

EFICIENCIA DE UN MÉTODO EN DIFERENCIAS FINITAS EN LA VALORACIÓN DE DERIVADOS DE LOS TIPOS DE INTERÉS

Lourdes Gómez del Valle*, Julia Martínez Rodríguez**
Dpto. Economía Aplicada
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Valladolid
Avda. Valle del Esgueva 6
47011 - Valladolid - España
*lourdes@eco.uva.es, ** julia@eco.uva.es

Recibido 27 de octubre de 2005, aceptado 6 de febrero de 2007

Resumen

Los modelos paramétricos de los tipos de interés se basan, habitualmente, en restricciones arbitrarias sobre la tendencia y la volatilidad del proceso estocástico de los tipos de interés y el precio del riesgo de mercado. Sin embargo, recientemente se han comenzado a aplicar técnicas no paramétricas para explicar su comportamiento y aplicarlo posteriormente a la valoración de derivados del tipo de interés. El principal inconveniente de estos modelos es que no es posible obtener una solución analítica y es necesario aplicar métodos numéricos para su resolución. Habitualmente en la literatura se ha utilizado el Método de Simulación de Monte Carlo. Sin embargo, en este trabajo se muestra mediante gráficas de eficiencia que con los Métodos en Diferencias Finitas se obtienen soluciones más eficientes y una importante reducción del coste computacional. Además, se presenta cómo mediante la utilización de los Métodos en Diferencias Finitas sobre el modelo no paramétrico de tasas de interés de Stanton (1997) se obtienen curvas de rendimiento más próximas a las observadas en el mercado que las obtenidas con los modelos paramétricos clásicos que figuran en la literatura.

Palabras clave: estructura temporal de tipos de interés, opciones europeas sobre bonos, simulación Monte Carlo, diferencias finitas.

EFFICIENCY OF A DIFFERENCE FINITE METHOD TO PRICE INTEREST RATE DERIVATIVE SECURITIES

Lourdes Gómez del Valle*, Julia Martínez Rodríguez**
Dpto. Economía Aplicada
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Valladolid
Avda. Valle del Esgueva 6
47011 - Valladolid - Spain
*lourdes@eco.uva.es, ** julia@eco.uva.es

Received October 27th 2005, accepted February 6th 2007

Abstract

The parametric models of the term structure are generally based on arbitrary parametric restrictions over the drift and the volatility of the stochastic process of the interest rates and the market price of risk. However, recently nonparametric techniques have started to be applied to explain the behavior of the interest rates and to price interest rate derivatives. The main drawback of these models is that a closed form solution of the pricing partial differential equation is not known and numerical methods are necessary. Therefore, the Monte Carlo Simulation approach has been usually applied. However, in this paper we show by means of efficiency graphs that Finite Difference Methods are more efficient and do provide an important reduction of the computational cost. Moreover, we show that implementing a Finite Difference Method on the nonparametric interest rate model of Stanton (1997) we obtain yield curves which are closer to those observed in the market than those obtained with the classic parametric models in the literature.

Keywords: Term structure of interest rates; Bond options; Partial differential equations; Monte Carlo simulation, Finite difference.

1. INTRODUCCIÓN

Las últimas décadas han sido un período revolucionario en la negociación de los activos derivados en todo el mundo y en particular, son los derivados de los tipos de interés los activos con mayor negociación en los mercados globales. La valoración de estos derivados es más compleja que la de otro tipo de derivados como, por ejemplo, opciones sobre capital u opciones sobre índices, debido a que es necesario tener en cuenta la totalidad de la curva de rendimiento y el comportamiento de los tipos de interés.

Los primeros modelos estocásticos de la estructura temporal de los tipos de interés surgidos en la literatura financiera fueron los modelos endógenos. Estos describen los movimientos de la curva de tipos a partir de una especificación particular de las variables de estado o factores, determinadas por una ecuación diferencial estocástica. Inicialmente, se consideró que la curva estaba determinada por una única variable de estado, el tipo de interés instantáneo, dando lugar a los primeros modelos que aparecen en la literatura clásica, por ejemplo: Merton (1973), Vasicek (1977), Dotan (1978) y Cox *et al* (1985).

En los últimos tiempos el desarrollo teórico en la modelización de la dinámica de la estructura temporal ha estado orientado fundamentalmente en dos direcciones. En primer lugar, se han tenido en cuenta variables de estado adicionales en los modelos dando lugar a modelos multifactoriales como Brennan y Schwartz (1979), Duffie y Kan (1996) y Chen (1996). Sin embargo, este aumento de generalidad se consigue aumentando también la complejidad de los modelos. En general, no se conoce la solución analítica de estos modelos que por el contrario son más realistas y la dificultad de resolver ecuaciones en derivadas parciales con una dimensión superior a dos ha dado lugar a su falta de implementación práctica. En segundo lugar, se ha mejorado la especificación de la dinámica de los tipos de interés, como por ejemplo Chan *et al.* (1992), Ait-Sahalia (1996a), Stanton (1997) y Jiang (1998). Esta extensión de los modelos unifactoriales refleja el deseo de incorporar no linealidades en el tipo de interés al contado y a la vez, evitar las dificultades que conlleva la resolución de ecuaciones en derivadas parciales en modelos de más de un factor.

Los modelos unifactoriales han recibido numerosas críticas a causa de varias razones. En primer lugar, las curvas de rendimiento implícitas están limitadas en lo que se refiere a la forma, debido a la especificación particular del modelo. En segundo lugar, estos modelos implican correlación perfecta de los movimientos locales de los bonos con diferentes vencimientos. Sin embargo, siguen siendo muy

atractivos para los académicos y los profesionales del mercado. Los modelos unifactoriales proporcionan una herramienta que permite explicar el comportamiento de los tipos de interés y de la estructura temporal. Además, son sencillos de implementar desde un punto de vista computacional. En ocasiones, los investigadores imponen arbitrariamente restricciones al proceso estocástico del tipo de interés. Ait-Sahalia (1996b) demuestra que todos los modelos paramétricos del tipo de interés pueden ser estadísticamente rechazados cuando se compara la función de densidad dada por cada modelo con los datos históricos de USA. Para solucionar este problema Ait-Sahalia (1996a) especifica la tendencia del proceso como una función con reversión a la media, como en los modelos clásicos de la literatura, y la difusión como una función no paramétrica. Stanton (1997) y Jiang (1998) proponen estimar la tendencia, la difusión y el precio del riesgo de mercado utilizando técnicas no paramétricas.

En los modelos no paramétricos no es posible obtener una solución analítica para los valores de los derivados de los tipos de interés, por lo tanto es necesario aplicar métodos numéricos para obtener valores aproximados. Stanton (1997), Jiang (1998) y Fernández (2001) valoran bonos cupón cero y/o derivados del tipo de interés utilizando el Método de Simulación de Monte Carlo. Ait-Sahalia (1996a) aplica un Método en Diferencias Finitas, pero supone que la tendencia presenta reversión lineal a la media y únicamente estima la volatilidad de forma no paramétrica.

