

## **LA MATEMÁTICA BORROSA Y EL PRECIO DE EQUILIBRIO: UNA APLICACIÓN A LAS AGUAS DEPURADAS**

Antonio Terceño\*, José Manuel Brotons\*\*

\*Universidad Rovira i Virgili - Facultad Ciencias Económicas y  
Empresariales - Gestió d'Empreses

Av. de la Universidad, n° 1- Reus – 43204 - España

\*\*Universidad Miguel Hernández - Estudios Económicos y Financieros

Av. Ferrocarril s/n - 03202 Elche – Alicante - España

jm.brotons@umh.es, atg@fcee.urv.es

Recibido 17 de junio de 2009, aceptado 26 de marzo de 2010

---

### **Resumen**

Ante la necesidad de conocer el valor de los bienes carentes de mercado, nuestro objetivo a lo largo del presente artículo es la propuesta de un mecanismo para su determinación. Partiendo del método de valoración contingente (CVM) utilizado en un entorno *crisp*, se aporta una metodología para agregar las opiniones inciertas con el objeto de obtener el precio de equilibrio. Un análisis posterior permitirá analizar la conveniencia de fijar subvenciones o impuestos sobre los mismos. La inexistencia de observaciones pasadas nos lleva a utilizar instrumentos de la teoría de los *Fuzzy Sets*. Para ello se seleccionarán dos grupos de expertos, unos que representarán a los demandantes y otro a los oferentes. Mediante sucesivas fases de petición de opinión y de suministro de información se determinarán ambos precios, y su intersección permitirá obtener el precio de equilibrio, de acuerdo con la teoría clásica. A lo largo del trabajo se han establecido criterios para determinar el número máximo de las mismas, teniendo presente la dispersión de las opiniones y su variación en dos fases consecutivas. En último lugar se realiza una aplicación del mismo para la determinación del precio de equilibrio del agua depurada en la provincia de Alicante (España). Para ello se ha realizado una encuesta a las empresas depuradoras de aguas residuales (EDAR) como oferentes y a los agricultores y empresas distribuidoras de aguas como demandantes.

**Palabras clave:** función de demanda, función de oferta, precio de equilibrio, elasticidad, distancia borrosa, EDAR, agua depurada.

---

## **FUZZY MATHEMATICS AND EQUILIBRIUM PRICE: AN APPLICATION TO THE TREATED WASTEWATER**

Antonio Terceño\*, José Manuel Brotons\*\*

\*Universidad Rovira i Virgili - Facultad Ciencias Económicas y Empresariales - Gestió d'Empreses

Av. de la Universidad, n° 1- Reus – 43204 - España

\*\*Universidad Miguel Hernández - Estudios Económicos y Financieros

Av. Ferrocarril s/n - 03202 Elche – Alicante - España

jm.brotons@umh.es, atg@fcee.urv.es

Received June 17<sup>th</sup> 2009, accepted March 26<sup>th</sup> 2010

---

### **Abstract**

Giving the necessity to know the price of a non-marketed good, our objective throughout the present paper is the proposal of a mechanism for their determination. Starting from the contingent valuation method (CVM) used in a crisp environment; we will propose a methodology to aggregate fuzzy opinions in order to get the equilibrium price. Further analysis will allow us to evaluate the convenience of fixing subsidies or taxes on such non-marketed goods. Previous works have deal with fuzzy demand and supply functions (Yager, 2000; Dompere, 1997). This paper will focus on the process of requesting supplying information. Two groups of experts were selected, one representing demand and the other supply. After successive phases, both prices were determined, and their intersection made it possible to obtain the market price in accordance with classical theory. The study established criteria for determining the maximum number of phases, bearing in mind the dispersion of opinions and their variation in two consecutive phases. Finally, the mechanism was applied to determine the market price of treated wastewater in the province of Alicante (Spain). A survey was made to the wastewater treatment plants (WWTP) as suppliers and farmers and water distribution companies as consumers.

**Keywords:** demand function, supply function, equilibrium price, elasticity, fuzzy distance, WWTP, treated water.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

El método de valoración contingente (MVC) (Brookshire y Eubanks, 1978; Brookshire y Randall, 1978; Schulze y d'Arge, 1978; Bentkover, 1986; Brookshire y Crocker, 1981) es un cuestionario basado en técnicas de valoración en el que la disposición a pagar (DDP) o disposición a aceptar (DDA) se obtiene directamente de las encuestados con respecto a un bien específico (Mitchell y Carson, 1984). Se ha usado principalmente en bienes para los que no existe mercado y en particular para bienes ambientales (O'Doherty, 1996). De acuerdo con Arrow *et al.* (1993), el método de valoración contingente puede generar estimaciones suficientemente fiables para ser el punto de partida del juicio de un proceso judicial de daños, y además, se ha convertido en el método más usado para determinar el valor de los bienes para los que no existe mercado (Clind y Murphy, 2001).

La estructura teórica del MVC puede seguirse en Bentkover (1986) y Brookshire y Crocker (1981). Una reflexión crítica de esta metodología puede verse en Arrow *et al.* (1993), y una respuesta a esta crítica en Carson *et al.* (1995). Los problemas de este método son básicamente: la gran distancia entre las medidas DDP y DDA, la estrategia de comportamiento en las respuestas, la naturaleza de la encuesta, etc.

Si los datos observados presentan una incertidumbre objetiva se utilizarán modelos aleatorios para su tratamiento. Sin embargo, si la incertidumbre es subjetiva, por ejemplo, debida a la falta de fiabilidad o imprecisión en la medida de los resultados, como distribución de parámetros, condiciones ambientales, o fuentes de datos, es más fiable utilizar modelos basados en la matemática borrosa. De acuerdo con esto, el precio de un bien para el que no existe mercado puede tratarse como una variable borrosa o *fuzzy*. La aproximación del precio en un entorno *fuzzy* puede seguirse en Dompere (1997 y 2004) quien obtiene las preferencias de los consumidores y productores en un entorno *fuzzy* mediante una aplicación borrosa en la que las decisiones *fuzzy* sobre el precio han sido tenidas en cuenta.

En este sentido, Yager (2000) presenta un modelo *fuzzy* con dos relaciones, una entre precio y oferta, y la otra entre precio y demanda. Su objetivo es encontrar el precio por el que la oferta iguala a la demanda. En él se investiga el problema de la solución simultánea de ecuaciones, incluyendo un modelo *fuzzy* de las relaciones. El proceso de agregación se basa en la partición del espacio precio.

Por otra parte, en Dompere (1997) las preferencias de precio de los consumidores y productores se obtienen en un espacio *fuzzy* mediante aplicaciones borrosas para obtener un espacio borroso del precio en el

que se construyen las decisiones sobre el mismo. Para hallar las soluciones de los problemas de decisión basados en precios *fuzzy* se utiliza la programación matemática, con lo que se obtienen precios de equilibrio.

