

RELACIONES BINARIAS CRISP Y FUZZY. APLICACIÓN A UN ESPACIO FINANCIERO¹

Luisa L. Lazzari – Patricia I. Mouliá – Mariano Eriz
CIMBAGE – Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Buenos Aires
Av. Córdoba 2122 – 2° piso – Ciudad de Buenos Aires – C1120AAQ
ilazzari@econ.uba.ar – pimoulia@hotmail.com – erizmariano@hotmail.com

Recibido 15 de junio de 2007, aceptado 27 de septiembre de 2007

Resumen

Las relaciones entre elementos de dos conjuntos forman parte de la vida social, económica y de la actividad de las empresas. Un objetivo importante es comprender la naturaleza y el contenido de esas relaciones. Los estudios clásicos basados en la lógica booleana solo consideran las alternativas de existencia o no de relación. La necesidad de establecer un grado o nivel de vínculo conduce al empleo de conjuntos borrosos para su generalización.

Avanzar en el estudio de las relaciones *fuzzy* ayuda a buscar nuevos caminos para dar solución a complejas cuestiones de decisión en el ámbito de las realidades sociales, económicas y de gestión (Gil Aluja, 1999). Permite plantear y resolver problemas de decisión referidos a relaciones de distinto tipo, a la asignación, agrupación y ordenación de recursos, inversiones, fuentes de financiación, recursos humanos y otros.

En este trabajo se presentan y comparan los conceptos de relación binaria nítida (*crisp*) y borrosa (*fuzzy*), y sus diferentes formas de representación. Se generalizan algunas propiedades de las relaciones cuando los conjuntos son iguales, que permiten una clasificación de las mismas. En particular, se analizan las relaciones de equivalencia y de semejanza, y sus extensiones *fuzzy*, así como su aplicación al estudio de relaciones en un espacio financiero.

Palabras clave: relaciones binarias nítidas, relaciones binarias borrosas, espacio financiero.

¹ Este trabajo fue realizado en el marco del Proyecto E019: “Predicción y toma de decisiones en condiciones de incertidumbre” de la Programación Científica 2004-2007 de la Universidad de Buenos Aires.

CRISP AND FUZZY RELATIONS. APPLICATION TO FINANCIAL SPACE

Luisa L. Lazzari – Patricia I. Mouliá – Mariano Eriz
CIMBAGE – Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Buenos Aires
Av. Córdoba 2122 – 2° piso – Ciudad de Buenos Aires – C1120AAQ
ilazzari@econ.uba.ar – pimoulia@hotmail.com – erizmariano@hotmail.com

Received June 15th 2007, accepted September 27th 2007

Abstract

Relations between elements of two sets are part of social and economic life, and business activity. An important objective is to understand the nature and content of these relations. The classical studies based on Boolean logic only consider the presence or absence of relation. This concept can be generalized to allow for various degrees or strengths of association or interaction between elements using fuzzy set theory.

To advance in the study of relations fuzzy helps finding new ways to solve complex issues decisions in the social, economic and management environments (Gil Aluja, 1999). It allows posing and solving decision problems relating the allocation, management and clustering of resources, investment, funding, human resources and others.

This paper presents and compares the binary relation concepts crisp and fuzzy, and its different forms of representation. It generalizes some properties of relations among the elements of a single set that let a classification be possible. In particular, it analyzes the equivalent and the similarity relations and their fuzzy extensions, as well as the study of these relations in a financial space.

Keywords: binary crisp relations, binary fuzzy relations, financial space.

1. INTRODUCCIÓN

Las relaciones entre elementos de dos conjuntos forman parte de la vida social, económica y de la actividad de las empresas. Un objetivo importante es comprender la naturaleza y el contenido de esas relaciones. Los estudios clásicos basados en la lógica booleana solo consideran las alternativas de existencia o no de relación.

La necesidad de establecer un grado o nivel de vínculo conduce al empleo de conjuntos borrosos para su generalización. Surgen, entonces, propiedades menos fuertes y más aptas para representar situaciones menos precisas pero que se encuentran más frecuentemente, que permiten extender los conceptos de relaciones de equivalencia, orden y semejanza al ámbito *fuzzy*.

Gil Aluja (1999) define relación como “...*todo tipo de asociación capaz de poner en evidencia el nivel de conexión existente entre objetos físicos o mentales pertenecientes a un mismo conjunto o entre objetos de distintos conjuntos*”.

Avanzar en el estudio de las relaciones *fuzzy* ayuda a buscar nuevos caminos para dar solución a complejas cuestiones de decisión en el ámbito de las realidades sociales, económicas y de gestión (Gil Aluja, 1999). Permite plantear y resolver problemas de decisión referidos a relaciones de distinto tipo, a la asignación, agrupación y ordenación de recursos, inversiones, fuentes de financiación, recursos humanos y otros.

En este trabajo, se presentan y comparan los conceptos de relación binaria nítida (*crisp*) y borrosa (*fuzzy*) y sus diferentes formas de representación. Se generalizan algunas propiedades de las relaciones cuando los conjuntos son iguales, que permiten una clasificación de las mismas. Se analizan, en particular, las relaciones de equivalencia y de semejanza, y sus extensiones *fuzzy*.

Adicionalmente, se presenta una relación de equivalencia en un espacio financiero (Gil Peláez, 1987) que considera al tiempo como un bien económico en sí mismo, se generaliza al campo *fuzzy* y se desarrolla un caso de aplicación.

2. RELACIONES BINARIAS CRISP Y FUZZY: CONCEPTOS BÁSICOS

Una relación binaria *crisp* representa la presencia o ausencia de asociación, interacción, interconexión, vinculación o incidencia entre los elementos de dos conjuntos. Este concepto puede ser generalizado haciendo posible diversos grados o intensidad de asociación o

interacción entre elementos. En una relación *fuzzy*, los grados de asociación pueden ser representados mediante grados de pertenencia. Una relación nítida puede considerarse un caso particular de una borrosa, así como un conjunto nítido lo es de uno borroso.

Dados dos conjuntos X e Y , se denomina *relación binaria* R , de X en Y (Rojo, 1972), a todo subconjunto del producto cartesiano $X \times Y$.

Una relación *crisp* puede ser definida por medio de una función característica que asigna valor uno a todo par ordenado que pertenece a la relación y cero a todo par que no pertenece a la misma.

Se denota $R: X \times Y \rightarrow \{0,1\}$ / $\mu(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in R \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin R \end{cases}$

Para indicar que el par ordenado (a,b) pertenece a la relación suele escribirse $(a,b) \in R$ o bien aRb (Rojo, 1972). Las relaciones binarias pueden representarse mediante un diagrama (Figura 1) o una matriz $R = (r_{ij})$ (Figura 2), donde $r_{ij} = 1$ indica que x está relacionado con y , mientras que $r_{ij} = 0$ que no lo está.

Ejemplo 1. Dados los conjuntos $X = \{x_1; x_2\}$ e $Y = \{y_1; y_2; y_3\}$, se define la relación $R \subset X \times Y$ / $R = \{(x_1, y_1), (x_1, y_3), (x_2, y_1)\}$.