Los enfoques estándar para calcular los precios de los derivados de los tipos de interés son: el Método de Simulación de Monte Carlo y la resolución de la ecuación en derivadas parciales. Como la mayoría de los problemas de valoración de derivados del tipo de interés se pueden formular como la esperanza del valor descontado de un pago final, el Método de Simulación de Monte Carlo se convierte automáticamente en una herramienta eficiente para valorar derivados del tipo de interés cuya solución exacta no se conoce. En la mayoría de los casos el Método de Simulación de Monte Carlo es el más sencillo de aplicar, incluso sin necesidad de un conocimiento profundo del modelo de valoración. Cuando se enfrenta con el problema de valorar un derivado nuevo con funciones complejas de pagos, los profesionales de los mercados suelen confiar siempre en el Método de Simulación de Monte Carlo para generar una estimación del precio del nuevo derivado, aunque existan otros métodos numéricos que ofrezcan soluciones más eficientes y permitan explorar sus propiedades de mejor forma. Una desventaja del Método de Simulación de Monte Carlo es que es necesario realizar un número elevado de simulaciones para poder

conseguir un determinado grado de exactitud, ya que el error estándar de las estimaciones es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número de simulaciones. Para mejorar su eficiencia de computación existen diferentes técnicas de reducción de la varianza que permiten disminuir el error estándar. El segundo enfoque, la resolución de la ecuación en derivadas parciales, consiste en resolver la ecuación numéricamente. Los métodos numéricos que se utilizan habitualmente son los Métodos en Diferencias Finitas, de Elementos Finitos, etc. Los Métodos en Diferencias Finitas, que son los que se utilizan en este trabajo, se basan en la elección de un esquema de discretización para así resolver la ecuación en derivadas parciales numéricamente. En la construcción del esquema de diferencias finitas, se aproximan los operadores diferenciales que gobiernan las ecuaciones diferenciales del modelo mediante operadores en diferencias finitas. El esquema numérico que proviene de este procedimiento de discretización se puede clasificar como esquema explícito o esquema implícito.

El objetivo fundamental de este trabajo consiste en demostrar que cuando no se conoce la solución exacta de la ecuación en derivadas parciales de valoración de la curva de rendimiento y derivados del tipo de interés, los Métodos en Diferencias Finitas son más eficientes que el Método de Simulación de Monte Carlo, que es el más utilizado en la literatura. Además, se consigue una importante reducción en el tiempo computacional necesario para la obtención de los precios. Este hecho es especialmente importante cuando se utilizan modelos no paramétricos y se obtiene la estructura temporal en su totalidad y no sólo el precio de un derivado en concreto. Para ello, este trabajo se basa en gráficas de eficiencia obtenidas a partir de los modelos clásicos de la estructura temporal (Vasicek (1977) y Cox *et al* (1985)) en los que se conoce la solución exacta.

Adicionalmente, se aplica un Método en Diferencias para la obtención de las curvas de rendimiento del mercado de USA utilizando modelos no paramétricos y se observa que se encuentran más próximas a las observadas que las obtenidas con los modelos clásicos en la literatura, en los cuales sí se conoce la solución exacta del modelo. Finalmente, como en la literatura existente, se muestra que existen importantes diferencias entre los precios de otros derivados de los tipos de interés, (como por ejemplo los *caps* o “techos”) obtenidos con modelos paramétricos y aquellos obtenidos con los modelos no paramétricos. Este hecho refuerza la idea de que los modelos no paramétricos resultan más adecuados para la valoración de derivados del tipo de interés, lo cual está en línea con la literatura reciente.

La estructura de este trabajo es la siguiente. En la Sección 2 se describe el funcionamiento de los modelos de valoración de las curvas de rendimiento y los derivados del tipo de interés. En la Sección 3 se comentan diferentes métodos para resolver la correspondiente ecuación en derivadas parciales y se los compara en términos de eficiencia. En la Sección 4 se aplica un Método en Diferencias Finitas para obtener las curvas de rendimiento utilizando una estimación no paramétrica (Stanton 1997) y datos del mercado de USA, para compararlas con las obtenidas con los modelos clásicos. Finalmente, se obtienen los precios de algunos derivados, las opciones sobre los bonos cupón cero y los techos sobre tipos de interés.

2. LOS MODELOS

La estructura temporal de los tipos de interés ha recibido una atención constante durante las últimas décadas, tanto por profesionales como por investigadores científicos. En cuanto a los modelos que tratan de explicar el comportamiento de los tipos de interés, como paso previo a la valoración de los derivados de los tipos de interés, existen básicamente dos enfoques. En el primero se incluyen los modelos homogéneos en el tiempo que describen los movimientos de la curva de tipos a partir de una especificación particular de las variables de estado o factores, determinados por una ecuación diferencial estocástica. Inicialmente, se consideró que la curva venía descrita por una única variable: el tipo de interés instantáneo. Posteriormente, aplicando un razonamiento de no arbitraje o un enfoque de equilibrio, se obtiene una ecuación en derivadas parciales y se resuelve (bien analíticamente o utilizando técnicas numéricas) sujeta a las correspondientes condiciones en la frontera. Dos ejemplos clásicos dentro de este enfoque son los modelos de Vasicek (1977) y Cox *et al.* (1985), quienes consideran como único factor el tipo de interés instantáneo.

Por el contrario, los modelos no homogéneos se ajustan perfectamente a la curva de rendimiento y, como ejemplo, se proponen los siguientes modelos: Ho y Lee (1986), Black, Derman y Toy (1990), Hull y White (1990) y Heath *et al.* (1992), entre otros. En los mercados financieros se utilizan, frecuentemente, estos modelos. Sin embargo, presentan importantes inconvenientes, como por ejemplo, el de ser recalibrados constantemente para ser consistentes con la estructura temporal observada. Algunos autores, como Jiang (1998), critican que se ignora la evidencia de que existen oportunidades de arbitraje en las curvas observadas de la estructura temporal de los tipos de interés. Por lo tanto, al estimar el modelo cada día para mantener el ajuste perfecto

a la curva de tipos, es muy posible que éste no tenga en cuenta las hipótesis fundamentales necesarias para eliminar las oportunidades de arbitraje y lleve a una incorrecta estimación de los precios de las opciones sobre tipos de interés.

Este trabajo se centra únicamente en modelos markovianos homogéneos en el tiempo con una única variable de estado que es el tipo de interés instantáneo r_t , y se supone que esta variable sigue un proceso estocástico como el siguiente:

$$dr_t = f(r_t)dt + \rho(r_t)dZ_t, \quad (1)$$

donde $f(r_t)$ y $\rho(r_t)$ representan la tendencia y la volatilidad instantánea, respectivamente, y Z_t el proceso de Wiener estándar.

Sea $U(t, r, T)$ el precio en el instante t de un activo derivado del tipo de interés que vence en T . La ecuación en derivadas parciales que proporciona el precio de este título está determinada por la siguiente expresión (Duffie, 1996):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (f - \rho\lambda)\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{2}\rho^2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - rU + c = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

con $c(t, r; T)$ el tanto continuo de pago del derivado y $\lambda(t, r)$, $t \leq T$, el precio de riesgo de mercado, que es el mismo para todos los derivados del tipo de interés y está dado por el mercado, Björk (1998).