De una forma similar, proponemos una metodología *fuzzy* para obtener el precio de un bien para el que no existe mercado. La metodología del DDP o DDA es útil pero está orientada para los precios máximos y no considera los precios mínimos que los consumidores y ofertantes están dispuestos a pagar o a aceptar. Se solicitará a los consumidores y usuarios el mínimo y el máximo que están dispuestos a pagar o a aceptar. Se considera la existencia de solución y la posibilidad de aplicar impuestos o subvenciones. Centraremos nuestra metodología en el proceso de agregación. La opinión agregada será obtenida después de diversas iteraciones, en las que también se tiene en cuenta la existencia de opiniones que distan bastante de la agregada y la posibilidad de que los expertos las cambien en las sucesivas iteraciones.

La estructura del presente artículo es la siguiente: en primer lugar se revisan los principales conceptos *fuzzy* que se van a aplicar, a continuación se analizan aquellos casos en los que no existe una relación directa entre el precio y la cantidad demandada y ofertada, pero en los que el precio puede variar en un intervalo para cada cantidad. En el apartado cuarto, nos planteamos como objetivo principal, la determinación del precio de equilibrio para aquellos bienes para los que no existe mercado. El precio de demanda y de oferta será considerado como un número borroso, con la correspondiente función de pertenencia y tendrá que ser determinado por un conjunto de expertos, cuya opinión adecuadamente tratada permitirá el conocimiento del precio de equilibrio. Esta sección concluirá analizando la conveniencia de subvencionar un bien, o de aplicarle un determinado impuesto. Finalmente se realizará una aplicación empírica para determinar el precio del agua depurada, que en la actualidad es un bien para el que no existe mercado. A pesar de que el estudio se limita a la provincia de Alicante, sus resultados pueden extenderse a cualquier otra zona geográfica, y en general a cualquier otro bien para el que no existe mercado.

## **2. ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS BORROSOS**

Denotemos por  $E$  el conjunto referencial, entonces, un conjunto borroso  $\tilde{A}$  se define mediante la función de pertenencia

$\mu_{\tilde{A}}(x): E \rightarrow [0, 1]$ , donde  $[0, 1]$  representa el intervalo de números de 0 a 1, inclusive.

Dado un conjunto borroso  $\tilde{A}$ , diremos que es normal si  $\bigvee_{\forall x \in E} \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ , es decir, cuando existe al menos un elemento cuya función de pertenencia toma el valor 1.

Dado un conjunto borroso  $\tilde{A}$  pertenecientes a un mismo referencial  $E$ , diremos que es convexo si  $\forall x_1, x_2 \in A_{\alpha}; \forall \alpha, \lambda \in [0, 1]$  se cumple que  $\mu_{A_{\alpha}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \mu_{A_{\alpha}}(x_1) \wedge \mu_{A_{\alpha}}(x_2)$

Dados dos conjuntos borrosos  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  con funciones de pertenencia  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  y  $\mu_{\tilde{B}}(x)$  respectivamente, la función de pertenencia de la unión,  $\tilde{C} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$  es  $\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x)$  y la de la intersección  $\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$  es  $\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x)$ . Dado un conjunto borroso  $\tilde{A}$  con función de pertenencia  $\mu_{\tilde{A}}(x)$ , la función de pertenencia del complementario es  $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$ .

Un número borroso (NB) es un conjunto borroso  $\tilde{A}$  normal y convexo cuyo conjunto referencial es el conjunto de los números reales.

Los  $\alpha$ -cortes de un número borroso  $\tilde{A}$ , están definidos por  $\tilde{A}_{\alpha} = \{x \in R / \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  y se denota por  $\tilde{A}_{\alpha} = [a_L(\alpha), a_U(\alpha)]$ .

Un número borroso triangular (NBT) corresponde a un NB cuya función de pertenencia es lineal y puede representarse por  $\tilde{A} = (a_l, a_c, a_r)$  donde  $a_c$  es el centro,  $a_l$  es el extremo izquierdo y  $a_r$  el derecho, con  $a_l \leq a_c \leq a_r$  y  $l_A = a_c - a_l$  y  $r_A = a_r - a_c$  el radio izquierdo y derecho respectivamente. Estos son los NB más ampliamente utilizados tanto por su facilidad operativa como por ser muy intuitivos en cuanto a su interpretación. Su función de pertenencia y sus  $\alpha$ -cortes son:

$$\alpha = \mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a_c - x}{l_A} & a_c - l_A < x \leq a_c \\ 1 - \frac{x - a_c}{r_A} & a_c < x \leq a_c - r_A \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

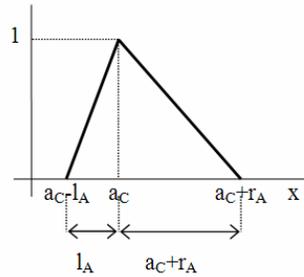


Figura 1. Función de pertenencia

Los  $\alpha$ -cortes se denotan por:

$$\tilde{A}_\alpha = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)] = [a_c - l_A(1-\alpha), a_c + r_A(1-\alpha)]$$

### 3. PRECIOS DE EQUILIBRIO PARA BIENES CARENTES DE MERCADO

De acuerdo con autores como Yao y Wu (1999) y Chang (2000), existen ocasiones en que el precio de demanda puede oscilar alrededor de determinados valores. Por ejemplo, el precio de las frutas y verduras es estacional y aumenta en verano, y además, puede variar diariamente. Por tanto, si aceptamos que las funciones de demanda y de oferta son lineales, para una demanda de  $x$ , el precio no será necesariamente  $p_d = a - bx$ , sino que oscilará entre  $p_{d1} = a - bx - \Delta_{d1}$  y  $p_{d2} = a - bx + \Delta_{d2}$ , con  $0 < \Delta_{d1} < a - bx$  y  $\Delta_{d2} > 0$ .

Por tanto, el precio de demanda  $\tilde{p}_D$  correspondiente a la cantidad demandada  $x$  será un número borroso triangular (NBT) que oscilará alrededor del precio  $p_d = a - bx$  según la siguiente función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{p}_d}(p) = \begin{cases} \frac{p - (a - bx - \Delta_{d1})}{\Delta_{d1}} & a - bx - \Delta_{d1} \leq p \leq a - bx \\ \frac{a - bx + \Delta_{d2} - p}{\Delta_{d2}} & a - bx \leq p \leq a - bx + \Delta_{d2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1)$$

De igual forma, el precio en la función de oferta variará entre  $p_{s1} = e + gx - \Delta_{s1}$  y  $p_{s2} = e + gx + \Delta_{s2}$ , con  $\Delta_{s1} > p_{s1} - e - gx$ , y  $\Delta_{s2} > 0$ .