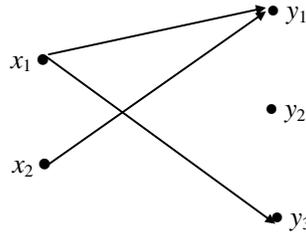


Figura 1. Diagrama de una relación binaria *crisp*

R	y_1	y_2	y_3
x_1	1	0	1
x_2	1	0	0

Figura 2. Representación matricial de una relación binaria *crisp*

La relación inversa de R es el subconjunto de $Y \times X$ siguiente (Rojo, 1972):

$$R^{-1} = \{(y, x)/(x, y) \in R\} \text{ o bien } \mu_{R^{-1}}(y, x) = \mu_R(x, y) \forall (x, y) \in X \times Y$$

Para generalizar el concepto de relación binaria booleana de modo de introducir un grado o nivel de vínculo entre los elementos de los conjuntos, se define relación binaria borrosa del siguiente modo:

Dados dos conjuntos X e Y se denomina relación binaria *fuzzy* \tilde{R} de X en Y (Kaufmann, 1973) a todo subconjunto borroso del producto cartesiano $X \times Y$. Se denota $\tilde{R}: X \times Y \rightarrow [0, 1]$.

Por ser una generalización de las relaciones binarias nítidas, las relaciones binarias borrosas también pueden representarse mediante un diagrama (Figura 3) o una matriz de pertenencia $\tilde{R} = (r_{ij})$ (Figura 4), donde $r_{ij} = \mu_{\tilde{R}}(x, y)$ es el grado con el cual x está relacionado con y .

Este valor puede indicar relación de incidencia, preferencia, u otro tipo de vinculación entre los elementos de los conjuntos nítidos X e Y .

Todas las operaciones definidas con subconjuntos borrosos (como por ejemplo la unión, la intersección y el complemento) pueden extenderse a las relaciones borrosas (Kaufmann y Gil Aluja, 1993). Se pueden definir los α -cortes de una relación borrosa como:

$$R_\alpha = \{(x, y)/\mu_{\tilde{R}}(x, y) \geq \alpha\}, \alpha \in (0, 1].$$

Toda relación \tilde{R} (por ser un conjunto borroso) puede ser representada unívocamente en términos de sus α -cortes mediante la expresión

$$\tilde{R} = \bigcup_{\alpha \in (0, 1]} \alpha \cdot R_\alpha.$$

Ejemplo 2. Dados los conjuntos X e Y del Ejemplo 1, se define $\tilde{R} \subset X \times Y$ expresada mediante el diagrama de la Figura 3 y por su matriz de pertenencia (Figura 4).

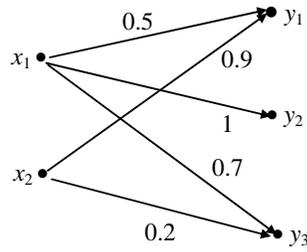


Figura 3. Diagrama de una relación binaria borrosa

\tilde{R}	y_1	y_2	y_3
x_1	0.5	1	0.7
x_2	0.9	0	0.2

Figura 4. Matriz de pertenencia de \tilde{R}

2.1. Composición max-min

Sean $\tilde{R}_1 \subset X \times Y$ y $\tilde{R}_2 \subset Y \times Z$. Se define la *composición* de \tilde{R}_1 y \tilde{R}_2 , denotada por $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$ y tal que $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2 \subset X \times Z$, como la relación binaria borrosa que verifica:

$$\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(x, z) = \max_y [\min(\mu_{\tilde{R}_1}(x, y), \mu_{\tilde{R}_2}(y, z))] \quad x \in X, y \in Y, z \in Z.$$

2.1.1. Propiedades de la composición max-min

Sean $\tilde{R}_1 \subset X \times Y$, $\tilde{R}_2 \subset Y \times Z$ y $\tilde{R}_3 \subset Z \times W$, se verifican las siguientes propiedades (Kaufmann, 1982):

- i. Asociatividad: $(\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2) \circ \tilde{R}_3 = \tilde{R}_1 \circ (\tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_3)$
- ii. Distributividad respecto de la unión: $\tilde{R} \circ (\tilde{T}_1 \cup \tilde{T}_2) = (\tilde{R} \circ \tilde{T}_1) \cup (\tilde{R} \circ \tilde{T}_2)$
- iii. $\tilde{T}_1 \subset \tilde{T}_2 \Rightarrow (\tilde{R} \circ \tilde{T}_1) \subset (\tilde{R} \circ \tilde{T}_2)$

3. RELACIONES DEFINIDAS EN UN CONJUNTO

R es una *relación definida en un conjunto* X , si y solo si $R \subset X^2$ ($X^2 = X \times X$).

3.1. Posibles propiedades de las relaciones definidas en un conjunto

Las relaciones binarias definidas en un conjunto pueden cumplir diferentes propiedades que permiten una clasificación de las mismas. En primer lugar se consideran las correspondientes a una *relación crisp*.

R es *reflexiva* si y solo si $\forall x \in X : (x, x) \in R$.

R es *arreflexiva* si y solo si $\forall x \in X : (x, x) \notin R$.

R es *simétrica* si y solo si $\forall x \forall y \in X : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$.

R es *asimétrica* si y solo si $\forall x \forall y \in X : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$.

R es *antisimétrica* si y solo si $\forall x \forall y \in X : [(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R] \Rightarrow x = y$.

R es *transitiva* si y solo si $\forall x \forall y \forall z \in X : [(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R] \Rightarrow (x, z) \in R$.

Estas propiedades pueden extenderse a las relaciones *fuzzy* y expresarlas mediante la función de pertenencia (Kaufmann, 1973; Klir y Yuan, 1995).

\tilde{R} es *reflexiva* si y solo si $\mu_{\tilde{R}}(x, x) = 1, \forall x \in X$.

\tilde{R} es *simétrica* si y solo si $\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \mu_{\tilde{R}}(y, x), \forall (x, y) \in X^2$.

\tilde{R} es *antisimétrica* si y solo si

$$[\mu_{\tilde{R}}(x, y) > 0 \wedge \mu_{\tilde{R}}(y, x) > 0] \Rightarrow x = y, \forall (x, y) \in X^2$$

\tilde{R} es *max-min transitiva* si y solo si $\mu_{\tilde{R}}(x, z) \geq \max_y [\min(\mu_{\tilde{R}}(x, y), \mu_{\tilde{R}}(y, z))]$

\tilde{R} es *antirreflexiva* si y solo si $\mu_{\tilde{R}}(x, x) = 0, \forall x \in X$.

Además se verifica que:

$$\tilde{R} \text{ reflexiva} \Rightarrow \tilde{R} \circ \tilde{R} = \tilde{R}^2 \text{ reflexiva}$$

$$\tilde{R} \text{ reflexiva} \Rightarrow \tilde{R} \subset \tilde{R}^2$$

$$\tilde{R} \text{ es max-min transitiva} \Leftrightarrow \tilde{R}^2 \subset \tilde{R}$$

Existen otras definiciones de las propiedades de las relaciones binarias borrosas (Kaufmann, 1973; Zimmermann, 1991; Kaufmann y Gil Aluja, 1993; Klir y Yuan, 1995).

3.2. Clausura transitiva de una relación binaria borrosa

Sea $\tilde{R} \subset X \times X$ se define $\tilde{R}^2 = \tilde{R} \circ \tilde{R}$ la relación borrosa cuya función de pertenencia es:

$$\mu_{\tilde{R}^2}(x, z) = \max_y [\min(\mu_{\tilde{R}}(x, y), \mu_{\tilde{R}}(y, z))] \quad x, y, z \in X.$$

Se denomina *clausura transitiva* de una relación borrosa \tilde{R} a la relación (Kaufmann, 1982)

$$\hat{\tilde{R}} = \tilde{R} \cup \tilde{R}^2 \cup \tilde{R}^3 \cup \tilde{R}^4 \cup \dots$$

Propiedades (Kaufmann, 1982):

- i. La clausura transitiva de una relación binaria borrosa es una relación binaria transitiva.
- ii. Sea \tilde{R} una relación binaria borrosa. Si a partir de un cierto k se verifica que $\tilde{R}^{k+1} = \tilde{R}^k$, entonces $\hat{\tilde{R}} = \tilde{R} \cup \tilde{R}^2 \cup \dots \cup \tilde{R}^k$.
- iii. Si $\tilde{R} \subset X \times X$ y $n = \text{card } X$, entonces $\hat{\tilde{R}} = \tilde{R} \cup \tilde{R}^2 \cup \dots \cup \tilde{R}^n$.