La ecuación (2) es un problema de Cauchy con la condición final

$$U(T, r; T) = g(r) \quad (3)$$

Las condiciones final y frontera dependerán del modelo de tipo de interés elegido y del derivado a valorar. La solución de Feynman-Kac del problema (2)-(3) viene dada por Friedman (1975)

$$U(t, r; T) = E_t \left[\int_t^T \exp\left(-\int_t^s \hat{r}(\tau) d\tau\right) c(r, s) ds + \exp\left(-\int_t^T \hat{r}(\tau) d\tau\right) U(T, r; T) \right] \quad (4)$$

con \hat{r} el tipo de interés neutral al riesgo

$$d\hat{r}_t = (f(\hat{r}_t) - \lambda(\hat{r}_t))dt + \rho(\hat{r}_t)dZ_t.$$

El activo más sencillo que se puede valorar utilizando la ecuación (2) es un bono cupón-cero, $U(t, r; T) = B(t, r; T)$, que paga a su vencimiento, T , una cantidad fija que es el principal de 1 u.m. Este contrato da lugar a $c(t, r; T) = 0$ y la condición final

$$B(t, r; T) = 1 \quad (5)$$

Otros casos se pueden tratar de forma similar (Duffie, 1996). Si se considera una opción europea sobre un bono cupón cero que vence en T_B , el valor de la opción, $U(t, r; T) = V(t, r; T_V)$, con precio de ejercicio K y fecha de vencimiento T_V , $t \leq T_V \leq T_B$, viene determinada por la solución de (2), con $c(t, r) = 0$ y la condición final

$$V(T_V, r; T_V) = \max(B(T_V, r; T_B) - K, 0)$$

Un *cap* es un préstamo a tipo variable con un tipo de interés garantizado por debajo de un nivel \hat{r} . El valor de un *cap* es también la solución de (2), pero con la condición final igual a su valor nominal y $c = \min(r, \hat{r})$. Sin embargo, en ocasiones la definición del problema varía en este tipo de derivados (Duffie, 1996).

La imposición de hipótesis diferentes sobre la tendencia y la volatilidad de los tipos de interés y el precio del riesgo de mercado proporciona diferentes modelos. En la literatura de la estructura temporal existen dos modelos que pueden considerarse como clásicos:

Modelo de Vasiceck: Vasiceck (1977) asume que la tendencia posee reversión lineal a la media, y la volatilidad y el precio del riesgo de mercado son constantes,

$$f(r) = \beta(m - r), \quad \beta, m > 0, \quad (10)$$

$$\rho(r) = \rho_0, \quad \rho_0 \in R, \quad (11)$$

$$\lambda(r) = \lambda_0, \quad \lambda_0 \in R. \quad (12)$$

Modelo de CIR: Cox *et al.* (1985) suponen que la tendencia posee reversión lineal a la media, y la volatilidad y el precio del riesgo de mercado dependen del tipo de interés de la siguiente forma:

$$f(r) = \beta(m - r), \quad \beta, m > 0, \quad (13)$$

$$\rho(r) = \rho_0 \sqrt{r}, \quad \rho_0 \in R, \quad (14)$$

$$\lambda(r) = \frac{\lambda_0}{\rho_0} \sqrt{r}, \quad \lambda_0 \in R. \quad (15)$$

La elección del proceso estocástico que sigue el tipo de interés y el precio del riesgo de mercado en los modelos de Vasiceck y CIR da lugar a que estos modelos posean una propiedad especial. El precio de un bono cupón-cero, que es solución de (2) sujeto a la condición final (5), se puede representar formalmente mediante una integral en términos

del proceso estocástico subyacente y su solución exacta es conocida (Duffie y Kan, 1996). La solución de ambos modelos es ampliamente conocida y extensamente analizada en Vasicek (1997) y Cox *et al.* (1985).

A partir de la serie de tiempo de los tipos de interés es muy difícil determinar a priori la forma funcional de la tendencia y la volatilidad del proceso estocástico. Por tanto, para evitar la imposición de restricciones paramétricas sobre la tendencia y la volatilidad, en la reciente literatura se han utilizado técnicas no paramétricas. Es decir, no se imponen restricciones a priori sobre la estructura de los tipos, sino que se deja que los datos se expresen por sí mismos. Stanton (1997) y Boudoukh *et al.* (1999) propusieron estimadores no paramétricos de la tendencia y de la volatilidad basándose en sus aproximaciones. Jiang (1998), sin embargo, propuso un estimador a partir de las propiedades locales del proceso de difusión y la tendencia a partir del desarrollo de su densidad de transición para pequeñas variaciones en el tiempo.

3. MÉTODOS NUMÉRICOS

En esta sección se comparan la aproximación y eficiencia del enfoque de la Simulación de Monte Carlo y del Método en Diferencias Crack-Nicolson para valorar activos derivados del tipo de interés.

La Simulación de Monte Carlo y los Métodos en Diferencias Finitas suelen utilizarse para valorar activos cuando no se conoce la solución exacta. En particular, Stanton (1997), Jiang (1998) y Fernández (2001) obtienen la solución de los modelos no paramétricos presentada mediante la simulación de Monte Carlo. Ait-Sahalia (1996a) utiliza un Método en Diferencias Finitas, pero su modelo es semi-paramétrico ya que la tendencia se supone con reversión a la media y el precio de riesgo del mercado es constante.

El Método de Simulación de Monte Carlo se ha mostrado como una técnica muy versátil. Básicamente, es un procedimiento numérico para estimar el valor de la esperanza de una variable aleatoria. Esto permite aplicarlo a problemas representados por una esperanza. La simulación conlleva la generación de variables aleatorias con una densidad de probabilidad dada y, utilizando la ley de los grandes números, se calcula la media de esos valores como una estimación de la esperanza de la variable aleatoria, como (4).

En el contexto de la valoración de derivados, el Método de Monte Carlo está formado por los siguientes pasos. En primer lugar, se simula

una muestra de la variable de estado subyacente en el modelo de derivados, como el tipo de interés de acuerdo a la distribución de probabilidad neutral al riesgo, durante la vida de los derivados. En segundo lugar, una vez obtenida la muestra, se actualiza la corriente de pagos de los derivados. Finalmente, se calcula la media de los valores de la corriente de pagos actualizados.

Los dos factores principales a tener en cuenta cuando se aplica el Método de Simulación de Monte Carlo son la precisión y el coste computacional. Generalmente, se pretende mantener un equilibrio entre ambos aspectos. El error estándar del estimador de Monte Carlo es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número de simulaciones. De este modo, reducir el error estándar en un 50% requiere 4 veces más simulaciones. Existen técnicas de reducción de la varianza, tales como la técnica de la variable antitética o la de la variable de control, que se han desarrollado con el fin de mejorar la eficiencia de las simulaciones. En este trabajo se implementa la técnica de la variable antitética para aumentar la velocidad de convergencia del método.

Por otro lado, los Métodos en Diferencias Finitas se suelen utilizar para aproximar la solución de la ecuación en derivadas parciales (2) (Morton y Mayers, 1994; Wilmott, 2000). Estos métodos consisten en encontrar aproximaciones en diferencias finitas para las derivadas parciales con el fin de reemplazar la ecuación en derivadas parciales por una representación en diferencias, lo que permite aplicar un enfoque numérico. El resultado consiste en reemplazar la ecuación en derivadas parciales por una relación entre los valores de la función en los puntos o nodos de una red. De este modo, la ecuación diferencial se aproxima por un conjunto de ecuaciones algebraicas, para los valores de la función en los nodos de la red.

La ecuación en derivadas parciales (2) se puede convertir en una ecuación progresiva en el tiempo si se sustituye la variable t por $t^* = T - t$. Después de realizar el cambio de variable, esta ecuación se convierte en

$$\frac{\partial U}{\partial t^*} = \frac{1}{2} \rho^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + (f - \rho\lambda) \frac{\partial U}{\partial r} - rU + c = 0, \quad 0 < t^* < T,$$

Se considera una discretización de esta ecuación mediante el Método en Diferencias Finitas con una ponderación temporal $0 < \theta < 1$.