Y el precio de oferta  $\tilde{p}_s$  correspondiente a la cantidad demandada  $x$ , será un NBT que fluctuará alrededor de  $p = e + gx$ , según la siguiente función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{p}_s}(p) = \begin{cases} \frac{p - (e + gx - \Delta_{s1})}{\Delta_{s1}} & e + gx - \Delta_{s1} \leq p < e + gx \\ \frac{e + gx + \Delta_{s2} - p}{\Delta_{s2}} & e + gx < p \leq e + gx + \Delta_{s2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2)$$

En el punto de equilibrio  $(x_0, p_0)$ , es decir, la intersección entre la oferta y la demanda, la cantidad demandada será:  $x_0 = \frac{a - e}{b + g}$ , el precio oscilará alrededor de  $p_0 = a - bx_0 = e + gx_0$ , y su función de pertenencia se obtendrá de la intersección de las funciones de pertenencia  $\mu_{\tilde{p}_d}(p)$  y  $\mu_{\tilde{p}_s}(p)$ :

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \mu_{\tilde{p}_d \cap \tilde{p}_s}(x) = \mu_{\tilde{p}_d}(x) \wedge \mu_{\tilde{p}_s}(x) \quad (3)$$

Nuestro trabajo tiene por objetivo la determinación del precio de equilibrio de un bien carente de mercado. Carece de sentido determinar la cantidad demandada u ofrecida. Debemos analizar el nivel de posibilidad de ofrecer un determinado bien a un precio dado. La oferta debe ser la que requiera el mercado en un momento dado, y vendrá referida al nivel de posibilidad que se le asigne.

Desde el punto de vista de los usuarios, se debe expresar la posibilidad de demandar un bien a un determinado precio, pero no se considera la cantidad de bien a ser usado. Además, las opiniones tendrán que ser expresadas por especialistas y técnicos, para basar las opiniones en hechos objetivos y no en la influencia de futuros impuestos.

Por tanto, el presente estudio trata de determinar si, para un determinado bien, el precio de equilibrio puede ser alcanzado. Además, el análisis nos permite determinar la conveniencia de implantar subvenciones o impuestos a determinados bienes. Para ello, a lo largo de esta sección se presenta una metodología para agregar las opiniones individuales de los consumidores y de los oferentes. Se proponen

sucesivas iteraciones en las que los expertos habrán de considerar si modifican sus opiniones, especialmente aquellos que presentan opiniones que distan más de la considerada como agregada.

### 3.1. Precio de demanda

El precio del bien será un número borroso ( $\tilde{P}_D$ ) cuya función de pertenencia será igual a uno para cualquier precio inferior a “ $a_D$ ”, y para precios superiores a “ $b_D$ ” tomará el valor cero. En consecuencia, “ $a_D$ ” representa el precio máximo al que la posibilidad de demanda es máxima, y “ $b_D$ ” indicará el precio a partir del cual, la posibilidad de demanda será nula. Entre ambos, la función de pertenencia será monótona decreciente, esto es, la posibilidad de demanda disminuye a medida que se incrementa el precio (Figura 2).

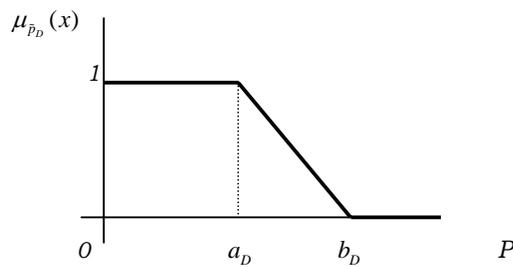


Figura 2. Precio de demanda

Su función de pertenencia es:

$$\alpha = \mu_{P_D}(x) = \begin{cases} 1 & x \leq a_D \\ \frac{x - b_D}{a_D - b_D} & a_D < x \leq b_D \\ 0 & b_D < x \end{cases} \quad (4)$$

Los  $\alpha$ -cortes del número borroso  $\tilde{P}_D$  estarán dados por el intervalo  $\tilde{P}_{D\alpha}$ , que representa valores cuya posibilidad de ocurrencia es mayor o igual que  $\alpha$ :

$$\tilde{P}_{D\alpha} = \{x \in U / \mu_{P_D}(x) \geq \alpha\} = [0, f_{P_D}^{-1}(\alpha)] = [0, b_D + \alpha(a_D - b_D)] \quad (5)$$

La función representada en la figura 2 puede adoptar diferentes formas, dependiendo de su elasticidad precio de demanda ( $E_{p_D}$ ), que se puede definir como la “variación porcentual que experimentará la función de pertenencia del precio de demanda ante la variación porcentual del precio”.

- a) Demanda perfectamente inelástica: aumentos en el precio, no modifican la cantidad demanda. La función de pertenencia toma el valor uno, sea cual sea el precio (Figura 3).

$$\alpha = \mu_{p_D}(x) = 1, \quad \forall x \in R \tag{6}$$

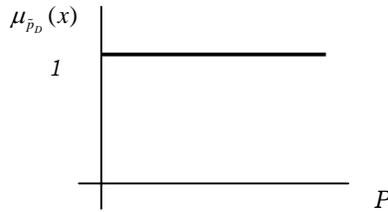


Figura 3. Precio de demanda inelástico

- b) Demanda con elasticidad relativa, aumentos en el precio suponen una disminución del valor de su función de pertenencia (Figura 2) que está expresada por la ecuación [4].
- c) Demanda con elasticidad perfecta, un aumento porcentual infinitesimalmente pequeño en el precio se traduce en una variación porcentual infinitamente grande en su función de pertenencia. La función de pertenencia sólo toma el valor uno para valores inferiores o iguales a  $p_0$  (Figura 4).

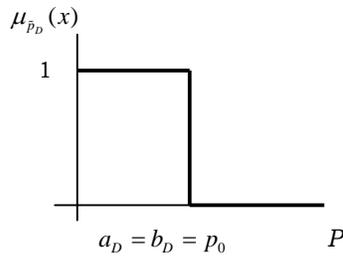


Figura 4. Precio de demanda elástico

$$\alpha = \mu_{p_D}(x) = \begin{cases} 0 & x > a_D \\ 1 & x \leq a_D \end{cases} \tag{7}$$

**3.2. Precio de oferta**

Los agentes de mercado estarán dispuestos a ofertar dicho bien siempre que supere un determinado precio “ $a_s$ ”. Sin embargo, sólo si supera el precio “ $b_s$ ” con  $b_s > a_s$ , la posibilidad de oferta será máxima. El precio de oferta será un número borroso que denotamos por  $\tilde{P}_s$  (Figura 5) cuya función de pertenencia es:

$$\alpha = \mu_{\tilde{P}_s}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a_s \\ \frac{x - a_s}{b_s - a_s} & a_s < x \leq b_s \\ 1 & b_s < x \end{cases} \quad (8)$$

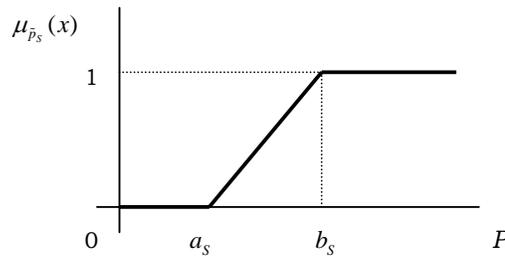


Figura 5. Precio de oferta

Y los  $\alpha$ -cortes del número borroso  $\tilde{P}_s$ , están representados por el siguiente conjunto  $\tilde{P}_{s\alpha}$ :

$$\tilde{P}_{s\alpha} = \{x \in U / \mu_{\tilde{P}_s}(x) \geq \alpha\} = [f_{\tilde{P}_s}^{-1}(\alpha), \infty) = [a_s + \alpha(b_s - a_s), \infty) \quad (9)$$

De manera análoga, también se pueden considerar diferentes formas en la curva de oferta atendiendo a su elasticidad precio: inelástica, relativa y perfecta.