3.3. Clasificación de las relaciones binarias definidas en un conjunto X

Al considerar las diferentes propiedades, se pueden distinguir distintos tipos de relaciones definidas en un conjunto X , como se indica en la Tabla 1. Algunos de ellos serán tratados en este trabajo.

	Reflexiva	Arreflexiva	Simétrica	Asimétrica	Antisimétrica	Transitiva
Equivalencia						
Compatibilidad / semejanza						
Pre-orden						
Orden amplio						
Orden estricto						

Tabla 1. Algunos tipos de relaciones binarias definidas en un conjunto

4. RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Una relación binaria $R \subset X^2$ es de *equivalencia* si y sólo si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Para cada elemento x se puede definir un conjunto, denotado K_x , que contiene todos los elementos del referencial que están relacionados con éste a través de la relación R . K_x es la clase de equivalencia de la relación con respecto a x y todos los elementos que pertenecen a la misma clase son equivalentes. Formalmente, $K_x = \{y / (x, y) \in R\}$, $x \in K_x$ por ser una relación reflexiva.

Una relación de equivalencia R definida sobre X determina una partición del conjunto en clases de equivalencia, dado que las clases son no vacías, disjuntas de a pares y su unión es X (Lentin y Rivaud, 1969).

La familia de todas las clases de equivalencia definidas por la relación R , es el conjunto cociente de X por la relación de equivalencia y se denota X/R .

Una relación binaria borrosa $R \subset X^2$ es de *equivalencia borrosa* o de *similitud* si y sólo si es reflexiva, simétrica y transitiva max-min².

Si \tilde{R} es una relación de *similitud*, cada α -corte para $\alpha \in (0,1]$ es una relación de equivalencia nítida, que representa la presencia de similitud de grado α entre los elementos. Cada una de esas relaciones de equivalencia *crisp* determina una partición de X . $\pi(R_\alpha)$ denota la partición correspondiente a la relación de equivalencia de R_α . Dos elementos x e y pertenecen al mismo subconjunto de la partición si y solo si $\mu_{\tilde{R}}(x, y) \geq \alpha$. Cada relación de similitud se asocia con el conjunto $\Pi(\tilde{R}) = \{\pi(R_\alpha) / \alpha \in (0,1]\}$ de particiones del conjunto X . $\pi(R_\alpha)$ es un refinamiento de $\pi(R_\beta)$ si y solo si $\alpha \geq \beta$ (Dubois y Prade, 1980).

Ejemplo 3. La relación \tilde{R} definida en $X = \{a, b, c, d\}$, mediante su matriz de pertenencia (Figura 5), es una relación de *equivalencia borrosa* dado que es reflexiva (la diagonal principal tiene unos), simétrica (es simétrica respecto de la diagonal principal) y transitiva max-min ($\tilde{R} \circ \tilde{R} = \tilde{R}$). Está asociada con una secuencia de particiones $\pi(R_\alpha)$ para $\alpha > 0$, $\alpha \in \Lambda_{\tilde{R}} = \{0.7, 0.8, 1\}$. Sus refinamientos pueden ser graficados mediante un diagrama de árbol (Figura 6).

² Este concepto puede ser generalizado para otra definición de transitividad de una relación *fuzzy*.

\tilde{R}	a	b	c	d
a	1	0.8	0.7	1
b	0.8	1	0.7	0.8
c	0.7	0.7	1	0.7
d	1	0.8	0.7	1

Figura 5. Matriz de pertenencia de \tilde{R}

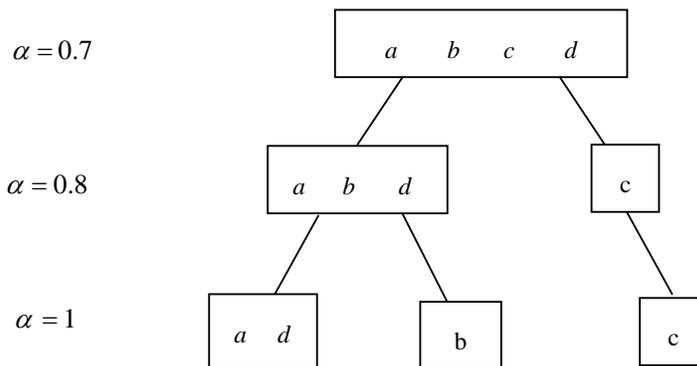


Figura 6. Diagrama de árbol

Las clases de equivalencia formadas por los niveles de refinamiento de una relación de similitud pueden interpretarse como conjuntos de elementos que son similares entre sí en un grado no menor que α .

El concepto de árbol de partición en una relación de similitud (Figura 6) juega el mismo papel que el conjunto cociente en una relación de equivalencia (Zadeh, 1971).

Las relaciones de similitud, al igual que las de equivalencia, definen clases de similitud. Dada una relación de similitud \tilde{R} definida en X , la clase de similitud para cada elemento $x \in X$ es un conjunto borroso en el cual el grado de pertenencia de cada elemento $y \in X$ es la intensidad de la relación de cada elemento con x . Es decir, la clase de similitud para un elemento x representa el grado con el cual todos los otros elementos de X son similares con x (Klir y Yuan, 1995).

5. CAPITAL Y ESPACIO FINANCIERO

En esta sección se presenta una relación de equivalencia financiera basada en el *Principio de proyección financiera* introducido por Gil Peláez (1987) a partir de los conceptos de *capital* y *espacio financiero*. En el apartado 7 se desarrolla una extensión *fuzzy* de esta relación.

El sujeto económico considera la magnitud tiempo con diversos significados según sea la naturaleza del problema que pretende explicar o analizar.

Una interpretación consiste en considerar el tiempo como una magnitud sin influencia en el fenómeno económico. Bajo una hipótesis de fenómenos estáticos o invariantes respecto al tiempo, el tiempo y el espacio son solamente el soporte físico de los hechos económicos.

Con la aparición de los modelos dinámicos en los que intervienen variables económicas cuyos valores son función del tiempo, se lo considera una variable exógena de la que en cierta forma depende el resultado del fenómeno económico.

Si se tiene en cuenta que en todo proceso de producción interviene el tiempo y que entre dos procesos de igual rendimiento y factores, pero de diferente duración, el sujeto económico prefiere aquel que representa un menor consumo de tiempo, éste puede ser contemplado como un bien económico capaz, junto con otros, de transformarse en nuevos bienes a través de un proceso productivo, o de canjearse o sustituirse por otro bien en un proceso o decisión de consumo (Gil Peláez, 1987).

Bajo esta perspectiva se identifican los bienes económicos mediante el par (C, t) . C indica el valor del bien y t expresa el momento de tiempo en que va referida dicha valoración, llamado momento de disponibilidad, de referencia o de vencimiento del valor del bien.

Se denomina *capital financiero* a la medida de un bien económico referida al momento de su disponibilidad o vencimiento, la magnitud bidimensional $(C, t) / C \in \mathbb{R}^+, t \in \mathbb{R}$ y *espacio financiero* al conjunto de todos los posibles valores del *capital financiero* $E = \{(C, t) / C \in \mathbb{R}^+, t \in \mathbb{R}\}$.