Con el fin de simplificar la notación se representa mediante

$$a(r) = \frac{1}{2} \rho(r)^2,$$

$$b(r) = f(r) - \rho(r)\lambda(r).$$

Se denota por U_j^n la aproximación a la solución en el punto (t_n^*, r_j) de la malla, es decir, $U(t_n^*, r_j)$, obtenida mediante el θ -método (Wilmott, 2000)

$$\begin{aligned} \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t^*} = & \theta \left(a_j \frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{\Delta t^*} + b_j \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{\Delta t^*} \right) \\ & + (1-\theta) \left(a_j \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{\Delta t^*} + b_j \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{\Delta t^*} \right) \\ & - \theta r_j U_j^{n+1} - (1-\theta) r_j U_j^n + \theta c_j^{n+1} + (1-\theta) c_j^n, \end{aligned}$$

donde $a_j = a(r_j)$, $b_j = b(r_j)$ y $c_j^n = c(t_n^*, r_j)$. Este método con una ponderación simétrica $\theta = 1/2$ se conoce como esquema Crank-Nicolson y es un método de segundo orden en tiempo y espacio. Por ejemplo, si se divide el paso por 2, el error se divide por 4.

Cuando se pretende analizar la eficiencia de diferentes técnicas de aproximación es importante realizar distintos experimentos numéricos con el fin de mostrar su precisión. Para ello se suelen realizar los siguientes pasos. En primer lugar, es necesario un problema test, es decir, un problema del que se conozca la solución exacta, lo que nos permitirá realizar comparaciones. Se entiende que, posteriormente, las técnicas se pretenden aplicar a modelos en los que no se conozca la solución exacta. En segundo lugar, la solución aproximada obtenida se compara con la exacta con alguna medida de error. Finalmente, se suele tener en cuenta el coste computacional de las técnicas numéricas utilizadas para calcular la solución aproximada (aquí se utiliza el tiempo de CPU). Así pues, se compara el error absoluto (valor absoluto de la diferencia entre la solución exacta y la aproximada) frente al coste requerido en la computación, medido en tiempo de CPU¹.

Se utilizan ambas técnicas para aproximar la solución de los

¹ Todos los experimentos se han realizado con una SUN Workstation usando el paquete de software de la librería NAG de Fortran y el tiempo de CPU es la medida del coste computacional utilizado por el ordenador.

modelos de Vasiceck y CIR para diferentes tipos de interés. Se ha realizado la comparación para diferentes tipos de interés y valores de los parámetros y las conclusiones fueron las mismas. En la Figura 1 se presentan los resultados obtenidos para los siguientes valores: $\tau = 1$, $\theta = 1/2$ y los parámetros obtenidos en la Sección 4 para los modelos de Vasiceck y CIR. Cada gráfica muestra el error producido por los diferentes métodos frente al coste computacional, ambos representados en escala logarítmica. En las dos primeras gráficas se encuentran los valores obtenidos con el modelo de Vasiceck para $r = 0.04$ y $r = 0.12$, respectivamente, y las dos segundas con el de CIR, para los mismos tipos de interés.

En la primera gráfica se muestra que el Método en Diferencias obtiene una aproximación de 10^{-2} con un coste computacional de 10^{-5} . Sin embargo, para la misma precisión, el Método de Monte Carlo requiere un coste computacional de 10, es decir, 1000 veces superior.

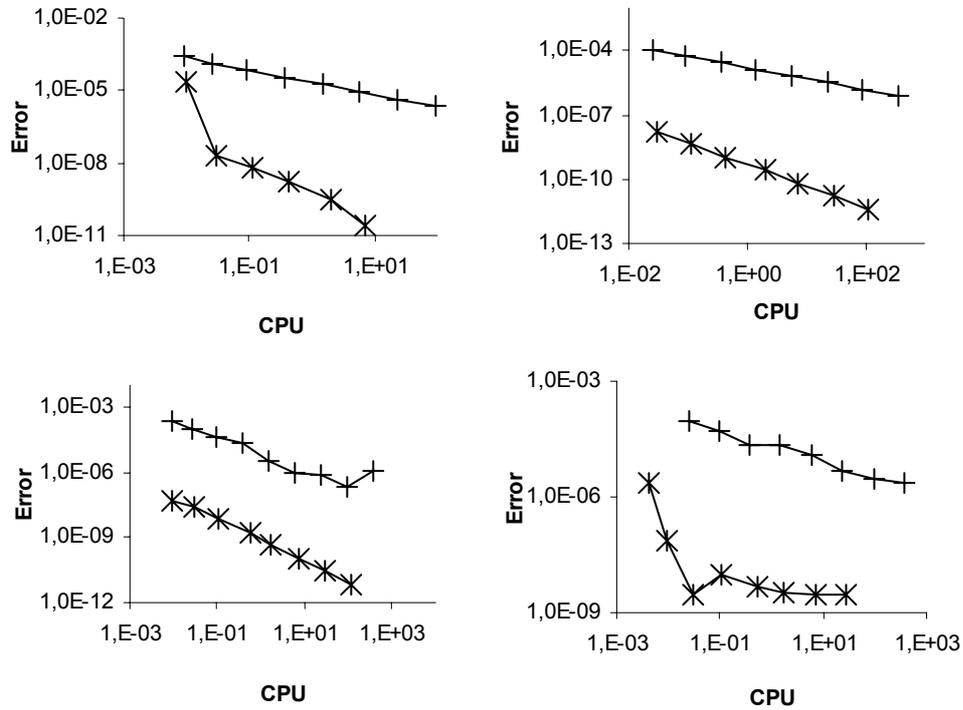


Figura 1. Gráficas de eficiencia para los modelos Vasiceck y CIR y tipos de interés del 4% y 12%. Método en Diferencias Finitas: (-*-), Monte Carlo: (-+-)

Además, el Método en Diferencias puede llegar incluso a un error del orden de 10^{-11} , mientras que el de Monte Carlo es siempre mayor o igual a 10^{-6} . Esto quiere decir que con el Método en Diferencias se llega a tener 11 dígitos significativos correctos en contraste con el de Monte Carlo que como máximo se llega a conseguir 6.

En todos los casos se observa que el Método en Diferencias es más eficiente que el de Monte Carlo: para un mismo coste computacional la precisión obtenida con el primero es mucho mayor.

Si en lugar de considerar el tiempo de CPU se considera el tiempo real en un Pentium IV, la diferencia entre ambos métodos es la siguiente: para una precisión de 10^{-7} la simulación de Monte Carlo necesita unos 75 minutos mientras que el Método en Diferencias Finitas obtiene la solución en segundos. Estos experimentos se han realizado para algunos modelos paramétricos, porque se conoce la solución exacta. Si se aplica el método de Monte Carlo a modelos no paramétricos, las diferencias en eficiencia son aún mayores. De hecho, el coste computacional de la simulación de Monte Carlo para aproximar la solución es demasiado caro. Por ejemplo, si se realizan 10000 simulaciones usando 100 períodos de tiempo por día, como se hace en los textos clásicos, se requieren 6 días para obtener el precio de un bono cupón cero. Sin embargo, el Método en Diferencias calcula varios precios de bonos cupón cero para 200 tipos de interés en pocos segundos y con mayor precisión. De este modo, en la sección siguiente se utilizará este Método en Diferencias para resolver la ecuación en derivadas parciales (13) para un modelo no paramétrico.

