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

RECTOR: DR. ALBERTO E. BARBIERI

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

DECANO: DR. RICARDO PAHLEN ACUÑA

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN ADMINISTRACIÓN, CONTABILIDAD Y MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA GESTIÓN (IADCOM)

DIRECTORA: DRA. MARÍA TERESA CASPARRI

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN METODOLOGÍAS BÁSICAS Y APLICADAS A LA GESTIÓN (CIMBAGE-IADCOM)

DIRECTOR: DR. JAVIER IGNACIO GARCÍA FRONTI

http://www.economicas.uba.ar/institutos_y_centros/cimbage/

https://www.instagram.com/cimbage/?hl=es-la

https://www.linkedin.com/in/cimbage-iadcom-facultad-ciencias-econ%C3%B3micas-uba-489a44139/

https://twitter.com/cimbage

INDICE

1

Sobre el papel de la matemática en la ciencia económica.

Eduardo A. Rodríguez

.UBAeconómicas
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

Introducción

Aunque reconocía los inicios de la economía matemática en 1838 con los trabajos de Cournot sobre duopolio, Debreu señalaba "la fase de intensiva matematización" en la cual había entrado la teoría económica hacia finales de la Segunda Guerra Mundial (Debreu, 1990, pg. 1) como así también su influencia en publicaciones científicas (Debreu, 1986, Figura 2, pg. 264). Mirowski señalaba el inicio de esta fase mucho antes, en la década comprendida entre 1925 y 1935 (Mirowski, 1991, pgs. 149-151).

1.1 El debate sobre el uso de matemáticas en la ciencia económica

El debate sobre la matematización de la economía dista mucho de estar cerrado y data de largo tiempo atrás. Ya en 1954 Koopmans hacía mención al "abultado coro de voces exasperadas protestando de diversas maneras... por el uso de lenguaje matemático formal, construcciones y derivaciones formales en el análisis económico y estadístico" (Koopmans, 1954, pg. 377). Por su parte, Krugman señalaba que los ataques al excesivo formalismo "han sido una constante en los últimos 150 años" (Krugman, 1998, pg. 1829). Sin embargo, a pesar del extendido uso de la matemática en economía, la "desaprobación anti-matemática... muestra pocos signos de desaparición... Mientras más fuerte se vuelve la matemática en economía, mayor la reacción que produce" (Beed-Kane, 1991, pg. 581).

Las críticas a la "excesiva formalización" de la teoría económica son varias, sin embargo, pueden resumirse en dos grandes planteos. El primero de ellos opone la verdad como coherencia a la verdad como correspondencia; el segundo cuestiona el estatus de la matemática respecto de otros instrumentos de investigación.

1.2 Verdad como coherencia vs. verdad como correspondencia con los hechos

El primer conjunto de críticas se destina fundamentalmente a los supuestos o "axiomas" sobre los que se apoya la economía matemática para sus desarrollos teóricos. Por lo general, estas críticas están dirigidas a los supuestos de racionalidad característicos de la economía neoclásica (Beed-Kane, 1991, pg. 584).

Es importante considerar, como dice Debreu, que "la propia elección de las preguntas para las cuales [el teórico] intenta encontrar respuestas está influida por su formación matemática" (Debreu, 1990, pg. 5). De hecho, Koopmans, quien provenía de la física, reconocía en 1979 que elegía "problemas que, por naturaleza, o por el herramental matemático requerido, tuvieran similitud con la física" (citado en Mirowski, 1991, pg. 152). Sin embargo, como señalan Beed y Kane, la utilización de la matemática no implica necesariamente la utilización de la "matemática de las funciones continuas dos veces diferenciables" (Beed-Kane, 1991, pg. 598).

De hecho, mismo en Argentina han aparecido propuestas bien fundamentadas que recomiendan la utilización de "otras matemáticas" en teoría económica, como por ejemplo las economías distribucionales de Olivera que permite incorporar las funciones discontinuas en el análisis de los fenómenos económicos tradicionales (Olivera, 1990, 1994) y la teoría de conjuntos alternativa propuesta por Tohmé, que se desprende del axioma de elección y asegura la existencia de una solución computacional para un conjunto de problemas relevantes (Tohmé, 2009).

En sus *Foundations of Economic Analysis*, Samuelson reconocía que la descripción de aspectos de la realidad económica como así también el manejo de elementos abstractos extraídos a partir de ella tenía implícita la idea de “existencia de uniformidades formales reconocibles” (Samuelson, 1947, pg.7). La existencia de tales uniformidades fue precisamente lo que lo llevó a buscar los “teoremas significativos” desde un punto de vista matemático en su influyente obra (Samuelson, 1947, pg. 3).

Sin embargo, Leontief advertía que, si bien los fenómenos económicos poseían dimensiones cuantitativamente observables, había una constante despreocupación sobre el desempeño de estas teorías en aplicaciones prácticas, con lo cual los esfuerzos se enfocaban en sus derivaciones formales mientras que, a la hora de las conclusiones “los supuestos sobre los cuales los modelos se han basado son fácilmente olvidados” (Leontief, 1970, pgs. 1-2). McCloskey se refería incluso a la matemática de los economistas como “matemática sin números” (McCloskey, 1990, pg. 9). Sin embargo, también se pueden crear argumentos no-matemáticos a partir de fundamentos falsos. Por eso, estamos de acuerdo con Krugman cuando dice que “esta es una queja sobre el contenido y no sobre el formalismo” (Krugman, 1998, pg. 1831).

1.3 Matemática vs. otros instrumentos de investigación económica

En lo que respecta al segundo grupo de críticas, los argumentos vinculados con el estatus de la matemática por sobre otros métodos de investigación se retrotraen al éxito de la física teórica, siendo de particular atractivo las ecuaciones de Maxwell, que en ocho ecuaciones describía acabadamente el campo electromagnético al momento que la economía matemática se encontraba en sus inicios (Debreu, 1990, pg. 2). Mirowski señalaba que en el siglo XIX una “corte de científicos e ingenieros entrenados específicamente en física... se volvieron uniformemente impresionados por una *única* metáfora matemática con la cual ellos eran bastante familiares, el equilibrio en un campo de fuerza... con lo cual igualaron energía potencial con ‘utilidad’” (Mirowski, 1991, pg. 47, cursiva en el original).

Una crítica importante contra el uso de las matemáticas en economía es el hecho de que los fenómenos económicos involucran no solo variables cuantitativas, sino aspectos cualitativos de relevancia (poder, cultura, democracia, etc.). Esta crítica se dirige fundamentalmente a la visión de la matemática como “lenguaje” y no simplemente como un instrumento de lógica. Ya Koopmans advertía que “incluso en álgebra, geometría o física, el razonamiento matemático es solamente una técnica para rastrear implicaciones a partir de premisas dadas” (Koopmans, 1954, pg. 378).

En el marco del análisis económico, la matemática es particularmente útil cuando se quieren establecer relaciones entre variables cuantitativas. Considerar a la matemática como “el” lenguaje de la ciencia económica implica una reducción de la teoría económica a relaciones cuantitativas. Esto no quita la importancia de tal instrumento para el estudio de los fenómenos económicos, sino que acota su ámbito de aplicación a problemas que, si bien son relevantes, no son los únicos a ser tratados. Posiblemente Samuelson sea uno de los responsables de esta visión cuando afirmaba que “matemática *es* lenguaje” y que “en lo que respecta a la lógica más profunda... los dos medios son estrictamente idénticos” (Samuelson, 1952, pg. 56, cursiva en el original).

Tampoco hay que minimizar el efecto que tiene la formalización en la comunicación entre economistas, ayudando a que la economía progrese como disciplina (Krugman, 1991, pg.1835). McCloskey, a pesar de sus críticas respecto a la elevada matematización de la economía, reconocía que, si bien la ciencia económica había avanzado sin matemática, estos progresos fueron aún más rápidos con ella, trayendo “transparencia a cientos de argumentos económicos" (McCloskey, 1990, pg. 8). Eso no quiere decir que sea válido "atribuirle significados" a las ecuaciones matemáticas, lo cual "ocurre también en las ciencias físicas" (Beed-Kane, 1991, pgs. 591-592). Es la teoría sobre la cual se apoyan los modelos matemáticos lo que les da significado a las ecuaciones y no la matemática en sí.

Conclusión

En definitiva, el método matemático es uno de muchos de entre los cuales puede elegir el investigador económico. Si bien estamos de acuerdo con Beed y Kane cuando dicen que se puede alegar que la visión del funcionamiento el sistema económico sea una razón de importancia en la elección del método de investigación (Beed-Kane, 1991, pg. 606), también hay margen para los gustos (intereses) del investigador, el cual puede sentirse más cómodo (beneficiado) con una metodología en particular por sobre las restantes.

Referencias

Beed, Clive – Kane, Owen (1991): *What Is the Critique of the Mathematizaton of Economics?* KYKOS, vol. 44 Fasc. 4, 581-612.

Debreu, Gerard (1986): *Theoretical Models: Mathematical Form and Economic Content*. Econometrica, Vol. 54, No. 6 (november, 1986), 1259-1270.

Debreu, Gerard (1990): *The Mathematization of Economic Theory*. The American Economic Review. March 1991, Vol. 81, p.1-7.

Koopmans, Tjalling C. (1954): *On the Use of Mathematics in Economics*. The Review of Economics and Statistics, Vol. 36, No. 4 (Nov., 1954), pp. 377-379

Krugman, Paul (1998): *Two Cheers for Formalism.* The Economic Journal, 108, 1829-1836.

Leontief, Wassily (1970): *Theoretical Assumptions and Nonobservable Facts*. The American Economic Review. March 1971, Vol. 61, p.1-7.

Mc Closkey, Donald N. (1990): *Economic Science: A Search Through the Hyperspace of Assumptions?* Methodus. June 1991, 6-16.

Mirowski, Philip (1991): *The When, the How and the Why of Mathematical Expression in the History of Economics*. The Journal of Economic Perspectives, Vol. 5, No. 1 (Winter, 1991), pp. 145-157

Olivera, Julio H. G. (1990): *Economías distribucionales*. Revista de la Unión Matemática Argentina. Vol. 35, pp. 105-109. Buenos Aires.

Olivera, Julio H. G. (1994): *El enfoque distribucional de los hechos económicos*. Anales de la Asociación Argentina de Economía Política, XXIX Reunión Anual. Tomo 4, pp.1113-1122. Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de La Plata. La Plata.

Samuelson, Paul Anthony (1947): *Foundations of Economic Analysis. Enlarge Edition*. Harvard University Press. 1982.

Samuelson, Paul Anthony (1952): *Economic Theory and Mathematics--An Appraisal.* The American Economic Review, Vol. 42, No. 2, Papers and Proceedings of the Sixty-fourth Annual Meeting of the American Economic Association (May, 1952), pp. 56-66.

Tohmé, Fernando (2009): *Economic Theory and the Alternative Set Theory* $AFA^{-}+AD+DC$. Logic Journal of the IGLP (2009) 17(2). Pgs. 179-203.

2
Cadenas de Markov finitas.

Eduardo A. Rodríguez

2.1 Definiciones básicas

Sea $\{x_t, t = 1,2,\dots\}$ un proceso estocástico en el cual cada una de las variables aleatorias x_t toma valores en un espacio de estados finito $S \equiv \{S_i, i = 1,2,\dots,n\}$. Decimos que el proceso $\{x_t\}$ es una *cadena de Markov* si, para todo $n \geq 1$ y todo $j_k \in S$, $0 \leq k \leq n$, se verifica

$$P\{x_n = j_n | x_{n-1} = j_{n-1}, x_{n-2} = j_{n-2}, \dots, x_0 = j_0\} = P\{x_n = j_n | x_{n-1} = j_{n-1}\},$$

es decir, la probabilidad de alcanzar un estado depende únicamente del estado inmediato anterior del sistema y no de toda su historia. Si $P\{x_n = S_j | x_{n-1} = S_i\}$ es independiente de n decimos que la cadena es *estacionaria* u *homogénea en el tiempo*. En tal caso, podremos escribir $p_{ij} \equiv P\{x_n = S_j | x_{n-1} = S_i\}$, que representa la *probabilidad de transición del estado S_i al estado S_j*, la cual es constante en el tiempo por la estacionariedad de la cadena. Al ser n los estados posibles, podremos definir la *matriz de transición* de la cadena $\mathbf{P} \equiv [p_{ij}]_{n\times n}$. La fila i de la matriz $\mathbf{P}$, $\mathbf{p_i} = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in})$ representa las probabilidades de alcanzar cada uno de los estados posibles a partir del estado S_i, con lo cual $\mathbf{p_i}$ es un *vector de probabilidad* y $\mathbf{P}$ es una *matriz estocástica*. Por su parte, la columna j presenta las probabilidades de alcanzar el estado S_j a partir de los diferentes estados posibles.[1]

Así, cada cadena de Markov finita queda identificada con una matriz estocástica, con lo cual las propiedades de la primera quedan determinadas por las propiedades de la segunda.

Proposición 1: Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos matrices estocásticas, entonces el producto $\mathbf{AB}$ es una matriz estocástica.

Demostración 1: Por definición de producto de matrices, el elemento (i,j) de $\mathbf{AB}$ es igual a $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. Por lo tanto, la suma de los elementos de la fila i de $\mathbf{AB}$ es

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\sum_{j=1}^{n} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot 1 = 1,$$

ya que $\sum_{j=1}^{n} b_{kj} = 1$ al ser la suma de los elementos de la fila k de $\mathbf{B}$ y que $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1$ al ser la suma de los elementos de la fila i de $\mathbf{A}$. Así, $\mathbf{AB}$ es una matriz estocástica. Q.E.D.

Proposición 2: Toda matriz estocástica $\mathbf{P}$ tiene autovalores con módulo menor o iguales a 1 y al menos uno de ellos es igual a 1.

Demostración 2: A partir del *segundo teorema de Frobenius* [Gantmacher, Cap. III.3, Teorema 3, pg. 80-82] se sabe que una matriz no negativa $\mathbf{A}$ siempre tiene un autovalor no negativo r tal que ninguno de los restantes autovalores de $\mathbf{A}$ tiene módulo que exceda r y que a este número característico "dominante" r le corresponde un autovector no negativo $\mathbf{k} \geq 0$. Sea r esta raíz dominante. A partir del desarrollo de la expresión matricial $r\mathbf{k} = \mathbf{kP}$, con $\mathbf{k}$ siendo un vector fila, se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} rk_1 = p_{11}k_1 + p_{21}k_2 + \cdots + p_{n1}k_n \\ rk_2 = p_{12}k_1 + p_{22}k_2 + \cdots + p_{n2}k_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ rk_n = p_{1n}k_1 + p_{2n}k_2 + \cdots + p_{nn}k_n \end{cases}.$$

[1] Obviamente, las columnas de la matriz $\mathbf{P}$ no tienen por qué ser vectores de probabilidad, ya que las probabilidades de una columna específica de $\mathbf{P}$ tienen estados de origen diferentes.

Sumando miembro a miembro las n ecuaciones anteriores, se llega a

$$r(k_1 + k_2 + \cdots + k_n) = k_1 \sum_{j=1}^{n} p_{1j} + k_2 \sum_{j=1}^{n} p_{2j} + \cdots + k_n \sum_{j=1}^{n} p_{nj} = k_1 + k_2 + \cdots + k_n,$$

puesto que $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$ para todo $i = 1,2,\ldots,n$ al ser $\mathbf{P}$ estocástica, con lo cual, al ser $\mathbf{k}$ autovector no negativo, $\sum_{i=1}^{n} k_i \neq 0$ y $r = 1$. A su vez, como r es la raíz maximal de **P**, por el mismo teorema citado, los módulos de los restantes autovalores no superan 1. Q.E.D

Todo autovector fila asociado al autovalor 1 de la matriz **P** que a su vez sea un vector de probabilidad, **t**, claramente satisface $\mathbf{tP} = \mathbf{P}$, con lo cual recibe el nombre de *vector de probabilidad fijo* de **P**.

Sea $\mathbf{x_0}$ el vector de probabilidad que representa el *estado inicial* del sistema o *momento* 0. Es inmediato que al momento 1 el sistema se encontrará en $\mathbf{x_1} = \mathbf{x_0 P}$, y que al momento 2 estará en $\mathbf{x_2} = \mathbf{x_1 P} = (\mathbf{x_0 P})\mathbf{P} = \mathbf{x_0 P}^2$, con lo cual, operando sucesivamente se tiene que el sistema al momento n estará en $\mathbf{x_n} = \mathbf{x_0 P}^n$. Por lo tanto, cada elemento $p_{ij}^{(n)}$, de la matriz $\mathbf{P}^n$ representa la *probabilidad de transición en n períodos hacia delante* del estado S_i al estado S_j, lo cual nos permite clasificar diferentes tipos de estados en el sistema. Así diremos que:

- S_j es *accesible* a partir de S_i si $p_{ij}^{(n)} > 0$ para algún n.
- S_j es *inaccesible* a partir de S_i si no es accesible, es decir si $p_{ij}^{(n)} = 0$ para todo n.
- S_i y S_j están *comunicados* si cada estado es accesible a partir del otro. Formalmente si $p_{ij}^{(n_1)} > 0$ para algún n_1 y $p_{ij}^{(n_2)} > 0$ para algún n_2.
- Un subconjunto de estados $C \subset S$ es *cerrado* si ningún estado fuera de C es accesible a partir de alguno de C. En símbolos, si $S_i \notin C$ y $S_j \in C$, entonces $p_{ij}^{(n)} = 0$ para todo n.
- $C \subset S$ es *irreductible* si ningún subconjunto propio de C es cerrado.[2]
- S_a es un *estado absorbente* si es un conjunto cerrado irreductible de único elemento S_a. En este caso tendremos $p_{aa} = 1$ y $p_{aj} = 0$ para todo $j \neq a$, es decir, la fija a de **P** será un vector canónico con el elemento unitario en la diagonal principal.

Es usual que el vector **x** al cual se le aplica **P** se interprete como distribuciones porcentuales o de probabilidad entre diferentes estados o situaciones posibles de un sistema.[3] De esta manera, asumiendo constantes las probabilidades contenidas en **P**, para una distribución inicial $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{x_1} = \mathbf{x_0 P}$ es la distribución esperada al momento 1 y, en términos generales, $\mathbf{x_n} = \mathbf{x_0 P}^n$ la distribución esperada n períodos hacia delante.

En este contexto el límite $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x_0}\,\mathbf{P}^n$, cuando existe, recibe el nombre de *distribución estacionaria* o *distribución de largo plazo* del proceso representado por **P**. Es evidente que si $\mathbf{x_0} = \mathbf{t}$, entonces $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x_0}\,\mathbf{P}^n = \mathbf{t}$ ya que **t** siempre verifica $\mathbf{tP} = \mathbf{t}$ y por lo tanto $\mathbf{tP}^n = \mathbf{t}$ para todo n. Sin embargo, existen condiciones bajo las cuales $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x_0}\,\mathbf{P}^n = \mathbf{t}$ para cualquier vector de probabilidad $\mathbf{x_0}$.

[2] Claramente, dos subconjuntos cerrados irreductibles de S representan dos cadenas de Markov distintas y deben ser estudiadas por separado.
[3] Esto además tiene ventajas técnicas al poder explotar las propiedades de las matrices estocásticas regulares, que se definirán más adelante, cuando las cadenas de Markov están representadas por ellas.

2.2 Cadenas regulares

Una matriz estocástica $\mathbf{P}$ es *estocástica regular* (o *primitiva*) si existe un $k \in \mathbb{N}$ para el cual $\mathbf{P}^k > \mathbf{0}$.

Proposición 3: Sea $\mathbf{P}$ una matriz estocástica regular. Entonces:

a) $\mathbf{t} > \mathbf{0}$.
b) $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_0\, \mathbf{P}^k = \mathbf{t}$ para todo vector de probabilidad $\mathbf{x}_0$.
c) $\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}^k = [\mathbf{t} \quad \mathbf{t} \quad \dots \quad \mathbf{t}]^T$, donde el supraíndice T indica trasposición.
d) $\mathbf{P}$ es no descomponible.

