UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

INSTITUTO DE BIOMETRIA

DIRECTOR DR. JOSE GONZALEL GALE

CUADERNOS DE TRABAJO

Nº 7

INTERPOLACION Y AJUSTAMIENTO DE LA CURVA LOGISTICA GENERALIZADA

POR

J. BARRAL SOUTO

BUENOS AIRES
IMPRENTA DE LA UNIVERSIDAD
1938

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS

Decano

Dr. Juan Bayetto

Delegados Titulares al Consejo Superior

Dr. Alfredo L. Palacios
Dr. Enrique César Urien

Delegados Suplentes al Consejo Superior

Dr. Martiniano Leguizamón Pondal
Ing. Justo Pascali

Vicedecano

Dr. Diego Luis Molinari

CONSEJO DIRECTIVO

Consejeros Titulares de los Profesores Titulares

Dr. Juan Bayetto
Ing. Lorenzo Dagnino Pastore
Dr. Raúl Giménez Videla
Ing. Ricardo J. Gutiérrez
Dr. Alfredo Labougle
Dr. Diego Luis Molinari
Dr. Lucio M. Moreno Quintana
Dr. Wenceslao Urdapilleta

Consejeros Titulares de los Profesores Extraordinarios y Adjuntos

Sr. Carlos P. Claise
Dr. Alberto Diez Mieres
Dr. Guillermo Garbarini Islas
Dr. Lázaro S. Trevisán

Consejeros Suplentes de los Profesores Titulares

Dr. José González Galé
Dr. Luis Roque Gondra
Dr. Salvador Oría
Dr. Gonzalo Saénz (h.)

Consejeros Suplentes de los Profesores Extraordinarios y Adjuntos

Dr. Carlos Alberto Alcorta
Dr. Jorge S. Castro

Delegados Estudiantiles Titulares

Sr. José Alocén — Sr. Héctor J. Gerino — Sr. Carlos A. Gutiérrez

Delegados Estudiantiles Suplentes

Sr. Luis María Daglio — Sr. Adalberto Goubat — Sr. Felipe R. Olmos

Secretario

Dr. Mauricio E. Greffier

Prosecretario - Tesorero

Dr. Santiago E. Bottaro

CURSO ACTUARIAL

Profesores:

Dr. Argentino V. Acerboni ... Matemáticas Actuariales
Dr. José González Galé ...... Biometría

INSTITUTO DE BIOMETRIA

Director .... Dr. José González Galé
Jefe de trabajos . Dr. José Barral Souto
Adscripto .... Actuario y Contador Raúl J. Roca

PUBLICACIONES DEL INSTITUTO

Serie I. — MONOGRAFÍAS DE LOS ALUMNOS:

Nº 1. *Dra. María Orlandi de Tazzi,* Seguro de vidas taradas (I).

Nº 2. » » » » » Seguro de vidas taradas (II).

Nº 3 *Jorge M. Comas y Pedro Goldemberg,* Tabla de mortalidad de la República Argentina.

Nº 4. *Jorge A. González Galé,* Doble ajustamiento de una escala de salarios.

Nº 5. *Enrique J. Siro,* Procedimientos mecánicos para el cálculo de tablas numéricas.

Serie II. — CUADERNOS DE TRABAJO:

Nº 1. *C. V. L. Charlier,* Elementos de estadística matemática.

Nº 2. *Carlos E. Dieulefait,* Teoría matemática de la población.

Nº 3. *José Barral Souto,* El modo y otras medias, casos particulares de una misma expresión matemática.

Nº 4. *José Barral Souto,* Seguro de vida a capital variable.

Nº 5. *Benjamín Harriague,* Determinación de la prima en un seguro en conjunto de cinco o más personas sujetas a mismo riesgo.

Nº 6. *L. Nogueira de Paula,* Economía racional.

Nº 7. *José Barral Souto,* Interpretación y ajustamiento de la curva logística generalizada.

de José Barral Souto

Interpolación y ajustamiento de la curva logística generalizada

1. — El problema que más interesa comúnmente es el de ajustar — y no interpolar — una curva logística a un conjunto de datos censales.

En efecto, la interpolación al exigir un número de parámetros igual al de los datos, complica la expresión matemática de la curva y la presencia de los citados parámetros sólo admite una interpretación formal.