4. APLICACIÓN EMPÍRICA

En esta sección se obtiene el precio no paramétrico de activos derivados del tipo de interés usando el Método en Diferencias descrito en la sección anterior.

En la literatura previa Ait-Sahalia (1996a), Stanton (1997), Jiang (1998) y Fernández (2001) comparan los precios semi-paramétricos o no paramétricos de activos derivados obtenidos con modelos diferentes. Sin embargo, cuando es posible y existen datos en el mercado, se comparan los precios no paramétricos obtenidos mediante el Método en Diferencias con los observados. Se ha comprobado que los modelos no paramétricos con la resolución mediante métodos en diferencias proporcionan resultados adecuados. También se valoran otros activos derivados del tipo de interés comparando los resultados obtenidos en modelos paramétricos (Vasicek y CIR) con los no paramétricos, y se observan importantes diferencias.

Variable	r_t	$r_{t+1} - r_t$
N	7488	7487
Media	0.066	-3.61e-6
Máximo	0.168	-0.012
Mínimo	0.026	-0.012
Desviación típica	0.026	0.001
ρ_1	0.999	0.137
ρ_2	0.998	0.020
ρ_3	0.996	-0.024

Tabla 1. Estadísticos de los datos

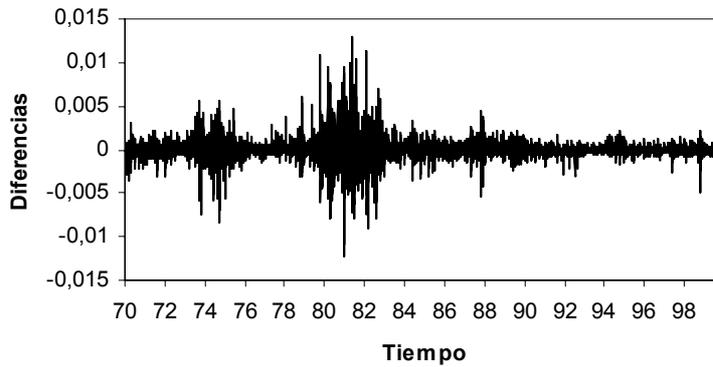
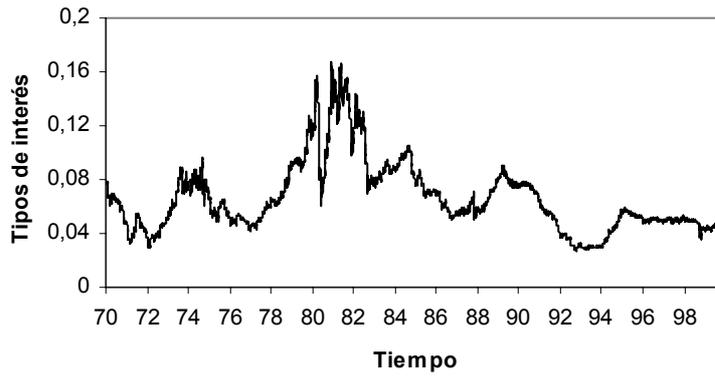


Figura 2. Tipos de interés y primeras diferencias

Para poder estimar los coeficientes de la ecuación diferencial estocástica (1) es preciso disponer de una serie de tiempo del tipo de

interés instantáneo libre de riesgo. En este trabajo se utilizan, concretamente, las observaciones diarias de los rendimientos de los *Treasury Bills* del mercado secundario de Estados Unidos, lo cual es una práctica habitual en la literatura (Stanton, 1997; Jiang, 1998). Esta elección se basa también en un compromiso entre un vencimiento lo suficientemente pequeño pero que a su vez no incluya los efectos propios de los mercados. El período de estimación se considera desde enero de 1970 hasta diciembre de 1999, y se transforman los rendimientos en tipos de interés anual sin realizar ningún ajuste específico por fines de semana o vacaciones. En las Figuras 2 y 3 se representan los tipos de interés y sus primeras diferencias, respectivamente. En la Tabla 1 se recogen los estadísticos más importantes para el tipo de interés y sus diferencias. Los datos se obtienen de la Reserva Federal de los Estados Unidos h.15. Para poder estimar el precio del riesgo de mercado se necesitan datos adicionales del mercado.

Con el fin de obtener la tendencia y la difusión del proceso estocástico (1) y del precio de riesgo del mercado por medio de estimación no paramétrica, aquí se utilizan las aproximaciones de primer orden de Stanton². Una forma de estimarlas es mediante el Método del Núcleo. En particular, la esperanza condicionada de las aproximaciones de primer orden de $\mu(r)$ y $\sigma^2(r)$ están expresadas mediante las siguientes igualdades:

$$E_t[r_{t+\Delta} - r_t | r_t = r] = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} (r_{t+\Delta} - r) K[(r - r_t) / h]}{\sum_{i=1}^{N-1} K[(r - r_t) / h]},$$

$$E_t[(r_{t+\Delta} - r_t)^2 | r_t = r] = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} (r_{t+\Delta} - r)^2 K[(r - r_t) / h]}{\sum_{i=1}^{N-1} K[(r - r_t) / h]},$$

donde h es la anchura de banda, N es el tamaño de la muestra, Δ es el intervalo de tiempo transcurrido hasta una nueva observación del tipo de interés y $K(\cdot)$ es una función núcleo adecuada, definida por una

² Stanton (1997) investiga el desarrollo de las aproximaciones de primero, segundo y tercer orden para algunos modelos paramétricos habituales en la literatura. Él demostró que con datos diarios, incluso la aproximación de primer orden proporciona aproximaciones indistinguibles de la función verdadera.

densidad de probabilidad normal estándar. Las aproximaciones anteriores reciben el nombre de estimadores de Nadaraya-Watson y se pueden obtener de la teoría de regresión no paramétrica (Härdle, 1999; Scott, 1992; Silverman, 1992). La anchura de banda para la densidad marginal se obtiene a partir de la regla de Silverman (1992) y aquí se utiliza validación cruzada para las otras funciones. Las bandas de confianza al 95% se obtienen mediante el algoritmo de *bootstrap* por bloques de Efron y Tibishirani (1993). El precio de riesgo del mercado se obtiene, como en Stanton (1997), a partir de los rendimientos en el mercado secundario de los *Treasury Bills* a 3 meses. Este precio de riesgo del mercado evita oportunidades de arbitraje.

	β	m	ρ_0
Vasiceck	0.401757 (1.374994)	0.058797 (8.663945)	0.012799 (24.54405)
CIR	0.395825 (1.355413)	0.058680 (8.558753)	0.054691 (26.64780)

Tabla 2. Estimaciones del proceso estocástico

Para la comparación, en este trabajo se estiman los modelos de Vasiceck y CIR, en (7)-(9) y (10)-(12), respectivamente. Se calculan los parámetros del proceso estocástico mediante el Método Generalizado de Momentos (GMM) (Hansen, 1982; Green, 1993). Con el fin de evitar el sesgo de discretización, se utilizan los momentos condicionados exactos (Aït-Sahalia, 1996a; Jiang, 1997). En la Tabla 2 se proporcionan los valores de los parámetros estimados del proceso del tipo de interés con el estadístico t entre paréntesis.