Demostración 3: a) Como $\mathbf{tP} = \mathbf{t}$, es inmediato que $\mathbf{tP}^n = \mathbf{t}$ para todo n, con lo cual el mismo $\mathbf{t}$ es también vector de probabilidad fijo de $\mathbf{P}^n$ y, por lo tanto autovector fila de $r = 1$, que es también raíz maximal de $\mathbf{P}^n$ al ser estocástica por la proposición 1. Dado que $\mathbf{P}$ es regular, existe un $k^* \in \mathbb{N}$ para el cual $\mathbf{P}^{k^*} > \mathbf{0}$. Por el *teorema de Perron* [Gantmacher, Cap. III.2, Teorema 1, pg. 64-75] se sabe que toda matriz positiva $\mathbf{A}$ siempre tiene un autovalor real, positivo y simple r que excede en módulo a los restantes autovalores y le corresponde un autovector positivo. Como para la matriz positiva $\mathbf{P}^{k^*}$ se tiene $r = 1$, a esta raíz maximal le corresponde un autovector positivo, el cual es precisamente $\mathbf{t}$.

b) Sean λ_i, $i = 1,..,n$, los autovalores de $\mathbf{P}$. Definimos la recursión $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k\mathbf{P}$, con lo cual tenemos $\mathbf{x}_{k^*+1} = \mathbf{x}_{k^*}\mathbf{P} = \mathbf{x}_0\mathbf{P}^{k^*}$, donde $k^* \in \mathbb{N}$ es tal que $\mathbf{P}^{k^*} > \mathbf{0}$. Al ser $\mathbf{P}^{k^*}$ estocástica, tiene un autovalor maximal simple $(\lambda_1)^{k^*} = 1$ y, por el *teorema de Perron* [Gantmacher, Cap. III.2, Teorema 1, pg. 64-75], los demás autovalores de $\mathbf{P}^{k^*}$ tienen módulo inferior a 1. Sea $\bar{k}$ un número natural impar tal que $\bar{k} \geq k^*$, entonces la ecuación $(\lambda_1)^{\bar{k}} = 1$ tiene $\bar{k}$ soluciones complejas. Al ser $(\lambda_1)^{\bar{k}} = 1$ el autovalor de mayor módulo de $\mathbf{P}^{\bar{k}}$, entonces λ_1 es el autovalor de mayor módulo de $\mathbf{P}$ y, como por el *segundo teorema de Frobenius* [Gantmacher, Cap. III.3, Teorema 3, pg. 80-82] también debe ser un número real, entonces $\lambda_1 = 1$ es el autovalor maximal de $\mathbf{P}$. De esta manera, la solución general del sistema $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k\mathbf{P}$ es del tipo $\mathbf{x}_k = C_1\mathbf{v}^{\mathbf{1}} + \sum_{i=2}^{n} \mathbf{w}(k)^{\mathbf{i}}\, \lambda_i^k$, donde $\mathbf{v}^{\mathbf{1}}$ es el autovector correspondiente a $\lambda_1 = 1$ y $\mathbf{w}(k)^{\mathbf{i}}$ es un vector de polinomios en k de grado igual o menor al orden de multiplicidad de λ_i. Como $|\lambda_i| < 1$ para todo $i = 2, \dots, n$, la solución general del sistema verifica $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = C_1\mathbf{v}^{\mathbf{1}}$. Para especificar el valor de la constante indeterminada C_1, basta recordar que al ser $\mathbf{x}_k$ un vector de probabilidad para todo k, $C_1\mathbf{v}^{\mathbf{1}}$ también debe serlo, con lo cual el C_1 correspondiente es aquél que hace $C_1\mathbf{v}^{\mathbf{1}}$ vector de probabilidad, demostrándose así que $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{t}$.

c) La demostración es inmediata a partir de b), dado que, como $\mathbf{P}^k = \mathbf{IP}^k$, siendo $\mathbf{I}$ la matriz identidad, cada fila i de la matriz cuadrada $[\mathbf{t} \quad \mathbf{t} \quad \dots \quad \mathbf{t}]^T$ puede verse como límite de un sistema $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k\mathbf{P}$ con $\mathbf{x}_0 = \mathbf{e}_\mathbf{i}$, siendo el vector $\mathbf{e}_\mathbf{i}$ el vector canónico con valor unitario en la componente i.

d) Si $\mathbf{P}$ fuera descomponible, sería posible reescribirla como $\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{11}} & \mathbf{P}_{\mathbf{12}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\mathbf{22}} \end{bmatrix}$ mediante operaciones de permutación de filas y sus respectivas columnas siendo $\mathbf{P}_{\mathbf{11}}$ y $\mathbf{P}_{\mathbf{22}}$ submatrices cuadradas. Aplicando potencias sucesivas sobre $\tilde{\mathbf{P}}$ se tiene que $\tilde{\mathbf{P}}^n = \begin{bmatrix} {\mathbf{A}_{\mathbf{11}}}^n & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & {\mathbf{A}_{\mathbf{22}}}^n \end{bmatrix}$, donde $\mathbf{B}$ es un vector función de $\mathbf{A}_{\mathbf{12}}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{11}}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{22}}$ y las potencias sucesivas de las dos últimas. Claramente, al permanecer el vector $\mathbf{0}$ en la esquina inferior izquierda, $\widetilde{\mathbf{P}}^n$ no puede ser regular, y por lo tanto tampoco **P**.

Ejemplo 1: Sea una cadena de Markov definida por la siguiente matriz de transición:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

la cual es regular ya que $\mathbf{P^4} > \mathbf{0}$. Su único vector de probabilidad fijo es $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \frac{6}{37} & \frac{10}{37} & \frac{14}{37} & \frac{7}{37} \end{bmatrix}$ y el sistema tenderá hacia él para cualquier condición inicial. Puede verificarse que las potencias sucesivas de **P** se aproximan a una matriz con filas iguales a los vectores de probabilidad fijos **t**.

2.3 Cadenas no regulares

Cuando la matriz **P** no es una matriz estocástica regular, pueden darse varias situaciones:

2.3.1 Único vector de probabilidad fijo no negativo sin ser positivo

Aquí pueden darse dos situaciones, dependiendo de si el sistema tiene o no un estado absorbente, pero en ningún caso la matriz de transición puede ser estocástica regular.

2.3.1.1 Sin estado absorbente

En este caso, el vector de probabilidad fijo de la matriz de transición es único pero, si bien no es positivo, tampoco es un vector canónico, y el proceso tenderá en el largo plazo a él.

Ejemplo 2: Sea una cadena de Markov definida por la siguiente matriz de transición no-regular:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

la cual tiene un único autovalor 1, con $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$. Puede verificarse que, si bien $\mathbf{P}$ no es regular, sus potencias sucesivas se aproximan a una matriz con filas iguales a los vectores de probabilidad fijos $\mathbf{t}$.

2.3.1.2 Con un estado absorbente

El vector de probabilidad fijo es un vector canónico cuya componente unitaria es la correspondiente al estado absorbente. Si el estado absorbente es accesible a partir de los restantes estados, es decir si existe probabilidad no-nula de llegar a él a partir de los restantes estados, ya sea en un período o muchos, el sistema tenderá a él.

Ejemplo 3: Sea una cadena de Markov con estado absorbente S_3 cuya matriz de transición es:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{P}$ tiene un único autovalor 1, con vector de probabilidad fijo $\mathbf{t} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$. Claramente, al ser el estado S_3 alcanzable a partir de los tres restantes estados (de los estados S_2 y S_4 existe la posibilidad de alcanzarlo en un período, mientras que del estado S_1 se requiere al menos dos períodos pasando antes por S_2 o S_4), el sistema tenderá hacia $\mathbf{t}$ para cualquier vector de probabilidad inicial.

2.3.2 Múltiples vectores de probabilidad fijo

Aquí pueden darse dos situaciones, dependiendo de si el sistema tiene o no estados absorbentes. En estos casos, la convergencia hacia un único vector no queda asegurada para toda condición inicial.

2.3.2.1 Convergencia de largo plazo dependiente de las condiciones iniciales

Cuando existe más de un estado absorbente, la tendencia de largo plazo dependerá de las condiciones iniciales del proceso: para algunas condiciones iniciales el sistema tenderá a un estado absorbente y, para otras condiciones iniciales, a otro.

Claramente, los vectores canónicos a los cuales puede tender el sistema son ambos vectores de probabilidad fijo de la matriz de transición de la cadena y, al ser ellos linealmente independientes, necesariamente responden a la misma raíz $r = 1$. Por ende, tal situación sólo puede darse cuando el orden de multiplicidad de esta raíz es mayor a 1 y la tendencia a largo plazo del sistema quedará representado por la combinación lineal convexa de sus autovectores correspondientes.

En lo que respecta a las propiedades de la matriz de transición en estos casos, claramente se trata de una matriz descomponible, ya que, si no lo fuera, su raíz maximal $r = 1$ debería ser simple tal como lo afirma el *primer teorema de Frobenius* para matrices no-negativas no-descomponibles [Gantmacher, Cap. III.2, Teorema 2, pg. 65-75].

Ejemplo 4: Sea una cadena de Markov con dos estados absorbente S_1 y S_3 cuya matriz de transición es:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

El autovalor $r = 1$ de $\mathbf{P}$ tiene orden de multiplicidad 2, siendo los dos vectores de probabilidad fijos linealmente independientes $\mathbf{t}_1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ y $\mathbf{t}_2 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$. De esta manera el sistema tenderá a una combinación lineal de ambos, es decir a un vector $\mathbf{t} = [\alpha \quad 0 \quad (1-\alpha) \quad 0]$, donde el valor final de α dependerá de la condición inicial del sistema.

En lo que respecta a la evolución del sistema, resulta evidente que si el sistema se encuentra inicialmente en uno de los estados absorbentes, allí permanecerá a lo largo del tiempo. Sin embargo, si el sistema se inicia en algunos de los estados no-absorbentes, puede resultar de utilidad conocer la probabilidad de que el sistema tienda a cada uno de los estados absorbentes. Así, dada una matriz de transición $\mathbf{P}$ de dimensión $n \times n$ que contiene m estados absorbentes, al ser $\mathbf{P}$ descomponible es posible expresarla de la siguiente manera:

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{H} = [h_{ij}]$ es una matriz cuadrada $(n-m)$ donde h_{ij} representa la probabilidad de transición entre los estados no-absorbentes S_i y S_j, $\mathbf{G} = [g_{jr}]$ es una matriz $(n-m) \times m$ donde g_{jr} es la probabilidad de transición del estado no-absorbente S_j al estado absorbente S_r, e $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de dimensión m. Definidas así las probabilidades h_{ij} y g_{jr}, el producto $h_{ij}g_{jr}$ es la probabilidad de transición dos períodos hacia delante del estado no-absorbente S_j al estado absorbente S_r.

De esta manera, el producto $\mathbf{HG}$ representará la matriz de transición de estados no-absorbentes a estados absorbentes 2 períodos hacia delante, $\mathbf{H}^2\mathbf{G}$ las probabilidades de transición 3 períodos hacia delante y, en términos generales, $\mathbf{H}^n\mathbf{G}$ para n períodos hacia delante. Así, la probabilidad de largo plazo de que a partir de un estado no-absorbente se pase a un estado absorbente debe ser igual a la probabilidad de que esto ocurra 1 período hacia delante, $\mathbf{G}$, más la de que ocurra 2 períodos hacia delante si no se produjo en el período 1, $\mathbf{HG}$, más la de que ocurra en cada uno de los períodos siguientes si no ocurrió en los períodos anteriores. Formalmente, podemos definir la matriz $\mathbf{Q}$ de probabilidades de largo plazo de un estado no-absorbente a uno absorbente como

$$\mathbf{Q} = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\mathbf{H}^n\mathbf{G} = (\mathbf{I}-\mathbf{H})^{-1}\mathbf{G}$$

donde la última igualdad se ha utilizado el hecho de que, por las características de $\mathbf{H}$, $\sum_{n=0}^{k}\mathbf{H}^n$ se aproxima a $(\mathbf{I}-\mathbf{H})^{-1}$.[4] Cada elemento g_{ir} de la matriz $\mathbf{Q}$ indicará la probabilidad de largo plazo de pasar del estado alcanzar el estado no-absorbente S_i al estado absorbente S_r.

Ejemplo 4 (continuación): Intercambiando las filas 1 y 4 de $\mathbf{P}$ como así también las columnas 1 y 4, tenemos

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nótese que las filas y columnas 1 y 2 de $\widetilde{\mathbf{P}}$ se corresponden con los estados no-absorbentes S_4 y S_2 de $\mathbf{P}$ respectivamente mientras que las filas y columnas 3 y 4 de $\widetilde{\mathbf{P}}$ se corresponden con los estados absorbentes S_3 y S_1 de la matriz original. Así, podemos definir las siguientes submatrices:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

donde los elementos de $\mathbf{H}$ indican las probabilidades de transición entre estados no-absorbentes, mientras que los elementos de $\mathbf{G}$ las probabilidades de transición desde los estados no-absorbentes (filas) a los estados absorbentes (columnas). En particular, en lo que respecta a $\mathbf{G}$**,** sus filas 1 y 2 representan los estados no-absorbentes S_4 y S_2, mientras que las columnas 1 y 2, los estados absorbentes S_3 y S_1. De esta manera calculamos

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{I}-\mathbf{H})^{-1}\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{13}{27} & \frac{14}{27} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix},$$

[4] Dado que $(\mathbf{I}-\mathbf{H})\sum_{n=0}\mathbf{H}^n = \mathbf{I}-\mathbf{H}^{m+1}$ y que $\lim_{m\to\infty}\mathbf{H}^{m+1} = \mathbf{0}$ dado que la suma de los elementos de cada fila de $\mathbf{H}$ es inferior a la unidad, se sigue que $(\mathbf{I}-\mathbf{H})^{-1} \cong \sum_{i=0}^{\infty}\mathbf{H}^i$.

con lo cual la probabilidad de pasar de S_4 a S_3 es $\frac{13}{27}$ y de $\frac{14}{27}$ para pasar a S_1. Por su parte, pasar del estado S_2 a S_3 tiene una probabilidad de largo plazo de $\frac{4}{9}$ y de $\frac{5}{9}$ para alcanzar el estado absorbente S_1.

2.3.2.2 Cadenas cíclicas

Es el caso en el cual el proceso repite su evolución a partir de una cantidad fija de períodos, con lo cual el proceso no tiene límite hacia el cual tienda. En estos casos, la matriz de transición suele ser una matriz donde alguna fila y/o columna se ha permutado respecto de la matriz identidad.

Ejemplo 5: Sea una cadena de Markov con matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Puede verse que $\mathbf{P}^3 = \mathbf{P}$, con lo cual el sistema vuelve a su situación inicial cada dos periodos y, por lo tanto, la sucesión no tiene un límite al cual converja. Si bien $\mathbf{P}$ tiene dos vectores de probabilidad fijo linealmente independientes $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, la cadena no converge a ninguna combinación lineal de ellos. Cabe remarcar que $\mathbf{P}$ también tiene también dos autovalores -1, cuyos autovectores asociados son los opuestos a los del autovalor 1.

Referencias

Aiub, A.: *Ecuaciones en diferencias finitas*. El Coloquio. Buenos Aires, 1985.

Bernardello, Bianco, Casparri, García Fronti Y Olivera De Marzana: “Matemática para economistas con Excel y Matlab.” Primera Edición.

Gantmacher (1959): “Applications of the Theory of the Matrices”. Interscience Publishers. New York-London.

Puterman: “Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming.” New York, Wiley, 1994.

3
El problema de la calificación de restricciones.

Eduardo A. Rodríguez

3.1 Forma usual del "problema económico" de optimización no-lineal

Es usual que un problema económico que involucre un ejercicio de optimización se presente de la siguiente forma

$$Max\ f(x) \qquad sujeto\ a\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

donde f es una función real diferenciable de un vector $x \in \mathbb{R}^n$ sujeto a las restricciones $g(x) \geq 0$, donde g es una función vectorial m-dimensional diferenciable, $g^1(x),\ldots, g^m(x)$, como así también restricciones de no-negatividad en las variables, es decir $x \geq 0$.

Se sabe que las condiciones de Kuhn-Tucker pueden ser necesarias o no para la existencia de máximo dependiendo de si se cumple o no la **calificación de restricciones**. Comenzamos presentando las diferentes condiciones y propiedades asociadas a un problema de optimización general.

3.2 Definición del problema general y relación entre las condiciones

Tenemos el siguiente problema general de maximización no-lineal

$$Max\ f(x) \qquad sujeto\ a\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ x \in X\ convexo \end{cases}$$

donde $f, g: X \to \mathbb{R}$. Supondremos por conveniencia que f, g son diferenciables y cóncavas[5].

A continuación, definimos las siguientes condiciones:

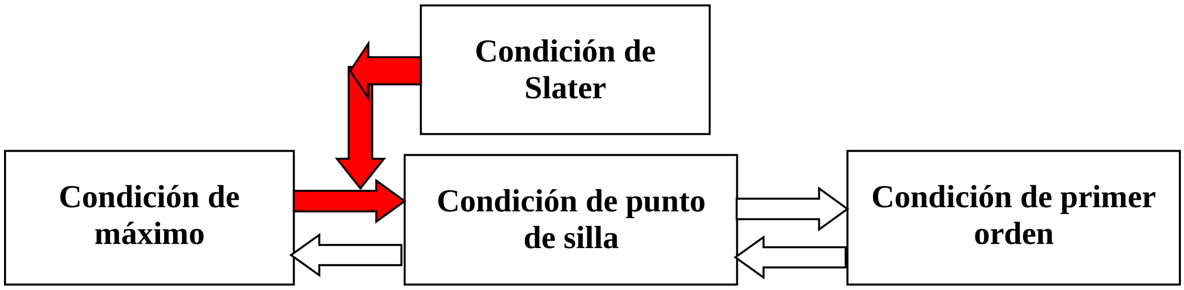
- **Condición de máximo**: Existe $\overline{x} \in X$ tal que maximiza f sujeto a $g_j(x) \geq 0$, $j = 1, \ldots, m$, en donde $x \in X$.
- **Condición de punto de silla:** Existe $(\overline{x}, \overline{\lambda}) \in X \times \mathbb{R}^n_+$, punto de silla de la función $\Phi(x, \lambda) \equiv f(x) + \lambda g(x)$.
- **Condición de primer orden:** Existe $(\overline{x}, \overline{\lambda}) \in X \times \mathbb{R}^n_+$ tal que $f_x(\overline{x}, \overline{\lambda}) + \overline{\lambda} g_x(\overline{x}, \overline{\lambda}) = 0$, $g(\overline{x}) \geq 0$ y $\overline{\lambda} g(\overline{x}) =0$.
- **Condición de Slater**: Existe $\overline{x} \in X$ tal que $g_j(\overline{x}) > 0$, $j = 1, \ldots, m$.

Pueden demostrarse las siguientes relaciones entre ellas

- *Propiedad 1*: La condición de punto de silla implica la condición de máximo (Accinelli, Teorema 6.8.i).
- *Propiedad 2*: La condición de punto de silla y la condición de primer orden se implican mutuamente (Accinelli, Teorema 6.11).
- *Propiedad 3*: Si se cumple la condición de Slater, la condición de máximo implica la condición de punto de silla (Accinelli, Corolario 6.6).

Gráficamente, las implicancias pueden resumirse en el siguiente esquema:

[5] Nótese que las restricciones de no-negatividad, de existir, están contenidas dentro del conjunto $g(x) \geq 0$.



Es precisamente la implicancia remarcada en el esquema anterior la que busca asegurar el estudio de la calificación de restricciones, es decir condiciones que aseguren que la condición de máximo implica la condición de primer orden como ocurre en optimización clásica.

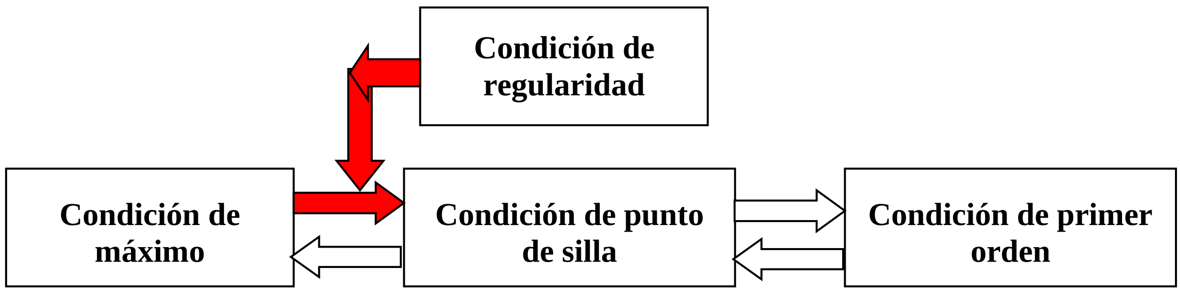
Es posible "reemplazar" la condición de Slater por otra condición que asegure la implicancia buscada. Para ello necesitamos definir la siguiente condición:

- **Condición de regularidad**: $\overline{x} \in C \equiv \{x : x \in X, g_j(x) \geq 0, j = 1, \dots, m\}$ y existe $h \in X$ tal que $g(\overline{x}) + g'(\overline{x}, h) = 0$.

Puede demostrarse la siguiente relación entre las condiciones definidas hasta este momento:

- *Propiedad 4*: Si se cumple la condición de regularidad, entonces la condición de máximo implica la condición de punto de silla (Accinelli, Teorema 6.18).

Es decir que tendríamos las siguientes implicancias:



Sin embargo, la condición de regularidad también es de difícil verificación, por ello se necesitan condiciones de más fácil verificación para alcanzar el objetivo buscado. Para facilitar esta búsqueda, es conveniente definir la siguiente condición:

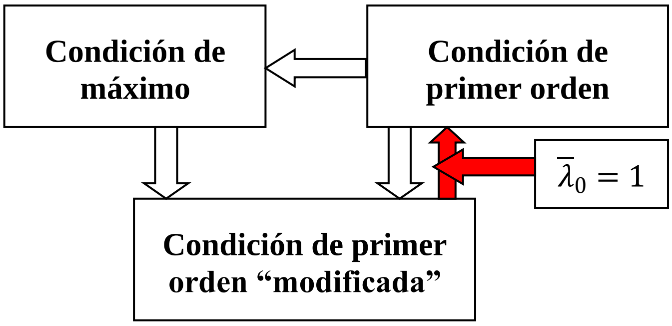
- **Condición de primer orden "modificada":** Existe $(\overline{x}, \overline{\lambda}_0, \overline{\lambda}) \in X \times \mathbb{R}_+^{n+1}$ tal que $\overline{\lambda}_0 f_x(\overline{x}, \overline{\lambda}) + \overline{\lambda} g_x(\overline{x}, \overline{\lambda}) = 0$, $g(\overline{x}) \geq 0$ y $\overline{\lambda} g(\overline{x})$ =0.

Se puede demostrar que

- *Propiedad 5*: La condición de máximo implica la condición de primer orden "modificada". A esta propiedad se la suele llamar "regla del multiplicador de John" (Porciau, pg. 434).
- *Propiedad 6*: La condición de primer orden implica la condición de primer orden "modificada" (trivial).

- *Propiedad 7*: Si $\overline{\lambda}_0 = 1$, entonces la condición de primer orden "modificada" implica la condición de primer orden (trivial).

Es decir que siempre es cierto que



Entonces tenemos tres caminos para asegurar la implicancia buscada:

(1) Buscar condiciones que aseguren el cumplimiento de la condición de Slater.
(2) Buscar condiciones que aseguren el cumplimiento de la condición de regularidad.
(3) Buscar condiciones que aseguren que $\overline{\lambda}_0 = 1$ en la condición de primer orden "modificada".

Se suelen llamar "condiciones de calificación de restricciones" aquellas condiciones que aseguran la implicancia buscada habiendo elegido el camino (3).

