JOSÉ GONZÁLEZ GALÉ

De la Academia Nacional de Ciencias Económicas
Profesor honorario de la
Universidad Nacional de Buenos Aires

PROBABILIDADES
Y
DIFERENCIAS FINITAS

BUENOS AIRES
Librería « El Ateneo »
Florida 340
1948

DEL MISMO AUTOR

Cálculos prácticos. Buenos Aires, 1904. (*Agotado*)
Álgebra financiera. Buenos Aires, 1910. (*Agotado*)
Cálculo rápido. Buenos Aires, 1912. (*Agotado*)
El seguro en caso de enfermedad. Buenos Aires, 1914. (*Agotado*)
Un problema nacional. Buenos Aires, 1918. (*Agotado*)
El seguro de vida y la hipoteca. Buenos Aires, 1920. (*Agotado*)
Apuntes sobre el cálculo de las probabilidades. Buenos Aires, 1926, 1935. (*Agotado*)
Las bases técnicas del seguro social. Buenos Aires, 1926. (*Agotado*)
Jubilaciones y seguro social. Buenos Aires, 1929.
El problema de la población. Buenos Aires, 1933, 1945.
La enseñanza de las ciencias económicas. Buenos Aires, 1933.
Las leyes de la mortalidad. Buenos Aires, 1934. (*Agotado*).
El problema de las jubilaciones. Buenos Aires, 1934
Baja la natalidad. Buenos Aires, 1940, 1945.
Bodas de oro de la enseñanza comercial. Buenos Aires, 1940.
El azar. Buenos Aires, 1941
El sexo desde el punto de vista estadístico. Buenos Aires, 1941, 1945
Una aritmética española del siglo XVII. Buenos Aires, 1941.
Matemáticas financieras:
  Primera parte Intereses y anualidades ciertas. Buenos Aires, 1916, 1925, 1935, 1943 y 1948.
  Segunda parte. Elementos de cálculo actuarial. Buenos Aires, 1942, 1945.
Problemas demográficos del momento. Buenos Aires, 1944.
Previsión social. Buenos Aires, 1947.

LOS PUNTOS SOBRE LAS ÍES

Es posible que alguien encuentre este libro demasiado elemental. Quiero dejar constancia expresa de que, deliberadamente, le doy ese carácter. No faltan en castellano —y no digamos en otros idiomas— obras magistrales que tratan con la debida extensión los temas aquí abordados. Entrar en competencia con sus autores sería una tarea superior a mis fuerzas. Pero, aunque estuviera a mi alcance, no la intentaría. ¿Para qué rehacer lo que ha sido ya bien hecho? Mis propósitos son mucho más modestos, pero —a mi ver— no menos útiles. Intento dar a los principiantes una visión inicial del cálculo de las probabilidades y del de las diferencias finitas, éste último lamentablemente descuidado entre nosotros.

Paso a paso, con la mayor simplicidad posible, se van exponiendo ante el lector los conceptos básicos y los más sencillos procedimientos operatorios de modo que —al terminar el volumen— la lectura de los tratados magistrales sea fácil, atrayente, cautivadora, sin que dificultades de orden mecánico —puramente mecánico— se interpongan entre los doctos expositores y el curioso lector. La empresa es menos fácil de lo que a primera vista parece. Al poner mano en ella he tratado de suplir con amor lo que de ciencia me pudiera faltar. ¿Lo habré conseguido? No soy yo, ciertamente, el llamado a pronunciar l'ardua sentenza.

J. G. G.

INDICE

CAPÍTULO VI

PROBABILIDADES A POSTERIORI O DE LAS CAUSAS

SEGUNDA PARTE

DIFERENCIAS FINITAS

CAPÍTULO I

LA DIFERENCIACIÓN FINITA

CAPÍTULO II

LAS FÓRMULAS FUNDAMENTALES

CAPÍTULO III

LA FÓRMULA INTERPOLATORIA DE NEWTON

CAPÍTULO IV

DIFERENCIAS DIVIDIDAS

CAPÍTULO V

DIFERENCIAS CENTRALES

CAPÍTULO VI

INTEGRACIÓN FINITA O SUMACIÓN

CAPÍTULO VII

SUMACIÓN E INTEGRACIÓN APROXIMADAS

FE DE ERRATAS

Página	Línea	Dice	Debe decir
6	14	en una serie de números	dentro de la serie de números
6	— 6	extenderlo	extenderla
10	— 4	sea azul	sea, también, azul
10	19	consecutivas?	consecutivas? No se repone la bolilla extraída.
15	23	eventualidades posibles	eventualidades favorables posibles
27	19	partidas	partida
32	6	esperenzas	esperanzas
41	2	q^{m-n-1}	q^{n-m-1}
47	16	$q^{n-n} =$	$q^{n-m} =$
49	8	y que llegue, por lo tanto, a	cuando llegue a
50	5	$= \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$	$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$
54	— 2	por lo tan-	por lo tanto,
57	16	$e^{=x^2}dx$	$e^{-x^2}dx$
65	8	n_{x+2h}	u_{x+2h}
80	4	$+ \Delta a u_x =$	$+ \Delta a u_x = a u_x + a \Delta u_x =$
82	14	$x = 1$	$x = 2$
84	— 17	de indicar el	de indicar en las diferencias y en el cálculo el
85	— 6	$u_2 - 2u_1 + u_0$	$u_2 - 2u_1 + u_0 = 0$
86	2	INTERVALO	INTERVALOS
96	— 5	$\ldots x_{r-8}$	$\ldots x_{r-3}$
98	— 14	$+ (x - x_2)(\ldots)] + \ldots \}$	$+ (x - x_2)(\ldots)] \}$
102	— 6	$\delta^5 n_{x+h/2}$	$\delta^5 u_{x+h/2}$
108	2 y 4	$f(x) = u_x$	$f(-x) = u_x$
109	2	$\frac{x(x^2-1)(x-1)}{4!}$	$\frac{x(x^2-1)(x-2)}{4!}$
113	10	$a_{\overline{20}\|}\,(2^5/_9\%)$	$a_{\overline{20}\|}\,(2^5/_8\%)$
114	12	IV	V
116	8	V	VI
122	13	$= \Delta^{-1} m\, x^{(-} =$	$= \Delta^{-1} m\, x^{(m-1)} =$

Página	Línea	Dice	Debe decir
129	— 4	si en la misma	si en la misma (LX)
134	— 8	$\int_0^{2nk} u_x$	$\int_0^{2nk} u_x\,dx$
138	— 5	$+u_{6n}$	$+u_{6n})$
139	13	$(x) = t(t-1)(t-2)x^{t-3}$	$f'''(x) = t(t-1)(t-2)x^{t-3}$
140	10	$10^5\,\Delta^4$	$10^9\,\Delta^4$
144	— 4	leclor	lector

PROBABILIDADES Y DIFERENCIAS FINITAS

PRIMERA PARTE

PROBABILIDADES

CAPÍTULO PRIMERO

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

I

DEFINICIONES

1. Una urna contiene 15 bolillas, de las que 5 son azules, 7 blancas y 3 rojas. Se extrae una bolilla *al azar*, ¿de qué color será la bolilla extraída?

Para poder dar una respuesta exacta sería necesario que conociéramos a ciencia cierta la colocación de las bolillas en la urna y las variaciones que se producen en ella al removerlas.

No poseyendo esos datos, nada podemos afirmar, y sólo decimos que la salida de una bolilla determinada depende del *azar*.

Como se ve, el *azar* no es, en este caso, sino una palabra elegida para encubrir nuestra ignorancia. Y lo mismo acontece siempre, cualquiera que sea el fenómeno de que se trate (1). En la naturaleza no existe el azar, y, si para nosotros existe, es únicamente porque lo limitado de nuestra inteligencia nos impide, en una infinidad de ocasiones, penetrar las causas y las leyes que rigen la producción de los acontecimientos.

Desconociendo las causas que han de influir en la producción de un acontecimiento más bien que en la de otro cualquiera, nos vemos obligados a evaluar qué circunstancias, por nosotros conocidas, pueden influir favorable o desfavorablemente en su producción.

(1) Como es lógico, nos referimos exclusivamente a los fenómenos físicos, sin entrar a considerar los de orden moral.

En el ejemplo dado, nuestra ignorancia acerca de la colocación de las bolillas en la urna y de las variaciones que, al removerlas, se producirán, nos impulsa a considerar como *igualmente posible* la salida de una cualquiera de las quince bolillas que hay dentro. Por consiguiente decimos que hay *quince casos posibles*. De las *quince* bolillas, *cinco* son azules; luego, si sale una azul tiene que ser una de esas *cinco*, es decir, que hay *cinco casos favorables* a la salida de una bolilla azul. Los *casos favorables* están, pues, en la relación de 5 a 15 con respecto a los posibles. Esta relación recibe el nombre de *probabilidad*.

Probabilidad de un suceso es la relación del número de casos favorables al número total de casos posibles, cuando todos los casos son igualmente posibles.

En el ejemplo considerado, la probabilidad de que sea azul la bolilla extraída es $^5/_{15}$; la de que sea blanca $^7/_{15}$, y la de que sea roja $^3/_{15}$.

2. La definición que se acaba de dar contiene una condición que no ha de perderse nunca de vista. Se dice *cuando todos los casos son igualmente posibles*. En el ejemplo propuesto, *admitimos* que el color de las bolillas contenidas en la urna *no influye* en su probabilidad de salida. La definición se presta, así, a la crítica, al valerse implícitamente del concepto mismo que pretende definir, pero es indispensable fijar desde luego tal limitación; su olvido puede conducir a errores groseros, según se verá más adelante, al examinar algunos problemas.

3. Ocurre a veces que no se conoce con exactitud el número total de casos posibles ni el de casos favorables. Sólo se sabe que, después de hacer n pruebas, en igualdad de condiciones, el acontecimiento A, objeto de la prueba, se ha presentado m veces.

No se puede afirmar que la fracción m/n sea realmente la probabilidad de A. Pero si el número de pruebas, n, es *suficientemente grande*, la experiencia permite asegurar que la fracción m/n ha de diferir muy poco de la *probabilidad* de A. La fracción m/n, obtenida de un modo experimental, es lo que se llama *frecuencia*.

4. Supongamos que se tiene un dado común, de seis caras, ¿cuál es la probabilidad de que al arrojarlo se presente el punto 6? Evidentemente $^1/_6$, puesto que son 6 las caras — casos posibles — y sólo una de ellas es el *seis* — caso favorable.

Pero, después de lanzarlo un gran número de veces — digamos 6000 — encontramos que el 6 sólo se ha presentado 400 veces. La frecuencia es $^{400}/_{6000} = {}^1/_{15}$. ¿Qué consecuencia se saca del hecho? Que el dado ofrece, evidentemente, un defecto de fabricación que *dificulta* la presencia del 6; en otros términos, que los *seis* casos *no son igual-*

mente posibles.

Se ve por ésto, que la observación de la *frecuencia* permite investigar si los instrumentos materiales —dados, bolilleros, naipes, etc.— son normales o defectuosos.

A este respecto cabe recordar la anécdota que cita Bertrand en el prólogo de su bello libro sobre probabilidades.

Un día, en Nápoles, un hombre de la Basilicata, en presencia del abate Galiani, agitó tres dados en un cubilete y apostó a que sacaba 3 *seis*. Y lo hizo. El caso es posible, se dijo. Repitió la experiencia; con el mismo resultado, y nadie observó nada. Pero cuando una tercera, una cuarta y una quinta vez se produjo el hecho, el abate no pudo más y exclamó: « *Sangue di Bacco.* Esos dados están cargados. » Y lo estaban. ¿No era posible aquello? Sí, teóricamente lo era, pero su *probabilidad* era tan pequeña, que *prácticamente era imposible.*

5. Lo dicho permite formular la que Castelnuovo llama *ley empírica del azar*, y cuyo enunciado es el que sigue:

« En una serie de pruebas, repetidas un gran número de veces en igualdad de condiciones, cada uno de los acontecimientos posibles se manifiesta con una *frecuencia relativa*, que es, *sobre poco más o menos, igual a su probabilidad.* La aproximación *crece, ordinariamente*, a medida que crece el número de pruebas. »

Se advierte, sin esfuerzo, que esta *ley empírica del azar*, por su carácter especial, no puede ser equiparada a un postulado geométrico. La certidumbre que sentimos ante uno de ellos es absoluta, dentro de la relatividad de los conocimientos humanos. Dos líneas paralelas, *dentro de la geometría euclídea*, deben *forzosamente* no encontrarse jamás.

Si lanzamos un dado al aire 60000; 600000; 600000000 de veces, cada punto se presentará un número de veces que diferirá relativamente muy poco de 10000; 100000 o 100000000. La probabilidad de que, en este último caso, un punto dado — el *cinco*, por ejemplo — salga sólo un millón de veces en lugar de cien millones es de una pequeñez tal que hace que se pueda considerar el caso como *materialmente imposible.* Sin embargo, no hay ninguna *imposibilidad material* para que ello ocurra. Y conste que éste no es un mero juego de palabras.

Más adelante, al estudiar el teorema de Santiago Bernoulli, habrá ocasión de volver sobre este punto. Ahora, sólo se trata de fijar conceptos, desvanecer prejuicios y evitar errores de interpretación muy comunes.

II

LA CERTEZA

6. La probabilidad está siempre expresada por una fracción *propia y positiva*. No se concibe que pueda haber más casos favorables que posibles, y si el número de unos y otros es igual, la relación que expresa la probabilidad es igual a *uno*; pero entonces no hay ya probabilidad, sino *certeza*. De una urna que no contiene sino bolillas blancas, sólo una bolilla blanca puede salir.

Uno es, pues, el símbolo de la *certeza*. Por otra parte, si no hay ningún caso favorable a la producción del acontecimiento, éste no puede producirse. De una urna donde hay 20 bolillas de distintos colores, pero ninguna blanca, la probabilidad de sacar una bolilla blanca no puede ser sino $^0/_{20} = 0$.

Cero es, pues, el símbolo de la *imposibilidad* que, en cierto modo, es también una *certeza*.

7. Probabilidad *contraria* es la de que no se produzca un acontecimiento dado.

Como el acontecimiento *se produce o no*, la suma de ambas probabilidades ha de ser igual a uno. Llamando p a la probabilidad de que el acontecimiento se produzca, y q a la contraria, se tiene

$$p + q = 1 \qquad \therefore \quad p = 1 - q \qquad \therefore \quad q = 1 - p$$

Luego, *restando de uno la probabilidad de que el acontecimiento se produzca, se tiene la contraria.*

III

PROBABILIDAD TOTAL Y PROBABILIDAD COMPUESTA

8. La probabilidad que se acaba de ver es la probabilidad *simple*, llamada así porque depende de *una sola eventualidad*.

Pero, puede ocurrir que la producción de un suceso dependa de varias eventualidades. Dos casos se pueden, entonces, presentar: que dichas eventualidades se *excluyan* o que se *complementen*.

En el primer caso la probabilidad se llama *total*; en el segundo, *compuesta*.

9. *La probabilidad total es igual a la suma de las probabilidades simples que la componen.* Una urna contiene a bolillas azules, b blancas y r rojas. ¿Cuál es la probabilidad de que salga una bolilla azul o blanca?

Llamemos $p_{(a)}$, $q_{(b)}$, $p_{(r)}$ a las probabilidades respectivas correspondientes a la salida de una bolilla azul, una blanca o una roja. Como si sale una azul no puede salir una blanca, es decir, como ambas eventualidades *se excluyen*, la probabilidad es *total*. Y decimos que es igual a la suma de las probabilidades simples de dichas eventualidades

$$P = p_{(a)} + p_{(b)}.$$

En efecto, el número total de casos posibles es igual al número de bolillas que contiene la urna: $a + b + r$; y el número de casos favorables al de las bolillas azules y blancas: $a + b$.

Luego, la probabilidad es:

$$P = \frac{a + b}{a + b + r} = \frac{a}{a + b + r} + \frac{b}{a + b + r} = p_{(a)} + p_{(b)}.$$

10. *La probabilidad compuesta es igual al producto de las probabilidades simples que la forman.*

Dos urnas contienen: la primera a bolillas azules y b blancas, la segunda a' bolillas azules y b' blancas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos bolillas azules, sacando una de cada urna?

Como se quiere que *salgan las dos bolillas azules*, es decir, como ambas eventualidades *se complementan*, la probabilidad es *compuesta*. Y decimos que es igual al producto de las probabilidades simples de dichas eventualidades.

Sean p y p', respectivamente, esas probabilidades.

Cada una de las $a + b$ bolillas de la primera urna puede combinarse, al salir, con cada una de las $a' + b'$ de la otra. El número de combinaciones que pueden formarse entre las bolillas de ambas urnas tomando una de cada urna, es $(a + b)(a' + b')$.

Este es el número total de casos posibles. De igual modo, cada una de las a bolillas azules de la primera urna puede combinarse, al salir con cada una de las a' de la segunda. El número total de casos favorables es, así, aa'. La probabilidad es, entonces:

$$P = \frac{aa'}{(a + b)(a' + b')} = \frac{a}{a + b} \cdot \frac{a'}{a' + b'} = p\ p'.$$

11. Observaciones. I. Puede ocurrir que la producción del primer acontecimiento influya en la del segundo. Si por ejemplo, una urna contiene a bolillas azules y b blancas, y se quiere determinar la probabilidad de extraer dos bolillas blancas seguidas *sin reponer la bolilla extraída*, la probabilidad buscada es:

$$\frac{b}{a+b} : \frac{b-1}{a+b-1}$$

puesto que, una vez que salió la primera bolilla blanca, sólo quedan en la urna $a+b-1$ bolillas y, entre ellas, $b-1$ blancas. Luego, la probabilidad de sacar una bolilla blanca —habiendo salido la primera— es $(b-1)/(a+b-1)$. Y la de que *concurran* ambas eventualidades:

$$\frac{b}{a+b} \cdot \frac{b-1}{a+b-1}.$$

Otro ejemplo: Una urna contiene noventa bolillas numeradas del 1 al 90; ¿cuál es la probabilidad de que la primera bolilla extraída sea, a la vez, un múltiplo de 15 y de 18?

Cada 15 números consecutivos hay uno múltiplo de 15, y cada 18 uno múltiplo de 18. Luego, en una serie de números consecutivos, la probabilidad de que salga un número múltiplo de 15 es $^1/_{15}$, y la de que salga un múltiplo de 18 es $^1/_{18}$.

¿Será $^1/_{15} \times {}^1/_{18}$ la probabilidad de que el número extraído sea, a la vez, múltiplo de 15 y de 18? No, porque el primer acontecimiento *influye* sobre el segundo. Ser múltiplo de 15 es serlo de 3, y 3 es divisor de 18. Basta, entonces, que el cociente de dividir el número por 15 sea divisible por 6 para que el número lo sea por 18.

Luego, la probabilidad buscada es:

$$^1/_{15} \times {}^1/_{6} = {}^1/_{90}$$

Efectivamente, cada noventa números consecutivos hay uno divisible a la vez por 15 y 18, es decir, por 90.

II. Demostrada esta proposición para un acontecimiento que depende de otros dos, fácil es extenderlo a tres, cuatro, etc. Luego es general.

IV

PROBABILIDAD RELATIVA

12. *La probabilidad «relativa» de que un suceso se verifique más bien que otro, es igual al resultado de dividir la probabilidad del acon-*

tecimiento que se espera más bien que otro por la suma de las probabilidades de los acontecimientos que se toman en cuenta.

Si de un bolillero que contiene bolillas de colores distintos: blancas, rojas, negras, amarillas, azules, se extrae una al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca *más bien* que roja o negra?

Llamando P a la probabilidad buscada se ha de tener:

$$P = \frac{p_{(b)}}{p_{(n)} + p_{(r)} + p_{(b)}}.$$

En efecto, se puede prescindir de las bolillas azules y amarillas, cuya salida no influye en la producción del hecho que interesa. Dejándolas de lado, el número de casos posibles es $n + b + r$; el de casos favorables b, y la probabilidad de que salga una bolilla blanca *más bien* que una negra o roja es:

$$P = \frac{b}{n + b + r} = \frac{b/s}{n/s + b/s + r/s} = \frac{p_{(b)}}{p_{(n)} + p_{(b)} + p_{(r)}}$$

donde s es el número total de bolillas que hay en la urna.

CAPÍTULO II

ALGUNOS PROBLEMAS

I

APLICACIÓN DE LOS PRINCIPIOS GENERALES

13. I. ¿Cuál es la probabilidad de que extrayendo dos cartas de una baraja que consta de cuarenta, la primera sea un *as* y la segunda un *dos*?

Es una probabilidad compuesta, en la cual el primer acontecimiento *influye* sobre el segundo. Siendo cuarenta las cartas y cuatro los *ases*, la probabilidad de sacar uno de ellos, a la primera extracción, es

$$4/40 = 1/10.$$

Entre las 39 cartas restantes hay cuatro *doses*. La probabilidad de sacar un *dos* en la segunda extracción es:

$$4/39$$

y la probabilidad *compuesta* que se busca es:

$$1/10 \times 4/39 = 2/195.$$

II. Consideremos, ahora, el problema anterior con una variante: no interesa el orden de extracción: la probabilidad, por lo tanto, debe aumentar. En la primera extracción, puede salir un *uno* o un *dos*; hay *ocho* casos favorables sobre *cuarenta* posibles, luego, la probabilidad simple es:

$$8/40 = 1/5.$$

Quedan 39 cartas: son los casos posibles. Y los favorables son 4, pues si salió un *as* en la primera extracción debemos sacar un *dos* en la segunda, y si salió un *dos* en la primera, hemos de sacar un *as* en la segunda. Luego esta segunda probabilidad simple es igual a $4/39$. Y la compuesta que se pide

$$1/5 \times 4/39 = 4/195.$$

Probabilidad doble de la antes calculada. Y es lógico. La *indiferencia*, en cuanto al orden de extracción *duplica*, necesariamente, la probabilidad.

III. Se tiran dos dados dos veces consecutivas, ¿cuál es la probabilidad de que los puntos sacados sumen 6 la primera vez y 5 la segunda?

Cada cara del primer dado puede combinarse, al salir, con cualquiera de las del otro. Luego los casos posibles son $6 \times 6 = 36$. Veamos cuantos son los favorables. En el primer tiro los dados deben sumar *seis*, lo que se obtiene en las siguientes condiciones:

Primer dado	1	2	3	4	5
Segundo dado	5	4	3	2	1
Puntos	6	6	6	6	6

Es decir, en cinco casos. La primera probabilidad *simple* es, pues, $^5/_{36}$.

En el segundo tiro deben los dados sumar 5, ello se consigue de cuatro maneras diferentes:

Primer dado	1	2	3	4
Segundo dado	4	3	2	1
Puntos	5	5	5	5

Cuatro casos; probabilidad $^4/_{36}$.

Luego, la probabilidad buscada es:

$$^5/_{36} \times {}^4/_{36} = {}^{20}/_{1296} = {}^5/_{324}$$

puesto que la probabilidad es *compuesta*, y el primer acontecimiento *no influye* sobre el segundo.

IV. Si *no interesa el orden* en que se obtienen los 6 y los 5 puntos, la probabilidad se *duplica*, de acuerdo con lo dicho al analizar el problema II.

V. ¿Cuál es la probabilidad de sacar tres bolillas azules seguidas, de una urna que contiene 5 azules, 9 rojas y 2 blancas, sin reponer la bolilla extraída?

Es una probabilidad *compuesta* en la que cada acontecimiento influye en el siguiente. Hay en total 16 bolillas y de ellas 5 son azules, la probabilidad de sacar una primera bolilla azul es, pues, $^5/_{16}$.

Salida la primera, de las 15 restantes sólo 4 son azules. La probabilidad de que la segunda bolilla sea azul es, $^4/_{15}$. Análogamente, la probabilidad de obtener una tercera bolilla azul es $^3/_{14}$. Y la probabilidad de que sean azules las tres:

$$^5/_{16} \times {}^4/_{15} \times {}^3/_{14} = {}^1/_{56}.$$

VI. Se tienen dos urnas: la primera contiene 5 bolillas blancas y 3 rojas; la segunda 7 blancas y 4 rojas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar, de primera intención, una bolilla roja de cada urna?

En la primera urna sobre 8 bolillas hay 3 rojas: luego, la probabilidad correspondiente es $^3/_8$.

En la segunda, hay 11 bolillas en total y 4 rojas; la probabilidad es $^4/_{11}$.

Y como ambos hechos se complementan, la probabilidad buscada es:

$$^3/_8 \times {}^4/_{11} = {}^3/_{22}.$$

VII. Si dadas las dos urnas del ejemplo anterior se vierte el contenido de una en la otra, ¿cuál es la probabilidad de sacar dos bolillas rojas consecutivas? sin reposición de bolilla.

Sobre 19 bolillas hay 7 rojas: probabilidad de sacar la primera bolilla roja, $^7/_{19}$.

Sacada ésta, quedan 18 bolillas y entre ellas 6 rojas, luego, la probabilidad de sacar la segunda, habiendo salido la primera, es $^6/_{18} = {}^1/_3$ y la probabilidad pedida

$$^7/_{19} \times {}^1/_3 = {}^7/_{57}.$$

VIII. Hay cinco urnas idénticas; dos de ellas — de igual contenido —, con 3 bolillas rojas y 5 blancas, y las otras tres teniendo, cada una, 4 rojas y 3 blancas. ¿Cuál es la probabilidad de que elegida una urna al azar salga una bolilla roja?

Separemos las urnas en dos grupos de acuerdo con su composición. La probabilidad de que la urna elegida pertenezca al primer grupo es $^2/_5$ y la de que pertenezca al segundo, $^3/_5$. La probabilidad de extraer una bolilla roja de cada urna del primer grupo es $^3/_8$, y de cada urna del segundo grupo, $^4/_7$. Y las probabilidades respectivas de extraer una bolilla roja del primero y del segundo grupo de urnas son:

$$^2/_5 \times {}^3/_8 = {}^3/_{20} \qquad \text{y} \qquad {}^3/_5 \times {}^4/_7 = {}^{12}/_{35}.$$

Pero como lo mismo da que pertenezca a uno o a otro grupo, y como si sale del primero no puede salir del segundo, la probabilidad buscada es:

$$^{3}/_{20} + {}^{12}/_{35} = {}^{69}/_{140}.$$

IX. Cuatro urnas contienen, respectivamente: la primera 7 bolillas rojas, la segunda 5 rojas, la tercera 6 blancas y la cuarta 3 negras. ¿Cuál es la probabilidad de que salga una bolilla roja o negra?

Como las bolillas contenidas en cada urna son *todas del mismo color* la salida de una bolilla de un color dado depende sólo de la elección de la urna. De las *cuatro* urnas, tres dan lugar a la salida de una bolilla roja o negra. Luego la probabilidad buscada es igual a $^{3}/_{4}$.

II

ANÁLISIS DE CASOS PARTICULARES

14. X. ¿Cuál es la probabilidad de que sobre 17 personas que van a sentarse al rededor de una mesa, dos dadas resulten colocadas una al lado de otra?

Supongamos que una de esas dos personas ocupe ya su asiento; es claro que a su derecha puede sentarse cualquiera de las otras 16; luego, entre 16 casos posibles hay uno en que la persona que se sienta a su derecha es la requerida; la probabilidad es, así, $^{1}/_{16}$. Es también $^{1}/_{16}$ la probabilidad de que se siente a la izquierda; y como no nos interesa a que lado se ha de sentar y si lo hace a la derecha no puede hacerlo a la izquierda, la probabilidad pedida es:

$$^{1}/_{16} + {}^{1}/_{16} = {}^{1}/_{8}.$$

XI. Se apilan al azar ocho volúmenes. Entre ellos hay una obra en 4 tomos, otra en 3 y la última en 1. ¿Cuál es la probabilidad de que los tomos de cada obra estén juntos?

Los ocho volúmenes se pueden colocar de tantas maneras como permutaciones cabe hacer con 8 objetos, es decir: $P_8 = 8!$ Es el número de casos posibles.

Calculemos el número de casos favorables. Supongamos las 3 obras *separadas*, es decir, los 4 tomos de la primera atados entre sí y lo mismo los 3 de la segunda. Tenemos, pues, tres grupos de libros que pueden permutarse de 3! maneras diferentes.

Además, los 4 tomos de la primera obra pueden permutarse, en el paquete, de 4! maneras distintas, y los 3 tomos de la segunda obra pueden permutarse, a su vez, de 3! maneras diferentes. Y como cada uno de esos cambios aumenta el número de formas en que se pueden apilar los tomos, el número final de casos favorables es: 3! 4! 3! y la probabilidad requerida:

$$\frac{3!\,4!\,3!}{8!} = \frac{3!\,3!}{5 \times 6 \times 7 \times 8} = \frac{3}{4 \times 5 \times 7} = \frac{3}{140}.$$

XII. Tres muebles idénticos, A, B, C, tienen cada uno dos cajones que llamaremos α y α', β y β', γ y γ', respectivamente. En el mueble A cada cajón tiene una moneda de oro. Los del mueble B tienen, cada uno, una moneda de plata. Y en el C el cajón γ contiene una moneda de oro y el γ' una de plata. ¿Cuál es la probabilidad de que, abriendo un cajón al azar, encontremos una moneda de oro?

Los cajones son 6 y, de ellos, 3 contienen una moneda de oro. La probabilidad pedida es, pues, $^1/_2$.

Con cierta laboriosidad —instructiva— se llega al mismo resultado.

La probabilidad de elegir un mueble dado es $^1/_3$ y la de elegir, entonces, un cajón $^1/_2$. Pero en los muebles A y B la elección del cajón no interesa, puesto que las monedas contenidas en ambos son iguales: elegido el mueble A se tiene automáticamente una moneda de oro; optando por el B sólo una moneda de plata se puede hallar. La duda sólo subsiste para el mueble C. La probabilidad de hallar en éste una moneda de oro o de plata es $^1/_3 \times {}^1/_2 = {}^1/_6$. Luego, tomando en cuenta todas las circunstancias se tiene:

Probabilidad de hallar una moneda de oro (muebles A o C)

$$^1/_3 + {}^1/_6 = {}^3/_6 = {}^1/_2$$

Probabilidad de hallar una moneda de plata (muebles B o C)

$$^1/_3 + {}^1/_6 = {}^1/_2$$

también.

XIII. Dados los muebles del problema anterior admitamos que, abierto un cajón, se halló una moneda de oro. ¿Cuál es la probabilidad de que en el cajón contiguo haya, también, una moneda de oro?

El cajón abierto no pertenece al mueble B, pues sus dos cajones tienen sólo monedas de plata. Se trata, pues, de los muebles A o C. El cajón abierto es, entonces, el α, el α' o el γ. En los dos primeros casos el otro cajón del mismo mueble tiene una moneda de oro; en el tercero una de plata. Luego, la probabilidad de hallar una moneda de oro es $^2/_3$ y la de hallar una de plata $^1/_3$.

XIV. Una urna contiene 3 bolillas blancas, 4 negras y 5 rojas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar tres bolillas del mismo color sin reponer las extraidas?

Empecemos por las blancas. Hay 12 bolillas y de ellas 3 blancas, luego, la probabilidad de sacar la primera blanca es $^3/_{12}$; la de sacar la segunda $^2/_{11}$, y la de sacar la tercera $^1/_{10}$. Y la de que salgan tres bolillas blancas seguidas, es

$$^3/_{12} \times {}^2/_{11} \times {}^1/_{10} = {}^1/_{220}.$$

Del mismo modo se tiene para las bolillas negras: probabilidad de sacar la primera, $^4/_{12}$, la segunda $^3/_{11}$, y la tercera $^2/_{10}$. Y la de que salgan tres negras seguidas:

$$^4/_{12} \times {}^3/_{11} \times {}^2/_{10} = {}^4/_{220}.$$

En cuanto a las bolillas rojas, la probabilidad de extraer la primera es $^5/_{12}$; la segunda $^4/_{11}$; la tercera $^3/_{10}$, y las tres seguidas:

$$^5/_{12} \times {}^4/_{11} \times {}^3/_{10} = {}^{10}/_{220}.$$

Pero como lo que importa no es un determinado color, sino que las *tres sean del mismo color*, y como si salen de uno no pueden salir de otro, las probabilidades se *excluyen*, y la probabilidad buscada es

$$^1/_{220} + {}^4/_{220} + {}^{10}/_{220} = {}^3/_{44}.$$

XV. Sobre una mesa hay 13 monedas con 5 caras y 8 escudos a la vista. ¿Qué probabilidad hay de que separando 6 monedas al azar resulten 3 caras y 3 escudos?

Veamos los casos posibles. Son tantos como combinaciones se pueden hacer con 13 objetos tomados de 6 en 6.

$$C_{13}^6 = 1716.$$

Determinemos los casos favorables.

Con cinco caras tomadas de tres en tres, se forman:

$$C_5^3 = 10$$

grupos diferentes.

Y con ocho escudos, tomados de tres en tres, se forman:

$$C_8^3 = 56$$

grupos distintos.

Como cada uno de los 10 grupos de 3 caras puede combinarse con cada uno de los 56 grupos de 3 escudos, se pueden formar $10 \times 56 = 560$ grupos diferentes de tres caras y tres escudos cada uno. Son los casos favorables.

La probabilidad buscada, es, por lo tanto

$$^{560}/_{1716} = {}^{140}/_{429}.$$

XVI. Se tiene un juego de 48 cartas. Si se sacan tres, ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo palo?

La primera carta que salga no interesa. Lo que importa es que la segunda y tercera sean del mismo palo que la primera.

La probabilidad de que la segunda carta sea del mismo palo que la primera es $^{11}/_{47}$ puesto que del palo que ya salió sólo quedan 11, de las 47 que hay ahora en la baraja. Del mismo modo, la probabilidad de la tercera, es $^{10}/_{46}$. Y la probabilidad buscada — *compuesta,* por complementarse las eventualidades —

$$^{11}/_{47} \times {}^{10}/_{46} = {}^{55}/_{1081}.$$

XVII. Hay tres urnas: la primera contiene 5 bolillas blancas y 3 rojas; la segunda, 2 blancas y 10 rojas; la tercera, 11 blancas y 13 rojas. De una urna, elegida al azar, se saca una bolilla blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que la bolilla extraída provenga de la primera urna *más bien* que de la segunda o tercera?

La probabilidad de elegir la primera urna es $^1/_3$; la de sacar de ella una bolilla blanca $^5/_8$, y la de que la bolilla blanca provenga de la primera urna es:

$$^1/_3 \times {}^5/_8 = {}^5/_{24}.$$

Del mismo modo la probabilidad de elegir la segunda urna y sacar de ella la bolilla blanca, es:

$$^1/_3 \times {}^1/_6 = {}^1/_{18}.$$

Y, análogamente, se tiene para la tercera:

$$^1/_3 \times {}^{11}/_{24} = {}^{11}/_{72}$$

La probabilidad que se pide es *relativa* e igual, por lo tanto, a la probabilidad del acontecimiento esperado dividida por la suma de las probabilidades de los acontecimientos que se toman en cuenta. O sea:

$$\frac{\frac{5}{24}}{\frac{5}{24} + \frac{1}{18} + \frac{11}{72}} = \frac{1}{2}.$$

XVIII. Se tiran dos dados simultáneamente y se repite tres veces la experiencia. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan *por lo menos* una vez el punto 5 y el punto 7?

La probabilidad de que la suma de los puntos que marquen ambos dados sea 5 es $^4/_{36} = {}^1/_9$. La de que sea 7 es $^6/_{36} = {}^1/_6$. Y la de que sea otro número es, evidentemente:

$$1 - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{6}\right) = \frac{13}{18}.$$

Sean p, p', p'' estas probabilidades.

La de que los tres acontecimientos ocurran, y se sucedan en un orden dado es, $pp'p''$.

Si no interesa el orden de presentación, los acontecimientos *pueden* agruparse de tantos modos como permutaciones se pueden hacer con 3 objetos, es decir $3! = 6$. Luego, la probabilidad sube a $6pp'p''$.

Del mismo modo, la probabilidad de que ocurra dos veces el primer acontecimiento y una el segundo, si se establece un orden dado, es $ppp' = p^2p'$.