Pero todo problema de *ajustamiento* — que puede expresarse matemáticamente diciendo que *trata de resolver un sistema de ecuaciones en número mayor que el de incógnitas* — importa, en última instancia, un problema de *interpolación* — que *trata de resolver un sistema de ecuaciones en número igual al de incógnitas.* —

Los métodos de ajustamiento analítico — de cuadrados mínimos, momentos, Cauchy, etc., para no citar sino los clásicos — no son otra cosa que criterios — más o menos racionalmente fundados — para reducir el número superabundante de ecuaciones a un número justamente igual al de incógnitas: los distintos parámetros de la expresión matemática adoptada.

Desde otro pnnto de vista puede decirse que para el ajustamiento analítico, se imponen al sistema de ecuaciones *condiciones mínimas de compatibidad* que conducen a reducir el sistema al *número máximo de ecuaciones independientes*, que determinan una solución.

Interesa, pues, conocer primeramente el camino analítico que resuelve la interpolación y, conocido éste, aplicar el criterio de ajustamiento que — para determinar los parámetros — permita seguir un camino paralelo.

2. — Tengamos, entonces, la ecuación de la curva logística de la población en la forma generalizada siguiente [1]:

$$(1) \qquad y = \frac{K}{1 + e^{a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}}}$$

y querramos determinar los parámetros: k, a_0, a_1, ..., a_{n-1} en base a $n + 1$ pares de valores $(x_i \cdot y_i)$ $i = 0, 1, \dots, n$, que pueden corresponder a las fechas: x_i, y a las poblaciones sensadas: y_i.

Tomando logaritmos neperianos en la (1) y poniendo por comodidad

$$H_i = lg\left(\frac{k}{y_i} - 1\right)$$

se obtiene

$$(2) \quad H_i = a_0 + a_1 x_i + \dots + a_{n-1} x_i^{\,n-1} \qquad (i = 0, 1, \dots, n)$$

sistema de $n + 1$ ecuaciones lineales en a_0, a_1, ..., a_n pero no en k.

Para resolver el sistema (1) eliminamos las incógnitas a_0, a_1, ..., a_{n-1} y resulta entonces

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} H_0 & 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} \\ H_1 & 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ H_n & 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando (3) por la primera columna, se tiene

$$(4) \qquad \sum_{i=0}^{n} A_i H_i = 0$$

[1] Raymond Pearl. — *Introduction to Medical Biometry and Statistics*, 2ª ed., 1930, pág. 418.

siendo

$$(5) \qquad A_i = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 1 & x_{i-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & 1 & x_i & \dots & x_i^{n-1} \\ 0 & 1 & x_{i+1} & \dots & x_{i+1}^{n-1} \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

y por lo tanto se verifica que

$$(6) \qquad \sum_{i=0}^{n} A_i = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & x_{i-1} & \dots & x_{i-1}^{n-1} \\ 1 & 1 & x_i & \dots & x^{n-1} \\ 1 & 1 & x_{i+1} & \dots & x_{i+1}^{n-1} \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

A_i es un determinante de Vandermonte cuya notación abreviada — con los elementos que componen su diagonal principal— y valor, es:

$$(7) \quad A_i = (-1)^i \,|\, \overset{0}{x_0} \overset{1}{x_1} \dots \overset{i-1}{x_{i-1}} \, x^{i+1} \dots x^{n-1} | = \prod_{r,s} (x_r - x)_s$$

$$(r, s = 0, 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n; r > s)$$

Teniendo en cuenta que por ser distintas las x_r $(r = 0, 1, \dots, n)$ no pueden ser nulos los determinantes de Vandermonde formados con ellas, es

$$(8) \qquad \frac{A_i}{|\overset{0}{x_0}, \dots, \overset{i}{x_i}, \dots, \overset{n}{x_n}|} =$$

$$= \frac{(-1)^i}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1}) (x_{i+1} - x_i) \dots (x_n - x_i)} =$$

$$= \frac{1}{\prod_s (x_s - x_i)} = A'_i \qquad (s = 0, 1, \dots, n; s \neq i)$$

En lugar de (4) puede escribirse entonces

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{H_i}{\prod_s (x_s - x_i)} = \sum_{i=0}^{n} A'_i H_i = 0 \qquad (i, s = 0, 1, \ldots, n; i \neq s)$$

y recordando el significado definido en (2') para H_i.