3.3 La calificación de restricciones

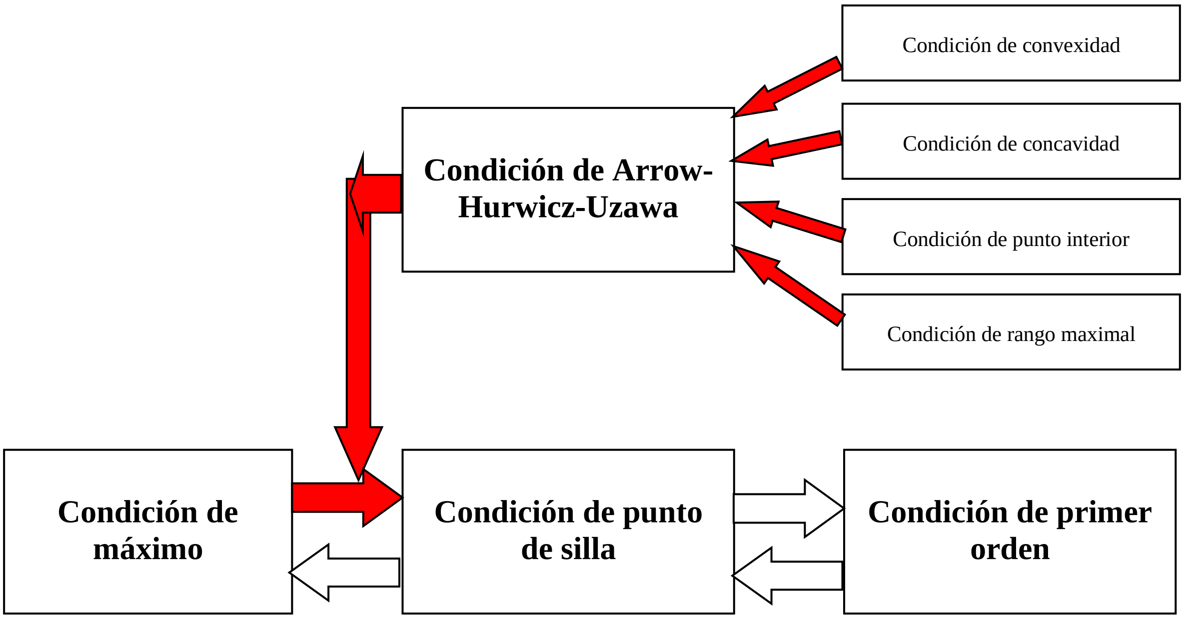
La verificación de la condición de Slater suele ser dificultosa, por eso se buscan otras condiciones de más fácil verificación. Para ello, necesitamos definir las siguientes condiciones:

- **Condición de Arrow-Hurwicz-Uzawa:** Sea $E = \{j \in \{1,\dots,m\}: g_j(x) = 0\}$ y existe $h^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $grad\ g_j(x^*)h^* \geq 0$ para todo $j \in J$ y $grad\ g_j(x^*)h^* > 0$ para todo $j \in J'$ donde J indica las restricciones activas y J' las restricciones no-activas.
- **Condición de Arrow-Hurwicz-Uzawa fuertes:** Se cumple alguna de las siguientes condiciones:
    - **Condición de convexidad:** Todas las $g_j(x) \geq 0, j = 1,\dots,m$ son funciones convexas y existe $\overline{x}$ tal que $g_j(\overline{x}) < 0$ para todo $j = 1,\dots,m$.
    - **Condición de concavidad:** Todas las $g_j(x) \geq 0, j = 1,\dots,m$ son funciones cóncavas y se cumple la condición de Slater.
    - **Condición de punto interior**: El conjunto $C \equiv \{x: x \in X, g_j(x) \geq 0, j = 1,\dots,m\}$ es convexo y posee un punto interior. Además $g_j{}'(\overline{x}) \neq 0$ para todas las restricciones g_j activas.
    - **Condición de rango maximal:** La matriz jacobiana de las restricciones activas tiene rango máximal en el óptimo.

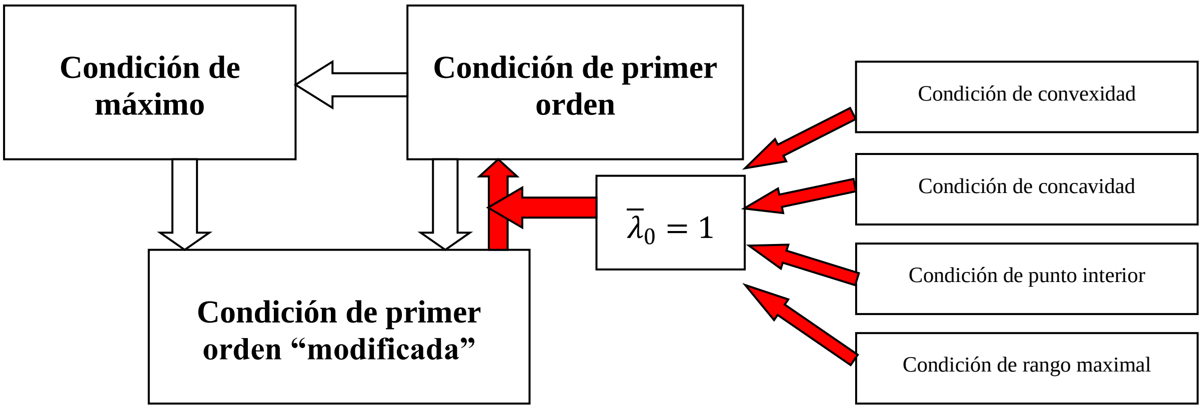
Se puede demostrar que

- *Propiedad 8*: El cumplimiento de cualquier condición de Arrow-Hurwicz-Uzawa fuerte asegura el cumplimiento de la condición de Arrow-Hurwicz-Uzawa (Takayama, pgs. 102-106, excepto la condición de punto interior, donde se indica una referencia).
- *Propiedad 9*: El cumplimiento de la condición de Arrow-Hurwicz-Uzawa asegura que $\overline{\lambda}_0 = 1$ en la condición de primer orden "modificada" (Takayama, pgs. 106-107).
- *Propiedad 10*: Si se cumple la condición de Arrow-Hurwicz-Uzawa entonces la condición de máximo implica la condición de primer orden (Accinelli, Teorema 6.0).

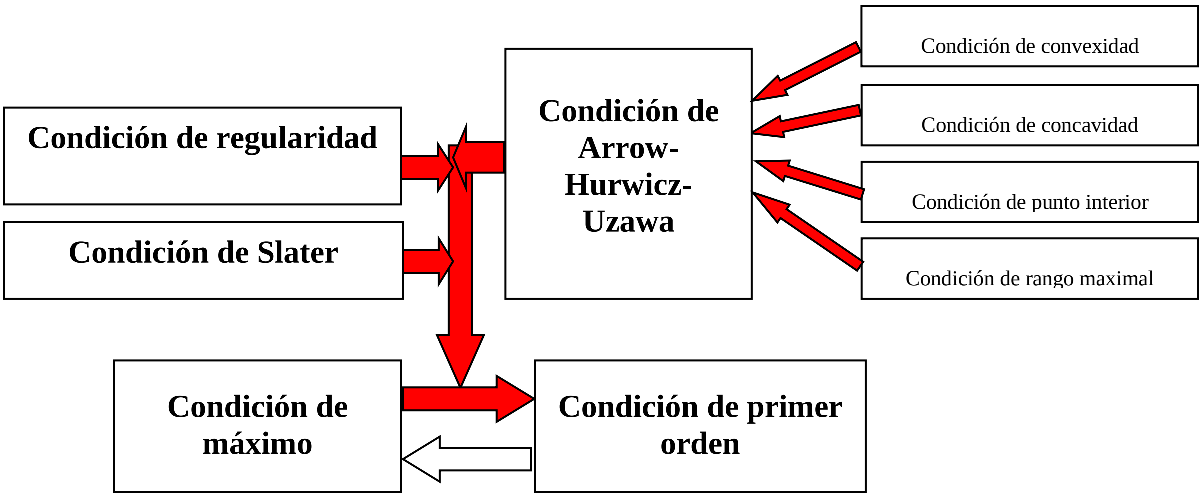
La última propiedad dice que es posible "reemplazar" la condición de regularidad por la condición de Arrow-Hurwicz-Uzawa. Entonces tenemos el siguiente esquema



Aunque también tenemos



En definitiva, tenemos



quedando definidas las condiciones que aseguren que en un máximo se cumpla las condiciones de primer orden.

3.4 El problema económico usual, nuevamente

Obviamente, el anterior análisis es válido para el problema económico usual definido en el primer apartado. Sin embargo, es conveniente remarcar algunos cambios que se presentan precisamente por la particularidad del problema respecto del caso general.

El primer "cambio" tiene que ver con las condiciones de primer orden. Específicamente, al existir un conjunto de restricciones de no-negatividad, es usual en economía que en la construcción de la función $\Phi(x,\lambda) \equiv f(x) + \lambda g(x)$ el vector de funciones $g(x)$ se limite a las restricciones que no sean de no-negatividad. Como consecuencia de ello, el requisito de anulación de sus derivadas parciales primeras deberá reemplazarse por el siguiente

$$f_x\left(\bar{x},\bar{\lambda}\right) + \bar{\lambda} g_x\left(\bar{x},\bar{\lambda}\right) \leq 0.$$

Por su parte, en lo concerniente a las condiciones de calificación de restricciones, no debe perderse de vista que la restricción $x \geq 0$ es, en realidad, un conjunto de m restricciones $h(x) \equiv x \geq 0$. Por ello, siempre que se hable de "restricciones" deben también considerarse estas últimas a pesar de no haber sido incluidas inicialmente en la función Φ.

Referencias

Accinelli, E (2009): *Introducción a la optimización no lineal*. Aportaciones Matemáticas. Serie Textos de la Sociedad Matemática Mexicana. No. 34.

Arrow, K. J. – A. C. Enthoven (1961): *Quasi-Concave Programming*. Econometrica, Vol. 29, No. 4 (October 1961), 779-800.

Chiang, A. (1987): *Métodos fundamentales de economía matemática. Tercera Edición*. Editorial McGrawHill, México.

Intriligator, M. D. (1971): *Mathematical Optimization and Economic Theory*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Porciau, B. H. (1980): *Modern Multiplier Rules*. The American Mathematical Monthly. Vol. 87, No. 6 (jun. – Jul. 1980), 433-452.

Takayama, A. (1974): *Mathematical Economics*. The Dryden Press. Purdue University, Hinsdale, Illinois.

Tiba, D. – C. Zălinescu (2004): *On the Necessity of some Constraint Qualification Conditions in Convex Programming*. Journal of Convex Analysis. Volume 11 (2004), No.1, 95-110.

Simon, C. P. – L. Blume (1994): *Mathematics for. Economists*. W. W. Norton & Company.

Anexo: Aclaraciones terminológicas

En la literatura matemática y, más precisamente, de economía matemática es común encontrar diferentes nombres para los mismos conceptos y/o teoremas. El tema de la calificación de restricciones no es ajeno a ello. Por ello, para facilitar la integración de los temas aquí presentados a los conocimientos del lector detallamos las diferencias encontradas hasta el momento con obras de referencia sobre la materia.

Obviamente, las condiciones de primer orden se las conoce comúnmente en la literatura como "condiciones de Kuhn-Tucker" aunque, como mencionáramos en el apartado anterior, en economía suele exigirse la no-negatividad de las variables. Pueden también aparecer bajo el nombre de "condiciones de Kuhn-Tucker-Lagrange" (al involucrarse un lagrangiano en el teorema) como se presenta en Arrow-Enthoven o Takayama. Sin embargo, independientemente de cómo sean presentadas, suelen referirse a las mismas condiciones.

En Takayama se suele hacer referencia a la "condición de punto de cuasi-silla", enunciándose algunos teoremas en base a ellos. Sin embargo, como demuestra el autor esta condición es similar a la de "condición de punto de silla" cuando todas las funciones son cóncavas. Esta "condición de punto de cuasi-silla" no son otras que las "condiciones de primer orden". A su vez, a las "condiciones de Arrow-Hurwicz-Uzawa fuertes", definidas así siguiendo a Accinelli, Takayama la llama simplemente "condiciones de Arrow-Hurwicz-Uzawa", mientras que a esta última la llama "calificación de restricciones de Arrow-Hurwicz-Uzawa" o "condición (AHU)". Igualmente, a pesar de estas sutilezas, Accinelli sigue bastante fielmente a Takayama en todo lo que respecta a este tema.

Lo que aquí llamamos "condiciones de primer orden 'modificadas'", según la terminología utilizada en Accinelli, no suelen tener un nombre específico en la literatura (simplemente se suele aclarar que se trata de un lagrangiano con un multiplicador en la función objetivo). Sin embargo, el teorema que asegura que todo máximo cumple con ellas se lo conoce como "regla del multiplicador de John" (Porciau) o "teorema de Fritz John" (Simon-Blume).

Es en la calificación de restricciones donde los nombres suelen proliferar. Por ejemplo, la "calificación de restricciones" de Chiang y Arrow-Enthoven, la única que tratan dichos autores, es llamada "calificación de restricciones (o condiciones) de Karush-Kuhn-Tucker" en Simon-Blume y Porciau, aunque este último reconoce que tales condiciones son generalmente conocidas como "el teorema de Kuhn-Tucker".

Lo que Porciau llama efectivamente "teorema de Karush-Kuhn-Tucker" son parecidas a las aquí llamadas "condiciones de Arrow-Hurwicz-Uzawa" o "condición AHU" según Accinelli, aunque Porciau exige igualdad en las desigualdades no estrictas cuando las restricciones están activas.

Las aquí llamadas "condiciones de rango maximal" dentro de las "condiciones de Arrow-Hurwicz-Uzawa fuertes" son llamadas en Simon-Blume "calificación de restricciones no degenerada" (a las cuales ya había hecho referencia al tratar los problemas de optimización clásica). En Accinelli reciben simplemente el nombre de "condición (R)" ("R" por "rango").

Siguiendo con las simplificaciones, las condiciones de "convexidad" y "de punto interior" son llamadas por Accinelli "condición (CV)" y "condición (CI)" respectivamente. Los teoremas que vinculan estas dos condiciones al cumplimiento de las "condiciones de primer orden 'ampliadas'" reciben en Porciau los nombres de "regla de multiplicador convexo" y "regla del multiplicador de Euler-Lagrange" respectivamente.

Simon-Blume y Tiba-Zălinescu llaman "calificación de restricciones de Slater" a una condición parecida a la "condición de concavidad", aunque exigiéndose su cumplimiento únicamente para el caso de las restricciones activas (que difiere de lo que aquí se presenta como "condición de Slater").

La "condición de concavidad" es llamada por Accinelli "condición (CO)". Para Intriligator, la "condición de calificación de restricciones" es lo que aquí presentamos como condición de Slater y es la única que el autor considera.

Las "condiciones de calificación de restricciones" también pueden aparecer bajo el nombre de "condiciones de regularidad", ya que, precisamente, aseguran la regularidad del máximo.

Además, como la lista aquí presentada está lejos de ser exhaustiva, existen otras condiciones no tratadas aquí que pueden ser más más generales, más restrictivas o simplemente diferentes a las aquí expuestas. Así es como podemos encontrar, por ejemplo, la "calificación de restricciones de Slater" ya antes mencionada u otras tales como la de Mangasarian-Fromovitz, la de Abadie, la de Li o la de Hiriart-Urruty y Lemaréchal, entre otras (Tiba-Zălinescu).

4
La estabilidad de una población y el teorema de Perrón.

Matias Battocchio

Introducción

En este trabajo[6] se expone el modelo poblacional de Leslie que clasifica a la población en grupos de edad y representa su dinámica mediante una matriz. El modelo poblacional de Leslie es una aplicación de álgebra lineal, y de autovalores y autovectores en particular. Los conceptos de autovalor y autovector son fundamentales para estudiar la diagonalización de matrices, que a su vez es una herramienta importante para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales o en diferencias, y para determinar el signo de una forma cuadrática, que se usa en teoría de optimización matemática. A pesar de su importancia en los temas de un curso de Matemática para Economistas, el concepto de autovalor se presenta al alumno en forma abstracta, sin motivar su definición, solo con la finalidad de que después pueda emplearlos en el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales y formas cuadráticas. El descubrimiento -o la invención- de los autovalores en la historia de la matemática ocurrió al revés; primero surgió un problema práctico de optimización y de sistemas de ecuaciones diferenciales, cuya resolución derivó en el concepto abstracto (Steen, 1973).

El desarrollo histórico del concepto contrasta con la enseñanza puramente deductiva y axiomática que suele adoptarse en un curso universitario.

Es normal entonces que el/la alumno/a de matemáticas aplicadas no le encuentre un sentido a por qué está aprendiendo sobre autovalores y autovectores, y sienta que no los entiende en profundidad, a pesar de que su definición solo requiere conocer sobre sistemas de ecuaciones lineales. En este trabajo se da una interpretación demográfica del autovalor dominante de una matriz y de su autovector asociado que puede contribuir al entendimiento y la familiaridad de los conceptos. En concreto, si se representa la dinámica de largo plazo de una población humana mediante una matriz (y se cumplen algunas otras condiciones), entonces el autovalor dominante es la tasa de crecimiento, y su autovector representa la pirámide poblacional.

No es el objetivo de este trabajo discutir el método de enseñanza de álgebra lineal. Si las matemáticas deben enseñarse en forma de libro de texto como un compendio de definiciones y teoremas; o deben contener más problemas que motiven en primer lugar el desarrollo de conceptos que luego se formalizan, es una discusión compleja que admite distintos grises y que dependen de la dificultad y la orientación del curso, y del tiempo con el que se cuenta. Esta discusión excede los límites de este trabajo, que simplemente busca brindar al alumno/a ejemplos de aplicaciones prácticas que le permitan aprehender mejor los conceptos estudiados.

El trabajo se estructura en dos secciones: la primera es teórica y la segunda es una aplicación empírica. En la primera sección se demostrará que, si las tasas de fecundidad y mortalidad permanecen constantes, entonces la población alcanza una distribución estable en el largo plazo. Además, esta distribución estable es independiente de la población inicial, y solo depende de las tasas de mortalidad y fecundidad. La demostración es una aplicación del teorema de Perrón sobre matrices primitivas. En una segunda sección del trabajo se realiza un ejercicio empírico con los datos de mortalidad y fecundidad de Argentina para estimar la población estable, con el objetivo de ilustrar los resultados matemáticos del primer apartado.

Como requisitos de esta nota de clase están las definiciones de autovalor y autovector, así como su forma de cálculo, y los teoremas de Perrón y Frobenius.

[6] Se agracecen los comentarios de Eduardo Rodríguez e Iván Williams. Cualquier error u omisión es de exclusiva responsabilidad del autor.

Primero comenzamos introduciendo algunos conceptos, supuestos y notación.

Entendemos por población estable que el porcentaje de personas en cada grupo de edad sobre el total se mantiene constante. Una población estable puede crecer a cualquier tasa mayor o igual a cero; cuando crece a tasa cero se dice que la población es estacionaria[7]. Si la tasa de crecimiento fuese negativa entonces la población se extingue en el largo plazo. El criterio para determinar la estabilidad hace referencia a que en el largo plazo la pirámide poblacional alcance una distribución invariante; pudiendo la población crecer o no. Cuando se mencione el concepto de población estable en este trabajo debe interpretarse en este sentido.

Vamos a considerar una población cerrada, es decir que no hay migración[8]. Supondremos que las tasas de fecundidad y mortalidad específicas por edad son constantes en el tiempo, y vamos a trabajar únicamente con la población de mujeres. Se trabaja con la población de un solo sexo para facilitar la matemática del modelo; implícitamente se está suponiendo que hay suficientes personas del sexo masculino para sostener las tasas de fecundidad.

Sea $n_{x,t}$ el número de mujeres vivas que tienen $[x, x+1)$ años cumplidos en el momento t. Sea P_x la probabilidad de que una mujer con $[x, x+1)$ años cumplidos sobreviva para cumplir los $x+1$ años. Sea F_x el número de hijas nacidas vivas en el intervalo $[t, t+1)$ por cada mujer viva que tiene $[x, x+1)$ años en el momento t. Entonces, si partimos del momento $t = 0$, la distribución de la población en $t = 1$ viene dada por:

$$
\begin{aligned}
n_{0,1} &= \sum_{x=0}^{m} F_x n_{x,0} \\
n_{1,1} &= P_0 n_{0,0} \\
n_{2,1} &= P_1 n_{1,0} \\
n_{3,1} &= P_2 n_{2,0} \\
&\cdots \\
n_{m,1} &= P_m n_{m,0}
\end{aligned}
$$

Si lo expresamos en forma matricial queda

$$M n_0 = n_1$$

donde n_0 y n_1 son vectores columna que tienen la distribución por edades de la población en $t = 0$ y $t = 1$, respectivamente. Y la matriz M viene dada por

$$
\begin{bmatrix}
F_0 & F_1 & F_2 & \dots & F_{k-1} & F_k & F_{k+1} & \dots & F_{m-1} & F_m \\
P_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & P_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & P_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & P_{k-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & P_k & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & P_{m-1} & 0
\end{bmatrix}
$$

[7] Un modelo de población estacionaria es la tabla de mortalidad.

[8] Este supuesto se puede relajar si se supone que las tasas de migración neta se mantienen constantes.

Esta es una matriz cuadrada de tamaño $(m+1) \times (m+1)$. Téngase presente que $m+1$ es la cantidad de grupos de edad que consideramos. Por definición cada $P_x \in (0,1]$ y $F_x \geq 0$ para todo x. A esta matriz se la denomina matriz de Leslie, en honor a Leslie (1945).

Las matrices de Leslie tienen tres características que las definen:

1. En la primera fila están las F_x que se construyen a partir de las tasas específicas de fecundidad por grupos de edad.
2. En la subdiagonal que comienza en el elemento (2,1) de la matriz están las probabilidades de sobrevivir al siguiente grupo de edad.
3. Los demás elementos de la matriz son cero.

Para calcular la población en un momento cualquiera $t = \tau$

$$M^{\tau} n_0 = n_{\tau}$$

Nótese que la matriz de Leslie es una matriz de transición de un período al otro como las matrices estocásticas o cadenas de Markov. Sin embargo, a diferencia de éstas, las matrices de Leslie están conformadas por vectores columnas. Por lo tanto, el elemento de la fila i, columna j, m_{ij} representa la contribución del grupo de edad j al grupo de edad i. Además, las matrices de Leslie no están conformadas por vectores estocásticos.

Un último comentario respecto a las edades de la matriz. En esta exposición matemática se tomaron edades simples para facilitar la notación, pero esto no necesariamente debe ser así. Por ejemplo, se pueden tomar grupos quinquenales de edad, *e.g.*, 0 a 4, 5 a 9, 10 a 14, etc. Además, se comienza con un primer grupo de edad que es $x = 0$, pero esto es una cuestión de notación también, ya que este grupo puede hacer referencia a las mujeres entre 15 y 19 años, por ejemplo.