El conjunto $E(t_0) = \{(C, t) / C \in \mathbb{R}^+, t = t_0\}$ se denomina *corte del espacio financiero* por t_0 , y representa el subconjunto de todos los capitales con vencimiento t_0 .

El *corte del espacio financiero* por C_0 es el subconjunto de todos los capitales de valor C_0 , $E(C_0) = \{(C, t) / C = C_0, t \in R\}$.

5.1. Relación de equivalencia financiera

Todo hecho económico en el que intervienen capitales financieros recibe el nombre de fenómeno financiero. Operación financiera es toda acción que intercambia o sustituye ciertos capitales financieros por otros de distinto vencimiento o bien todo cambio no simultáneo de capitales (Gil Peláez, 1987).

La mayoría de los fenómenos financieros son operaciones financieras o asimilables a operaciones financieras más o menos imperfectas.

Con el propósito de poder resolver algunos problemas que plantean los fenómenos financieros pueden definirse, en el espacio financiero E , relaciones de equivalencia que permitan al sujeto económico decir si los capitales (C, t) y (C', t') son equivalentes.

Para definir una relación de equivalencia en el espacio financiero $E = \{(C, t) / C \in \mathfrak{R}^+, t \in \mathfrak{R}\}$ se considera un único criterio mediante el cual, dado un capital cualquiera (C, t) , se puede obtener el valor V del capital sustituto con vencimiento p fijo. Es decir, el sujeto económico es capaz de realizar una aplicación de E en el corte p , o sea, en $E(p) = \{(V, t), V \in \mathfrak{R}^+, t = p\}$ (Gil Peláez, 1987).

Este postulado recibe el nombre de *principio de proyección o sustitución financiera* en p , y el valor V , correspondiente a un capital (C, t) se expresa: $V = \text{Proy}_p(C, t)$ (Figura 7).

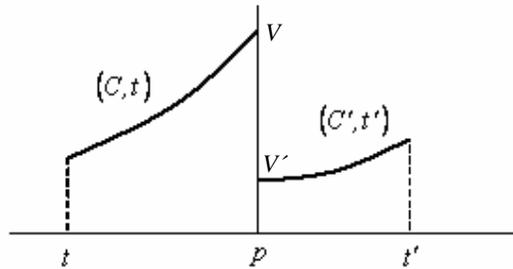


Figura 7. Proyección financiera

Asociado a este criterio de proyección financiera en p se define la relación de *equivalencia financiera* R en el espacio financiero E , definida por la condición de tener la misma proyección, es decir:

$$(C_1, t_1)R(C_2, t_2) \Leftrightarrow \text{Proy}_p(C_1, t_1) = \text{Proy}_p(C_2, t_2)$$

Se verifican las propiedades:

Reflexiva: $(C, t)R(C, t), \forall (C, t) \in E$

Simétrica: $[(C_1, t_1)R(C_2, t_2)] \Rightarrow [(C_2, t_2)R(C_1, t_1)], \forall (C_1, t_1) \in E, \forall (C_2, t_2) \in E$

Transitiva: $[(C_1, t_1)R(C_2, t_2)] \wedge [(C_2, t_2)R(C_3, t_3)] \Rightarrow [(C_1, t_1)R(C_3, t_3)],$
 $\forall (C_1, t_1), \forall (C_2, t_2), \forall (C_3, t_3) \in E$

Una clase de equivalencia está formada por el conjunto de capitales que tienen la misma proyección financiera y como representante de la misma puede elegirse (V, p) (representante canónico).

El conjunto cociente de esta relación está dado por $E/R = \{(V, p)/V = \text{Proy}_p(C, t)\}$ (Figura 8).

Se considera *capital nulo* a todo capital con valor cero, cualquiera sea t , que tiene proyección nula en p , o sea $\text{Proy}_p(0, t) = 0$. La clase de equivalencia está representada por los puntos del eje del tiempo.

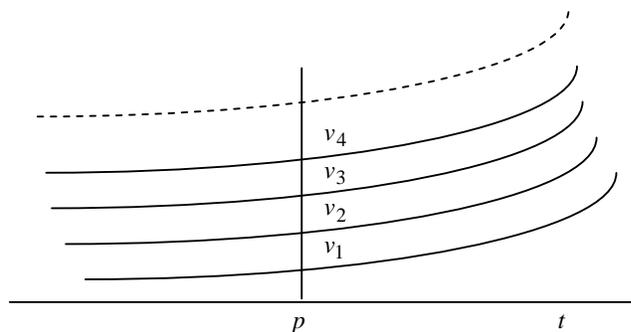


Figura 8. Conjunto cociente

Es importante destacar el carácter relativo de la relación de equivalencia dado que depende del criterio de proyección en p , al que la equivalencia va asociada (Gil Peláez, 1987).

6. RELACIONES DE SEMEJANZA

Una relación binaria $R \subset X^2$ es de *semejanza o compatibilidad* (también se la llama relación de *proximidad o tolerancia*) si y sólo si es reflexiva y simétrica.

Un concepto importante asociado con este tipo de relaciones son las *clases de compatibilidad*, también denominadas *clases de tolerancia*. Dada una relación de semejanza R , una clase de compatibilidad es un subconjunto A de X tal que $xRy, \forall x, y \in A$. Una clase de *compatibilidad maximal* es una clase de compatibilidad que no está contenida propiamente en ninguna de las otras clases de compatibilidad (Klir y Yuan, 1995).

La familia de todas las clases de compatibilidad maximales inducidas por R sobre X determinan un *cubrimiento completo* de X con respecto a R .

Una relación binaria borrosa $R \subset X^2$ es de *semejanza, compatibilidad, proximidad o tolerancia* si y sólo si es reflexiva y simétrica.

Si \tilde{R} es una relación de compatibilidad borrosa, las clases de compatibilidad se definen en términos de los grados de pertenencia α . Las clases de compatibilidad de nivel α se determinan a partir de los α -cortes de la relación para $\alpha \in (0, 1]$. Una clase α -compatible es un subconjunto A de X tal que $\mu_{\tilde{R}(x,y)} \geq \alpha, \forall x, y \in A$. Los conceptos de clase α -compatible maximal y de α -cubrimiento completo se generalizan a partir de los correspondientes conceptos para las relaciones de compatibilidad nítidas ($\alpha = 1$).

Para algunos valores de α , los α -cubrimientos completos de una relación de semejanza $R \subset X^2$ pueden determinar una partición de X . Como \tilde{R} no es necesariamente una relación transitiva, no puede garantizarse que esto ocurra para todo valor de α como en las relaciones de similitud.

La ausencia de transitividad distingue a las relaciones de compatibilidad de las de similitud. Como la clausura transitiva de una relación binaria borrosa es transitiva, la clausura transitiva de una relación de semejanza es una relación de similitud. Kaufmann (1982) considera que la noción de similitud constituye el puente que existe entre la equivalencia y la semejanza.

Ejemplo 4. La relación \tilde{R} definida en $X = \{a, b, c, d, e\}$ mediante su matriz de pertenencia (Figura 9), es una relación de *semejanza borrosa* dado que es reflexiva (la diagonal principal tiene unos) y simétrica (su matriz de pertenencia es simétrica respecto de la diagonal principal). Los α -cubrimientos completos de la relación $\tilde{R} \subset X^2$ se pueden representar mediante un diagrama de árbol (Figura 10).

