



.UBAeconómicas
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

LIBRO DE RESÚMENES

**XXIII JORNADAS DE TECNOLOGÍA APLICADA A LA
EDUCACIÓN MATEMÁTICA UNIVERSITARIA**

2024

ORGANIZADORES

Departamento Pedagógico de Matemática (DPM)
Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión
(CMA-IADCOM)

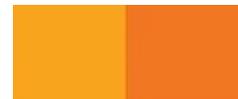
Departamento
Pedagógico de
Matemática
Facultad de Ciencias Económicas - UBA

DPM



CMA
IADCOM - UBA

CENTRO DE INVESTIGACIÓN
EN MÉTODOS CUANTITATIVOS
APLICADOS A LA ECONOMÍA
Y LA GESTIÓN



Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

Decano: Prof. Emérito Dr. Ricardo J. M. Pahlen Acuña

Autoridades de las Jornadas

Prof. Emérito Dr. Ricardo J. M. Pahlen Acuña

Prof. Emérita Dra. María Teresa Casparri

**Autoridades del Departamento Pedagógico de
Matemática**

Javier García Fronti

María José Bianco

Eduardo Tarullo

Roberto Armando García

Liliana Norma Silva

Comité Académico

María José Bianco

Roberto Armando García

Verónica María García Fronti

Andrea Gache



Libro de resúmenes : XXIII Jornadas de Tecnología Aplicada a la Educación Matemática Universitaria 2024 / María José Bianco ... [et al.]. - 1a ed adaptada. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas, 2024.

Libro digital, PDF

Archivo Digital: online
ISBN 978-950-29-2050-4

1. Educación Universitaria. I. Bianco, María José
CDD 340

COMPILADORES BIANCO, María José -GACHE, Andrea -GARCÍA, Roberto
Armando -GARCÍA FRONTI, Verónica





Índice

PRÓLOGO	5
---------------	---

ÁREA TEMÁTICA I

<i>Estrategias para desarrollar y fomentar el aprendizaje en sus modalidades presencial y virtual. Métodos innovadores para la evaluación de aprendizajes. TICs.</i>	6
--	---

SUMANDO RECURSOS EN PLANTEOS DE PROGRAMACION LINEAL

<i>Gbersi, Liliana</i>	7
------------------------------	---

NOTA DE CLASE - RESOLUCIÓN EN R DE UN MODELO DE INTERACCIÓN ENTRE TASA DE INFLACIÓN Y TASA DE DESEMPLEO

<i>Casparri, María Teresa; Abbate Otero, Martín Ezequiel; Acosta Mastaller, Jano Martín; De Mario, Facundo ; Migueles, Josefina y Tarullo, Eduardo</i>	10
--	----

EDPUZZLE: VIDEOS INTERACTIVOS EN CLASES DE ÁLGEBRA

<i>Gache, Andrea y Pancaldi, Paola</i>	14
--	----

MATEMÁTICA Y DERECHOS HUMANOS, UNA PERSPECTIVA COMPLEJA

<i>Lupín, Beatriz</i>	17
-----------------------------	----

APLICATIVOS EN ÁLGEBRA Y ANÁLISIS MATEMÁTICO

<i>Santamaria Moschetti, Juan Pablo</i>	24
---	----

ÁREA TEMÁTICA II

<i>Desarrollo de aplicaciones de la Matemática en áreas de las Ciencias Económicas utilizando herramientas informáticas.</i>	36
--	----

MATRIZ INVERSA GENERALIZADA

<i>Vietri, Silvia y Del Duca, Silvina</i>	37
---	----

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD EN UN MODELO DE MERCADO CON EXPECTATIVAS DE PRECIO CON PANELES INTERACTIVOS

<i>Fernández, María José ; García Fronti, Verónica y Parma, Andrea</i>	47
--	----

MEJORANDO LA ENSEÑANZA DEL ALGEBRA CON GOOGLE COLLABORATORY PARA RESOLVER PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL

<i>Morrone, Rita Beatriz; Rios, Maylen Joselin y Carrasco, Araceli</i>	6
--	---

MODELOS DE REGRESION DE RESPUESTA CUALITATIVA: REGRESION LOGISTICA

<i>Vitale, Blanca Rosa</i>	11
----------------------------------	----

MERCADO FINANCIERO: EJERCITACIÓN APLICANDO CADENAS DE MARKOV

<i>González, Martín; Rodríguez Trilnik, Tomás; Fasciglione, Franco; Palazzani Muñoz, Brenda ; Brillanti, Carla; Ynoub, Gustavo y Lupín, Beatriz</i>	14
---	----

MODELO DIDACTICO CONSTRUIDO CON PYTHON PARA PROCESOS DE MÁRKOV

<i>Da Torre, Juan Ignacio y Morrone, Rita</i>	5
---	---



ÁREA TEMÁTICA III

Aportes y propuestas interdisciplinarias mediante el uso de tecnología..... 10

*HACIA UN MONITOREO DE LA AGRICULTURA MÁS EFICIENTE:
PREDICCIONES DE LA PRODUCCIÓN DE SOJA UTILIZANDO DATOS
AGRONÓMICOS DE ALTA FRECUENCIA*

Thomasz, Esteban Otto ; Corfield, Kevin y Vilker, Ana Silvia 11

*ALGORITMOS EN ACCIÓN: EL NUEVO ROSTRO DEL TRADING DE
CRIPTOMONEDAS*

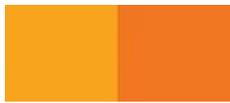
López Alfaro, Sonia Olga 16



PRÓLOGO

Este libro de resúmenes recoge las valiosas contribuciones presentadas durante la jornada docente del 8 de mayo del 2024. Representa un compendio de conocimientos, experiencias y reflexiones compartidas por una comunidad de educadores comprometidos con la mejora continua de la práctica docente. A través de estas páginas, buscamos fomentar el diálogo y el aprendizaje colectivo, inspirando a otros docentes a innovar y transformar sus aulas.