4.1 Demostración del teorema fundamental de la Demografía

Antes de demostrar el teorema invocando el teorema de Perrón debemos estudiar algunas propiedades de las matrices de Leslie; concretamente, si son reducibles[9] o no, su ecuación característica, y si son primitivas[10] o no. Inicialmente vamos a suponer que $F_x > 0$ para todo x, y luego discutiremos cómo se puede relajar este supuesto.

4.1.1 Propiedades de las matrices de Leslie

Comencemos con el caso más simple en donde hay dos grupos de edad, es decir, $m = 1$.

4.1.1.1 Dos grupos de edad

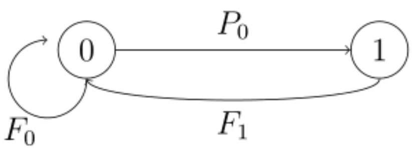
La matriz de Leslie es

[9] Una matriz es irreducible (o no descomponible) si y solo si se puede ir de cualquier estado a cualquier otro, no necesariamente en un período (Grinstead y Snell, 2012). Una definición alternativa consiste en que no sea similar a una matriz particionada triangular superior (Bernardello *et al.*, 2004). Una matriz es reducible cuando no es irreducible.

[10] Una matriz es primitiva si y solo si se vuelve positiva cuando se la eleva a alguna potencia. Esta definición sugiere que las matrices primitivas son matrices irreducibles que están más cerca de ser matrices positivas. Luego veremos otra definición que sugiere otra interpretación. En la teoría de cadenas de Markov, a las matrices primitivas también se las suele llamar regulares, aunque el autor prefiere no usar esta última acepción ya que también se refiere a matrices invertibles.

$$\begin{bmatrix} F_0 & F_1 \\ P_0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es irreducible ya que si elegimos $I = 1$ y $J = 2$ entonces $a_{1,2} \neq 0$, y si elegimos $I = 2$ y $J = 1$, entonces $a_{2,1} \neq 0$. Una forma de representarla es con el siguiente diagrama de nodos o grafo:

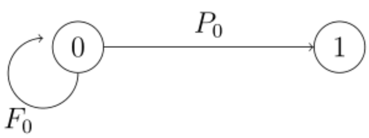


Los nodos de este diagrama expresan los grupos de edad de la población: 0 y 1. La flecha que va del nodo i al j representa la contribución de la población con edad i a la población con edad j. En este caso:

- La contribución de 0 a 1 está mediada por la probabilidad de sobrevivir hasta esa edad: P_0.
- La contribución de 0 a 0 está mediada por la cantidad de hijos que tienen las mujeres del grupo de edad 0: F_0.
- La contribución de 1 a 0 está mediada por la cantidad de hijos que tienen las mujeres del grupo de edad 1: F_1.

No hay una relación directa del nodo 1 consigo mismo, pero sí hay una relación indirecta: la flecha F_1 y luego P_0. Lo que quiere decir es que las mujeres en 1 contribuyen a 1 teniendo hijos que sobreviven hasta 1.

Con este diagrama es más sencillo observar que todos los estados están conectados (directa o indirectamente) con los demás, por lo que la matriz es irreducible. Siguiendo con este ejemplo, si quisiésemos hacer que M sea reducible podemos fijar $F_1 = 0$ para que el diagrama quede



Es claro que no hay forma de ir del estado 1 al estado 0, ni tampoco al estado 1. Por ello, esta matriz es reducible o descomponible.

Volvamos al caso en que $F_x > 0$ para el último grupo de edad. Nótese que si fijáramos $F_0 = 0$, la matriz seguiría siendo irreducible.

Veamos su ecuación característica:

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} F_0 - \lambda & F_1 \\ P_0 & -\lambda \end{vmatrix} = (F_0 - \lambda)(-\lambda) - F_1 P_0 = \lambda^2 - F_0\lambda - F_1 P_0$$

Esta ecuación característica tiene un solo cambio de signo. Por lo tanto, por el teorema de los signos de Descartes[11] hay una sola raíz positiva.

Finalmente, elevando la matriz M al cuadrado vemos que todos sus elementos son positivos. Por lo tanto, la matriz es primitiva.

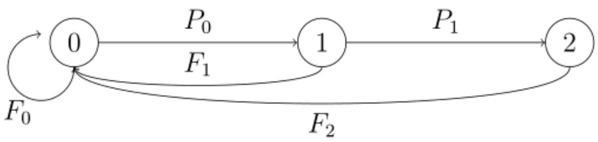
$$\mathrm{M}^2 = \begin{bmatrix} F_0 & F_1 \\ P_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 & F_1 \\ P_0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0^2 + F_1 P_0 & F_0 F_1 \\ P_0 F_0 & P_0 F_1 \end{bmatrix}$$

4.1.1.2 Tres grupos de edad

Pasemos al caso en que $m = 2$

$$\begin{bmatrix} F_0 & F_1 & F_2 \\ P_0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si se elige $I = 3$ y $J = \{1,2\}$ vemos que $a_{ij} = 0$ y, por lo tanto, la matriz es irreducible.



El diagrama de nodos constata que M es irreducible ya que cualquier estado puede alcanzarse desde cualquier otro estado.

- La contribución de 0 a 1 está mediada por la probabilidad de sobrevivir hasta esa edad: P_0.
- La contribución de 1 a 2 está mediada por la probabilidad de sobrevivir hasta esa edad: P_1.
- La contribución de 0 a 0 está mediada por la cantidad de hijos que tienen las mujeres del grupo de edad 0: F_0.
- La contribución de 1 a 0 está mediada por la cantidad de hijos que tienen las mujeres del grupo de edad 1: F_1.
- La contribución de 2 a 0 está mediada por la cantidad de hijos que tienen las mujeres del grupo de edad 2: F_2.

Como en el caso anterior, la matriz se vuelve reducible si $F_x = 0$ en el último grupo de edad. Nótese que, por otro lado, si $F_0 = 0$ o $F_1 = 0$ con $F_2 > 0$, la matriz sigue siendo irreducible. Lo que determina la irreducibilidad de la matriz es la F_x del último grupo de edad, ya que una vez conectados el último y primer grupo de edad, las relaciones de sobrevivencia P_x se encargan de conectar todos los demás.

Veamos su ecuación característica.

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} F_0 - \lambda & F_1 & F_2 \\ P_0 & -\lambda & 0 \\ 0 & P_1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - F_0\lambda^2 - F_1 P_0 \lambda - P_1 P_0 F_2$$

[11] Si los términos de un polinomio con coeficientes reales se colocan en orden descendente de grado, entonces el número de raíces positivas es igual al número de cambio de signos, o menor por una diferencia par.

La ecuación característica tiene un solo cambio de signo. Por lo tanto, por el teorema de los signos de Descartes hay una sola raíz positiva.

Finalmente, se comprueba que elevando al cubo la matriz M todos sus elementos son positivos.

$$M^3 = \begin{bmatrix} {F_0}^3 + F_0F_1P_0 + P_0F_0F_1 + P_0P_1F_2 & F_0^2F_1 + F_0P_1F_2 + P_0F_1^2 & F_0^2F_2 + P_0F_1F_2 \\ P_0F_0^2 + P_0^2F_1 & P_0F_0F_1 + P_0P_1F_2 & P_0F_0F_2 \\ P_0P_1F_0 & P_0P_1F_1 & P_0P_1F_2 \end{bmatrix}$$

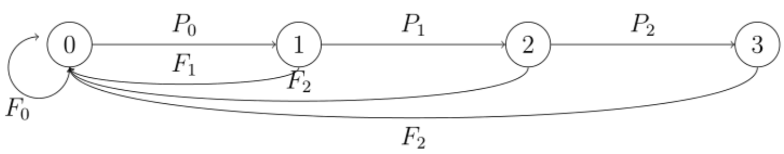
Por lo tanto, la matriz es primitiva.

4.1.1.3 Cuatro grupos de edad y más

Veamos un caso más, $m = 3$. La matriz M queda

$$\begin{bmatrix} F_0 & F_1 & F_2 & F_3 \\ P_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_2 & 0 \end{bmatrix}$$

y el diagrama de nodos



Como todos los estados están conectados la matriz es irreducible. Además, en este procedimiento de comenzar por el caso más simple e ir agregando grupos de edad, queda claro que al agregar un grupo de edad más cuya F_x es distinta de cero, la matriz M sigue siendo irreducible[12].

Adicionalmente, la matriz M^4 tiene todos sus elementos positivos y, por lo tanto, es primitiva.

Veamos la ecuación característica.

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} F_0 - \lambda & F_1 & F_2 & F_3 \\ P_0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & P_2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - F_0\lambda^3 - F_1P_0\lambda^2 - F_2P_1P_0\lambda - F_3P_2P_1P_0$$

Esta ecuación característica tiene un solo cambio de signo. Por lo tanto, por el teorema de los signos de Descartes hay una sola raíz positiva. Si dividimos por λ^4 y despejamos

$$1 = F_0\lambda^{-1} + F_1P_0\lambda^{-2} + F_2P_1P_0\lambda^{-3} + F_3P_2P_1P_0\lambda^{-4}$$

Usando sumatorias y productorias podemos reexpresar esta ecuación de la siguiente forma

$$1 = \sum_{i=0}^{3}\left(F_i\lambda^{-i-1}\prod_{j=0}^{i-1}P_j\right)$$

[12] Para una demostración formal véase Sykes (1969).

Si generalizamos esta expresión para m+1 grupos de edad (Keyfitz & Caswell, 2006)

$$1 = \sum_{i=0}^{m} \left(F_i \lambda^{-i-1} \prod_{j=0}^{i-1} P_j \right) \tag{4-1}$$

Esta ecuación es la versión discreta de la ecuación integral de Lotka (1977).

Luego de discutir las propiedades de irreducibilidad y primitividad, y arribar a la ecuación discreta de Lotka, ya podemos demostrar el teorema que nos interesa. En concreto, vamos a demostrar que, si las tasas de fecundidad y mortalidad permanecen constantes, entonces la población alcanza una distribución estable en el largo plazo. Vamos a demostrarlo de dos maneras distintas: en la primera vamos a suponer que la matriz de Leslie es diagonalizable, esto es una simplificación que permita que la demostración sea más directa e intuitiva, y luego vamos a generalizarlo para el caso en que M no es necesariamente diagonalizable.

4.1.2 Demostración cuando M es diagonalizable

Si suponemos que los autovectores de M son linealmente independientes[13], entonces estos forman una base de $\mathbb{R}^{m+1}$. Como el vector de población en el momento inicial es un vector de $\mathbb{R}^{m+1}$, podemos escribirlo como una combinación lineal de los autovectores:

$$\mathrm{n}_0 = c_1 w^1 + c_2 w^2 + \cdots + c_{m+1} w^{m+1}$$

donde w^i es el autovector asociado al i-ésimo autovalor. Los coeficientes c_i se determinan una vez conocido el vector de población inicial n_0.

Vamos a multiplicar miembro a miembro por M.

$$\mathrm{Mn}_0 = \sum_{i=1}^{m+1} c_i M\, w^i$$

$$\mathrm{n}_1 = \sum_{i=1}^{m+1} c_i \lambda_i\, w^i$$

Multiplicando nuevamente por M.

$$\mathrm{Mn}_1 = \sum_{i=1}^{m+1} c_i \lambda_i M\, w^i$$

$$\mathrm{n}_2 = \sum_{i=1}^{m+1} c_i {\lambda_i}^2\, w^i$$

Es claro que multiplicando repetidas veces se obtiene la siguiente solución para determinar el vector de población en el momento t

[13] Suponer que la matriz M tiene $m+1$ autovectores linealmente independientes es lo mismo que suponer que es diagonalizable.

$$\mathrm{n_t} = \sum_{i=1}^{m+1} c_i \lambda_i{}^t\, w^i$$

Esta solución es una suma ponderada de $m + 1$ términos exponenciales, donde los ponderadores c_i se determinan por las condiciones iniciales del problema. La trayectoria de la población en el largo plazo depende de las potencias de los autovalores. Es claro que si $|\lambda_i| > 1$ para algún i, entonces habrá crecimiento exponencial; mientras que si $|\lambda_i| < 1$ para todo i, entonces habrá decaimiento exponencial. Los autovalores se obtienen al resolver la ecuación discreta de Lotka. Sin embargo, no es necesario conocer todos los autovalores; si supiésemos que la matriz de Leslie tiene un autovalor que es mayor que los demás en módulo, entonces el crecimiento o decrecimiento de la población estará determinada por ese autovalor.

Con los supuestos que hemos trabajado hasta ahora, la matriz de Leslie es irreducible si $F_x \neq 0$ para el último grupo de edad, y es primitiva si $F_x \neq 0$ para todos los grupos de edad. Como la matriz M es primitiva, por el teorema de Perrón[14] sabemos que tiene un autovalor real positivo λ^*, que es una raíz simple de la ecuación característica y que excede el módulo de todos los demás autovalores. A esta raíz dominante le corresponde un autovector estrictamente positivo.

Además, esta es la única raíz positiva, ya que la ecuación característica tiene un solo cambio de signo y entonces, por el teorema de los signos de Descartes, el número de raíces positivas es uno. Los demás autovalores de M son números negativos o complejos.

Si dividimos por $(\lambda^*)^t$ y hacemos tender $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{n_t}}{(\lambda^*)^t} = \lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{m+1} c_i \frac{\lambda_i{}^t}{(\lambda^*)^t} w^i = c^* w^* \qquad (4\text{-}2)$$

donde w^* es el autovector asociado con la raíz dominante de Perrón, λ^*, y c^* es la constante que multiplica a este autovector.

En el límite cuando t tiende a infinito los demás términos tienden a cero porque todos los autovalores distintos de λ^* son menores que éste en módulo. Esto muestra que si la matriz de Leslie es primitiva entonces en el largo plazo la estructura de la población converge a una distribución estable, que está dada por w^*.

Nótese que la estructura por edades de la población converge a una constante en el largo plazo, pero la población no necesariamente se debe mantener constante. Lo que converge es $\frac{n_t}{(\lambda^*)^t}$, por lo tanto:

- n_t crece exponencialmente a la tasa λ^* si $|\lambda^*| > 1$.
- n_t decrece exponencialmente a la tasa λ^* si $|\lambda^*| < 1$. En este caso la población se extingue en el largo plazo.

[14] En algunos libros el teorema de Perrón se enuncia para matrices positivas (Bernardello *et al.*, 2004 y Gantmacher, 2000, entre otros), pero también es válido para un grupo más amplio de matrices, que obviamente contienen a las positivas, que son las matrices primitivas. Si el teorema de Perrón es válido para una matriz positiva A, entonces los autovalores de A^h son los mismos que los de A pero elevados a la h, y los autovectores de A^h son iguales que los de A. Esto junto con la definición de matriz primitiva demuestran que, si el teorema de Perrón se cumple en matrices positivas, también se cumple en matrices primitivas.

- n_t se mantiene constante si $|\lambda^*| = 1$.

Para analizar el crecimiento o decrecimiento de la población sólo basta estudiar su autovalor dominante.

A este resultado de convergencia se lo conoce como el teorema fundamental de la demografía o el teorema de ergodicidad fuerte (Cohen, 1979). Es un resultado de ergodicidad porque muestra que la estructura de la población en el largo plazo es independiente de las condiciones iniciales.

Nótese que la ergodicidad se refiere a la estructura por edades de la población en porcentaje, y no a su valor absoluto. El número de personas en el largo plazo sí puede depender de la población inicial a través de la constante c^*.

4.1.3 Demostración sin suponer que M es diagonalizable

La siguiente demostración es una adaptación de la demostración del teorema 8.1 de Nikaido (1968).

Vamos a definir el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias lineal de primer orden

$$y(t) = \left(\frac{M}{\lambda^*}\right)^t n_0$$

$$y(t+1) = \frac{M}{\lambda^*} y(t)$$

El autovector asociado a λ^* es $w^* = [w_i^*]_{m+1}$, que es un autovector estrictamente positivo por el teorema de Perrón.

Definimos

$$\theta_i(t) = \frac{y_i(t)}{w_i^*}$$

Nótese que si w^* no fuese un vector positivo, entonces algún w_i^* podría ser cero, y $\theta_i(t)$ no quedaría definido.

Además, definimos

$$\alpha(t) = \text{mín}\,[\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_{m+1}(t)]$$

$$\beta(t) = \text{máx}\,[\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_{m+1}(t)]$$

Sea $l(t)$ el número entero para el cual $\alpha(t) = \theta_{l(t)}(t)$. Entonces, para todo $i = 1,2, \dots, m+1$

$$y_i(t+1) = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{m_{i,j}}{\lambda^*} y_j(t) = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{m_{i,j}}{\lambda^*} \theta_j(t) w_j^* = \alpha(t) \frac{m_{i,l(t)}}{\lambda^*} w_{l(t)}^* + \sum_{j \neq l(t)} \frac{m_{i,j}}{\lambda^*} \theta_j(t) w_j^*$$

$$\leq \alpha(t) \frac{m_{i,l(t)}}{\lambda^*} w_{l(t)}^* + \beta(t) \sum_{j \neq l(t)} \frac{m_{i,j}}{\lambda^*} w_j^*(t) = [\alpha(t) - \beta(t)] \frac{m_{i,l(t)}}{\lambda^*} w_{l(t)}^* + \beta(t) \sum_{j=1}^{m+1} \frac{m_{i,j}}{\lambda^*} w_j^*$$

$$= [\alpha(t) - \beta(t)] \frac{m_{i,l(t)}}{\lambda^*} w_{l(t)}^* + \beta(t) w_i^*$$

Si definimos $\delta = \min_{i,j} \frac{m_{i,j}}{\lambda^*}$ y $\varepsilon = \min_{i,j} \frac{w_j^*}{w_i^*}$ entonces, luego de dividir por w_i^*

$$\frac{y_i(t+1)}{w_i^*} \leq [\alpha(t) - \beta(t)]\varepsilon\delta + \beta(t)$$

Como esto es válido para todo i

$$\beta(t+1) \leq [\alpha(t) - \beta(t)]\varepsilon\delta + \beta(t)$$

$$\beta(t) - \beta(t+1) \geq [\beta(t) - \alpha(t)]\varepsilon\delta \qquad (4\text{-}3)$$

En forma similar, si $k(t)$ es el número entero para el cual $\beta(t) = \theta_{k(t)}(t)$. Entonces, para todo $i = 1,2, \dots, m+1$

$$y_i(t+1) = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{m_{i,j}}{\lambda^*} y_j(t) = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{m_{i,j}}{\lambda^*} \theta_j(t) w_j^* = \beta(t) \frac{m_{i,k(t)}}{\lambda^*} w_{k(t)}^* + \sum_{j \neq k(t)} \frac{m_{i,j}}{\lambda^*} \theta_j(t)\, w_j^*$$

$$\geq \beta(t)\, \frac{m_{i,k(t)}}{\lambda^*}\, w_{k(t)}^* + \alpha(t) \sum_{j \neq k(t)} \frac{m_{i,j}}{\lambda^*} w_j^*(t)$$

$$= [\beta(t) - \alpha(t)]\, \frac{m_{i,k(t)}}{\lambda^*}\, w_{k(t)}^* + \alpha(t) \sum_{j=1}^{m+1} \frac{m_{i,j}}{\lambda^*} w_j^*$$

$$= [\beta(t) - \alpha(t)]\, \frac{m_{i,k(t)}}{\lambda^*}\, w_{k(t)}^* + \alpha(t) w_i^*$$

Operando se llega a que

$$\alpha(t+1) - \alpha(t) \geq [\beta(t) - \alpha(t)]\varepsilon\delta \qquad (4\text{-}4)$$

Como $\beta(t) \geq \alpha(t)$, $\{\alpha(t)\}$ es no decreciente y acotada por encima; mientras que $\{\beta(t)\}$ es no creciente y acotada por debajo. Por lo tanto, por las ecuaciones ((**4-3**) y ((**4-4**)

$$\lim_{t \to \infty} \alpha(t) = \alpha$$

$$\lim_{t \to \infty} \beta(t) = \beta$$

Esto, junto con la ecuación ((**4-3**) o la ecuación ((**4-4**), demuestran que $\alpha = \beta$. Y por la definición de $\alpha(t)$ y $\beta(t)$, queda demostrado que

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \alpha\, w^*$$

En la demostración del teorema no usamos ninguna de las características específicas de las matrices de Leslie (*i.e.*, que los únicos elementos distintos de cero son los de la primera fila y la subdiagonal); solo supusimos que la matriz era primitiva. En consecuencia, este teorema de convergencia se aplica a todas las matrices primitivas, sin que necesariamente sean matrices transición poblacional, como las cadenas de Markov, por ejemplo.

4.1.4 Matrices de Leslie no primitivas

Un supuesto clave para demostrar el teorema fundamental es que la matriz M es primitiva ya que sin este supuesto no hubiésemos podido usar el teorema de Perrón. A partir de esto surgen dos preguntas:

1. ¿La población puede converger a una estructura etaria estable si la matriz de Leslie no es primitiva?

2. ¿Se puede relajar el supuesto de que todas las $F_x > 0$ para que la matriz de Leslie sea primitiva?

En esta sección vamos a responder estas dos preguntas.

Antes de comenzar a discutir el supuesto de primitividad vale la pena mencionar que el supuesto de irreducibilidad no es restrictivo en absoluto, ya que este supuesto dependía exclusivamente de que la $F_x \neq 0$ para el último grupo de edad. Si esto no es así entonces se puede truncar la matriz de Leslie en las edades post-reproductivas y trabajar con la submatriz que contiene los grupos de edad que tienen hijos.

Ahora sí consideremos qué ocurre si la matriz de Leslie no es primitiva. En este caso no podemos usar el teorema de Perrón, que fue fundamental en las dos demostraciones que estudiamos, y solo podemos usar el 1er teorema de Frobenius que afirma que el autovalor dominante es real, simple y positivo, y no es superado en módulo por los demás autovalores. Como no podemos asegurar que exista un autovalor mayor a los demás en módulo, entonces cuando se hace tender $t \to \infty$ en la ecuación ((**4-2**) pueden quedar varios términos.

Por lo tanto, cuando la matriz de Leslie no es primitiva el resultado de ergodicidad no está asegurado. Más que eso, podemos afirmar que en este caso la población no converge a una distribución estable. Vamos a demostrar que si M no es primitiva entonces $\lim_{t\to\infty} \frac{M^t}{(\lambda^*)^t}$ no existe, demostrando el contrarrecíproco: si $\lim_{t\to\infty} \frac{M^t}{(\lambda^*)^t}$ existe entonces M es primitiva.