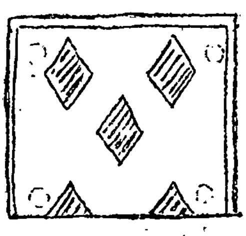
Que, sin aterder a ese orden, se eleva a $C_3^1 p^2p' = 3p^2p'$, puesto que los dos acontecimientos se pueden presentar de tantas maneras como combinaciones cabe hacer con tres objetos tomados dos a dos (o uno a uno).

Se advierte, en el acto, que la probabilidad de que ocurra una vez el primer acontecimiento y dos el segundo, es, también, $3pp'^2$.

La probabilidad buscada es la suma de las tres acabadas de enumerar y que encierran todas las eventualidades posibles. Luego

$$6pp'p'' + 3p^2p' + 3pp'^2 = 6 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{13}{18} + 3 \cdot \frac{1}{81} \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{36} = \frac{31}{324}.$$

XIX. Se tiene a la vista la mitad de un naipe, tal como lo indica la figura. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un siete y cuál la de que sea un ocho? (1).



(1) Este problema, debido al actuario francés QUIQUET, es un ejemplo típico de lo fácil que es errar al enumerar los casos posibles y favorables. Lo primero que se le ocurre a uno es decir que ambas probabilidades son iguales. Un análisis más detenido de la cuestión lleva a la solución verdadera.

La carta puede ser tanto un siete como un ocho. Pero en el *ocho* las dos mitades son iguales, en tanto que en el siete sólo ofrece ese aspecto la mitad superior. Luego, el número de casos posibles es 3. Y el de favorables es *uno* para el *siete* y *dos* para el *ocho.*

Las probabilidades respectivas son, pues, $^1/_3$ para el siete y $^2/_3$ para el ocho.

XX. Una urna contiene m bolillas numeradas de 1 a m. Se extraen de ella n bolillas. ¿Cuál es la probabilidad de que entre estos n números haya k previamente elegidos?

Desde luego, del enunciado se desprende que debemos tener:

$$m \geqq n$$
$$n \geqq k.$$

Entre los n números puede estar cualquiera de los m que contiene la urna. Luego el número de casos posibles es el de las combinaciones de m objetos tomados de n en n:

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{n!} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}.$$

Los casos favorables son aquellos en que los k números elegidos figuran entre los n que salieron.

Ahora bien, el número de combinaciones de m objetos tomados de n en n, que contienen k objetos determinados, es igual al número de combinaciones que se pueden formar con los $m-k$ objetos *restantes* tomados de $n-k$ en $n-k$. Luego, el número de casos favorables es:

$$C_{m-k}^{n-k} = \frac{(m-k)!}{(n-k)!\,(m-n)!}.$$

Y la probabilidad:

$$\frac{\dfrac{(m-k)!}{(n-k)!\,(m-n)!}}{\dfrac{m!}{n!\,(m-n)!}} = \frac{(m-k)!\,n!}{(n-k)!\,m!}.$$

XXI. En las condiciones del problema anterior, ¿qué probabilidad tiene una persona que ha elegido n números de acertar k de ellos? Por supuesto $n \geqq k$.

Antes se debía acertar los k números que se elegían. Ahora basta acertar k entre n elegidos.

Como cualquiera de los n números puede formar parte de los k, el acontecimiento se produce de tantos modos como combinaciones se forman con n elementos tomados de k en k, es decir, C_n^k.

En el caso anterior, la probabilidad de acertar k números eligiendo k era:

$$\frac{(m-k)!\,n!}{(n-k)!\,m!}.$$

Los casos en que se puede acertar son, ahora, C_n^k veces más. La probabilidad buscada es, pues:

$$P = \frac{(m-k)!\,n!}{(n-k)!\,m!} \times C_n^k = \frac{(m-k)!\,n!}{(n-k)!\,m!} \times \frac{n!}{k!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{(m-k)!\,(n!)^2}{k!\,[(n-k)!]^2\,m!}.$$

Apliquemos la fórmula hallada a la vieja lotería de cartones.

En un bolillero hay 90 números y se extraen 5. ¿Qué probabilidad hay de acertar 2, previamente elegidos?

$$P = \frac{(m-k)!\,n!}{(n-k)!\,m!}$$

$$P = \frac{(90-2)! \times 5!}{(5-2)! \times 90!} = \frac{5! \times 88!}{3! \times 90!} = \frac{4 \times 5}{89 \times 90} = \frac{2}{801}.$$

Es la probabilidad de acertar un ambo.

La de acertar un número es:

$$P = \frac{5! \times 89!}{4! \times 90!} = \frac{1}{18}.$$

La de acertar un terno:

$$P = \frac{5! \times 87!}{2! \times 90!} = \frac{1}{11748}.$$

La de acertar un cuaterno:

$$P = \frac{5! \times 86!}{90!} = \frac{1}{511038}.$$

Y la de acertar una quina (o lotería) (1):

$$P = \frac{5!\,85!}{0!\,90!} = \frac{1}{43949268}.$$

Si se busca la probabilidad de acertar *un número* tomando 5, se tiene:

$$C_5^1 \times \frac{1}{18} = \frac{5}{18}$$

o sea:

$$\frac{(m-k)!\,(n!)^2}{k!\,[\,(n-k)!\,]^2\,m!} = \frac{89!\times(5!)^2}{(4!)^2\times 90!} = \frac{5}{18}.$$

Para un ambo resulta:

$$C_5^2 \times \frac{2}{801} = \frac{20}{801}$$

o, también,

$$\frac{88!\times(5!)^2}{2!\times(3!)^2\times 90!} = \frac{20}{801}.$$

Para un terno:

$$C_5^3 \times \frac{1}{11748} = \frac{5}{5874}.$$

Para un cuaterno:

$$C_5^4 \times \frac{1}{511038} = \frac{5}{511038}.$$

Y para una quina (o lotería):

$$C_5^5 \times \frac{1}{43949268} = \frac{1}{43949268}.$$

(1) Recordemos que, por convención, es $0! = 1$.
$0!$ en sí no representaría nada, pero como

$$P_m = m!$$

y

$$P_m = m P_{m-1},$$

haciendo $m = 1$, queda

$$P_1 = 1\,P_0 = P_0.$$

Pero $P_1 = 1$, luego,

$$1 = 0!.$$

XXII. Una persona introduce una mano en un saco que contiene cierto número de semillas, granos, etc., de reducido tamaño, y extrae un puñado. ¿Cuál es la probabilidad de que el número extraído sea par?

Si en la fórmula del binomio $(a+b)^m$, se hace $a=b=1$, queda

$$2^m = 1 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^m \quad \therefore$$

$$2^m - 1 = C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^m$$

Son los casos *posibles*: total de combinaciones que, de todas las maneras posibles, se forman con m elementos.

Y si en la fórmula $(a-b)^m$, se hace, también, $a=b=1$, se tiene:

$$(1-1)^m = 0 = 1 - C_m^1 + C_m^2 - C_m^3 + \ldots \pm C_m^m \quad \therefore$$

$$C_m^1 + C_m^3 + C_m^5 + \ldots = 1 + C_m^2 + C_m^4 + C_m^6 + \ldots$$

$$I = 1 + P$$

Es decir, que las combinaciones con elementos en número impar, I, exceden en *uno* a las que tienen un número par de elementos. Luego, hay un caso favorable más a la salida de un número impar de elementos, y la probabilidad correspondiente es levemente superior a la contraria, bien que esa diferencia decrezca rápidamente a medida que crece m. Y, entonces, *tienden* las dos probabilidades a hacerse iguales a *un medio*, conforme a la primera impresión que uno tiene.

XXIII. A y B juegan un match. Sus probabilidades respectivas de ganar una partida son entre sí como $a:b$. ¿Qué probabilidad tiene cada uno de ellos de ganar el match, si para ganarlo hay que ganar dos partidas seguidas?

Para A, la probabilidad de ganar una partida es $a/(a+b)$.

Y la de ganar dos consecutivas

$$\frac{a^2}{(a+b)^2}.$$

Para B, las probabilidades de ganar una partida o dos consecutivas son, respectivamente:

$$\frac{b}{a+b} \quad \text{y} \quad \frac{b^2}{(a+b)^2}.$$

Y la de que, de dos partidas consecutivas gane una cada uno, es:

$$\frac{ab}{(a+b)^2}.$$

Ocupémonos de A y admitamos que ganó la primera partida.

Puede lograr el triunfo, ganando la 1ª y la 2ª o, si pierde la 2ª, ganando la 3ª y la 4ª, o si pierde la 2ª y la 4ª, ganando la 5ª y la 6ª. Y así sucesivamente.

A tales eventualidades corresponden, respectivamente, las probabilidades:

$$\frac{a^2}{(a+b)^2};\quad \frac{a^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{ab}{(a+b)^2};\quad \frac{a^2}{(a+b)^2}\cdot\left[\frac{ab}{(a+b)^2}\right]^2\ldots;$$

La probabilidad de A de vencer en cualquiera de esas formas está dada por la suma de la progresión geométrica decreciente que forman esas fracciones, y cuyo primer término es $a^2/(a+b)^2$, siendo $ab/(a+b)^2$ la razón

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{\dfrac{a^2}{(a+b)^2}}{1-\dfrac{ab}{(a+b)^2}} = \frac{a^2}{(a+b)^2-ab} = \frac{a^2}{a^2+ab+b^2}.$$

Pero A también puede ganar perdiendo la primera partida. En cuyo caso debe ganar la 2ª y la 3ª, o la 4ª y la 5ª, o la 6ª y la 7ª, ...

Las probabilidades respectivas, en cada caso, son:

$$\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a^2}{(a+b)^2};\quad \frac{b}{a+b}\cdot\frac{a^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{ab}{(a+b)^2};$$

$$\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a^2}{(a+b)^2}\cdot\left[\frac{ab}{(a+b)^2}\right]^2\ldots.$$

Probabilidades que forman, como se ve, una progresión geométrica decreciente de primer término y razón, respectivamente iguales a $a^2b/(a+b)^3$ y $ab/(a+b)^2$. Su suma es:

$$\frac{\dfrac{a^2b}{(a+b)^3}}{1-\dfrac{ab}{(a+b)^2}} = \frac{a^2b}{(a^2+ab+b^2)(a+b)}.$$

Luego, la probabilidad de A de vencer, sea como sea, es en definitiva:

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{a^2b}{(a^2+ab+b^2)(a+b)}=\frac{a^3+2a^2b}{(a^2+ab+b^2)(a+b)}.$$

La de B se obtiene del mismo modo. Pero no es preciso repetir el cálculo. Basta poner a en lugar de b y recíprocamente en la expresión hallada. Se tiene así:

$$\frac{b^3+2ab^2}{(a^2+ab+b^2)(a+b)}.$$

La suma da *uno*, como es lógico y como es fácil comprobar.

III

VARIACIONES SOBRE UN PROBLEMA CLÁSICO

15. XXIV. Tres jugadores, A, B y C sacan cada uno una bolilla de entre doce, de las cuales ocho son negras y cuatro blancas, hasta que uno de ellos — que será el vencedor — saque la primera bolilla blanca. Hallar las probabilidades de A, B y C sabiendo que empieza A y que los otros siguen en el orden indicado.

Se pueden hacer dos hipótesis: *a*) que la bolilla extraída no se reponga; *b*) que se reponga.

1ª *hipótesis*. No se repone la bolilla extraída.

A puede ganar en la *primera*, en la *cuarta* o en la *séptima* extracción porque antes de que él gane no pueden haber salido más que 8 bolillas negras: todas las que hay.

Y sus probabilidades en cada caso son:

$$\frac{4}{12};\quad \frac{8}{12}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{4}{9};\quad \frac{8}{12}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}$$

En total:

$$\frac{4}{12}+\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}+\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{77}{165}$$

Análogamente, la probabilidad de que gane B es la suma de las probabilidades que corresponden a la salida de la primera bolilla blanca, en la segunda, quinta u octava extracción. O sea:

$$\frac{8}{12}\cdot\frac{4}{11}+\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}+\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}=\frac{53}{165}$$

Y la de que gane C, es la suma de las probabilidades de que la primera bolilla blanca que se extraiga sea la tercera, la sexta o la novena

$$\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{4}{10}+\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}+$$

$$+\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{4}=\frac{35}{165}$$

Y, como es natural, las tres probabilidades suman *uno.*

2ª *hipótesis.* Se repone la bolilla extraída.

Aquí las probabilidades de sacar una bolilla blanca o negra son constantemente iguales a: $^4/_{12} = {}^1/_3$ y $^8/_{12} = {}^2/_3$, respectivamente.

La probabilidad de cada jugador es, ahora, la suma de los términos de una serie geométrica infinita puesto que, no agotándose las bolillas negras, puede retardarse indefinidamente la salida de la primera bolilla blanca.

A puede ganar en la primera, cuarta, séptima ... extracción, cuyas respectivas probabilidades son:

$$\frac{1}{3};\quad \left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3};\quad \left(\frac{2}{3}\right)^6\cdot\frac{1}{3};\quad \left(\frac{2}{3}\right)^9\cdot\frac{1}{3};\quad \ldots$$

En total:

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^6\cdot\frac{1}{3}+\ldots=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{8}{27}}=\frac{9}{19}$$

Del mismo modo, B puede ganar en la segunda, quinta, octava ... extracción.

Y su probabilidad es:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^6\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\ldots=\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{8}{27}}=\frac{6}{19}$$

Y la probabilidad de C, que puede ganar en la tercera, sexta, novena ... extracción, es:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}+\ldots=$$

$$=\frac{\frac{4}{27}}{1-\frac{8}{27}}=\frac{4}{19}$$

Y, también en este caso, las tres probabilidades suman *uno.*

XXV. Consideremos el caso de que los jugadores sean *dos*, A y B; las bolillas que hay en la urna 10, cinco blancas y cinco negras, y que, apostando A por la salida de una bolilla blanca y B por la de una negra, *no se reponga* la bolilla extraída. A puede ganar en la *primera, tercera, quinta, séptima* o *novena* extracción.

Y la probabilidad de que gane es, en total:

$$\frac{5}{10}+\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}+\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}+\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}+$$

$$+\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{175}{252}$$

B puede ganar en la *segunda, cuarta, sexta,* u *octava* extracción. En total su probabilidad es:

$$\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}+\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}+$$

$$+\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{76}{252}$$

Pero si sumamos, ahora, esas dos probabilidades *no llegamos a uno*

$$\frac{175}{252}+\frac{76}{252}=\frac{251}{252}.$$

¿Por qué esta anomalía?

Porque hay, también, la probabilidad de que *no gane ninguno*. Puede ocurrir que A saque todas las bolillas negras y B todas las blancas.

La probabilidad de que esto ocurra es:

$$\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{252}.$$

Agregando este resultado al anterior se tiene *uno*, es decir, la certeza.

Resultado interesante en sí, que, aparte de su posible interés teórico, tiene un indiscutible valor práctico. Si se tratara, efectivamente, de un juego real ¿cómo se determinarían las probabilidades de cada jugador? Mediante las probabilidades *relativas*, es decir, que serían, simplemente

$$\frac{175}{251} \quad \text{y} \quad \frac{76}{251}$$

Pues, en el caso de que A y B agotaran las bolillas, sacando precisamente, uno y otro, todas las del adversario, habría que tener la partida por *nula* y recomenzar.

IV

PROBLEMA DE LAS COINCIDENCIAS

16. Ocho amigos, después de cenar juntos, están tan alegres que no se preocupan de identificar sus respectivos sombreros y los toman *al azar*. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno tenga el suyo?

Es una variante *amena* del famoso problema de las coincidencias — *rencontres* —. Se extraen n bolillas, numeradas del 1 al n. ¿Cuál es la probabilidad de que ningún número salga en la extracción correlativa — el 5 en el quinto lugar; el 7, en el séptimo ...?

Los casos posibles son $n!$. Si uno de los números sale en su lugar quedan $(n-1)!$. Luego, los casos en que ese número no sale en su lugar son $n! - (n-1)!$.

Si ya salió uno en su lugar, los casos en que también otro sale en el suyo son, $(n-2)!$. Los en que el segundo no sale en su sitio, habiendo salido el primero, $(n-1)! - (n-2)!$ Y aquellos en que ninguno de los dos sale en su lugar

$$n! - (n-1)! - [(n-1)! - (n-2)!] = n! - 2(n-1)! + (n-2)!$$

Análogamente, los casos en que un tercer número sale en su lugar — no habiendo salido en el suyo ni el primero ni el segundo — se obtienen reemplazando en la expresión anterior n por $(n-1)$. Son, pues, $(n-1)! - 2(n-2)! + (n-3)!$.

Y, restando esta expresión de la precedente, se obtienen los casos en que los tres números salen fuera de su lugar

$$n! - 2(n-1)! + (n-2)! - [(n-1)! - 2(n-2)! + (n-3)!] =$$
$$= n! - 3(n-1)! + 3(n-2)! - (n-3)!.$$

El procedimiento es general. La probabilidad de que ninguno de los n números salga en su lugar es por lo tanto:

$$P = \left[n! - n(n-1)! + \frac{n(n-1)}{2!}(n-2)! - \right.$$
$$\left. - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(n-3)! + \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 1}{n!} 0!\right] : n! =$$
$$= 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots \pm \frac{1}{n!} \simeq e^{-1} = 0{,}36787944\ldots$$

Son los n primeros términos del desarrollo de $1/e$. Si n es suficientemente grande, como los términos del desarrollo decrecen muy rápidamente, se puede tomar como probabilidad e^{-1}. Para $n = 8$ el cálculo directo da 0,36788194. Y los resultados coinciden, si nos detenemos en la quinta cifra decimal: 0,36788.

La probabilidad de que por *lo menos uno* de los números salga en su lugar — uno de los comensales lleve su propio sombrero — es, evidentemente, $1 - e^{-1} = 0{,}63212$.

CAPITULO III

ESPERANZA MATEMÁTICA

I

DEFINICIÓN

17. Una urna contiene a bolillas azules y b blancas. Dos jugadores, Juan y Pedro, resuelven hacer apuestas acerca de los colores de las bolillas que vayan saliendo en una serie de extracciones sucesivas.

La bolilla extraída es repuesta en la urna en el acto y, a cada extracción, el que acierta, retira la suma de m pesos que ha sido previamente integrada de un modo *equitativo* por ambos jugadores. Pedro elige el color azul y Juan el blanco.

¿Cuáles deben ser las *puestas* respectivas?

La probabilidad de que salga una bolilla azul es

$$p_{(a)} = \frac{a}{a+b}$$

y la de que salga una blanca es

$$p_{(b)} = \frac{b}{a+b}.$$

Las probabilidades de ganar de Pedro y Juan están entre sí en la relación $p_{(a)} : p_{(b)}$.

Para que el juego sea equitativo, las *puestas* deben estar en la misma relación; luego, para determinarlas, basta repartir la suma m en partes proporcionales a $p_{(a)}$ y $p_{(b)}$.

La puesta de Pedro es:

$$\frac{mp_{(a)}}{p_{(a)} + p_{(b)}} = mp_{(a)}$$

desde que

$$p_{(a)} + p_{(b)} = 1.$$

Y la de Juan

$$\frac{mp_{(b)}}{p_{(a)} + p_{(b)}} = mp_{(b)}.$$

Es decir, la *puesta* debe ser siempre igual al producto de la suma eventual m por la probabilidad de cobrarla. Este producto recibe el nombre de *esperanza matemática.*

II

SUSPENSIÓN ANTICIPADA DEL JUEGO

18. Dos jugadores constituyen un fondo común, que le será adjudicado al primero que gane tres partidas. Suspenden el juego cuando A ha ganado dos partidas y B una. ¿Qué parte del fondo común le toca, entonces, a cada uno, si en cada partida aislada tienen ambos la misma probabilidad de ganar?

La parte de cada uno debe ser, precisamente, su *esperanza matemática* al *suspenderse el juego.* Este, de proseguirse, no puede durar más que otras dos partidas, porque, o gana A la primera y su triunfo es definitivo; o pierde A la primera, en cuyo caso iguala puntos con B, y es la segunda la que designa al ganador.

Las probabilidades de vencer de uno y otro son:

Para A. Ganando la primera partidas: probabilidad $^1/_2$. Perdiendo la primera partida y ganando la segunda: probabilidad $^1/_2 \times {}^1/_2 = {}^1/_4$.

En total $^1/_2 + {}^1/_4 = {}^3/_4$.

Para B. Ganando la primera y la segunda partida: probabilidad $^1/_2 \times {}^1/_2 = {}^1/_4$.

Luego, el fondo común debe repartirse dando $^3/_4$ á A y $^1/_4$ a B.

19. Sean, ahora, tres jugadores, A, B y C, de los cuales el primero ha ganado dos partidas, el segundo una y el tercero ninguna, cuando llega el momento de separarse. En cada partida aislada, tienen los tres, — como en el caso anterior — la misma probabilidad de ganar. ¿En qué proporción se distribuirá el fondo común?

El juego puede decidirse en la primera partida — si la gana A —. Pero de todos modos, no puede requerir más de cuatro partidas, porque para que gane C — el jugador que está en peores condiciones — tiene que ganar él mismo tres partidas, una sola B y A ninguna.

Veamos qué casos pueden presentarse.

Casos	Gana la primera partida	Gana la segunda	Gana la tercera	Gana la cuarta	Resulta vencedor
1	A	—	—	—	A
2	B	A	—	—	A
3	B	B	—	—	B
4	B	C	A	—	A
5	B	C	B	—	B
6	B	C	C	A	A
7	B	C	C	B	B
8	B	C	C	C	C
9	C	A	—	—	A
10	C	B	A	—	A
11	C	B	B	—	B
12	C	B	C	A	A
13	C	B	C	B	B
14	C	B	C	C	C
15	C	C	A	—	A
16	C	C	B	A	A
17	C	C	B	B	B
18	C	C	B	C	C
19	C	C	C	—	C

La probabilidad de ganar una partida aislada es, para cada jugador, $^1/_3$. Luego, en los distintos casos enumerados la probabilidad de ganar definitivamente es $^1/_3$; $^1/_9$; $^1/_{27}$ o $^1/_{81}$, según haya que jugar 1, 2, 3 o 4 partidas.

A gana en 9 casos cuyas probabilidades suman

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}=\frac{19}{27}$$

B, en 6 casos. Su probabilidad total es:

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{81}=\frac{6}{27}$$

Y C en cuatro casos, cuyas probabilidades suman:

$$\frac{1}{81}+\frac{1}{81}+\frac{1}{81}+\frac{1}{27}=\frac{2}{27}$$

A, B y C se repartirán, pues, el fondo común proporcionalmente a 19, 6 y 2.

III

PROBLEMAS

20. I. Una persona extrae, al azar, una carta de una baraja de 40 cartas. Si saca un *as* recibe cinco pesos. ¿Cuál es su esperanza matemática?

La baraja tiene 4 ases; luego, la probabilidad de sacar uno es $^1/_{10}$. La esperanza matemática de cobrar cinco pesos a la salida del as es, así:

$$\frac{1}{10} \times 5 = \$\,0{,}50.$$

En efecto, su adversario gana cuando la carta extraída no es un *as*. Y como 36 de las 40 cartas están en esas condiciones, la probabilidad de ganar del adversario, es $^9/_{10}$ y su esperanza matemática

$$5 \times \frac{9}{10} = \$\,4{,}50.$$

Como es lógico, las dos esperanzas suman 5 pesos, o sea la *puesta total*, que debe ser integrada así: 0,50 pesos por la primera persona y 4,50 pesos por la segunda. Por supuesto, si una de ellas hace de banquero, no tiene porque pagarse *a sí misma* la puesta.

II. Tres personas, A, B y C, hacen apuestas acerca de cuál será la primera carta que se extraiga de una baraja de 40, e interesan una *puesta* total de 50 pesos. A elige los ases; B, las figuras, y C, las otras cartas. ¿Cuáles son las *esperanzas matemáticas* de los tres jugadores?

La probabilidad de que salga un *as* es $^1/_{10}$; luego, la esperanza matemática de A es:

$$50 \times \frac{1}{10} = \$\,5.$$

La probabilidad de que salga una *figura* es $^3/_{10}$, y la esperanza matemática de B es:

$$50 \times \frac{3}{10} = \$\,15.$$

La probabilidad de que salga una carta que no sea *as* ni *figura* es $^3/_5$, y la esperanza matemática de C es:

$$50 \times \frac{3}{5} = \$30.$$

A, B y C han de contribuir, respectivamente, con 5, 15 y 30 pesos a formar la puesta total de *cincuenta* que retirará el ganador.

III. Una lotería consta de cien números y tiene veinte premios: uno de mil pesos, nueve de cien pesos y diez de diez pesos. ¿Cuál debe ser el precio de cada billete para que sea igual a su esperanza matemática?

La probabilidad de que un número dado saque el premio de mil pesos es $^1/_{100}$, y su esperanza matemática

$$1000 \times \frac{1}{100} = \$10.$$

La probabilidad de que un número dado obtenga un premio de cien pesos es $^9/_{100}$, y su esperanza matemática

$$100 \times \frac{9}{100} = \$9.$$

Y la probabilidad de que a un número le toque un premio de diez pesos es $^{10}/_{100}$, y su esperanza matemática

$$10 \times \frac{10}{100} = \$1.$$

Y, como la obtención de un premio excluye la de los demás, la esperanza matemática *total* es

$$10 + 9 + 1 = \$20.$$

En efecto, cien billetes a veinte pesos importan dos mil pesos: valor total de los premios.

IV. Una persona, A, tira un dado una sola vez. Otra persona, B, se compromete a pagarle tantos pesos cuantos sean los puntos que saque. ¿Cuál es la *puesta* que tiene que pagarle A a B para tener derecho a jugar?

Se pide la *esperanza matemática* de A. Como la probabilidad de salida de un punto cualquiera es $^1/_6$, la esperanza matemática pedida es:

$$\frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3{,}50$$

desde que la salida de un punto cualquiera *excluye* la salida de los demás.

V. Un jugador, A, apuesta con otro a que tirando un dado dos veces seguidas sacará en ambas un punto determinado (6, por ejemplo). Habiéndolo sacado en el primer tiro, se suspende el segundo. Y se pregunta: 1º ¿qué parte de la *puesta* colocó cada uno al principio?; 2º ¿cómo se distribuye esa suma entre los dos jugadores, suspendido el segundo tiro?; 3º ¿cuánto gana A?

1º La probabilidad de ganar es $^1/_6 \times {}^1/_6 = {}^1/_{36}$. Luego, llamando m a la *puesta* total, la esperanza matemática de A es: $^m/_{36}$ y la de su adversario: $^{35m}/_{36}$. Esas son las *puestas* individuales.

2º La esperanza matemática de A —obtenido el 6 en el primer tiro— es $^m/_6$ y la de su adversario $^{5m}/_6$. Es la *parte* de cada uno al separarse.

3º La puesta de A es $^m/_{36}$ y en la distribución recibe $^m/_6$. Gana, pues, la diferencia:

$$\frac{m}{6} - \frac{m}{36} = \frac{5m}{36}.$$

VI. Tres jugadores, A, B y C, juegan a cara o cruz. A y B juegan la primera partida. El que gana sigue jugando y el que pierde es reemplazado por el que no jugó, haciéndose lo mismo después de cada partida.

Y el que gana dos veces seguidas retira la *puesta* total m. Se pregunta cuáles son las esperanzas matemáticas de A, B y C: 1º después de la primera partida; 2º al principio del juego.

Supongamos que A gane la primera partida, y representemos por a, b y c las esperanzas matemáticas que, después de jugada esa primera partida, corresponden a A, B y C.

Si A gana la segunda partida es el ganador y se termina el juego. Si no, deja de jugar y toma el puesto de B, que es el que no jugaba durante la segunda partida. En el primer caso, A cobra m pesos y B y C nada; en el segundo, la esperanza matemática de A se transforma en la de B, al principio de la segunda partida, puesto que ocupa el lugar que éste ocupaba antes; B toma el lugar de C y éste, a su vez, el que tenía A al empezar la segunda partida. Luego, las esperanzas matemáticas de B y C, en este segundo caso, se hacen respectivamente iguales a c y a a.

La esperanza matemática de cada jugador, al empezar la segunda partida, es igual a la suma de las esperanzas matemáticas que resultan de cada una de las dos hipótesis consideradas, y como la probabilidad es $^1/_2$ para cada partida, quedan:

$$a = \frac{m}{2} + \frac{b}{2} \qquad b = 0 + \frac{c}{2} \qquad c = 0 + \frac{a}{2}.$$

Resolviendo el precedente sistema de ecuaciones, son:

$$a = \frac{4m}{7}, \qquad b = \frac{m}{7}; \qquad c = \frac{2m}{7}.$$

Determinemos, ahora, las esperenzas matemáticas —representadas por α, β y γ— de A, B y C al empezar el juego.

La de C es la misma antes y después de jugarse la primera partida. Gánela quien la gane, su posición no varía.

Así, pues:

$$\gamma = c = \frac{2m}{7}.$$

Las de A y B son, evidentemente, iguales al iniciarse el juego:

$$\alpha = \beta = \frac{a + b}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{4m}{7} + \frac{m}{7}\right) = \frac{5m}{14}.$$

IV

ESPERANZA MATEMÁTICA POSITIVA Y NEGATIVA

21. Se ha definido la esperanza matemática de *cobrar* una suma *eventual* como el producto de la suma eventual a cobrar por la probabilidad de cobrarla. Y se ha visto que esa esperanza matemática es la *puesta* que, equitativamente, debe integrar el jugador —antes de empezar el juego— para tener derecho a jugar.

Se puede considerar, ahora, que el jugador no abona de antemano cuota alguna. Si gana, *cobra* una suma que es su *ganancia* eventual; si pierde *paga* una cantidad que es su *pérdida* eventual. La probabilidad de ganar multiplicada por la ganancia eventual da *la esperanza matemática positiva*, que corresponde a la ganancia. La probabilidad de perder multiplicada por la pérdida eventual da la *esperanza matemática negativa*, que corresponde a la pérdida. Y para que el juego sea equitativo la *esperanza matemática total* —la suma de las esperanzas matemáticas de ganar y de perder— debe ser *nula*, puesto que eso prueba que una y otra son *iguales en valor absoluto*.

22. De este nuevo concepto de esperanza matemática se pasa al anterior.

Sean p y $q = 1 - p$ las probabilidades respectivas de ganar y de perder de un determinado jugador. Y sean, e la suma que debe pagar el jugador si pierde, y $s - e$ la que debe cobrar si gana.

Su esperanza matemática positiva es: $p(s - e)$.

Y la negativa: $-qe = -(1 - p)e$.

Por definición se tiene:

$$p(s - e) - (1 - p)e = 0 \quad \therefore$$
$$ps - pe - e + pe = 0 \quad \therefore$$
$$e = ps$$

es decir, que la *pérdida* — o la *puesta inicial* según se considere que se paga al final o al principio de cada partida — es igual al producto de la *suma total atravesada* por la probabilidad de cobrarla.

23. Apliquemos este nuevo concepto a un problema resuelto antes con el otro criterio.

Tres jugadores, A, B y C, atraviesan una suma total de cincuenta pesos, apostando acerca de cuál será la primera carta que salga de una baraja de 40. A, apuesta por un as; B, por una figura, y C, por cualquiera de las otras cartas. ¿Cuáles son sus esperanzas matemáticas, *positivas* y *negativas*?

Sea x la suma que debe pagar A si pierde. Si gana cobrará $50 - x$.

Como sus probabilidades de ganar y de perder son, respectivamente $^1/_{10}$ y $^9/_{10}$, tenemos:

$$\frac{50 - x}{10} - \frac{9x}{10} = 0 \quad \therefore \quad 50 - 10x = 0 \quad \therefore$$
$$x = 5.$$

Sea y la suma que debe pagar B si pierde. Si gana cobrará $50 - y$.

Como sus probabilidades respectivas de ganar y de perder son $^3/_{10}$ y $^7/_{10}$, tenemos:

$$\frac{3(50 - y)}{10} - \frac{7y}{10} = 0 \quad \therefore \quad 150 - 10y = 0 \quad \therefore$$
$$y = 15.$$

Sea z la suma que debe pagar C si pierde. Si gana cobrará $50 - z$.

Como sus probabilidades de ganar y de perder son, respectivamente, $^3/_5$ y $^2/_5$, tenemos:

$$\frac{3(50-z)}{5}-\frac{2z}{5}=0 \qquad \therefore \quad 150-5z=0 \qquad \therefore$$
$$z=30.$$

Resultados idénticos a los obtenidos antes.

V

LA RUINA DE LOS JUGADORES

24. Esta nueva manera de considerar la esperanza matemática permite resolver rápidamente un problema clásico: el que se conoce con el nombre de «la ruina de los jugadores».

Dos jugadores A y B, tienen *fortunas* (1) respectivamente iguales á a y b. ¿Qué probabilidad tiene A de arruinar a B, y recíprocamente?

Sea P la probabilidad que tiene A de arruinar a B, y $Q=1-P$ la que tiene B de arruinar a A.

La esperanza positiva de A es Pb, puesto que es b la suma que espera ganar. Y su esperanza negativa $-(1-P)a$.

Luego

$$Pb-(1-P)a=0 \qquad \therefore \quad P=\frac{a}{a+b}$$

Análogamente se tiene para B

$$Qa-(1-Q)b=0 \qquad \therefore \quad Q=\frac{b}{a+b}.$$

Es decir, que las probabilidades que tienen, respectivamente, de arruinar a su contrario A y B son *proporcionales a sus fortunas.*

Esto nos indica que el jugador de profesión —que no sea tramposo, por supuesto— está fatalmente condenado a arruinarse, puesto que juega contra un jugador *infinitamente más rico que él*: todos los demás jugadores a quienes acepta, sucesivamente, por adversarios.

(1) Se entiende por *fortuna de un jugador* la suma total que destina al juego. Y se admite que el jugador está *arruinado* cuando ha perdido toda esa suma.

Y véase por donde están perfectamente de acuerdo el cálculo y la moral.

Si el juego no es equitativo la cuestión cambia de aspecto: la pequeña ventaja que se reserva el *jugador favorecido* — generalmente un empresario — concluye por inclinar la balanza a su favor. Es el caso de las casas de juego, loterías, ruletas, caballitos, carreras de caballos, etc., que viven — y bastante bien, por cierto — merced a esa ventaja.

Por eso tiene razón LAURENT cuando dice que al jugador de profesión no le quedan sino dos caminos abiertos: ser víctima o victimario; estafado o estafador — *dupe ou coquin.*

CAPITULO IV

PRUEBAS REPETIDAS

I

EL PROBLEMA GENERAL

25. Sean p la probabilidad de un acontecimiento A, y, $q=1-p$, la del acontecimiento contrario, B.

Si se repite la experiencia — en igualdad de condiciones — un número determinado de veces, n, las probabilidades de A y de B seguirán siendo las mismas *en cada experiencia*, pero surge, entonces, un nuevo problema. Al hacer n *experiencias* ¿cuántas veces se presentará A y cuántas B? Si A se presenta m veces, B se presentará $n-m$. Pero m puede tomar todos los valores enteros posibles entre 0 y n, luego, B ha de presentarse, correlativamente, un número de veces comprendido entre n y 0. Hay, por consiguiente, $n+1$ *eventualidades posibles*, a cada una de las cuales corresponde una probabilidad. Determinemos esas probabilidades.

Empecemos por calcular la probabilidad de que, al repetirse A, m veces en las n experiencias, lo haga en *un orden dado*. Es una probabilidad compuesta de n probabilidades simples: m iguales a p — las m correspondientes a la repetición de A, en el orden dado — y $n-m$ iguales a q — las de las $n-m$ presentaciones de B, en un orden dado, también, al establecer el de A.

La probabilidad buscada es, así: $p^m q^{n-m}$.

Pero, si sólo nos interesa el número de veces que han de presentarse A y B — y no el orden en que se presenten — la probabilidad es mucho mayor que la calculada, puesto que ésta no encara sino *una sola* de las diversas *modalidades* del acontecimiento esperado. ¿Cuántas son esas modalidades? Tantas como *combinaciones* se pueden hacer con n objetos tomados m a m o $n-m$ a $n-m$.