\tilde{R}	a	b	c	d	e
a	1	0	1	0.5	0.2
b	0	1	0	0	0.3
c	1	0	1	0.5	0.2
d	0.5	0	0.5	1	0.7
e	0.2	0.3	0.2	0.7	1

Figura 9. Matriz de pertenencia

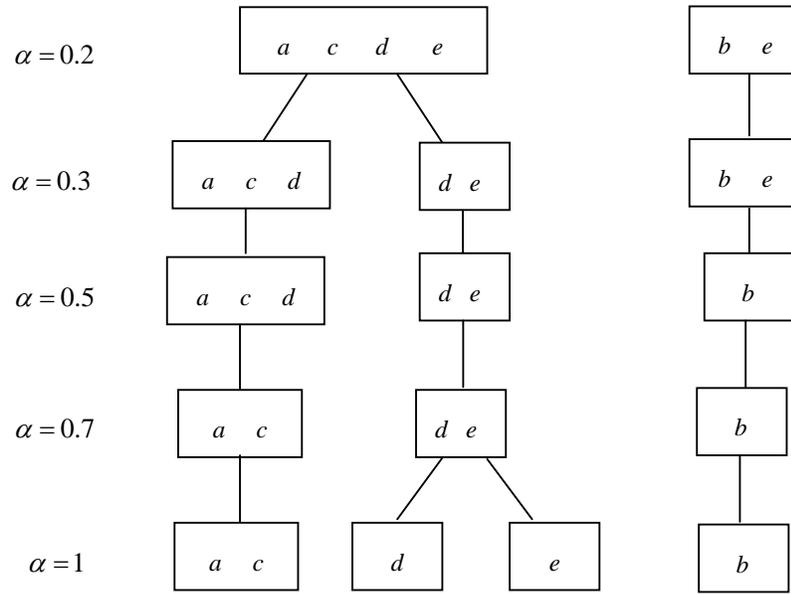


Figura 10. Diagrama de árbol

Puede observarse en la Figura 10 que los α -cubrimientos completos de la relación \tilde{R} determinan una partición de X para $\alpha \geq 0.7$.

6.1. Distancia min-max en una relación de semejanza

Si \tilde{R} es una relación de semejanza, entonces su clausura transitiva $\hat{\tilde{R}}$ es una relación de similitud (Kaufmann, 1982).

Se define *distancia min-max* en \tilde{R} como: $d_{\tilde{R}}(x, y) = 1 - \mu_{\tilde{R}}(x, y)$, es decir $d_{\tilde{R}}(x, y) = \mu_{\tilde{R}}(x, y)$.

En efecto, d es una distancia porque:

i. $d(x, y) \geq 0$ dado que $0 \leq \mu_{\tilde{R}}(x, y) \leq 1$

ii. $d_{\tilde{R}}(x, y) = d_{\tilde{R}}(y, x)$ como $\hat{\tilde{R}}$ es simétrica su complemento $\overline{\hat{\tilde{R}}}$ también lo es.

iii. $d_{\bar{R}}(x, z) \leq d_{\bar{R}}(x, y) * d_{\bar{R}}(y, z)$ (* es la operación min-max) porque si una relación borrosa es transitiva max-min, entonces su complemento es una relación transitiva min-max, es decir que $\mu_{\bar{R}}(x, z) \leq \min[\max(\mu_{\bar{R}}(x, y), \mu_{\bar{R}}(y, z))]$.

El gran interés de la transitividad consiste en la posibilidad de reagrupar los elementos en clases de equivalencia, es decir, en conjuntos disjuntos.

7. RELACIÓN DE SEMEJANZA EN UN ESPACIO FINANCIERO

Asociado al criterio de proyección financiera en p (visto en 5.1) se define la relación de semejanza financiera \tilde{S} en E , determinada por la condición de tener proyecciones *semejantes en grado α* .

Sean los capitales financieros (C_1, t_1) y (C_2, t_2) tales que sus proyecciones son $C'_1 = \text{Proy}_p(C_1, t_1)$ y $C'_2 = \text{Proy}_p(C_2, t_2)$, respectivamente, en un mismo momento de tiempo p .

Para definir la relación de semejanza o tolerancia financiera se asigna un mismo valor $b \in \mathfrak{R}, b > 0$ a cada proyección, denominado tolerancia, que permite definir los siguientes números borrosos triangulares $\tilde{C}'_1 = (C'_1 - b, C'_1, C'_1 + b)$ y $\tilde{C}'_2 = (C'_2 - b, C'_2, C'_2 + b)$.

Se define la relación *fuzzy* \tilde{S} en el espacio financiero E de modo que:

$$\mu_{\tilde{S}}((C_1, t_1); (C_2, t_2)) = \mu_{\tilde{C}'_1}(C'_2) \quad (I)$$

Es decir que los capitales financieros (C_1, t_1) y (C_2, t_2) son semejantes en grado α si y solo si $\mu_{\tilde{C}'_1}(C'_2) = \alpha$ donde $C'_1 = \text{Proy}_p(C_1, t_1)$ y $C'_2 = \text{Proy}_p(C_2, t_2)$ (Figura 11).

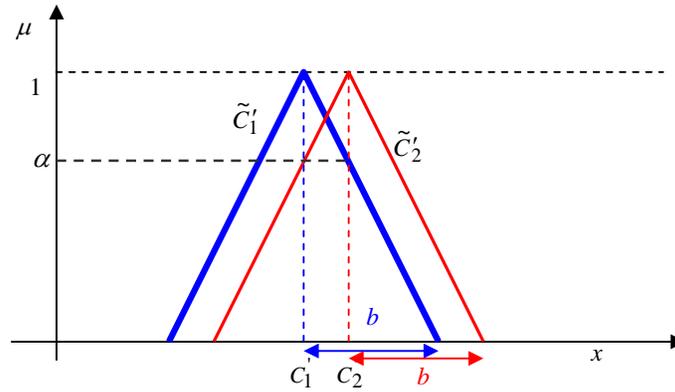


Figura 11. Determinación del grado de semejanza

Esta relación es de semejanza borrosa debido a que cumple con las siguientes propiedades:

Reflexiva: $\mu_{\tilde{S}}((C, t); (C, t)) = 1, \forall (C, t) \in E$ (obvio).

Simétrica: $\mu_{\tilde{S}}((C_1, t_1); (C_2, t_2)) = \mu_{\tilde{S}}((C_2, t_2); (C_1, t_1)), \forall (C_1, t_1) \in E, \forall (C_2, t_2) \in E$

En efecto,

Por (I) $\mu_{\tilde{S}}((C_1, t_1); (C_2, t_2)) = \mu_{\tilde{C}'_1}(C'_2)$ y $\mu_{\tilde{S}}((C_2, t_2); (C_1, t_1)) = \mu_{\tilde{C}'_2}(C'_1)$

Sea $b \in \mathfrak{R}, b > 0$ la tolerancia de las proyecciones. Se obtienen los siguientes números borrosos triangulares $\tilde{C}'_1 = (C'_1 - b, C'_1, C'_1 + b)$ y $\tilde{C}'_2 = (C'_2 - b, C'_2, C'_2 + b)$, cuyas funciones de pertenencia son:

$$\mu_{\tilde{C}'_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq C'_1 - b \\ \frac{x - (C'_1 - b)}{b} & \text{si } C'_1 - b \leq x \leq C'_1 \\ \frac{-x + C'_1 + b}{b} & \text{si } C'_1 \leq x \leq C'_1 + b \\ 0 & \text{si } x \geq C'_1 + b \end{cases} \quad (\text{II})$$

$$\mu_{\tilde{C}_2'}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq C_2' - b \\ \frac{x - (C_2' - b)}{b} & \text{si } C_2' - b \leq x \leq C_2' \\ \frac{-x + C_2' + b}{b} & \text{si } C_2' \leq x \leq C_2' + b \\ 0 & \text{si } x \geq C_2' + b \end{cases} \quad (\text{III})$$

Para calcular $\mu_{\tilde{C}_1'}(C_2')$ y de $\mu_{\tilde{C}_2'}(C_1')$ se considera:

i. $C_2' \leq C_1'$

Si $C_2' \leq C_1' - b$ entonces $C_1' \geq C_2' + b$. Al reemplazar en (II) y en (III) se obtiene, respectivamente, $\mu_{\tilde{C}_1'}(C_2') = 0$ y $\mu_{\tilde{C}_2'}(C_1') = 0$.