Definimos $W = \lim_{t\to\infty} \frac{M^t}{(\lambda^*)^t}$.

Como $\frac{M}{\lambda^*}\, W = \frac{M}{\lambda^*} \lim_{t\to\infty} \frac{M^t}{(\lambda^*)^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{M^{t+1}}{(\lambda^*)^{t+1}} = W$.

Entonces

$$\frac{M}{\lambda^*} w = w$$

donde w es una columna cualquiera de W.

$$M\, w = \lambda^*\, w$$

Esto implica que w es el autovector asociado a λ^* o es el vector nulo. Si es el vector nulo entonces W es la matriz nula, pero esto es un absurdo porque $Ww^* = \lim_{t\to\infty} M^t\, w^* = \lim_{t\to\infty} (\lambda^*)^t\, w^*$ para w^* positivo y λ^* positivo, por el 1er teorema de Frobenius.

Entonces $w = w^*$ y por el primer teorema de Frobenius, este autovector es positivo. Como w era una columna cualquiera de W, todas las columnas de W son iguales hasta un escalar y positivas. Pero como

$$W = \lim_{t\to\infty} \frac{M^t}{(\lambda^*)^t}$$

entonces existe un τ para el cual $M^\tau > 0$, demostrando así que M es primitiva.

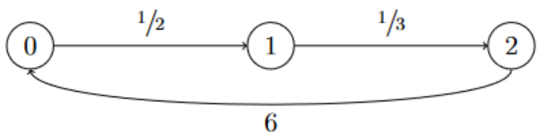
Este teorema sólo es válido para matrices irreducibles, por eso en la demostración pudimos usar el 1er teorema de Frobenius. Puede haber matrices reducibles tales que $\lim_{t\to\infty} \frac{M^t}{(\lambda^*)^t}$ exista. Un ejemplo de ello son las matrices estocásticas finitas (cadenas de Markov) con un estado absorbente. Allí se converge en el largo plazo a un vector con 1 en el estado absorbente y 0 en todos los demás estados. Nótese que este vector fijo no es positivo.

Es interesante estudiar un ejemplo de una matriz de Leslie que no sea primitiva para estimular la intuición. La siguiente matriz, que podría representar la evolución de una población de escarabajos (Leslie, 1945)

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ {}^{1}/_{2} & 0 & 0 \\ 0 & {}^{1}/_{3} & 0 \end{bmatrix}$$

no es primitiva. Esta matriz tiene la particularidad de que $G^2 = G^{-1}$, $G^3 = I$, $G^4 = G$, $G^5 = G^{-1}$, $G^6 = I$, …. De forma que la distribución de la población inicial se repite cada tres años, y por lo tanto no alcanza una población estable en el largo plazo.

Esta ciclicidad en la población cuando la matriz es irreducible pero no primitiva es una característica fundamental de estas matrices. La cantidad de períodos que pasan para que la población se repita se denomina el período de la matriz, que en caso de G es 3. Una forma de observar el período de una matriz es mediante su diagrama de nodos.



En el grafo de la matriz G se necesitan 3 períodos para, partiendo de 0, volver a 0: de 0 a 1 a través de$1/2$, de 1 a 2 a través de $1/3$, y de 2 a 0 a través de 6. Se necesitan 3 períodos para, partiendo de 1, volver a 1, y también se necesitan 3 períodos para, partiendo de 2 volver a 2. El período de una matriz se define como el máximo común divisor de estos bucles; como en este ejemplo son todos 3, el m.c.d es 3.

Una definición alternativa del período de una matriz es la cantidad de autovalores cuyo módulo es el máximo. Los autovalores de G son 1, $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Y el módulo de estos tres autovalores es 1, o sea que hay tres autovalores con módulo máximo, lo cual confirma que el período de la matriz es 3.

A pesar de que G no es primitiva, sí tiene un vector fijo, que es el vector asociado al autovalor unitario. Este autovector es:

$$\begin{bmatrix} {}^{3}/_{5} \\ {}^{3}/_{10} \\ {}^{1}/_{10} \end{bmatrix}$$

que representa una población de equilibrio porque si la población inicial está distribuida un 60% en el primer grupo de edad, un 30% en el segundo y un 10% en el tercero permanecerá allí para todos los períodos subsiguientes. Sin embargo, como ya vimos y demostramos, este equilibrio no es estable porque partiendo de cualquier otra distribución de población inicial no se llega a él, sino que la población oscila en el tiempo.

Pasemos ahora a la segunda pregunta que guía esta sección. Ya que probamos que el supuesto de primitividad es fundamental para que la población converja a una distribución estable en el largo plazo, ¿cuáles son las condiciones que debe cumplir la matriz de Leslie para que sea primitiva?

La respuesta es que una matriz de Leslie irreducible es primitiva si la tasa de fecundidad es estrictamente positiva para dos grupos de edad adyacentes.

Para demostrar esto vamos a usar una definición alternativa de matriz primitiva a partir del período de una matriz que ya definimos. Una matriz irreducible es primitiva si y solo si su período es uno[15]. Además, el período puede calcularse a partir de la ecuación característica. Si consideramos la ecuación discreta de Lotka ((**4-1**), multiplicamos por λ^{m+1} y reordenamos

$$\lambda^{m+1} + \sum_{i=0}^{m}\left(F_i\lambda^{m-i}\prod_{j=0}^{i-1}P_j\right) = 0$$

Esta es la ecuación característica de una matriz de Leslie de dimensión $m+1$. Entonces, el período de la matriz de Leslie es igual al máximo común divisor de las diferencias de los exponentes de λ, (ver demostración en la pág. 80 de Gantmacher, 2000) que en el caso de que $F_i > 0$ para todo i, todas las diferencias son 1, y el m.c.d también es 1.

$$\{m+1-m, m-(m-1), m-1-(m-2), \dots, 1-0\} = \{1,1,1,\dots,1\}$$

Esto es una demostración más formal de algo que ya habíamos comprobado heurísticamente: si todas las $F_i > 0$ entonces la matriz de Leslie es primitiva.

Con estas nuevas definiciones y teoremas es fácil ver que si la $F_i > 0$ para dos grupos de edad adyacentes entonces el período es 1, y la matriz es primitiva. Supongamos que existe un índice i tal que $F_i > 0$ y $F_{i+1} > 0$, y un entero d que es divisor a i y a $i+1$ al mismo tiempo. Si d es divisor de i entonces $\frac{i}{d}$ es un entero, pero si es así entonces $\frac{i}{d} + \frac{1}{d}$ nunca podría ser un entero salvo que $d = 1$. Así demostramos que una condición suficiente para que la matriz de Leslie sea primitiva es que las tasas de fecundidad sean positivas para dos grupos de edad adyacentes. La virtud de esta condición es que ocurre en casi todas las poblaciones humanas.

Esta condición se puede relajar aún más. Es necesario y suficiente para que una matriz de Leslie irreducible sea primitiva con que el m.c.d de los subíndices de las $F_i > 0$ sea uno (ver demostración en el teorema 6 de Sykes, 1969).

Antes de pasar a la siguiente sección con la aplicación a la población completa de Argentina, se realiza un ejemplo simple para terminar de fijar los conceptos de este apartado.

Ejemplo 1

Consideremos la siguiente matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

[15] Esta otra definición sugiere que las matrices primitivas son matrices irreducibles que no presentan un comportamiento cíclico, es decir, son aperiódicas.

Esta matriz es una matriz de Leslie porque, salvo la primera fila y la subidagonal, todos los elementos son cero. Esta matriz es irreducible porque $F_2 = \frac{1}{2} > 0$, y es primitiva porque F_1 y F_2, que son las tasas de fecundidad de dos grupos de edad adyacentes, son positivas. Con esto y por el teorema que demostramos, podemos afirmar que la población representada por esta matriz de Leslie convergerá a una distribución estable. Para calcular su tasa de crecimiento hallamos los autovalores. La ecuación característica de esta matriz es

$$-\lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{8} = 0$$

Ensayamos como raíz $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, que verifica la ecuación. Luego de aplicar Ruffini obtenemos la siguiente ecuación

$$-\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4} = 0$$

Que luego de aplicar la fórmula resolvente arroja las otras dos raíces:

$$\lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\lambda_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$$

El autovalor dominante es λ_2. Su existencia ya estaba asegurada por el teorema de Perrón y porque la matriz de Leslie de este ejemplo es primitiva. En este caso el autovalor dominante es menor a 1, lo que indica que la población decrecerá aproximadamente $\lambda_2 - 1 \cong 19\%$ cada período, y se extinguirá en el largo plazo. Además, el autovalor dominante es el único autovalor positivo, como afirmaba el teorema de los signos de Descartes. El autovector asociado es

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{8} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0{,}655 \\ 0{,}405 \\ 0{,}25 \end{bmatrix}$$

Que lo vamos a normalizar para que nos de la distribución de la población en cada grupo de edad (la pirámide poblacional):

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}31 \\ 0{,}19 \end{bmatrix}$$

4.2 Estimación de la población estable de Argentina

Con la finalidad de ilustrar los resultados matemáticos de la sección anterior, en esta sección se estima la población estable de Argentina a partir de las tasas de fecundidad (INDEC, 2013a) y las tablas de mortalidad 2008-10 (INDEC, 2013b), que son los últimos datos disponibles. Como las tasas de fecundidad son todas positivas para las edades reproductivas de 15 a 49 años, la población convergerá a una distribución estable en el largo plazo, independiente de la población inicial, si se mantienen constantes las tasas de fecundidad y mortalidad. En este ejercicio vamos a considerar una matriz de Leslie para todos los grupos de edad (no solo de las edades reproductivas) y que contemple la población de varones también. De esta forma el resultado del ejercicio será la pirámide poblacional completa para cada sexo. La matriz de Leslie tendrá la siguiente estructura:

$$\begin{bmatrix}
0 & \cdots & F^M_{15-19} & \cdots & F^M_{45-49} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
{}_5P^M_{5-9} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & {}_5P^M_{20-24} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & {}_5P^M_{50-54} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & {}_5P^M_{55-59} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & {}_5P^M_{90-94} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \cdots & F^V_{15-19} & \cdots & F^V_{45-49} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & {}_5P^V_{5-9} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & {}_5P^V_{10-14} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & {}_5P^V_{50-54} & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & {}_5P^V_{90-94} & 0
\end{bmatrix}$$

donde los supraíndices M y V indican la subpoblación de mujeres y de varones, respectivamente.

Esta es una matriz de dimensión 40×40, en donde los grupos de edad considerados son quinquenales, es decir, 0-4, 5-9, …, 95-99. Si la expresamos con submatrices quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix}
F^M_{1\times20} & 0^M_{1\times20} \\
P^M_{19\times20} & 0^M_{19\times20} \\
F^V_{1\times20} & 0^M_{1\times20} \\
0^M_{19\times20} & P^V_{19\times20}
\end{bmatrix}$$

donde la submatriz F contiene las tasas de fecundidad, la submatriz P contiene las relaciones de supervivencia, y la submatriz nula es 0. Los subíndices indican la dimensión de cada submatriz.

Las relaciones de supervivencia se calcularon a partir de las tablas de mortalidad de varones y mujeres (INDEC, 2013b) haciendo:

$${}_5P_{x-x+4} = \frac{{}_5L_x}{{}_5L_{x-5}}$$

Las tasas de fecundidad de la primera fila se calcularon a partir de las tasas específicas de fecundidad publicadas en INDEC (2013a), y se las desagregó por sexo con el índice de masculinidad del grupo de edad 0 a 4 del Censo 2010. Además, a estas tasas de fecundidad se las multiplicó por la relación de supervivencia de los nacimientos ${}_5P_b$ de las tablas de mortalidad.

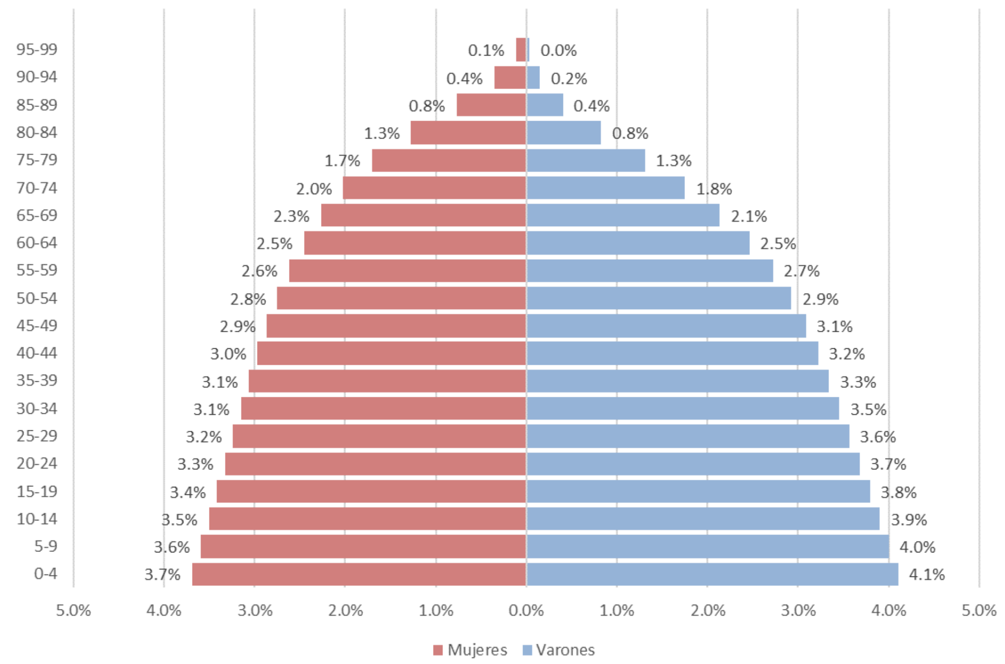
Una vez construida la matriz de Leslie podemos calcular la distribución estable y su tasa de crecimiento calculando su autovalor dominante y su autovector asociado. Estos cálculos se realizaron en R. El autovalor dominante es $\lambda^* = 1.024381$, que refleja la tasa de crecimiento quinquenal de la población, es decir, la población crece al 2,43% cada cinco años. Si calculamos la tasa de crecimiento continua equivalente, que es la más usada en Demografía:

$$r = \frac{\ln(\lambda^*)}{5} = 0{,}48\%$$

Esta es la tasa de crecimiento anual intrínseca[16] y muestra que la población crecerá al 0,48% por año en el largo plazo.

La distribución estable se muestra en el Gráfico 1, y la población censada corregida del 2010 (INDEC, 2013a) en el Gráfico 2.

Gráfico 1: Pirámide de la población estable de Argentina.

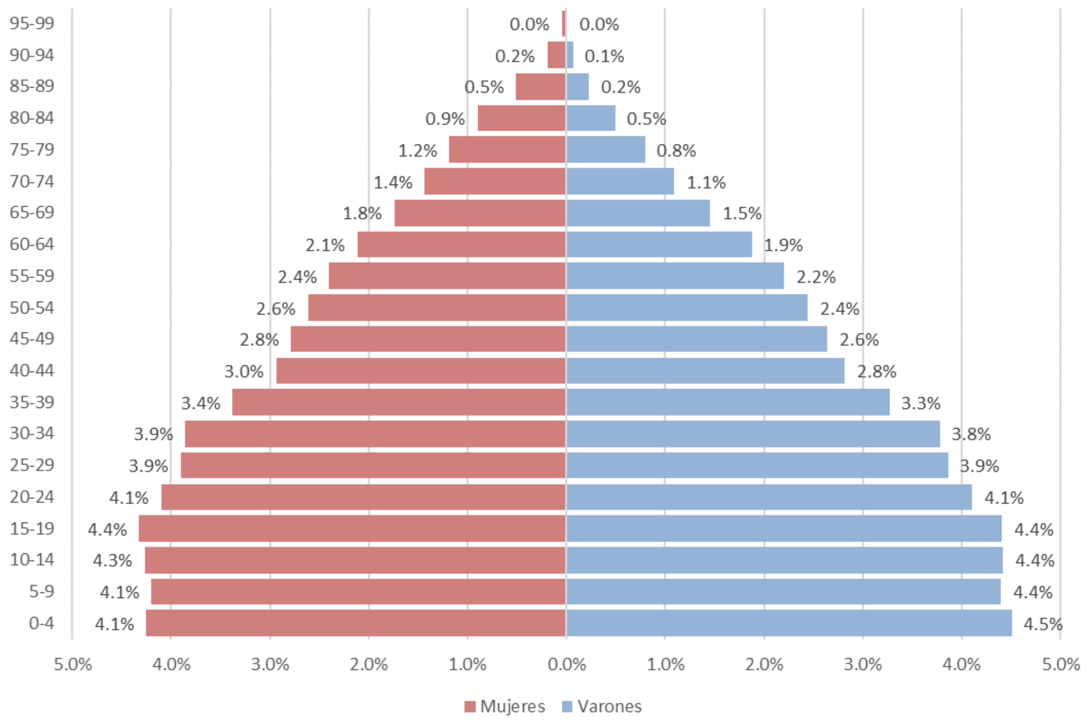


Fuente: Elaboración propia en base a las estimaciones del autor.

De acuerdo con lo esperado, la pirámide de la población estable muestra una participación decreciente de los grupos de edad más avanzados, con una mayor participación de varones en los grupos de edad más jóvenes por el índice de masculinidad, que es mayor a 100, pero luego las mujeres superan a los varones en la distribución porcentual por la sobremortalidad masculina en la adultez.

[16] Se llama así porque es la tasa intrínseca a los patrones de mortalidad y fecundidad imperantes, pero no es la tasa a la que va a crecer la población argentina en la realidad, ya que ésta depende también de las tasas de mortalidad y fecundidad pasadas y futuras.

Gráfico 2: Pirámide de la población de Argentina en 2010.



Fuente: Elaboración propia en base a INDEC (2013a).

Se puede interpretar a la pirámide del Gráfico 1 como el resultado de dejar actuar durante un tiempo lo suficientemente largo las tasas de mortalidad y fecundidad sobre la población del Gráfico 2. Como resultado se obtiene una pirámide más lisa, sin historia. Por el contrario, la pirámide del Gráfico 2 tiene grupos de edad con una participación más alta que grupos adyacentes, como los de 10-14 y 15-19 en las mujeres, o con igual participación, por ejemplo hay tantos varones con 5-9 años que varones con 10-14. Esto solo puede ocurrir por cambios en las tasas de fecundidad, mortalidad o migraciones.

Es importante remarcar que se hubiese llegado a la misma pirámide del Gráfico 1 si se partía de cualquier población, ya sea la del Gráfico 2 o cualquier otra, porque la distribución estable depende solamente de la fecundidad y la mortalidad por el teorema de ergodicidad fuerte.

Un ejercicio interesante que se puede hacer es cambiar alguna de las tasas de fecundidad o mortalidad en una determinada proporción o replicar la de otro país para evaluar como sería la población estable bajo este nuevo patrón de fecundidad y mortalidad. Este experimento sería análogo al de estática comparativa que se usa frecuentemente en economía, y el teorema de ergodicidad fuerte cumple un rol similar al principio de correspondencia de Samuelson.

Referencias

Bernardello, A., Bianco, M. J., Casparri, M. T., García Fronti, J. & Olivera de Marzana, S. (2004). *Matemática para Economistas con Excel y Matlab*. Omicron System

Cohen, J. E. (1979). Ergodic theorems in demography. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 1*(2), 275-295.

Gantmacher, F. (2000). *The Theory of Matrices. Volume Two.* American Mathematical Society.

Grinstead, C. M. & Snell, J. L. (2012). *Introduction to Probability*. Providence, RI: American Mathematical Society.

INDEC (2013a). *Estimaciones y proyecciones de población 2010-2040: Total del país* (1a ed.) [Serie Análisis Demográfico n°35].

INDEC. (2013b). *Tablas abreviadas de mortalidad por sexo y edad 2008-2010: total del país y provincias* (1a ed.) [Serie Análisis Demográfico n°37].

Keyfitz, N. & Caswell, H. (2006). *Applied Mathematical Demography*. Springer New York.

Leslie, P. H. (1945). On The Use of Matrices in Certain Population Mathematics. *Biometrika, 33*(3), 183-212.

Lotka, A. J. (1977). The Stability of the Normal Age Distribution. En *Mathematical Demography: Selected Papers* (pp. 101-107). Berlin, Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg.

Nikaido, H. (1968). *Convex Structures and Economic Theory*. Emerald Group Publishing Limited.

Steen, L. A. (1973). Highlights in the History of Spectral Theory. *The American Mathematical Monthly*, 80(4), 359–381.

Sykes, Z. M. (1969). On Discrete Stable Population Theory. *Biometrics*, *25*(2), 285-293.

5
Dinámica temporal continua. Ecuaciones y estabilidad.

Pablo Matías Herrera

Introducción

En matemática para economistas se utilizan diferentes conceptos y técnicas matemáticas para la representación de fenómenos económicos. En la representación de estos fenómenos se pueden distinguir diferentes etapas. La primera de ellas está asociada con el planteo del modelo. En esta etapa se identifican cuáles son las variables que se determinan dentro (endógenas) y cuáles vienen dadas para el modelo en cuestión (exógenas o parámetros). También se determinan qué tipos de ecuaciones se utilizarán para representar los diferentes fenómenos y cómo estas ecuaciones se relacionan entre sí. Una vez planteado el modelo, se procede a su resolución mediante el conocimiento de técnicas matemáticas. Generalmente la resolución del modelo está asociada con la resolución del sistema de ecuaciones que se utilizó para el planteo del modelo. Finalmente, una vez resulto el modelo, se procede al análisis del fenómeno a través del análisis del resultado.

En este sentido, el conocimiento de diferentes conceptos y técnicas matemáticas permite la representación de diferentes fenómenos económicos mediante modelos matemáticos. En particular, las ecuaciones funcionales son utilizadas en matemática para economistas para la representación de fenómenos económicos que presentan una dinámica temporal. La representación de la dinámica temporal se puede realizar considerando la variación del tiempo en forma continua o en forma discreta y para ello es necesaria la comprensión de ecuaciones diferenciales y de ecuaciones en diferencia respectivamente. La comprensión de estos elementos matemáticos permitirá plantear modelos que capten fenómenos dinámicos, su resolución y su posterior análisis.