Luego, la probabilidad de que A se presente m veces y B, $n-m$,

— sin otras condiciones — es

$$C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

26. Se dijo ya, que las *eventualidades* posibles son $n+1$: que salgan, respectivamente, A, 0, 1, 2...n veces, y B, n, $n-1$, $n-2$... 0 veces. Cada una de esas eventualidades tiene su respectiva probabilidad, y, como son excluyentes y comprenden todos los casos posibles, su suma ha de ser *uno*.

Y así es, en efecto,

$$\sum_{m=0}^{m=n} C_n^m p^m q^{n-m} = (p+q)^n = 1$$

puesto que $p+q=1$.

27. ¿Cuál es la probabilidad de que un acontecimiento A, de probabilidad p, se presente *por lo menos una vez* en n experiencias?

Aquí están comprendidas *todas* las eventualidades posibles, *menos la de que el acontecimiento* A *no se presente nunca* en las n experiencias.

Si es p la probabilidad de A, según queda dicho, la contraria es: $q = 1 - p$; la probabilidad de que A no se produzca *nunca* en las n experiencias es:

$$q^n = (1-p)^n.$$

Y, la de que A se produzca *por lo menos* una vez, es la contraria de la anterior,

$$1 - q^n = 1 - (1-p)^n.$$

La probabilidad de sacar *por lo menos una vez* el *doble seis* tirando n veces dos dados, es, por lo tanto

$$1 - (1 - {}^1/_{36})^n = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$$

28. ¿Cuántas veces hay que repetir una experiencia para que sea r la probabilidad de que se produzca *al menos una vez* el acontecimiento A, de probabilidad p?

Es, evidentemente,

$$1 - q^n = 1 - (1 - p)^n = r$$
$$(1 - p)^n = 1 - r$$
$$n = \frac{\log(1 - r)}{\log(1 - p)}.$$

Si se quiere saber cuántas veces se han de tirar dos dados para que sea $^1/_2$ la probabilidad de que salga *una vez por lo menos* el *doble seis*, resulta

$$n = \frac{\log(1 - {}^1/_2)}{\log(1 - {}^1/_{36})} = \frac{\log 2}{\log 36 - \log 35} = 24{,}605$$

Más de 24 veces.

II

APLICACIONES

29. I. ¿Cuál es la probabilidad de sacar *exactamente tres figuras* de una baraja de 40 cartas, si se hacen cinco extracciones, reponiendo cada vez la carta extraída?

$$C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} = \frac{5!}{3!\,2!}\left(\frac{3}{10}\right)^3\left(\frac{7}{10}\right)^2 = 0{,}1323.$$

II. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un as, y sólo un as, tirando tres dados a la vez?

Lo que interesa no es, pues, la suma de los puntos de los tres dados, sino el número de *ases* que puedan salir, *tomando cada dado aisladamente*. Tirar tres *dados a la vez* equivale, aquí, a tirar *un solo dado tres veces seguidas*. Luego, la probabilidad buscada es:

$$C_n^m p^m q^{n-m} = C_3^1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{25}{36} = \frac{25}{72}.$$

III. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos veces cara y dos veces cruz, tirando simultáneamente cuatro monedas al aire?

Lo mismo que en el problema anterior, *tirar cuatro monedas juntas* equivale — dados los términos de la cuestión — a tirar *una sola moneda cuatro veces seguidas*, es decir, a repetir *cuatro veces* la experiencia. La probabilidad pedida, es, por lo tanto:

$$C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}.$$

IV. Una urna contiene una bolilla blanca y dos negras. ¿Cuál es la probabilidad de sacar, en cinco extracciones, dos bolillas blancas y tres negras?

La bolilla extraída se repone a cada extracción, si no el problema no tendría sentido.

La probabilidad que se pide es, entonces,

$$C_5^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 10\times\frac{1}{9}\times\frac{8}{27} = \frac{80}{243}.$$

V. Una urna contiene tres bolillas blancas y dos rojas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar, en seis extracciones, cuatro bolillas rojas por lo menos?

También, en este caso, es necesario que la bolilla extraída se reponga después de cada extracción.

La probabilidad pedida es la suma de las probabilidades de que la bolilla roja salga 4, 5 o 6 veces,

$$\sum_{m=4}^{m=6} C_n^m p^m q^{n-m} = C_6^4\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^2 + C_6^5\left(\frac{2}{5}\right)^5\left(\frac{3}{5}\right) + C_6^6\left(\frac{2}{5}\right)^6 =$$

$$= 15\times\frac{16\times 9}{15625} + 6\times\frac{32\times 3}{15625} + \frac{64}{15625} = \frac{112}{625}.$$

VI. Una urna contiene una bolilla blanca y dos negras. ¿Cuál es la probabilidad de sacar, en cinco extracciones, dos veces *a lo sumo* la bolilla blanca?

La bolilla blanca ha de salir *cero*, una o dos veces. La probabilidad pedida es, por lo tanto

$$\sum_{m=0}^{m=2} C_n^m p^m q^{n-m} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 + 5\times\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^4 + 10\,.\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{64}{81}$$

VII. Una urna contiene una bolilla blanca y dos rojas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar, en cuatro extracciones, la bolilla blanca *no menos de una vez, ni más de tres*?

$$\sum_{m=1}^{m=3} C_n^m p^m q^{n-m} = 4\,.\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{2}{3} = \frac{64}{81}$$

III

PROBABILIDAD MÁXIMA

30. Entre las $n+1$ eventualidades que resultan haciendo n experiencias en idénticas condiciones, hay, evidentemente, una que tiene mayor probabilidad que las demás.

Es la que corresponde al término máximo del desarrollo de:

$$(p+q)^n.$$

Ese término es mayor que el que le precede y que el que le sigue. Si es m el exponente de p en dicho término, se ha de tener:

$$C_n^m\, p^m\, q^{n-m} > C_n^{m-1}\, p^{m-1}\, q^{n-m+1} \tag{1}$$

y también,

$$C_n^m\, p^m\, q^{n-m} > C_n^{m+1}\, p^{m+1}\, q^{n-m-1} \tag{2}$$

Operemos primeramente con (1)

$$\frac{n!}{m!\,(n-m)!}\, p^m\, q^{n-m} > \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m+1)!}\, p^{m-1}\, q^{n-m+1} \quad \therefore$$

$$\frac{\dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}}{\dfrac{n!}{(m-1)!\,(n-m+1)!}} \cdot \frac{p^m\, q^{n-m}}{p^{m-1}\, q^{n-m+1}} > 1 \quad \therefore$$

$$\frac{(m-1)!\,(n-m+1)!}{m!\,(n-m)!} \cdot \frac{p}{q} > 1 \quad \therefore$$

$$\frac{(m-1)!\,(n-m)!\,(n-m+1)}{(m-1)!\,m\,(n-m)!} \cdot \frac{p}{q} > 1 \quad \therefore$$

$$\frac{n-m+1}{m} \cdot \frac{p}{q} > 1 \quad \therefore$$

$$(n-m+1)p > mq \quad \therefore$$

$$np - mp + p > mq \quad \therefore$$

$$np + p > mq + mp \quad \therefore$$

$$m < np + p \tag{3}$$

De (2) se deduce

$$\frac{n!}{m!\,(n-m)!}\,p^m\,q^{m-m} > \frac{n!}{(m+1)!\,(n-m-1)!}\,p^{m+1}\,q^{m-n-1} \quad \therefore$$

$$\frac{\dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}}{\dfrac{n!}{(m+1)!\,(n-m-1)!}} \cdot \frac{p^m\,q^{n-m}}{p^{m+1}\,q^{n-m-1}} > 1 \quad \therefore$$

$$\frac{(m+1)!\,(n-m-1)!}{m!\,(n-m)!} \cdot \frac{q}{p} > 1 \quad \therefore$$

$$\frac{m+1}{n-m} \cdot \frac{q}{p} > 1 \quad \therefore$$

$$(m+1)\,q > (n-m)\,p \quad \therefore$$

$$mq + q > np - mp \quad \therefore$$

$$m > np - q \qquad (4)$$

Se ha encerrado, así, el valor de m entre dos límites

$$np - q < m < np + p$$

cuya diferencia es *uno*, y cada uno de los cuales, si np es entero, es igual a este entero más o menos una fracción.

Y como m forzosamente ha de ser entero, resulta que su valor más probable es precisamente np, si éste es entero, o si no uno de los dos enteros que lo limitan.

31. El acontecimiento más probable tiene, pues, una probabilidad igual a

$$\frac{n!}{(np)!\,(nq)!}\,p^{np}\,q^{nq}.$$

Para simplificar el cálculo de esta expresión se utiliza la fórmula de Stirling, en la cual

$$n! \simeq n^n\,e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

Fórmula que, como se sabe, es *asintótica*. El error absoluto que se comete al tomar como valor de $n!$ el que nos da el segundo miembro, crece a la par de n. Pero el relativo tiende hacia cero.

Transformados, mediante la fórmula de Stirling. los factoriales que intervienen en la probabilidad máxima, resulta

$$\frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{(np)^{np} e^{-np} \sqrt{2\pi np}\,(nq)^{nq} e^{-nq} \sqrt{2\pi nq}}\, p^{np} q^{nq} =$$

$$= \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\, p^{np} q^{nq}}{n^{np} p^{np} e^{-np} n^{nq} q^{nq} e^{-nq} \sqrt{2\pi np\, 2\pi nq}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}$$

puesto que:

$$e^{-n} = e^{-np} \,.\, e^{-nq} \quad \text{y} \quad n^n = n^{np} \,.\, n^{nq}.$$

32. Se tira un dado 6000 veces consecutivas. ¿Cuál es el número de veces que tiene mayor probabilidad de salir el punto *seis*, y cuál es esa probabilidad?

El número de veces que el 6 tiene mayor probabilidad de salir, es:

$$np = 6000 \times \frac{1}{6} = 1000.$$

Y la probabilidad correspondiente

$$\frac{1}{\sqrt{2 \times 3{,}1416 \times 6000 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{5236}} = 0{,}01383.$$

Muy pequeña, como se vé.

CAPÍTULO V

EL TEOREMA DE SANTIAGO BERNOULLI

I

EL DESVÍO

33. Se ha visto que siendo p la probabilidad de que se produzca un acontecimiento A, y $q = 1 - p$ la de que ocurra el contrario, B, al hacer n experiencias, la eventualidad *más probable* es la que corresponde a la presentación np veces de A y nq veces de B, si estos valores son enteros. Y se ha visto, también, que, no obstante ser la mayor, esa probabilidad es muy pequeña. Será, pues, *muy raro* que el acontecimiento A se presente np veces exactamente.

Mucho más probable es que se presente un número de veces comprendido entre ciertos límites, $np - h$ y $np + h$. Esta cantidad variable, h, que representa la diferencia entre el número de veces, $m = np \pm h$, que se presenta A en n experiencias, y el que corresponde a la *probabilidad máxima*, es lo que se llama *desvío*.

La probabilidad de que — en la ruleta — salga un número de *una de las docenas*, — tomando en cuenta el cero, cuya probabilidad es $^1/_{37}$ — es $^{12}/_{37}$, y las de las llamadas *chances simples*: pares o nones, rojo o negro, mayores o menores — contando siempre con el cero — $^{18}/_{37}$, cada una. Pues bien, en Mar del Plata, durante los días 16 al 23 de marzo de 1945, salieron en una mesa, entre 3338 *bolas* jugadas, 93 ceros — si no hubiera habido *desvío* alguno, habrían salido 90 — ; las docenas salieron 1098, 1084 y 1063 veces, respectivamente — sin *desvío* habrían salido 1082 o 1083 veces cada una — ; el negro 1630 veces contra 1615 del colorado; pares 1659 contra 1586 nones; mayores 1571 contra 1674 menores. En cada uno de estos casos — sin *desvío* — cada *chance* debía haber salido 1624 veces.

Ese desvío se llama *absoluto*. Dividiéndolo por el número total de experiencias tenemos el desvío *relativo*.

34. *Aumentando el número de experiencias, crece la probabilidad* *de tener desvíos cuyo valor absoluto supere cualquier número dado. Pero crece, a la vez, la probabilidad de que los desvíos relativos sean inferiores a cualquier número prefijado.* En otros términos, la probabilidad de tener desvíos relativos inferiores a ε —siendo ε tan pequeño como se quiera—, tiende hacia *uno* con tal de tomar n suficientemente grande.

II

PROBABILIDAD DE UN DESVÍO DADO

35. Empecemos por calcular la probabilidad de que se produzca un desvío dado: digamos $-h$. Esto equivale a hacer $m = np - h$. La probabilidad buscada será, pues, dada por el término del desarrollo de $(p+q)^n$ en que sean

$$m = np - h \qquad\qquad n - m = nq + h$$

es decir, por el término

$$\frac{n!}{(np-h)!\,(nq+h)!}\, p^{np-h}\, q^{nq+h}\,.$$

Transformándolo mediante la fórmula de Stirling, se tiene

$$\frac{e^{-n}\, n^n \sqrt{2\pi n}\, p^{np-h}\, q^{nq+h}}{e^{-(np-h)}(np-h)^{np-h}\sqrt{2\pi(np-h)}\; e^{-(nq+h)}(nq+h)^{nq+h}\sqrt{2\pi(nq+h)}} =$$

$$= \frac{e^{-n}\, n^n \sqrt{2\pi n}\, p^{np-h}\, q^{nq+h}}{e^{-np+h-nq-h}\left[np\left(1-\frac{h}{np}\right)\right]^{np-h}\left[nq\left(1+\frac{h}{nq}\right)\right]^{nq+h}\sqrt{2\pi np\left(1-\frac{h}{np}\right)2\pi nq\left(1+\frac{h}{nq}\right)}} =$$

$$= \frac{e^{-n}\, n^n \sqrt{2\pi n}\, p^{np-h}\, q^{nq+h}}{e^{-n} n^{np-h} p^{np-h}\left(1-\frac{h}{np}\right)^{np-h} n^{nq+h}\, q^{nq+h}\left(1+\frac{h}{nq}\right)^{nq+h}\sqrt{2\pi n}\sqrt{2\pi npq\left(1-\frac{h}{np}\right)\left(1+\frac{h}{nq}\right)}}$$

Pero

$$n^{np-h}\,.\,n^{nq+h} = n^{n(p+q)} = n^n$$

Luego, simplificando queda:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}\left(1-\frac{h}{np}\right)^{np-h}\left(1+\frac{h}{nq}\right)^{nq+h}\sqrt{1-\frac{h}{np}}\cdot\sqrt{1+\frac{h}{nq}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{h}{np}\right)^{np-h+1/2}\left(1+\frac{h}{nq}\right)^{nq+h+1/2}} \tag{1}$$

Igualemos a α el denominador de la segunda fracción. Queda

$$\alpha = \left(1-\frac{h}{np}\right)^{np-h+1/2}\left(1+\frac{h}{nq}\right)^{nq+h+1/2} \tag{2}$$

Tomando logaritmos neperianos

$$l.\alpha = \left(np-h+\frac{1}{2}\right)l\cdot\left(1-\frac{h}{np}\right)+\left(nq+h+\frac{1}{2}\right)l\cdot\left(1+\frac{h}{nq}\right) \tag{3}$$

Pero, si es $x < 1$, $l(1 \pm x)$ se puede desarrollar en serie, y se tiene

$$l.(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

$$l\ (1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots$$

Por lo tanto

$$l.\left(1-\frac{h}{np}\right) = -\frac{h}{np} - \frac{h^2}{2n^2p^2} - \ldots \tag{4}$$

$$l\left(1+\frac{h}{nq}\right) = \frac{h}{nq} - \frac{h^2}{2n^2q^2} + \ldots \tag{5}$$

Prescindamos — en (4) y en (5) — de los términos, muy pequeños, que siguen al segundo, y llevemos esos valores a la (3), queda

$$l.\alpha = \left(np-h+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{h}{np}-\frac{h^2}{2n^2p^2}\right)+\left(nq+h+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{h}{nq}-\frac{h^2}{2n^2q^2}\right) \therefore$$

$$l.\alpha = -h+\frac{h^2}{np}-\frac{h}{2np}-\frac{h^2}{2np}+\frac{h^3}{2n^2p^2}-\frac{h^2}{4n^2p^2}+$$

$$+h+\frac{h^2}{nq}+\frac{h}{2nq}-\frac{h^2}{2nq}-\frac{h^3}{2n^2q^2}-\frac{h^2}{4n^2q^2} \quad \therefore$$

simplificando, y desdeñando los términos que tienen n^2 en el denominador,

$$l.\alpha = \frac{h^2}{2np} + \frac{h^2}{2nq} + \frac{h}{2nq} - \frac{h}{2np} = \frac{h^2}{2n}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) + \frac{h}{2n}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right).$$

Como $h/2n$ es muy pequeño, se puede desdeñar el término que lo contiene como factor. Queda, así:

$$l.\alpha = \frac{h^2}{2n}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{h^2}{2npq}$$

$$\alpha = e^{\frac{h^2}{2npq}}$$

$$\frac{1}{\alpha} = e^{-\frac{h^2}{2npq}}$$

La probabilidad buscada es, en definitiva,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{h^2}{2npq}}$$

Se ha calculado la probabilidad de un desvío negativo. Mas para uno positivo se llega a la misma expresión, puesto que h está elevado a una potencia par.

III

APLICACIONES

36. Sean

$$n = 1000 \quad \text{y} \quad p = q = \frac{1}{2}.$$

La probabilidad de que se produzca un desvío igual a $+40$ es:

$$\frac{1}{\sqrt{2 \times 3{,}1416 \times 1000 \times {}^1/_2 \times {}^1/_2}}e^{-\frac{1600}{2 \times 1000 \times {}^1/_2 \times {}^1/_2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1570{,}8}}e^{-3.2} = 0{,}0010285.$$

La misma probabilidad tiene un desvío de —40.

La probabilidad de que el desvío sea 60, es — supuestos para n, p y q, los mismos valores que antes —

$$\frac{1}{\sqrt{1570,8}}e^{-7.2} = 0,00001883 = 0,0^{4}1883$$

dándole, previamente, *un signo* a 60. Pero si sólo queremos que el desvío sea 60 *en valor absoluto, sin atender al signo,* su valor es, naturalmente, doble, es decir, 0,00003766.

Por fin, para un desvío igual a $+100$, se tiene, utilizando los datos anteriores

$$\frac{1}{\sqrt{1570,8}}e^{-20} = 0,0^{9}52006.$$

37. Las cifras halladas decrecen tan rápidamente, a medida que crece el desvío, que surge de ellas la evidencia de que *se puede tener por prácticamente imposible* la producción de desvíos superiores en *valor absoluto* a un límite dado. En otros términos, hay un valor h del desvío tal que es

$$\sum_{m=np-h}^{m=np+h} C_n^m p^m q^{n-n} = 1 - \varepsilon$$

siendo ε una cantidad tan pequeña como se quiera.

La probabilidad de que el desvío no exceda de h, en valor absoluto, tiende, pues, rápidamente hacia *uno* y hay una certidumbre *moral* de que ciertos desvíos no habrán de producirse nunca.

Tal es, *en esencia,* el teorema de Santiago Bernoulli. De precisar su alcance fijando el valor límite de h, en función de las constantes n, p y q, se tratará en los siguientes párrafos.

IV

VARIACIONES SOBRE EL MISMO TEMA

38. Se ha llegado para la probabilidad de un desvío *exactamente* igual a h, a la expresión

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{h^2}{2npq}}$$

que, según vimos, sólo da un valor aproximado.

Si se admite que el desvío h, puede variar de un modo *continuo*, es decir, si se reemplaza la variable discontinua h por la continua z, la probabilidad que corresponde a un desvío comprendido entre z y dz, es

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{z^2}{2npq}} dz$$

Admitido, además, que el número de pruebas puede crecer más allá de todo límite, el desvío puede, entonces, variar entre $-\infty$ y $+\infty$. La suma de todas esas probabilidades habrá de darnos la certeza, que se obtiene integrando la expresión anterior entre los límites $-\infty$ y $+\infty$. Luego:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{z^2}{2npq}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2npq}} dz = 1$$

Comprobémoslo.

La función a integrar, por estar z elevada al cuadrado, da los mismos resultados para valores positivos y negativos de la variable. Luego, integrarla entre $-\infty$ y $+\infty$ equivale a integrarla entre 0 y $+\infty$ y tomar luego el doble. Por lo tanto

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2npq}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi npq}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2npq}} dz.$$

Hagamos

$$\frac{z}{\sqrt{2npq}} = t \quad \therefore \quad \frac{z^2}{2npq} = t^2 \quad \therefore \quad z = t\sqrt{2npq} \quad \text{y} \quad dz = \sqrt{2npq}\,dt$$

Entonces, para

$$z = 0, \quad t = 0$$

y para

$$z = \infty, \quad t = \infty$$

Resulta, pues, cambiando de variable:

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi npq}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2npq}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi npq}} \int_{0}^{+\infty} e^{-t^2} \sqrt{2npq}\,dt =$$

$$= \frac{2\sqrt{2npq}}{\sqrt{2\pi npq}} \int_{0}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Pero en todos los tratados de cálculo se demuestra — y aquí va a darse en seguida una demostración — que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Por consiguiente:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$$

como se quería demostrar.

Admitiendo, pues, que el desvío *pueda llegar a tener un valor infinito* y que llegue, por lo tanto a ser infinito el número de pruebas, se obtiene con la fórmula un resultado exacto. Esto prueba la naturaleza *asintótica* de la misma. Luego, cuanto mayor sea el número de experiencias, mayor será su grado de exactitud.

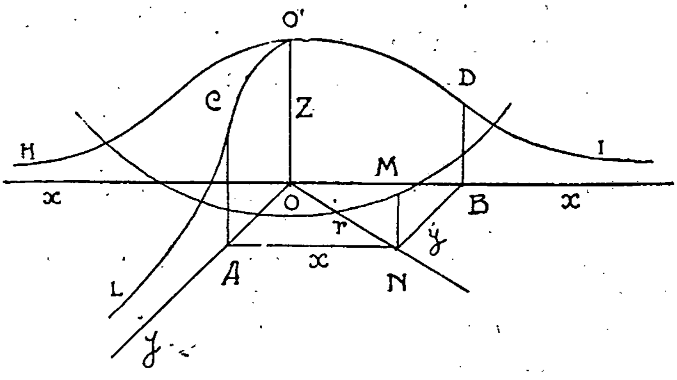
V

LA INTEGRAL AUXILIAR

39. Demostremos, ahora, que realmente es:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Sean x, y y z tres ejes coordenados rectangulares que determinan tres planos ortogonales xy, xz e yz, que pasan por el punto O.



Representemos gráficamente en el plano xz, la función e^{-x^2} y en el plano yz la e^{-y^2}.

Integrando ambas funciones entre los límites 0 y $+\infty$ y representando por S cada una de las integrales

— de igual valor, puesto que sólo se diferencian en el *nombre* dado a la variable — se tiene:

$$S = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \qquad\qquad S = \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy\,.$$

Multiplicándolas:

$$S^2 = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2}\, dx\, dy = \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$$

Pero $x^2 + y^2 = r^2$, desde que x e y son los catetos del triángulo rectángulo OAN = OBN, cuya hipotenusa es ON, luego,

$$e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}.$$

Además, $dy\,dx$ es el área — en el plano xy — de un rectángulo de lados $dy\,dx$. Por lo tanto,

$$e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = e^{-r^2}\, dx\, dy$$

es el volumen de un paralelepípedo rectángulo que tiene por base el rectángulo infinitesimal $dx\,dy$ y por altura e^{-r^2}.

Y la integral, S^2, es la *suma* de los volúmenes de *todos* los paralelepípedos análogos, que se forman en la región angular xOy del plano xy, o sea el volumen engendrado por la superficie plana yOO′CL al girar sobre OO′ hasta tomar la posición xOO′DI.

Dicho volumen es, evidentemente, la *cuarta parte* del que engendra yOO′CL al girar sobre OO′ hasta ocupar de nuevo su posición primitiva. Calcular este nuevo volumen es, pues, calcular el anterior: representando por V el volumen total, tenemos:

$$V = 4S^2$$

Y como el volumen evaluado será, a todas luces, el mismo, cualquiera que sea el procedimiento de descomposición que se adopte, se puede suponer en el plano xy una serie de círculos concéntricos, cuyo radio esté dado en función de la variable r.

Pero, dos círculos cuyos radios son, respectivamente r y $r + dr$, determinan una corona circular que tiene por área

$$\pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = \pi(r^2 + 2rdr + [dr]^2 - r^2) = \pi(2rdr + [dr]^2)$$

que se reduce a $2\pi rdr$, si se desdeña el infinitesimal de segundo orden $(dr)^2$.

A cada una de esas coronas corresponde una capa cilíndrica cuya altura es e^{-r^2} y su volumen

$$e^{-r^2}\, 2\pi r\, dr.$$

Hallar la suma de los volúmenes de todos los sólidos análogos es integrar la diferencial anterior entre los límites cero e infinito.

Se tiene

$$4S^2 = V = \int_0^\infty e^{-r^2}\, 2\pi r\, dr = -\pi \int_0^\infty - e^{-r^2}\, 2r\, dr.$$

Pero la diferencial de e^{-r^2} es de la forma $e^u\, du$, donde, $u = -r^2$, $du = -2r\, dr$. Luego, $-e^{-r^2}\, 2r\, dr$ es la diferencial de e^{-r^2}. Por consiguiente

$$4S^2 = -\pi \int_0^\infty - e^{-r^2}\, 2r\, dr = -\pi \left[e^{-r^2} \right]_0^\infty = \pi.$$

$$S^2 = \frac{\pi}{4} \qquad \therefore \quad S = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

VI

DESVÍO MEDIO. DESVÍO MEDIO CUADRÁTICO

40. Calculemos el *valor probable del desvío*, o sea la esperanza matemática del jugador a quien se le ofrece una suma igual al *desvío* que se produzca.

Eso equivale a multiplicar cada término del desarrollo de

$$(p + q)^n$$

por h, o, si se hace uso de la variable continua, a calcular la integral

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi npq}} \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{2\, npq}}\, z\, dz.$$

Haciendo, como antes,

$$\frac{z}{\sqrt{2npq}} = t \qquad \therefore \quad z = t\sqrt{2npq} \qquad \therefore \quad dz = \sqrt{2npq}\, dt$$

y substituyendo, resulta —teniendo en cuenta que, según se ha visto, los límites no cambian—

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi npq}}\int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{2npq}} z\,dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi npq}}\int_0^\infty e^{-t^2} t\sqrt{2npq}\sqrt{2npq}\,dt =$$

$$= -\frac{\sqrt{2npq}\sqrt{2npq}}{\sqrt{2\pi npq}}\int_0^\infty - e^{-t^2}\,2t\,dt =$$

$$= -\frac{\sqrt{2npq}}{\sqrt{\pi}}\Big[e^{-t^2}\Big]_0^\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{npq} = 0{,}79789\sqrt{npq}$$

Aproximadamente

$$0{,}8\sqrt{npq}$$

41. Busquemos, ahora, el valor probable del *cuadrado del desvío*, o sea la esperanza matemática del jugador a quien se le ofrece una suma igual al *cuadrado del desvío* que se produzca.

Si se hace uso de la variable continua, hay que calcular la integral

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi npq}}\int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{2npq}} z^2\,dz.$$

Haciendo, como antes,

$$\frac{z}{\sqrt{2npq}} = t \quad \therefore\; z = t\sqrt{2npq} \quad \therefore\; dz = \sqrt{2npq}\,dt \quad \therefore\; z^2 = 2npqt^2$$

y recordando que los límites no varían, resulta:

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi npq}}\int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{2npq}} z^2\,dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi npq}}\int_0^\infty e^{-t^2}\,2npqt^2\sqrt{2npq}\,dt =$$

$$= -\frac{2npq}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty - e^{-t^2}\,2t^2\,dt.$$

Consideremos la integral, con prescindencia de la constante que la afecta

$$\int_0^\infty - e^{-t^2}\,2t^2 dt = \int_0^\infty - e^{-t^2}\,2ttdt$$

Sean

$$t = u; \quad - e^{-t^2}\,2tdt = dv$$

$$\therefore\; dt = du; \quad e^{-t^2} = v$$

La integral se hace

$$\int_0^\infty u\,dv$$

Integrando por partes

$$\int_0^\infty u\,dv = \Big[uv\Big]_0^\infty - \int_0^\infty v\,du$$

y substituyendo valores

$$\int_0^\infty -e^{-t^2}\,2tt\,dt = \Big[te^{-t^2}\Big]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$$

El primer término del segundo miembro es nulo para ambos lítes, pues en un caso se anula t y en otro e^{-t^2}.

En cuanto al segundo término, se sabe que vale

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Así, pues,

$$\int_0^\infty - e^{-t^2}\,2tt\,dt = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Luego,

$$-\frac{2npq}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty - e^{-t^2}\,2t^2\,dt = \left(-\frac{2npq}{\sqrt{\pi}}\right)\left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = npq$$

Tal es el *valor probable del cuadrado del desvío*. El valor que corresponde al desvío, *deducido de éste*, y que habitualmente se representa por μ es:

$$\mu = \sqrt{npq}.$$

El cálculo directo dió

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{npq}$$

o, aproximadamente, $0{,}8\sqrt{npq}$, es decir, los cuatro quintos del valor que ahora resulta.

El que se acaba de calcular

$$\mu = \sqrt{npq}$$

se llama usualmente *desvío medio cuadrático*.

El que se halló directamente,

$$0{,}8\,\sqrt{npq}$$

desvío medio.

Conviene recordar estas denominaciones y, sobre todo, *no confundir uno ni otro* con el llamado *desvío probable,* que es

$$0{,}476936\,\sqrt{2npq} = 0{,}6745\,\sqrt{npq}$$

según se verá en seguida.

42. Los desvíos calculados son los que se llaman *absolutos.* Divididos por el número de pruebas realizadas, dan una relación entre el desvío absoluto y el número de experiencias, que se llama *desvío relativo,* según se anticipó ya, **33**.

El *desvío medio absoluto* es $0{,}8\,\sqrt{npq}$.

Y el *desvío medio relativo*

$$\frac{0{,}8\,\sqrt{npq}}{n} = 0{,}8\,\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}.$$

El *desvío medio cuadrático absoluto* es $\sqrt{npq}$.

Y el *relativo*

$$\frac{\sqrt{npq}}{n} = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}.$$

Al aumentar el número de experiencias, el desvío absoluto crece, mientras el relativo decrece. Y la razón es obvia.

El desvío absoluto *crece,* en proporción a la *raíz cuadrada* del número de experiencias, n, es dedir, *mucho más lentamente* que n. Luego, el desvío relativo ha de decrecer al crecer n.

Queda, así, demostrado el teorema enunciado en el párrafo **34**. Y se ve, de paso, que *sólo en el caso de que n pudiera ser infinitamente grande,* se tendría

$$\frac{m}{n} = p.$$

Esta observación precisa el alcance de la proposición demostrada. Permite determinar, para los posibles *desvíos,* un *límite superior* y otro *inferior,* cuya probabilidad de ser sobrepasados sea tan mínima que, *prácticamente,* pueda tenérsela por *nula,* y el hecho, por lo tanpor imposible.

VII

LA CURVA DE GAUSS

43. Si en la expresión que da la probabilidad de que se produzca un desvío igual a $+h$ (o a $-h$)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-\frac{h^2}{2npq}}$$

se hace

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2npq}} \quad \text{y} \quad x = h\varepsilon$$

serán

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2npq} \quad \text{y} \quad \frac{h^2}{2npq} = h^2\varepsilon^2 = x^2$$

siendo ε una cantidad menor que uno, y tanto menor cuanto mayor sea n.

Representemos gráficamente la función

$$e^{-\frac{h^2}{2npq}} = e^{-x^2}$$

y veamos como varía para valores *enteros* de h. Sabemos que es simétrica con respecto al eje de las ordenadas, desde que toma iguales valores para $h = \pm 1$; $h = \pm 2$; ...

Como esa función depende de los valores de n, p y q, hagamos $n = 200$; $p = q = {}^1/_2$. Es, entonces,

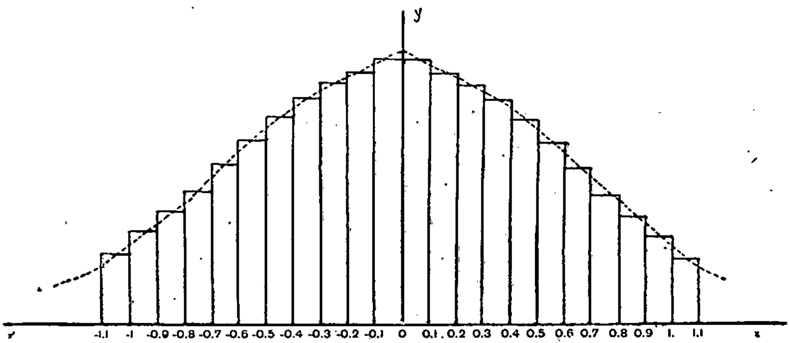
$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2 \times 200 \times {}^1/_2 \times {}^1/_2}} = 0{,}1.$$

Y para $h = 1$; 2; 3; ..., se tiene $x = 0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$; ...

Por lo tanto, para desvíos ± 1; ± 2; ± 3; ... se tiene, sobre el eje de las abscisas, distancias iguales a $\pm 0{,}1$; $\pm 0{,}2$; $\pm 0{,}3$... a las que corresponden las ordenadas que indica la siguiente tabla:

Valores de la función $y = e^{-x^2}$

x	y	x	y	x	y
0,0	1,00000	1,7	0,055576	3,4	$0,0^{5}95402$
1	0,99005	8	039164		
2	96076	9	027052	3,5	$0,0^{5}47851$
3	91393			6	$0^{5}23526$
4	85214	2,0	0,018316	7	$0^{5}11337$
		1	012155	8	$0^{6}53554$
0,5	0,77880	2	007907	9	$0^{6}24796$
6	69768	3	005042		
7	61263	4	003151	4,0	$0,0^{6}11254$
8	52729			1	$0^{7}5006$
9	44486	2,5	$0,0^{2}19304$	2	$0^{7}2183$
		6	$0^{2}11592$	3	$0^{8}933$
1,0	0,36788	7	$0^{3}68233$	4	$0^{8}391$
1	29820	8	$0^{3}39367$		
2	23693	9	$0^{3}22263$	4,5	$0,0^{8}161$
3	18452			6	$0^{9}646$
4	14086	3,0	$0,0^{3}12341$	7	$0^{9}255$
		1	$0^{4}68055$	8	$0^{11}986$
1,5	0,10540	2	$0^{4}35713$	9	$0^{10}374$
6	077306	3	$0^{4}18644$	5,0	$0^{10}139$



Si, ahora, se admite, como se hizo ya en otra ocasión, que el desvío puede variar de un modo continuo entre 0 y $+\infty$, no se hace más que reemplazar la poligonal que representa la función discontinua, por la curva asintótica al eje de las abscisas que representa la función continua y que tiende a confundirse con la poligonal a medida que aumenta n en valor absoluto.

En efecto, para $n = 20000$; $p = q = {}^1/_2$; resulta:

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2 \times 20000 \times {}^1/_2 \times {}^1/_2}} = 0{,}01$$

y para $h = 1$; 2; 3; ... se hace $x = 0{,}01$; 0,02; 0,03 ... y la poligonal y la curva se confunden, prácticamente.

Esta curva se conoce con el nombre de *campana* — debido a su forma —; o *curva de los errores* — por la aplicación que de ella se hace en la teoría de los errores —; o *curva de* GAUSS — el fundador de esa teoría —; o *curva de probabilidad.*

Se vió ya que entre $-\infty$ y $+\infty$ encierra un área igual a $\sqrt{\pi}$.

Se han calculado tablas de la integral

$$\int_0^{\lambda} e^{-x^2}\, dx$$

que dan el área encerrada entre la curva, el eje de las abscisas, el de las ordenadas y una ordenada dada que corresponde al valor asignado a x en cada caso.

44. La función

$$\Theta(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda} e^{-x^2}\, dx$$

en la que, como se vió, es

$$x = \pm \frac{h}{\sqrt{2npq}} \qquad \therefore \qquad x^2 = \frac{h^2}{2npq}$$

da la suma de las probabilidades de los desvíos comprendidos entre $+h$ y $-h$, de conformidad con los valores particulares que toma h, en cada caso, cuando a x se le asigna un determinado valor λ.