Dr. Javier Ignacio García Fronti
Director del Departamento Pedagógico de Matemática (DPM)



ÁREA TEMÁTICA I

Estrategias para desarrollar y fomentar el aprendizaje en sus modalidades presencial y virtual. Métodos innovadores para la evaluación de aprendizajes. TICs.



SUMANDO RECURSOS EN PLANTEOS DE PROGRAMACION LINEAL

GHERSI, Liliana
lbgersi@gmail.com

Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Económicas

Palabras Clave: Lenguajes, coloquial, algebraico, formal, algorítmico.

RESUMEN EXTENDIDO

En el mundo hay una amplia variedad de idiomas, tales como el castellano, el inglés, el griego, el árabe, el vietnamita (entre otros). También hay lenguajes propios de los oficios que se realizan, por ejemplo, una pauta de música para un músico. Para expresar una operación algebraica, todas las formas con que se las puede expresar conforman el lenguaje algebraico verbal o escrito. Si se aborda la actividad referida a los sistemas de información, se dispone de los lenguajes de computación, que son un conjunto de símbolos caracteres y reglas que combinados convenientemente expresan algoritmos, posibilitando la transmisión de instrucciones al sistema computacional. Y si nos acercamos a la vida cotidiana, se puede pensar en la comunicación vial con sus signos propios, o bien en los mapas de las redes de subterráneos de las principales ciudades del mundo, en los que la mayoría se apoyan en la paleta de colores, de manera de superar el lenguaje propio del país.

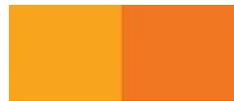
Volviendo al objeto de la presentación, se le llama lenguaje algebraico al utilizado para la representación de valores numéricos, cuando estos son desconocidos en magnitud. Este lenguaje es el soporte que permite simplificar teoremas o problemas matemáticos visualizando generalidades. Es un recurso que permite codificar por medio de símbolos y números el lenguaje coloquial o natural. Y si en particular, nos referimos a temas de optimización por medio de relaciones lineales, ¿cómo se vería modificado el lenguaje por medio de la introducción de la paleta de colores, y más específicamente, en lo atinente a la didáctica utilizada para el planteamiento de aquellos no tendríamos un valor agregado enriquecedor y facilitador?

Nuestra vasta experiencia, indica, que el gran desafío para los alumnos, es formalizar por medio de relaciones lineales, la realidad que se desea mejorar a partir de la optimización de recursos. Este trabajo, se propone generar un espacio de discusión académica, para implementar acciones concretas de modificación y perfeccionamiento de nuestra práctica docente, en pos de acercar a los alumnos al lenguaje algebraico.

Una ejemplo sobre el tema particular, se presenta en este resumen

CASO DE LOGÍSTICA

Una empresa de televisión por cable e internet cuenta con una red de distribución formadas por cinco centros de distribución para proveer servicio de internet y productos de cable a ocho zonas de clientes. Cada una de las zonas es asignada a un solo centro del cual recibe todos los servicios y productos. Con el objetivo de repartir equitativamente la demanda y la carga de trabajo en cada centro, el gerente de logística de la compañía dio instrucciones de que cada centro de distribución no provea a más de tres zonas de clientes. La tabla siguiente muestra los centros de distribución de la red y el costo (en miles de dólares) para proveer a cada zona de clientes.

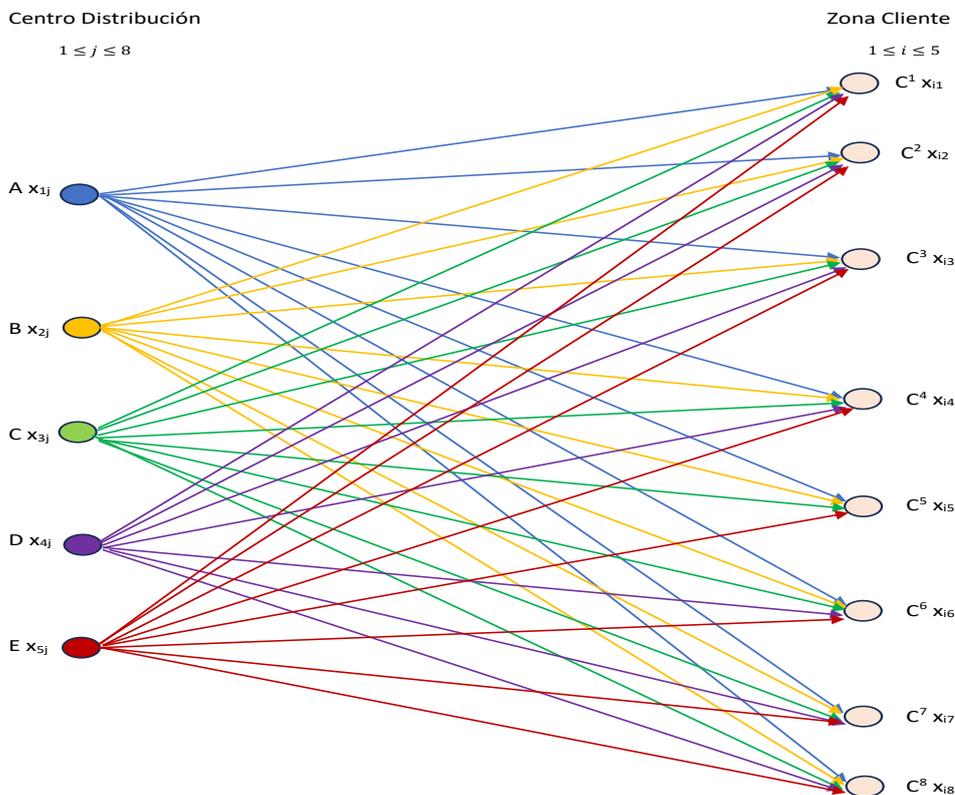


Usted pertenece a un grupo asesor especializado en Investigación Operativa al cual el gerente de logística solicitó, con la información suministrada anteriormente, un informe en el que conste: 1) Las zonas de clientes a las que debe proveer cada centro de distribución de manera que el costo de distribución sea mínimo y el costo de esa distribución. 2) Los centros de distribución, si los hay, que no provean a ninguna zona de clientes. 3) La asignación óptima de clientes a los centros de distribución, en el caso que ningún centro pueda proveer a más de dos zonas. Para este último caso, cuál sería el costo de la distribución.