En el presente capítulo se expondrán diferentes resultados matemáticos asociados a una dinámica temporal continua. En una primera parte, partiendo de una definición genérica de ecuaciones diferenciales, se presentarán resultados asociados a las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. En una segunda parte se realiza una introducción al concepto de estabilidad. En una tercera parte se representa el fenómeno económico de mercado mediante un modelo matemático con una dinámica temporal continua y se utiliza lo desarrollado en los primeros apartados para su resolución y posterior análisis.

Para el proceso expositivo de este capítulo se siguen los procesamientos didácticos de dos referencias. Las primeras dos partes se desarrollaron siguiendo el proceso didáctico propuesto en Bernardello et al (2009). Para el desarrollo de la tercera parte se sigue la propuesta de un ejercicio de Chiang & Wainwright (2005) que es resuelto y analizado a partir del desarrollo del presenta capítulo.

5.1 Ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales son ecuaciones funcionales. Una ecuación funcional es una ecuación cuya incógnita es una función. Resolver una ecuación funcional significa encontrar una función incógnita que satisfaga la ecuación funcional idénticamente, es decir, para cualquier valor admisible de la variable independiente que aparece en la función. En este capítulo se abordará el caso en el que la variable de la que depende la función se toma como variable continua.

Se denomina ecuación diferencial de orden n a una relación de la forma $f(t, y(t), \dots, y(t)^n) = 0$, siempre que $y(t)$ y $y(t)^n$ no sean idénticamente nulos. $y(t)$ es la función incógnita y $y(t)^n$ es la derivada parcial de y con respecto a t, n veces. Para simplificar, $y(t) = y \wedge y(t)^n = y^n$. Si de la forma se puede despejar y^n se obtiene la forma llamada normal: $y^n = g(t, y, \dots, y^{n-1})$. Cuando interviene una sola variable independiente, se dice que la ecuación diferencial es ordinaria. Si intervienen dos o más variables independientes se trata de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. El orden de una ecuación diferencial está dado por la derivada de mayor orden. Si la ecuación diferencial ordinaria puede expresarse como un polinomio en las derivadas, su grado está dado por el mayor exponente de la derivada de mayor orden.

Las ecuaciones diferenciales que pueden expresarse de la forma: $\sum_{i=0}^{n} f_i(t) y^{n-i} = g(t)$ se clasifican como lineales. Si $g(t) = 0$ se denomina ecuación lineal homogénea. Si $g(t) \neq 0$ se denomina ecuación lineal completa. La solución de cada una de estas ecuaciones (encontrar la o las funciones incógnitas que satisfagan la ecuación de manera idéntica, es decir, para cualquier valor de la variable) se denominan homogénea y completa respectivamente. El conjunto de todas las soluciones posibles recibe el nombre de solución general de la ecuación.

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales presentan propiedades que permiten su análisis. Estas propiedades se presentan a continuación:

Propiedad 1: Si y_1 e y_2 son dos soluciones cualesquiera de una ecuación en diferencias lineal homogénea de orden n, entonces $y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2$ también es una solución homogénea, siendo c_1 y c_2 constantes arbitrarias (números reales o complejos).

$$y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2$$
$$y_3^1 = c_1 y_1^1 + c_2 y_2^1$$

Demostración:

$$\sum_{i=0}^{n} f_i(t)\,[c_1 y_1^{n-i} + c_2 y_2^{n-i}] = c_1 \sum_{i=0}^{n} f_i(t)\, y_1^{n-i} + c_2 \sum_{i=0}^{n} f_i(t)\, y_2^{n-i} = 0$$

Dado que $\sum_{i=0}^{n} f_i(t)\, y_1^{n-i} = 0$ y que $\sum_{i=0}^{n} f_i(t)\, y_2^{n-i} = 0$ se demuestra que $\sum_{i=0}^{n} f_i(t)\, y_3^{n-i} = 0$. Por lo tanto, cualquier combinación lineal finita de soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea es una solución homogénea.

Un conjunto de n funciones $\{y_1 \ldots y_n\}$ es linealmente dependiente si existen n constantes $c_1 \ldots c_n$ no todas nulas tales que la combinación lineal $c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n \equiv 0$. Si la identidad se verifica para $c_1 = \cdots = c_n = 0$, entonces el conjunto es linealmente independiente.

Como la identidad es válida para todo t, se puede escribir:

$$\begin{cases} c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n \equiv 0 \\ \ldots \\ c_1 y_1^{n-1} + \cdots + c_n y_n^{n-1} \equiv 0 \end{cases}$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \ldots \\ c_n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si el determinante de la matriz de coeficientes[17] es distinto de cero, entonces el sistema es compatible determinado y la única solución del sistema corresponde a la solución trivial (al vector nulo). Entonces el conjunto de soluciones $\{y_1 \ldots y_n\}$ es linealmente independiente. Si, por el contrario, el determinante de la matriz de coeficientes es cero, entonces el sistema es compatible indeterminado y existen soluciones diferentes de la trivial. Entonces el conjunto de soluciones $\{y_1 \ldots y_n\}$ es linealmente dependiente ya que la identidad $c_1y_1 + \cdots + c_ny_n \equiv 0$ se cumple para algún valor de $c_i \neq 0$ $(i\colon 1, \ldots, n)$.

Por propiedad 1 cualquier combinación lineal finita de soluciones de la ecuación homogénea es también una solución homogénea, de modo que el conjunto de todas las soluciones posibles es un espacio vectorial. Cualquier base de dicho espacio debe ser un conjunto de soluciones linealmente independientes que lo generen; ese conjunto recibe el nombre de sistema fundamental de soluciones y la expresión que representa el conjunto solución se denomina solución general. En este caso en particular se hará referencia a la solución general de la ecuación homogénea y estará expresada por:

$$y_h = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$$

Propiedad 2: Si y_h es solución de la ecuación homogénea y y_c es solución de la completa, entonces $y = y_h + y_c$ es solución de la completa.

Demostración:

$$\sum_{i=0}^{n} f_i(t)\left[y_h^{n-i} + y_c^{n-i}\right] = \sum_{i=0}^{n} f_i(t)\, y_h^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} f_i(t)\, y_c^{n-i} = g(t)$$

Dado que $\sum_{i=0}^{n} f_i(t)\, y_h^{n-i} = 0$ y que $\sum_{i=0}^{n} f_i(t)\, y_c^{n-i} = g(t)$ se demuestra que $\sum_{i=0}^{n} f_i(t)\, y^{n-i} = g(t)$. Por lo tanto y es solución de la ecuación en diferencias completa y, en caso de que la solución homogénea sea la solución general, y se denominará y_g y será la solución general de la ecuación diferencial completa.

Una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes se presenta cuando $f(t)$ pasa a estar representado por un parámetro:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{n-i} = g(t)$$

La solución general homogénea de la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, $\sum_{i=0}^{n} a_i y^{n-i} = 0$, viene dada por $y_h = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ si las y_i son soluciones linealmente independientes.

Para determinar las funciones y_i, se realiza un ensayo de solución homogénea dado por: $y = e^{rt}$.

Aplicando las sucesivas derivadas de la función se puede deducir que:

[17] El determinante del sistema homogéneo se denomina wronskiano.

$$y' = re^{rt}$$
$$\dots$$
$$y^{n-i} = r^{n-i}e^{rt}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes: $\sum_{i=0}^{n} a_i r^{n-i} e^{rt} = 0$. Como $e^{rt} \neq 0$, para que se cumpla la igualdad, se tiene que cumplir que $\sum_{i=0}^{n} a_i r^{n-i} = 0$. A esta última expresión se la denomina ecuación característica de la ecuación diferencial. Las soluciones de la ecuación característica vienen dadas por las n raíces (r_i) del polinomio característico $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i r^{n-i}\right)$.

El conjunto de soluciones de la ecuación diferencial que en forma genérica estaba dado por $\{y_1 \dots y_n\}$, ahora se encontrará dado por $\{e^{r_1 t} \dots e^{r_n t}\}$. Para poder conformar la solución homogénea general de la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, hay que analizar la independencia lineal de las soluciones teniendo en cuenta las posibilidades en cuanto al conjunto de raíces características. Estas pueden ser reales y distintas, reales múltiples y complejas conjugadas.

En el caso de que las raíces sean reales y distintas, la solución general de la ecuación diferencial homogénea queda expresada cómo:

$$y_h = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{r_i t}$$

En el caso de que las raíces reales presenten un orden de multiplicidad (se repitan), hay que encontrar tantas soluciones linealmente independientes como orden de multiplicidad multiplicando por la variable independiente representada por t. Tomando por ejemplo el caso de orden de multiplicidad m $(r_1 = \dots = r_m)$ la solución homogénea general correspondiente será (para los términos repetidos):

$$y_h = \sum_{i=1}^{m} c_i e^{r_i t} t^{m-i}$$

En el caso de que las raíces sean complejas conjugadas, las dos soluciones se pueden expresar como la multiplicación de una función real y una función compleja. Haciendo una transformación que conecta los números complejos con funciones del tipo trigonométricas, la solución general homogénea para el par de raíces complejas conjugadas queda expresado en su forma polar por:

$$y_h = e^{\alpha t}[c_1 \cos(\beta t) + c_2 sen(\beta t)]$$

Si las raíces complejas conjugadas son múltiples, el proceso de independencia es similar al que se aplica en el caso de raíces reales múltiples.

Una vez obtenida la solución general de la ecuación diferencial homogénea, hay que hallar la solución de la ecuación diferencial completa. En el caso de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, es posible utilizar el método de los coeficientes indeterminados. El método consiste en replicar el segundo miembro de la ecuación diferencial a partir del ensayo de una función genérica del tipo que presenta $g(t)$. A partir de ese ensayo de solución se calculan los coeficientes de la función ensayada en base a la réplica de la ecuación diferencial. El cálculo de esos coeficientes y la correspondiente especificidad de la función ensayada sobre la forma de $g(t)$, conforman la solución completa. Hay que aclarar que el método no es aplicable a toda $g(t)$, sino sólo para aquellas funciones del mismo tipo que pueden aparecer en la solución homogénea de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, es decir: exponenciales, polinómicas, trigonométricas, sumas y/o productos de todas ellas.

La solución general, a partir de lo analizado en las propiedades de ecuaciones diferenciales lineales, surge de la sumatoria entre la solución homogénea general y la solución completa. La solución particular de una ecuación diferencial consiste en el cálculo de las constantes arbitrarias que se incluyen en cada uno de los términos de la solución homogénea y se calcula a partir de las condiciones iniciales de la ecuación.

En el próximo apartado se presentan el concepto de estabilidad asociado a una ecuación diferencial. En una primera instancia se asocia el concepto de estabilidad con el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial. Seguidamente, para el caso de una ecuación diferencial con coeficientes constantes de primer orden, se asocia la solución completa con la solución de equilibrio. Finalmente, teniendo en cuenta el caso de raíces reales y distintas, se deducen las condiciones de estabilidad a partir del valor de las raíces de la ecuación característica y se mencionan diferentes condiciones que permiten el análisis de la estabilidad sin necesidad de conocer el valor de las raíces.

5.2 Estabilidad

La estabilidad es un concepto que permite caracterizar a la solución de una ecuación diferencial. Este concepto se analiza a partir del comportamiento de esa solución. Se dice que la solución de la ecuación diferencial es estable si la solución homogénea tiende a cero a medida que la variable independiente tiende a infinito. Si se cumple esta condición, por lo visto en el primer apartado, la solución general tiende a la solución completa.

La solución completa, en el caso de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, coincide con la solución de equilibrio. Para realizar esta asociación es necesario recordar que el equilibrio en un modelo económico estático se asociaba con una condición estática. En los modelos dinámicos existen trayectorias de equilibrio. Tomando como referencia la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes de primer orden, $y' = yA + B$, la estática viene dada por la no variabilidad de la función en el tiempo. En una ecuación de primer orden, esta condición se puede expresar como es: $y' = 0$. Si se cumple esa condición, entonces la función estará en su valor de equilibrio. En términos matemáticos, si $y' = 0 \Rightarrow y = y^*$. En el caso de la ecuación diferencial planteada $y^* = \frac{B}{A}$.

El valor de equilibrio es coincidente con la solución completa de la misma ecuación diferencial. En este sentido, cuando la solución de una ecuación o de un sistema de ecuaciones diferenciales es estable, la solución tiende (converge) al equilibrio.

Como involucra al comportamiento de las soluciones, el análisis de la estabilidad para una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes se puede realizar a partir del análisis de las raíces de su ecuación característica. En términos matemáticos, para el caso de raíces reales y distintas, la condición de estabilidad se puede deducir de la siguiente manera: dada la solución homogénea $y^h = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{r_i t}$, si se saca factor común la solución asociada a la mayor raíz (se supone que es r_1) se obtiene $y^h = e^{r_1 t`}\left[c_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i e^{(r_i - r_1)t}\right]$. Como todos los exponentes de las soluciones dentro de la sumatoria son negativos, si se aplica el limite a la solución homogénea, se tiene que $\lim_{t\to\infty} c_1\, e^{r_1 t}$.

De esta expresión se deduce que para que la solución homogénea tienda a cero a medida que el tiempo tiende a infinito (que la solución sea estable) es necesario y suficiente que la mayor de las raíces (y consecuentemente todas las demás raíces) sea negativa.

También, existen determinadas condiciones que permiten analizar la estabilidad de la solución de la ecuación diferencial sin necesidad de hallar las raíces, sólo considerando los coeficientes de la ecuación característica. Estas condiciones permiten analizar la estabilidad de ecuaciones lineales con coeficientes constantes de orden n. Si la ecuación característica es $\sum_{i=0}^{n} a_i r^{n-i} = 0$, la condición necesaria es que todos los coeficientes sean positivos (o todos negativos) y la condición necesaria y suficiente, si en la ecuación característica $a_0 > 0$, es que todos los menores principales dominantes de una matriz, denominada la Matriz de Routh-Hurwitz, sean positivos.

En el próximo apartado, se representa el fenómeno económico de mercado mediante un modelo matemático con una dinámica temporal continua y se utiliza lo desarrollado en los primeros apartados para su resolución y posterior análisis. En la representación de este fenómeno se distinguirán tres etapas. La primera está asociada con el planteo del modelo matemático, la segunda con su resolución y la tercera con el análisis.

5.3 Mercado dinámico continuo. Planteo, resolución y análisis de estabilidad.

En este apartado, se representa el fenómeno económico de mercado mediante un modelo matemático con una dinámica temporal continua. En la representación de este fenómeno se distinguirán tres etapas. La primera está asociada con el planteo del modelo matemático. En esta etapa se definirán las variables y las ecuaciones que conforman el modelo. La segunda etapa está relacionada con la resolución del modelo. En esta etapa, a partir de lo desarrollado en el primer apartado de este capítulo, se resolverá el modelo y se presentarán las diferentes soluciones. La tercera etapa está relacionada con el análisis de estabilidad. En esta etapa, a partir de los desarrollado en el apartado dos de este capítulo, se analizará el comportamiento de las soluciones halladas.

5.3.1 Planteo del modelo: variables funcionales y ecuaciones diferenciales

En los modelos en los cuales se representa el fenómeno de un mercado, las variables endógenas están conformadas por los precios y las cantidades. Las variables exógenas y los parámetros dentro de este modelo suelen estar representadas por diferentes variables económicas como el ingreso y las elasticidades. En lo que respecta a las ecuaciones, en el modelo de mercado se presenta una ecuación condicional y dos ecuaciones de comportamiento. En este caso en particular, dónde el fenómeno que se representa mediante el modelo de mercado presenta una dinámica temporal continua, las variables endógenas serán variables funcionales y la ecuación condicional representará la dinámica de ajuste del modelo.

El modelo matemático que representa el fenómeno de mercado dinámico, es el siguiente:

$$\begin{cases} p' = Q^d - Q^s \; [Ecuación\ condicional] \\ Q^d = \alpha - \beta p \; [Ecuación\ de\ comportamiento] \\ Q^s = -\delta + \gamma p [Ecuación\ de\ comportamiento] \end{cases}$$

En el modelo se considera que tanto $p(t)$ como $Q(t)$ son variables funcionales que dependen del tiempo. Consecuentemente p' indica la variación de los precios en el tiempo. A su vez, se considera que las ecuaciones de comportamiento que conforman el modelo, explican el comportamiento de las cantidades demandadas y ofrecidas y se caracterizan por ser lineales.

Las variables exógenas y los parámetros del modelo (representados por letras griegas) son todos positivos. Reemplazando las ecuaciones de comportamiento en la dinámica de ajuste del modelo, se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$p' + p(\beta + \gamma) = \alpha + \delta$$

Al ser una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, a continuación, se utiliza el desarrollo del primer apartado de este capítulo para el hallazgo de las diferentes soluciones asociadas.

5.3.2 Resolución del modelo: soluciones de la ecuación diferencial

La resolución de una ecuación diferencial, de acuerdo a lo desarrollado en el primer apartado de este capítulo, implica hallar las diferentes soluciones asociadas. Estas soluciones refieren a la solución homogénea, la solución completa, la solución general y la solución particular. En este caso en particular, la ecuación diferencial está representada por una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes de primer orden.

Para comenzar con la resolución de una ecuación diferencial lineal, hay que hallar la solución asociada a la ecuación homogénea que viene dada por: $p' + p(\beta + \gamma) = 0$. A partir de la ensayar la solución e^{rt} y ensayar las sucesivas derivadas, se puede plantear la ecuación característica que viene dada por $r + (\beta + \gamma) = 0$. En este caso, al ser una ecuación diferencial lineal de primer orden, es fácil notar que la raíz característica viene dada por $r = -(\beta + \gamma)$. Una vez hallada la raíz, se puede expresar la solución homogénea.

Solución homogénea: $p_h = C_1 e^{-(\beta+\gamma)t}$

Seguidamente hay que hallar la solución asociada a la ecuación diferencial completa que viene dada por: $p' + p(\beta + \gamma) = \alpha + \delta$. Utilizando el método de los coeficientes indeterminados, se plantea un ensayo de solución completa que viene dado por una constante (un polinomio de grado cero). En esta caso en particular, el ensayo de solución viene dado por: $p_c = K$. Si $p_c' = 0 \wedge (\alpha + \delta)p_c = (\alpha + \delta)K$ se reemplazan en la ecuación completa, se obtiene que $(\alpha + \delta)K = (\beta + \gamma)$. Despejando el valor de K, se llega a la solución completa.

Solución completa: $p_t^c = K = \frac{(\alpha+\delta)}{(\beta+\gamma)}$

Para hallar la solución general, se deben sumar la solución homogénea con la solución completa.

Solución general: $p_g = C_1 e^{-(\beta+\gamma)t} + \frac{(\alpha+\delta)}{(\beta+\gamma)}$

Como lo aclara su nombre, la solución general es un resultado genérico. Su generalidad se asocia a la indeterminación del coeficiente C_1. Si este coeficiente se determina, se halla la solución particular. Para esto es necesario de partir de un supuesto sobre el valor de la variable funcional a determinar en un momento determinado del tiempo. Este supuesto, generalmente, está dado por una condición inicial. Si se supone que la siguiente manera la función p valuada en $t = 0$ vale p_0, la condición inicial viene dada por: $p(0) = p_0$. A partir de la condición inicial, se puede hallar el valor de la constante arbitraria C_1 para este supuesto particular. Valuando la solución general en $t = 0$, se tiene que:

$$p_g(0) = C_1 e^{-(\beta+\gamma)0} + \frac{(\alpha + \delta)}{(\beta + \gamma)}$$

Teniendo en cuenta que la función p valuada en $t = 0$ toma el valor p_0 (condición inicial) y que $e^0 = 1$, se obtiene la siguiente expresión para la constante arbitraria:

$$p_0 = C_1 + \frac{(\alpha + \delta)}{(\beta + \gamma)} \Rightarrow C_1 = p_0 - \frac{(\alpha + \delta)}{(\beta + \gamma)}$$

Reemplazando este resultado en la solución general, se obtiene la solución particular.

Solución particular: $y_t^p = \left[p_0 - \frac{(\alpha+\delta)}{(\beta+\gamma)}\right] e^{-(\beta+\gamma)0} + \frac{(\alpha+\delta)}{(\beta+\gamma)}$

A partir de esta expresión, a continuación, se realiza el análisis de estabilidad de la ecuación diferencial lineal que representa la variación de los precios de mercado.

5.3.3 Análisis de la solución: estabilidad

A partir del análisis de la solución particular, se analizará la estabilidad de la ecuación diferencial haciendo referencia a la trayectoria de equilibrio. Para este análisis se utilizará lo desarrollado en el segundo apartado de este capítulo.

Se mencionó que la solución de la ecuación diferencial es estable si la solución homogénea converge a cero a medida que la variable independiente tiende a infinito. La condición necesaria y suficiente para que se produzca esta convergencia es que la raíz, en este caso representada por $-(\beta + \gamma)$, sea menor a cero. De cumplirse esta condición, la solución general converge a la solución completa a medida que el tiempo tiende a infinito. En este caso, con el solo supuesto de los parámetros son mayores a cero, se puede caracterización a la trayectoria de la solución como estable. Es importante notar que la estabilidad depende de los supuestos realizados sobre los parámetros.

Ahora bien, se aclaró también que la solución completa se asocia con el valor de equilibrio. Para realizar esta asociación es necesario recordar que el equilibrio en un modelo económico estático se asociaba con una condición estática. En los modelos dinámicos existen trayectorias de equilibrio. Tomando como referencia la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes de primer orden, $p' + p(\beta + \gamma) = \alpha + \delta$, la estática viene dada por la no variabilidad de la función ante variaciones de la variable independiente. Para una ecuación de primer orden, esto es: $p' = 0$. Si se cumple esa condición, entonces la función estará en su valor de equilibrio. En términos matemáticos, si $p' = 0 \Rightarrow p = p^*$. Para hallar el valor de equilibrio entonces se reemplaza esta condición en la ecuación:

$$(\beta + \gamma)p^* = (\alpha + \delta) \Rightarrow p^* = \frac{(\alpha + \delta)}{(\beta + \gamma)}$$

En este sentido, la solución completa es la solución de equilibrio.