Damos a continuación una tabla de los valores de la integral

$$\Theta(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda} e^{-x^2}\, dx$$

λ	$\Theta(\lambda)$	λ	$\Theta(\lambda)$	λ	$\Theta(\lambda)$
0	0	1,163	0,9	2,327	0,999
0,1	0,1124630	1,2	0,9103140	2,5	0,9995930
0,2	0,2227025	1,3	0,9340080	2,76	0,9999051
0,3	0,3286267	1,4	0,9522851	3	0,9999779
0,4	0,4283922	1,5	0,9661052	3,13	0,9999904
0,4769363	0,5	1,6	0,9763484	3 46	0,9999990
0,5	0,5204999	1,7	0,9837904	3,50	0,9999993
0,6	0,6038561	1,8	0,9890905	3,71	0,9999998
0,7	0,6778010	1,83	0,9903467	3,72	0,9999999
0,8	0,7421010	1,9	0,9927904	...	...
0,9	0,7969082	2	0,9953223	∞	1
1	0,8427008	2,12	0.9972836		

Se advertirá que los valores de la función tienden rápidamente hacia *uno.*

Cuando es $\lambda = 0{,}4769363$, es $\Theta(\lambda) = 0{,}5$.

El desvio h, que resulta en este caso particular y que *tiene la misma probabilidad de ser que de no ser sobrepasado, en valor absoluto*, se llama *desvío probable*, como se dijo ya, **41**.

VIII

APLICACIONES

45. I. ¿Cuántas veces se debe echar al aire una moneda para que la probabilidad de que una cualquiera de las caras salga dos millones de veces más que la otra sea 0,99?

Hay que hallar n.

La tabla da

$$\Theta(\lambda) = 0{,}99$$

para $\lambda = 1{,}83$.

Por otra parte, según el enunciado del problema, son

$$h = 1000000; \quad p = q = {}^1/_2.$$

Luego, reemplazando valores en la expresión

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2npq}}$$

se tiene

$$1{,}83 = \frac{1000000}{\sqrt{2n \times {}^1/_2 \times {}^1/_2}}$$

$$\sqrt{n} = \frac{1000000\sqrt{2}}{1{,}83}$$

$$n = \frac{2 \times 1000000^2}{1{,}83^2}$$

o sea 597211 millones, aproximadamente.

II. Tirando al aire una moneda 200 veces sale cara m veces. ¿Cuál es la probabilidad de que la frecuencia observada $m/200$ no difiera de la probabilidad teórica; $p = {}^1/_2$, en más de un 4 por ciento?

El desvío *absoluto* no debe pasar de 8 en las 200 experiencias. Luego

$$\lambda = \frac{8}{\sqrt{2 \times 200 \times {}^1/_2 \times {}^1/_2}} = 0{,}8.$$

Según la tabla

$$\Theta(0{,}8) = 0{,}742$$

Es la probabilidad de que el número de caras que salgan esté comprendido entre 92 y 108.

III. Dos jugadores, A y B, juegan a cara o cruz un determinado número de partidas. A se compromete a pagar a B una suma s si el desvío que se produzca no pasa de 8 en valor absoluto. Por su parte, B se compromete a pagar a A esa misma suma s si el desvío excede de dicho límite. ¿Cuántas partidas deben jugar para que el juego sea equitativo?

Para ello las probabilidades de uno y otro han de ser iguales. Es, por lo tanto

$$\Theta(\lambda) = {}^1/_2$$

lo que ocurre para $\lambda = 0{,}4769363$. Tomemos $0{,}4769$. Queda

$$0{,}4769 = \frac{8}{\sqrt{2n.{}^1/_2.{}^1/_2}} \qquad \therefore \quad n = \frac{8^2 \times 2}{0{,}4769^2} = 563.$$

IV. La relación entre el número de nacimientos masculinos y femeninos guarda cierta constancia que no ha escapado a los estadísticos. Durante el siglo XVIII se admitía que era de ${}^{25}/_{24}$; para Laplace era de ${}^{22}/_{21}$, y en nuestros días se estima en ${}^{18}/_{17}$. Aceptando como cierta esta última razón, se pregunta cuál es la probabilidad de que sobre un total de 83300 nacimientos se produzca un desvío *superior* a 475.

Según la hipótesis admitida, las probabilidades respectivas de que nazca un varón o una niña son

$$p = \frac{18}{35}; \qquad q = \frac{17}{35}.$$

Luego, es

$$\lambda = \frac{475}{\sqrt{2 \times 83300 \times {}^{18}/_{35} \times {}^{17}/_{35}}} = \frac{475}{204} = 2{,}328.$$

Para

$$\lambda = 2{,}327$$

se tiene

$$\Theta(\lambda) = 0{,}999.$$

Esa es la probabilidad de que el desvío *no exceda* de 475. La de que *exceda* dicho límite es, por lo tanto

$$1 - \theta(\lambda) = 0{,}001.$$

V. Una urna contiene 100 bolillas blancas y 100 negras y se hacen 100 extracciones, reponiendo, en cada caso, la bolilla extraída. ¿Entre qué límites está comprendido el desvío cuya probabilidad es 0,997?

Siendo

$$\Theta(\lambda) = 0{,}997 \qquad \text{es} \qquad \lambda = 2{,}12.$$

Luego

$$2{,}12 = \frac{h}{\sqrt{2npq}} \quad \therefore \quad h = 2{,}12 \,.\, \sqrt{2}\sqrt{npq} \simeq 3\sqrt{npq} \quad \therefore$$

$$h = 3\mu$$

puesto que, como se sabe, el *desvío medio cuadrático* — simbolizado por μ — es igual a $\sqrt{npq}$.

En el caso actual es

$$h = 3\sqrt{100 \times {}^1/_2 \times {}^1/_2} = 3 \times 5 = 15.$$

Luego, el número máximo de bolillas de un color dado, que, dentro de esos límites, pueden salir es 65. Y el menor 35. Son los límites pedidos.

VI. ¿Qué probabilidad hay de que tirando 200 veces una moneda a cara o cruz, se produzca un desvío superior a $+15$?

Para $h = 15$, es

$$\lambda = \frac{15}{\sqrt{2 \times 200 \times {}^1/_2 \times {}^1/_2}} = 1{,}5 \qquad \therefore \quad \theta(\lambda) = 0{,}966.$$

Por lo tanto, la probabilidad de que el desvío *no exceda* de 15 *en valor absoluto*, es 0,966.

La de que exceda de 15 (sin atender al signo) es

$$1 - \theta(1{,}5) = 0{,}034.$$

Y la de que exceda, *en un sentido determinado* (el positivo, en este caso) es, evidentemente, la mitad de la anterior. Es decir

$${}^1/_2\,[1 - \theta(1{,}5)] = 0{,}017.$$

CAPITULO VI

PROBABILIDADES A POSTERIORI O DE LAS CAUSAS

I

LA FÓRMULA DE BAYES

46. Un acontecimiento puede, eventualmente, provenir de diversas causas. [*Una bolilla blanca, p. ej., puede salir de diferentes grupos de urnas de la más variada composición.*]

Al modificarse la causa, se modifica, también, la probabilidad del acontecimiento. [*En un grupo de urnas la probabilidad de extraer una bolilla blanca es* $^3/_4$, *en otro* $^2/_5$, ...]

Cada una de esas causas tiene, a su vez, su propia probabilidad. [*La de elegir una urna del primer grupo es* $^2/_7$, *la de elegir una del segundo* $^3/_{14}$ ...]

Ahora bien, *producido* el acontecimiento, ¿cuál es la probabilidad de que ello se deba a una causa (i) determinada?

Sean π_1, π_2, ... π_i, ... π_n, las probabilidades respectivas de que el acontecimiento se produzca por obra de la causa (1), (2), ... (i), ... (n).

Y sean, además, p_1, p_2, ... p_i, ... p_n, las probabilidades correlativas de que actúen esas causas.

La probabilidad de que el acontecimiento se produzca merced a la causa (i) es compuesta e igual a

$$p_i \, \pi_i$$

Y la de que se produzca, *sea como sea,* sin atender a la causa que actúa, es igual a la suma de todas las probabilidades análogas

$$p_1 \pi_1 + p_2 \pi_2 + \ldots + p_i \pi_i + \ldots + p_n \pi_n = \sum_{i=1}^{i=n} p_i \pi_i$$

Sea, ahora, P_i la probabilidad *a posteriori* de que producido el hecho sea debido a la causa (i). Será evidentemente

$$P_i \sum_{i=1}^{i=n} p_i \pi_i = p_i \pi_i$$

en virtud del principio de la probabilidad compuesta: salió ya la bolilla blanca; medió para ello la causa (i).

Despejando P_i se tiene

$$P_i = \frac{p_i \pi_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} p_i \pi_i}$$

Es la fórmula —algunos dicen el *teorema*— de Bayes. «Cuando un hecho puede tener su origen en distintas causas, que se excluyen mutuamente, la probabilidad de que, ocurrido el hecho, ello se deba a una causa dada se halla dividiendo *por la probabilidad total del mismo*, la de que provenga *exclusivamente* de dicha causa.

II

PROBLEMAS

47. I. Cinco alumnos deben rendir examen y se prepara, para ellos, una serie de diez problemas. Los dos primeros son capaces de resolver nueve problemas de cada diez; los otros tres sólo resuelven uno de cada diez. A uno de los alumnos se le propone un problema de la serie y lo resuelve. ¿Cuál es la probabilidad de que pertenezca al primer grupo, y cuál la de que pertenezca al segundo?

La probabilidad de que un alumno pertenezca al primer grupo es $^2/_5$; la de que resuelva un problema, un alumno del primer grupo, es $^9/_{10}$, y la de que se elija un alumno del primer grupo y resuelva el problema, $^2/_5 \times {}^9/_{10} = {}^{18}/_{50}$.

Análogamente, la probabilidad de que, elegido un alumno del segundo, grupo resuelva el problema, es $^3/_5 \times {}^1/_{10} = {}^3/_{50}$.

Como se trata de probabilidades de las causas —*a posteriori*—, es decir, después de ocurrido el hecho, la probabilidad de que *actúe* una causa determinada —que el alumno pertenezca al primer grupo— es, según la fórmula de Bayes

$$\frac{^{18}/_{50}}{^{18}/_{50} + {}^3/_{50}} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$$

Y la de que actúe *otra* causa —el alumno pertenezca al segundo grupo— calculada de la misma manera, $^1/_7$

II. A un campamento militar llegan, procedentes de cinco regiones A, B, C, D y E, 2500 conscriptos entre los cuales hay 625 analfabetos, y cuya distribución, atendiendo a la región de donde proceden, es la que sigue

Región	A	600	conscriptos	195	analfabetos
„	B	300	„	75	„
„	C	450	„	90	„
„	D	750	„	225	„
„	E	400	„	90	„
		2500		675	

Se elige un conscripto al azar, y resulta analfabeto. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la región C?

Las probabilidades, respectivas, de que un conscripto proceda de una determinada región son:

$$p_{(a)} = {}^{600}/_{2500} = 0{,}24\,;\ p_{(b)} = {}^{300}/_{2500} = 0{,}12\,;\ p_{(c)} = {}^{450}/_{2500} = 0{,}18\,;$$
$$p_{(d)} = {}^{750}/_{2500} = 0{,}3\,;\ p_{(e)} = {}^{400}/_{2500} = 0{,}16\,.$$

Las de que, dentro de su respectiva región sea analfabeto,

$$\pi_{(a)} = {}^{195}/_{600} = 0{,}325\,;\ \pi_{(b)} = {}^{75}/_{300} = 0{,}25\,;\ \pi_{(c)} = {}^{90}/_{450} = 0{,}2\,;$$
$$\pi_{(d)} = {}^{225}/_{750} = 0{,}3\,;\ \pi_{(e)} = {}^{90}/_{400} = 0{,}225\,.$$

Y las de que pertenezca a determinada región y sea, además, analfabeto

$$P_a = 0{,}24 \times 0{,}325 = 0{,}078\,;\quad P_b = 0{,}12 \times 0{,}25 = 0{,}03\,;$$
$$P_c = 0{,}18 \times 0{,}2 = 0{,}036\,;\ P_d = 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09\,;\ P_e = 0{,}16 \times 0{,}225 = 0{,}036$$

Por lo tanto, la probabilidad de que el conscripto que resultó analfabeto pertenezca a la región C, es, aplicando la fórmula de Bayes

$$\frac{0{,}036}{0{,}078 + 0{,}03 + 0{,}036 + 0{,}09 + 0{,}036} = \frac{36}{270} = \frac{2}{15}$$

Las probabilidades de que pertenezca a las demás regiones son, respectivamente,

$$\frac{78}{270} = \frac{13}{45}\,;\quad \frac{3}{27} = \frac{1}{9}\,;\quad \frac{9}{27} = \frac{1}{3}\,;\quad \frac{36}{270} = \frac{2}{15}$$

La suma de las cinco da, como es lógico, *uno*.

III. Según una estadística francesa de anteguerra, las probabilidades de que una madre tuviera 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 o más de 10 hijos eran, para una primera generación:

$$p_1 = 0{,}053\,;\; p_2 = 0{,}057\,;\; p_3 = 0{,}1\,;\; p_4 = 0{,}132\,;\; p_5 = 0{,}140\,;$$
$$p_6 = 0{,}124\,;\; p_7 = 0{,}113\,;\; p_8 = 0{,}092;\; p_9 = 0{,}076;\; p_{10} = 0{,}052;\; p_{11+} = 0{,}061$$

Del mismo modo, las probabilidades de que una madre de la *siguiente generación,* tuviera *cuatro* hijos, eran, respectivamente

$$\pi_1 = {}^5/_{53}\,;\; \pi_2 = {}^5/_{57}\,,\; \pi_3 = {}^{19}/_{100}\,;\; \pi_4 = {}^{17}/_{132}\,;\; \pi_5 = {}^{21}/_{140}\,;$$
$$\pi_6 = {}^{15}/_{124}\,;\; \pi_7 = {}^{18}/_{113}\,;\; \pi_8 = {}^{10}/_{92}\,;\; \pi_9 = {}^{14}/_{76}\,;\; \pi_{10} = {}^{2}/_{52}\,;\; \pi_{11+} = {}^{7}/_{61}$$

tomando en cuenta el número de hijos (1, 2, ... 11 o más) tenidos por sus padres.

Se pide ahora, en presencia de esas probabilidades —*frecuencias* más bien— cuál es la probabilidad de que una madre de la segunda generación, que tiene *cuatro* hijos, provenga de un hogar donde nacieron *tres.*

Basta, evidentemente, aplicar la fórmula de BAYES

$$\frac{p_3\,\pi_3}{\sum\limits_{i=1}^{i=11+} p_i\,\pi_i} = \frac{0{,}019}{0{,}133} = \frac{19}{133}$$

En efecto, haciendo los productos se tiene:

$$\begin{array}{lcll}
p_1\,\pi_1 & = & 0{,}053 \times {}^5/_{53} & = 0{,}005 \\
p_2\,\pi_2 & = & 0{,}057 \times {}^5/_{57} & = 0{,}005 \\
p_3\,\pi_3 & = & 0{,}1 \quad\; \times {}^{19}/_{100} & = 0{,}019 \\
p_4\,\pi_4 & = & 0{,}132 \times {}^{17}/_{132} & = 0{,}017 \\
p_5\,\pi_5 & = & 0{,}140 \times {}^{21}/_{140} & = 0{,}021 \\
p_6\,\pi_6 & = & 0{,}124 \times {}^{15}/_{124} & = 0{,}015 \\
p_7\,\pi_7 & = & 0{,}113 \times {}^{18}/_{113} & = 0{,}018 \\
p_8\,\pi_8 & = & 0{,}092 \times {}^{10}/_{92} & = 0{,}010 \\
p_9\,\pi_9 & = & 0{,}076 \times {}^{14}/_{76} & = 0{,}014 \\
p_{10}\,\pi_{10} & = & 0{,}052 \times {}^{2}/_{52} & = 0{,}002 \\
p_{11+}\,\pi_{11+} & = & 0{,}061 \times {}^{7}/_{61} & = 0{,}007 \\
\hline
\sum\limits_{i=1}^{i=11+} p_i\,\pi_i & & & = 0{,}133 \\
\hline
\end{array}$$

SEGUNDA PARTE

DIFERENCIAS FINITAS

CAPÍTULO PRIMERO

LA DIFERENCIACIÓN FINITA

I

GENERALIDADES

[1]. Sea u_x una función de la variable — o *argumento* —, x, y representemos por u_{x-h}; u_x; u_{x+h}; u_{x+2h} ... u_{x+nh}, los valores que toma la función cuando x se hace respectivamente igual a $x-h$; x; $x+h$; $x+2h$ ... $x+nh$, siendo h una cantidad positiva de modo que tengamos $x-h<x<x+h$.

Si ahora se resta cada valor de la función del que toma la misma cuando el argumento x aumenta en la diferencia común h, se forman las que se llaman *diferencias finitas* — o simplemente *diferencias* — de la función y que se representan mediante el símbolo Δ.

Se tiene, así:

$$\begin{aligned}\Delta u_x &= u_{x+h}-u_x\\ \Delta u_{x+h} &= u_{x+2h}-u_{x+h}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Delta u_{x+nh} &= u_{x+(n+1)h}-u_{x+nh}\end{aligned}\qquad\text{(I)}$$

Como las diferencias obtenidas son también *funciones de* x, se puede repetir el proceso de diferenciación. Se llama, entonces, a las diferencias que se acaban de obtener diferencias *primeras* y a las obtenidas mediante repeticiones sucesivas del procedimiento anterior, diferencias *segundas*, *terceras* ...

Resultan, así:

$$\Delta^2 u_x = \Delta u_{x+h} - \Delta u_x$$
$$\Delta^2 u_{x+h} = \Delta u_{x+2h} - \Delta u_{x+h}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta^2 u_{x+(n-1)h} = \Delta u_{x+nh} - \Delta u_{x+(n-1)h}$$

Y, también,

$$\Delta^3 u_x = \Delta^2 u_{x+h} - \Delta^2 u_x$$

En general,

$$\Delta^n u_x = \Delta^{n-1} u_{x+h} - \Delta^{n-1} u_x \qquad \text{(II)}$$

Usualmente las diferencias se disponen de modo que formen un cuadro como el que sigue. Como se ve, entre cada dos términos de la función — o de un determinado orden de diferencias — van las diferencias del orden siguiente, y el subíndice de cada diferencia se refiere *siempre* al sustraendo

x	u_x					
		Δu_x				
$x+h$	u_{x+h}		$\Delta^2 u_x$			
		Δu_{x+h}		$\Delta^3 u_x$		
$x+2h$	u_{x+2h}		$\Delta^2 u_{x+h}$		$\Delta^4 u_x$	
		Δu_{x+2h}		$\Delta^3 u_{x+h}$		$\Delta^5 u_x$
$x+3h$	u_{x+3h}		$\Delta^2 u_{x+2h}$		$\Delta^4 u_{x+h}$	.....
		Δu_{x+3h}		$\Delta^3 u_{x+2h}$	......	
$x+4h$	u_{x+4h}		$\Delta^2 u_{x+3h}$	......		
		Δu_{x+4h}	......			
$x+5h$	u_{x+5h}	......				
......	.....					

Si, por ejemplo, son $u_x = x^3$; $x = 0$ y $h = 1$, el cuadro anterior se hace:

0	0					
		1				
1	1		6			
		7		6		
2	8		12		0	
		19		6		
3	27		18		0	
		37		6		
4	64		24	..		
		61	..			
5	125	..				
.	...					

[2]. El término de la serie de valores de la función u_x que se toma como *inicial*, y los primeros términos de las series de diferencias, que resultan, en consecuencia, se llaman *término principal* y *diferencias principales*. En el ejemplo dado el término principal es 0 y las diferencias principales: 1, 6, 6 y 0.

Puede ocurrir, como en el citado ejemplo, que llegue un orden de diferencias en que estas sean todas iguales —en el ejemplo considerado las *terceras diferencias* son todas iguales a *seis* —; en tal caso las subsiguientes diferencias son todas iguales a *cero*. Pero no por eso se dirá que *no existen*: se dirá simplemente, que son *nulas*. Esta distinción, pueril a primera vista, será util más adelante.

[3]. Si los valores del argumento varían según se ha supuesto, formando una progresión aritmética, se dice que los términos de la serie de valores de la función son *equidistantes*, no implicando, por lo tanto, esta expresión que las diferencias entre los términos de la serie son iguales, sino que es constante la diferencia, h, entre los valores del argumento x.

[4]. Puede darse el caso —como se ha visto— de que las diferencias de un determinado orden —y por lo tanto las de los órdenes subsiguientes— sean nulas.

Fácil es demostrar que siendo u_x una función racional, entera y de grado n con relación a x las diferencias enésimas son constantes y, por lo tanto, son nulas las de orden $n+1$ y siguientes.

Sea, en efecto, según la hipótesis hecha

$$u_x = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Rx + T$$

donde A, B, C ... R, T, son constantes, entre las cuales puede haber algunas iguales a *cero*.

Poniendo $x+h$ en vez de x, tenemos

$$u_{x+h} = A(x+h)^n + B(x+h)^{n-1} + C(x+h)^{n-2} + \ldots + R(x+h) + T$$

Diferenciando, queda

$$\Delta u_x = A\,[(x+h)^n - x^n] + B\,[(x+h)^{n-1} - x^{n-1}] + \ldots + R\,[x+h-x]$$

Se advierte en seguida que, efectuando los desarrollos y las diferencias indicadas, resulta un polinomio racional y entero de grado $n-1$ con respecto a x, pues los dos únicos términos en x^n son iguales y de signo contrario.

Más aún, se ve en el acto que el término en x^{n-1} tiene por coeficiente Anh.

Diferenciando nuevamente se ve que las segundas diferencias son polinomios racionales y enteros de grado $n-2$ con respecto a x, y en las cuales el coeficiente de x^{n-2} es $An(n-1)h^2$.

Las terceras diferencias, a su vez, son polinomios racionales y enteros de grado $n-3$ con respecto a x, en los cuales el coeficiente de x^{n-3} es $An(n-1)(n-2)h^3$.

Y así sucesivamente.

Las diferencias *enésimas* son, pues, de grado $n-n=0$ con respecto a x. Es decir, *constantes* e iguales a $An!\,h^n$.

En particular, si es $u_x = x^n$, será

$$\Delta^n x^n = n!\,h^n \tag{III}$$

Veamos, ahora, algunas diferencias interesantes.

II

DIFERENCIAS DE ALGUNAS FUNCIONES

[5]. *Diferencia del producto de una función por una constante.*

Sea

$$u_x = a v_x$$

Es

$$\Delta a v_x = a \Delta v_x$$

En efecto,

$$\Delta a v_x = a v_{x+h} - a v_x = a(v_{x+h} - v_x)$$

$$\Delta a v_x = a \Delta v_x \tag{IV}$$

[6]. *Funciones que difieren en una constante.*

Sus diferencias son iguales.

Sea

$$v_x = u_x + k$$

donde k es una constante, es decir, una cantidad independiente de x.

Resulta

$$\Delta u_x = u_{x+h} - u_x.$$

Más

$$\Delta v_x = v_{x+h} - v_x = u_{x+h} + k - (u_x + k) = u_{x+h} - u_x$$

$$\Delta u_x = \Delta v_x \tag{V}$$

[7]. *Diferencia de una suma algebráica.*

Sea

$$u_x = v_x \pm w_x$$

Es

$$\Delta(v_x \pm w_x) = \Delta v_x \pm \Delta w_x$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \Delta(v_x \pm w_x) &= v_{x+h} \pm w_{x+h} - (v_x \pm w_x) = \\ &= (v_{x+h} - v_x) \pm (w_{x+h} - w_x) \quad \therefore \\ \Delta(v_x \pm w_x) &= \Delta v_x \pm \Delta w_x \end{aligned} \tag{VI}$$

[8]. *Diferencia del producto de dos funciones.*

Sea

$$u_x = v_x . w_x$$

Es

$$\Delta(v_x . w_x) = v_x \, \Delta w_x + w_x . \Delta v_x + \Delta v_x \, \Delta w_x$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \Delta(v_x . w_x) &= v_{x+h} . w_{x+h} - v_x w_x = \\ &= (v_x + \Delta v_x)(w_x + \Delta w_x) - v_x w_x \quad \therefore \\ \Delta(v_x . w_x) &= v_x \Delta w_x + w_x \Delta v_x + \Delta v_x \, \Delta w_x \end{aligned} \tag{VII}$$

[9]. *Diferencia de un cociente de dos funciones.*

Sea

$$u_x = \frac{v_x}{w_x}$$

Es

$$\Delta \frac{v_x}{w_x} = \frac{w_x \Delta v_x - v_x \Delta w_x}{w_x \, w_{x+h}}$$

En efecto,

$$\Delta \frac{v_x}{w_x} = \frac{v_{x+h}}{w_{x+h}} - \frac{v_x}{w_x} = \frac{w_x \, v_{x+h} - v_x \, w_{x+h}}{w_x \, w_{x+h}} =$$

$$= \frac{w_x (v_x + \Delta v_x) - v_x (w_x + \Delta w_x)}{w_x . w_{x+h}} \quad \therefore$$

$$\Delta \frac{v_x}{w_x} = \frac{w_x \Delta v_x - v_x \Delta w_x}{w_x \, w_{x+h}} \tag{VIII}$$

[10]. *Diferencia de una función exponencial.*

Sea

$$v_x = a^x$$

Es

$$\Delta^n a^x = (a^h - 1)^n a^x$$

En efecto,

$$\Delta a^x = a^{x+h} - a^x = (a^h - 1)a^x$$

Como $(a^h - 1)$ es una constante, diferenciando nuevamente queda:

$$\Delta^2 a_x = (a^h - 1)(a^h - 1)a^x = (a^h - 1)^2 a^x$$

Y, repitiendo n veces la operación,

$$\Delta^n a^x = (a^h - 1)^n a^x \qquad \text{(IX)}$$

[11]. *Diferencia de un logaritmo.*

Sea

$$u_x = \log v_x$$

Es

$$\Delta \log v_x = \log \frac{v_{x+h}}{v_x} = \log\left(1 + \frac{\Delta v_x}{v_x}\right)$$

En efecto,

$$\Delta \log v_x = \log v_{x+h} - \log v_x$$

$$\Delta \log v_x = \log \frac{v_{x+h}}{v_x} \qquad \text{(X)}$$

Y, también,

$$\Delta \log v_x = \log \frac{v_x + \Delta v_x}{v_x}$$

$$\Delta \log v_x = \log\left(1 + \frac{\Delta v_x}{v_x}\right) \qquad \text{(X a)}$$

[12]. *Diferencia de un factorial.*

Sea

$$u_x = x(x-1)(x-2)\ldots(x-m+1)$$

que se acostumbra a simbolizar por $x^{(m)}$ y se designa usualmente con el nombre de *factorial.*

Las diferencias entre los distintos factores son constantemente iguales a *uno.* Luego, aquí es $v_{x+h} = (x+1)^{(m)}$ y $h = 1$.

Por definición tenemos:

$$\Delta x^{(m)} = (x+1)^{(m)} - x^{(m)} =$$

$$= (x+1)x(x-1)(x-2)\ldots(x-m+2) - x(x-1)(x-2)\ldots(x-m+1) =$$

$$= [\,x+1-(x-m+1)\,]\,x(x-1)(x-2)\ldots(x-m+2)$$

$$\Delta x^{(m)} = m x^{(m-1)} \qquad \text{(XI)}$$

Diferenciando nuevamente y teniendo en cuenta que m es una constante y $x^{(m-1)}$ un factorial, queda

$$\Delta^2 x^{(m)} = m(m-1)x^{(m-2)}$$

Y, en general,

$$\Delta^n x^{(m)} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{(m-n)} \qquad \text{(XI } a\text{)}$$

[13]. *Diferencia de la recíproca de un factorial ascendente.* Sea

$$u_x = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+m-1)} = x^{(-m)}$$

Es

$$\Delta x^{(-m)} = (x+1)^{(-m)} - x^{(-m)} =$$

$$= \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+m)} - \frac{1}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+m-1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{x+m} - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+m-1)} =$$

$$= -m\frac{1}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+m)}$$

$$\Delta x^{(-m)} = -m\,x^{(\overline{-m+1})}$$

Del mismo modo

$$\Delta^2 x^{(-m)} = m(m+1)x^{(\overline{-m+2})}$$

$$\Delta^3 x^{(-m)} = -m(m+1)(m+2)x^{(\overline{-m+3})}$$

Y, en general,

$$\Delta^n x^{(-m)} = (-1)^n m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)x^{(\overline{-m+n})} \qquad \text{(XII)}$$

Tanto la (XI) como la (XII) subsisten aun cuando x no sea entero ni positivo desde que no se impuso previamente ninguna condición.

III

VALORES AUXILIARES

[14]. Vimos (XI) que

$$\Delta x^{(m)} = (x+1)^{(m)} - x^{(m)} = m\,x^{(m-1)}$$

$$(x+1)^{(m)} = m\,x^{(m-1)} + x^{(m)}$$

Dividiendo por $m!$ resulta

$$\frac{(x+1)^{(m)}}{m!} = \frac{x^{(m-1)}}{(m-1)!} + \frac{x^{(m)}}{m!}$$

o escrito en otra forma — si x es entero —

$$C_{x+1}^{m} = C_x^{m-1} + C_x^{m} \qquad \text{(XIII)}$$

relación que permite calcular, por simples sumas, un cuadro que dé el número de combinaciones que se pueden formar con 1, 2 ... n objetos tomando 1, 2, 3 ... n cada vez.

El cuadro que sigue da la disposición del cálculo.

$x=C_x^1$	C_x^2	C_x^3	C_x^4	C_x^5	C_x^6	C_x^7	C_x^8	C_x^9	C_x^{10}
0									
1	0								
2	1	0							
3	3	1	0						
4	6	4	1	0					
5	10	10	5	1	0				
6	15	20	15	6	1	0			
7	21	35	35	21	7	1	0		
8	28	56	70	56	28	8	1	0	
9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Como se ve, todas las columnas empiezan por *cero.*

Es que no pueden tomarse ni *dos* objetos *tres a tres,* ni *siete* objetos *ocho a ocho,* ... En seguida sigue el *uno* que corresponde a la combinación única que se forma tomando *todos* los objetos a la vez.

Para las demás cantidades se emplea ya, directamente, la fórmula hallada.

Así

$$\begin{aligned} C_8^7 &= C_7^6 + C_7^7 = 7 + 1 = 8 \\ C_9^7 &= C_8^6 + C_8^7 = 28 + 8 = 36 \\ C_{10}^7 &= C_9^6 + C_9^7 = 84 + 36 = 120 \end{aligned}$$

. . . .

En cada línea horizontal tenemos los coeficientes del desarrollo del binomio $(a+b)^x$, con excepción del uno inicial que corresponde al término a^x, primero del desarrollo.

Observación. Lo mismo que la (XI) y la (XII), la (XIII) vale aunque x no sea entero ni positivo. En tal caso, naturalmente, no es lícito hablar de *combinaciones*, sino de *coeficientes binomiales.* Y el símbolo C_n^m se reemplaza por este otro $\binom{n}{m}$ que se lee n sobre m.

La (XIII) se hace entonces — poniendo n en vez de x —

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m}. \qquad \text{(XIII } a\text{)}$$

CAPITULO II

LAS FÓRMULAS FUNDAMENTALES

I

CONDICIONES LIMITATIVAS

[15]. Al formar el cuadro de las diferencias de x^3 se halló que, a partir de las de cuarto orden, eran *nulas* todas las diferencias que se obtenían.

Y se demostró, después, [4], que cuando se diferencia un polinomio racional, entero y de grado n con respecto a x, se anulan todas las diferencias a partir de las de orden $n+1$

Puede ocurrir que, al diferenciar una función determinada, las diferencias vayan *decreciendo paulatinamente* —sin *anularse* del todo— hasta llegar a tomar un valor prácticamente desdeñable. En tal caso, y a los efectos de las aplicaciones que se verán en seguida, se puede *asimilar este caso al anterior* y *considerar como nulas* las diferencias a partir de un orden determinado.

Se comete, así, un error que puede estimarse, en cada caso, con suficiente precisión.

Mas puede, así mismo, ocurrir que las diferencias de los distintos órdenes *no tiendan* a desaparecer nunca.

Pueden ser las diferencias de orden k iguales a las de orden r, y estas a las de orden n, y así indefinidamente.

Y pueden, también, presentar una marcha creciente.

Sea, por ejemplo, la función ya estudiada en líneas generales,

$$u_x = a^x$$

Sus dintintas diferencias son:

$$(a^h - 1)a^x, \qquad (a^h - 1)^2 a^x \quad \ldots \quad (a^h - 1)^n a^x.$$

Si se hace $h = 1$ y $a = 2$, el factor $(a^h - 1)$ es igual a *uno*: todas sus potencias son, también, iguales a *uno*, y *todas* las diferencias iguales a a^x, es dedir, iguales a la función.

Pero, si es $a > 2$ — siendo $h \geqq 1$ — es $a^h - 1 > 1$ y, por lo tanto, $(a^h - 1)^r$ *aumenta* a la par de r: las diferencias se hacen cada vez mayores.

Naturalmente, para la utilización práctica del cálculo de las diferencias no tienen interés — ya se hizo notar — sino aquellas funciones cuyas diferencias *tienden a anularse*, ya se trate de funciones que obedezcan verdaderamente a cierta ley, o de simples series numéricas experimentales a las que se *puede considerar* como sometidas — dentro de un grado de aproximación aceptable — a una ley *empírica* más o menos explícitamente formulada.

II

RELACIONES BÁSICAS

[16]. Si se retoma el cuadro construído [1] al definir las diferencias, se ve que un término cualquiera de la función u_x es igual a un término de los que le preceden — tomado arbitrariamente como inicial — más la suma de todas las diferencias primeras intermedias.

En efecto

$$\begin{aligned} u_{x+h} &= u_x + \Delta u_x \\ u_{x+2h} &= u_{x+h} + \Delta u_{x+h} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{x+nh} &= u_{x+(n-1)h} + \Delta u_{x+(n-1)h} \end{aligned}$$

Y, sumando ordenadamente,

$$\begin{aligned} u_{x+nh} &= u_x + \Delta u_x + \Delta u_{x+h} + \ldots + \Delta u_{x+(n-1)h} = \\ &= u_x + \sum_{t=0}^{t=n-1} \Delta u_{x+th} \end{aligned} \qquad \text{(XIV)}$$

[17]. Pero, evidentemente, esa fórmula pocos servicios puede prestar. Lo interesante no es ir calculando fatigosamente todos los términos de la serie y reconstruir el último sumando las diferencias sucesivas de primer orden. Lo interesante es vincular los distintos términos de la serie de valores de la función a un grupo de cantidades fijas convenientemente elejidas.

Determinemos, pues, el valor de un término cualquiera, u_{x+nh}, de la serie en función del término *principal* y de las diferencias principales [2].

Se tiene, por definición,

$$\Delta u_x = u_{x+h} - u_x \qquad \therefore \qquad u_{x+h} = u_x + \Delta u_x$$

Análogamente

$$u_{x+2h} = u_{x+h} + \Delta u_{x+h} \qquad (\alpha)$$

y

$$\Delta u_{x+h} = \Delta u_x + \Delta^2 u_x$$

Reemplazando en (α) los dos términos del segundo miembro por sus valores, queda

$$u_{x+2h} = u_x + \Delta u_x + \Delta u_x + \Delta^2 u_x \qquad \therefore$$

$$u_{x+2h} = u_x + 2\Delta u_x + \Delta^2 u_x$$

Del mismo modo

$$\Delta u_{x+2h} = \Delta u_x + 2\Delta^2 u_x + \Delta^3 u_x$$

Y, como

$$u_{x+3h} = u_{x+2h} + \Delta u_{x+2h}$$

queda, reemplazando valores:

$$u_{x+3h} = u_x + 3\Delta u_x + 3\Delta^2 u_x + \Delta^3 u_x$$

Sin necesidad de seguir más adelante se ve ya surgir la fórmula general

$$u_{x+nh} = u_x + n\Delta u_x + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 u_x + \ldots + \Delta^n u_x \qquad \text{(XV)}$$

Para demostrarla basta probar que siendo cierta para n lo es también para $n+1$.