$$(9) \qquad \sum_{i=0}^{n} A'_i \lg \left(\frac{k}{y_i} = 1\right) = \lg \prod_{i=0}^{n} \left(\frac{k}{y_i} - 1\right)^{A'_i} = 0$$

como ecuación para hallar k (1). Puede presentarse también la ecuación (9) teniendo en cuenta la relación (6) en esta otra forma:

$$(9') \qquad \sum_{i=0}^{n} A'_i \lg \left(1 - \frac{y_i}{k}\right) = \sum_{i=0}^{n} A'_i \lg y_i$$

3. — Determinado k, se obtiene la expresión de:

$$H = \lg \left(\frac{k}{y} - 1\right) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

formando con ella y n ecuaciones de las definidas en (2), un sistema de $n + 1$ ecuaciones con las incógnitas $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$. La condición necesaria y suficiente para que el sistema así for-

(1) Si los valores de x fueran equidistantes, llamando h al intervalo, pondríamos

$$x_0 = 0 \quad ; \quad x_s - x_i = (s - i)\, h \quad \therefore \quad x_s = s\, h$$

deduciendo para $s = 0, 1, \ldots, n; s \neq i$, que

$$\prod_s (x_s - x_i) = \prod (s - i)\, h = h^n (-1)^i \underline{|i}\ \underline{|n-i} = \frac{1}{A'_i}$$

Tomando al intervalo h como unidad y multiplicando ambos miembros de la (9) por (factorial de n) $\underline{|n}$, en lugar de dicha expresión tendríamos, para la determinación de k

$$\sum_{=0}^{n} \lg \left(\frac{k}{y_i} - 1\right)^{(-1)^i \binom{n}{i}} = \lg \prod_{i=0}^{n} \left(\frac{k}{y_i}\ 1 -\right)^{(-1)\ \binom{n}{i}} = 0$$

mado sea compatible, es la de que sea nulo el determinante formado con los coeficientes y los términos conocidos. Es decir:

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} H & 1 & x & \dots & x^i & \dots & x^{n-1} \\ H_1 & 1 & x_1 & \dots & x_1^i & \dots & x_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ H_r & 1 & x_r & \dots & x_r^i & \dots & x_r^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ H_n & 1 & x_n & \dots & x_n^i & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por la primera columna, se tiene

$$H.A + \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+2} H_r A_r = 0$$

$$(11)\qquad H = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \frac{A_r}{A} H_r$$

A y A_r son determinantes de orden n del tipo Vandermonde, por lo tanto será:

$$\frac{A_r}{A} = \frac{| x^0 x_1^1 \dots x_{r-1}^{r-1} x_{r+1}^r \dots x_n^{n-1} |}{| x_1^0 x_2^1 \dots x_r^{r-1} x_{r+1}^r \dots x_n^{n-1} |} = \frac{\prod_i (x_i - x)}{\prod_i (x_i - x_r)(-1)^{r-1}}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n;\ i \neq r)$$

Esto nos permite presentar la (11) así

$$(12)\quad H = \sum_{r=1}^{n} H_r \frac{(x_1 - x) \dots (x_{r-1} - x)(x_{r+1} - x) \dots (x_n - x)}{(x_1 - x_r) \dots (x_{r-1} - x_r)(x_{r+1} + x_r) \dots (x_n - x_r)}$$

Para expresar H según las potencias ordenadas de x, observemos que el producto efectuado de los numeradores es

$$\prod_i (x_i - x) = \sum_{s=0}^{n-1} \binom{x_1, \dots, x_{r-1}\, x_{r+1}, \dots, x_n}{n-1-s} (-1)^s x^s$$

donde con los términos encerrados entre paréntesis — a modo de coeficiente binominal — se indica la suma de todos los productos posibles, tomando como factores $n - 1 - s$ elementos cada vez, de entre los $x_1, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_n$ (1).