**3.3. Precio de equilibrio**

En el trabajo de Yao y Wu (1999), para la obtención del equilibrio de mercado se parte de la *desfuzzificación* de la función de demanda y de oferta borrosas, hallando a continuación el valor de equilibrio. Como nuestro objetivo es la determinación del precio que alcanzarían los

bienes carentes de mercado, mediante la comparación de las posibilidades de oferta y de demanda se podrá determinar el precio de equilibrio. Por otra parte, y dadas las características de estos bienes, carece de sentido plantearse la determinación de la cantidad de equilibrio.

Para conocer el precio de equilibrio, y de acuerdo con la Figura 9, se partirá de un nivel de presunción  $\alpha = 1$  y se compararán los precios que determinan las funciones de pertenencia del precio de demanda ( $p_{d_i}$ ) y de oferta ( $p_{s_i}$ ). Si  $p_{s_i} > p_{d_i}$ , se repetirá el proceso para un nivel de presunción inferior. El proceso concluirá cuando para un nivel  $\alpha = \alpha_i$ , se verifique  $P_{s_i} = P_{d_i} = P_e$  (Figura 6).

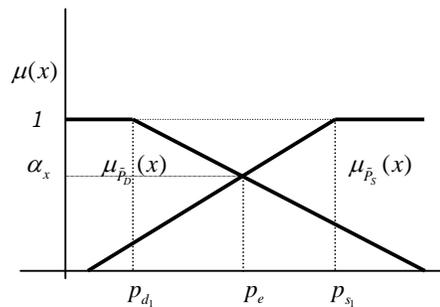


Figura 6. Precio de equilibrio.

En consecuencia, la intersección de los números borrosos precio de oferta y de demanda nos permitirá determinar directamente el precio de equilibrio de estos bienes, según la ecuación [3]. Siendo el precio de equilibrio más posible aquel que maximiza la función de pertenencia de la intersección.

Una vez determinado el precio cabrá plantearse si la posibilidad resultante es suficiente o no para que exista mercado. Pueden surgir tres situaciones distintas en base al valor que alcance la función de pertenencia de la intersección:

- a) Que sea un nivel adecuado, por ejemplo entre 0,7 y 0,9
- b) Que sea muy bajo, en este caso inferior a 0,7, en cuyo caso deberá subvencionarse el bien si se pretende crear mercado.
- c) Que sea más que suficiente, superior a 0,9, en cuyo caso, las autoridades pueden plantearse la posibilidad de un impuesto.

Analicemos cada una de estos supuestos:

1. Si la posibilidad es inferior a la adecuada, se planteará la posibilidad de una subvención. Una vez determinada la posibilidad adecuada ( $\alpha_x$ ) para que se pueda crear el mercado, el valor de la subvención ( $s$ ) estará determinado como (Figura 7):

$$P_V - P_C = s \tag{10}$$

$$\alpha_x = \mu_{p_s}(P_V) \rightarrow P_V = \mu_{p_s}^{-1}(\alpha_x) \tag{11}$$

$$\alpha_x = \mu_{p_d}(P_C) \rightarrow P_C = \mu_{p_d}^{-1}(\alpha_x) \tag{12}$$

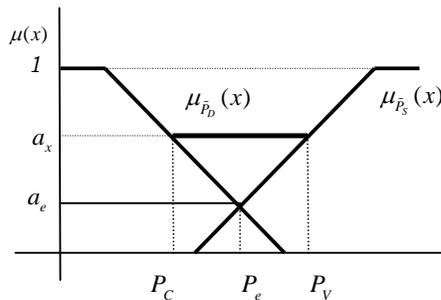


Figura 7. Subvención de un bien

De esta forma se consigue aumentar la posibilidad de que exista mercado. Otra cuestión será determinar quien se beneficiará de la subvención. Esta irá a parar principalmente a los compradores si el cociente entre la elasticidad del precio de demanda y de oferta es pequeño, y principalmente a los vendedores si el citado cociente es grande.

2. Si la posibilidad es más que suficiente, superior a 0,9, las autoridades pueden plantearse la fijación de un impuesto ( $t$ ). Para ello, una vez establecido el nivel de posibilidad adecuada  $\alpha_x$ , se podrá determinar el impuesto máximo que el mercado será capaz de soportar. Para ello, se pueden volver a formular las ecuaciones algebraicas (11) y (12), y añadir la magnitud del impuesto, reflejado a través de la ecuación (13) y en la Figura 8.

$$P_V - P_C = t \tag{13}$$

$$\alpha_x = \mu_{p_s}(P_V) \rightarrow P_V = \mu_{p_s}^{-1}(\alpha_x) \tag{14}$$

$$\alpha_x = \mu_{p_d}(P_C) \rightarrow P_C = \mu_{p_d}^{-1}(\alpha_x) \tag{15}$$

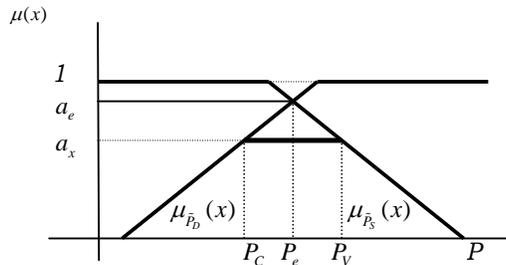


Figura 8. Valor de un bien con impuestos

En función de la posición relativa de las funciones de pertenencia del precio de demanda y de oferta, se pueden distinguir diferentes casos:

a) Si  $a_s > b_d$ , no hay intersección, el precio mínimo de oferta es superior al precio máximo dispuesto a pagar por los demandantes. Por tanto no existe mercado y es una situación imposible, siendo su función de pertenencia:  $\alpha = \mu(x)_{\bar{p}_d \cap \bar{p}_s} = 0, \forall x$ , que carece de sentido económico.

b) Si  $a_s < b_d$ , nos encontramos con dos casos (Figura 13).