Se tiene, así:

$$\begin{aligned}
u_{x+(n+1)h} &= u_{x+nh} + \Delta u_{x+nh} = \\
&= u_x + n\Delta u_x + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 u_x + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 u_x + \ldots + \Delta^n u_x + \\
&\qquad + \Delta u_x + n\Delta^2 u_x + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^3 u_x + \ldots + n\Delta^n u_x + \Delta^{n+1} u_x = \\
&= u_x + (n+1)\Delta u_x + \left[\frac{n(n-1)}{2!} + n\right]\Delta^2 u_x + \\
&\qquad + \left[\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \frac{n(n-1)}{2!}\right]\Delta^3 u_x + \ldots + \Delta^{n+1} u_x
\end{aligned}$$

Pero (XIII)

$$\frac{n(n-1)}{2!} + n = C_n^2 + C_n^1 = C_{n+1}^2$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \frac{n(n-1)}{2!} = C_n^3 + C_n^2 = C_{n+1}^3$$

....

Es decir, que los coeficientes de los distintos términos de la fórmula hallada son las *combinaciones* de $n+1$ objetos tomados uno a uno; dos a dos; tres a tres; ... Luego, la fórmula (XV) es general.

Recuérdese la observación hecha en **[14]**.

[18]. Es dado, también, determinar el valor de la diferencia principal de *enésimo* orden mediante los valores de la función.

Se parte para ello de las relaciones

$$\Delta u_x = u_{x+h} - u_x$$

y

$$\Delta u_{x+h} = u_{x+2h} - u_{x+h}$$

que se llevan luego a la expresión

$$\Delta^2 u_x = \Delta u_{x+h} - \Delta u_x$$

$$\Delta^2 u_x = u_{x+2h} - 2\, u_{x+h} + u_x$$

Un proceso análogo al anterior — que se deja, como ejercicio, al lector — conduce a la fórmula general

$$\Delta^n u_x = u_{x+nh} - n\, u_{x+(n-1)h} + \frac{n(n-1)}{2!} u_{x+(n-2)h} - \dots + (-1)^n u_x \qquad \text{(XVI)}$$

III

SEPARACIÓN DE SÍMBOLOS

[19]. El símbolo de la diferenciación, Δ, es de carácter meramente *operatorio* y *no significa nada en realidad* sino cuando va unido a una función determinada.

Por eso, cuando se escribe Δ^2; Δ^3; Δ^n no se indica una *potencia*, sino simplemente la *repetición* de la operación indicada, cierto número de veces.

No obstante ello, se habrá visto que Δ *se presta* a ser manejado *como si se tratase* de un símbolo de cantidad, sin perder por eso su carácter.

Así, si en la fórmula (XV) se procede con u_x *como si fuera un factor común*, se tiene:

$$u_{x+nh} = \left[1 + n\Delta + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 + \ldots + \Delta^n\right] u_x$$

que se escribe, también,

$$u_{x+nh} = (1 + \Delta)^n u_x \tag{α}$$

puesto que la expresión encerrada en el corchete *se presenta tal y como si se tratara* del desarrollo de la potencia enésima de $1 + \Delta$.

Insistimos en que *no hay ni puede haber tales potencias* porque *no se trata de números* sino de *operaciones que se repiten*, pero una vez disipado de antemano todo equívoco, es, como lo vamos a ver en seguida, sumamente cómoda la convención que permite *tratar* como a cantidades numéricas los símbolos operatorios y que se designa con el nombre de «*separación de símbolos*».

[20]. Representemos, ahora, por E la operación que contrariamente a Δ, indica la *función incrementada*.

Es:

$$u_{x+h} = \mathrm{E}\, u_x = u_x + \Delta u_x = (1 + \Delta)\, u_x \tag{β}$$

La operación puede repetirse — lo mismo que la diferenciación — y se tiene entonces:

$$\begin{aligned} u_{x+2h} &= \mathrm{E}\, u_{x+h} = \mathrm{E}\mathrm{E}\, u_x = \mathrm{E}^2 u_x \\ u_{x+3h} &= \mathrm{E}\, u_{x+2h} = \mathrm{E}\mathrm{E}^2 u_x = \mathrm{E}^3 u_x \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{x+nh} &= \mathrm{E}\, u_{x(n-1)h} = \mathrm{E}\mathrm{E}^{n-1} u_x = \mathrm{E}^n u_x \end{aligned} \tag{γ}$$

Compárese (γ) con (α):

$$\mathrm{E}^n u_x = (1 + \Delta)^n u_x \tag{δ}$$

Se obtiene, en el acto,

$$\mathrm{E}^n = (1 + \Delta)^n \tag{XVII}$$

$$\mathrm{E} = 1 + \Delta \tag{XVIII}$$

$$\Delta = \mathrm{E} - 1 \tag{XIX}$$

y, también,

$$\Delta^n = (E - 1)^n \qquad \text{(XX)}$$

[21]. Se ha visto que aplicando la (XVII) a la función u_x se llega a la (XV). En realidad, hemos procedido á la inversa: hemos obtenido la (XVII) mediante la (XV).

Del mismo modo, aplicando a la función u_x la (XX) se cae en la (XVI)

$$\Delta^n u_x = (E - 1)^n u_x =$$
$$= \left[E^n - n\,E^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2\,!}E^{n-2} - \ldots + (-1)^n\right]u_x =$$
$$= E^n u_x - n\,E^{n-1}u_x + \frac{n(n-1)}{2\,!}E^{n-2}u_x - \ldots + (-1)^n u_x =$$
$$= u_{x+nh} - n\,u_{x+(n-1)h} + \frac{n(n-1)}{2\,!}u_{x+(n-2)h} - \ldots + (-1)^n u_x$$

[22]. Los símbolos Δ y E obedecen a las tres leyes que se ha convenido en llamar: *distributiva, conmutativa* y *de índices.*

Según la primera, diferenciar — o incrementar — una suma algebráica de funciones equivale a diferenciar — o incrementar — cada función por separado y sumar algebráicamente los resultados.

Según la segunda, diferenciar — o incrementar — una función afectada por una constante equivale a diferenciar —o incrementar— dicha función y multiplicar, luego, el resultado por la constante en cuestión.

Y, según la tercera, diferenciar — o incrementar — una función primero n veces y luego m veces más, equivale a diferenciarla o incrementarla $m + n$ veces.

[23]. Ya vimos [7] que la diferenciación es distributiva. Llegamos entonces a la expresión

$$\Delta(v_x \pm w_x) = \Delta v_x \pm \Delta w_x \qquad \text{(VI)}$$

Fácil es ver que la incrementación obedece a la misma ley. Sea

$$E(u_x + v_x \pm w_x) = u_x + v_x \pm w_x + \Delta u_x + \Delta v_x \pm \Delta w_x =$$
$$= (u_x + \Delta u_x) + (v_x + \Delta v_x) \pm (w_x + \Delta w_x) \quad \therefore$$
$$E(u_x + v_x \pm w_x) = E\,u_x + E v_x \pm E\,w_x \qquad \text{(XXI)}$$

[24]. Se vió también [5] que la diferenciación obedece, para las constantes, a la ley *conmutativa*:

$$\Delta a v_x = a \Delta v_x \tag{IV}$$

Del mismo modo se tiene, para la incrementación

$$E a u_x = a u_x + \Delta a u_x = a(u_x + \Delta u_x) \quad \therefore$$
$$E a u_x = a E u_x \tag{XXII}$$

[25]. En cuanto a la ley de índices, tanto en uno como en otro caso es fácil ver que se cumple:

$$\Delta^m u_x = [\Delta \; \Delta \; \Delta \ldots m \text{ veces}] \, u_x$$
$$\Delta^n \Delta^m u_x = [\Delta \; \Delta \; \Delta \ldots n \text{ veces}] \, [\Delta \; \Delta . \Delta \ldots m \text{ veces}] \, u_x =$$
$$= [\Delta . \Delta . \Delta \ldots (m + n) \text{ veces}] \, u_x \quad \therefore$$
$$\Delta^n \Delta^m u_x = \Delta^{m+n} u_x \tag{XXIII}$$

Por idéntico procedimiento se obtiene

$$E^n E^m u_x = E^{m+n} u_x \tag{XXIV}$$

CAPÍTULO III

LA FÓRMULA INTERPOLATORIA DE NEWTON

I

PRIMERAS APLICACIONES

[26]. La fórmula (XV)

$$u_{x+nh} = u_x + n\,\Delta\, u_x + \frac{n(n-1)}{2\,!}\Delta^2 u_x + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\,!}\Delta^3 u_x + \ldots + \Delta^n u_x$$

que se llama de NEWTON —por haber sido éste quién la creó— tiene múltiples aplicaciones. Veamos algunas.

Sea, por ejemplo,

$$u_x = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 5$$

Es una función racional, entera y de tercer grado con respecto a x. Sus terceras diferencias [4] son constantes y, por lo tanto, las diferencias de órdenes superiores son todas nulas.

Si se da a x, sucesivamente, los valores 0, 1, 2, 3, 4 ... con sólo los cuatro valores primeros se obtienen *todas* las diferencias principales

x	u_x				
0	5				
		1			
1	6		6		
		7		12	
2	13		18		0
		25		12	
3	38		30		
		55			
4	93				

Si ahora se quiere saber el valor que toma la función para $x=12$, basta aplicar la fórmula de NEWTON, haciendo en ella $x = 0$, $h = 1$, $n = 12$:

$$u = 5 + 12 \times 1 + \frac{12 \times 11}{2} \times 6 + \frac{12 \times 11 \times 10}{6} \times 12$$

$$= 5 + 12 + 396 + 2640 = 3053$$

[27]. Supongamos que se quiere *interpolar* un término entre los que ya se tienen, de la serie: el valor que toma la función para $x = 1{,}5$.

Basta aplicar la fórmula de NEWTON, como en el caso anterior, haciendo $n = 1{,}5$:

$$u_{1,5} = 5 + 1{,}5 \times 1 + \frac{1{,}5 \times 0{,}5}{2} \times 6 + \frac{1{,}5 \times 0.5 \times (-0{,}5)}{6} \times 12 =$$

$$= 5 + 1{,}5 + 2{,}25 - 0{,}75 = 8$$

Podía haberse tomado como valor inicial de x cualquier otro, en lugar de *cero*. Partiendo, por ejemplo de $x = 2$ se hubiera tenido, $n = -0{,}5$, desde que son $x + nh = 1{,}5$; $x = 1$ y $h = 1$

$$u_{1,5} = 13 - 0{,}5 \times 25 + \frac{-0{,}5(-1{,}5)}{2} \times 30 + \frac{-0{,}5(-1{,}5)(-2{,}5)}{6} \times 12 =$$

$$= 13 - 12{,}5 + 11{,}25 - 3{,}75 = 8.$$

Como ya se hizo notar [14], n puede ser fraccionario y negativo.

[28]. Si se da una serie de valores de una función —sin decir cual es— y se llega, formando las diferencias correspondientes, a la conclusión de que las diferencias de un orden dado son constantes, se puede determinar la forma de esa función.

Sean, por ejemplo, 2, 15, 52, 125 y 246 los valores que toma una función de x cuando es, sucesivamente, $x = 0$, 1, 2, 3, 4.

Formando el cuadro de diferencias, queda

0	2				
		13			
1	15		24		
		37		12	
2	52		36		0
		73		12	
3	125		48		
		121			
4	246				

Las diferencias terceras son constantes, luego la función es de la forma:

$$u_x = a x^3 + b x^2 + c x + d.$$

Hallemos las constantes, a, b, c y d.

Se puede plantear un sistema de ecuaciones dando a x sucesivamente los valores 0, 1, 2 y 3. Pero es más cómodo utilizar, también, las diferencias.

La tercera diferencia es (III)

$$3!\,a = 6\,a$$

y, como según el cuadro, es igual a 12,

$$6\,a = 12 \qquad \therefore \quad a = 2$$

Por otra parte, la función se hace igual a 2 para $x = 0$, luego, $d = 2$.

Llevando esos valores a la función y haciendo, sucesivamente $x = 1$, $x = 2$, queda:

$$2 + b + c + 2 = 15 \qquad \therefore \quad b + c = 11$$
$$2 \times 8 + 4b + 2c + 2 = 52 \qquad \therefore \quad 2b + c = 17$$
$$\therefore \quad b = 6, \quad c = 5$$

y la función es

$$u_x = 2x^3 + 6x^2 + 5x + 2$$

II

NUEVAS APLICACIONES

[29]. Los ejemplos dados hasta aquí contemplan el caso de funciones racionales, enteras y de grado n con respecto a x. Es decir, funciones cuyo valor se puede calcular *exactamente* para cualquier valor de x.

Pero, habitualmente, no es ese el caso. Se trata de funciones cuyas diferencias decrecen constantemente y *tienden hacia cero,* con mayor o menor rapidez, *pero no llegan nunca a anularse.*

Se puede llegar a resultados que se aproximen cada vez más a los verdaderos, pero siempre subsiste un error, tan pequeño como se quiera, que afecta solamente a las cifras decimales que se desdeñan, pero que no por ello deja de ser *inevitable.*

El error puede afectar la séptima cifra decimal y conservarse sólo *cinco* en el cálculo; las cinco cifras conservadas son *exactas*, pero no por ello deja de dar ese error la fórmula utilizada. Claro que, en tales circunstancias, el resultado es, *prácticamente exacto.*

[30]. Se quiere calcular el logaritmo de $\pi = 3{,}14159$, y se dan los de 3,14, 3,15, 3,16 y 3,17.

Con cuatro valores equidistantes se pueden utilizar las *terceras* diferencias, que *se suponen* constantes, o, mejor aún, que *se manejan como si lo fueran*

x	$\log x$	Δ	Δ^2	Δ^3
3,14	0,4969296			
		13810		
3,15	0,4983106		— 45	
		13765		+ 2
3,16	0,4996871		— 43	
		13722		
3,17	0,5010593			

Se prescinde, por *comodidad*, de indicar el rango decimal. Se toman *como unidades* las del séptimo orden después de la coma. Se toma, también, en el argumento, 314 —sin *coma decimal*— como valor inicial. La diferencia entre los argumentos es, así, igual a *uno*, y haciendo log 314, igual a u_x, el valor de nh correspondiente al logaritmo de π buscado es, 0,159. Luego,

$$u_{0,159} = 4969296 + 0{,}159 \times 13810 + \frac{0{,}159(0{,}159-1)}{2} \times (-45) +$$

$$+ \frac{0{,}159(0{,}159-1)(0{,}159-2)}{6} \times 2 = 4971495$$

$$\log \pi = 0{,}4971495.$$

Las siete cifras decimales conservadas son exactas.

Usando sólo las diferencias segundas hubiera resultado un error de *uno* en la última cifra decimal. Y usando el procedimiento común de las partes proporcionales —que equivale a no tomar en cuenta sino las diferencias primeras— dicho error hubiera subido hasta *cuatro.*

[31]. Cuando el término buscado forma con los que se dan una serie de valores equidistantes es preferible, a veces, utilizar la (XVI) que da el valor de la última diferencia en función de los distintos valores de la función. Supuesta nula dicha diferencia, tenemos, poniendo por brevedad $x = 0$ y $h = 1$

$$u_n - nu_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}u_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6}u_{n-3} + \dots + (-1)^n u_0 = 0$$

Así, para interpolar un término entre dos dados, tenemos

$$u_2 - 2u_1 + u_0 \qquad \therefore \quad u_1 = \frac{u_0 + u_2}{2}.$$

lo que nos da pura y simplemente la média aritmética.

Si los términos son cinco y queremos determinar el central, es — haciendo *nula* la cuarta diferencia —.

$$u_4 - 4u_3 + 6u_2 - 4u_1 + u_0 = 0 \qquad \therefore$$

$$u_2 = \frac{4(u_1 + u_3) - (u_0 + u_4)}{6}$$

Por ejemplo, sea hallar el logaritmo de 2,25 conocidos los de 2,23; 2,24; 2,26 y 2,27

$$\log 2{,}25 = \frac{4[\log 2{,}24 + \log 2{,}26] - [\log 2{,}23 + \log 2{,}27]}{6} =$$

$$= \frac{2.113093}{6} = 0{,}352182.$$

Las tablas dan 0,352183 por *exceso*: el error es inferior a una unidad del último órden conservado.

[32]. No es necesario que el término buscado sea el central.

Dados los valores de las rentas vitalicias, al 4 % con la tabla de mortalidad O^M, para las edades 26, 28, 29 y 30 años, se pide la que corresponde a 27 años.

Haciendo nula la cuarta diferencia, se tiene:

$$a_{30} - 4\,a_{29} + 6\,a_{28} - 4\,a_{27} + a_{26} = 0 \qquad \therefore$$

$$a_{27} = \frac{6\,a_{28} - 4\,a_{29} + a_{30} + a_{26}}{4}$$

$$a_{27} = \frac{6 \times 17{,}822 - 4 \times 17{,}637 + 17.447 + 18.181}{4} = 18{,}003$$

Las tablas dan: 18,004.

III

SUBDIVISIÓN DE INTERVALO

[33]. Si en la fórmula de Newton (XV)

$$u_{x+nh} = u_x + n\,\Delta\,u_x + \frac{n(n-1)}{2\,!}\Delta^2 u_x + \ldots + \Delta^n u_x$$

son $h = 1$ y $n = 1/m$, queda

$$u_{x+1/m} = u_x + \frac{1}{m}\Delta\,u_x + \frac{1}{2\,!}\frac{1}{m}\cdot\left(\frac{1}{m} - 1\right)\Delta^2 u_x + \ldots$$

que, utilizando el procedimiento de separación de símbolos, se puede escribir

$$u_{x+1/m} = \left[1 + \frac{1}{m}\Delta + \frac{1}{2\,!}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)\Delta^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3\,!}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)\left(\frac{1}{m} - 2\right)\Delta^3 + \ldots\right]u_x \qquad (\alpha)$$

Esa expresión representa el valor que toma la función cuando el argumento pasa de x a $x + 1/m$.

Simbolizando por $\Delta_1 u_x$; $\Delta_1{}^2 u_x$; $\Delta_1{}^3 u_x$ ... la serie de diferencias, de los distintos órdenes, que se obtendrían si se tuvieran tabulados los valores de la función correspondientes a los argumentos x; $x + 1/m$; $x + 2/m$; ... se puede escribir

$$u_{x+1/m} = u_x + \Delta_1 u_x = (1 + \Delta_1)\,u_x \qquad \therefore$$

por (α)

$$1 + \Delta_1 = 1 + \frac{1}{m}\Delta + \frac{1}{2\,!}\cdot\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)\Delta^2 +$$
$$+ \frac{1}{3\,!}\cdot\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)\left(\frac{1}{m} - 2\right)\Delta^3 + \ldots \qquad \text{(XXVI)}$$

$$1 + \Delta_1 = (1 + \Delta)^{1/m} \qquad (\text{XXVI } a)$$

[34]. Las fórmulas (XXVI) y (XXVI *a*) —esta última no es sino una forma abreviada de escribir la anterior— se usan para la operación que se llama *subdivisión de intervalos.*

Se tiene una función tabulada —y diferenciada— para una serie de valores del argumento, x, $x + h$, $x + 2h$... y se desea subdividir cada intervalo en m partes. La fórmula (XXVI) da los medios de calcular la serie de diferencias principales $\Delta_1 u_x$; $\Delta_1^2 u_x$; $\Delta_1^3 u_x \ldots$ que corresponden al nuevo intervalo.

La fórmula (XXVI) da, efectivamente, en el acto, la primera diferencia principal correspondiente al nuevo intervalo .

$$\Delta_1 = \frac{1}{m}\Delta + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)\Delta^2 + \frac{1}{6}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)\left(\frac{1}{m} - 2\right)\Delta^3 + \ldots \quad \text{(XXVII)}$$

En cuanto a las demás diferencias principales, basta recordar que

$$\Delta_1^2 = \Delta_1\,\Delta_1 = (\Delta_1)^2;\ \Delta_1^3 = \Delta_1\,\Delta_1^2 = (\Delta_1)^3;\ \Delta_1^4 = (\Delta_1^2)^2;\ \Delta_1^5 = \Delta_1^2\,\Delta_1^3;\ \ldots$$

Luego,

$$\Delta_1^2 = \left[\frac{1}{m}\Delta + \frac{1}{2}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)\Delta^2 + \frac{1}{6}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)\left(\frac{1}{m} - 2\right)\Delta^3 + \ldots\right]^2$$

$$\Delta_1^3 = \left[\frac{1}{m}\Delta + \frac{1}{2}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)\Delta^2 + \frac{1}{6}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)\left(\frac{1}{m} - 2\right)\Delta^3 + \ldots\right]^3$$

....

[35]. Una vez reducidos los términos semejantes se llega a los siguientes desarrollos, que detenemos en las diferencias de quinto orden

$$\Delta_1^2 = \frac{1}{m^2}\Delta^2 + \frac{1-m}{m^3}\Delta^3 + \frac{(1-m)(7-11m)}{12\,m^4}\Delta^4 + $$

$$+ \frac{(1-m)(1-2m)(3-5m)}{12m^5}\Delta^5 \quad \text{(XXVIII)}$$

$$\Delta_1^3 = \frac{1}{m^3}\Delta^3 + \frac{3(1-m)}{2m^4}\Delta^4 + \frac{(1-m)(5-7m)}{4m^5}\Delta^5 \quad \text{(XXIX)}$$

$$\Delta_1^4 = \frac{1}{m^4}\Delta^4 + \frac{2(1-m)}{m^5}\Delta^5 \quad \text{(XXX)}$$

$$\Delta_1^5 = \frac{1}{m^5}\Delta^5 \quad \text{(XXXI)}$$

[36]. Haciendo, sucesivamente, $m = 5$ y $m = 10$ resulta:

Para $m = 5$

$$\Delta_1 = \frac{1}{5}\Delta - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\Delta^2 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{5}\Delta^3 - \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{14}{5}\Delta^4 + \ldots$$

$$= 0{,}2\,\Delta - 0{,}08\,\Delta^2 + 0{,}048\,\Delta^3 - 0{,}0336\,\Delta^4 + 0{,}025536\,\Delta^5$$

$$\Delta_1^2 = 0{,}04\,\Delta^2 - 0{,}032\,\Delta^3 + 0{,}0256\,\Delta^4 - 0{,}02112\,\Delta^5$$
$$\Delta_1^3 = 0{,}008\,\Delta^3 - 0{,}0096\,\Delta^4 + 0{,}0096\,\Delta^5$$
$$\Delta_1^4 = 0{,}0016\,\Delta^4 - 0{,}00256\,\Delta^5$$
$$\Delta_1^5 = 0{,}00032\,\Delta^5$$

Para $m = 10$

$$\Delta_1 = 0{,}1\,\Delta - 0{,}045\,\Delta^2 + 0{,}0285\,\Delta^3 - 0{,}0206625\,\Delta^4 + 0{,}01611675\,\Delta^5$$
$$\Delta_1^2 = 0{,}01\,\Delta^2 - 0{,}009\,\Delta^3 + 0{,}007725\,\Delta^4 - 0{,}0066975\,\Delta^5$$
$$\Delta_1^3 = 0{,}001\,\Delta^3 - 0{,}00135\,\Delta^4 + 0{,}0014625\,\Delta^5$$
$$\Delta_1^4 = 0{,}0001\,\Delta^4 - 0{,}00018\,\Delta^5$$
$$\Delta_1^5 = 0{,}00001\,\Delta^5$$

[37]. Es cómodo tener a la vista los coeficientes que acabamos de calcular. Por eso los reunimos en los cuadros que siguen.

Subdivisión del intervalo en cinco partes

Para	Coeficientes de:				
	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
Δ_1	+ 0,2	— 0,08	+0,048	— 0,0336	+ 0,025536
Δ_1^2		+ 0,04	—0,032	+0,0256	— 0,02112
Δ_1^3			+0,008	— 0,0096	+ 0,0096
Δ_1^4				+0,0016	— 0,00256
Δ_1^5					+ 0,00032

Subdivisión del intervalo en diez partes

Para	Coeficientes de:				
	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
Δ_1	+ 0,1	—0,045	+0,0285	—0,0206625	+0,01611675
Δ_1^2		+0,01	—0,009	+0,007725	—0,0066975
Δ_1^3			+0,001	—0,00135	+0,0014625
Δ_1^4				+0,0001	—0,00018
Δ_1^5					+0,00001

[38]. Sea, por ejemplo, calcular los logaritmos de los números 1500 a 1510, conocidos los de 150, 151, 152, 153 y 154.

Se forma el siguiente cuadro de diferencias

x	$u_x = \log x$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
150	176091259				
		2885688			
151	178976947		— 19047		
		2866641		249	
152	181843588		— 18798		— 4
		2847843		245	
153	184691431		— 18553		
		2829290			
154	187520721				

$$\Delta_1^4 = 0{,}0001\,\Delta^4 = -0{,}0^3 1 \times 0{,}0^8 4 = -0{,}0^{12} 4$$

Es decir, 4 en el *décimo tercer* lugar después de la coma. Prácticamente cero. Calculemos Δ_1^3

$$\Delta_1^3 = 0{,}001\,\Delta^3 - 0{,}00135\,\Delta^4 \simeq 0{,}0^9 25$$

$$\Delta_1^2 = 0{,}01\,\Delta^2 - 0{,}009\,\Delta^3 + 0{,}007725\,\Delta^4 = -0{,}0^6 1927419$$

$$\Delta_1 = 0{,}1\,\Delta - 0{,}045\,\Delta^2 + 0{,}0285\,\Delta^3 - 0{,}0206625\,\Delta^4 = 0{,}0^3 2894331$$

Y, ahora, se construye el cuadro tomando como *unidades* las correspondientes al *noveno* orden decimal.

Se halla, así, para $\log 1510$, una mantisa igual a 1789769467 con una diferencia de sólo tres unidades del *décimo* orden decimal respecto a la que se nos dió.

El resultado no puede ser más satisfactorio.

x	$\log x$	Δ_1	$\Delta_1{}^2$	$\Delta_2{}^3$
1500	176091259,0			
		289433,1		
1	176380692,1		−192,74	
		289240,4		0,25
2	176669932,5		−192,49	
		289047,9		0,25
3	176958980,4		−192,24	
		288855,6		0,25
4	177247836,0		−191,99	
		288663,6		0,25
5	177536499,6		−191,74	
		288471,9		0,25
6	177824971,5		−191,49	
		288280,4		0,25
7	178113251,9		−191,24	
		288089,2		0,25
8	178401341,1		−190,99	
		287898,2		0,25
9	178689239,3		−190,74	
		287707,4		
1510	178976946,7			

CAPITULO IV

DIFERENCIAS DIVIDIDAS

I

DEFINICIÓN

[39]. Si es $f(x)$ una función de x de la cual se conocen los valores $f(x_0)$, $f(x_1)$ ... $f(x_r)$ correspondientes a los valores del argumento $x_0, x_1, \ldots x_r$ que *no están en progresión aritmética*, ya no es posible utilizar las fórmulas de las diferencias finitas que conocemos.

Hay que recurrir a una nueva categoría de diferencias que se llaman *diferencias divididas.*

Si son, como ya se dijo, x_0, x_1, x_2 ... x_r los valores sucesivos del argumento, a los que corresponden los valores $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$ ... $f(x_r)$ de la función, se llaman diferencias *divididas primeras* a los cocientes

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(x_{r-1}, x_r) = \frac{f(x_r) - f(x_{r-1})}{x_r - x_{r-1}} = \frac{f(x_{r-1}) - f(x_r)}{x_{r-1} - x_r}$$

que se obtienen dividiendo la diferencia entre dos valores consecutivos de la función por el *intervalo* respectivo, es decir, por la diferencia entre los respectivos valores del argumento.

Del mismo modo se forman las *segundas diferencias dividas*: dividiendo la diferencia entre dos diferencias primeras consecutivas, por la diferencia entre los dos valores *más distantes* del argumento que se toman en cuenta

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_0, x_1) - f(x_1, x_2)}{x_0 - x_2} = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$$

. . . .

$$f(x_{r-2}, x_{r-1}, x_r) = \frac{f(x_{r-2}, x_{r-1}) - f(x_{r-1}, x_r)}{x_{r-2} - x_r} = \frac{f(x_{r-1}, x_r) - f(x_{r-2}, x_{r-1})}{x_r - x_{r-2}}$$

Y, de un modo análogo, se forman las diferencias de tercero, de cuarto, de quinto, ... orden.

[40]. Se advertirá que es indiferente *el orden* en que se han de restar los valores de la función — o de la diferencia de que se trate — para formar la diferencia del orden inmediato. Basta, en efecto, que los valores del argumento se resten en el mismo sentido para que el resultado no varíe.

II

PROPIEDADES DE LAS DIFERENCIAS DIVIDIDAS

[41]. Una diferencia, de un orden cualquiera, puede ponerse bajo la forma

$$f(x_0, x_1, \ldots x_r) = \sum_{k=0}^{k=r} \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_r)} \qquad \text{(XXXII)}$$

donde el producto:

$$(x_k - x_0)(x_k - x_1) \ \ldots \ (x_k - x_r)$$

consta de sólo r factores, pues se ha de prescindir, en cada caso, del factor $x_k - x_k$ que *anularía* todo el denominador. Téngase bien presente esta observación en lo que sigue.

Para las diferencias de primer orden la comprobación es inmediata

$$f(x_0\, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} + \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

Si se trata de una diferencia de segundo orden se tiene:

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_0, x_1) - f(x_1, x_2)}{x_0 - x_2} = \frac{1}{x_0 - x_2} [\, f(x_0, x_1) - f(x_1, x_2) \,]$$

Y, reemplazando las diferencias de primer orden por sus valores, de acuerdo con el resultado obtenido más arriba,

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{1}{x_0 - x_2}\left[\frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} - \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} - \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1}\right] =$$

$$= \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_0-x_2)} -$$

$$- \frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)(x_0-x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Pero

$$\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_0-x_2)} - \frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)(x_0-x_2)} = \frac{f(x_1)[x_1-x_2-x_1+x_0]}{(x_0-x_2)(x_1-x_0)(x_1-x_2)} =$$

$$= \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

Luego, también, es:

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Dado el caracter de sumandos que tienen los elementos de la expresión, y la forma simétrica de los denominadores, *es indiferente el orden de colocación de los sumandos en la fórmula y el de los factores en cada denominador.*

Comprobada la fórmula para las diferencias de primero y segundo orden, se demuestra su generalidad con sólo probar que, siendo cierta para las diferencias de un orden dado, r, lo es, también, para las de orden $r+1$

$$f(x_0, x_1, \ldots x_{r+1}) = \frac{f(x_0, x_1, \ldots x_r) - f(x_1, x_2 \ldots x_{r+1})}{x_0 - x_{r+1}} =$$

$$= \frac{1}{x_0 - x_{r+1}}\left[\sum_0^r \frac{f(x_k)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_r)} -\right.$$

$$\left. - \sum_1^{r+1} \frac{f(x_k)}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\ldots(x_k-x_{r+1})}\right]$$

[Recuérdese que *siempre* está excluído del denominador el factor $x_k - x_k$ que lo anularía].

Se opera, ahora, con un par de términos cualquiera —uno de cada sumatorio— que tengan el mismo numerador, $f(x_k)$. Resulta:

$$\frac{1}{x_0-x_{r+1}}\left[\frac{f(x_k)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_r)}-\right.$$

$$\left.-\frac{f(x_k)}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\dots(x_k-x_{r+1})}\right]=$$

$$=\frac{1}{x_0-x_{r+1}}\cdot\frac{f(x_k)\,[x_k-x_{r+1}-x_k+x_0]}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{r+1})}=$$

$$=\frac{f(x_k)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{r+1})}$$

Como el resultado vale para todos los pares de términos de los sumatorios, la proposición está demostrada.

$$f(x_0,x_1,x_2\dots x_{r+1})=\sum_{k=0}^{k=r+1}\frac{f(x_k)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{r+1})}\qquad\text{(XXXII)}$$

[42]. Si una función es la suma algebráica de varias funciones, sus diferencias divididas se obtienen sumando algebráicamente las diferencias divididas de dichas funciones.

Sea

$$f(x)=\varphi(x)+\Phi(x)-\Theta(x)$$

resulta

$$f(x_0,x_1)=\varphi(x_0,x_1)+\Phi(x_0,x_1)-\Theta(x_0,x_1)\qquad\text{(XXXIII)}$$

En efecto, la primera diferencia es:

$$f(x_0,x_1)=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}=\frac{\varphi(x_0)+\Phi(x_0)-\Theta(x_0)-\varphi(x_1)-\Phi(x_1)+\Theta(x_1)}{x_0-x_1}=$$

$$=\frac{\varphi(x_0)-\varphi(x_1)}{x_0-x_1}+\frac{\Phi(x_0)-\Phi(x_1)}{x_0-x_1}-\frac{\Theta(x_0)-\Theta(x_1)}{x_0-x_1}=$$

$$=\varphi(x_0,x_1)+\Phi(x_0,x_1)-\Theta(x_0,x_1)$$

Lo mismo se obtienen las diferencias sucesivas.

[43]. Si una función está multiplicada por una constante, las diferencias de ese producto se obtienen diferenciando la función y multiplicando estas diferencias por la constante.

Es decir, que si es

$$f(x) = k\,\varphi(x)$$

es, también,

$$f(x_0, x_1) = k\,\varphi(x_0, x_1) \tag{XXXIV}$$

En efecto,

$$f(x_0, x_1) = \frac{k\,\varphi(x_0) - k\,\varphi(x_1)}{x_0 - x_1} = k\frac{\varphi(x_0) - \varphi(x_1)}{x_0 - x_1} =$$

$$= k\,\varphi(x_0, x_1)$$

Y así sucesivamente.

[44]. Si es

$$f(x) = x^n$$

la diferencia dividida de orden r^{mo} es de grado $n - r$.

En efecto, al dividir $x_0{}^n - x_1{}^n$ por $x_0 - x_1$ se reduce en *uno* el grado de la función. Y al dividir r veces sucesivamente, se reduce el grado en r; luego, la función se hace de grado $n - r$.

Cuando es $r = n$, —cuando se ha diferenciado n veces— la diferencia se hace de grado *cero*: es una constante. Las diferencias que siguen son, por lo tanto, nulas.

[45]. Si es $f(x)$ un polinomio entero en x y de grado n, la diferencia de orden r es de grado $n - r$; la de orden n, es constante, y son *nulas* todas las de órdenes superiores a n.

Esta propiedad no es sino una consecuencia de las tres anteriores.

Un polinomio es una suma de funciones [42].

Cada término del polinomio es el producto de una potencia de x por una constante [43].

Y si su término de grado más elevado es de la forma Ax^n, su diferencia de orden r [44] es de grado $n - r$; su diferencia de orden n es de grado $n - n = 0$, o sea una constante. Son, por lo tanto, nulas las diferencias de orden $n + 1$, $n + 2$, ...

[46]. Al hacer el cuadro de la función y de sus diferencias, el modo de ordenar los argumentos no afecta a los resultados, toda vez que se tiene (XXXII)

$$f(x_0, x_1 \ldots x_r) = \sum_{k=0}^{k=r} \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_r)}$$

Nótese el *paralelismo* que existe entre las propiedades establecidas para las diferencias *equidistantes* en [5], [7] y [4] y las demostradas, ahora, para las diferencias *divididas* en [43], [42] y [45]. En realidad las diferencias *equidistantes* no son sino un caso particular de las *divididas*. Basta, en efecto, hacer en estas

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = h$$

para caer en aquellas.

[47]. Puede ocurrir que las diferencias de $f(x)$ no lleguen *nunca* a anularse. En tal caso, al tomar como constante la diferencia de orden r se comete un error. Pero, si las diferencias decrecen con suficiente rapidez, puede elegirse r de tal manera que dicho error tienda hacia *cero*. Téngase por repetido, aquí, lo que se dijo en [15].

III

FÓRMULA INTERPOLATORIA DE NEWTON, O DE NEWTON - STIRLING

[48]. Y es el caso de emplear la fórmula interpolatoria de NEWTON, o de NEWTON - STIRLING, que vamos a determinar en seguida.

Sean, en efecto, constantes, las diferencias de orden r, se puede, entonces, substituir en cualquiera de ellas el valor del argumento x_r — para el cual se tiene ya calculado el de la función — por x, valor del argumento para el que se busca el de la función.

Y se tiene — recordando que el órden de los argumentos es indiferente —

$$f(x, x_0, x_1 \ldots x_{r-1}) = f(x_0, x_1, x_2 \ldots x_r) = \text{constante}.$$

Pero, por definición, es

$$f(x, x_0, x_1 \ldots x_{r-1}) = \frac{f(x, x_0, x_1 \ldots x_{r-2}) - f(x_0, x_1 \ldots x_{r-1})}{x - x_{r-1}} \quad \therefore$$

$$f(x, x_0, x_1 \ldots x_{r-2}) = f(x_0, x_1, \ldots x_{r-1}) + (x - x_{r-1}) f(x, x_0, x_1 \ldots x_{r-1})$$

Análogamente se deduce

$$f(x, x_0, x_1 \ldots x_{r-3}) = f(x_0, x_1, x_2 \ldots x_{r-2}) + (x - x_{r-2}) f(x, x_0, x_1 \ldots x_{r-2})$$
$$f(x, x_0, x_1 \ldots x_{r-4}) = f(x_0, x_1, x_2 \ldots x_{r-3}) + (x - x_{r-3}) f(x, x_0, x_1 \ldots x_{r-3})$$

. . . .

$$f(x, x_0, x_1) = f(x_0, x_1, x_2) + (x - x_2) f(x, x_0, x_1, x_2)$$
$$f(x, x_0) = f(x_0, x_1) + (x - x_1) f(x, x_0, x_1)$$
$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x, x_0)$$

Ahora, mediante substituciones sucesivas se obtiene:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + (x - x_0) f(x, x_0) = \\
&= f(x_0) + (x - x_0)\,[\,f(x_0, x_1) + (x - x_1) f(x, x_0, x_1)\,] = \\
&= f(x_0) + (x - x_0)\,\{\, f(x_0, x_1) + (x - x_1)\,[f(x_0, x_1, x_2) + \\
&\qquad + (x - x_2) f(x, x_0, x_1, x_2)]\,\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(x_0) &+ (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + \\
&+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f(x_0, x_1, x_2, x_3) + \dots + \\
&+ (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{r-1}) f(x_0, x_1, x_2 \dots x_r) \qquad \text{(XXXV)}
\end{aligned}
$$

Es la fórmula de NEWTON-STIRLING.

[49]. Si la última diferencia considerada no es constante, se comete un error al tomar

$$f(x, x_0, x_1, \dots x_{r-1}) \doteq f(x_0, x_1 \dots x_r)$$

Fácil es ver que ese error tiende hacia cero cuando las diferencias de la serie a interpolar decrecen con suficiente rapidez.

[50]. Sea la serie:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 5 & f(x_0) &= 150 \\
x_1 &= 7 & f(x_1) &= 392 \\
x_2 &= 11 & f(x_2) &= 1452 \\
x_3 &= 13 & f(x_3) &= 2366 \\
x_4 &= 21 & f(x_4) &= 9702
\end{aligned}
$$

Calculemos las distintas diferencias:

$$f(x_0, x_1) = \frac{392 - 150}{7 - 5} = 121; \qquad f(x_1, x_2) = \frac{1452 - 392}{11 - 7} = 265$$

$$f(x_2, x_3) = \frac{2366 - 1452}{13 - 11} = 457; \qquad f(x_3, x_4) = \frac{9702 - 2366}{21 - 13} = 917$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{265 - 121}{11 - 5} = 24; \qquad f(x_1, x_2, x_3) = \frac{457 - 265}{13 - 7} = 32$$

$$f(x_2, x_3, x_4) = \frac{917 - 457}{21 - 11} = 46$$

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{32 - 24}{13 - 5} = 1; \qquad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{46 - 32}{21 - 7} = 1$$

Y las diferencias cuartas son nulas.

Formemos el cuadro de diferencias

x	$f(x)$	$f\,1$	$f\,2$	$f\,3$	$f\,4$
5	150				
		121			
7	392		24		
		265		1	
11	1452		32		0
		457		1	
13	2366		46		
		917			
21	9702				

Sea $x = 6{,}417$

$$f(x) = f(5) + (6{,}417 - 5)\,f(5,7) + (6{,}417 - 5)(6{,}417 - 7)\,f(5,7,11) + \\ + (6{,}417 - 5)(6{,}417 - 7)(6{,}417 - 11)\,f(5,\,7,\,11,\,13)$$

Es inutil seguir más adelante porque la siguiente diferencia es nula.

$$f(6{,}417) = 150 + 1{,}417 \times 121 - 1{,}417 \times 0{,}583 \times 24 + \\ + 1{,}417 \times 0{,}583 \times 4{,}583 = 305{,}416402713$$

[51]. Puede, también, disponerse el cálculo de otro modo. La fórmula —ya lo hemos visto— puede escribirse

$$f(x) = (f x_0) + (x - x_0) \left\{ f(x_0, x_1) + (x - x_1) \left[f(x_0, x_1, x_2) + \right.\right. \\ \left.\left. + (x - x_2)(\ldots) \right] + \ldots \right\} \qquad \text{(XXXVI)}$$

Llamemos, respectivamente, v_1, v_2, v_3 ... v_r a cada uno de los paréntesis.

Se tiene:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)\,v_1 \\ v_1 &= f(x_0, x_1) + (x - x_1)\,v_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_r &= f(x_0, x_1 \ldots x_r) = \text{constante.} \end{aligned}$$

En el caso presente son:

$$\begin{aligned} & v_3 = 1 = \text{constante} \\ & v_2 = f(x_0, x_1, x_2) + (x - x_2)\,v_3 = 24 + (6{,}417 - 11) = 19{,}417 \\ & v_1 = f(x_0, x_1) + (x - x_1)v_2 = 121 + (6{,}417 - 7) \times 19{,}417 = 109{,}679889 \\ & f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\,v_1 = 150 + 1{,}417 \times \\ & \qquad \times 109{,}679889 = 305{,}416402713 \end{aligned}$$

[52.] Se puede comprobar el cálculo determinando la diferencia tercera, mediante la fórmula

$$f(x_0, x_1, \dots x_r) = \Sigma \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_r)}.$$

En este caso es

$$f(5, 7, 11, 13) = 1 = \frac{150}{(5-7)(5-11)(5-13)} + \frac{392}{(7-5)(7-11)(7-13)} +$$

$$+ \frac{1452}{(11-5)(11-7)(11-13)} + \frac{2366}{(13-5)(13-7)(13-11)} =$$

$$= -\frac{150}{2 \times 6 \times 8} + \frac{392}{2 \times 4 \times 6} - \frac{1452}{6 \times 4 \times 2} + \frac{2366}{8 \times 6 \times 2} = 1$$

[53]. Para $x = 10$, se tiene:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) +$$

$$+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f(x_0, x_1, x_2, x_3) =$$

$$= 150 + 5 \times 121 + 5 \times 3 \times 24 - 5 \times 3 \times 1 \times 1 = 1100$$

IV

LA FÓRMULA DE LAGRANGE

[54]. De la fórmula de NEWTON - STIRLING se deduce, fácilmente, la de LAGRANGE, a la que se llega, también, por otros procedimientos.

Si la n^{ma} diferencia dividida es constante, la $n+1^{ma}$ es nula. Si son $x_0, x_1, x_2 \dots x_n$ los valores del argumento para los cuales conocemos los correspondientes valores de la función, y x el valor del argumento para el cual nos falta el de la función, se tiene

$$f(x, x_0, x_1 \dots x_n) = 0 = \Sigma \frac{f(x_k)}{(x_k - x)(x_k - x_0) \dots (x_k - x_n)}$$

donde x_k toma, sucesivamente, los valores $x, x_0, x_1 \dots x_n$. Luego,

$$0 = \frac{f(x)}{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)} + \frac{f(x_0)}{(x_0 - x)(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} +$$

$$+ \dots + \frac{f(x_n)}{(x_n - x)(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})}$$

$$-\frac{f(x)}{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}=\frac{f(x_0)}{(x_0-x)(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}+$$
$$+\frac{f(x_1)}{(x_1-x)(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}+\dots+$$
$$+\frac{f(x_n)}{(x_n-x)(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}$$

Cambiando en el denominador, en cada término del segundo miembro, (x_k-x) por $(x-x_k)$ se obtiene, en él acto, la fórmula buscada

$$\frac{f(x)}{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}=\frac{f(x_0)}{(x-x_0)(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}+$$
$$+\frac{f(x_1)}{(x-x_1)(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}+\dots+$$
$$+\frac{f(x_n)}{(x-x_n)(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}$$

$$f(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}f(x_0)+$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}f(x_1)+$$
$$+\dots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}f(x_n) \qquad \text{(XXXVII)}$$

[55]. Apliquémosla al ejemplo anterior.

Como la primera diferencia que se anula es la *cuarta*, queda:

$$x_0=5\,;\ x_1=7\,;\ x_2=11\,;\ x_3=13\,;\ x=10$$
$$f(x_0)=150\,;\ f(x_1)=392\,;\ f(x_2)=1452\,;\ f(x_3)=2366$$

Y, llevando esos valores a la fórmula,

$$f(10)=\frac{(10-7)(10-11)(10-13)}{(5-7)(5-11)(5-13)}\times 150+$$
$$+\frac{(10-5\ (10-11)(10-13)}{(7-5)(7-11)(7-13)}\times 392+$$
$$+\frac{(10-5)(10-7)(10-13)}{(11-5)(11-7)(11-13)}\times 1452+$$
$$+\frac{(10-5)(10-7)(10-11)}{(13-5)(13-7)(13-11)}\times 2366=1100.$$

CAPITULO V

DIFERENCIAS CENTRALES

I

DEFINICIÓN

[56]. Al interpolar una función cualquiera mediante la fórmula usual de las diferencias finitas

$$u_{x+nh} = u_x + n\,\Delta u_x + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 u_x + \ldots + \Delta^n u_x \qquad \text{(XV)}$$

se toman en cuenta términos tanto más alejados del valor particular que se busca de la función, cuanto más elevado es el último orden de diferencias utilizado.

Si la función es entera en x, de grado n, y se toman en cuenta las diferencias de *enésimo* orden, los resultados obtenidos son siempre exactos, y la observación que se acaba de hacer, carece de importancia. Pero si —como ocurre usualmente— se trata de una función *empírica*, en la cual las diferencias del último orden conservado no *son* constantes, aunque se las considere como tales —dentro de un campo, naturalmente, restringido— al aplicar la fórmula *se comete siempre un error*, que, no por estar descontado de antemano y ser más o menos desdeñable, debe perderse de vista. Ese error claro está, depende del valor de las diferencias que —tenidas por nulas— han sido desdeñadas, y, por lo tanto, de la *posición* en el cuadro de diferencias, de las *diferencias principales* utilizadas. Y no hay duda de que, cuanto más lejos estén dichas diferencias del valor que se busca, tanto mayor será el error cometido.

Para reducir este error, en lo posible, conviene utilizar diferencias *tan próximas como sea dable* al valor buscado. Han surgido, así, las llamadas *diferencias centrales*.

[57]. Formemos el cuadro usual de diferencias, pero representando por x un valor *central* del argumento. Los que le antecedan, en

orden ascendente, serán, pues, $x-h$; $x-2h\ldots$ El cuadro toma la forma:

$$
\begin{array}{lllllll}
x-3h & u_{x-3h} & & & & & \\
 & & \Delta u_{x-3h} & & & & \\
x-2h & u_{x-2h} & & \Delta^2 u_{x-3h} & & & \\
 & & \Delta u_{x-2h} & & \Delta^3 u_{x-3h} & & \\
x-h & u_{x-h} & & \Delta^2 u_{x-2h} & & \Delta^4 u_{x-3h} & \\
 & & \Delta u_{x-h} & & \Delta^3 u_{x-2h} & & \Delta^5 u_{x-3h} \\
x & u_x & & \Delta^2 u_{x-h} & & \Delta^4 u_{x-2h} & \\
 & & \Delta u_x & & \Delta^3 u_{x-h} & & \Delta^5 u_{x-2h} \\
x+h & u_{x+h} & & \Delta^2 u_x & & \Delta^4 u_{x-h} & \\
 & & \Delta u_{x+h} & & \Delta^3 u_x & & \\
x+2h & u_{x+2h} & & \Delta^2 u_{x+h} & & & \\
 & & \Delta u_{x+2h} & & & & \\
x+3h & u_{x+3h} & & & & &
\end{array}
$$

Si, ahora, representamos *esas mismas* diferencias por el símbolo δ, y damos a u un subíndice igual a la semisuma de los subíndices de la función —o diferencia del orden precedente— cuya diferencia indica, resulta:

$$
\begin{array}{lllll}
\Delta u_{x-h} & = u_x & - u_{x-h} & = \delta u_{x-h/2} \\
\Delta u_x & = u_{x+h} & - u_x & = \delta u_{x+h/2} \\
\Delta u_{x+h} & = u_{x+2h} & - u_{x+h} & = \delta u_{x+3h/2} \\
\ldots\ldots & & &
\end{array}
$$

Del mismo modo se tiene,

$$
\begin{array}{llll}
\Delta^2 u_{x-h} = \Delta u_x - \Delta u_{x-h} & = \delta u_{x+h/2} & - \delta u_{x-h/2} & = \delta^2 u_x \\
\Delta^2 u_x = \Delta u_{x+h} - \Delta u_x & = \delta u_{x+3h/2} & - \delta u_{x+h/2} & = \delta^2 u_{x+h} \\
\Delta^3 u_{x-h} = \Delta^2 u_x - \Delta^2 u_{x-h} & = \delta^2 u_{x+h} & - \delta^2 u_x & = \delta^3 u_{x+h/2} \\
\ldots\ldots & & &
\end{array}
$$

[58]. Rehagamos el cuadro con la nueva notación

$$
\begin{array}{llllllll}
x-3h & u_{x-3h} & & & & & & \\
 & & \delta u_{x-5h/2} & & & & & \\
x-2h & u_{x-2h} & & \delta^2 u_{x-2h} & & & & \\
 & & \delta u_{x-3h/2} & & \delta^3 u_{x-3h/2} & & & \\
x-h & u_{x-h} & & \delta^2 u_{x-h} & & \delta^4 u_{x-h} & & \\
 & & \delta u_{x-h/2} & & \delta^3 u_{x-h/2} & & \delta^5 u_{x-h/2} & \\
x & u_x & & \delta^2 u_x & & \delta^4 u_x & & \delta^6 u_x \\
 & & \delta u_{x+h/2} & & \delta^3 u_{x+h/2} & & \delta^5 n_{x+h/2} & \\
x+h & u_{x+h} & & \delta^2 u_{x+h} & & \delta^4 u_{x+h} & & \\
 & & \delta u_{x+3h/2} & & \delta^3 u_{x+3h/2} & & & \\
x+2h & u_{x+2h} & & \delta^2 u_{x+2h} & & & & \\
 & & \delta u_{x+5h/2} & & & & & \\
x+3h & u_{x+3h} & & & & & &
\end{array}
$$

Se ve, ahora, que:

a) Las diferencias de orden *impar* tienen subíndices *fraccionarios*.

b) Las diferencias de orden *par* tienen subíndices enteros — con respecto a h, por supuesto.

c) Las diferencias situadas sobre una misma línea horizontal tienen *todas* el mismo subíndice.

Las de orden par están en la misma línea que la función, cuyo subíndice llevan: u_{x-2h}; $\delta^2 u_{x-2h}$; ...

Las de orden impar están sobre la línea que pasa entre dos funciones dadas: $\delta u_{x+h/2}$; $\delta^3 u_{x+h/2}$; ...

d) Los subíndices de la función y de las diferencias principales — o *que por tales se toman* — crecen de $h/2$ en $h/2$

Luego, la diferencia de orden $2n$, que se escribe $\delta^{2n} u_x$, proviene de un valor del argumento distante $2n/2 = n$ intervalos del valor x, frente al cual está la diferencia. La función principal correspondiente es u_{x-nh}.

[59]. Por consiguiente, se puede escribir,

$$\delta^{2n} u_x = \Delta^{2n} u_{x-nh} \qquad \text{(XXXVIII)}$$

La diferencia que sigue, $\delta^{2n+1} u_{x+h/2}$ corresponde a la misma función principal; por lo tanto:

$$\delta^{2n+1} u_{x+h/2} = \Delta^{2n+1} u_{x-nh} \qquad \text{(XXXVIII } a\text{)}$$

[60]. De lo expuesto se deduce que las diferencias *centrales*, de un orden cualquiera, m, *llevan, sobre la distancia del valor principal del argumento al tomado como central*, un aumento en el subíndice de $m/2$.

Hagamos, para simplificar la escritura, $x = 0$ y $h = 1$. Si el valor *central* es, por ejemplo, menor en 7 unidades que el *principal*, la diferencia sexta, con respecto a éste es, en la notación general, $\Delta^6 u_{-7}$. Empleando diferencias centrales, se tiene:

$$\Delta^6 u_{-7} = \delta^6 u_{-7+6/2} = \delta^6 u_{-4}$$

Si el valor central está cinco lugares, debajo del principal, la diferencia séptima con respecto a éste es, en una y otra notación,

$$\Delta^7 u_{-5} = \delta^7 u_{-5+7/2} = \delta^7 u_{-3/2}$$

II

LAS FÓRMULAS NEWTON - GAUSS Y NEWTON - GAUSS RETRÓGRADA

[61]. Busquemos una fórmula que nos permita utilizar las diferencias *más próximas* al valor central.

Partamos, para ello, de la fórmula de las diferencias divididas en la cual, como el orden de los argumentos carece de importancia, los tomaremos como si estuvieran dispuestos así: x_0; x_0+h; x_0-h; x_0+2h; x_0-2h; x_0+3h ....

Resulta —siendo x el valor del argumento para el que se busca el correspondiente de la función—

$$
\begin{aligned}
f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0;x_0+h)+(x-x_0)[x-(x_0+h)]f(x_0;x_0+h;x_0-h)+\\
+(x-x_0)[x-(x_0+h)][x-(x_0-h)]f(x_0;x_0+h;x_0-h;x_0+2h)+\\
+(x-x_0)[x-(x_0+h)][x-(x_0-h)][x-(x_0+2h)]\times\\
\times f(x_0;x_0+h;x_0-h;x_0+2h;x_0-2h)+\dots
\end{aligned}
$$

Por (XXXII) es:

$$f(x_0;x_0+h)=\frac{f(x_0)}{x_0-(x_0+h)}+\frac{f(x_0+h)}{x_0+h-x_0}=\frac{1}{h}\Big[f(x_0+h)-f(x_0)\Big]$$

Pero,

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\Delta f(x_0)$$

$$f(x_0;x_0+h)=\frac{1}{h}\Delta f(x_0)$$

Análogamente:

$$
\begin{aligned}
f(x_0;x_0+h;x_0-h)=\frac{f(x_0)}{[x_0-(x_0+h)][x_0-(x_0-h)]}+\\
+\frac{f(x_0+h)}{(x_0+h-x_0)[x_0+h-(x_0-h)]}+\frac{f(x_0-h)}{(x_0-h-x_0)[x_0-h-(x_0+h)]}=\\
=-\frac{f(x_0)}{h^2}+\frac{f(x_0+h)}{2h^2}+\frac{f(x_0-h)}{2h^2}=\frac{1}{2h^2}\cdot\Big[f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)\Big]=\\
=\frac{1}{2!\,h^2}\Delta^2 f(x_0-h)
\end{aligned}
$$

por la (XVI). Del mismo modo:

$$f(x_0;x_0+h;x_0-h;x_0+2h)=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_0-h)(x_0-x_0+h)(x_0-x_0-2h)}+$$

$$+\frac{f(x_0+h)}{(x_0+h-x_0)(x_0+h-x_0+h)(x_0+h-x_0-2h)}+$$

$$+\frac{f(x_0-h)}{(x_0-h-x_0)(x_0-h-x_0-h)(x_0-h-x_0-2h)}+$$

$$+\frac{f(x_0+2h)}{(x_0+2h-x_0)(x_0+2h-x_0-h)(x_0+2h-x_0+h)}=$$

$$=\frac{f(x_0)}{2h^3}-\frac{f(x_0+h)}{2h^3}-\frac{f(x_0-h)}{6h^3}+\frac{f(x_0+2h)}{6h^3}=$$

$$=\frac{1}{6h^3}[f(x_0+2h)-3f(x_0+h)+3f(x_0)-f(x_0-h)]=\frac{1}{3!\,h^3}\Delta^3 f(x_0-h)$$

también, por la (XVI).

Fácil es, ahora, demostrar que, en general, se tiene:

$$f(x_0;x_0+h;x_0-h;\ldots x_0+nh;x_0-nh)=\frac{1}{(2n)!\,h^{2n}}\Delta^{2n}f(x_0-nh) \quad \text{(XXXIX)}$$

En efecto, admitiendo que la proposición es cierta para las diferencias de orden $2n-1$, son:

$$f[x_0-(n-1)h;x_0-(n-2)h;\ldots x_0+nh]=$$

$$=\frac{1}{(2n-1)!\,h^{2n-1}}\Delta^{2n-1}f[x_0-(n-1)h] \quad (\alpha)$$

$$f[x_0-nh;x_0-(n-1)h;\ldots x_0+(n-1)h]=$$

$$=\frac{1}{(2n-1)!\,h^{2n-1}}\Delta^{2n-1}f(x_0-nh) \quad (\beta)$$

Y, restando (β) de (α) y dividiendo por la diferencia de los argumentos, $2nh$, resulta:

$$f[x_0-nh;x_0-(n-1)h;\ldots x_0+nh]=$$

$$= \frac{1}{2nh} \cdot \frac{1}{(2n-1)!\,h^{2n-1}} \left\{ \Delta^{2n-1} f[x_0-(n-1)h] - \Delta^{2n-1} f(x_0-nh) \right\} =$$

$$= \frac{1}{(2n)!\,h^{2n}} \Delta^{2n} f(x_0-nh) \qquad \text{(XXXIX)}$$

[62]. Llevemos los valores hallados a la fórmula de las diferencias divididas. Es:

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) \cdot \frac{1}{h} \Delta f(x_0) + (x-x_0)(x-x_0-h) \cdot \frac{1}{2!\,h^2} \Delta^2 f(x_0-h) +$$

$$+ (x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0+h) \frac{1}{3!\,h^3} \Delta^3 f(x_0-h) +$$

$$+ (x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0+h)(x-x_0-2h) \cdot \frac{1}{4!\,h^4} \Delta^4 f(x_0-2h) +$$

$$+ (x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0+h)(x-x_0-2h)(x-x_0+2h) \times$$

$$\times \frac{1}{5!\,h^5} \Delta^5 f(x_0-2h) + \ldots$$

Sea, ahora,

$$x = x_0 + rh \qquad \therefore \quad x - x_0 = rh$$

Substituyendo y simplificando los factores y divisores h, queda:

$$f(x_0+rh) = f(x_0) + r \Delta f(x_0) + \frac{r(r-1)}{2!} \Delta^2 f(x_0-h) +$$

$$+ \frac{r(r-1)(r+1)}{3!} \Delta^3 f(x_0-h) + \frac{r(r-1)(r+1)(r-2)}{4!} \Delta^4 f(x_0-2h) +$$

$$+ \frac{r(r-1)(r+1)(r-2)(r+2)}{5!} \Delta^5 f(x_0-2h) + \ldots \qquad \text{(XL)}$$

Es la fórmula llamada de Newton - Gauss.

[63]. Si se reemplaza la notación de las diferencias ordinarias por la de las centrales, y se hace, además,

$$x = 0; \quad r = x; \quad h = 1; \quad f(x) = u_x$$

la fórmula anterior toma la forma

$$u_x = u_0 + x\,\delta\, u_{1/2} + \frac{x(x-1)}{2\,!}\,\delta^2 u_0 + \frac{(x+1)x(x-1)}{3\,!}\,\delta^3 u_{1/2} +$$

$$+ \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{4\,!}\,\delta^4 u_0 + \frac{(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)}{5\,!}\,\delta^5 u_{1/2} + \ldots \quad \text{(XLI)}$$

[64]. Admitamos, ahora, que el *intervalo h se hace negativo*. Eso equivale a admitir que los argumentos se ordenan de un modo *decreciente*. Es, entonces,

$$f(x_0 - rh) = f[x_0 + r(-h)]$$

Y, en tal caso, las diferencias de orden impar *cambian de signo y se desplazan en un rango negativo.*

En efecto, si h toma un valor negativo, la diferencia primera:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

se hace

$$f(x_0-h) - f(x_0) = -[f(x_0) - f(x_0-h)] = -\Delta f(x_0-h)$$

Análogamente, se tiene para la tercera, cambiando el signo de h,

$$\Delta^3 f(x_0-h) = f(x_0+2h) - 3f(x_0+h) + 3f(x_0) - f(x_0-h) =$$

$$= -[f(x_0+h) - 3f(x_0) + 3f(x_0-h) - f(x_0-2h)] = -\Delta^3 f(x_0-2h)$$

Y así, sucesivamente.

En tanto, las diferencias de orden par no varían merced a la simetría de su forma:

$$\Delta^4 f(x_0-2h) = f(x_0+2h) - 4f(x_0+h) + 6f(x_0) - 4f(x_0-h) + f(x_0-2h)$$

Haciendo en la (XL) las substituciones del caso se tiene la fórmula de Newton - Gauss *retrógrada*

$$f(x_0-rh) = f(x_0) - r\Delta f(x_0-h) + \frac{r(r-1)}{2\,!}\,\Delta^2 f(x_0-h) -$$

$$- \frac{(r+1)\,r\,(r-1)}{3\,!}\,\Delta^3 f(x_0-2h) +$$

$$+ \frac{(r+1)r(r-1)(r-2)}{4\,!}\,\Delta^4 f(x_0-2h) - \ldots \qquad \text{(XLII)}$$

[65]. Y haciendo en la (XLII), $x_0 = 0$; $r = x$; $h = 1$, y $f(x) = u_x$, queda, reemplazando las diferencias ordinarias por las centrales,

$$f(x) = u_x = u_0 - x\,\delta\,u_{-1/2} + \frac{x(x-1)}{2!}\delta^2 u_0 - \frac{(x+1)x(x-1)}{3!}\delta^3 u_{-1/2} +$$

$$+ \frac{(x+1)\,x\,(x-1)\,(x-2)}{4!}\delta^4 u_0 -$$

$$- \frac{(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)}{5!}\delta^5 u_{-1/2} + \ldots \qquad \text{(XLII } a)$$

III

FÓRMULAS DE STIRLING, DE BESSEL Y DE EVERETT

[66]. Sea la fórmula progresiva de GAUSS (XLI)

$$u_x = u_0 + x\,\delta\,u_{1/2} + \frac{x(x-1)}{2!}\delta^2 u_0 + \frac{(x+1)x(x-1)}{3!}\delta^3 u_{1/2} +$$

$$+ \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{4!}\delta^4 u_0 + \frac{(x+2)(x+1)x(x+1)(x+2)}{5!}\delta^5 u_{1/2} + \ldots$$

Efectuando —donde aparezcan— los productos $(x+1)(x-1)$; $(x+2)(x-2)\ldots$ queda:

$$u_x = u_0 + x\,\delta\,u_{1/2} + \frac{x(x-1)}{2!}\delta^2 u_0 +$$

$$+ \frac{x(x^2-1)}{3!}\delta^3 u_{1/2} + \frac{x(x^2-1)(x-2)}{4!}\delta^4 u_0 +$$

$$+ \frac{x(x^2-1)(x^2-4)}{5!}\delta^5 u_{1/2} + \frac{x(x^2-1)(x^2-4)(x-3)}{6!}\delta^6 u_0 + \ldots$$

Pero

$$x\,\delta\,u_{1/2} + \frac{x(x-1)}{2!}\delta^2 u_0 = x\,\delta\,u_{1/2} + \frac{x^2}{2!}\delta^2 u_0 - \frac{x}{2!}\delta^2 u_0 =$$

$$= x(\delta\,u_{1/2} - {}^1/_2\,\delta^2 u_0) + \frac{x^2}{2!}\delta^2 u_0$$

Además,

$$\delta^2 u_0 = \delta\,u_{1/2} - \delta\,u_{-1/2} \qquad \therefore \qquad x(\delta\,u_{1/2} - {}^1/_2\,\delta^2 u_0) =$$

$$= x(\delta\,u_{1/2} - {}^1/_2\delta\,u_{1/2} + {}^1/_2\,\delta\,u_{-1/2}) = x\,{}^1/_2\,(\delta\,u_{1/2} + \delta\,u_{-1/2}) = x\,\mu\,\delta\,u_0$$

poniendo, por brevedad, $\mu\,\delta\,u_0 = {}^1/_2(\delta\,u_{1/2} + \delta\,u_{-1/2})$.

Del mismo modo

$$\frac{x(x^2-1)}{3\,!}\delta^3 u_{1/2} + \frac{x(x^2-1)(x-1)}{4\,!}\delta^4 u_0 =$$

$$= \frac{x(x^2-1)}{3\,!}(\delta^3 u_{1/2} - {}^1/_2\,\delta^4 u_0) + \frac{x^2(x^2-1)}{4\,!}\delta^4 u_0$$

y

$$\frac{x(x^2-1)}{3\,!}(\delta^3 u_{1/2} - {}^1/_2\,\delta^4 u_0) = \frac{x(x^2-1)}{3\,!}\,{}^1/_2(\delta^3 u_{1/2} + \delta^3 u_{-1/2}) = \frac{x(x^2-1)}{3\,!}\mu\delta^3 u_0$$

donde $\mu\,\delta^3 u_0$ reemplaza en forma condensada a ${}^1/_2(\delta^3 u_{1/2} + \delta^3 u_{-1/2})$.

Se obtiene, así mismo, sin esfuerzo:

$$\frac{x(x^2-1)(x^2-4)}{5\,!}\delta^5 u_{1/2} + \frac{x(x^2-1)(x^2-4)(x-3)}{6\,!}\delta^6 u_0 =$$

$$= \frac{x(x^2-1)(x^2-4)}{5\,!}\mu\,\delta^5 u_0 + \frac{x^2(x^2-1)(x^2-4)}{6\,!}\delta^6 u_0$$

donde es, también,

$$\mu\,\delta^5 u_0 = {}^1/_2\,(\delta^5 u_{1/2} + \delta^5 u_{-1/2})$$

Y, haciendo las substituciones correspondientes, se llega a la fórmula de Stirling:

$$u_x = u_0 + x\,\mu\,\delta\,u_0 + \frac{x^2}{2\,!}\delta^2 u_0 + \frac{x(x^2-1)}{3\,!}\mu\,\delta^3 u_0 + \frac{x^2(x^2-1)}{4\,!}\delta^4 u_0 +$$

$$+ \frac{x(x^2-1)(x^2-4)}{5\,!}\mu\,\delta^5 u_0 + \frac{x^2(x^2-1)(x^2-4)}{6\,!}\delta^6 u_0 + \ldots \qquad \text{(XLIII)}$$

[67]. Volvamos a la fórmula de Newton-Gauss, progresiva:

$$u_x = u_0 + x\,\delta\,u_{1/2} + \frac{x(x-1)}{2\,!}\delta^2 u_0 + \frac{(x+1)x(x-1)}{3\,!}\delta^3 u_{1/2} + \ldots$$

Se sabe que:

$$u_1 - u_0 = \delta\,u_{1/2} \quad \therefore \quad u_0 = u_1 - \delta\,u_{1/2} \quad \text{y} \quad {}^1/_2\,u_0 = {}^1/_2\,u_1 - {}^1/_2\,\delta\,u_{1/2} \quad \therefore$$

$$u_0 = {}^1/_2\,u_0 + {}^1/_2\,u_1 - {}^1/_2\,\delta\,u_{1/2} = {}^1/_2\,(u_0 + u_1) - {}^1/_2\,\delta\,u_{1/2}$$

Del mismo modo se tiene:

$$\delta^2 u_0 = {}^1/_2 (\delta^2 u_0 + \delta^2 u_1) - {}^1/_2 \, \delta^3 u_{1/2}$$
$$\delta^4 u_0 = {}^1/_2 (\delta^4 u_0 + \delta^4 u_1) - {}^1/_2 \, \delta^5 u_{1/2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Llevando esos valores a la NEWTON-GAUSS queda:

$$u_x = {}^1/_2 (u_0 + u_1) - {}^1/_2 \, \delta u_{1/2} + x \, \delta u_{1/2} + \frac{x(x-1)}{2\,!} \frac{1}{2} (\delta^2 u_0 + \delta^2 u_1) -$$
$$- \frac{x(x-1)}{2\,!} \frac{1}{2} \delta^3 u_{1/2} + \frac{(x+1)x(x-1)}{3\,!} \delta^3 u_{1/2} +$$
$$+ \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{4\,!} \frac{1}{2} (\delta^4 u_0 + \delta^4 u_1) -$$
$$- \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{4\,!} \frac{1}{2} \delta^5 u_{1/2} +$$
$$+ \frac{(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)}{5\,!} \delta^5 u_{1/2} + \ldots =$$
$$= {}^1/_2 (u_0 + u_1) + (x - {}^1/_2) \, \delta u_{1/2} + \frac{x(x-1)}{2\,!} \frac{1}{2} (\delta^2 u_0 + \delta^2 u_1) +$$
$$+ \frac{x(x-1)}{2\,!} \left(\frac{x+1}{3} - \frac{1}{2} \right) \delta^3 u_{1/2} + \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{4\,!} \frac{1}{2} (\delta^4 u_0 + \delta^4 u_1) +$$
$$+ \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{4\,!} \left(\frac{x+2}{5} - \frac{1}{2} \right) \delta^5 u_{1/2} + \ldots \qquad \therefore$$
$$u_x = {}^1/_2 (u_0 + u_1) + (x - {}^1/_2) \delta u_{1/2} + \frac{x(x-1)}{2\,!} \frac{1}{2} (\delta^2 u_0 + \delta^2 u_1) +$$
$$+ \frac{x(x-1)(x - {}^1/_2)}{3\,!} \delta^3 u_{1/2} + \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{4\,!} \frac{1}{2} (\delta^4 u_0 + \delta^4 u_1) +$$
$$+ \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)(x - {}^1/_2)}{5\,!} \delta^5 u_{1/2} + \ldots$$

Y, por fin, queda, haciendo $x - {}^1/_2 = n \quad \therefore \quad x = n + {}^1/_2$,

$$u_x = u_{n+1/2} = {}^1/_2 (u_0 + u_1) + n \, \delta u_{1/2} + \frac{(n + {}^1/_2)(n - {}^1/_2)}{2\,!} \frac{1}{2} (\delta^2 u_0 + \delta^2 u_1) +$$
$$+ \frac{(n + {}^1/_2)(n - {}^1/_2) n}{3\,!} \delta^3 u_{1/2} + \frac{(n + {}^3/_2)(n + {}^1/_2)(n - {}^1/_2)(n - {}^3/_2)}{4\,!} \frac{1}{2} (\delta^4 u_0 + \delta^4 u_1) +$$
$$+ \frac{(n + {}^3/_2)(n + {}^1/_2)(n - {}^1/_2)(n - {}^3/_2) n}{5\,!} \delta^5 u_{1/2} + \ldots \qquad \therefore$$

$$u_x = u_{n+1/2} = {}^1/_2\,(u_0+u_1)+n\,\delta\,u_{1/2}+$$

$$+\frac{n^2-{}^1/_4}{2\,!}\,\frac{1}{2}\,(\delta^2u_0+\delta^2u_1)+\frac{(n^2-{}^1/_4)\,n}{3\,!}\,\delta^3\,u_{1/2}+$$

$$+\frac{(n^2-{}^1/_4)\,(n^2-{}^9/_4)}{4\,!}\,\frac{1}{2}(\delta^4u_0+\delta^4u_1)+\frac{(n^2-{}^1/_4)(n^2-{}^9/_4)n}{5\,!}\,\delta^5u_{1/2}+\ldots \quad \text{(XLIV)}$$

Es la fórmula de Bessel.