Substituyendo este resultado en (12) se tendrá

(13)

$$H = \sum_{s=0}^{n-1} x^s (-1)^s \sum_{r=0}^{n} H_r \frac{\binom{x_1, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x^n}{n-1-s}}{(x_1 - x_r) \ldots (x_{r-1} - x_r)(x_{r+1} - x_r) \ldots (x_n - x)}$$

por lo tanto es

(14)

$$a_s = (-1)^s \sum_{r=1}^{n} H_r \frac{\binom{x_1, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_n}{n-1-s}}{(x_1 - x_r) \ldots (x_{r-1} - x_r)(x_{r+1} - x_r) \ldots (x_n - x_r)} \quad (2)$$

4. — Para precisar la interpretación de las fórmulas concretaremos las ecuaciones correspondientes a una curva del tipo

$$y = \frac{K}{1 + e^{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}}$$

Las incógnitas a determinar son k, a_0, a_1, a_2, a_3, necesitando, en consecuencia, para la interpolación 5 pares de valores $x_i\, y_i$.

Supondremos que los valores x_i sean equidistantes (observaciones periódicas) su intervalo h, tomado como unidad y el valor

---

(1) v. g.

$$\binom{a,\ b,\ c,\ d}{2} = a\,b + a\,c + a\,d + b\,c + b\,d + c\,d.$$

(2) Para valores equidistantes de x, tendríamos

$$a_s = (-1)^s \sum_{r=1}^{n} H_r \frac{\binom{1, 2, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n}{n-1-s}}{\underline{|r-1}\ \underline{|n-r}\ h^s (-1)^{r-1}}$$

inicial x_0, adoptado como origen. Los datos pueden entonces ser presentados así

$$i : 0\,,1\,,2\,,3\,,4 \;\therefore\; n = 4$$

$$x_i : 0\,,1\,,2\,,3\,,4 \;\therefore\; h = 1$$

$$y_i : y_0\,,y_1\,,y_2\,,y_3\,,y_4$$

La ecuación (9) nota (2) que determina el valor de h es, en este caso,

$$\ln \prod_{i=0}^{4} \left(\frac{k}{y_i} - 1\right)^{(-1)^i \binom{4}{i}} = 0$$

$$\left(\frac{k}{y_0} - 1\right)\left(\frac{k}{y_2} - 1\right)^6 \left(\frac{k}{y_3} - 1\right) = \left(\frac{k}{y_1} - 1\right)^4 \left(\frac{k}{y_3} - 1\right)^4$$

y los valores de las a_3 dados por la (14) nota (4)

$$a_s = (-1)^s \left[H_0 \frac{\binom{2,3,4}{3-s}}{\underline{|0}\,\underline{|3}} - H_2 \frac{\binom{1,3,4}{3-s}}{\underline{|1}\,\underline{|2}} + H_3 \frac{\binom{1,2,4}{3-s}}{\underline{|2}\,\underline{|1}} - H_4 \frac{\binom{1,2,3}{3-s}}{\underline{|3}\,\underline{|0}} \right]$$

$$a_0 = \quad H_1 \frac{24}{6} - H_2 \frac{12}{2} + H_3 \frac{8}{2} - H_4 \frac{6}{6}$$

$$a_1 = -H_1 \frac{26}{6} + H_2 \frac{19}{2} - H_3 \frac{14}{2} + H_4 \frac{11}{6}$$

$$a_2 = \quad H_1 \frac{9}{6} - H_2 \frac{8}{2} - H_3 \frac{7}{2} + H_4 \frac{6}{6}$$

$$a_3 = -H_1 \frac{1}{6} + H_2 \frac{1}{2} - H_3 \frac{1}{2} + H_4 \frac{1}{6}$$

5. — Conocido ya el camino que nos permite calcular los parámetros en el caso de interpolación, veamos un procedimiento que puede seguirse cuando se trate de ajustamiento. Pero antes de ello, haremos notar que, si se multiplica el determinante (3)

por el de Vandemonde siguiente: $|x_0^0\, x_1^1 \ldots x_n^n|$ — que es necesariamente distinto de cero por suponer diferentes todas las x_r — resulta