b.1) Si  $b_s < a_d$ , dará lugar a infinitos precios. La función de pertenencia de  $\mu_{\bar{p}_d \cap \bar{p}_s}(x)$  será un número borroso trapezoidal:

$$\alpha = \mu_{\bar{p}_d \cap \bar{p}_s}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a_s \\ \frac{x - a_s}{b_s - a_s} & a_s < x \leq b_s \\ 1 & b_s < x \leq a_d \\ \frac{x - b_d}{a_d - b_d} & a_d < x \leq b_d \\ 0 & b_d < x \end{cases} \tag{16}$$

b.2) Si  $b_s > a_d$ , que podríamos considerar como caso genérico. En la anterior intersección,  $\sup_{\forall x \in X} \mu_\alpha < 1$ , por lo que una vez

normalizado (dividido por el supremo) se obtiene un NBT cuya función de pertenencia será (Figura 9):

$$\alpha = \mu_{\tilde{p}_D \cap \tilde{p}_S}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a_s \\ \frac{x - a_s}{b_s - a_s} & a_s < x \leq x_1 \\ \frac{x - b_D}{a_D - b_D} & x_1 < x \leq b_D \\ 0 & b_D \leq x \end{cases} \quad (17)$$

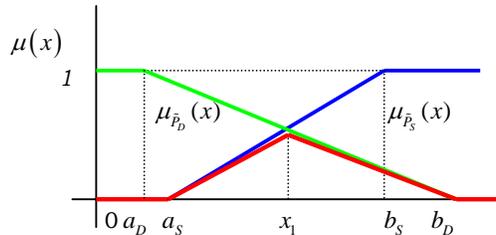


Figura 9. Precio de equilibrio, caso general

La agregación de las opiniones dadas por expertos ha sido ampliamente analizada en diferentes trabajos. A este respecto, diversos expertos han usado t-normas: Hauke (1999) y particularmente, Zimmermann (1991) que aplica la k-minima, mientras que Kereszfalvi (1993) usa la k-norma de Yager. Por otra parte, Montero (1988) estudia la existencia de grupos absolutamente decisivos, así como el teorema de Arrow sobre la imposibilidad de democracia desde un punto de vista *fuzzy* (Montero, 1994). Hsi-Mei y Chen-Tung Hsu (1996) usan una agregación de opiniones *fuzzy* bajo grupos de decisión en los cuales se utiliza un determinado grado de acuerdo. La metodología propuesta se centra en el hecho de que un experto puede expresar una opinión que difiera mucho de las demás. En este caso se propone una nueva fase de solicitud de información para que el experto reconsidere su opinión.

La variables  $\tilde{p}_D$  y  $\tilde{p}_S$  deberán ser evaluadas por un conjunto de expertos en la materia. Éstos podrán clasificarse en dos grupos bien diferenciados: aquellos que lo consideran como un bien a adquirir y opinarán sobre los precios que se estarían dispuestos a pagar, y aquellos para los que debe ser objeto de venta, por lo que estimarán el precio al que estarían dispuestos a ofertarlo. Esto permitirá elaborar un haz de números borrosos correspondientes a la estimación de cada variable.

Dado que nuestro principal objetivo es la determinación del precio de equilibrio a través de las opiniones de los expertos, consideramos adecuado hallar el número borroso medio, que para la demanda es:

$$\tilde{P}_D = (\bar{a}_D, \bar{b}_D) = (\sum_i \omega_i a_{Di}, \sum_i \omega_i b_{Di}), \text{ con } \sum_i \omega_i = 1 \quad (18)$$

Y para la oferta

$$\tilde{P}_S = (\bar{a}_S, \bar{b}_S) = (\sum_i \omega_i a_{Si}, \sum_i \omega_i b_{Si}), \text{ con } \sum_i \omega_i = 1 \quad (19)$$

Donde  $\omega_i$  representa el peso asignado a cada experto  $i$

Sin embargo el haz así hallado puede presentar opiniones que se alejen en exceso de la considerada como agregada, entonces conviene realizar un intento de aproximar en lo posible estas opiniones. Para ello proponemos utilizar un camino ya utilizado con éxito: el método Delphi (Kaufmann y Gil, 1996). Para ello se informará a cada experto la distancia existente entre su opinión y la agregada, para que reconsidere la suya, si lo estima oportuno.

El cálculo de la distancia se realiza de forma similar para el haz de números borrosos de la demanda y para el de la oferta. Para el primero, el cálculo de la distancia se realizará por comparación entre los números  $a_{Di}$  y  $b_{Di}$  facilitados con anterioridad por cada experto y los valores medios  $\bar{a}_{Di}$  y  $\bar{b}_{Di}$ . Habrá que distinguir dos casos:

- a) Si las funciones de pertenencia de un experto y la agregada no se cruzan. Su cálculo se corresponde con el área del trapecio de la figura 10.

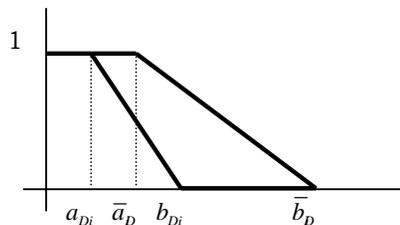


Figura 10. Distancia si no se cruzan las funciones de pertenencia

$$D_D = \frac{1}{2} [ |a_{Di} - \bar{a}_D| + |b_{Di} - \bar{b}_D| ] \quad (20)$$

Para obtener una cifra que pertenezca al intervalo [0, 1] se acostumbra a tomar una referencia:

$$p \geq \wedge_i a_{Di} - \vee_i b_{Di}$$

Lo que permite obtener una distancia relativa  $d_D$  :

$$d_D = \frac{D_1}{p} \tag{21}$$

- b) Distancia cuando se cruzan las funciones de pertenencia. Al cortarse las funciones de pertenencia, geométicamente aparecen dos triángulos, por lo que habrá que hallar la suma de sus áreas (Figura 11).

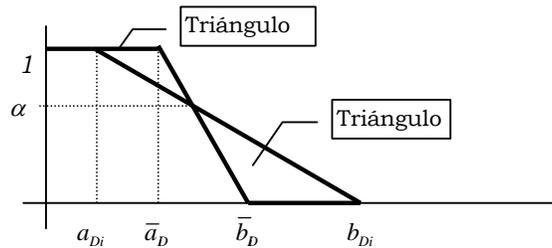


Figura 11. Distancia si se cruzan las funciones de pertenencia

Si la altura del punto de corte se representa por  $\alpha$ , por semejanza de triángulos se cumplirá:

$$\frac{\alpha}{|b_{Di} - \bar{b}_D|} = \frac{1 - \alpha}{|a_{Di} - \bar{a}_D|}$$

Igualdad que permite obtener las alturas de ambos triángulos ( $\alpha$  y  $1 - \alpha$ ).