costo dist	ZONA DE CLIENTES							
Centro dist.	1	2	3	4	5	6	7	8
A: x_{1j}	70	47	22	53	98	21	27	13
B: x_{2j}	75	38	19	58	90	34	40	26
C: x_{3j}	15	78	37	82	111	40	29	32
D: x_{4j}	60	23	8	39	82	36	32	45
E: x_{5j}	45	40	29	75	86	25	11	37

Los colores han sido asignados luego de proponer el diseño de la red, ídem la notación asignada a los centros de distribución

Planteo de la Propuesta



$$\begin{aligned}
 z = & 70x_{11} + 47x_{12} + 22x_{13} + 53x_{14} + 98x_{15} + 21x_{16} + 27x_{17} + 13x_{18} + 90x_{21} \\
 & + 38x_{22} + 19x_{23} + 58x_{24} + 90x_{25} + 34x_{26} + 40x_{27} + 26x_{28} + 15x_{31} \\
 & + 78x_{32} + 37x_{33} + 82x_{34} + 111x_{35} + 40x_{36} + 29x_{37} + 32x_{38} + 60x_{41} \\
 & + 23x_{42} + 8x_{43} + 39x_{44} + 82x_{45} + 36x_{46} + 39x_{47} + 45x_{48} + 45x_{51} \\
 & + 40x_{52} + 29x_{53} + 75x_{54} + 86x_{55} + 25x_{56} + 11x_{57} + 37x_{58}
 \end{aligned}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} \leq 3$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} \leq 3$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} \leq 3$$



$$\begin{aligned}
 x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48} &\leq 3 \\
 x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} + x_{57} + x_{58} &\leq 3 \\
 x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} &= 1 \\
 x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} &= 1 \\
 x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} &= 1 \\
 x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} &= 1 \\
 x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} &= 1 \\
 x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} &= 1 \\
 x_{17} + x_{27} + x_{37} + x_{47} + x_{57} &= 1 \\
 x_{18} + x_{28} + x_{38} + x_{48} + x_{58} &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{1j} &= \begin{cases} 0 & A \text{ no distribuye en } C^j \\ 1 & A \text{ distribuye en } C^j \end{cases} \quad 1 \leq j \leq 8 \\
 x_{2j} &= \begin{cases} 0 & B \text{ no distribuye en } C^j \\ 1 & B \text{ distribuye en } C^j \end{cases} \quad 1 \leq j \leq 8 \\
 x_{3j} &= \begin{cases} 0 & C \text{ no distribuye en } C^j \\ 1 & C \text{ distribuye en } C^j \end{cases} \quad 1 \leq j \leq 8 \\
 x_{4j} &= \begin{cases} 0 & D \text{ no distribuye en } C^j \\ 1 & D \text{ distribuye en } C^j \end{cases} \quad 1 \leq j \leq 8 \\
 x_{5j} &= \begin{cases} 0 & E \text{ no distribuye en } C^j \\ 1 & E \text{ distribuye en } C^j \end{cases} \quad 1 \leq j \leq 8
 \end{aligned}$$

Como puede observarse, la interpretación de la lectura se simplifica de manera irrefutable. No se pone la atención en los subíndices, ya que los colores focalizan la mirada; y se corrobora la propuesta, una posibilidad es en la fila:

(mirando los costos asociados a los centros de distribución y a las zonas de clientes) y que en la propuesta en la misma línea aparecen los diversos colores asociados)

(mirando la llegada que implica la zona del cliente) y que en la propuesta aparece en la línea con el mismo color;

o bien (mirando la partida que implica el centro de distribución) y que en la propuesta aparece en la línea con el color asignado al centro de distribución.

CONCLUSIÓN

Incluir nuevas dimensiones que denotan variables del modelo, es cuestión de apelar a las alternativas que las tecnologías conocidas en la actualidad, pero que seguramente son una afrenta a los docentes, ya que implica adecuación a aquellas, conciliando lo tradicionalmente usado con lo novedoso que aportan dichas tecnologías. Realmente, una exigencia de reversión de miradas, pero no de destierro de fundamentaciones; y que se profundizan en las ciencias que nos competen. ¡La variabilidad en las denotaciones es constante!

BIBLIOGRAFÍA

BECKER, M. E. & PIETROCOLA, N. & SÁNCHEZ, C. (2001), Aritmética, Red Olímpica, Argentina.

PAENZA, A (2019) Matemáticas para la vida real. YouTube Aprendemos Juntos 2030

Algebra; [https:// es.khanacademy.org/math/algebra-home](https://es.khanacademy.org/math/algebra-home) (27/03/2024)

NOTA DE CLASE - RESOLUCIÓN EN R DE UN MODELO DE INTERACCIÓN ENTRE TASA DE INFLACIÓN Y TASA DE DESEMPLEO

CASPARRI, María Teresa; ABBATE OTERO, Martín Ezequiel; ACOSTA MASTALLER, Jano Martín; DE MARIO, Facundo ; MIGUELES, Josefina y TARULLO, Eduardo

mcasparri@hotmail.com - martinabbate19@gmail.com - jano.acosta@live.com.ar - facudemario@gmail.com
- jose03migueles@gmail.com - atarullo@yahoo.com.ar

Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Económicas

Palabras Clave: modelo de Phillips, sistemas de ecuaciones diferenciales, aprendizaje, aplicación tecnológica, R.

RESUMEN EXTENDIDO

El presente trabajo se constituye como una introducción, para los alumnos de la asignatura Matemática para Economistas, a la resolución de sistemas dinámicos expresados como sistemas de ecuaciones diferenciales. Para ello, se utiliza el lenguaje de programación R, junto al desarrollo del modelo Phillips de interacción entre tasa de inflación y tasa de desempleo, para efectuar el análisis de la trayectoria de las variables determinadas por el sistema. También se estudia la existencia y estabilidad del equilibrio dentro del citado modelo.

Mediante la combinación de la resolución de modelos económicos, y la utilización de un lenguaje de programación, se promueve la utilización de herramientas informáticas aplicadas a la resolución de problemas. Este enfoque integral permite que se combine la informática, la introducción del alumno a conceptos y modelos tradicionales de la Economía, y el desarrollo de temáticas que se ubican dentro de los contenidos curriculares de nuestra asignatura; todo ello en un único material que apunta a convertirse en un recurso didáctico más del curso y de la cátedra.

Una válida justificación de la incorporación de procesos informáticos para la enseñanza de las ciencias matemáticas creemos que reside tanto en la facilidad que proveen para ilustrar gráficamente el fenómeno matemático que se está estudiando, como también en que nos permite ilustrar cómo es que un modelo matemático altera su comportamiento ante cambios en los valores de los parámetros involucrados.

Además de lo mencionado anteriormente, para el tema seleccionado en este trabajo, creemos que existe un aporte de gran valor en la visualización de las transiciones dinámicas en modelos matemáticos aplicados a las ciencias económicas. Dada la importancia que tiene en modelos macroeconómicos no solamente el análisis de la estabilidad de los equilibrios, sino también las trayectorias temporales por las que la economía tiene que transitar hasta llegar a dicho equilibrio, las herramientas informáticas resultan fundamentales en tanto nos permiten visualizar este hecho mediante animaciones.

El trabajo se estructura en tres partes. En el primer apartado, se describe el modelo económico elegido, definiendo las relaciones económicas entre las variables y los parámetros utilizados en el mismo. El sistema se expresa en tiempo continuo, por lo que se desarrolla el instrumental matemático referido a los sistemas de ecuaciones diferenciales, necesario para la tarea a realizar. Luego, se hallan las trayectorias de las variables endógenas y se analiza el equilibrio del sistema en función de los parámetros, así como de las variables exógenas. En el segundo apartado, se

implementa la resolución del sistema en el lenguaje de programación seleccionado. El código representa gráficamente la solución del modelo, por lo que se revisan las dinámicas para diversos valores de parámetros, variables exógenas y condiciones iniciales. Por último, en el apartado final se expone una breve conclusión de los resultados obtenidos.

En cuanto a la resolución del modelo, se utiliza el método de los autovalores. Dada la expresión matricial del sistema de ecuaciones, buscamos los autovalores que satisfagan la ecuación característica con autovectores distintos del nulo. Siendo la siguiente expresión matricial:

$$\begin{pmatrix} \pi^e \\ \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta - 1 & -\alpha \\ \beta\theta & -\beta\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi^e \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi^* \\ \beta\pi^* - \beta m \end{pmatrix}$$

Operando con su ecuación característica $|A - \lambda I| = 0$, podemos obtener un polinomio de grado dos a partir del cual podremos calcular las raíces características utilizando la fórmula resolvente de la cuadrática:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Analizando el discriminante que resulta, se pueden dar tres situaciones distintas: Las raíces pueden ser reales y distintas, reales e iguales o, por último, complejas conjugadas. De todas formas, ante todas estas situaciones, se podrá ver que el sistema es, a toda luz, estable.

Para resolver la modelización computacional del problema, se utilizan las librerías del programa R *deSolve*, *graphics*, *gganimate*, *ggplot2*, *ggtthemes*, *dplyr* y, por último, *gifski*. Estas, nos permiten desarrollar el modelo, resolverlo, animarlo y graficarlo. En primer lugar, definimos el sistema de ecuaciones con el que trabajamos, tomando a la variable t como continua, un vector de variables x que define a las variables del sistema y, por último, el vector de parámetros llamado “*parameters*”. El vector x ayudará a definir el comportamiento de las variables endógenas del modelo, a partir de las ecuaciones diferenciales descritas en *odeVec[1]* y *odeVec[2]*.

```
##Función con el SEDO##
Phillips=function(t,x,parameters){
  inf_obj=parameters[1];
  alpha=parameters[2];
  theta=parameters[3];
  beta=parameters[4];
  m=parameters[5];
  odeVec=rep(0,2);
  odeVec[1]=(theta-1)*x[1]-alpha*x[2]+inf_obj;
  odeVec[2]=-beta*(m-inf_obj+alpha*x[2]-theta*x[1]);
  return(list(odeVec))
}
```

Luego de definir los valores que toman los parámetros en cuestión, graficamos las curvas de demarcación con el paquete *ggplot*, que nos permite también personalizar los distintos atributos del gráfico. Al llegar a este punto, debemos resolver el sistema con las funciones *lsoda* del paquete *deSolve*, insertando dentro de ella también nuestro sistema de ecuaciones del modelo de Phillips que definimos anteriormente. Para eso, resolveremos la ecuación partiendo de cuatro condiciones iniciales diferentes ubicadas en los distintos cuadrantes que se encuentran alrededor del punto de equilibrio. Esto, nos permite visualizar el comportamiento de las distintas líneas de fase alrededor del punto de equilibrio.

```
##Condiciones iniciales##

#Arriba
solU=lsoda(y=c(0.04,0.02),times = seq(0,8,by=0.0001),
          func = Phillips,parms = parametros)

#Abajo
solD=lsoda(y=c(0.02,0),times = seq(0,8,by=0.0001),
          func = Phillips,parms = parametros)

#Izquierda
solL=lsoda(y=c(0.015,0.015),times = seq(0,8,by=0.0001),
          func = Phillips,parms = parametros)

#Derecha
solR=lsoda(y=c(0.045,0.005),times = seq(0,8,by=0.0001),
          func = Phillips,parms = parametros)
```

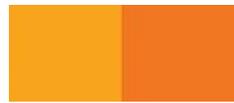
El uso de este programa para fines pedagógicos reside en la práctica visualización del problema en cuestión. Para esto, con la función que resuelve el sistema *lsoda*, podemos definir distintas condiciones iniciales y, luego, animar el comportamiento de las líneas de fase. La animación del comportamiento de estas líneas de fase se puede llevar a cabo con la función *animate* del paquete *gganimate*.

```
##Animación del gráfico##
graph.animation=curvas_demarcacion+
  geom_point(data = solUdf,aes(x=pi_e,y=u))+
  geom_point(data = solDdf,aes(x=pi_e,y=u))+
  geom_point(data = solLdf,aes(x=pi_e,y=u))+
  geom_point(data = solRdf,aes(x=pi_e,y=u))+transition_time(time)+
  labs(subtitle="Time {frame_time}")+
  shadow_wake(wake_length = 1.2, size = FALSE, alpha = 0.01)

animate(graph.animation,width=500,res=100)
```

Estas herramientas de animación y resolución de ejercicios permiten visualizar el comportamiento de nuestro modelo matemático, a partir no solamente de distintas condiciones iniciales, sino también a partir de distintas definiciones para los valores de los parámetros. Entonces, por ejemplo, en el caso donde el discriminante era mayor o igual a cero y, las raíces reales, podemos, mediante visualizaciones, entender el comportamiento del sistema al definir los valores numéricos de los parámetros en cuestión (visualizando así el nodo estable). Luego, si se desea describir el comportamiento del sistema cuando las raíces son complejas conjugadas, simplemente debemos redefinir los valores de los parámetros de nuestras funciones, para luego graficar y animar su evolución (visualizando así el foco estable).

Estas herramientas de programación, por mas que no sustituyan la enseñanza del problema en términos teóricos, sirven para ayudar al entendimiento del alumnado. También, son de ayuda para entender más allá de los conceptos matemáticos, modelos específicamente económicos o de la disciplina a la cual se aplique. En el caso del modelo en cuestión, cuando definimos un mayor impacto de las expectativas inflacionarias sobre la inflación efectiva, o sea un mayor θ , podemos entender mejor sus implicancias macroeconómicas, al comparar las trayectorias de las líneas de fase antes y después del cambio en los valores de los parámetros.



BIBLIOGRAFÍA

- ALPHA CHIANG, C. & WAINWRIGHT, K. (2007). Métodos fundamentales de economía matemática. México D.F.: McGraw Hill Interamericana.
- BERNARDELLO, A., CASPARRI, M.T., y otros. (2010). Matemática para economistas usando Microsoft Excel Matlab. Buenos Aires: OmicronSystem.
- PHILLIPS, W. (1958). The Relationship between Unemployment and the Rate of Change of Money Wages in the United Kingdom 1861-1957. *Economica*, 25 (100), 283-299.
- SYDSAETER, K., HAMMOND, P., SEIRSTAD, A. Y STROM, A. (2005). Further Mathematics for Economic Analysis. Nueva York: FT Prentice Hall.
- ZILL, D.G. (1986). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones. México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

EDPUZZLE: VIDEOS INTERACTIVOS EN CLASES DE ÁLGEBRA

GACHE, Andrea y PANCALDI, Paola
andregache@economicas.uba.ar- ppancaldi@cbc.uba.ar

Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Económicas

Palabras Clave: Álgebra, Aula virtual, videos interactivos, aula invertida, Edpuzzle

RESUMEN EXTENDIDO

En este trabajo presentamos una propuesta alternativa al modelo pedagógico de aula invertida o en inglés Flipped Classroom (Bergmann & Sams, 2009) que es un tipo de aprendizaje semipresencial que propone transferir parte del proceso de enseñanza y aprendizaje, que normalmente se sitúa en el aula, en entornos que no son tradicionalmente docentes (Garrison & Kanuka, 2004).

Entre las distintas herramientas que se utilizan hoy en día para desarrollar el modelo pedagógico referido, la plataforma Edpuzzle on line y gratuita destaca por su versatilidad en la creación de contenidos audiovisuales (Singh, Abdellahi, Maher, & Latulipe, 2016).

Es posible convertir los contenidos a través de sus herramientas en videos interactivos, recursos audiovisuales que permiten la interacción con el alumno, proporcionando un contenido más atrayente, divertido y menos monótono, con preguntas incrustadas del tipo arrastrar y soltar, preguntas de opción múltiple, preguntas tipo test, para que el alumno elija una opción entre varias; estas preguntas se corrigen de manera automática como también preguntas de respuesta abiertas cortas para evaluar la comprensión de los estudiantes. El usuario participa activamente en la reproducción del video en el cual visualiza cada uno de los “eventos del video” interactuando en ellos.

Edpuzzle es una herramienta clave para la educación interactiva ya que permite el aprendizaje de conceptos abstractos de manera más clara, facilitando su comprensión. Una enseñanza orientada a la acción donde se aprende activamente por medio del aprendizaje electrónico. Esto permitirá asentar las bases de un aprendizaje constructivo, mediante el trabajo colaborativo y la participación de los estudiantes y docentes en actividades prácticas.

Además, posibilita editar videos ya existentes o crear nuevos para introducir preguntas, crear cuestionarios y/o añadir notas de voz, durante la reproducción, con la finalidad de comprobar si se está comprendiendo el contenido y mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje.

La proyección del video puede utilizarse para responder en tiempo real en una clase o como una actividad a realizarse a posterior o anterior a ella. Facilita un aprendizaje más dinámico, personalizado y efectivo, al combinar la visualización de conceptos con la interacción y la evaluación, esta herramienta contribuye a aumentar la motivación, mejorar los resultados académicos y desarrollar habilidades tecnológicas.

Por otra parte, permite a los docentes realizar un seguimiento del progreso de sus alumnos sobre cada actividad, ver informes sobre el tiempo de visualización del video por parte de cada

estudiante, cómo respondieron las preguntas y sus calificaciones generales de la lección. Como así también los intentos realizados, tiempo invertido, cantidad de respuestas correctas y la fecha de entrega. Esta información ayuda a analizar datos, lo que facilita la identificación de áreas de mejora y la adaptación de la instrucción para satisfacer las necesidades de los estudiantes. Se requiere que el estudiante visualice el video completo, lo cual no permite adelantar ni saltar preguntas evitando de esa manera que los alumnos salteen contenidos.

Edpuzzle permite una serie de ventajas que transforman la experiencia de aprendizaje de los estudiantes, los videos pueden ser revisados en cualquier momento, lo que facilita la consolidación de los conocimientos, respetando su propio ritmo de estudio, pausando, rebobinando o repitiendo las secciones que requieran mayor atención. Al responder las preguntas, reciben feedback al instante, lo que refuerza su aprendizaje y les permite identificar fortalezas y debilidades. La registración permite el acceso desde distintos dispositivos. Tiene un fácil acceso a la plataforma con un sencillo manejo intuitivo.

Esta herramienta se integra fácilmente con diferentes LMS, como Moodle, Google Classroom, entre otras plataformas. Además, ofrece un canal de formación oficial con contenido actualizado donde permite a los docentes conocer todas las herramientas y cómo llevarla a cabo en sus clases, como así también un canal para formular consultas.

Estas características hacen que Edpuzzle sea una de las herramientas más utilizadas en la metodología de clase invertida, que transfiere parte del proceso de enseñanza y aprendizaje fuera de las estructuras clásicas, tales como el aula y la clase magistral, para emplear ese tiempo de clase en el desarrollo de un aprendizaje significativo (Brown & Kinshuk, 2016).

La propuesta metodológica que compartimos, el uso de la herramienta Edpuzzle como un esquema modificado de clase invertida, sugiere la exposición del vídeo dentro de la clase de Álgebra, materia del Primer Tramo de nuestra institución y la posibilidad de hacerlo por fuera de ella.

Concordamos con (Pueo, B., Jiménez-Olmedo, J. M., Penichet-Tomas, A., & Carbonell Martínez, J. A. 2017) que el éxito de esta metodología puede estar debida, no tanto al hecho de que el aprendizaje este deslocalizado, sino que el aprendizaje sea individual y autodirigido. En este sentido, una estructura alternativa que permitiera recrear el ambiente individual y autodirigido que se produce en casa, pero en localizaciones distintas, podría tener un éxito parecido, sin ser un modelo de clase invertida desde un punto de vista estricto.

Las autoras consideramos que la herramienta permitirá explotar el método del aprendizaje invertido, como un complemento eficaz en la transmisión de conocimiento mediante contenido multimedia dentro de la clase. La instrucción directa cambia desde un espacio de enseñanza colectivo, tal y como se viene realizando en clase bajo el método tradicional, hacia un espacio de aprendizaje individual, en el que el docente guía los estudiantes a medida que se aplican los conceptos, generalmente con el uso de materiales audiovisuales autodirigidos (Mayer, 2014).

Existen diversos estudios que ponen de manifiesto las prácticas exitosas del modelo de clase invertida con la herramienta Edpuzzle al comparar los resultados de aprendizaje del modelo frente a grupos de control con clase tradicional (Camacho Ortega, 2014; Castilla Cebrian, Alriols, Romana, & Escribano Otero, 2015; Karaca & Ocak, 2017; Prieto Calvo et al., 2016).

Para comprobar la validez de la propuesta, se compararan finalizado el cuatrimestre los resultados académicos de la clase de Algebra – Cátedra Gache de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires en un estudio cuasi experimental entre la evaluación de un contenido desarrollado en una clase tradicional y los obtenidos a partir de la propuesta educativa en la que el espacio de aprendizaje individual se sitúa en la propia estructura de la clase.

En conclusión, Edpuzzle se presenta como una herramienta invaluable para la educación universitaria. Su capacidad para fomentar el aprendizaje activo, personalizar el contenido, evaluar el progreso, promover la autonomía y aumentar la motivación la convierte en un recurso fundamental para docentes que buscan impulsar el éxito de sus estudiantes en un entorno de aprendizaje dinámico y efectivo.

BIBLIOGRAFÍA

- BERGMANN, J., & SAMS, A. (2009). Remixing chemistry class: Two Colorado teachers make vodcasts of their lectures to free up class time for hands-on activities. *Learning & Leading with Technology*, 36(4), 22–27.
- BROWN, W. J., & KINSHUK. (2016). Influencing Metacognition in a Traditional Classroom Environment Through Learning Analytics. En Y. Li, M. Chang, M. Kravcik, E. Popescu, R. Huang, & N.-S. (Eds.), *State-of-the-art and future directions of smart learning* (pp. 105–114). Springer. Doi:<http://doi.org/10.1007/978-981-287-868-7>
- CAMACHO, P. J. (2014). Flipped classroom: programación en bases de datos. XI Jornadas Internacionales de Innovación Universitaria. Universidad Europea de Madrid, Madrid.
- CASTILLA, G., ALRIOLS, J. A., ROMANA, M. G., & ESCRIBANO, J. J. (2015). Resultados del estudio experimental de Flipped Learning en el ámbito de la enseñanza de matemáticas en ingeniería. XII Jornadas Internacionales de Innovación Universitaria. Universidad Europea de Madrid, Madrid.
- FRAQUELLI A., GACHE A. (2019). *Notas de Álgebra: Teórico y prácticas*. Ciudad de Buenos Aires: Facultad de Ciencias Económicas, UBA.
- GARRISON, D. R., & KANUKA, H. (2004). Blended learning: Uncovering its transformative potential in higher education. *Internet and Higher Education*, 7(2), 95–105.
https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/71190/1/Investigacion-en-docencia-universitaria_72.pdf
- KARACA, C., & OCAK, M. A. (2017). Effects of flipped learning on university students' academic achievement in algorithms and programming education. *International Online Journal of Educational Sciences*, 9(2), 1–17. Doi:<http://doi.org/10.15345/iojes.2017.02.017>
- MAYER, R. E. (2014). Incorporating motivation into multimedia learning. *Learning and instruction*, 29, 171–173.
- PRIETO, C., SANTOS, M. J., HERNÁNDEZ, A., MORENO, M., RODRÍGUEZ, C., & QUEIRUGA-DIOS, A. (2016). Dispositivos móviles como instrumentos para la adquisición de competencias en materias de Ciencias. En VI Jornada de Innovación Docente de la Universidad de Valladolid (pp. 7–11). Valladolid: Universidad de Valladolid.
- PUEO, B., JIMÉNEZ-OLMEDO, J. M., PENICHER-Tomas, A., & CARBONELL MARTÍNEZ, J. A. (2017). Aplicación de la herramienta Edpuzzle en entornos de aprendizaje individuales dentro del aula. Recuperado de https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/71190/1/Investigacion-en-docencia-universitaria_72.pdf
- SINGH, V., ABDELLAHI, S., MAHER, M. Lou, & LATULIPE, C. (2016). The video collaborator as a learning environment. In *Proceedings of the 47th ACM Technical Symposium on Computer Science Education (SIGCSE '16)* (pp. 352–357). Doi:<http://doi.org/10.1145/2839509.2844588>



MATEMÁTICA Y DERECHOS HUMANOS, UNA PERSPECTIVA COMPLEJA

LUPÍN, Beatriz¹

beatrizlupin@gmail.com

Universidad Nacional de Mar del Plata

Palabras Clave: Paradigma de la Complejidad – modelos matemáticos compartimentales – ecuaciones diferenciales ordinarias – práctica docente – violencia doméstica

RESUMEN EXTENDIDO

Dime y lo olvido, enséñame y lo recuerdo, involúcrame y lo aprendo
Benjamín Franklin

A fin de alcanzar una educación tendiente a avanzar en la comprensión de la condición humana y a situarla con relación a los problemas centrales que han sido ignorados por la ciencia clásica mediante enfoques reduccionistas, unilaterales y limitados, incapaces de reconocer la complejidad de lo real, Edgar Morin, uno de los máximos referentes del Paradigma de la Complejidad, postula siete saberes necesarios². En esta ocasión, el interés se centra en el saber relativo a la “ética del género humano”, vale decir, el que otorga sentido a los derechos humanos y los afirma en su esencia. Asimismo, se toma la premisa compleja de que existen diversos niveles de realidad y de que todo fenómeno real constituye un sistema dado que se encuentra relacionado con su contexto. Por ende, es relevante que la educación se reconstruya, con un enfoque sistémico, inter y transdisciplinar y crítico, hacia la creación de un pensamiento dinámico y abierto al reto que implica el bien común, la propuesta de soluciones efectivas a problemas reales. Lo anterior, implica articular con el mundo actual, globalizado, altamente cambiante y complejo. En definitiva, se trata de transformar la forma de pensar la sociedad y eso se logra transformando la educación. (Andonegui, 2005; Estrada García, 2020; Guyot, 2011; Lupín & Agustinelli, 2013; Olivero Castro, 2019)

Conforme al marco precedente, el objetivo de esta propuesta es compartir una intervención pedagógica desarrollada en la Asignatura “Matemática para Economistas II”, que se dicta a los estudiantes de tercer año de la Carrera Licenciatura en Economía, en la FCEyS-UNMDP. El eje de esta intervención consiste en la revisión crítica de una aplicación empírica de un modelo matemático compartimental a la problemática de prevalencia de violencia doméstica. A tal fin, se toma el trabajo de Otoo *et al.* (2014) para ser analizado por los estudiantes con la guía de los docentes.

En el trabajo de Otoo *et al.* (*op. cit.*), se emplean datos relevados por la Unidad de Apoyo a las Víctimas de Violencia Doméstica, en Tamale-Ghana. Se trata de datos sobre mujeres y niños, víctimas de violencia doméstica, durante el período 1999-2011. Una breve caracterización de los residentes de Tamale indica que la mayoría es mujer, de religión islámica, practicante de la poligamia y con bajo nivel educativo. La actividad económica se basa, fundamentalmente, en la agricultura, estando una elevada proporción de la población en situación de pobreza.

La violencia doméstica es un patrón de comportamiento dentro de un hogar que implica el abuso físico o psíquico de uno de los integrantes del mismo hacia otro u otros integrantes. Significa claramente una violación a los derechos humanos que perjudica física, psicológica y económicamente a las víctimas.

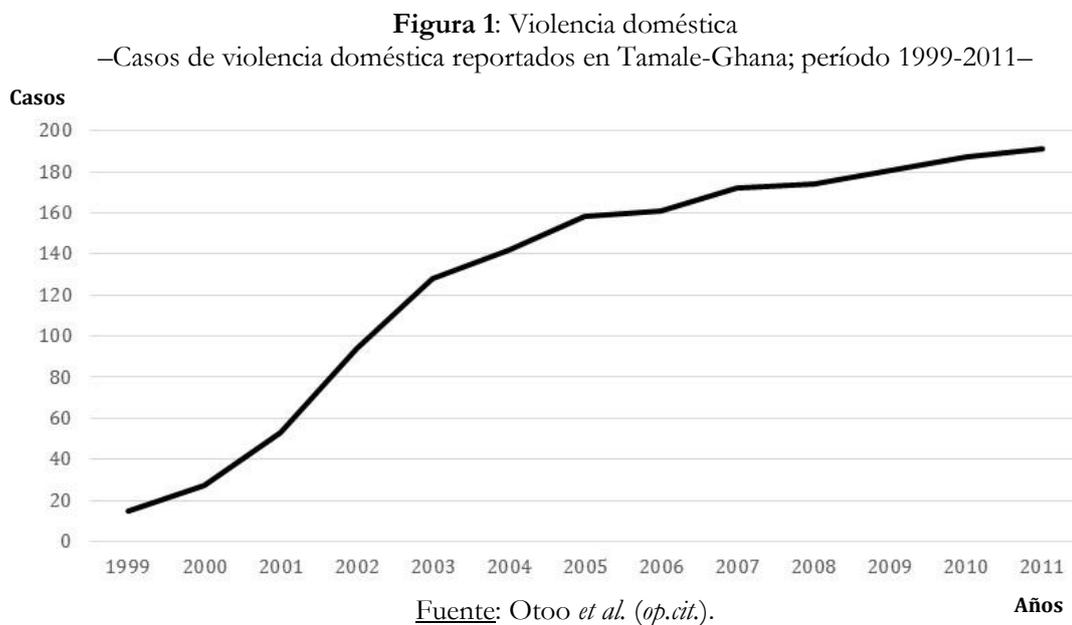
¹ Licenciada en Economía. Especialista en Docencia Universitaria. Profesora Adjunta, Responsable de la Asignatura “Matemática para Economistas II” e Integrante del Centro de Investigaciones Económicas y Sociales, FCEyS-UNMDP. Profesora e Investigadora, Departamento de Ingeniería Pesquera, UTN-FRMDP.

² Para ampliar al respecto, se sugiere la lectura de Morin (2001).



Además, del perjuicio personal y familiar que provoca, también, tiene consecuencias adversas para la economía de un país, por ejemplo, disminuyendo la productividad en el mercado laboral. Diversos autores, han detectado que bajos niveles educativos y socioeconómicos son factores que propician este tipo de violencia. (Mohammed & Musa, 2019)

Para el comienzo del análisis matemático, en esta revisión, se considera conveniente explorar los datos mediante un gráfico entre los casos de víctimas reportados vs los años. El mismo induce a pensar en un comportamiento logístico³. (Figura 1)



Los autores Otoo *et al.* (*op. cit.*) realizan el análisis matemático en base a una adaptación del modelo compartimental epidemiológico básico SIR (Susceptibles-Infectados-Recuperados), debido a Kermack & McKendrick (1927)⁴. Por lo tanto, la población total (N) puede ser segmentada en dos grupos: individuos susceptibles de ser víctimas (S(t)) e individuos víctimas (V(t)), en el tiempo t. Este tipo de modelo implica dos fases: 1) ajuste –determinación de las funciones matemáticas y parámetros apropiados a los datos disponibles– y 2) predicción –evolución de los casos en el futuro– (González López Varcacel *et al.*, 2020).

A continuación, se desarrolla la dinámica del modelo en cuestión, adicionando al texto original, tratamientos analíticos expuestos en Bianco *et al.* (2020). Previamente, se deben realizar dos consideraciones: 1) s(t) y v(t) son las variables que representan el número de individuos de cada grupo en función del tiempo, siendo la población total (N) igual a la suma de las mismas; 2) suponiendo que la población se mantiene constante y que no hay víctimas recuperadas, es posible determinar que la tasa de propagación de la violencia es proporcional al número de víctimas: $\beta v(t)/N$, con $\beta > 0$.

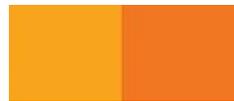
Consecuentemente, la problemática bajo estudio puede ser representada mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias⁵:

$$\frac{ds}{dt} = -\beta s(t) \frac{v(t)}{N} \quad [01]$$

³Dicho gráfico, es presentado por Otoo *et al.* (*op. cit.*) una vez avanzado el trabajo, no inicialmente.

⁴Previamente, los estudiantes analizaron este tipo de modelo aplicado a la Pandemia SARS-Cov-2 (Lupín, 2020).

⁵Para ampliar sobre estas ecuaciones, se sugiere la lectura de Chiang (1987).



$$\frac{dv}{dt} = \beta s(t) \frac{v(t)}{N} \quad [02]$$

Las variables $s(t)$ y $v(t)$ normalizadas por “N” se transforman en:

$$S(t) = \frac{s(t)}{N} \quad [03]$$

$$V(t) = \frac{v(t)}{N} \quad [04]$$

Derivando miembro a miembro las expresiones anteriores, [01] y [02] pueden ser reescritas así:

$$S'(t) = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{N} \frac{ds}{dt} = -\beta S(t) V(t) \quad [05]$$

$$V'(t) = \frac{dV}{dt} = \frac{1}{N} \frac{dv}{dt} = \beta S(t) V(t) \quad [06]$$

La primera de las ecuaciones anteriores indica el comportamiento de los individuos susceptibles de ser víctimas. Presenta un signo negativo en el lado derecho del signo igual pues si un individuo comienza a sufrir violencia doméstica, deja el compartimento de los susceptibles y pasa al de las víctimas. En tanto, la segunda ecuación explica el comportamiento de las víctimas.

Como: $N = S(t) + V(t) \Rightarrow S(t) = N - V(t)$, la ecuación [06] adopta la siguiente forma:

$$\frac{dV}{dt} = \beta V(t) [N - V(t)] \quad [07]$$

$$V(t)' = \beta V(t) \left[1 - \frac{V(t)}{N} \right] \quad [08]$$

Esta última expresión es una ecuación diferencial ordinaria no lineal que representa el Modelo de Crecimiento Logístico. Mediante la misma, es posible concluir que, si la población inicial es nula, $V(t)$ no crece. Por su parte, si la población se encuentra en el rango $0 < V(t) < N$, $dV/dt > 0$ y $V(t)$ se incrementa. