Cuadernos del CIMBAGE Nº 14 (2012) 89-102

ACERCA DE LA POSIBILIDAD DE IDENTIFICACIÓN DE PROBABILIDADES OBJETIVAS

Alberto H. Landro, Mirta L. González
IADCOM - Centro de Investigaciones en Econometría
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Buenos Aires
Av. Córdoba 2122 - 2º piso - Ciudad de Buenos Aires - C1120AAQ – Argentina
alandro@econ.uba.ar, mirtagonzalezar@yahoo.com.ar

Recibido 23 de junio de 2011, aceptado 15 de febrero de 2012

Resumen

Basándose en la propiedad de intercambiabilidad, en los postulados del teorema de representación y en su interpretación en el ámbito de la teoría ergódica, algunos autores creyeron hallar un contraejemplo al modelo subjetivista, según el cual "*la probabilidad no existe*", mediante la justificación teórica de la existencia de una probabilidad objetiva. Como una prueba de la inconsistencia de este planteo, la asimilación de la teoría ergódica al modelo propensionalista permite demostrar su carácter metafísico y la consiguiente subjetividad en la asignación de las probabilidades.

Palabras clave: Probabilidad, teorema ergódico, teorema de representación.

ON THE POSIBILITY OF IDENTIFICATION OF OBJECTIVE PROBABILITIES

Alberto H. Landro, Mirta L. González
IADCOM - Centro de Investigaciones en Econometría
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Buenos Aires
Av. Córdoba 2122 - 2º piso - Ciudad de Buenos Aires - C1120AAQ – Argentina
alandro@econ.uba.ar, mirtagonzalezar@yahoo.com.ar

Received June 23rd 2011, accepted February 15th 2012

Abstract

Basing their ideas on the exchangeability property, on the postulates of the representation theorem and on its interpretation in the ambit of ergodic theory, some authors believed to find a counter example to the subjetivist model, according to "*the probability does not exist*", through the theoretical justification of the existence of an objective probability. As a proof of the inconsistency of this reasoning, the assimilation of the ergodic theory to the propensionalist model allows the domonstration of its metaphysical character and the resulting subjectivity in the assignment of probabilities.

Keywords: Probability, ergodic theory, representation theorem.

1. UNA INTRODUCCIÓN AL TEOREMA DE REPRESENTACIÓN

Desde un punto de vista exclusivamente formal y de acuerdo con una aproximación objetivista, la condición de intercambiabilidad es asimilada a la de independencia estocástica condicionada por una probabilidad constante pero desconocida (es decir, condicionada por una probabilidad definida por una variable aleatoria)[1].

Sean M urnas que contienen bolillas rojas y azules en una proporción desconocida $p_i = \frac{N_i^{(r)}}{N_i}$ $(i = 1,2,\ldots, M)$ y $1 - p_i = \frac{N_i^{(a)}}{N_i}$, respectivamente.

Luego, dada una urna, M_i, si se realizan extracciones al azar con reposición, la probabilidad de obtener j bolillas rojas y $(n - j)$ bolillas azules condicionada por la hipótesis de una partición definida por la composición de las urnas (es decir, la probabilidad de que la variable frecuencia relativa del resultado "*bolilla roja*", $E^{(r)}$, condicionada por dicha partición asuma el valor $\frac{j}{n}$) está dada por:

$$p\left(E^{(j,n)} / M_i\right) = p\left(\theta_i^{(r)} = \frac{N_i^{(r)}}{N_i}\right) = \binom{n}{j} p_i^j \left(1 - p_i\right)^{n-j}$$

La probabilidad de obtener j bolillas rojas y $(n - j)$ bolillas azules al realizar n extracciones con reposición de una urna seleccionada al azar estará definida, entonces, por una mezcla de distribuciones binomiales en la que las ponderaciones están dadas por las probabilidades de las distintas urnas, de la forma:

$$p\left(E^{(j,n)}\right) = \sum_{i=1}^{M} \pi_i p\left(E^{(j,n)} / M_i\right) = \binom{n}{j} \sum_{i=1}^{M} \pi_i p_i^j \left(1 - p_i\right)^{n-j}$$

(donde π_i $(i=1,\ldots M)$ denota la probabilidad inicial de que la hipótesis

---

[1] Debe tenerse en cuenta que de Finetti, B. (1934) consideró que esta interpretación de la intercambiabilidad es incorrecta en la medida que, en términos de una aproximación subjetivista, la idea de probabilidad desconocida carece de sentido, que la probabilidad varía de una prueba a otra de acuerdo con la experiencia adquirida por el observador y que la que es desconocida y con una distribución que varía en base a los resultados de las realizaciones del evento es la frecuencia límite, a menudo asimilada impropiamente a una probabilidad objetiva.

$H_i = \frac{N_i^{(r)}}{N_i} (i = 1,2,...M)$ sea verdadera y p_i $(i=1,2,\ldots M)$ denota la probabilidad de extraer una bolilla roja, condicionada por la hipótesis H_i, con función de distribución $F_M(x); (x \in [0,1])$. Como se verá inmediatamente, de acuerdo con los postulados del teorema de representación se puede asegurar que, dada una sucesión $\{E_1, E_2,...E_n,...\}$ de eventos intercambiables, esta mezcla de probabilidades binomiales que define la función de probabilidades $p\left(E^{(j,n)}\right)$ generada por dicha sucesión, es única.

Supóngase, ahora, un esquema consistente en seleccionar al azar un número $X \in [0,1]$, que representa la proporción de bolillas rojas en las

$M \to \infty$ urnas acuerdo con una función de distribución $F_X(x) = \lim_{M \to \infty} F_M(x) (0 \le x \le 1)$ única, entonces la probabilidad:

$$p\left(E^{(j,n)}\right) = \sum_{i=1}^{M} \pi_i p\left(E^{(j,n)} / M_i\right)$$

se transforma en:

$$p\left(E^{(j,n)}\right) = \binom{n}{j} \int_0^1 x^i (1-x)^{n-i} f_X(x) dx = \int_0^1 p\left(E^{(j,n)} / x\right) dF_X(x) = E\left[p\left(E^{(j,n)} / x\right)\right]$$

(donde $p\left(E^{(j,n)} / x\right)$ representa la "*credibilidad*"[2] que el observador atribuye a la hipótesis condicionante y $F_X(x)$ es una función derivable)[3]. Esta expresión, del teorema de representación (debida a de Finetti (1937)) demuestra que, si las probabilidades "a priori" se distribuyen de acuerdo con una única función de distribución $F_X(x)$ entonces, los eventos $E^{(j,n)}$ son intercambiables y que la implicación inversa también es verdadera: dada una distribución de probabilidades $p\left(E^{(j,n)}\right)$ intercambiable para todo n entero positivo, existe una única función de distribución $F_X(x)$ tal que satisface la fórmula de representación, es decir existe una única mezcla de probabilidades

[2] De acuerdo con la nomenclatura de Link, G. (1980).

[3] Obsérvese que la relación anterior se verifica para todo x con la misma función $F_X(x)$.

binomiales que la define[4].

Si en el teorema de representación se supone, en particular, que la variable se distribuye uniformemente en el intervalo $[0,1]$, se verificará que:

$$p\left(E^{(x,n)}\right)=\binom{n}{x}B\left(x+1,n-x+1\right)=\frac{1}{n+1} \qquad \left(x=0,1,2,\ldots,n\right)$$

(donde $B(\bullet,\bullet)$ denota una función Beta). Este corolario demuestra la vinculación formal de los conceptos de intercambiabilidad e independencia. Que, como ya se mencionó, la relación sea en términos exclusivamente formales implica que las ecuaciones formuladas desde un punto de vista objetivista a partir de la condición de independencia estocástica, pueden ser interpretadas desde un punto de vista subjetivista a partir de probabilidades subjetivas e intercambiabilidad. Esta reinterpretación condujo a de Finetti (1931)(1934)(1937a) a formular el principio de "*reducción a la intercambiabilidad*", la cual le permitió obtener una justificación analítica del proceso que conduce a asociar intersubjetivamente la probabilidad de ciertos eventos a la frecuencia observada en eventos análogos, sustituyendo las probabilidades $[0,1]$ binomiales objetivas desconocidas y el concepto de independencia por probabilidades subjetivas e intercambiabilidad.

La cuestión a analizar en este trabajo es si dicho principio de reducción a la intercambiabilidad rige para clases más generales de eventos en las que no se admita como supuesto el principio de la razón insuficiente.

2. EL TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN ERGÓDICA

Teniendo en cuenta que a partir de una interpretación objetivista, el

---

[4] Curiosamente este teorema no fue apreciado en toda su magnitud hasta fines de la década de 1940. Fréchet, M. (1943) lo menciona al pasar como "*una fórmula obtenida por Khinchin y de Finetti*". A este respecto cabe mencionar a Kyburg, H.E.; Smokler, H.E. (eds.) (1964): "*En un cierto sentido el concepto más importante en la teoría subjetiva de la probabilidad es el de 'eventos intercambiables'. Hasta la introducción de este concepto (por de Finetti (1931)) la teoría subjetiva de la probabilidad no fue sino una curiosidad filosófica. Ninguno de aquellos para quienes la teoría de la probabilidad constituía un sujeto de conocimiento o aplicación prestó demasiada atención sobre el mismo. Debe tenerse en cuenta que la introducción del concepto de 'equivalencia' o 'simetría' o 'intercambiabilidad', como se denomina en la actualidad, proporcionó la vinculación entre la noción de probabilidad subjetiva y el problema clásico de la inferencia inductiva*".

concepto de probabilidad ergódica constituye la mayor generalización de la propiedad de independencia estocástica, se puede considerar a la representación de probabilidades estacionarias mediante mezclas únicas de probabilidades ergódicas como la expresión más general del principio de reducción a la intercambiabilidad. Ahora bien, esta condición de unicidad de las mezclas genera situaciones en las que la función de distribución $F_X(x)$ de las probabilidades ergódicas posee un significado físico al que muchos autores han asignado un carácter objetivo, lo cual podría interpretarse como una excepción a dicho principio.

La teoría ergódica comienza con el intento de Boltzmann, L. (1868) de representar la distribución de probabilidades de un proceso estocástico en términos de promedios en el dominio del tiempo[5]. Dados un proceso estocástico $\{X(t)\}$, continuo en el dominio de los estados y continuo en el dominio del tiempo y una función $g(X)$ en el dominio $\Omega(X)$ de los estados, el valor esperado de g en el dominio Ω está definido por $\int_{\Omega} g(x) f_X(x)dx$, donde $f_X(x)$ denota una función de densidad. Asimismo, sea una región $A \in \Omega(X)$ sustituyendo la función g por una función indicador de A, I_A, se verificará entonces que: $\int_{\Omega} I_A(x) f_X(x)dx = p(A)$.

Sea, por otra parte, $T(t, X)$ la ley que determina la trayectoria del proceso $\{X(t)\}$, de modo que, si $X(0) = x$ entonces $X(t) = T(t, x)$. Supóngase que esta transformación sea "measure-preserving" (o natural), es decir tal que $M[T(t, A)] = M(A)$ donde $M(\bullet)$ denota la clase de todas las medidas de probabilidad). El promedio en el dominio del tiempo de la función g está dado por $m[g(x)] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t g[T(y, x)]dy$. Sustituyendo la función g por una función indicador I_A, este promedio (asimilable a una ley de los grandes números) puede ser interpretado como el tiempo promedio a permanecer en la región A por el proceso que se encontraba en el

[5] Este desarrollo conocido como "*teoría abstracta de los fenómenos dinámicos*" deriva de la interpretación del comportamiento de los procesos en términos de mecánica clásica.

estado x en el momento 0. El problema fundamental de la teoría ergódica consiste, entonces, en demostrar que el promedio del proceso en el dominio del tiempo existe (condición de estacionariedad), que es único (es decir, independiente del estado inicial del proceso) y que el promedio en el dominio de los estados puede ser calculado como un promedio en el dominio del tiempo, $\int_{\Omega} g(x) f_X(x)dx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t g[T(y,x)]dy$ (es decir, demostrar que la probabilidad $p(A)$ puede ser expresada objetivamente de forma unívoca como el promedio del tiempo a permanecer por el proceso en la región A).

Sea, en particular, un espacio formado por infinitas sucesiones binomiales $E = \{E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots\}$, sea $x_n(E)$ el n-ésimo elemento de una sucesión de E y sea una transformación T similar a la mencionada precedentemente, tal que $x_n(TE) = x_{n+1}(E)\,(n = 1,2,\ldots)$, de modo que $x_{n+1}(E) = x_1(T^n E)$. Esta transformación representa la repetición de la prueba de la sucesión binomial $E = \{E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots\}$ y su aplicación proporciona el resultado a obtener en la repetición siguiente, es decir, la sucesión $E, TE, T^2E, \ldots$define una realización o trayectoria del proceso. Se dice que una probabilidad $p(\bullet)$ sobre Ω es una medida estacionaria si, para todo conjunto $A \subset \Omega$, se verifica que $p(T^{-n}A) = p(A)\ (n = 1,2,\ldots)$, es decir, si las funciones de probabilidades sobre sucesiones finitas de eventos permanecen invariantes en el tiempo.

Supóngase que, en particular, $E_i = 1$ y $\overline{E_i} = 0(i = 1,2,\ldots)$ representen los resultados posibles de dicho fenómeno binomial, la propiedad de estacionariedad es condición necesaria y suficiente para poder asegurar que el límite de la frecuencia relativa del resultado E, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_i$, existe y que, dada una función g integrable, el límite del promedio en el dominio del tiempo, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(T^i E) = E(g) = m(g)$, también existe y es independiente de E. Lo cual demuestra que todas las realizaciones del proceso poseerán las mismas propiedades asintóticas con probabilidad igual a 1. La propiedad de ergodicidad implica, entonces, que un proceso ergódico es invariante, es decir posee en su totalidad las mismas propiedades asintóticas y, por lo tanto, no puede ser separado en partes y garantiza, además, la unicidad de los límites de las frecuencias relativas del resultado E [6].

Dado un proceso que contenga conjuntos invariantes no-triviales, el teorema de descomposición ergódica[7] considera la relación entre los conceptos generales de ergodicidad y estacionariedad y demuestra que toda sucesión estacionaria admite una representación integral en función de probabilidades estacionarias o, lo que es lo mismo, una única descomposición ponderada en partes ergódicas (es decir, con idénticas propiedades asintóticas para cada una de las partes, pero diferentes para las distintas partes), cada una de las cuales puede ser definida como un subconjunto del conjunto de infinitas sucesiones[8]. Supóngase una transformación $p(\bullet)$ no-ergódica, entonces, dado un conjunto invariante A, se verificará que $p(A>0)$. Supóngase, además, dos conjuntos A_1 y $A_2=\Omega-A_1$ que no contengan subconjuntos invariantes no-triviales, entonces las probabilidades condicionadas $p(\bullet/A_1)$ y $p(\bullet/A_2)$ serán ergódicas y su representación integral será de la forma $p(B)=p(A_1)p(B/A_1)+p(A_2)p(B/A_2)$. Dado que $p(A_1)+p(A_2)=1$ y $0<p(A_1),p(A_2)<1$ se puede asegurar que $p(B)$ está definida por una mezcla única de probabilidades ergódicas donde $p(A_1)$ y $p(A_2)$ representan las ponderaciones. En general, se puede asegurar que, dada una descomposición $\Im$, la integral sobre $\Im$ de las probabilidades ergódicas $p_D(E)$ correspondientes a las particiones D ponderadas por una función $\mu(D)$, define una probabilidad estacionaria

[6] Como corolario de esta afirmación se puede concluir, entonces, que las leyes de los grandes números son casos especiales del teorema ergódico y que, en consecuencia, el fundamento de la interpretación frecuencista de la probabilidad no es (como afirma Landro, A.H. (2010)) la condición particular de independencia, sino la propiedad más general de ergodicidad de la sucesión de repeticiones generadas por el fenómeno aleatorio.

[7] Debido a Koopman, B. (1930), von Neumann, J. (1932a)(1932b)(1932c) y Birkhoff, G.D. (1931). Khinchin, A. (1932a)(1932b) (1933) y Hopf, E. (1932)(1936)(1937) propusieron una formulación puramente probabilística de este teorema, en términos de transformaciones del tipo "measure-preserving".

[8] Debe tenerse en cuenta que, en el caso de eventos simples, las propiedades asintóticas están caracterizadas por los límites de las frecuencias relativas que convergen a las respectivas probabilidades dentro de cada parte, pero son distintas para las diferentes partes y la probabilidad total está dada por la mezcla ponderada de dichos límites.

$$p(E) = \int_{\Im} p_D(E) d\mu(D) .$$

Como corolario de los resultados anteriores, se obtiene que las sucesiones de eventos intercambiables son estacionarias, pero con propiedades asintóticas variables debido al condicionamiento de las probabilidades y que las sucesiones de eventos independientes están asociadas a una medida ergódica. Luego, dado que las medidas Bernoullianas satisfacen la primera ley de los grandes números y que la propiedad de ergodicidad implica un comportamiento límite idéntico para todas las sucesiones, se puede concluir que las probabilidades Bernoullianas son ergódicas y por lo tanto que el teorema de representación clásico es un caso particular del teorema de descomposición ergódica, en el que la probabilidad p define una componente ergódica formada por el conjunto de sucesiones cuya frecuencia relativa converge a p [9].

En el ámbito de la teoría ergódica el teorema de representación podría ser interpretado de la siguiente forma: la condición de intercambiabilidad (es decir, de estacionariedad) garantiza la existencia del límite (desconocido) de la frecuencia relativa. En términos de una aproximación subjetivista esta “ignorancia” podría ser caracterizada, entonces, por una mezcla sobre sus posibles valores en la que las ponderaciones de las distintas hipótesis surgen como asignaciones personales de los supuestos verdaderos valores de las probabilidades mediante el proceso de condicionamiento Bayesiano y permitirían obtener una evaluación intersubjetiva de la probabilidad.

Ahora bien, si el proceso es tal que admite una descomposición por la existencia de una partición ergódica que depende exclusivamente de las propiedades de la ley que determina su trayectoria, las ponderaciones de la descomposición asumen un significado físico, lo cual indujo a algunos autores a postular que su distribución no dependía de las características subjetivas del condicionamiento Bayesiano. Pero, la naturaleza axiomática de las premisas en las que se basa el teorema de descomposición, permite concluir que su aceptación reviste un carácter exclusivamente subjetivo.

Por otra parte, el hecho que la propensión sea una propiedad física del diseño del experimento basada en el supuesto de un comportamiento estructural dado del fenómeno y que su interpretación del concepto de

---

9 La demostración rigurosa de la interpretación del teorema de representación como un caso particular del teorema ergódico se debe a Ryll-Nardzewski, C. (1957). Ver, además, Freedman, D. (1962) y Dynkin, E.B. (1978).

probabilidad esté referida a eventos individuales y la consideración de una definición de las propensiones basada en las propiedades dinámicas de un fenómeno que posee una "verdadera" trayectoria y que, por lo tanto, admite una explicación en términos de mecánica clásica, implica una justificación analítica de que la teoría ergódica admite una interpretación propensionalista. Lo cual permite concluir que la teoría ergódica está afectada por las mismas características metafísicas del modelo propensionalista en el cual la asignación de probabilidades es inevitablemente subjetiva.

3. EL MÉTODO DE LAS FUNCIONES ARBITRARIAS

Como una alternativa a la teoría ergódica para justificar la existencia de una definición objetiva de probabilidad única en el ámbito de los fenómenos dinámicos que admiten leyes determinísticas que determinan su trayectoria, Poincaré, H. (1896) y von Smoluchowski, M. (1918) introdujeron el método de las funciones arbitrarias, el cual fue generalizado en sus aspectos matemáticos por Fréchet, M. (1952), quien demostró que la condición suficiente para su aplicación es contar con un continuo de trayectorias del proceso y una función de densidad sobre este conjunto la cual, bajo ciertas condiciones inherentes al mismo, se transformará asintóticamente en una única distribución final.

Hopf, E. (1934)(1936), de acuerdo con el principio según el cual los esquemas que se basan en la realización de una distribución de probabilidades "*...no pueden determinar el verdadero origen de las leyes de probabilidades, ya que se fundan en ellas*", propuso una nueva interpretación de las definiciones de Poincaré y von Smoluchowski fundada en la conjetura que sostiene que la justificación analítica del método de las funciones arbitrarias se encuentra exclusivamente en la teoría ergódica (en la cual, como se vio en la sección precedente, el supuesto de existencia de una distribución inicial es reemplazado por el de continuidad absoluta y la condición de independencia es considerada como un resultado derivado de dicha propiedad de continuidad), que en ciertos casos la naturaleza ergódica de un fenómeno dinámico puede ser determinada deductivamente y que, en consecuencia, el método de las funciones arbitrarias permite, en dichos casos, definir probabilidades objetivas[10].

---

[10] Posteriormente se demostró que la interpretación subjetivista de la condición de continuidad absoluta conduce a la conjetura de Savage, L.J. (1973) según la cual las funciones de probabilidades sólo pueden ser derivadas de otras funciones de probabilidades.

El fundamento teórico de la conjetura de Hopf fue proporcionado por Sinai, Y. (1976), quien demostró que, si el dominio de los estados es sometido a una partición finita en macro-estados, la sucesión de macro-estados compone un proceso Bernoulliano, es decir, una sucesión en la que los macro-estados son estocásticamente independientes y sus probabilidades están determinadas exclusivamente por la ley que rige la trayectoria del proceso.

Ahora bien, debe tenerse en cuenta que la conjetura de Hopf y los resultados obtenidos por Sinai se refieren exclusivamente a fenómenos cuyos comportamientos admiten una explicación en términos de mecánica clásica.

Por otra parte si, como ocurre en los fenómenos fácticos, la condición de continuidad absoluta no se verifica entonces, dada la inevitable presencia de factores aleatorios, la (única) realización del proceso no puede ser considerada como una consecuencia necesaria de su representación determinística.

Asimismo, dado que, de acuerdo con Khinchin, A. (1954), una condición necesaria para la convergencia de las frecuencias relativas es que los valores esperados de las funciones en el dominio de los estados sean independientes de la distribución inicial y que esta condición no se cumple para distribuciones singulares, se puede concluir que, para el caso de trayectorias únicas, los postulados de los teoremas ergódicos y, en consecuencia, de las leyes de los grandes números que vinculan frecuencias relativas con probabilidades, no se verifican.

4. CONCLUSIONES

Como un contraejemplo al "motto" deFinettiano que postula que "*la probabilidad no existe*", algunos autores propusieron una forma de identificación estricta del verdadero valor de una probabilidad basándose en la propiedad de intercambiabilidad, en los postulados del teorema de representación y en su interpretación en el ámbito de la teoría ergódica.

Como prueba de la inconsistencia de esta propuesta, respecto de los resultados de Koopman, von Neumann, Birkhoff, Khinchin y Sinai referidos a los postulados del teorema de partición ergódica y al método de las funciones arbitrarias, se concluyó, en primer lugar, que su fundamento en premisas de carácter axiomático (que los fenómenos admiten una explicación determinística en términos de mecánica clásica y satisfacen la condición de continuidad absoluta) implica que su aceptación es de carácter exclusivamente subjetivo.

Además, como una consecuencia inmediata de la justificación analítica de la interpretación propensionalista de la teoría ergódica, se concluyó que ésta está afectada por las mismas características metafísicas del modelo propensionalista en el cual la asignación de probabilidades también es inevitablemente subjetiva.

BIBLIOGRAFÍA

Birkhoff, G.D. (1931): "Proof of the ergodic theorem". *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 17. pp. 656-660.

Boltzmann, L. (1868): "Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen bewegten materiellen Punkten". *Wissenchaftliche Abhandlungen*, vol. 1, pp 517-560.

De Finetti, B. (1931): "*Probabilismo: Saggio critico sulla teoria della probabilità e sul valor della scienza*". Biblioteca di Filosofia, Perrella, Roma.

De Finetti, B. (1934): "Indipendenza stocastica ed equivalenza stocastica". *Atti della Società Italiana per il Progreso delle Scienze (XXII riunione)*, vol. 2, pp 199-202.

De Finetti, B. (1937): "La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives". *Anales del'Istitut Henri Poincaré*, vol. 7. Traducción como "Foresight its logical laws, its subjective sources". En Kyburg, H.E.; Smokler, H.E. (eds.), 1964.

Dynkin, E.B. (1978): "Sufficient statistics and extreme points". *Annals of Probability*, vol. 6, pp 705-730..

Frechét, M. (1943): "*Les probabilités associées a un systéme d'événements compatibles et dependants, cas particuliers et application*s". Hermann, París.

Frechét, M. (1952): "*Méthode des fonctions arbitraires, théorie des événements en chaine dans le cas d'un nombre fini de'etats possibles*". Gauthier-Villars, París.

Hopf, E. (1932): "On the time average problem in dynamics". *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 18, pp. 93-100.

Hopf, E. (1934): "On causality, statistics and probability". *Journal of Mathematics and Physics*, vol. 13, pp 51-102..

Hopf, E. (1936): "Ueber die Bedeutung der willkürlichen Funktionem für die Wahrscheinlichkeitstheorie". *Jahresbericht der Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, vol. 46, pp. 179-195.

Hopf, E. (1937): "*Ergodentheorie*". Springer, Nueva York.

Jeffrey, R.C. (1983): "*The logic of decision*". 2da edición, McGraw Hill, Nueva York.

Khinchin, A. (1932a): "Remarques sur les suites d'événements obeissant à la loi des grandes nombres". *Matematicheskii Sbornik*, vol. 39, num.3, pp. 115-119.

Khinchin, A. (1932b): "Zu Birkhoffs Lösung des Ergodemproblems". *Mathematische Annalen*, vol. 107, pp. 485-488.

Khinchin, A. (1933): "*Asymptotische gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*". Springer, Nueva York.

Khinchin, A. (1954): "Die Method der willkürlichen Funktionen und der Kampf gegen den Idealismus in der Wahrscheinlichkeitsrechnung". *Swjewissenschaft-Naturwissenschaftliche Abteilung*, vol. 7, pp 261-273.

Koopman, B. (1930): "Birkhoff on dynamical systems". *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 26, pp. 163-166.

Kyburg, H.E.; Smokler, H.E. (eds.)(1964): "*Studies in subjective probability*". Wiley, Nueva York.

Landro, A.H. (2010): "*Acerca de la probabilidad*". Ediciones Cooperativas. Buenos Aires.

Link, G. (1980): "*Representation theorems of the de Finetti type for (partially) symmetric probability measures*". En Jeffrey, R.C., 1983.

Poincaré, H. (1896): "*Calcul des probabilités*". Gauthier-Villars, París.

Ryll-Nardzewski, C. (1957): "On stationary sequences of random variables and the de Finetti's equivalence". *Colloquium Mathematicum*, vol. 4, pp. 149-156.

Savage, J. (1973): "*Probability in science: a personality account*". En Suppes, P. (ed.), 1973.

Von Neumann, J. (1932a): "A proof of the quasi-ergodic hypothesis". Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 18, pp. 70-82.

Von Neumann, J. (1932b): "Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik". Annals of Mathematics, vol. 33, pp 587-641.

Von Neumann, J. (1932c): "Physical applications of the ergodic hypothesis". Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 18, num. 3, pp 263-266.

Von Smoluchowski, M. (1918): "Über den Begriff des Zufalls und den

Ursprung der Warhrscheinlichkeitsgesetze in der Physik". Die Naturwissenschaften. Vol. 17, pp.253-263.