En consecuencia, la suma de las áreas delimitadas por el cruce de ambas funciones de pertenencia será:

$$D_D = \frac{1}{2} \frac{(a_{Di} - \bar{a}_D)^2 + (b_{Di} - \bar{b}_D)^2}{|a_{Di} - \bar{a}_D| + |b_{Di} - \bar{b}_D|} \tag{22}$$

Siendo la distancia relativa entre ambas funciones el cociente entre la suma de las áreas de ambos triángulos y “ $p$ ”:

$$d'_D = \frac{1}{2p} \frac{(a_{D_i} - \bar{a}_D)^2 + (b_{D_i} - \bar{b}_D)^2}{|a_{D_i} - \bar{a}_D| + |b_{D_i} - \bar{b}_D|} \quad (23)$$

Para el cálculo de la dispersión, y dado que la varianza es una medida absoluta de la dispersión de la variable y está influida por su tamaño, utilizaremos el coeficiente de variación, que para el extremo inferior de la función de demanda, con media  $\bar{a}_D$  y varianza  $\sigma_{a_D}$ , será:

$$CV_{a_D} = \frac{\sigma_{a_D}}{\bar{a}_D} = \frac{1}{\bar{a}_D} \left( \sum_i w_j (a_{D_i} - \bar{a}_D)^2 \right)^{1/2} \quad (24)$$

A continuación bastará con fijar el valor máximo que podrá tomar el coeficiente de variación y que denominaremos  $CV^*$ . Si en la primera fase<sup>1</sup>:

$$\bar{a}_D \max \{ CV_{a_D}^1, CV_{b_D}^1 \} \leq CV^* \quad (25)$$

se detendrá el proceso.

En caso contrario se procederá a una nueva fase de petición de información y suministro de opinión y, se les informará de la distancia existente entre su opinión y la agregada, para que reconsideren la suya, si lo estiman oportuno, y no tendremos en cuenta los outliers<sup>2</sup>, esto es los valores que estén fuera del intervalo [media - 3 x IRQ, media + 3 IRQ], siendo IRQ el recorrido intercuartílico.

Ante esta nueva fase de información-reconsideración, los expertos pueden optar por modificar sus opiniones, especialmente aquellos que se encuentren más alejados de la agregada, aunque esto no tiene porque suceder siempre así, ya que en muchas ocasiones, estas diferencias son debidas a razones de formación, localización geográfica, profesión, etcétera, que habrá que tener en cuenta.

Con estos valores, se procederá al cálculo de los nuevos valores medios  $\bar{a}'$  y  $\bar{b}'$  que, conjuntamente con las distancias, se remiten a los expertos para que reconsideren su opinión. En la segunda fase, y con las nuevas opiniones recibidas, se comprobará su dispersión, y si sigue siendo excesiva, se contrastará si estas opiniones difieren de las

<sup>1</sup> El exponente 1 del coeficiente de variación hace referencia a la primera fase.

<sup>2</sup> Para la determinación de los valores atípicos puede utilizarse también el contraste de Grubbs, el de Dixon, o la técnica de la  $\Gamma$  de Thompson modificada entre otros.

facilitadas en la primera fase, por tanto, se recalcularán los coeficientes de variación. El proceso se detendrá si  $\max\{CV_{a_D}^2, CV_{b_D}^2\} \leq CV^*$

Sin embargo, no siempre una nueva fase mejora la situación ya que los expertos pueden optar por no modificar sus opiniones. Por ello resulta necesario establecer un mecanismo para detener el proceso si las opiniones de los expertos no difieren sensiblemente respecto de las ofrecidas en la fase anterior.

Para realizar tal comprobación, y dado que no puede suponerse nada sobre la distribución muestral de la media y desviación típica de las variables  $a_{Si}^j$ ,  $b_{Si}^j$ ,  $a_{Di}^j$  y  $b_{Di}^j$  (donde  $i$  hace referencia al experto y  $j$  a la fase del proceso), se ha de acudir a una serie de procedimientos englobados en la estadística no paramétrica o de libre distribución.

Si bien la prueba de rachas de una muestra podría ser suficiente para cumplir con nuestros objetivos de comparar dos pruebas con datos apareados, consideramos que la prueba del signo-rango de Wilcoxon es más potente porque no sólo tiene en cuenta la dirección de las diferencias (el signo), sino también la magnitud de las mismas, clasificándolas por orden de tamaño absoluto.

Bajo la hipótesis nula  $H_0$  se espera que la suma de rangos positivos sea igual a la suma de rangos negativos, esto es, que las medias de las opiniones de los expertos no difieren sensiblemente respecto de las ofrecidas en la fase anterior, de tal forma que se rechazará la  $H_0$ , si el estadístico T es igual o menor que el valor crítico, para un determinado tamaño de muestra y nivel de significación.

De esta manera, aunque el coeficiente de variación de la muestra siga siendo elevado, si las opiniones no han diferido en exceso en dos ocasiones consecutivas, se detendrá el proceso. En caso contrario, se repetiría esta última fase hasta que al menos se cumpla una de las siguientes condiciones (para el caso de la demanda):

- El número de iteraciones sea igual al máximo fijado.
- $\max\{CV_{a_D}^j, CV_{b_D}^j\} \leq CV^*$ .
- Sea aceptada la  $H_0$  del test de Wilcoxon.

Si el proceso se detiene en la fase k, el NBT representativo del precio de demanda sería:

$$\bar{P}_D = (\bar{a}_D^j, \bar{b}_D^j) = \left( \sum_i \omega_i a_{Di}^j, \sum_i \omega_i b_{Di}^j \right), \quad [26]$$

De manera similar, se procedería al cálculo de  $\bar{P}_s$ , y la intersección de ambos proporcionaría el precio de equilibrio  $\tilde{P}$ .

Con esta metodología y a través de las opiniones de expertos, se han fijado los mecanismos que conducen a la determinación de los precios de oferta y demanda, y la operación de intersección de números borrosos ha determinado el precio de equilibrio. Para obtener una buena estimación resulta imprescindible la realización de varias fases información-reconsideración. La combinación del criterio del coeficiente de variación de los extremos del intervalo con el test de Wilcoxon para decidir si el haz borroso medio ha sufrido alteración en dos ocasiones consecutivas, ha servido para que el propio modelo determine en cada ocasión si es necesaria una nueva fase.

Una de las principales ventajas de este instrumento matemático es que proporciona un intervalo de valores entre los que puede encontrarse la variable objeto de estimación, lo que permite mejorar su fiabilidad. De esta forma se recogen tanto las variaciones que se producen en la misma de forma estacional y de forma diaria. Procedemos a continuación a realizar una aplicación para determinar el precio de equilibrio del agua depurada con el fin de determinar la bondad de este modelo.

#### **4. INVESTIGACIÓN EMPÍRICA**

En este trabajo, nos hemos propuesto determinar el precio de equilibrio del metro cúbico de agua depurada para la provincia de Alicante (España). El artículo 109 del Real Decreto Legislativo 1/2001, de 20 de julio, por el que se aprueba el Texto Refundido de la Ley de Aguas indica que las empresas depuradoras de aguas residuales (EDAR) no son titulares de sus efluentes, lo que les impide su venta. Esta circunstancia impide la venta de los caudales depurados por lo que no existe en la actualidad un mercado que permita obtener el precio del agua depurada. Por otra parte, consideramos adecuada la provincia de Alicante por presentar unas características geográficas y climáticas muy similares a lo largo de todo su territorio, que hace que sus necesidades hídricas sean muy homogéneas.

En consecuencia, al no existir datos históricos que permitan la estimación del precio, esta variable puede ser considerada como un NBT caracterizado por su correspondiente función de pertenencia. Para su estimación se han tenido en cuenta las siguientes poblaciones:

- Oferentes: EDAR de la provincia de Alicante (141, Generalitat Valenciana, 2008).
- Demandantes: titulares de las explotaciones agrícolas de esta provincia (52.292, INE, 2008) y empresas distribuidoras de aguas para riego (35 según la Cámara Oficial de Comercio de la Provincia de Alicante).

De las que se han extraído las siguientes muestras:

- Oferentes: 20 EDAR, a cada una de las cuales se le asigna un peso  $\omega_i = 1/20$
- Demandantes: 50 agricultores y 5 empresas suministradoras de aguas. A cada uno de los primeros se le asignará un peso  $\omega_i = 1/100$ , y a cada uno de los segundos, de  $1/10$ , por disponer estos últimos de una mejor información y una mayor capacidad de influencia.

A las empresas seleccionadas se les ha pedido la siguiente información:

- Demandantes: el precio máximo al cual toda el agua usada será depurada ( $a_d$ ) y el máximo a partir del cual no usarán agua depurada en sus explotaciones ( $b_d$ ).
- Oferentes: el precio mínimo a partir del cual se comenzará a ofertar agua ( $a_s$ ) y el mínimo a partir del cual se ofertará cualquier cantidad ( $b_s$ ).

La encuesta fue realizada durante los meses de enero y febrero de 2008 por teléfono. De acuerdo con la metodología anteriormente expuesta, se pueden llevar a cabo diferentes fases de petición de información y suministro de opinión. Para detener este proceso se aplicarán estos criterios:

- El número de iteraciones sea igual a tres.
- $\max\{CV_a^j, CV_b^j\} \leq 0,10$   $j=1, 2, 3$ .
- Sea aceptada la  $H_0$  del test de Wilcoxon con un nivel de significación  $\alpha = 0,05$ .

Los resultados obtenidos para la primera fase se muestran en la Tabla 1.

1ª FASE	Demanda		Oferta	
	$a_d$	$b_d$	$a_s$	$b_s$
$\sigma$	0,9631	1,7186	4,4518	4,6935
$\mu$	10,1500	19,9200	16,3500	23,6500
$CV = \sigma / \mu$	0,0949	0,0863	0,2723	0,1985

Tabla 1. Resultados fase 1

Para la demanda, como:

$$\max \{ CV_{a_d}^1, CV_{b_d}^1 \} = \max \{ 0,0949; 0,0863 \} \leq 0,10$$

El precio de demanda  $\bar{P}_d = (10,150; 19,920)$  es aceptado como válido. Con respecto al de oferta:

$$\max \{ CV_{a_s}^1, CV_{b_s}^1 \} = \max \{ 0,2723; 0,1985 \} \geq 0,10$$

se ha realizado una nueva fase en la que se ha comunicado a cada uno de los expertos los valores medios obtenidos en la fase anterior, una vez eliminados los atípicos, es decir, los que caigan fuera del intervalo  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ : [7,44642; 25,2536] para el extremo inferior y [14,263; 33,037] para el extremo superior, así como la distancia entre las opiniones facilitadas y la agregada. En concreto, para el cálculo de los valores medios a comunicar, se eliminaron los correspondientes a los expertos octavo y noveno, con lo que los valores comunicados fueron [15,842; 22,500], además, de las distancias relativas entre sus opiniones y las agregadas.

Una vez facilitada esta información a los expertos, un total de nueve han modificado su opinión, lo que ha permitido obtener los resultados de la tabla 2.

2ª FASE	Oferta	
	$a_d$	$b_s$
$\sigma$	3,1502	3,6548
$\mu$	17,150	23,900
$CV = \sigma / \mu$	0,1837	0,1529

Tabla 2. Resultados fase 2

Los coeficientes de variación siguen siendo superiores a 0,10, esto es, las opiniones están mucho más dispersas de lo deseado. Por tanto, se procede comprobar si la diferencia entre la opinión de los expertos en estas dos fases consecutivas es significativa. Para ello, utilizaremos el

test de Wilcoxon, con un nivel de significación del 5% ( $\alpha = 0,05$ ), obteniéndose los resultados que se muestran en la tabla 3.

Extremo	$\sum R^+$	$\sum R^-$	$T = \min(\sum R^+, \sum R^-)$	N	$T^*$ ( $\alpha = 0,05$ )	Resultado
$a_s$	35,5	9,5	9,5	9	6	Acepta $H_0$
$b_s$	26,0	19,0	19,0	9	6	Acepta $H_0$

Tabla 3. Resultados test

Donde  $\sum R^+$  y  $\sum R^-$  representan la suma de rangos positivos y negativos del test de Wilcoxon, la columna cuarta, el estadístico T, la quinta el número de expertos que han modificado su opinión,  $T^*$  el valor crítico, y la última columna el resultado del test.

Como puede comprobarse, pese a existir una gran dispersión en los valores facilitados por los expertos, sus opiniones no han diferido en exceso en dos fases consecutivas, por lo que el precio de oferta que aceptaremos será  $\bar{P}_s = [17,15; 23,90]$ . En conclusión, los números borrosos resultantes son:

$$\alpha_D = \mu_{\bar{P}_b}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 10,15 \\ \frac{x-10,15}{9,77} & 10,15 < x \leq 19,92 \\ 1 & 19,92 < x \end{cases}$$

$$\alpha_s = \mu_{\bar{P}_s}(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 17,15 \\ \frac{23,90-x}{6,75} & 17,15 < x \leq 23,90 \\ 0 & 23,90 < x \end{cases}$$

La intersección entre ambos, permite obtener el valor de  $x_1 = 18,28$ , cuya  $\mu(x) = 0,83$ . En consecuencia, el precio de equilibrio del agua depurada normalizado será (Figura 12):

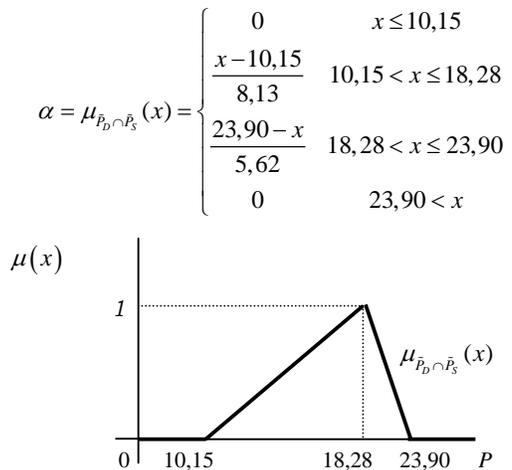


Figura 12. Precio de equilibrio del agua depurada

De acuerdo con esta metodología, el precio de equilibrio del agua depurada más posible para la provincia de Alicante sería 18,28 €/m<sup>3</sup>, aunque este puede oscilar entre 10,15 (18,28) y 23,92 €/m<sup>3</sup>. En cualquier caso, esta metodología resulta aplicable a cualquier otro territorio, y es más, a cualquier otro bien para el que no exista todavía mercado.