[68]. Partiendo, de nuevo, de la fórmula de Newton - Gauss

$$u_x = u_0+x\,\delta\,u_{1/2}+\frac{x\,(x-1)}{2\,!}\,\delta^2u_0+\frac{(x+1)x(x-1)}{3\,!}\,\delta^3\,u_{1/2}+\ldots$$

y eliminando en ella las diferencias de orden impar, para lo que basta poner

$$\delta\,u_{1/2}=u_1-u_0\,;\quad \delta^3\,u_{1/2}=\delta^2\,u_1-\delta^2\,u_0\,;\quad \delta^5\,u_{1/2}=\delta^4\,u_1-\delta^4\,u_0\,;\ \ldots,$$

queda,

$$u_x = u_0+x(u_1-u_0)+\frac{x(x-1)}{2\,!}\delta^2u_0+\frac{(x+1)x(x-1)}{3\,!}(\delta^2u_1-\delta^2u_0)+$$

$$+\frac{(x+1)x(x-1)(x+2)}{4\,!}\delta^4u_0+$$

$$+\frac{(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)}{5\,!}(\delta^4\,u_1-\delta^4\,u_0)+\ldots$$

Y agrupando los términos con respecto a los subíndices 1 y 0, respectivamente, se tiene:

$$u_x = x\,u_1+\frac{(x+1)x(x-1)}{3\,!}\delta^2u_1+\frac{(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)}{5\,!}\delta^4\,u_1+\ldots-$$

$$-\left[(x-1)u_0+\frac{x(x-1)}{2\,!}\left(\frac{x+1}{3}-1\right)\delta^2u_0+\right.$$

$$\left.+\frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{4\,!}\left(\frac{x+2}{5}-1\right)\delta^4\,u_0+\ldots\right]=$$

$$=x\,u_1+\frac{(x+1)x(x-1)}{3\,!}\,\delta^2u_1+\frac{(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)}{5\,!}\,\delta^4\,u_1+\ldots-$$

$$-(x-1)u_0-\frac{x(x-1)(x-2)}{3\,!}\,\delta^2u_0-\frac{(x+1)x(x-1)(x-2)(x-3)}{5\,!}\,\delta^4\,u_0-\ldots$$

Si, ahora, hacemos

$$x+\xi=1 \qquad \therefore \quad \xi=1-x=-(x-1); \quad \xi+1=-(x-2)\ldots$$

queda — escribiendo, por simetría, en orden decreciente los factoriales en que interviene ξ —:

$$u_x = xu_1 + \frac{(x+1)x(x-1)}{3!}\delta^2 u_1 +$$

$$+\frac{(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)}{5!}\delta^4 u_1 + \ldots +$$

$$+\xi u_0 + \frac{(\xi+1)\xi(\xi-1)}{3!}\delta^2 u_0 + \frac{(\xi+2)(\xi+1)\xi(\xi-1)(\xi-2)}{5!}\delta^4 u_0 + \ldots \quad \text{(XLV)}$$

Es la fórmula de EVERETT.

IV

APLICACION DE LAS FORMULAS

[69]. Supóngase que se tiene una tabla de valores de las rentas *ciertas* unitarias vencidas, a distintas tasas. Es decir, rentas de *un peso* anual, pagadero a fin de año durante un número prefijado, *n*, de años. Queremos calcular, con su ayuda, el valor actual de la renta pagadera durante 20 años a la tasa del $2^5/_8$ % *que no está en la tabla.* Valiéndonos de las tasas que conocemos formamos el siguiente cuadro:

Tasa = 100 i	x	Renta = $a_{\overline{20}\vert} = u_x$	δ	δ^2	δ^3	δ^4
2	—2	16,3514				
			—0,3877			
$2^1/_4$	—1	15,9637		0,0132		
			—0,3745		—0,0006	
$2^1/_2$	0	15,5892		0,0126		0,0001
			—0,3619		—0,0005	
$2^3/_4$	1	15,2273		0,0121		0
			—0,3498		—0,0005	
3	2	14,8775		0,0116		
			—0,3382			
$3^1/_4$	3	14,5393				

Apliquemos, sucesivamente, las distintas fórmulas. Empecemos por la NEWTON-GAUSS, (XLI). Una diferencia de $^1/_4$ % en la tasa representa *un* incremento de *uno* en x; $^1/_8$ % —diferencia entre $2\,^1/_2$ % que se da y $2\,^5/_8$ % que se busca— representa para x un incremento de $^1/_2$. Como las diferencias cuartas son de excasísimo valor, detendremos el cálculo en las terceras.

I. Usando la fórmula de NEWTON-GAUSS,

$$u_x = u_0 + x\,\delta\,u_{1/2} + \frac{x(x-1)}{2!}\,\delta^2 u_0 + \frac{(x+1)x(x-1)}{3!}\,\delta^3\,u_{1/2} + \dots \qquad \text{(XLI)}$$

queda:

$$a_{\overline{20}|\,(2^5/_8\%)} = u_x = 15{,}5892 - {}^1/_2 \times 0{,}3619 + \frac{^1/_2(-^1/_2)}{2} \times 0{,}0126 -$$

$$- \frac{^3/_2 \times {}^1/_2(-^1/_2)}{6} \times 0{,}0005 =$$

$$= 15{,}5892 - 0{,}18095 - 0{,}001575 + 0{,}00003125 =$$

$$= 15{,}40670625$$

Las tablas financieras dan, 15,40665946.

II. Apliquemos la NEWTON-GAUSS *retrógrada*, recordando, al hacerlo, que h es negativo, lo que implica el cambio de signo de x, que se hace igual a $-^1/_2$

$$= u_0 - x\,\delta\,u_{-1/2} + \frac{x(x-1)}{2!}\,\delta^2 u_0 - \frac{(x+1)x(x-1)}{3!}\,\delta^3 u_{-1/2} + \dots = \text{(XLII } a\text{)}$$

$$= 15{,}5892 - (-^1/_2)(-0{,}3745) + \frac{-^1/_2(-^3/_2)}{2} \times 0{,}0126 -$$

$$- \frac{^1/_2(-^1/_2)(-^3/_2)}{6} \times -0{,}0006 =$$

$$= 15{,}5892 - 0{,}18725 + 0{,}004725 + 0{,}0000375 = 15{,}4067125$$

III. Si se hace uso de la fórmula de STIRLING, se tiene:

$$u_x = u_0 + x\,\mu\,\delta\,u_0 + \frac{x^2}{2!}\,\delta^2 u_0 + \frac{x(x^2-1)}{3!}\,\mu\,\delta^3 u_0 + \dots \qquad \text{(XLIII)}$$

$$= 15{,}5892 - \frac{1}{2}\,\frac{0{,}3745+0{,}3619}{2} + \frac{^1/_4}{2} \times 0{,}0126 -$$

$$- \frac{^1/_2(^1/_4-1)}{6} \times \frac{0{,}0005+0{,}0006}{2} =$$

$$= 15{,}406709375.$$

IV. La fórmula de Bessel

$$u_x = u_{n+1/2} = {}^1/_2 (u_0 + u_1) + n\,\delta\, u_{1/2} + \frac{n^2 - {}^1/_4}{2\,!} \cdot \frac{1}{2} (\delta^2 u_0 + \delta^2 u_1) +$$

$$+ \frac{(n^2 - {}^1/_4) n}{3\,!} \delta^3 u_{1/2} + \ldots \qquad \text{(XLIV)}$$

da, recordando que $n = x - {}^1/_2$, y que aquí, por ser $x = {}^1/_2$, es $n = 0$:

$$u_x = {}^1/_2 (15{,}5892 + 15{,}2273) - {}^1/_{16} (0{,}0126 + 0{,}0121) = 15{,}40670625.$$

V. La de Everett:

$$u_x = x\,u_1 + \frac{(x+1)x(x-1)}{3\,!} \delta^2 u_1 + \xi\, u_0 + \frac{(\xi+1)\xi(\xi-1)}{3!} \delta^2 u_0 + \ldots \quad \text{(XLV)}$$

en la que, por ser $x = {}^1/_2$, es $\xi = 1 - x = {}^1/_2$, también, da:

$$u_x = {}^1/_2 \times 15{,}2273 + \frac{{}^3/_2 \times {}^1/_2 (-{}^1/_2)}{6} \times 0{,}0121 +$$

$$+ {}^1/_2 \times 15{,}5892 + \frac{{}^3/_2 \times {}^1/_2 (-{}^1/_2)}{6} \times 0{,}0126 =$$

$$= 15{,}40670625$$

IV

RELACIONES ENTRE LAS DIFERENCIAS FINITAS Y LAS DERIVADAS

[70]. De la fórmula interpolatoria de Newton:

$$u_{x+nh} = u_x + n\,\Delta\, u_x + \frac{n(n-1)}{2\,!} \Delta^2 u_x + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\,!} \Delta^3 u_x + \ldots \qquad \text{(XV)}$$

se deduce — haciendo $h = 1$

$$\frac{u_{x+n} - u_x}{n} = \Delta u_x + \frac{n-1}{2\,!} \Delta^2 u_x + \frac{(n-1)(n-2)}{3\,!} \Delta^3 u_x + \ldots$$

Y, cuando $n \to 0$, se tiene la derivada de u_x con respecto a x en función de las diferencias principales

$$\frac{du_x}{dx} = \Delta u_x - \frac{1}{2} \Delta^2 u_x + \frac{1}{3} \Delta^3 u_x - \frac{1}{4} \Delta^4 u_x + \frac{1}{5} \Delta^5 u_x - \ldots \qquad \text{(XLVI)}$$

Aplicando a ambos miembros el procedimiento de la separación de símbolos, y representando por $D = d/dx$ la operación mediante la cual se obtiene la derivada de una función, se tiene:

$$D = \frac{d}{dx} = \Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \frac{1}{4}\Delta^4 + \frac{1}{5}\Delta^5 - \dots \qquad \text{(XLVII)}$$

[71]. Hallar la segunda derivada es repetir, con respecto a la primera, el procedimiento aplicado a la función. Y del mismo modo se obtienen las derivadas sucesivas. Se puede, pues, escribir

$$D^2 = \frac{d^2}{dx^2} = \left[\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \frac{1}{4}\Delta^4 + \dots\right]^2 = \Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12}\Delta^4 - \frac{5}{6}\Delta^5 + \dots$$

$$D^3 = \frac{d^3}{dx^3} = \left[\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \frac{1}{4}\Delta^4 + \dots\right]^3 = \Delta^3 - \frac{3}{2}\Delta^4 + \frac{7}{4}\Delta^5 - \dots$$

$$D^4 = \frac{d^4}{dx^4} = \left[\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \frac{1}{4}\Delta^4 + \dots\right]^4 = \Delta^4 - 2\Delta^5 + \dots$$

$$D^5 = \frac{d^5}{dx^5} = \left[\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \frac{1}{4}\Delta^4 + \dots\right]^5 = \Delta^5 - \dots$$

[72]. Volvamos a la (XLVII).

El segundo miembro es el desarrollo del logaritmo neperiano de $1 + \Delta$, *si se trata a Δ como a una cantidad.* Hagámoslo así; resulta:

$$D = \frac{d}{dx} = \log_e(1+\Delta) \quad \therefore \quad e^D = e^{d/dx} = 1 + \Delta \quad \therefore \qquad \text{(XLVIII)}$$

$$\Delta = e^D - 1 = e^{d/dx} - 1 = \qquad \text{(XLIX)}$$

$$= D + \frac{1}{2\,!}D^2 + \frac{1}{3\,!}D^3 + \dots \qquad \text{(L)}$$

[73]. Tomemos la fórmula de Stirling:

$$u_x = u_0 + x\,\mu\,\delta\,u_0 + \frac{x^2}{2\,!}\delta^2 x_0 + \frac{x(x^2-1)}{3\,!}\mu\,\delta^3 u_0 + \dots \qquad \text{(XLIII)}$$

Pongamos, en ella, x en vez de 0 y n en vez de x, queda:

$$u_{x+n} = u_x + n\,\mu\,\delta u_x + \frac{n^2}{2\,!}\delta^2 u_x + \frac{n(n^2-1)}{3\,!}\mu\,\delta^3 u_x + \dots \quad \therefore$$

$$\frac{u_{x+n} - u_x}{n} = \mu\,\delta\,u_x + \frac{n}{2\,!}\delta^2 u_x + \frac{n^2-1}{3\,!}\mu\,\delta^3 u_x + \dots$$

Si $n \to 0$, el primer miembro es la derivada de u_x con respecto a x

$$\frac{d}{dx}u_x = \mathrm{D}\, u_x = \mu\,\delta\, u_x - \frac{1}{6}\mu\,\delta^3 u_x + \frac{1}{30}\mu\,\delta^5 u_x - \frac{1}{140}\mu\,\delta^7 u_x + \ldots \qquad \text{(LI)}$$

Estas fórmulas son muy útiles cuando se tiene que operar con funciones cuya forma real no se conoce, o cuando es más sencillo valerse de las diferencias que de las derivadas. En el Cálculo Actuarial se las emplea con bastante frecuencia.

V

INTERPOLACION INVERSA

[74]. Consiste el problema, en este caso, en determinar el valor del argumento, conocido el correlativo de la función. Cualquiera de las fórmulas dadas hasta aquí resuelve el problema, en la mayoría de los casos, con suficiente aproximación.

Sea, por ejemplo, determinar la tasa a que fué contratado un préstamo de $ 23900,76 que se paga mediante 20 anualidades de $ 2000, cada una.

Usemos la notación corriente en matemáticas financieras

$$V = 23900{,}76\,; \quad c = 2000\,, \quad n = 20$$

$$V = c\, a_{\overline{20|}} = c\,\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \qquad \therefore \quad \frac{V}{c} = \frac{23900{,}76}{2000} = 11{,}95038 = a_{\overline{20|}}$$

Las tablas financieras dan, para el valor actual de la anualidad unitaria, durante 20 años, a las tasas 5, 6 y 7 %, respectivamente:

$$\begin{array}{lcc} & \Delta & \Delta^2 \\ a_{\overline{20|}\,(5\%)} = 12{,}46221 & & \\ & -0{,}99229 & \\ a_{\overline{20|}\,(6\%)} = 11{,}46992 & & 0{,}11638 \\ & -0{,}87591 & \\ a_{\overline{20|}\,(7\%)} = 10{,}59401 & & \end{array}$$

Y, en la fórmula de NEWTON (XV)

$$u_{x+nh} = u_x + n\,\Delta\,u_x + \frac{n(n-1)}{2!}\,\Delta^2 u_x + \dots$$

son: $x = 0{,}05$, la tasa menor del interés; $h = 0{,}01$, el intervalo entre dos tasas contiguas del cuadro; $u_x = a_{\overline{20|}\,(5\%)} = 12{,}46221$, el valor actual de la anualidad unitaria por 20 años, al 5 %; $u_{x+nh} = 11{,}95038$, el valor de la misma anualidad a la tasa buscada: $0{,}05 + \varrho$, y, por lo tanto, $\varrho = nh \;\therefore\; n = \varrho/h$. La incógnita es, así, n. Y de la (XV) se deduce la ecuación de segundo grado:

$$\tfrac{1}{2}\,\Delta^2 u_x\, n^2 + (\Delta u_x - \tfrac{1}{2}\,\Delta^2 u_x)n + (u_x - u_{x+nh}) = 0$$

Haciendo en ella las substituciones del caso, queda:

$$\tfrac{1}{2}\,\Delta^2 u_x \frac{\varrho^2}{h^2} + (\Delta\, u_x - \tfrac{1}{2}\,\Delta^2 u_x)\,\frac{\varrho}{h} + (a_{\overline{20|}\,(5\%)} - a_{\overline{20|}\,(0{,}05+\varrho)}) = 0 \quad \therefore$$

$$0{,}05819 \times \frac{\varrho^2}{0{,}0001} + (-0{,}99229 - 0{,}05819)\frac{\varrho}{0{,}01} + $$
$$+ (12{,}46221 - 11{,}95038) = 0 \quad \therefore$$
$$581{,}9\,\varrho^2 - 105{,}048\,\varrho + 0{,}51183 = 0 \quad \therefore$$
$$\varrho = 0{,}0050112$$

y la tasa buscada es el 0,0550112. El valor exacto es el $5\,{}^1\!/_2$ %. La aproximación lograda es bastante satisfactoria.

Observación. Podría usarse una ecuación de tercero o cuarto grado, tomando en cuenta hasta las terceras o cuartas diferencias, según el caso.

[**75** . Haciendo uso de la fórmula de las diferencias divididas, se tiene:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + \dots$$

Aquí *se pueden tomar como argumentos los valores de* $a_{\overline{20|}}$, y *como funciones* los de las tasas correlativas:

$$x = 11{,}95038; \quad x_0 = 12{,}46221; \quad x_1 = 11{,}46992; \quad x_2 = 10{,}59401$$

Pero, si se hace $x = 0$, los demás valores de x disminuyen, también, en 11,95038. Y se tiene

$$x = 0; \quad x_0 = 0{,}51183; \quad x_1 = -0{,}48046; \quad x_2 = -1{,}35637$$

$$f(x_0) = 0{,}05\,; \qquad f(x_1) = 0{,}06\,; \qquad f(x_2) = 0{,}07$$

$$f(x_0, x_1) = \frac{0{,}06 - 0{,}05}{-0{,}48046 - 0{,}51183} = -0{,}0100777$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{0{,}07 - 0{,}06}{-1{,}35637 + 0{,}48046} = -0{,}0114167$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{-0{,}0114167 + 0{,}0100777}{-1{,}35637 - 0{,}51183} = 0{,}0007167$$

Y el cuadro de las diferencias toma la forma

x		$f(x)$	$f\,1$	$f\,2$
$x_0 =$	0,51183	0,05		
			— 0,0100777	
$x_1 =$	— 0,48046	0,06		0,0007167
			— 0,0114167	
$x_2 =$	— 1,35637	0,07		

Es, entonces,

$$\begin{aligned} f(x) &= 0{,}05 - 0{,}51183 \times -0{,}0100777 - 0{,}51183 \times 0{,}48046 \times 0{,}0007167 = \\ &= 0{,}05 + 0{,}00515807 - 0{,}00017625 = \\ &= 0{,}05498182 \end{aligned}$$

Y el error es, aquí de 0,00001818, por defecto.

Como las tablas financieras están calculadas con ocho o diez decimales —en lugar de los cinco tomados aquí— y, sobre todo, como las tasas tabuladas difieren, por lo común, en *un medio* o *un cuarto por ciento* —en vez del *uno* que nos sirvió de base— la aproximación lograda puede ser, naturalmente, mucho mayor.

Algunos artificios de cálculo permiten obtener —al utilizar las diferencias finitas— fórmulas que, como la de Hardy, para determinar la tasa del interés en las amortizaciones, afinan mucho la precisión. Pero esos son alardes de ingenio aplicables a problemas concretos, que se estudian dentro del respectivo campo de aplicación, no métodos de trabajo de carácter general.

CAPITULO VI

INTEGRACIÓN FINITA O SUMACIÓN

I

LA EXPRESION GENERAL

[76]. La operación que tiene por objeto hallar la función V_x, cuya diferencia es, $\Delta V_x = u_x$, se llama *integración finita* o *sumación*. Para indicarla se suele usar el símbolo Δ^{-1}, que representa la operación contraria de la diferenciación finita, pero es más común valerse del conocido signo Σ, sobre todo, cuando se trata de llegar a un resultado concreto.

Si se admite que en el cuadro de las diferencias hay una columna V_x anterior a la de las u_x, y tal que sea, como ya se dijo, $\Delta V_x = u_x$, se puede escribir —haciendo $h = 1$:

$$\begin{aligned} V_{x+1} - V_x &= u_x \\ V_{x+2} - V_{x+1} &= u_{x+1} \\ &\dots\dots\dots\dots \\ V_{x+n} - V_{x+n-1} &= u_{x+n-1} \end{aligned}$$

Y, sumando ordenadamente,

$$\sum_{t=0}^{t=n-1} u_{x+t} = V_{x+n} - V_x = u_x + u_{x+1} + \dots + u_{x+n-1}$$

Pero, por la (XV) y la (α) de [19] es:

$$u_{x+t} = u_x + t\Delta u_x + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 u_x + \dots + \Delta^t u_x = (1+\Delta)^t u_x$$

Por lo tanto, se tiene, haciendo las substituciones del caso,

$$\sum_{t=0}^{t=n-1} u_{x+t} = V_{x+n} - V_x = u_x + (1+\Delta)u_x + (1+\Delta)^2 u_x + \dots + (1+\Delta)^{n-1} u_x =$$

$$= [1 + (1+\Delta) + (1+\Delta)^2 + \dots + (1+\Delta)^{n-1}]\, u_x$$

Al hacer la separación de símbolos aparece, en el corchete, una *progresión geométrica.* Ya sabemos que *no es tal*; pero sabemos, también, que se puede operar con ella *como si lo fuera.* Haciéndolo así, resulta — aplicando la fórmula de la suma de dicha progresión —

$$\sum_{t=0}^{t=n-1} u_{x+t} = V_{x+n} - V_x = \frac{(1+\Delta)^n - 1}{(1+\Delta)-1} u_x =$$

$$= \frac{1 + n\Delta + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 + \ldots + \Delta^n - 1}{\Delta} u_x =$$

$$= \left[n + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^2 + \ldots + \Delta^{n-1} \right] u_x \quad \therefore$$

$$V_{x+n} = V_x + n u_x + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta u_x + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^2 u_x + \ldots + \Delta^{n-1} u_x \quad \text{(LII)}$$

Es decir, la fórmula (XV), en la cual no se ha hecho más que *correr las diferencias un lugar*, para que las u_x ocupen el de las primeras diferencias, éstas el de las segundas, y así, sucesivamente.

II

INTEGRAL FINITA INDEFINIDA

[**77**]. La integral finita es indefinida cuando no se dan los límites entre los cuales hay que sumar. (1) En tal caso, más que la suma misma, lo que interesa es *individualizar* la función de donde proviene la diferencia.

[**78**]. *Una constante puede entrar o salir del sumatorio.* En efecto, sabemos que si es, $u_x = a v_x$, se tiene $\Delta u_x = a \Delta v_x = \Delta a v_x$.

Sean, ahora,

$$\Delta V_x = u_x \quad \therefore \quad \Delta^{-1} u_x = V_x \qquad (\alpha)$$

y

$$\Delta a V_x = a u_x \quad \therefore \quad \Delta^{-1} a u_x = a V_x \qquad (\beta)$$

(1) Obsérvese la analogía de las propiedades que aquí se estudian con las de las cuestiones similares del cálculo infinitesimal.

Multiplicando (α) por a se tiene:

$$a\,\Delta^{-1} u_x = a\,V_x \qquad (\gamma)$$

e, igualando los primeros miembros de (β) y (γ)

$$\Delta^{-1} a\, u_x = a\,\Delta^{-1} u_x \qquad \text{(LIII)}$$

[79]. *La integral finita de la suma algebráica de dos o más funciones es igual a la suma algebráica de las integrales finitas de dichas funciones.*

Sean

$$\begin{array}{lll} \Delta\, U_x = u_x & \therefore & \Delta^{-1} u_x = U_x \\ \Delta\, V_x = v_x & \therefore & \Delta^{-1} v_x = V_x \\ \Delta\, W_x = w_x & \therefore & \Delta^{-1} w_x = W_x \end{array}$$

Se tiene

$$\Delta^{-1} u_x \pm \Delta^{-1} v_x \pm \Delta^{-1} w_x = U_x \pm V_x \pm W_x \qquad (\alpha)$$

Pero, también es, (VI)

$$\Delta\,(U_x \pm V_x \pm W_x) = \Delta\, U_x \pm \Delta\, V_x \pm \Delta\, W_x = u_x \pm v_x \pm w_x \quad \therefore$$

$$U_x \pm V_x \pm W_x = \Delta^{-1}(u_x \pm v_x \pm w_x) \qquad (\beta)$$

El primer miembro de (β) y el segundo de (α) son iguales, luego:

$$\Delta^{-1}(u_x \pm v_x \pm w_x) = \Delta^{-1} u_x \pm \Delta^{-1} v_x \pm \Delta^{-1} w_x \qquad \text{(LIV)}$$

[80]. *Si dos funciones tienen la misma diferencia difieren en una constante.*

Sean las funciones U_x y $V_x = U_x + W_x$, tales que se tenga:

$$\Delta\, U_x = u_x$$

y

$$\Delta\, V_x = \Delta\,(U_x + W_x) = \Delta\, U_x + \Delta\, W_x = u_x$$

también. Restando queda,

$$\Delta\, W_x = 0 \quad \therefore \quad W_x = \text{constante.}$$

Pues, para que esa diferencia sea nula, es preciso [6] que W_x *no dependa* de x, es decir, que *sea una constante.*

III

INTEGRACION INMEDIATA

[81]. Sabemos [10] que, tratándose de una exponencial, se tiene:

$$\Delta . a^x = a^x (a^h - 1)$$

$$a^x = \Delta^{-1} a^x (a^h - 1) = (a^h - 1)\, \Delta^{-1} a^x$$

puesto que $a^h - 1$ es una constante; luego:

$$\Delta^{-1} a^x = \frac{a^x}{a^h - 1} + C \qquad \text{(LV)}$$

Donde C es la constante de integración, ya que —como se acaba de ver— *tienen la misma diferencia dos funciones que difieren en una constante.* Constante que —como en el cálculo infinitesimal— sólo pierde su imprecisión cuando la integral es *definida.*

[82]. Si se tiene un factorial, es

$$\Delta\, x^{(m)} = m\, x^{(m-1)} \qquad \therefore \qquad x^{(m)} = \Delta^{-1} m\, x^{(m-1)} = m\, \Delta^{-1} x^{(m-1)} \qquad \therefore$$

$$\Delta^{-1} x^{(m-1)} = \frac{x^{(m)}}{m} + C$$

o, poniendo m en vez de $m-1$,

$$\Delta^{-1} x^{(m)} = \frac{x^{(m+1)}}{m+1} + C \qquad \text{(LVI)}$$

[83]. Y, si se trata de la recíproca de un factorial ascendente, es [13],

$$\Delta\, x^{(-m)} = -m\, x^{(-\overline{m+1})} \qquad \therefore \qquad x^{(-m)} = -m\, \Delta^{-1} x^{(-\overline{m+1})} \qquad \therefore$$

$$\Delta^{-1} x^{(-\overline{m+1})} = -\frac{x^{(-m)}}{m} + C \qquad \therefore$$

$$\Delta^{-1} x^{(-m)} = -\frac{x^{(-\overline{m-1})}}{m-1} + C \qquad \text{(LVI } a\text{)}$$

IV

APLICACION DE LA FORMULA GENERAL

[84]. Volvamos a la (LII) y apliquémosla a algunos casos concretos.

I. Sea hallar la suma de los cuadrados de los n primeros números enteros. Se puede empezar directamente la suma por 1. Pero el cálculo es más sencillo si se suman $n+1$, empezando por 0. Aquí lo haremos así, dejando, para ejercicio del lector, hacer la suma entre 1 y n, ambos inclusive.

x	u_x	Δ	Δ^2
0	0		
		1	
1	1		2
		3	
2	4		2
		5	
3	9		2
		7	
4	16		

$$\sum_0^n n^2 = V_0 + (n+1)u_0 + \frac{(n+1)n}{2\,!}\Delta u_0 + \frac{(n+1)n(n-1)}{3\,!}\Delta^2 u_0 =$$

$$= 0 + \frac{(n+1)n}{2} \times 1 + \frac{(n+1)n(n-1)}{6} \times 2 =$$

$$= \frac{(n+1)n}{2}\left(1 + \frac{2n-2}{3}\right) = \frac{(n+1)n(2n+1)}{6}$$

Conocidísima fórmula.

II. Sea hallar la suma de las cuartas potencias

x	u_x	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0	0				
		1			
1	1		14		
		15		36	
2	16		50		24
		65		60	
3	81		110		24
		175		84	
4	256		194		
		369			
5	625				

$$\sum_{0}^{n} n^4 = V_0 + (n+1)u_0 + \frac{(n+1)n}{2!}\Delta u_0 + \frac{(n+1)n(n-1)}{3!}\Delta^2 u_0 +$$

$$+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4!}\Delta^3 u_0 + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{5!}\Delta^4 u_0 =$$

$$= 0 + \frac{(n+1)n}{2}\times 1 + \frac{(n+1)n(n-1)}{6}\times 14 + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24}\times 36 +$$

$$+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{120}\times 24 =$$

$$= (n+1)n\left[\frac{1}{2} + \frac{7n}{3} - \frac{7}{3} + \frac{3n^2}{2} - \frac{9n}{2} + 3 + \frac{n^3}{5} - \frac{6n^2}{5} + \frac{11n}{5} - \frac{6}{5}\right] =$$

$$= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

Fórmula, también, muy conocida.

CAPITULO VII

SUMACIÓN E INTEGRACIÓN APROXIMADAS

I

LA FÓRMULA DE EULER-MACLAURIN

[85]. Se ha visto (L), que:

$$\Delta = \frac{d}{dx} + \frac{1}{2\,!}\cdot\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{3\,!}\cdot\frac{d^3}{dx^3} + \ldots = e^{d/dx} - 1$$

$$= \mathrm{D} + \frac{1}{2\,!}\mathrm{D}^2 + \frac{1}{3\,!}\mathrm{D}^3 + \ldots = e^{\mathrm{D}} - 1$$

De donde se deduce:

$$\Sigma = \Delta^{-1} = (e^{\mathrm{D}}-1)^{-1} = \frac{1}{\mathrm{D} + \frac{1}{2\,!}\mathrm{D}^2 + \frac{1}{3\,!}\mathrm{D}^3 + \frac{1}{4\,!}\mathrm{D}^4 + \ldots} \qquad \text{(LVII)}$$

Introduzcamos en el numerador el *operador* D —que manejamos *como si fuera* un verdadero factor—

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D} + \frac{1}{2\,!}\mathrm{D}^2 + \frac{1}{3\,!}\mathrm{D}^3 + \frac{1}{4\,!}\mathrm{D}^4 + \ldots} = a + b\mathrm{D} + c\mathrm{D}^2 + d\mathrm{D}^3 + e\mathrm{D}^4 + \ldots$$

donde a, b, c, d, e, ... son coeficientes a determinar.

De la expresión anterior se obtiene, en efecto,

$$\mathrm{D} = \left(\mathrm{D} + \frac{1}{2\,!}\mathrm{D}^2 + \frac{1}{3\,!}\mathrm{D}^3 + \frac{1}{4\,!}\mathrm{D}^4 + \ldots\right)(a + b\mathrm{D} + c\mathrm{D}^2 + d\mathrm{D}^3 + e\mathrm{D}^4 + \ldots) =$$

$$= a\mathrm{D} + \left(\frac{a}{2\,!} + b\right)\mathrm{D}^2 + \left(\frac{a}{3\,!} + \frac{b}{2\,!} + c\right)\mathrm{D}^3 + \left(\frac{a}{4\,!} + \frac{b}{3\,!} + \frac{c}{2\,!} + d\right)\mathrm{D}^4 + \ldots$$

Todo el segundo miembro debe hacerse igual a D. Para ello ha de ser a igual a *uno* y los coeficientes de D^2, D^3, D^4, ... *iguales todos a cero.* Por lo tanto:

$$a = 1$$

$$\frac{a}{2\,!} + b = 0 \qquad \therefore \qquad b = -\frac{a}{2\,!} = -\frac{1}{2}\,.$$

$$\frac{a}{3\,!} + \frac{b}{2\,!} + c = 0 \qquad \therefore \qquad c = -\frac{b}{2\,!} - \frac{a}{3\,!} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{a}{4\,!} + \frac{b}{3\,!} + \frac{c}{2\,!} + d = 0 \quad \therefore \quad d = -\frac{c}{2\,!} - \frac{b}{3\,!} - \frac{a}{4\,!} = -\frac{1}{24} + \frac{1}{12} - \frac{1}{24} = 0$$

De la misma manera se obtienen:

$$e = -\frac{1}{720}; \quad f = 0; \quad g = \frac{1}{30240}; \quad h = 0; \quad i = -\frac{1}{1209600}; \; \ldots$$

Y queda, haciendo las substituciones del caso:

$$\frac{D}{e^D - 1} = 1 - \frac{1}{2}D + \frac{1}{12}D^2 - \frac{1}{720}D^4 + \frac{1}{30240}D^6 - \frac{1}{1209600}D^8 + \ldots \quad \therefore$$

Eliminando, ahora, el *operador* D, que se introdujo *como factor,*

$$\Sigma = \Delta^{-1} = \frac{1}{e^D - 1} = \frac{1}{D} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}D -$$

$$-\frac{1}{720}D^3 + \frac{1}{30240}D^5 - \frac{1}{1209600}D^7 + \ldots \qquad (\alpha)$$

Si aplicamos la expresión (α) a una función, $f(x)$, y tenemos presente que $1/D = D^{-1}$ es, cabalmente, la *operación contraria de la derivación,* queda, integrando entre 0 y n, y recordando [76] que es

$$F_{(n)} - F_{(0)} = \sum_{0}^{n-1} f(x),$$

$$\sum_{0}^{n-1} f(x) = \int_0^n f(x)dx - \frac{1}{2}[f(n) - f(0)] + \frac{1}{12}[f'(n) - f'(0)] -$$

$$-\frac{1}{720}[f'''(n) - f'''(0)] + \frac{1}{30240}[f^{V}(n) - f^{V}(0)] - \ldots \qquad (LVIII) \quad \therefore$$

$$\int_0^n f(x)\,dx = \sum_0^{n-1} f(x) + \frac{1}{2}[f(n) - f(0)] - \frac{1}{12}[f'(n) - f'(0)] +$$

$$+ \frac{1}{720}[f'''(n) - f'''(0)] - \frac{1}{30240}[f^{V}(n) - f^{V}(0)] + \dots \qquad \text{(LIX)}$$

. . . .

[86]. *Observaciones.* I. Los dos primeros términos del segundo miembro de (LIX), representan la suma

$$\frac{1}{2} f(0)+f(1)+f(2)+\dots+f(n-1)+\frac{1}{2}f(n) = \sum_0^n f(x) - \frac{1}{2}[f(n)+f(0)]$$

y, por lo tanto, puede dárseles, también, esta última forma.

II. La función $f(x)$ es, normalmente, decreciente. En tal caso $f(n)$ tiende hacia cero, al crecer n. Y, entonces, es *cómodo* invertir el orden de las diferencias, cambiando el signo exterior

$$-\frac{1}{12}[f'(n)-f'(0)] = +\frac{1}{12}[f'(0)-f'(n)]$$

Y, para valores suficientemente altos de n, el término substrativo desaparece.

[87]. Si, ahora, se hace el intervalo igual a h la integral queda multiplicada por $1/h$, y las sucesivas derivadas por h, h^3, $h^5 \dots$, según se trate de la primera, la tercera, la quinta ... (¹)

Se tiene así, *corriendo el origen hasta* a:

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+nh} f(x)\,dx = [f(a)+f(a+h)+\dots+f(a+nh)] - \frac{1}{2}[f(a+nh)+f(a)] -$$

$$-\frac{h}{12}[f'(a+nh)-f'(a)] + \frac{h^3}{720}[f'''(a+nh)-f'''(a)] -$$

$$-\frac{h^5}{30240}[f^{V}(a+nh)-f^{V}(a)] + \dots \qquad \text{(LX)}$$

Es la fórmula de Euler - Maclaurin en su forma más general.

. . . .

(¹) Recuérdese que se partió — para llegar a la fórmula — de la relación $\Sigma = \Delta^{-1} = (e^{D} - 1)^{-1}$.

II

LOS NÚMEROS DE BERNOULLI

[88]. Al determinar la fórmula de EULER-MACLAURIN, tuvimos que efectuar el desarrollo

$$\frac{D}{e^D-1} = 1 - \frac{1}{2}D + \frac{1}{12}D^2 - \frac{1}{720}D^4 + \frac{1}{30240}D^6 - \frac{1}{1209600}D^8 + \dots$$

Desarrollo al que se le puede dar la forma que sigue —reemplazando antes D por x:

$$\frac{x}{e^x-1} = B_0 + \frac{B_1}{1\,!}x + \frac{B_2}{2\,!}x^2 + \frac{B_3}{3\,!}x^3 + \frac{B_4}{4\,!}x^4 + \dots$$

Los números B que aparecen en este desarrollo son los llamados números de BERNOULLI, que se encuentran con frecuencia en el desarrollo de series. Por eso, aunque sólo incidentalmente se presentan aquí, queremos dedicarles unas cuantas líneas.

Comparando los dos desarrollos anteriores deducimos, en el acto,

$$B_0 = 1; \qquad B_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{B_2}{2\,!} = \frac{1}{12} \qquad \therefore \quad B_2 = \frac{1}{6}$$

$$\frac{B_4}{4\,!} = -\frac{1}{720} \qquad \therefore \quad B_4 = -\frac{1}{30}$$

$$\frac{B_6}{6\,!} = \frac{1}{30240} \qquad \therefore \quad B_6 = \frac{1}{42}$$

$$\frac{B_8}{8\,!} = -\frac{1}{1209600} \qquad \therefore \quad B_8 = -\frac{1}{30}$$

$$B_3 = B_5 = B_7 = B_9 = \dots = 0$$

La relación que define estos números es la que sigue:

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} B_r - B_n = 0 \quad , \quad (\text{con } n > 1)$$

a la que, adoptando el método de separación de símbolos, se le puede dar la siguiente forma,

$$(B+1)^n - B^n = 0$$

donde los subíndices se manejan como exponentes.

Se tiene, así:

$$(B+1)^2 - B^2 = 2B+1 = 0 \quad \therefore \quad B_1 = -{}^1/_2$$

$$(B+1)^3 - B^3 = 3B^2+3B+1 = 0 \quad \therefore \quad B_2 = -{}^1/_3(-{}^3/_2+1) = {}^1/_6$$

$$(B+1)^4 - B^4 = 4B^3+6B^2+4B+1 = 0$$

$$\therefore \quad B_3 = -{}^1/_4(6\times{}^1/_6 - 4\times{}^1/_2+1) = 0$$

$$(B+1)^5 - B^5 = 5B^4+10B^3+10B^2+5B+1 = 0$$

$$\therefore \quad B_4 = -{}^1/_5(10\times 0+10\times{}^1/_6 - 5\times{}^1/_2+1) = -{}^1/_{30}$$

Y así sucesivamente.

III

LA FÓRMULA DE WOOLHOUSE

[89]. Si en la fórmula de EULER-MACLAURIN, (LX), se reemplaza h por h/m, sin alterar el límite superior, queda:

$$\frac{m}{h}\int_a^{a+nh} f(x)dx = [f(a)+f(a+h/m)+f(a+2h/m)+\ldots+f(a+nh)] -$$

$$- {}^1/_2[f(a+nh)+f(a)] - \frac{h}{12m}[f'(a+nh)-f'(a)] +$$

$$+ \frac{h^3}{720m^3}[f'''(a+nh)-f'''(a)] - \frac{h^5}{30240m^5}[f^{V}(a+nh)-f^{V}(a)] + \ldots \qquad (\alpha)$$

Y, si en la misma se introduce un factor m, resulta:

$$\frac{m}{h}\int_a^{a+nh} f(x)dx = m[f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+nh)] -$$

$$- \frac{m}{2}[f(a+nh)+f(a)] - \frac{mh}{12}[f'(a+nh)-f'(a)] +$$

$$+ \frac{mh^3}{720}[f'''(a+nh)-f'''(a)] - \frac{mh^5}{30240}[f^{V}(a+nh)-f^{V}(a)] + \ldots \qquad (\beta)$$

Los primeros miembros de (α) y (β) son iguales. Igualando los segundos y despejando el primer término de (α) que escribimos así:

$$\sum_{a}^{a+nh}{}_{h/m}\, f(x)$$

Se tiene

$$\sum_{a}^{a+nh}{}_{h/m}\, f(x) = m\sum_{a}^{a+nh} f(x) - \frac{m-1}{2}\left[f(a+nh)+f(a)\right] -$$

$$-\frac{(m^2-1)h}{12m}\left[f'(a+nh)-f'(a)\right] + \frac{(m^4-1)h^3}{720m^3}\left[f'''(a+nh)-f'''(a)\right] -$$

$$-\frac{(m^6-1)h^5}{30240m^5}\left[f^{\mathrm{V}}(a+nh)-f^{\mathrm{V}}(a)\right] + \dots \qquad \text{(LXI)}$$

Es la fórmula de Woolhouse.

[**90**]. A la fórmula anterior se le suele dar otra forma, con la cual se obtiene, en muchos casos, mejor aproximación.

Partamos, como antes, de la (LX), pero hagamos en ella $a=0$; $h=m$, queda:

$$\frac{1}{m}\int_0^{nm} f(x)dx = [f(0)+f(m)+f(2m)+\dots+f(nm)] - {}^1/_2[f(nm)+f(0)] -$$

$$-\frac{m}{12}[f'(nm)-f'(0)] + \frac{m^3}{720}[f'''(nm)-f'''(0)] -$$

$$-\frac{m^5}{30240}[f^{\mathrm{V}}(nm)-f^{\mathrm{V}}(0)] + \dots \qquad (\alpha)$$

Y, si se hacen, en la misma (LX), $a=0$; $h=1$, y se toma como límite superior nm, queda:

$$\int_0^{nm} f(x)dx = [f(0)+f(1)+f(2)+\dots+f(m)+\dots+f(nm)] -$$

$$-{}^1/_2[f(nm)+f(0)] - \frac{1}{12}[f'(nm)-f'(0)] + \frac{1}{720}[f'''(nm)-f'''(0)] -$$

$$-\frac{1}{30240}[f^{\mathrm{V}}(nm)-f^{\mathrm{V}}(0)] + \dots \qquad (\beta)$$

Multiplicando (α) por m, se tiene:

$$\int_0^{nm} f(x)dx = m\,[f(0)+f(m)+f(2m)+\ldots+f(nm)] -$$

$$-\frac{m}{2}[f(nm)+f(0)] - \frac{m^2}{12}[f'(nm)-f'(0)] + \frac{m^4}{720}[f'''(nm)-f'''(0)] -$$

$$-\frac{m^6}{30240}[f^{\mathrm{V}}(nm)-f^{\mathrm{V}}(0)] + \ldots \qquad (\gamma)$$

Igualando, ahora, los segundos miembros de (β) y (γ), y despejando el primer término de (β) resulta:

$$f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(nm) = m\,[f(0)+f(m)+f(2m)+\ldots+f(nm)] -$$

$$-\frac{m-1}{2}[f(nm)+f(0)] - \frac{m^2-1}{12}[f'(nm)-f'(0)] +$$

$$+\frac{m^4-1}{720}[f'''(nm)-f'''(0)] - \ldots$$

O, mejor aún, escribiendo las sumas indicadas mediante los sumatorios $\sum\limits_0^{nm} f(x)$ y $m\sum\limits_0^{nm}{}^{(m)} f(x)$, respectivamente:

$$\sum_0^{nm} f(x) = m\sum_0^{nm}{}^{(m)} f(x) - \frac{m-1}{2}[f(nm)+f(0)] - \frac{m^2-1}{12}[f'(nm)-f'(0)] +$$

$$+\frac{m^4-1}{720}[f'''(nm)-f'''(0)] - \frac{m^6-1}{30240}[f^{\mathrm{V}}(nm)-f^{\mathrm{V}}(0)] + \ldots \qquad (\mathrm{LXI}, a)$$

IV

La fórmula de Lubbock

[91]. Hagamos en la primera fórmula de Woolhouse (LXI), $h=1$ y $a=0$, queda:

$$\sum_0^{n}{}_{1/m} f(x) = m\sum_0^{n} f(x) - \frac{m-1}{2}[f(n)+f(0)] - \frac{m^2-1}{12m}[f'(n)-f'(0)] +$$

$$+\frac{m^4-1}{720m^3}[f'''(n)-f'''(0)] - \frac{m^6-1}{30240m^5}[f^{\mathrm{V}}(n)-f^{\mathrm{V}}(0)] + \ldots \qquad (\alpha)$$

Escribiendo las derivadas en función de las diferencias [71] se tiene:

$$f'(0) = \Delta f(0) - {}^1/_2\,\Delta^2 f(0) + {}^1/_3\,\Delta^3 f(0) - {}^1/_4\,\Delta^4 f(0) + {}^1/_5\,\Delta^5 f(0)$$

$$f'(n) = \Delta f(n-1) + {}^1/_2\,\Delta^2 f(n-2) + {}^1/_3\,\Delta^3 f(n-3) + {}^1/_4\,\Delta^4 f(n-4) + {}^1/_5\,\Delta^5 f(n-5)$$

$$f'''(0) = \Delta^3 f(0) - {}^3/_2\,\Delta^4 f(0) + {}^7/_4\,\Delta^5 f(0)$$

$$f'''(n) = \Delta^3 f(n-3) + {}^3/_2\,\Delta^4 f(n-4) + {}^7/_4\,\Delta^5 f(n-5)$$

$$f^{V}(0) = \Delta^5 f(0)$$

$$f^{V}(n) = \Delta^5 f(n-5)$$

Téngase presente que, al calcular las distintas diferencias de $f(n)$ se han tomado en forma *retrógrada, dando vuelta al cuadro de las diferencias; luego, las impares deberían cambiar de signo. Pero las derivadas cambian de signo, también. Luego, las diferencias que, en definitiva, han cambiado de signo en este caso son las pares.*

Se tiene, entonces, reemplazando en (α):

$$\sum_0^n {}_{1/m}\, f(x) = m \sum_0^n f(x) - \frac{m-1}{2}[f(n)+f(0)] - \frac{m^2-1}{12m}\Big\{\Delta f(n-1) + {}^1/_2\,\Delta^2 f(n-2) + {}^1/_3\,\Delta^3 f(n-3) + {}^1/_4\,\Delta^4 f(n-4) + {}^1/_5\,\Delta^5 f(n-5) - [\Delta f(0) - {}^1/_2\,\Delta^2 f(0) + {}^1/_3\,\Delta^3 f(0) - {}^1/_4\,\Delta^4 f(0) + {}^1/_5\,\Delta^5 f(0)]\Big\} + \frac{m^4-1}{720m^3}\Big\{\Delta^3 f(n-3) + {}^3/_2\,\Delta^4 f(n-4) + {}^7/_4\,\Delta^5 f(n-5) - [\Delta^3 f(0) - {}^3/_2\,\Delta^4 f(0) + {}^7/_4\,\Delta^5 f(0)]\Big\} - \frac{m^6-1}{30240m^5}[\Delta^5 f(n-5) - \Delta^5 f(0)] - \ldots$$

$$\sum_0^n {}_{1/m}\, f(x) = m \sum_0^n f(x) - \frac{m-1}{2}[f(n)+f(0)] - \frac{m^2-1}{12m}[\Delta f(n-1) - \Delta f(0)] - \frac{m^2-1}{24m}[\Delta^2 f(n-2) + \Delta^2 f(0)] - \left[\frac{m^2-1}{36m} - \frac{m^4-1}{720m^3}\right][\Delta^3 f(n-3) - \Delta^3 f(0)] - \left[\frac{m^2-1}{48m} - \frac{m^4-1}{480m^3}\right][\Delta^4 f(n-4) + \Delta^4 f(0)] - \left[\frac{m^2-1}{60m} - \frac{7(m^4-1)}{2880m^3} + \frac{m^6-1}{30240m^5}\right][\Delta^5 f(n-5) - \Delta^5 f(0)] - \ldots$$

$$\sum_{0}^{n}{}_{1/m} f(x) = m \sum_{0}^{n} f(x) - \frac{m-1}{2}[f(n)+f(0)] - \frac{m^2-1}{12m}[\Delta f(n-1)-\Delta f(0)] -$$

$$-\frac{m^2-1}{24m}[\Delta^2 f(n-2)+\Delta^2 f(0)] - \frac{(m^2-1)(19m^2-1)}{720m^3}[\Delta^3 f(n-3)-\Delta^3 f(0)] -$$

$$-\frac{(m^2-1)(9m^2-1)}{480m^3}[\Delta^4 f(n-4)+\Delta^4 f(0)] -$$

$$-\frac{(m^2-1)(863m^4-145m^2+2)}{60480m^5}[\Delta^5 f(n-5)-\Delta^5 f(0)] - \dots \quad \text{(LXII)}$$

Es la fórmula de LUBBOCK.

V

OTRAS FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN APROXIMADA

[92]. Sea una función u_x cuya forma no conocemos, pero de la que tenemos los valores que toma cuando x se hace igual a a, $a+h$, $a+2h$, ... Podemos valernos de ellos para avaluar, aproximadamente, la integral.

En efecto, tomemos tres valores *equidistantes* de x, y hagamos igual a *cero* el valor central, e iguales a -1 y a $+1$, respectivamente, los otros dos. Pongamos:

$$\int_{-1}^{+1} u_x\, dx = m u_0 + r(u_{-1} + u_{+1}) \qquad (\alpha)$$

donde m y r son coeficientes a determinar. Si admitimos, ahora, que u_x se puede representar, aproximadamente, por una función de tercer grado, resulta:

$$u_x = a + bx + cx^2 + dx^3$$

$$u_0 = a$$

$$u_1 = a + b + c + d$$

$$u_{-1} = a - b + c - d$$

$$u_{-1} + u_{+1} = 2a + 2c$$

$$\int_{-1}^{+1} u_x\, dx = ma + r(2a+2c) = (m+2r)a + 2rc \qquad (\beta)$$

Por otra parte, integrando la función de tercer grado, se tiene:

$$\int_{-1}^{+1} v_x\, dx = \int_{-1}^{+1} (a+bx+cx^2+dx^3)dx = \left[ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \frac{dx^4}{4}\right]_{-1}^{+1} =$$

$$= 2a + {}^2/_3\, c \qquad (\gamma)$$

Como (β) y (γ) son iguales, los coeficientes de a y de c en ambas han de ser también iguales. Por lo tanto:

$$m + 2r = 2; \qquad 2r = {}^2/_3; \qquad \therefore\ r = {}^1/_3; \qquad m = {}^4/_3$$

Llevando esos valores a (α), nuestra integral se hace:

$$\int_{-1}^{+1} u_x\, dx = {}^4/_3\, u_0 + {}^1/_3(u_{-1}+u_1) = {}^1/_3\,(u_{-1}+4u_0+u_1) \qquad \text{(LXIII)}$$

Llevando el origen a 0, y haciendo el intervalo igual a n, x toma los valores 0, n y $2n$. Por lo tanto:

$$\int_0^{2n} u_x\, dx = \frac{n}{3}\,[u_0 + 4u_n + u_{2n}] \qquad \text{(LXIII } a\text{)}$$

Si conocemos un número suficiente de valores de x podemos integrar entre los límites 0 y $2kn$. Basta, en efecto, recordar que

$$\int_0^{2kn} u_x\, dx = \int_0^{2n} u_x\, dx + \int_{2n}^{4n} u_x\, dx + \ldots + \int_{2n(k-1)}^{2kn} u_x\, dx.$$

Se tiene así:

$$\int_0^{2nk} u_x = \frac{n}{3}\,[u_0+4u_n+u_{2n}+u_{2n}+4u_{3n}+u_{4n}+\ldots+u_{2kn}] =$$

$$= \frac{n}{3}\,[(u_0+u_{2kn})+2(u_{2n}+u_{4n}+\ldots+u_{2(k-1)n})+$$

$$+4(u_n+u_{3n}+\ldots+u_{(2k-1)n})] \qquad \text{(LXIII } b\text{)}$$

Es la fórmula de SIMPSON.

[93]. *Observación.* Si se representa gráficamente la función u_x, integrarla es hallar el area encerrada entre el eje de las abscisas, las ordenadas extremas y la curva — a trazar — que une los extremos de todas las ordenadas. Ahora bien, notemos que tal área encierra tantas *fajas verticales de base uno* —unidad convencional— como indica la diferencia entre las abscisas extremas: $2kn$.

Y notemos que esa diferencia no variará aunque corramos el origen hasta a, porque, entonces, el límite superior se hace $a+2kn$. Pues bien, el número de ordenadas que se incluyen en el cálculo aproximado es, precisamente, $2kn$, *teniendo en cuenta, desde luego, los coeficientes respectivos*. Así, en la fórmula (LXIII) las *fajas* son *dos*, y el número de ordenadas es —en definitiva— la *tercera parte de seis*, es decir, *dos*. En la fórmula (LXIII a) el número de *fajas* es $2n$, y el de ordenadas es $6n/3 = 2n$, también. Y en todas las fórmulas de este tipo —que se verán en seguida— ocurre lo propio. Esta observación justifica, en cierto modo, el procedimiento.

[94]. Tomemos los valores de u_x que corresponden a $x = -{}^3/_2$; $-{}^1/_2$; ${}^1/_2$; ${}^3/_2$, y admitamos que u_x se *puede* representar, aproximadamente, por una función de tercer grado,

$$u_x = a+bx+cx^2+dx^3$$

Tenemos:

$$\int_{-3/2}^{3/2} u_x\,dx = \left[ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \frac{dx^4}{4}\right]_{-3/2}^{+3/2} = 3a+{}^9/_4\,c \qquad (\alpha)$$

Y, también,

$$\int_{-3/2}^{3/2} u_x\,dx = m(u_{-1/2} + u_{1/2})+r(u_{-3/2} + u_{3/2}) \qquad (\beta)$$

Pero,

$$u_{1/2} = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} + \frac{d}{8}; \qquad u_{-1/2} = a - \frac{b}{2} + \frac{c}{4} - \frac{d}{8}.$$

$$u_{-1/2} + u_{1/2} = 2a + \frac{c}{2} \qquad \therefore \quad m(u_{-1/2} + u_{1/2}) = 2am + \frac{cm}{2}$$

y

$$u_{3/2} = a + \frac{3b}{2} + \frac{9c}{4} + \frac{27d}{8}; \qquad u_{-3/2} = a - \frac{3b}{2} + \frac{9c}{4} - \frac{27d}{8} \quad \therefore$$

$$u_{3/2} + u_{-3/2} = 2a + \frac{9c}{2} \qquad \therefore \quad r(u_{3/2} + u_{-3/2}) = 2ar + \frac{9cr}{2}$$

Llevando esos resultados a (β), se tiene:

$$\int_{-3/2}^{3/2} u_x\,dx = 2am + \frac{cm}{2} + 2ar + \frac{9cr}{2} \qquad (\gamma)$$

Los segundos miembros de (α) y (γ) són iguales, por lo tanto, los coefientes de a y de c también lo son,

$$2m + 2r = 3$$

$$\frac{m}{2} + \frac{9r}{2} = \frac{9}{4} \qquad \therefore \quad r = {}^3/_8\,; \qquad m = {}^9/_8$$

Y la integral se hace:

$$\int_{-3/2}^{3/2} u_x\,dx = {}^9/_8(u_{-1/2} + u_{1/2}) + {}^3/_8(u_{-3/2} + u_{3/2}) =$$

$$= {}^3/_8(u_{-3/2} + 3u_{-1/2} + 3u_{1/2} + u_{3/2})$$

Llevando el origen a *cero*; haciendo, como antes, igual a n el intervalo, y considerando una suma de integrales, queda, en fin:

$$\int_0^{3kn} u_x\,dx = \frac{3n}{8}\,[u_0 + 3u_n + 3u_{2n} + u_{3n} + u_{3n} +$$

$$+ 3u_{4n} + 3u_{5n} + u_{6n} + \ldots + u_{3kn}] =$$

$$= \frac{3n}{8}\,[(u_0 + u_{3kn}) + 2(u_{3n} + u_{6n} + \ldots + u_{3(k-1)n}) +$$

$$+ 3(u_n + u_{2n} + u_4 u + u_{5n} + \ldots + u_{(3k-1)n})] \qquad \text{(LXIV)}$$

Es la fórmula llamada de los *tres octavos*.

[95]. Admitamos que u_x es una función de quinto grado,

$$u_x = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5$$

Integrando entre -3 y $+3$, queda:

$$\int_{-3}^{3} u_x\,dx = \left[ax + \frac{b}{2}x^2 + \frac{c}{3}x^3 + \frac{d}{4}x^4 + \frac{e}{5}x^5 + \frac{f}{6}x^6\right]_{-3}^{3} =$$

$$= 6a + 18c + 97{,}2e \qquad (\alpha)$$

Determinemos el valor de la integral en función de los valores de u_{-3}, u_{-2}, u_0, u_2, u_3, tenemos:

$$\int_{-3}^{3} u_x\,dx = mu_0 + r(u_{-2}+u_2) + p(u_{-3}+u_3) \qquad (\beta)$$

Pero

$$u_0 = a \qquad \therefore \qquad mu_0 = ma$$

$$u_2 = a+2b+4c+8d+16e+32f \qquad \therefore \qquad r(u_{-2}+u_2) = 2ra+8rc+32re$$

$$u_3 = a+3b+9c+27d+81e+243f \qquad \therefore \qquad p(u_{-3}+u_3) = 2pa+18pc+162pe$$

Luego,

$$\int_{-3}^{3} u_x\,dx = ma+2ra+8rc+32re+2pa+18pc+162pe \qquad (\gamma)$$

Igualando, ahora, los coeficientes de a, c y e en (α) y (γ), queda:

$$\begin{aligned} m+2r+\ 2p &= 6 \\ 8r+\ 18p &= 18 \\ 32r+162p &= 97{,}2 \qquad \therefore \qquad p=0{,}28;\quad r=1{,}62;\quad m=2{,}20 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_{-3}^{3} u_x\,dx = 2{,}20u_0 + 1{,}62(u_{-2}+u_2) + 0{,}28(u_{-3}+u_3) \qquad \text{(LXV)}$$

Cambiando límites,

$$\int_{0}^{6n} u_x\,dx = n\,[\,2{,}20u_{3n} + 1{,}62(u_n+u_{5n}) + 0{,}28(u_0+u_{6n})\,] \qquad \text{(LXV } a)$$

Es la fórmula de Hardy.

Cuando se la usa en cálculo actuarial en funciones que, para valores altos de x, tienden rápidamente hacia cero, se suele añadir — según lo indiquen las circunstancias — uno o dos términos más, llevando el límite superior a ∞. Toma, entonces, la forma:

$$\int_{0}^{\infty} v_x\,dx = n\,[0.28v_0 + 1.62v_n + 2{,}20v_{3n} + 1.62v_{5n} + \dots$$

$$+ 0{,}56v_{6n} + 1{,}62v_{7n}] \qquad \text{(LXV } b)$$

En cálculo actuarial se distingue esta fórmula con la denominación de (39 *a*), número con el cual figura en el famoso libro de George King, donde fué divulgada.

[96]. Es posible, como se ve, *construir* fórmulas análogas con relativa facilidad. Damos, como último ejemplo, una de las más difundidas: la de Weddle.

Tomemos como base

$$u_x = a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+gx^6$$

Integrando entre -3 y $+3$ se tiene:

$$\int_{-3}^{+3} u_x\,dx = \left[ax + \frac{b}{2}x^2 + \frac{c}{3}x^3 + \frac{d}{4}x^4 + \frac{e}{5}x^5 + \frac{f}{6}x^6 + \frac{g}{7}x^7\right]_{-3}^{+3} =$$

$$= 6a+18c+\frac{486}{5}e + \frac{4374}{7}g$$

Pongamos, además,

$$\int_{-3}^{+3} u_x\,dx = mu_0+r(u_{-1}+u_1)+p(u_{-2}+u_2)+q(u_{-3}+u_3)$$

Utilizando los mismos procedimientos seguidos hasta aquí se hallan los siguientes resultados:

$$m = 1{,}8; \qquad r = 0{,}3; \qquad p = 1{,}5; \qquad q = 0{,}3$$

Hagamos notar que, al determinar q, se tropieza con una pequeña dificultad material: el resultado *no es exacto.* Pero la diferencia es mínima y puede ser desdeñada. Cambiando el origen y haciendo el intervalo igual a n, resulta:

$$\int_0^{6n} u_x dx = n[0{,}3(u_0+u_{6n})+1{,}5(u_n+u_{5n})+0{,}3(u_{2n}+u_{4n})+1{,}8u_{3n}] \quad \text{(LXVI)}$$

Nótese que, a pesar de la dificultad apuntada, los coeficientes son tales que el número de valores de la función que se toman — habida buena cuenta de esos coeficientes — es precisamente $6n$.

VI

APLICACIONES

[97]. I. Calculemos, mediante la fórmula de EULER-MACLAURIN la suma de las potencias de grado t de los números desde 1 hasta n.

Se tiene (LVIII)

$$\sum_{0}^{n-1} f(x) = \int_{0}^{n} f(x)\,dx - {}^1/_2[f(n)-f(0)] + {}^1/_{12}[f'(n)-f'(0)] -$$

$$- {}^1/_{720}[f'''(n)-f'''(0)] + {}^1/_{30240}[f^{V}(n)-f^{V}(0)] - \dots$$

Que también se puede escribir,

$$\sum_{0}^{n} f(x) = \int_{0}^{n} f(x)\,dx + {}^1/_2[f(n)+f(0)] + {}^1/_{12}[f'(n)-f'(0)] -$$

$$- {}^1/_{720}[f'''(n)-f'''(0)] + \dots$$

En este caso son:

$$f(x) = x^t; \qquad \int_{0}^{n} x^t\,dx = \left[\frac{x^{t+1}}{t+1}\right]_0^n = \frac{n^{t+1}}{t+1};$$

$$f'(x) = tx^{t-1}; \qquad (x) = t(t-1)(t-2)x^{t-3}.$$

Y, como todos los valores se anulan para $x=0$, se tiene:

$$\sum_{0}^{n} x^t = \frac{n^{t+1}}{t+1} + \frac{n^t}{2} + {}^1/_{12} t n^{t-1} - {}^1/_{720} t(t-1)(t-2)n^{t-3} +$$

$$+ {}^1/_{30240}\, t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)n^{t-5} - \dots$$

Haciendo, sucesivamente, $t=4$; $t=3$, se llega a las conocidas fórmulas:

$$\sum_{0}^{n} x^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

y

$$\sum_{0}^{n} x^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{n^2(n^2+2n+1)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Nótese que se dejan de lado los términos en que no figura n.

II. Calculemos la suma de los valores de x^{-1}, cuando x varía entre 50 y 100, ambos inclusive. Usaremos la fórmula de LUBBOCK

$$\sum_0^n {}_{1/m} f(x) = m \sum_0^n f(x) - \frac{m-1}{2}[f(n)+f(0)] - \frac{m^2-1}{12m}[\Delta f(n-1) - \Delta f(0)] -$$

$$-\frac{m^2-1}{24m}[\Delta^2 f(n-2)+\Delta^2 f(0)] - \frac{(m^2-1)(19m^2-1}{720\, m^3}[\Delta^3 f(n-3) - \Delta^3 f(0)] -$$

$$-\frac{(m^2-1)(9m^2-1)}{480m^3}[\Delta^4 f(n-4)+\Delta^4 f(0)] - \ldots$$

Corriendo en ella hasta a el límite inferior, y haciendo:

$$f(x) = \frac{1}{x}; \qquad f(a) = \frac{1}{50}; \qquad f(a+n) = \frac{1}{100}; \qquad m = 10$$

resulta:

x	$f(x)$	$10^9\,\Delta$	$10^9\,\Delta^2$	$10^9\,\Delta^3$	$10^5\,\Delta^4$
50	0, 020 000 000				
		—3 333 333			
60	0, 016 666 667		952 380		
		—2 380 953		—357 141	
70	0, 014 285 714		595 239		158 727
		—1 785 714		—198 414	
80	0, 012 500 000		396 825		79 367
		—1 388 889		—119 047	
90	0, 011 111 111		277 778		
		—1 111 111			
100	0, 010 000 000				
	0. 084 563 492				

Apliquemos la fórmula tomando como unidad la novena cifra decimal

$$10^9 \sum_{50}^{100} x^{-1} = 10 \times 84563492 - {}^9/_2(10\,000\,000 + 20\,000\,000) -$$

$$-{}^{99}/_{120}(-1\,111\,111 + 3\,333\,333) - {}^{99}/_{240}(277\,778 + 952\,380) -$$

$$-\frac{99 \times 1899}{720\,000}(-119\,047 + 357\,141) - \frac{99 \times 899}{480\,000}(79367 + 158727) =$$

$$= 708\,187\,831$$

$$\sum_{50}^{100} x^{-1} = 0{,}708\,188$$

La cifra exacta —hasta el sexto decimal— es: 0,708 172.

III. Apliquemos al mismo ejercicio la segunda fórmula de WOOLHOUSE (LXI a):

$$\sum_{0}^{nm} f(x) = m\sum_{0}^{nm}{}^{(m)} f(x) - \frac{m-1}{2}[f(nm)+f(0)] - \frac{m^2-1}{12}[f'(nm)-f'(0)] + \dots$$

Tenemos ya, partiendo como antes de $a = 50$:

$$m\sum_{a}^{a+nm}{}^{(m)} f(x) = 10\sum_{50}^{100}{}^{(10)} x^{-1} = 0{,}845635\,;$$

$$\frac{m-1}{2}[f(a+mn)+f(a)] = {}^9/_2(0{,}01+0{,}02) = 0{,}135$$

Ahora,

$$f'(x) = -x^{-2};\ f'(a+mn) = f'(100) = -\frac{1}{10000};\ f'(a) = -\frac{1}{2500} = -\frac{4}{10000}$$

$$\frac{m^2-1}{12}[f'(a+mn)-f'(a)] = \frac{99}{12}(-0{,}0001+0{,}0004) = 0{,}002475$$

Por lo tanto —prescindiendo de los términos en $f'''(x)$ y siguientes, que son muy pequeños—

$$\sum_{50}^{100} x^{-1} = 0{,}845635 - 0{,}135 - 0{,}002475 = 0{,}708160.$$

IV. Hallemos, mediante las fórmulas de integración aproximada, los valores que toma la integral de probabilidad, que figura en la página 57, para $\lambda = 0{,}5$. Nos valdremos, para ello, de los valores de e^{-x^2} tabulados en la página 56.

Calcularemos, ante todo, la integral $1 - \Theta(\lambda)$, es decir, la integral cuyos límites son λ y *más infinito*, límite este último para el cual se anulan la función y sus derivadas.

Usaremos, ante todo, la fórmula de EULER-MACLAURIN (LX)

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+nh} f(x)dx = [f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+nh)] - {}^1/_2[f(a+nh)+f(a)] -$$

$$-\frac{h}{12}[f'(a+nh)-f'(a)] + \frac{h^3}{720}[f'''(a+nh)-f'''(a)] -$$

$$-\frac{h^5}{30240}[f^{V}(a+nh)-f^{V}(a)] + \ldots =$$

$$= [f(a)+f(a+h)+\ldots] - {}^1/_2 f(a) + \frac{h}{12}f'(a) - \frac{h^3}{720}f'''(a) + \ldots$$

desde que para el límite superior — ya se dijo — se anulan la función y sus derivadas.

Para $\lambda = 0{,}5$ y $h = 0{,}3$, resulta — de conformidad con los valores de la tabla de la página 56 — y siendo $a = 0{,}5$, $a+h = 0{,}8$, ...

$f(0{,}5) =$	0,77880
$f(0{,}8) =$	0,52729
$f(1{,}1) =$	0,29820
$f(1{,}4) =$	0,14086
$f(1{,}7) =$	0,055576
$f(2) =$	0,018316
$f(2{,}3) =$	0,005042
$f(2{,}6) =$	0,001159
$f(2{,}9) =$	0,0002226
$f(3{,}2) =$	0,0000357
$f(3{,}5) =$	0,0000048
	1,8255061
$-{}^1/_2 f(0{,}5)$	—0,3894
	1,4361061

Ahora, son:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2};\quad f''(x) = (-2+4x^2)e^{-x^2};\quad f'''(x) = (12x-8x^3)e^{-x^2}.$$

Luego

$$\frac{h}{12}f'(a) = \frac{0{,}3}{12} \times -2 \times 0{,}5 \times 0{,}7788 = -0{,}01947$$

$$-\frac{h^3}{720}f'''(a) = -\frac{0{,}027}{720} \times (12 \times 0{,}5 - 8 \times 0{,}125)0{,}7788 = -0{,}000146025$$

Por lo tanto, como $h = 0{,}3$, $1/h = {}^{10}/_3$ queda:

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+nh} f(x)\,dx = {}^{10}/_3 \int_{0,5}^{\infty} e^{-x^2}dx = 1{,}436106 - 0{,}01947 -$$

$$- 0{,}000146 = 1{,}41649$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0,5}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times {}^3/_{10} \times 1{,}41649 =$$

$$= 2 \times 0{,}56419 \times 0{,}3 \times 1{,}41649 = 0{,}4795017$$

y

$$\Theta(5) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{0,5} e^{-x^2}dx = 1 - 0{,}4795017 = 0{,}5204983$$

La tabla da 0,5204999.

V. Calculemos la misma integral utilizando la fórmula de Hardy, bajo la forma conocida por (39 a) —que es nuestra (LXV b)

$$\int_{0,5}^{\infty} u_x\,dx = n[0{,}28u_0 + 1{,}62(u_n + u_{5n}) + 2{,}2u_{3n} + 0{,}56u_{6n} + 1{,}62u_{7n}]$$

Son aquí: $u_0 = e^{-0,5^2}$; $u_n = e^{-0,8^2}$; $u_{3n} = e^{-1,4^2}$; ... Luego:

$u_0 = 0{,}77880$; $u_n = 0{,}52729$; $u_{3n} = 0{,}14086$; $u_{5n} = 0{,}018316$

$u_{6n} = 0{,}005042$; $u_{7n} = 0{,}001159$

Y, entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
0{,}28u_0 &= 0{,}28 \times 0{,}77880 &&= 0{,}21806\\
1{,}62(u_n + u_{5n}) &= 1{,}62 \times 0{,}545606 &&= 0{,}88388\\
2{,}2u_{3n} &= 2{,}2 \times 0{,}14086 &&= 0{,}30989\\
0{,}56u_{6n} &= 0{,}56 \times 0{,}005042 &&= 0{,}00282\\
1{,}62u_{7n} &= 1{,}62 \times 0{,}001159 &&= \underline{0{,}00188}\\
& && \ 1{,}41653
\end{aligned}$$

$$\int_{0,5}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 0{,}3 \times 1{,}41653 = 0{,}424959$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0,5}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 1{,}128 \times 0{,}424959 = 0{,}479354 \ldots$$

Por lo tanto

$$\Theta(0{,}5) = 1 - 0{,}479354 = 0{,}520646$$

Aplicando las fórmulas de WEDDLE y de SIMPSON y la de los $^3/_8$, se obtienen respectivamente — para el mismo valor de λ — los resultados siguientes:

WEDDLE:	0,52061
SIMPSON:	0,520875
$^3/_8$ ...:	0,52221

Dejamos a cargo del leclor verificar esos resultados. En los tres casos se tomó para h el mismo valor, 0,3, y se utilizó como último término para el cálculo $u_{9n} = e^{-3,2^2} = 0{,}0000357$. Los que le siguen son, prácticamente, nulos.

BIBLIOGRAFIA

H. Poincaré — Calcul des probilités, París, 1896.

J. Bertrand — Calcul des probabilités, París, 1907.

E. Borel — Calcul des probabilités, París, 1925.

E. Borel — Le hasard, París, 1914.

G. Castelnuovo — Calcolc delle probabilità, Bologna, 1928.

L. Bachelier — Calcul des probabilités, París, 1912.

L. Bachelier — Le jeu, la chance et le hasard, París, 1914.

P. S. de Laplace — Essai philosophique sur les probabilités. (Hay traducción castellana).

J. V. Uspensky — Matemáticas del cálculo de las probabilidades. Versión castellana. Buenos Aires, 1947.

Fréchet et Halbwachs — Le calcul des probabilités à la portée de tous. París, 1947.

G. Boole — Calculus of finite differences. London, 1860.

J. Steffenson — Interpolation. Baltimore, 1927.

E. T. Whitaker and G. Robinson — The calculus of observations. London, 1939.

H. Freeman — Mathematics for actuarial students. Cambridge, 1939.

L. M. Milne Thomson — The calculus of finite differences. London. 1933.