Si $C_1' - b \leq C_2' \leq C_1'$ entonces $C_2' \leq C_1' \leq C_2' + b$. Al reemplazar en (II) y en (III) se obtiene, respectivamente, $\mu_{\tilde{C}_1'}(C_2') = \frac{C_2' - C_1' + b}{b}$ y $\mu_{\tilde{C}_2'}(C_1') = \frac{-C_1' + C_2' + b}{b}$, en consecuencia ambos valores resultan iguales.

ii. $C_2' \geq C_1'$

Se procede análogamente que en el caso i).

Por lo tanto $\mu_{\tilde{C}_1'}(C_2') = \mu_{\tilde{C}_2'}(C_1') \quad \forall C_1', C_2' \in \mathfrak{R}^+$ y queda demostrada la simetría.

8. CASO DE ESTUDIO

Se considera el siguiente espacio financiero simplificado:

$$E = \{(C_1, t_1), (C_2, t_2), (C_3, t_3), (C_4, t_4), (C_5, t_5), (C_6, t_6) / C_i \in \mathfrak{R}^+, t_i \in \mathfrak{R}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Donde:

$$C_1 = 4100 \text{ con } t_1 = 1; C_2 = 7630,20 \text{ con } t_2 = 9; C_3 = 10500 \text{ con } t_3 = 12$$

$$C_4 = 4567,75 \text{ con } t_4 = 4; C_5 = 4200,50 \text{ con } t_5 = 2; C_6 = 7537,25 \text{ con } t_6 = 7$$

8.1. Proyecciones de los capitales

Se calculan las proyecciones de los capitales para $i = 0,08$ y $p = 6$.

$$\text{Proy}_{p=6}(C_1, t_1) = 4100 \cdot (1 + 0,08)^5, \quad \text{Proy}_{p=6}(C_1, t_1) = 6024,245$$

$$\text{Proy}_{p=6}(C_2, t_2) = 7630,20 \cdot (1 + 0,08)^{-3}, \quad \text{Proy}_{p=6}(C_2, t_2) = 6057,0988$$

$$\text{Proy}_{p=6}(C_3, t_3) = 10500 \cdot (1 + 0,08)^{-6}, \quad \text{Proy}_{p=6}(C_3, t_3) = 6616,7811$$

$$\text{Proy}_{p=6}(C_4, t_4) = 4567,75 \cdot (1 + 0,08)^2, \quad \text{Proy}_{p=6}(C_4, t_4) = 5327,82$$

$$\text{Proy}_{p=6}(C_5, t_5) = 4200,50 \cdot (1 + 0,08)^4, \quad \text{Proy}_{p=6}(C_5, t_5) = 5714,7339$$

$$\text{Proy}_{p=6}(C_6, t_6) = 7537,25 \cdot (1 + 0,08)^{-1}, \quad \text{Proy}_{p=6}(C_6, t_6) = 6978,9352$$

8.2. Matriz de semejanza

Para obtener los valores de la función de pertenencia de la relación de semejanza se considera una tolerancia de 600 pesos y se construyen los números borrosos asociados a las proyecciones, tomando solo la parte entera del resultado.

$$\tilde{C}'_1 = (5424; 6024; 6624), \quad \tilde{C}'_2 = (5457; 6057; 6657), \quad \tilde{C}'_3 = (6016; 6616; 7216),$$

$$\tilde{C}'_4 = (4727; 5327; 5927), \quad \tilde{C}'_5 = (5114; 5714; 6314), \quad \tilde{C}'_6 = (6378; 6978; 7578).$$

Se expresan los números borrosos triangulares mediante sus funciones de pertenencia.

$$\mu_{\tilde{C}'_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 5424 \\ \frac{x - 5424}{600} & \text{si } 5424 \leq x \leq 6024 \\ \frac{-x + 6624}{600} & \text{si } 6024 \leq x \leq 6624 \\ 0 & \text{si } x \geq 6624 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{C}_2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 5457 \\ \frac{x-5457}{600} & \text{si } 5457 \leq x \leq 6057 \\ \frac{-x+6657}{600} & \text{si } 6057 \leq x \leq 6657 \\ 0 & \text{si } x \geq 6657 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{C}_3}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 6016 \\ \frac{x-6016}{600} & \text{si } 6016 \leq x \leq 6616 \\ \frac{-x+7216}{600} & \text{si } 6616 \leq x \leq 7216 \\ 0 & \text{si } x \geq 7216 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{C}_4}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 4727 \\ \frac{x-4727}{600} & \text{si } 4727 \leq x \leq 5327 \\ \frac{-x+5927}{600} & \text{si } 5327 \leq x \leq 5927 \\ 0 & \text{si } x \geq 5927 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{C}_5}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 5114 \\ \frac{x-5114}{600} & \text{si } 5114 \leq x \leq 5714 \\ \frac{-x+6314}{600} & \text{si } 5714 \leq x \leq 6314 \\ 0 & \text{si } x \geq 6314 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{C}_6}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 6378 \\ \frac{x-6378}{600} & \text{si } 6378 \leq x \leq 6978 \\ \frac{-x+7578}{600} & \text{si } 6978 \leq x \leq 7578 \\ 0 & \text{si } x \geq 7578 \end{cases}$$

Se aplica (I) para calcular los correspondientes grados de semejanza.

$$\mu_{\tilde{C}'_1}(C'_2) = \frac{-6057 + 6624}{600}; \mu_{\tilde{C}'_1}(C'_2) = 0,945$$

$$\mu_{\tilde{C}'_1}(C'_3) = \frac{-6616 + 6624}{600}; \mu_{\tilde{C}'_1}(C'_3) = 0,01333$$

$$\mu_{\tilde{C}'_1}(C'_4) = 0$$

$$\mu_{\tilde{C}'_1}(C'_5) = \frac{5714 - 5424}{600}; \mu_{\tilde{C}'_1}(C'_5) = 0,4833$$

$$\mu_{\tilde{C}'_1}(C'_6) = 0$$

$$\mu_{\tilde{C}'_2}(C'_3) = \frac{-6616 + 6657}{600}; \mu_{\tilde{C}'_2}(C'_3) = 0,06833$$

$$\mu_{\tilde{C}'_2}(C'_4) = 0$$

$$\mu_{\tilde{C}'_2}(C'_5) = \frac{5714 - 5457}{600}; \mu_{\tilde{C}'_2}(C'_5) = 0,4283$$

$$\mu_{\tilde{C}'_2}(C'_6) = 0$$

$$\mu_{\tilde{C}'_3}(C'_4) = 0; \mu_{\tilde{C}'_3}(C'_5) = 0$$

$$\mu_{\tilde{C}'_3}(C'_6) = \frac{-6978 + 7216}{600}; \mu_{\tilde{C}'_3}(C'_6) = 0,3966$$

$$\mu_{\tilde{C}'_4}(C'_5) = \frac{-5714 + 5927}{600}; \mu_{\tilde{C}'_4}(C'_5) = 0,355$$

$$\mu_{\tilde{C}'_4}(C'_6) = 0$$

$$\mu_{\tilde{C}'_5}(C'_6) = 0$$

Con los valores obtenidos, se construye la siguiente matriz de semejanza en el espacio E :