### 5. CONCLUSIONES

El objetivo del presente trabajo ha sido la elaboración de un modelo que permita la estimación del precio de aprovechamiento de los bienes sin mercado, donde no es posible acudir a este para su fijación. En estas circunstancias, la inexistencia del mercado implica la carencia de observaciones sobre el mismo, lo que obliga a movernos en el ámbito de la incertidumbre. Ante esta situación, la principal herramienta matemática para su tratamiento es la teoría de los subconjuntos borrosos.

La forma de plantear las funciones de pertenencia del precio de demanda y de oferta, permite incorporar la incertidumbre existente sobre aquellos bienes para los que no existe mercado, a través del precio que los posibles demandantes y oferentes de dichos bienes estarían dispuestos a pedir y ofrecer, respectivamente, por dichos bienes.

La obtención del precio de equilibrio, con su correspondiente función de pertenencia, permite considerar la posibilidad de introducir impuestos o subvenciones a dichos bienes.

En último lugar, la aplicación del anterior modelo para la estimación del precio de equilibrio de las aguas depuradas ha permitido comprobar la validez de dicho modelo. El agua depurada es un producto cuya obtención, al menos en España, está financiada por las distintas administraciones, y cuya legislación impide que las EDAR vendan sus efluentes. Aunque en algunas zonas se proceda a su venta, su precio no es significativo, ya que no se tiene en cuenta el coste de depuración, que es financiado en su totalidad.

Aunque la anterior aplicación se ha realizado para la determinación del precio del metro cúbico de agua depurada en la provincia de Alicante, su aplicación se puede generalizar a territorios mayores y a cualquier otro producto para el que en la actualidad no exista mercado. En cualquier caso, un cambio en la financiación de este sector que pasase a ser a través de la venta de sus efluentes, permitiría evaluar la bondad de este método.

### **BIBLIOGRAFÍA**

Arrow, K.; Solow, R.; Portney P. R.; Learner E. E.; Radner R.; Schuman H. (1993). "Report of the NOAA Panel on Contingent Valuation". *Fed Register*. 58, pp.4601-4614.

Bentkover, J. (eds.). (1986). *Benefit Assessment: The State of the Art*. Reidel Pub. Co. Boston.

Brookshire, D. ; Crocker, T. (1981). "The Advantage of Contigent Valuation Methods for Banefit Cost Analysis". *Public Choice*. Vol. 36, pp. 235-252.

Brookshire, D. S.; Randall, A. (1978). "*Public policy alternatives, public goods, and contingent valuation mechanisms*". Western Economic Association Meeting. Honolulu. Hawaii.

Brookshire, D. S.; Eubanks, L. S. (1978). "*Contingent valuation and revealing actual demand for public environmental commodities*". University of Wyoming.

Carson, R.; Hanemann, W. M.; Kopp, R.; Krosnick J.; Mitchell, R.; Presser, S.; Ruud, P.; Smith, V. K. (1995). *Temporal reliability of estimates from contingent valuation. Discussion Paper 95-37, Resources for the Future*. Washington, DC.

- Chang, S. C. (2000 ). "Optimal revenue for fuzzy demand quantity". *Fuzzy Sets and Systems*. 111, pp. 399-417.
- Clinch, J. P.; Murphy, A. (2001). "Modeling winners and losers in contingent valuation of public goods: appropriate welfare measures and econometric analysis". *The Economic Journal*. 111 (April), pp. 420-443.
- Dompere, K. K. (1997). "The Theory of Approximate Prices: Analytical Foundations of Experimental Cost-Benefit Analysis in Fuzzy-Decision Space". *Fuzzy Sets and Systems*. 87, pp. 1-26.
- Dompere, K. K. (2004). "Cost-Benefit Analysis and the Theory of Fuzzy Decisions: Fuzzy Value Theory". *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer. New York.
- Generalitat Valenciana (2008). Información contenida en la página web <http://www.epsar.gva.es/sanejament/instalaciones/buscador-edar.aspx>. Fecha de acceso 1 de marzo de 2010.
- Hauke, W. (1999). "Using Yager's t-norms for aggregation of fuzzy intervals". *Fuzzy Sets and System*. 101, pp. 59-65.
- Hsi-Mei, H.; Chen Tung, C. (1996). "Aggregation of fuzzy opinions under group decision making". *Fuzzy Sets and Systems*. 79, pp.279-285.
- INE (2008). Instituto Nacional de Estadística. Información contenida en la página web [www.ine.es](http://www.ine.es). Fecha de acceso 7 de enero de 2008.
- Kaufmann, A.; Gil Aluja, J. (1996). *Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas*. Milladoiro. Santiago de Compostela.
- Keresztfalvi, T. (1993). "Operations on fuzzy numbers extended by Yager's family of t-norms". In: H. Bandemer (Ed.), *Modelling Uncertain Data, Mathematical Research*. 68, pp. 163-167.
- Mitchell, R. C.; Carson, R. T. (1984). *A contingent valuation estimate of national freshwater benefits: technical report to the U.S. Environmental Protection Agency*. Resources for the Futureb. Washington, D.C.
- Montero, J. (1988). "Aggregation of fuzzy opinions in a non-homogeneous group". *Fuzzy Sets and System*. 25, pp. 15-20.
- Montero, J. (1994). "Rational Aggregation rules". *Fuzzy Sets and System*. 62, pp. 267-276.
- O'Doherty, R. K. (1996). *Planning, People and Preferences: A Role for Contingent Valuation*. Aldershot, Hants: Avebury.

Real Decreto Legislativo 1/2001, de 20 de julio, por el que se aprueba el texto refundido de la Ley de Aguas.

Schulze, W. D.; D'Arge, R. C. (1978). *On the valuation of recreational damages*. Paper presented to the Association of Environmental and Resource Economists. New York.

Yager, R. R. (2000). "Simultaneous solution of fuzzy models: an application to economic equilibrium analysis". *Fuzzy Sets and System*. 115, pp. 339-349.

Yao, J. S.; Wu, K. (1999). "Costumer surplus and producer surplus for fuzzy demand and fuzzy supply". *Fuzzy Sets and System*. 103, pp 421-426.

Zimmermann, H. J. (1991). *Fuzzy Set Theory and its Applications*, 2<sup>nd</sup> revised ed. Boston. Kluwer Academic Publishers.