El precio de riesgo del mercado de los modelos de Vasiceck y CIR se obtiene minimizando la expresión

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (B_i - \hat{B}_i)^2}, \quad (13)$$

donde N es el número de observaciones, B_i es el precio para la i -ésima observación y \hat{B}_i es el precio estimado (Corzo y Schwartz, 2000). El conjunto de bonos cupón cero incluido en la muestra se obtuvo a partir de los rendimientos de los títulos del tesoro a vencimiento constante e iguales a $T = 1, 3, 5, 7$ y 10 años.

$$B(t, T) = \exp(-(T - t) R(t, T)).$$

Los parámetros del precio de riesgo del mercado estimados en Vasiceck y CIR y sus correspondientes RMSE entre paréntesis son

-0.724377 (0.04276623) y -0.131386 (0.0375137), respectivamente.

La tendencia, la volatilidad y el precio de riesgo del mercado, paramétricos y no paramétricos, están representados en la Figura 3. Nuestra definición del precio de riesgo del mercado es estándar y se puede encontrar en Kwok (1998), aunque Stanton (1997) y Jiang (1998) lo definen como $\lambda^*(r) = \rho(r) \lambda(r)$. Aquí se utiliza esta última forma para su representación gráfica.

En la Figura 3 a) se muestra la densidad marginal no paramétrica y se observa claramente que no es normal, sino que está sesgada y que posee una cola a la derecha mayor que la de la función de densidad normal.

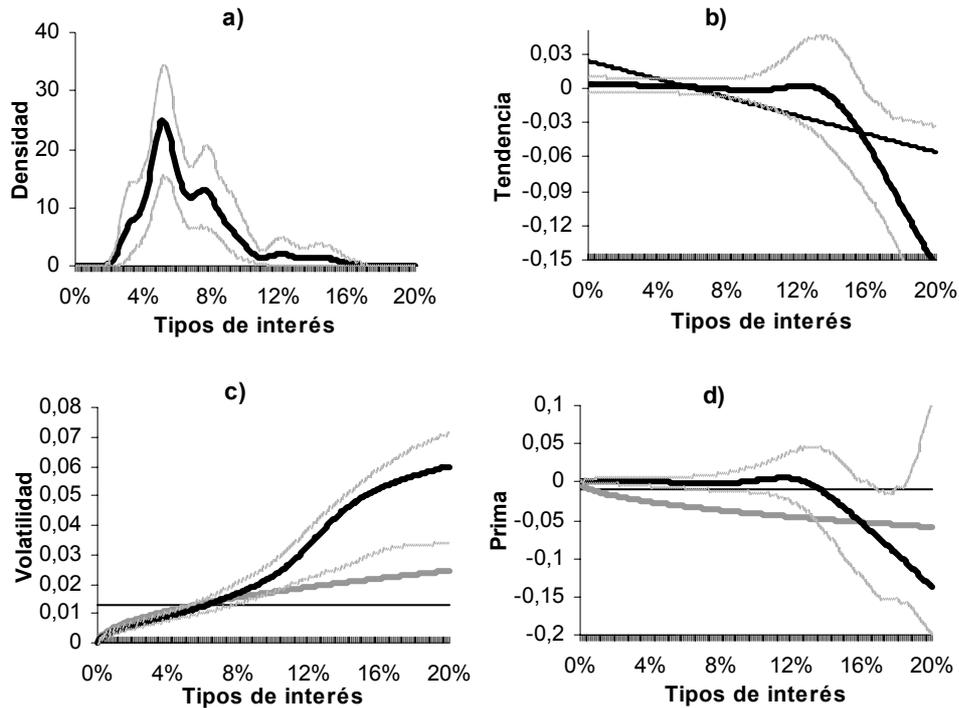


Figura 3. Función de densidad no paramétrica, tendencia, volatilidad y precio del riesgo de mercado (prima). Modelo no paramétrico: (línea negra gruesa), intervalos de confianza al 15%: (línea discontinua), modelo CIR: (línea gris gruesa) y modelo Vasiceck: (línea negra fina)

La Figura 3 b) muestra que la función de tendencia no paramétrica toma valores muy cercanos a cero para valores bajos y medios del tipo

de interés y decrece rápidamente para valores del tipo de interés alto. Este hecho muestra la existencia de reversión a la media débil cuando los tipos de interés son bajos y fuerte cuando los tipos son altos. Además, la tendencia no paramétrica es totalmente distinta de las de Vasicek y CIR representadas también en la Figura 3 b). Este hecho confirma lo observado empíricamente por Ait-Sahalia (1996a) y Jiang (1998): el término tendencia del proceso del tipo de interés está cercano a cero para la mayoría de los tipos de interés y globalmente tiene un comportamiento no lineal. Este hecho también fue confirmado por Conley (1997).

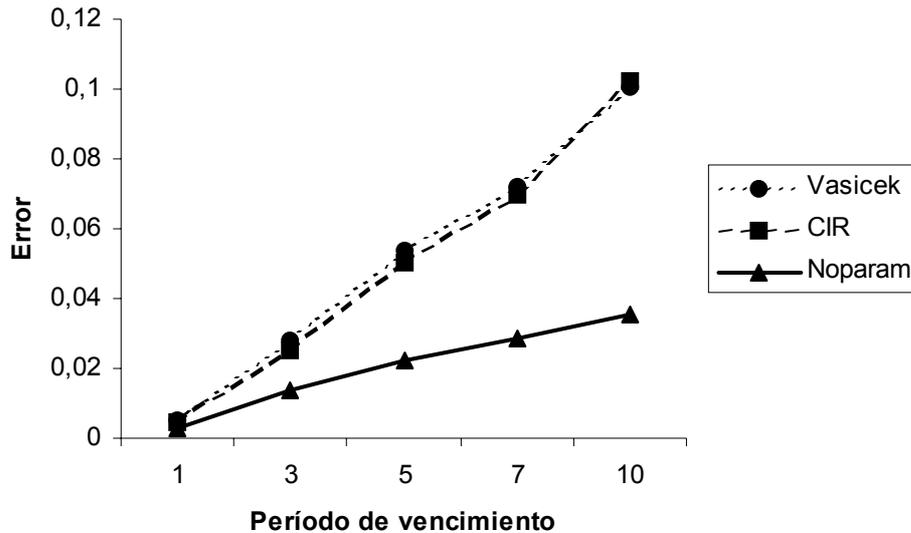


Figura 4. Errores para bonos cupón cero con diferentes vencimientos en el período de predicción

El primer aspecto importante que se observa en la Figura 3 c) es que la volatilidad es globalmente una función creciente del tipo de interés. Este hecho apoya la conjetura del “efecto nivel” y rechaza los modelos de volatilidad constante, tales como el Vasicek. Por lo tanto, los tipos de interés bajos están asociados a niveles bajos de volatilidad, lo cual sugiere que es más probable que los tipos de interés permanezcan en niveles bajos. Una especificación de la función de difusión como en el modelo de CIR es una aproximación relativamente buena sólo para tipos de interés bajos, porque para valores altos la volatilidad crece más lentamente que el tipo de interés.

En la Figura 3 d) se muestra el precio de riesgo del mercado. Una propiedad a destacar de esta función estimada es que en general es no nula, lo que confirma los resultados de Ronn y Wadha (1995), Stanton (1997) y Jiang (1998). Además, es consistente con la extensa literatura sobre el término prima de riesgo, como en Fama (1984). En la gráfica se puede observar la diferencia entre las funciones estimadas de forma paramétrica y la no paramétrica. En el primer caso se suponen funciones mucho más simples, por ejemplo, Vasicek (1997) supone que es constante, o incluso nulas (basándose en la hipótesis de las expectativas locales). Además, el precio de riesgo del mercado no paramétrico es básicamente negativo, lo que responde a una prima positiva para el comportamiento del riesgo del tipo de interés.