Retomando el análisis de la solución particular se pueden identificar dos términos. El primer término involucra la solución homogénea, con un valor particular de la constante arbitraria. Este primer término está compuesto principalmente por dos componentes. El primero, corresponde a constante arbitraria (C_1) expresado en términos de una condición inicial (p_0).

$$C_1 = p_0 - \frac{(\alpha + \delta)}{(\beta + \gamma)}$$

Este componente representa la diferencia entre el valor inicial y el valor de equilibrio de la función incógnita de la ecuación diferencial. Al estar este componente multiplicado por la solución $e^{-(\beta+\gamma)t}$, la diferencia entre el valor inicial y el valor de equilibrio, a medida que transcurra el tiempo, va a representar una menor ponderación sobre la solución particular solo en el caso de que la raíz característica sea menor a cero. En el caso de que la raíz sea mayor a cero, la ponderación de la diferencia entre el valor inicial y el valor de equilibrio se va a ver magnificada a medida que transcurra el tiempo.

En este caso, teniendo en cuanta el supuesto sobre los parámetros positivos, la raíz es negativa. Consecuentemente, a medida que el tiempo transcurra, la ponderación del primer término será cada vez menor y la trayectoria convergerá al valor de equilibrio, valor representado en el segundo término de la solución.

Es importante tener en cuenta que se ha resuelto y analizado la trayectoria de una de las dos variables endógenas que conforman el modelo. Para un análisis completo, es necesario hallar adicionalmente las soluciones asociadas a las variables funcionales que representa a las cantidades. Esta operación se puede realizar reemplazando la solución general de los precios en el sistema para hallar la solución general de las cantidades. El análisis de la estabilidad, se puede realizar siguiendo la misma lógica planteada en este apartado.

Conclusión

Las ecuaciones funcionales son utilizadas en matemática para economistas para la representación de fenómenos económicos que presentan una dinámica temporal. La representación de la dinámica temporal se puede realizar considerando la variación del tiempo en forma continua o en forma discreta y para ello es necesaria la comprensión de ecuaciones diferenciales y de ecuaciones en diferencia respectivamente. La comprensión de estos elementos matemáticos permitirá plantear modelos que capten fenómenos dinámicos, su resolución y su posterior análisis.

En el presente capítulo se expusieron diferentes resultados matemáticos asociados a una dinámica temporal continua. En una primera parte, partiendo de una definición genérica de ecuaciones diferenciales, se presentaron diferentes resultados asociados a las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. En una segunda parte se realizó una introducción al concepto de estabilidad. En una tercera parte se representó mediante un modelo matemático un fenómeno económico con una dinámica temporal continua y se utilizó lo desarrollado en los primeros apartados para su resolución y posterior análisis.

El fenómeno económico representado fue la dinámica de ajuste de un mercado. Para la representación de este fenómeno se distinguieron tres etapas. En la primera, asociada con el planteo del modelo matemático, se identificaron las variables y las ecuaciones que compondrían al modelo matemático. En la segunda, utilizando lo desarrollado en la primera parte del capítulo, se hallaron las diferentes soluciones asociadas a la ecuación diferencial que representa la dinámica de los precios. En la tercera, utilizado lo desarrollado en la segunda parte de este capítulo, se analizó la estabilidad a partir del análisis de la solución particular.

Como trabajo a futuro se presentan diferentes líneas de avance. Aquí se proponen dos. La primera está relacionada con el conocimiento de planteos, resoluciones y análisis de sistema de ecuaciones diferenciales. Esta línea de avance permitirá proceder con el planteo, resolución y análisis de problemas de optimización dinámica continua. La segunda línea de avance está relacionada con el supuesto de la variación discreta de la variable independiente, en este caso, el tiempo. Bajo este supuesto la línea de avance, se procede con el conocimiento del planteo, resolución y análisis de ecuaciones en diferencias, sistemas de ecuaciones en diferencias y problemas de optimización dinámica discreta.

Referencias

Bernardello, Bianco, M., Casparri, M., García Fronti, J., & Olivera de Marzana, S. (2009). *Matemática para Economistas* (2.ª ed.). Omicron System. Sección 4.

Chiang, A., & Wainwright, K. (2005). *Fundamental methods of mathematical economics* (4.ª ed.). McGraw-Hill.

6

Introducción a la resolución de modelos dinámicos recursivos.

María José Bianco
Javier I. García Fronti

En este capítulo se introduce a las y los estudiantes en la resolución de modelos dinámicos recursivos. En primer lugar, se presenta el problema de optimización en tiempo discreto, para luego esquematizar los métodos de resolución y aplicarlos en diversos ejemplos prácticos.

El apartado se estructura en tres secciones. En la primera, se plantea un problema general de optimización en tiempo discreto con horizonte temporal finito, y propone tres métodos de resolución: (i) multiplicadores de Lagrange, (ii) programación dinámica, y, (iii) por medio de la fórmula de Euler. En la segunda sección se plantea el problema incorporando el concepto “factor de descuento” y se presentan los métodos de resolución. En la última sección se resuelven problemas de horizonte infinito.

6.1 El problema con horizonte temporal finito

El problema que vamos a considerar se describe matemáticamente de la siguiente forma:

$$(P)\quad \begin{cases} \max\limits_{u_t} V = \sum\limits_{t=0}^{T} f(x_t, u_t) + S(x_{T+1}) \\ \text{sujeto a} \quad x_{t+1} = g(x_t, u_t) \quad \text{para } t = 0, \dots, T \\ \qquad\text{con} \quad x_0 \text{ dado} \end{cases} \tag{6-1}$$

$x_t =$ variable de estado
$u_t =$ variable control
$g(x_t, u_t) =$ ecuación de movimiento o transición (diferenciable)
$V =$ funcional objetivo (diferenciable)

6.1.1 Resolución por el método de los multiplicadores de Lagrange

Este método tiene la ventaja de resaltar la relación entre los modelos que asumen el tiempo en forma discreta y aquellos que lo hacen en forma de tiempo continuo.

La función de Lagrange correspondiente al problema (*P*) es:

$$L = \sum_{t=0}^{T} f(x_t, u_t) + S(x_{T+1}) + \sum_{t=0}^{T} \lambda_t [g(x_t, u_t) - x_{t+1}] \tag{6-2}$$

La condición necesaria indica que las derivadas con respecto a u_t, x_t y $\lambda_t$deben ser cero.

En primer lugar, se deriva con respecto a u_t:

$$\frac{\partial L}{\partial u_t} = \frac{\partial f}{\partial u_t} + \lambda_t \frac{\partial g}{\partial u_t} = 0 \qquad t = 0, \dots, T \tag{6-3}$$

En segundo lugar, con respecto a x_t

$$\frac{\partial L}{\partial x_{t+1}} = \frac{\partial f}{\partial x_{t+1}} + \lambda_{t+1} \frac{\partial g}{\partial x_{t+1}} - \lambda_t = 0 \qquad t = 0, \dots, T-1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{T+1}} = \frac{\partial S}{\partial x_{T+1}} - \lambda_T = 0 \qquad t = T \qquad (6\text{-}4)$$

Y, por último, con respecto a λ_t

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = g(x_t, u_t) - x_{t+1} = 0 \qquad t = 0, \dots, T \qquad (6\text{-}5)$$

Observación 1: Las condiciones suficientes son las mismas que para la optimización con restricciones de igualdad.

Observación 2: Si el problema (*P*) presenta restricciones de desigualdad, vale todo lo visto para optimización con restricciones de desigualdad (Kuhn – Tucker)

EJEMPLO 1

$$\begin{cases} \max\limits_{u_t} V = \sum\limits_{t=0}^{2} -(x_t^2 + u_t^2) - x_3^2 \\ \text{sujeto a} \quad x_{t+1} = 2x_t + u_t \qquad \text{para } t = 0,1,2 \\ \qquad \text{con } x_0 = 5 \end{cases}$$

Condiciones necesarias:

$$L = \sum_{t=0}^{2} -(x_t^2 + u_t^2) - x_3^2 + \sum_{t=0}^{2} \lambda_t[2x_t + u_t - x_{t+1}] =$$

$$= -(x_0^2 + u_0^2) - (x_1^2 + u_1^2) - (x_2^2 + u_2^2) - x_3^2 + \lambda_0[2x_0 + u_0 - x_1] + \lambda_1[2x_1 + u_1 - x_2] + \lambda_2[2x_2 + u_2 - x_3]$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_0} = -2u_0 + \lambda_0 = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_1} = -2x_1 + 2\lambda_1 - \lambda_0 = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_0} = 2x_0 + u_0 - x_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = -2u_1 + \lambda_1 = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_2 + 2\lambda_2 - \lambda_1 = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 2x_1 + u_1 - x_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = -2u_0 + \lambda_2 = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_3} = -2x_3 - \lambda_2 = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 2x_2 + u_2 - x_3 = 0$$

Al resolver este sistema se obtiene

$$u_0^* = -8 \qquad x_1^* = 2 \qquad \lambda_0^* = -16$$

$$u_1^* = -3 \qquad x_2^* = 1 \qquad \lambda_1^* = -6$$

$$u_2^* = -1 \qquad x_3^* = 1 \qquad \lambda_2^* = -2$$

Condiciones suficientes:

i) $f(x_t, u_t) = -(x_t^2 + u_t^2)$

$$Hf = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Como la matriz Hessiana es definida negativa, la función es estrictamente cóncava

ii) $g(x_t, u_t) = 2x_t + u_t$

Como la función es lineal, es cóncava y convexa

iii) $S(x) = -x^2$ Es estrictamente cóncava

Concluimos que el problema presenta un máximo global

EJEMPLO 2

Supongamos que se tiene que una cantidad c de un recurso que se debe repartir en su totalidad entre $T + 1$ actividades. Si a la actividad *t* se le asigna una cantidad *u*, se obtiene un beneficio $b(u_t) = \sqrt{u_t}$.

Por lo tanto, el problema que se debe resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} \max\limits_{u_t} V = \sum\limits_{t=0}^{T} \sqrt{u_t} \\ \text{sujeto a} \quad x_{t+1} = x_t - u_t \qquad \text{para } t = 0, \dots, T \\ \text{con} \quad x_0 = c \qquad x_{T+1} = 0 \end{cases}$$

Condiciones necesarias:

$$L = \sum_{t=0}^{T} \sqrt{u_t} + \sum_{t=0}^{T} \lambda_t [x_t - u_t - x_{t+1}]$$

Derivando,

$$\frac{\partial L}{\partial u_t} = \frac{1}{2\sqrt{u_t}} - \lambda_t = 0 \qquad t = 0, \dots, T$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{t+1}} = \lambda_{t+1} - \lambda_t = 0 \qquad t = 0, \dots, T-1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = x_t - u_t - x_{t+1} = 0 \qquad t = 0, \dots, T$$

Al resolver estas ecuaciones en diferencias se obtiene:

$$\begin{cases} \lambda_t = K_1 \\ u_t = \dfrac{1}{4K_1^2} \\ x_t = K_2 - \dfrac{1}{4K_1^2} t \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $x_0 = c$ y $x_{T+1} = 0$ se obtiene:

$$u_t^* = \frac{c}{T+1} \qquad x_t^* = c - \frac{c}{T+1} t \qquad \lambda_t^* = \frac{\sqrt{T+1}}{2\sqrt{c}}$$

Condiciones suficientes:

i) $f(x_t, u_t) = \sqrt{u_t}$

$$Hf = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} u_t^{-3/2} \end{pmatrix}$$

ii) Como la matriz Hessiana es semidefinida negativa, la función es cóncava

$$g(x_t, u_t) = x_t - u_t$$

iii) Como la función es lineal, es cóncava y convexa

Concluimos que el problema presenta un máximo global

La resolución del problema (*P*) realizada utilizando los multiplicadores de Lagrange, si bien es correcta, no es la manera más eficiente de resolver. En general, involucra cálculos engorrosos para despejar las variables de control y de estado óptimas y puede llegar a hacerse extremadamente largo si *T* es suficientemente grande.

6.1.2 Resolución por Programación Dinámica

Principio de optimalidad de Bellman

La secuencia de variables control $u^* = (u_0^*, \dots, u_T^*)$ es óptima para el problema (*P*) sí y sólo sí u_j^* con $j = t, t+1, t+2, \dots, T$ resuelve el siguiente problema para todo $t = 0, \dots, T$:

$$(P_t) \quad \begin{cases} \max\limits_{u_t} \quad V_t = \sum\limits_{j=t}^{T} f(x_j, u_j) + S(x_{T+1}) \\ \text{sujeto a} \quad x_{j+1} = g(x_j, u_j) \quad \text{para} \quad j = t, \dots, T \\ \text{con} \quad x_t \text{ dado} \end{cases} \qquad (6\text{-}6)$$

Observación 3: El principio de optimalidad de Bellman puede resumirse en el siguiente esquema:

$$\underbrace{u_0^*, u_1^*, u_2^*, \dots, \underbrace{u_t^*, u_{t+1}^*, \dots, u_{T-1}^*, u_T^*}_{B}}_{A}$$

La secuencia de variables control $u^* = (u_0^*, \dots, u_T^*)$, perteneciente al conjunto *A*, es óptima para el problema (*P*) sí y sólo sí cualquier subconjunto de variables control (desde cualquier *t* hasta *T*) como *B* también es óptima.

Observación 4: Si el problema (*P*) es de minimización, en el principio de optimalidad también se minimiza el problema (P_t).

El problema (P_t) del principio de optimalidad puede ser planteado en términos de una relación recursiva:

$$(P_t)\begin{cases} V_t(x_t) = \max\limits_{u_t}[f(x_t,\ u_t) + V_{t+1}(x_{t+1})] \\ \text{sujeto a} \quad x_{t+1} = g(x_t, u_t) \quad \text{para } t = 0, \dots, T \\ \text{con} \quad x_t \text{ dado} \end{cases} \qquad (6\text{-}7)$$

La ecuación $V_t(x_t) = \max\limits_{u_t}[f(x_t,\ u_t) + V_{t+1}(x_{t+1})]$ se denomina ***Ecuación de Bellman***

Observación 5: En esta formulación del problema la maximización se realiza exclusivamente con respecto a la variable de control mientras la variable de estado se mantiene constante. En la ecuación de Bellman, V_t representa la función de valor para el problema (*P*) en el período *t*.

PROCEDIMIENTO PASO A PASO

1. Definimos

$$V_{T+1}(x_{T+1}) = S(x_{T+1}) \qquad (6\text{-}8)$$

2. Sea $t = T$. Debemos resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} V_T(x_T) = \max\limits_{u_T}[f(x_T,\ u_T) + V_{T+1}(x_{T+1})] \\ \text{sujeto a} \quad x_{T+1} = g(x_T, u_T) \end{cases} \qquad (6\text{-}9)$$

Equivalentemente

$$V_T(x_T) = \max_{u_T}[f(x_T,\ u_T) + S[g(x_T, u_T)]\ ] \qquad (6\text{-}10)$$

Al derivar respecto de u_T e igualar a cero (condición de primer orden de optimización libre) se obtiene $u_T^* = h(x_T)$ que es la ***función de política*** del problema.

Reemplazando en (6-10):

$$V_T(x_T) = f\left(x_T, u_T^*\right) + S\left[g\left(x_T, u_T^*\right)\right]$$

3. Sea $t = T\text{-}1$. Debemos resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} V_{T\text{-}1}(x_{T\text{-}1}) = \max\limits_{u_{T\text{-}1}}[f(x_{T\text{-}1},\ u_{T\text{-}1}) + V_T(x_T)] \\ \quad\text{sujeto a} \qquad x_T = g(x_{T\text{-}1}, u_{T\text{-}1}) \end{cases}$$

Equivalentemente

$$V_{T\text{-}1}(x_{T\text{-}1}) = \max_{u_{T\text{-}1}}[f(x_{T\text{-}1},\ u_{T\text{-}1}) + V_T[g(x_{T\text{-}1}, u_{T\text{-}1})]\ ] \qquad (6\text{-}11)$$

Al derivar respecto de $u_{T\text{-}1}$ e igualar a cero se obtiene $u_{T\text{-}1}^* = h(x_{T\text{-}1})$

Reemplazando en (6-11):

$$V_{T\text{-}1}(x_{T\text{-}1}) = f\left(x_{T\text{-}1}, u_{T\text{-}1}^*\right) + V_T\left[g\left(x_{T\text{-}1}, u_{T\text{-}1}^*\right)\right]$$

4. Sea $t = 0$. Debemos resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} V_0(x_0) = \max\limits_{u_0}[f(x_0,\ u_0) + V_1(x_1)] \\ \quad\text{sujeto a} \qquad x_1 = g(x_0, u_0) \end{cases}$$

Equivalentemente

$$V_0(x_0) = \max_{u_0}[f(x_0,\ u_0) + V_1[g(x_0, u_0)]\ ]$$

Al derivar respecto de u_0 e igualar a cero se obtiene $u_0^* = h(x_0)$

Luego como x_0 está dado, siguiendo la secuencia se obtiene:

$$x_0 \xrightarrow{h} u_0$$

$$\searrow \quad \swarrow$$

$$g(x_0,\ u_0) = x_1 \xrightarrow{h} u_1$$

$$\searrow \quad \swarrow$$

$$g(x_1,\ u_1) = x_2 \xrightarrow{h} u_2 \quad \dots\dots$$

EJEMPLO 3: Continuación del Ejemplo 1

$$\begin{cases} \max\limits_{u_t} V = \displaystyle\sum_{t=0}^{2} \text{-}(x_t^2 + u_t^2)\ \text{-}x_3^2 \\ \text{sujeto a} \qquad x_{t+1} = 2x_t + u_t \qquad \text{para } t = 0,1,2 \\ \qquad\qquad \text{con} \ \ x_0 = 5 \end{cases}$$

1. Definimos $V_3(x_3) = \text{-}x_3^2$
2. Sea $t = 2$. Debemos resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} V_2(x_2) = \max\limits_{u_2}[-(x_2^2 + u_2^2) + V_3(x_3)] \\ \quad \text{sujeto a} \qquad x_3 = 2x_2 + u_2 \end{cases}$$

Equivalentemente

$$V_2(x_2) = \max_{u_2}[-(x_2^2 + u_2^2)-(2x_2 + u_2)^2] \tag{6-12}$$

Derivamos V_2 respecto de u_2

$$\frac{\partial V_2}{\partial u_2} = -2u_2-2(2x_2 + u_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_2 = -x_2$$

Reemplazando en (6-12), se obtiene

$$V_2(x_2) = -3x_2^2$$

3. Sea $t = 1$. Debemos resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} V_1(x_1) = \max\limits_{u_1}[-(x_1^2 + u_1^2) + V_2(x_2)] \\ \quad \text{sujeto a} \qquad x_2 = 2x_1 + u_1 \end{cases}$$

Equivalentemente

$$V_1(x_1) = \max_{u_1}[-(x_1^2 + u_1^2)-3(2x_1 + u_1)^2] \tag{6-13}$$

Derivamos V_1 respecto de u_1

$$\frac{\partial V_1}{\partial u_1} = -2u_1-6(2x_1 + u_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = -\frac{3}{2}x_1$$

Reemplazando en (6-13), se obtiene

$$V_1(x_1) = -4x_1^2$$

4. Sea $t = 0$. Debemos resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} V_0(x_0) = \max\limits_{u_0}[-(x_0^2 + u_0^2) + V_1(x_1)] \\ \quad \text{sujeto a} \qquad x_1 = 2x_0 + u_0 \end{cases}$$

Equivalentemente

$$V_0(x_0) = \max_{u_0}[-(x_0^2 + u_0^2)-4(2x_0 + u_0)^2] \tag{6-14}$$

Derivamos V_0 respecto de u_0

$$\frac{\partial V_0}{\partial u_0} = -2u_0-8(2x_0 + u_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_0 = -\frac{8}{5}x_0$$

Reemplazando en (6-14), se obtiene

$$V_0(x_0) = -\frac{21}{5}x_0^2$$

$$x_0 = 5 \longrightarrow u_0 = -\frac{8}{5}x_0 = -8$$

$$\searrow \quad \swarrow$$

$$x_1 = 2x_0 + u_0 = 2 \longrightarrow u_1 = -\frac{3}{2}x_1 = -3$$

$$\searrow \quad \swarrow$$

$$x_2 = 2x_1 + u_1 = 1 \longrightarrow u_2 = -x_2 = -1$$

$$\searrow \quad \swarrow$$

$$x_3 = 2x_2 + u_2 = 1$$

Por lo tanto, se obtiene la misma secuencia óptima que en el Ejemplo 1

$$\begin{array}{ll} u_0^* = -8 & x_1^* = 2 \\ u_1^* = -3 & x_2^* = 1 \\ u_2^* = -1 & x_3^* = 1 \end{array}$$

Ejemplo 4: Continuación del Ejemplo 2

$$\begin{cases} \max_{u_t} V = \sum_{t=0}^{T} \sqrt{u_t} \\ \text{sujeto a} \quad x_{t+1} = x_t - u_t \quad \text{para } t = 0, \ldots, T \\ \quad \text{con} \quad x_0 = c \quad x_{T+1} = 0 \end{cases}$$

1. Definimos $V_{T+1}(x_{T+1}) = 0$
2. Sea $t = T$. Debemos resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} V_T(x_T) = \max_{u_T}\left[\sqrt{u_T} + V_{T+1}(x_{T+1})\right] \\ \quad \text{sujeto a} \quad x_{T+1} = x_T - u_T \end{cases}$$

Como $x_{T+1} = 0$ entonces $u_T = x_T$

Luego

$$V_T(x_T) = \sqrt{x_T}$$

3. Sea $t = T\text{-}1$. Debemos resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} V_{T-1}(x_{T-1}) = \max_{u_{T-1}}\left[\sqrt{u_{T-1}} + V_T(x_T)\right] \\ \quad \text{sujeto a} \quad x_T = x_{T-1} - u_{T-1} \end{cases}$$

Equivalentemente

$$V_{T-1}(x_{T-1}) = \max_{u_{T-1}}\left[\sqrt{u_{T-1}} + \sqrt{x_{T-1} - u_{T-1}}\,\right] \qquad (6\text{-}15)$$

Derivamos V_{T-1} respecto de u_{T-1}

$$\frac{\partial V_{T-1}}{\partial u_{T-1}} = \frac{1}{2\sqrt{u_{T-1}}} - \frac{1}{2\sqrt{x_{T-1} - u_{T-1}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{T-1} = \frac{1}{2} x_{T-1}$$

Reemplazando en (6-15):

$$V_{T-1}(x_{T-1}) = \sqrt{2}\sqrt{x_{T-1}}$$

4. Sea $t = T-2$. Debemos resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} V_{T-2}(x_{T-2}) = \max\limits_{u_{T-2}} \left[\sqrt{u_{T-2}} + V_{T-1}(x_{T-1})\right] \\ \text{sujeto a} \qquad x_{T-1} = x_{T-2} - u_{T-2} \end{cases}$$

Equivalentemente

$$V_{T-2}(x_{T-2}) = \max_{u_{T-2}} \left[\sqrt{u_{T-2}} + \sqrt{2}\sqrt{x_{T-2} - u_{T-2}}\right] \qquad (6\text{-}16)$$

Derivamos V_{T-2} respecto de u_{T-2}

$$\frac{\partial V_{T-2}}{\partial u_{T-2}} = \frac{1}{2\sqrt{u_{T-2}}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x_{T-2} - u_{T-2}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{T-2} = \frac{1}{3} x_{T-2}$$

Reemplazando en (6-16):

$$V_{T-2}(x_{T-2}) = \sqrt{3}\sqrt{x_{T-2}}$$

Si continuamos con la recursividad se obtendrían las siguientes relaciones

$$u_t = \frac{1}{T-t+1} x_t$$

$$V_t(x_t) = \sqrt{T-t+1}\sqrt{x_t}$$

6.1.3 Resolución por Ecuación de Euler

Si el conjunto de variables de estado es convexo para todo *t* y para toda *x* y la función *f* es estrictamente cóncava (para un problema de maximización) y diferenciable para (x, u), entonces la función valor es diferenciable.