\tilde{S}	(C_1, t_1)	(C_2, t_2)	(C_3, t_3)	(C_4, t_4)	(C_5, t_5)	(C_6, t_6)
(C_1, t_1)	1	0,945	0,013	0	0,483	0
(C_2, t_2)	0,945	1	0,068	0	0,4283	0
(C_3, t_3)	0,013	0,068	1	0	0	0,396
(C_4, t_4)	0	0	0	1	0,355	0
(C_5, t_5)	0,483	0,4283	0	0,355	1	0
(C_6, t_6)	0	0	0,396	0	0	1

Tabla 2. Matriz de pertenencia de \tilde{S}

8.3. Diagrama de árbol de los α -cubrimientos completos de la relación de semejanza

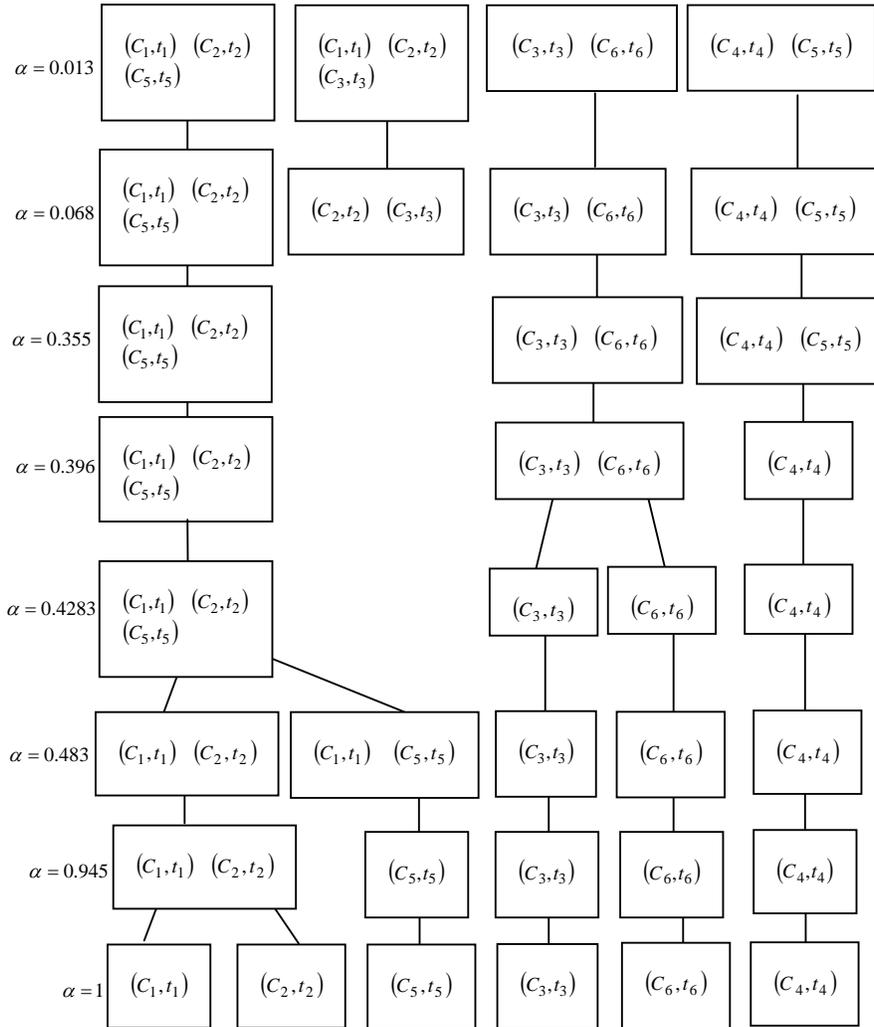


Figura 12. Diagrama de árbol

8.4. Clausura transitiva

A los efectos de obtener la clausura transitiva de \tilde{S} , se realiza la composición de la relación consigo misma tantas veces como sea necesario, mediante el empleo de un software adecuado. Los resultados figuran en las Tablas 3, 4 y 5.

\tilde{S}^2	(C_1, t_1)	(C_2, t_2)	(C_3, t_3)	(C_4, t_4)	(C_5, t_5)	(C_6, t_6)
(C_1, t_1)	1	0,945	0,068	0,355	0,483	0,013
(C_2, t_2)	0,945	1	0,068	0,355	0,483	0,068
(C_3, t_3)	0,068	0,068	1	0	0,068	0,396
(C_4, t_4)	0,355	0,355	0	1	0,355	0
(C_5, t_5)	0,483	0,483	0,068	0,355	1	0
(C_6, t_6)	0,013	0,068	0,396	0	0	1

Tabla 3. Matriz de pertenencia de \tilde{S}^2

\tilde{S}^3	(C_1, t_1)	(C_2, t_2)	(C_3, t_3)	(C_4, t_4)	(C_5, t_5)	(C_6, t_6)
(C_1, t_1)	1	0,945	0,068	0,355	0,483	0,068
(C_2, t_2)	0,945	1	0,068	0,355	0,483	0,068
(C_3, t_3)	0,068	0,068	1	0,068	0,068	0,396
(C_4, t_4)	0,355	0,355	0,068	1	0,355	0
(C_5, t_5)	0,483	0,483	0,068	0,355	1	0,068
(C_6, t_6)	0,068	0,068	0,396	0	0,068	1

Tabla 4. Matriz de pertenencia de \tilde{S}^3

\tilde{S}^4	(C_1, t_1)	(C_2, t_2)	(C_3, t_3)	(C_4, t_4)	(C_5, t_5)	(C_6, t_6)
(C_1, t_1)	1	0,945	0,068	0,355	0,483	0,068
(C_2, t_2)	0,945	1	0,068	0,355	0,483	0,068
(C_3, t_3)	0,068	0,068	1	0,068	0,068	0,396
(C_4, t_4)	0,355	0,355	0,068	1	0,355	0,068
(C_5, t_5)	0,483	0,483	0,068	0,355	1	0,068
(C_6, t_6)	0,068	0,068	0,396	0,068	0,068	1

Tabla 5. Matriz de pertenencia de \tilde{S}^4

Como $\tilde{S}^4 = \tilde{S}^5$, finalmente $\hat{S} = \tilde{S} \cup \tilde{S}^2 \cup \tilde{S}^3 \cup \tilde{S}^4$.

\hat{S}	(C_1, t_1)	(C_2, t_2)	(C_3, t_3)	(C_4, t_4)	(C_5, t_5)	(C_6, t_6)
(C_1, t_1)	1	0,945	0,068	0,355	0,483	0,068
(C_2, t_2)	0,945	1	0,068	0,355	0,483	0,068
(C_3, t_3)	0,068	0,068	1	0,068	0,068	0,396
(C_4, t_4)	0,355	0,355	0,068	1	0,355	0,068
(C_5, t_5)	0,483	0,483	0,068	0,355	1	0,068
(C_6, t_6)	0,068	0,068	0,396	0,068	0,068	1

Tabla 6. Matriz de pertenencia de la clausura transitiva de \tilde{S}

8.5. Diagrama de árbol de los refinamientos de la relación de similitud

Como la clausura transitiva de \tilde{S} es una relación de similitud, los diferentes niveles de refinamiento determinan una partición del espacio financiero E , como se observa en la Figura 13.