Es posible notar que en las bandas de confianza al 95% de la tendencia, la difusión y el precio de riesgo del mercado estimados se estrechan para valores del tipo de interés pequeños, donde realmente hay más observaciones. Sin embargo, estas bandas se separan cuando el interés es mayor. Esto refleja el hecho de que nuestra confianza en las estimaciones para tipos de interés altos (donde hay menos observaciones) decrece. De ahí que se necesiten un gran número de datos para las técnicas de estimación no paramétricas.

Con el fin de valorar derivados del tipo de interés, se deben resolver numéricamente la ecuación (2) sujeta a la condición final (3) y las correspondientes condiciones frontera. En cuanto a los modelos de Vasicek y CIR presentan soluciones exactas ampliamente conocidas (Vasicek, 1997; Cox *et al.*, 1985; Rebonato, 1996).

En primer lugar, se calculan los precios de los bonos cupón cero en el modelo no paramétrico con el Método en Diferencias Finitas con la condición final (5) y la condición frontera con (ver Ait-Sahalia, 1996a)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} B(t, r; T) = 0 \quad (14)$$

Se calculan los precios de los bonos para diferentes vencimientos $T = 1, 3, 5, 7$ y 10 años a lo largo del periodo de la muestra: de enero del 2000 a mayo del 2001. Se comparan con los precios observados en el mercado utilizando el RMSE descrito en (13) y los resultados se representan en la Figura 4. Esta gráfica muestra que para todos los vencimientos el error en el modelo no paramétrico es menor que en los de Vasicek y CIR. Además, para vencimientos mayores la diferencia en los errores entre los modelos paramétricos y el no paramétrico es más acentuada. Es decir, que el modelo no paramétrico, a pesar de no conocerse solución exacta, proporciona valores más precisos. El método en diferencias finitas proporciona de forma eficiente una

solución numérica adecuada.

Tipo anualizado	Vencimiento opción	Precio de ejercicio		
		0.98	1	1.02
0.02	0.5	0.027867	0.012138	0.002773
		(0.000519)	(0.000972)	(0.001012)
		0.024864	0.011416	0.002986
	1	0.024907	0.010876	0.002102
		0.036304	0.026316	0.008409
		(0.000488)	(0.000972)	(0.001135)
0.08	0.5	0.037878	0.023613	0.011412
		0.036924	0.022446	0.010158
		0.040499	0.028957	0.018863
	1	(0.000890)	(0.000972)	(0.001135)
		0.039048	0.026260	0.014051
		0.038838	0.026662	0.015744
0.065233	0.065233	0.053414	0.042060	
	(0.000940)	(0.000975)	(0.001134)	
	0.063821	0.051504	0.039194	
		0.063514	0.051429	0.039569

Tabla 3. Precios de opciones europeas de compra

Este trabajo valora opciones *call* europeas con vencimiento en T_V sobre un bono cupón cero con vencimiento en T_B , $t < T_V < T_B$. El precio de esta opción es la solución de la ecuación [2] sujeta a la condición final [6] y la condición frontera [14]. En la Tabla 3 se recogen los precios de las opciones *call* sobre bonos cupón cero a 5 años para varios vencimientos y precios de ejercicio con diferentes modelos. Todos los precios corresponden a bonos con valor nominal 1. Los precios de ejercicios se expresan como proporciones de los correspondientes precios de obligaciones para cada modelo. Los errores *bootstrap* estándar se obtienen como en Aït-Sahalia (1996a). Los cuatro elementos de cada celda comenzando desde arriba son: el precio no paramétrico, el error *bootstrap* estándar, el precio del modelo de Vasicek y el de CIR. En la Tabla 3 se observa que hay importantes diferencias entre los precios paramétricos de las opciones y los no paramétricos.

Para obtener los precios de los *caps* sobre tipos de interés, es necesario resolver la ecuación (2) con la condición final (3) y la condición frontera (14). Sin embargo, un *cap* es un contrato que puede interpretarse como un *swap* en el cual los pagos sólo se realizan si tiene valor positivo. Por tanto un *cap* se puede valorar como una cartera de opciones europeas sobre los tipos de interés y cada opción

de la cartera recibe el nombre de *caplet*. Siguiendo a Chen (1996) y como es usual en la literatura, se supone que el *cap* es sobre el tanto LIBOR. Más detalladamente, si el principal del *caplet* es L y los pagos de los tipos de interés se hacen en los instantes de tiempo $(k + 1) \pi$, $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ desde el comienzo de la vida del *cap*, entonces el valor de cada *caplet* sería

$$C_k = L(1 + h\pi) V_P(t, h; k\pi)$$

Tipo anualizado	Vencimiento cap	Precio de ejercicio		
		-0.02	0	0.02
0.05	3	0.062940	0.006929	0.000000
		(0.022811)	(0.002051)	(0.000001)
		0.093010	0.040011	0.006725
	5	0.088611	0.035720	0.006527
		0.104989	0.013189	0.000003
		(0.004154)	(0.003560)	(0.000011)
0.1	3	0.163804	0.081264	0.021184
		0.158235	0.075764	0.021882
		0.063330	0.011490	0.000140
	5	(0.00411)	(0.003137)	(0.000161)
		0.043100	0.004615	0.000044
		0.053065	0.012979	0.001598
		0.104357	0.021582	0.001018
		(0.007372)	(0.005129)	(0.000760)
		0.057426	0.006353	0.000081
		0.076287	0.021023	0.003515

Tabla 4. Precios de *caps*

donde h es el tipo de interés *cap* del contrato, π la periodicidad de los pagos y V_P es el valor en t de una opción de venta que vence en el instante $k\pi$ sobre un bono cupón cero que vence en $(k + 1)\pi$,

$$V_P(t, h; (k + 1) \pi) = \max (P (t, h; (k + 1) \pi) - K, 0) \tag{15}$$

Los precios de las opciones de venta se obtienen de forma análoga a aquellos de las opciones de compra, pero con la condición final (15). Obviamente, es posible también obtener primero el precio de una opción de compra y entonces aplicar el principio de paridad de las opciones de compra y de venta. Finalmente, el precio del *cap* es la suma de los precios de los *caplets*

$$C = \sum_{k=0}^{n-1} C_k(t, \tau)$$

En la Tabla 4 figuran los precios de los *caps* para diferentes vencimientos y precios de ejercicio suponiendo que los flujos de pagos

de los *caps* se pagan cada 12 meses y basándose en diferentes modelos. Los errores *bootstrap* estándar (entre paréntesis en la Tabla 4) se obtienen como en Aït-Sahalia (1996a). Los cuatro elementos de cada celda desde arriba hacia abajo representan: el precio no paramétrico, el error bootstrap estándar, el precio con el modelo de Vasicek y el precio con el modelo de CIR. Las diferencias entre los modelos de Vasicek y CIR y el modelo no paramétrico son también muy significantes. Además, estas discrepancias aumentan para *caps* con mayores vencimientos y mayores precios de ejercicio.

5. CONCLUSIONES

Para valorar activos derivados sobre el tipo de interés es necesario resolver una PDE. Para esta ecuación sólo es posible encontrar una solución exacta en casos particulares, tales como en los modelos de Vasicek o CIR entre otros. Sin embargo, en la mayoría de los modelos más realistas no se conoce una solución exacta y se debe recurrir a métodos numéricos para encontrar una aproximación.