Dada la función de política $u_t^* = h(x_t)$, se reemplaza en la función de transición, obteniendo $x_{t+1} = g(x_t, u_t) = g(x_t, h(x_t))$. Reemplazamos ambas ecuaciones en la ecuación de Bellman maximizada, con lo cual se obtiene la siguiente relación:

$$V_t(x_t) = f(x_t, u_t) + V_{t+1}(x_{t+1}) = f(x_t, h(x_t)) + V_{t+1}(g(x_t, h(x_t)))$$

Por lo tanto, la variación de x_t afecta directamente a la función valor a través de la ecuación de movimiento y a través de la función de política. Luego, por el teorema de la envolvente se llega a la ecuación de **Benveniste y Scheinkman**:

$$\frac{\partial V_t}{\partial x_t} = \frac{\partial f}{\partial x_t} + \frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}} \frac{\partial g}{\partial x_t} \qquad (6\text{-}17)$$

Los pasos a seguir para obtener la ecuación de Euler son:

1) Se busca la condición de primer orden, es decir, se deriva la ecuación de Bellman respecto de la variable control u_t (esta ecuación va igualada a cero por ser la condición de primer orden)

$$\frac{\partial V_t}{\partial u_t} = \frac{\partial f}{\partial u_t} + \frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}} \frac{\partial g}{\partial u_t} = 0$$

Luego se despeja $\frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}}$:

$$\frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial u_t}}{\frac{\partial g}{\partial u_t}} \qquad (6\text{-}18)$$

2) Se obtiene la ecuación de Benveniste y Scheinkman derivando la ecuación Bellman respecto de la variable de estado x_t

$$\frac{\partial V_t}{\partial x_t} = \frac{\partial f}{\partial x_t} + \frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}} \frac{\partial g}{\partial x_t}$$

Reemplazamos la expresión (6-18) en la ecuación de Benveniste y Scheinkman

$$\frac{\partial V_t}{\partial x_t} = \frac{\partial f}{\partial x_t} - \frac{\frac{\partial f}{\partial u_t}}{\frac{\partial g}{\partial u_t}} \frac{\partial g}{\partial x_t} \qquad (6\text{-}19)$$

3) Adelantamos un período la expresión (6-19):

$$\frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}} = \frac{\partial f}{\partial x_{t+1}} - \frac{\frac{\partial f}{\partial u_{t+1}}}{\frac{\partial g}{\partial u_{t+1}}} \frac{\partial g}{\partial x_{t+1}} \qquad (6\text{-}20)$$

4) Reemplazamos esta última expresión en la condición de primer orden, o bien en(6-18):

$$\frac{\partial f}{\partial u_t} + \left[\frac{\partial f}{\partial x_{t+1}} - \frac{\frac{\partial f}{\partial u_{t+1}}}{\frac{\partial g}{\partial u_{t+1}}} \frac{\partial g}{\partial x_{t+1}} \right] \frac{\partial g}{\partial u_t} = 0$$

Ecuación de Euler

Observación 5: La ecuación de Euler junto con la ecuación de transición forman un sistema de ecuaciones en diferencias que, si se puede resolver, permitiría obtener las trayectorias óptimas de las variables de estado y control

EJEMPLO 5: Continuación del Ejemplo 2

Paso 1: Se busca la Ecuación de Euler

Para ello lo primero que se hace es plantear la ecuación de Bellman para el problema dado

$$V_t(x_t) = \sqrt{u_t} + V_{t+1}(x_{t+1})$$

1) Buscamos la condición de primer orden, es decir, derivamos la ecuación de Bellman respecto de la variable control u_t

$$\frac{\partial V_t}{\partial u_t} = \frac{1}{2\sqrt{u_t}} + \frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}}\frac{\partial x_{t+1}}{\partial u_t} = \frac{1}{2\sqrt{u_t}} + \frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}}(-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}} = \frac{1}{2\sqrt{u_t}} \qquad (6\text{-}21)$$

2) Buscamos la ecuación de Benveniste y Scheinkman derivando la ecuación Bellman respecto de la variable de estado x_t

$$\frac{\partial V_t}{\partial x_t} = \frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}}\frac{\partial x_{t+1}}{\partial x_t} = \frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}}$$

Reemplazamos la expresión (6-21) en la ecuación de Benveniste y Scheinkman

$$\frac{\partial V_t}{\partial x_t} = \frac{1}{2\sqrt{u_t}} \qquad (6\text{-}22)$$

3) Adelantamos un período la expresión (6-22):

$$\frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}} = \frac{1}{2\sqrt{u_{t+1}}}$$

4) Reemplazamos esta última expresión en (*):

$$\frac{1}{2\sqrt{u_{t+1}}} = \frac{1}{2\sqrt{u_t}}$$

La **Ecuación de Euler** de este problema es:

$$\boxed{u_{t+1} = u_t}$$

Paso 2: Se resuelve el sistema de ecuaciones en diferencias dado por la ecuación de Euler junto con la ecuación de transición

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t - u_t \\ u_{t+1} = u_t \end{cases}$$

La solución del sistema está dada por:

$$u_t = K_1$$

$$x_t = K_2 - K_1 t$$

Dadas las condiciones t $x_0 = c$ y $x_{T+1} = 0$ se obtiene:

$$u_t^* = \frac{c}{T+1} \qquad\qquad x_t^* = c\text{-}\frac{c}{T+1}t$$

Las soluciones que coinciden con las obtenidas utilizando multiplicadores de Lagrange.

6.2 Problemas con factor de descuento

6.2.1 Ecuación de Bellman para problemas que contienen factor de descuento

El problema que vamos a considerar ahora es:

$$(P) \quad \begin{cases} \max\limits_{u_t} \quad V = \sum_{t=0}^{T} \beta^t f(x_t, u_t) + \beta^T\ S(x_{T+1}) \\ \text{sujeto a} \quad x_{t+1} = g(x_t, u_t) \quad \text{para} \ \ t = 0, \dots, T \\ \text{con} \qquad x_0 \text{ dado} \end{cases} \qquad \text{con } 0 < \beta < 1$$

La ecuación de Bellman para este problema es:

$$W_t(x_t) = \max_{u_t}[f(x_t, u_t) + \beta\ W_{t+1}(x_{t+1})]$$

W se la llama ***función valor corriente***.

EJEMPLO 6: **Asignación de consumo y ahorro**

Un individuo cuenta con un stock de ahorro s_t. Cada período el agente retira de sus ahorros un monto igual a c_t para destinarlo a bienes de consumo. El stock de ahorro remanente $(s_t\text{-}c_t)$ se deposita en un banco que paga una tasa de interés constante *r* $(0 < r < 1)$. De este modo en el siguiente período el nuevo stock de ahorros será igual a $(1+r)\ (s_t\text{-}c_t)$.

Esta operación se repita período a período hasta el momento *T*, cuando termina el horizonte de optimización del individuo.

El comportamiento de los ahorros puede ser expresado de una manera simple a través de una ecuación de movimiento:

$$s_{t+1} = (1+r)\ (s_t\text{-}c_t) \quad \text{con} \ \ t = 1, \dots, T$$

Dado un stock inicial de ahorros s_0 y asumiendo que el ahorro en el último período es igual a cero $(s_{T+1} = 0)$, el objetivo del individuo consiste en maximizar su bienestar intertemporal hasta el período *T*, empleando una tasa de descuento β $(0 < \beta < 1)$:

$$U = \sum_{t=0}^{T} \beta^t\ \ln c_t$$

Por lo tanto, el problema que enfrenta el consumidor se resume del siguiente modo:

$$\begin{cases} \max\limits_{c_t} U = \sum\limits_{t=0}^{T} \beta^t \ln c_t \\ \text{sujeto a} \quad s_{t+1} = \alpha(s_t\text{-}c_t) \quad \text{para} \quad t = 0, \dots, T \\ \qquad \text{con} \quad s_0 \text{ dado} \quad s_{T+1} = 0 \end{cases}$$

6.2.2 Resolución por multiplicadores de Lagrange

$$L = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \ \ln c_t + \sum_{t=0}^{T} \lambda_t \ [\alpha \ (s_t\text{-}c_t)\text{-}s_{t+1}]$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \frac{\beta^t}{c_t}\text{-}\alpha \ \lambda_t = 0 \qquad\qquad \forall \ t = 0, \dots, T$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_{t+1}} = \alpha \ \lambda_{t+1}\text{-}\lambda_t = 0 \qquad\qquad \forall \ t = 0, \dots, T\text{-}1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = \alpha \ (s_t\text{-}c_t)\text{-}s_{t+1} = 0 \qquad\qquad \forall \ t = 0, \dots, T$$

Al resolver las ecuaciones en diferencias de estas condiciones de primer orden se obtiene

$$\lambda_t = k_1 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^t$$

$$c_t = \frac{1}{\alpha k_1} (\alpha\beta)^t$$

$$s_t = k_2 \alpha^t + \frac{1}{\alpha k_1 (1\text{-}\beta)} (\alpha\beta)^t$$

6.2.3 Resolución por el método recursivo utilizando ecuación de Bellman para problemas con factor de descuento

- Definimos $W_{T+1}(s_{T+1}) = 0)$
- Sea $t = T$. Debemos resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} W_T(s_T) = \max\limits_{c_T}[\ln c_T + \beta \ W_{T+1}(s_{T+1})] \\ \qquad \text{sujeto a} \qquad s_{T+1} = \alpha(s_T\text{-}c_T) \end{cases}$$

Como $s_{T+1} = 0$ entonces $c_T = s_T$

Luego,

$$W_T(s_T) = \ln s_T$$

- Sea $t = T\text{-}1$. Debemos resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} W_{T\text{-}1}(s_{T\text{-}1}) = \max\limits_{c_T}[\ln c_{T\text{-}1} + \beta \ W_T(s_T)] \\ \qquad \text{sujeto a} \qquad s_T = \alpha(s_{T\text{-}1}\text{-}c_{T\text{-}1}) \end{cases}$$

Equivalentemente

$$W_{T\text{-}1}(s_{T\text{-}1}) = \max_{c_T}[\ln c_{T\text{-}1} + \beta \ln[\alpha(s_{T\text{-}1}\text{-}c_{T\text{-}1})]] \qquad (6\text{-}23)$$

Derivamos $W_{T\text{-}1}$ respecto de $c_{T\text{-}1}$

$$\frac{\partial W_{T\text{-}1}}{\partial c_{T\text{-}1}} = \frac{1}{c_{T\text{-}1}}\text{-}\beta \frac{1}{\alpha(s_{T\text{-}1}\text{-}c_{T\text{-}1})}(\text{-}\alpha) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_{T\text{-}1} = \frac{1}{1+\beta} s_{T\text{-}1}$$

Reemplazando en (6-23):

$$W_{T\text{-}1}(s_{T\text{-}1}) = (1+\beta)\ln s_{T\text{-}1} + K_1$$

Donde K_1 es una constante que depende de α y β.

- Sea $t = T\text{-}2$. Debemos resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} W_{T\text{-}2}(s_{T\text{-}2}) = \max\limits_{c_T}[\ln c_{T\text{-}2} + \beta\, W_{T\text{-}1}(s_{T\text{-}1})] \\ \quad\text{sujeto a} \qquad s_{T\text{-}1} = \alpha(s_{T\text{-}2}\text{-}c_{T\text{-}2}) \end{cases}$$

Equivalentemente

$$W_{T\text{-}2}(s_{T\text{-}2}) = \max_{c_T}[\ln c_{T\text{-}2} + \beta(1+\beta)\ln[\alpha(s_{T\text{-}2}\text{-}c_{T\text{-}2})] + \beta K_1] \qquad (6\text{-}24)$$

Derivamos $W_{T\text{-}2}$ respecto de $c_{T\text{-}2}$

$$\frac{\partial W_{T\text{-}2}}{\partial c_{T\text{-}2}} = \frac{1}{c_{T\text{-}2}} \text{-} \beta\frac{1+\beta}{\alpha(s_{T\text{-}2}\text{-}c_{T\text{-}2})}(\text{-}\alpha) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_{T\text{-}2} = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}s_{T\text{-}2}$$

Reemplazando en (6-24):

$$W_{T\text{-}2}(s_{T\text{-}2}) = (1+\beta+\beta^2)\ln s_{T\text{-}2} + K_2$$

Donde K_2 es una constante que depende de α y β.

Si continuamos con la recursividad se obtendrían las siguientes relaciones

$$c_t = \frac{1}{\sum_{j=0}^{T\text{-}t}\beta^j}s_t$$

Como $\sum_{j=0}^{T\text{-}t}\beta^j = \frac{1\text{-}\beta^{T\text{-}t+1}}{1\text{-}\beta}$ entonces se obtiene

$$\boxed{c_t = \frac{1\text{-}\beta}{1\text{-}\beta^{T\text{-}t+1}}s_t}$$

La función valor corriente después de operar queda:

$$W_t(s_t) = \frac{1\text{-}\beta^{T\text{-}t+1}}{1\text{-}\beta}\ln s_t + K$$

Donde

$$K = \left[\sum_{j=0}^{T\text{-}t} j\beta^j\right]\ln(\alpha\beta) \text{-} \frac{1\text{-}\beta^{T\text{-}t+1}}{1\text{-}\beta}\ln\left[\frac{1\text{-}\beta^{T\text{-}t+1}}{1\text{-}\beta}\right]$$

6.2.4 Ecuación de Euler y resolución del sistema de ecuaciones en diferencias

- Primero buscamos la ecuación de Euler

La ecuación de Bellman para problemas con factor de descuento es:

$$W_t(s_t) = \ln c_t + \beta W_{t+1}(s_{t+1})$$

1) Aplicamos la condición de primer orden

$$\frac{\partial W_t}{\partial c_t} = \frac{1}{c_t} \text{-} \alpha\beta \frac{\partial W_{t+1}}{\partial s_{t+1}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial W_{t+1}}{\partial s_{t+1}} = \frac{1}{\alpha\beta\, c_t}$$

2) Hallamos la ecuación de Benveniste y Scheinkman

$$\frac{\partial W_t}{\partial s_t} = \alpha\beta \frac{\partial W_{t+1}}{\partial s_{t+1}} = \frac{1}{c_t}$$

3) Corremos un período y reemplazamos en la condición de primer orden

$$\frac{1}{c_{t+1}} = \frac{1}{\alpha\beta\, c_t}$$

La **ecuación de Euler** es

$$\boxed{c_{t+1} = \alpha\beta\, c_t}$$

- Ahora resolvemos el sistema de ecuaciones en diferencias

  El sistema que debemos resolver es:

$$\begin{cases} c_{t+1} = \alpha\beta\, c_t \\ s_{t+1} = \alpha(s_t \text{-} c_t) \end{cases}$$

  Al resolver la primera ecuación obtenemos

$$\boxed{c_t = A_1[\alpha\beta]^t}$$

  Reemplazando en la segunda ecuación y resolviendo

$$\boxed{k_t = A_2\alpha^t + \frac{A_1}{1\text{-}\beta}[\alpha\beta]^t}$$

6.3 Horizonte temporal infinito

Al igual que en control óptimo existen problemas de optimización dinámica donde el horizonte temporal relevante es infinito.

El problema general es:

$$(P) \quad \begin{cases} \max\limits_{u_t} \quad V = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \beta^t f(x_t, u_t) \\ \text{sujeto a} \quad x_{t+1} = g(x_t, u_t) \quad \text{para} \quad t = 0,1,2,\ldots \\ \text{con} \quad x_0 \text{ dado} \end{cases} \qquad (6\text{-}25)$$

La ecuación de Bellman para este problema es igual a la vista para los problemas con factor de descuento.

Las dos metodologías más conocidas para hallar la función de política y la función valor en este tipo de problemas son la de ***aproximaciones sucesivas*** y la de **ensayo y *verificar***

6.3.1 Método de aproximaciones sucesivas

EJEMPLO 7: Continuación del Ejemplo 6 pero ahora con horizonte temporal infinito

$$\begin{cases} \max_{c_t} U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t \\ \text{sujeto a} \quad s_{t+1} = \alpha(s_t - c_t) \quad \text{para} \quad t = 0, \dots, T \\ \text{con} \quad s_0 \text{ dado} \end{cases}$$

En la parte II) del ejemplo 6 habíamos obtenido que

$$c_t = \frac{(1-\beta)s_t}{1-\beta^{T-t+1}}$$

Luego

$$c_t = \lim_{T\to+\infty} \frac{(1-\beta)s_t}{1-\beta^{T-t+1}} = (1-\beta)s_t \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_t = (1-\beta)s_t}$$

Además

$$W_t = \frac{1-\beta^{T-t+1}}{1-\beta} \ln s_t + \left[\sum_{k=0}^{T-t} k\beta^k\right] \ln(\alpha\beta) - \frac{1-\beta^{T-t+1}}{1-\beta} \ln\left(\frac{1-\beta^{T-t+1}}{1-\beta}\right)$$

Teniendo en cuenta que $0 < \beta < 1$ y que $\sum_{k=0}^{\infty} k\beta^k = \frac{\beta}{(1-\beta)^2}$ obtenemos al calcular el límite cuanto *T* tiende a infinito

$$\boxed{W_t = \frac{1}{1-\beta} \ln s_t + \frac{\beta}{(1-\beta)^2} \ln(\alpha\beta) + \frac{1}{1-\beta} \ln(1-\beta)}$$

6.3.2 Método de ensayar y verificar

Este método consiste en ensayar la función valor o la función de política y posteriormente verificarlo a través de la ecuación de Bellman y la ecuación de Benveniste y Scheinkman.

La eficiencia de este método para resolver el problema (P) dependerá de la existencia de una solución única del problema y de que el ensayo sea correcto.

EJEMPLO 8: Continuamos con el Ejemplo 7

a) Nuestro ensayo en este caso será:

$$c_t = As_t \qquad (*)$$

Donde *A* es una constante a determinar.

- Para hallar el valor de *A*, reemplazamos (*) en la ecuación de Euler hallada en la parte III) del Ejemplo 6

$$c_{t+1} = \alpha\beta\, c_t \quad \Longrightarrow \quad As_{t+1} = \alpha\beta As_t \quad \Longrightarrow \quad s_{t+1} = \alpha\beta s_t$$

- Reemplazando por la ecuación de transición:

$$s_{t+1} = \alpha(s_t\text{-}c_t) \quad \Longrightarrow \quad \alpha\beta s_t = \alpha(s_t\text{-}As_t) \quad \Longrightarrow \quad A = 1\text{-}\beta$$

Por lo tanto, la función de política es:

$$\boxed{c_t = (1\text{-}\beta)s_t}$$

La cual coincide con la obtenida en el Ejemplo 7

b) También se podría partir de un ensayo sobre la ecuación de Bellman:

$$W_t = A\ln s_t + B \quad (1)$$

Para encontrar las constantes se resuelve el siguiente problema:

$$\begin{cases} W_t(s_t) = \ln c_t + \beta\, W_{t+1}(s_{t+1}) \\ s_{t+1} = \alpha(s_t\text{-}c_t) \end{cases}$$

Entonces

$$W_t(s_t) = \ln c_t + \beta[A\ln[\alpha(s_t\text{-}c_t)] + B\,] \qquad (2)$$

Derivamos W_t respecto a c_t

$$\frac{\partial W_t}{\partial c_t} = \frac{1}{c_t}\text{-}\alpha\beta\frac{A}{\alpha(s_t\text{-}c_t)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_t = \frac{s_t}{1+\beta A}$$

Reemplazamos c_t en (2) y obtenemos

$$W_t(s_t) = (1+\beta A)\ln s_t\,\text{-}(1+\beta A)\ln(1+\beta A) + \beta A\ln(\alpha\beta A) + \beta B$$

Igualamos a la ecuación de Bellman (1)

$$A\ln s_t + B = (1+\beta A)\ln s_t\,\text{-}(1+\beta A)\ln(1+\beta A) + \beta A\ln(\alpha\beta A) + \beta B$$

Por lo tanto, resolvemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} A = 1+\beta A \\ B = \text{-}(1+\beta A)\ln(1+\beta A) + \beta A\ln(\alpha\beta A) + \beta B \end{cases}$$

Obtenemos que:

$$A = \frac{1}{1\text{-}\beta}$$

$$B = \frac{\beta}{(1\text{-}\beta)^2}\ln(\alpha\beta) + \frac{1}{1\text{-}\beta}\ln(1\text{-}\beta)$$

Concluimos que

$$\boxed{W_t = \frac{1}{1\text{-}\beta}\ln s_t + \frac{\beta}{(1\text{-}\beta)^2}\ln(\alpha\beta) + \frac{1}{1\text{-}\beta}\ln(1\text{-}\beta)}$$

La cual coincide con la obtenida en el Ejemplo 7.

Referencias

Hammond, P., Strøm, A., & Sydsæter, K. (2012). *Essential mathematics for economic analysis-Student's Manual*. Pearson Education.

Ljungqvist, L., & Sargent, T. J. (2012). Recursive Macroeconomic Theory (MIT Press). *Cambridge, MA*.

Sargent T., Dynamic Macroeconomic Theory, Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1987.

Stokey N., Lucas R., and Prescott E., Recursive Methods in Economic Dynamics, Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1989.