(15)

$$\begin{vmatrix} \sum_i H_i & s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ \sum_i x_i H_i & s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \sum_i x_i^r H_i & s_r & s_{r+1} & \ldots & s_{n-1+r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \sum_i x_i^n H_i & s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2n-1} \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^{n} H_i \begin{vmatrix} 1 & s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ x_i & s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ x_i^r & s_r & s_{r+1} & \ldots & s_{n-1+r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ x_i^n & s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2n-1} \end{vmatrix}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, n) \qquad (s_r = \sum_{i=0}^{n} x_i^r)$$

determinante que podría servir como el (4) — indistintamente — para calcular el valor de k ; y que corresponde al sistema ecuaciones siguiente:

$$(16) \quad \sum_{i=0}^{n} x_i^r H_i = a_0 s_r + a_1 s_{r+1} + \ldots + a_{n-1} s_{r+n-1}$$

$$(r = 0, 1, \ldots, n)$$

Este sistema (16) está compuesto por ecuaciones que se deducen del sistema (3), mediante combinaciones lineales distintas,— como lo prueba el hecho de no ser nulo el módulo de substitución: $|x_0^0\, x_1^1 \ldots x_n^n|$ — y por lo tanto le es equivalente.

Si en lugar de ser $n + 1$ los pares de valores $x_i\, y_i$, fueran $N + 1$, $(N > n)$, formaríamos las $N + 1$ ecuaciones siguientes

$$(17) \quad H_i = a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_{n-1} x_i^{n-1} \quad (i = 0, 1, \ldots, N)$$

que nos proporcionarían tantos sistemas de $n + 1$ ecuaciones como combinaciones pueden hacerse con las $N + 1$ de (17). Es decir $\binom{N+1}{n+1}$.

Cada uno de dichos sistemas de $n + 1$ ecuaciones — supuestas independientes — determinarían valores particulares de los parámetros k, a_0, a_1, ... , a_{n-1}.

Considerando en cambio, como compatible y determinado el sistema de las $N+1$ ecuaciones lineales en a_0, a_1, ... a_{n-1}, de (17), el producto de las dos matrices verticales

(18)

$$
\left\|\begin{matrix}
H_0 & 1 & x_0 \dots x_0^{n-1} \\
\cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdots \\
H_n & 1 & x_n \dots x_n^{n-1} \\
\cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdots \\
H_N & 1 & x_N \dots x_N^{n-1}
\end{matrix}\right\|
\left\|\begin{matrix}
1 & x_0 & x_1 & \dots & x_0^n \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^n
\end{matrix}\right\|
=
\left|\begin{matrix}
\sum_i H_i & s_0 & s_1 & \dots s_{n-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\sum_i x_i^r H_i & s_r & s_{r+1} & \dots s_{r+n-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\sum x_i^n H_i & s_n & s_{n-1} & \dots s_{2n-1}
\end{matrix}\right| = 0
$$

$$
\begin{matrix}
(i = 0, 1, \dots, n, \dots, N) \\
(r = 0, 1, \dots, n)
\end{matrix}
\qquad
\left(s_r = \sum_{i=0}^{N} x_i^r\right)
$$

da un determinado de orden $n+1$ que corresponde a un sistema de ecuaciones equivalente al (17); pero que aparece reducido a un grupo fundamental que está implícito en la compatibilidad y determinación impuesta al sistema (17).

La equivalencia surge del hecho de no ser nulo ninguno de los determinantes de Vandermonde, de orden $n+1$ — contenidos en la segunda matriz — puesto que ellos vendrían a ser los *módulos de substitución* aplicados a los respectivos grupos de $n+1$ ecuaciones obtenibles de (17).

Desarrollando el determinante de (18) por la primera columna, resulta:

$$
(19) \qquad \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{N} x_i^r H_i \right) A_r = \sum_{i=0}^{N} H_i \left(\sum_{r=1}^{n} x_i^r A_r \right) = 0
$$

donde con A_r se simboliza el adjunto de $\sum_i x_i^r H_r$, y como

$$(20) \qquad \sum_{r=0}^{n} x_i^r A_r = \begin{vmatrix} x_i^0 & s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ x_i & s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_i^r & s_r & s_{r+1} & \dots & s_{r+n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_i^n & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-1} \end{vmatrix} = T_i$$

en lugar de (19) escribiremos

$$(21) \qquad \sum_{i=0}^{N} T_i H_i = \sum_{i=0}^{N} T_i \, lg\left(\frac{k}{y_i} - 1\right) = 0$$

ecuación que determina el valor de k.

Se observará que por la (20), es

$$\sum_{i=0}^{N} T_i = 0$$

pues — como en (6) — resulta un determinante con las dos primeras columnas iguales y, aprovechando esa circunstancia, se puede escribir en lugar de (21) para la determinación de k, la ecuación en esta otra forma:

$$(21') \qquad \sum_{i=0}^{N} T_i \, lg\left(1 - \frac{y_i}{k}\right) = \sum_{i=0}^{N} T_i \, lg \, y_i$$

expresión que puede ser utilidad para calcular un valor aproximado de k cuando haya razones para pensar que los valores observados y_i están lejos de ese límite. En tal caso podrá ser útil adoptar como igualdad aproximada:

$$lg\left(1 - \frac{y_i}{k}\right) = -\frac{y_i}{k}$$

que nos permite obtener como valor de k

$$k = \frac{\sum\limits_{i=0}^{N} T_i\, y_i}{\sum\limits_{i=0}^{N} T_i\, lg\, y_i}$$

Por lo demás habrá que atenerse al valor que resulte de la ecuación (21) ó (21') que debe ser positivo para que se trate de una logística.

6. — De manera análoga a la descripta en § 3 la expresión

$$H = lg\left(\frac{k}{y} - 1\right) = a_0 + a_1\, x + \ldots + a_{n-1}\, x^{n-1}$$

juntamente con n ecuaciones de las definidas en (16) constituye un sistema compatible de las incógnitas $a_0,\ a_1, \ldots, a_{n-1}$ y por tanto debe verificarse

(22)

$$\begin{vmatrix} H & 1 & x & \ldots & x^j & \ldots & x^{n-1} \\ \sum\limits_i H_i & s_0 & s_1 & \ldots & s_j & \ldots & s_{n-1} \\ \sum\limits_i H_i\, x_i & s_1 & s_2 & \ldots & s_{j+1} & \ldots & s_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot \\ \sum\limits_i H_i\, x_i^{n-1} & s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{n-1+j} & \ldots & s_{2n-1} \end{vmatrix} = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, N)$$

Desarrollado por la primera fila nos da:

$$H.A + \sum_{j=0}^{n-1} x^j\, (-1)^{j+1}\, A_j = 0$$

(23)
$$H = \sum_{j=0}^{n-1} x^j\, (-1)^j\, \frac{A^j}{A}$$

donde con las letras A y A_j se simbolizan los menores complementarios que corresponden, respectivamente a H y x^j.

Para el cálculo de estos determinantes — en un caso práctico — será de gran provecho consultar la obra de E. F. Whittaker and G. Robinson: «The Calculus of Observations», *2nd.* ed. 1932, pág. 71 a 77, y tener en cuenta las observaciones formuladas por ellos al tratar de la solución de las ecuaciones normales por determinantes, págs. 231 § 117 y § 121 (1).

7. — Ha de observarse que los resultados que se obtienen con el criterio descripto, para determinar el valor de $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, coinciden con los que resultarían — una vez determinado k, y en consecuencia cada una de las $H_i = lg\left(\frac{k}{y_i} - 1\right)$ — aplicando el método de los cuadrados mímimos o métodos de los momentos v. g., hallando los valores de $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ que hacen mínima la expresión

$$\sum_{i=0}^{N}\left[H_i - a_0 - a_1 x_i - \ldots - a_{n-1} x_i^{n-1}\right]^2$$

Claro está, que para llegar al cálculo de las a_i deberá haberse obtenido un valor positivo de k al resolver la ecuación sea (9) o (21) — como lo exige la naturaleza de los problemas que se plantean con el ajustamiento de este tipo de curva. Si el valor de K no diera positivo, no puede hablarse de logística propiamente dicha.

(1) Se comprenderá la simplificación que puede reportar el manejo de valores equidistantes de x_i, pues tomando como origen el valor de x_0; y como unidad el intervalo de las x_i, resulta ser

$$s_r = 1 + 2^r + 3^r + \ldots + N^r$$

la suma de las potencias de los números naturales.