Recientes investigaciones proponen técnicas de estimación no paramétricas para valorar activos derivados sobre el tipo de interés en modelos unifactoriales. En estos casos se debe recurrir a métodos numéricos para resolverlos. En los trabajos recientes sobre estimación no paramétrica, (Stanton, 1997; Jiang, 1998), se ha utilizado la simulación de Monte Carlo.

En este trabajo se propone un método numérico en diferencias finitas. Se compara este método con el de Monte Carlo y se observa que la solución calculada con la aproximación en diferencias finitas es más precisa. También se obtienen gráficas de eficiencia para modelos en los que se conoce una solución exacta. De este modo, se verifica que el método en diferencias finitas es más eficiente que la simulación de Monte Carlo.

Como aplicación empírica de estos resultados, se emplea el método en diferencias finitas presentado para valorar activos derivados del tipo de interés con datos recogidos del mercado de USA. En la literatura se han comparado precios obtenidos con modelos no paramétricos con los paramétricos o semi-paramétricos. En este trabajo se compararon los precios no paramétricos de bonos cupón cero con los observados en el mercado. Se concluye que los no paramétricos son más cercanos a los observados en el mercado que los obtenidos con modelos paramétricos. El resto de los activos derivados de los tipos de interés no paramétricos son comparados con los obtenidos con modelos paramétricos. Estos resultados son coherentes con los existentes en la literatura, los

precios paramétricos y los no paramétricos son significativamente distintos.

Además, este método en diferencias finitas se puede utilizar para valorar activos derivados de los tipos de interés y para modelos paramétricos en los que no se conoce solución exacta, tales como el de Chan *et al.* (1992).

BIBLIOGRAFÍA

Ait-Sahalia, Y. (1996a). "Nonparametric pricing of interest rate derivative securities". *Econometrica* Vol. 64 N° 3, pp. 527-560.

Ait-Sahalia, Y. (1996b). "Testing continuous-time models of the spot interest rate". *Review of Financial Studies* Vol. 9 N° 2, pp. 385-426.

Björk, T. (1998). *Arbitraje Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, Oxford.

Black, F.; Derman, E.; Toy, W. (1990). "A one factor model of interest rates and its application to treasury bond options". *Financial Analysis Journal*. (Jan-Feb), pp. 33-39.

Boudoukh, J.; Richardson, M.; Stanton, R.; Whitelaw, R.F. (1999). "A multifactor, nonlinear, continuous-time model of interest rate volatility". Working paper. New York University and the University of California, Berkeley.

Brennan, M.; Schwartz, E.S. (1979). "A continuous time approach to the pricing of bonds". *Journal of Banking and Finance* Vol. 3, pp. 133-155.

Chan, K.C.; Karolyi, G.A.; Longstaff, F.A.; Sanders, A.B. (1992). "An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate". *Journal of Finance* Vol. 47 N° 3, pp. 1209-1227.

Chen, L. (1996). *Interest Rate Dynamics, Derivatives Pricing, and Risk Management*. Springer-Verlag, Berlín.

Conley, T. G. (1997). "Short term interest rates as subordinated diffusions". *Review of Financial Studies* Vol. 10, pp. 525-577.

Corzo, T.; Schwartz, E.S. (2000). "Convergence within the EU: evidence from interest rates". *Economic Notes* Vol. 29 N° 2, pp. 243-268.

Cox, J. C.; Ingersoll Jr., J.E.; Ross, S.A. (1985). "A theory of the term structure of interest rates". *Econometrica* Vol. 53, pp. 385-407.

Dothan, L. U. (1978). "On the term structure of interest rates". *Journal*

of *Financial Economics* Vol. 6, pp. 59-69.

Duffie, D. (1996). *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton University Press, New Jersey.

Duffie, G.R.; Kan, R. (1996). "A yield-factor model of interest rates". *Mathematical Finance* Vol. 6 N° 4, pp. 379-406.

Efron, B.; Tibshirani, R. (1993). "An Introduction to the Bootstrap". *Monographs on Statistics and Applied Probability* Vol. 57.

Fama, E. F. (1984). "Term premiums in bond returns". *Journal of Financial Economics* Vol. 13, pp.529-546.

Fernandez, V. (2001). "A nonparametric approach to model the term structure of interest rates. The case of Chile". *International Review of Financial Analysis* Vol. 10, pp. 99-122.

Friedman, A. (1975). *Stochastic Differential Equations and Applications*. Volume I. Academic Press, London.

Greene, W. H. (1993). *Econometric Analysis*. Macmillan Publishing Company, New York.

Härdle, W. (1999). "Applied Nonparametric Regression". *Econometric Society Monographs* Vol. 19. New York. Cambridge University Press.

Hansen, L.P. (1982). "Large sample properties of generalized method of moments estimators". *Econometrica* Vol. 50 N° 4, pp.1029-1054.

Heath, D.C.; Jarrow, R.A.; Morton, A. (1992). "Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation". *Econometrica* Vol. 60 N° 1, pp.77-105.

Ho, T. S. Y.; Lee, S.B. (1986). "Term structure movements and pricing interest rate contingent claims". *Journal of Finance* Vol. 41 N° 51, pp. 1011-1029.

Hull, J.; White, A. (1990). "Pricing interest-rate derivative securities". *Review of Financial Studies* Vol. 3 N° 4, pp.573-592.

Jiang, G.J. (1998). "Nonparametric modelling of U.S. interest rate term structure dynamics and implications on the prices of derivative securities". *Journal of Finance and Quantitative Analysis* Vol. 33 N° 4, pp.465-497.

Kwok, Y.K. (1998). *Mathematical Models of Financial Derivatives*. Singapore. Springer.

Künsch, H. R. (1989). "The jackknife and the bootstrap for general stationary observations". *Annals of Statistics* Vol. 17, pp.1217-1241.

Longstaff, F.; Schwartz, E. (1992). "Interest rate volatility and the term structure of interest rates: a two-factor general equilibrium model". *Journal of Finance* Vol. 47 N° 4, pp.1259-1282.

Merton, R. (1973). "The theory of rational pricing option pricing". *Bell journal of Economics and Management Science* Vol. 4, pp.141-183.

Morton, K. W.; Mayers, D. F. (1994). *Numerical Solutions of Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, London.

Rebonato, R. (1996). *Interest-Rate Options Models. Understanding, Analysing and Using Models for Exotic Interest-Rate Options*. Chichester. John Wiley & Sons Ltd., London.

Richard. S. F. (1978). "An arbitrage model of the term structure of interest rates". *Journal of Financial Economics* Vol. 6, pp.33-57.

Ronn, E. I.; Wadhwa, P. (1995). "On the relationship between expected returns and implied volatility of interest rate-dependent securities". Working paper. University of Texas, Austin.

Scott, D.W. (1992). *Multivariate Density Estimation: Theory, Practice and Visualization*. John Wiley & Sons, New York.

Silverman, B. W. (1992). "Density Estimation for Statistics and Data Analysis". *Monographs on Statistics and Applied Probability* Vol. 26.

Stanton, R. (1997). "An nonparametric model of term structure dynamics and the market price of interest rate risk". *Journal of Finance* Vol. 52 N° 5, pp. 1973-2002.

Vasicek, O. (1977). "An equilibrium characterization of the term structure". *Journal of Financial Economics* Vol. 5, pp.177-188.

Willmott, P. (2000). *Derivatives. The Theory and Practice of Financial Engineering*. Chichester. John Wiley & Sons, London.