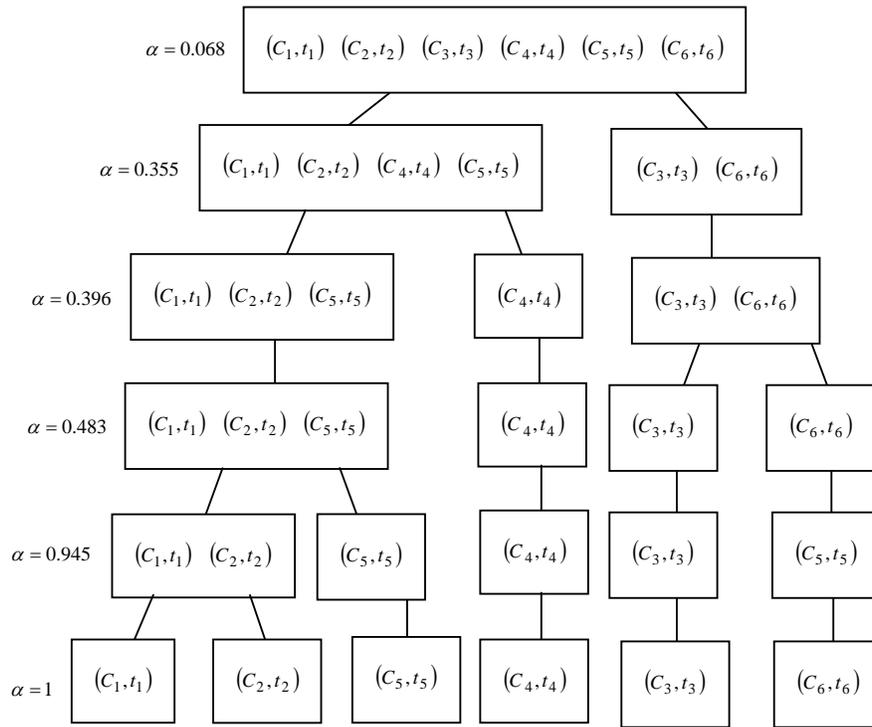


Figura 13. Diagrama de árbol

8.6. Distancia min-max

Se calcula la *distancia min-max* en \tilde{S} referida a su clausura transitiva (Tabla 7).

\tilde{S}	(C_1, t_1)	(C_2, t_2)	(C_3, t_3)	(C_4, t_4)	(C_5, t_5)	(C_6, t_6)
(C_1, t_1)	0	0,055	0,932	0,645	0,517	0,932
(C_2, t_2)	0,055	0	0,932	0,645	0,517	0,932
(C_3, t_3)	0,932	0,932	0	0,932	0,932	0,604
(C_4, t_4)	0,645	0,645	0,932	0	0,645	0,932
(C_5, t_5)	0,517	0,517	0,932	0,645	0	0,932
(C_6, t_6)	0,932	0,932	0,604	0,932	0,932	0

Tabla 7. Matriz de distancias *min-max* en \tilde{S}

Al observar la Tabla 7 y el diagrama de árbol de la Figura 13, se aprecia que para niveles de $\alpha < 0.945$ han quedado elementos agrupados en una misma clase de similitud, cuya distancia min-max es mayor que 0.5. Por ejemplo, para $\alpha \leq 0.483$, C_1, C_2 y C_5 pertenecen a la misma clase aunque $d(C_1, C_5) = d(C_2, C_5) = 0.517$.

9. CONCLUSIONES

Las relaciones binarias *fuzzy* permiten mayor flexibilidad a los modelos y proporcionan una información más clara al decisor. Pueden considerarse una generalización de las relaciones binarias nítidas, dado que las relaciones binarias *crisp* resultan un caso particular de las *fuzzy*.

Al generalizar al campo *fuzzy* la relación de equivalencia financiera definida por Gil Peláez en 1987, se obtiene una relación de semejanza o proximidad, que si bien pierde la transitividad gana en flexibilidad, al permitir considerar los capitales semejantes en un grado α deseado y determinar el valor de la tolerancia para cada caso particular de acuerdo con el criterio del decisor.

La obtención de la clausura transitiva de una relación de semejanza borrosa hace posible recuperar la transitividad y al mismo tiempo, conocer la distancia min-max en \tilde{R} entre los respectivos elementos del

conjunto considerado, información que resulta valiosa en el momento de la adopción de decisiones.

De forma análoga a lo realizado en este trabajo con la relación de equivalencia financiera, podría generalizarse al campo *fuzzy* la relación de preferencia financiera definida por Gil Peláez (1987).

Existen diversas aplicaciones de las relaciones binarias *fuzzy* a distintos campos de conocimiento, como por ejemplo medicina, biología, psicología, economía y gestión.

BIBLIOGRAFÍA

Birkhoff, G.; Mac Lane, S. (1970). *Algebra Moderna*. Vicens-Vives, Barcelona.

Cissell, R.; Cissell, H. (1978). *Matemáticas Financieras*. Editorial CECSA. México.

Dubois, D.; Prade, H. (1980). *Fuzzy Sets and Systems – Theory and Applications*. Academic Press, Nueva York.

Esteva, F. (1992). “Cálculo con relaciones borrosas”, en Trillas, E.; Gutiérrez Ríos, J. (edits.). *Aplicaciones de la lógica borrosa*. Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, pp.33-49.

Gil Aluja, J. (1995). *Grafos neuronales para la economía y la gestión de las empresas*. Editorial Pirámide, Madrid.

Gil Aluja, J. (1999). *Elementos para una teoría de la decisión en la incertidumbre*. Editorial Milladoiro, Vigo.

Gil Peláez, L. (1987). *Matemática de las operaciones financieras*. Editorial AC, Madrid.

Godement, R. (1978). *Algebra*. Editorial Tecnos, Madrid.

Kaufmann, A. (1982). *Introducción a la teoría de los subconjuntos borrosos*. C.E.C.S.A., México.

Kaufmann A.; Gil Aluja J. (1993). *Nuevas técnicas para la dirección estratégica*. Universidad de Barcelona, Barcelona.

Klir, G.; Yuan; B. (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications*. Prentice-Hall PTR, New Jersey.

Lazzari, L.; Mouliá, P. (2007). “Relaciones binarias: un enfoque alternativo”. *Actas de las XXIII Jornadas de Epistemología de las Ciencias Económicas*. Buenos Aires.

Lazzari, L.; Mouliá, P.; Eriz, M. (2007). "Relaciones binarias fuzzy: una herramienta para la toma de decisión". *Actas de las XXII Jornadas Nacionales de Docentes de Matemática de Facultades de Ciencias Económicas y Afines* (en soporte digital). Mendoza.

Lentin, A.; Rivaud, J. (1969). *Algebra Moderna*. Aguilar, Madrid.

Pascale, R. (1998). *Decisiones financieras*. Ediciones Macchi, Buenos Aires.

Rojo, A. *Algebra I*. (1972). El Ateneo, Buenos Aires.

Suarez, A.S. (1995). *Decisiones óptimas de la inversión y financiación en la empresa*. Ediciones Pirámide S.A. Madrid.

Zadeh, L. (1971). "Similarity relations and fuzzy orderings". *Information Sciences* 3, pp.177-200.

Zimmermann H. (1991). *Fuzzy Set Theory and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Boston.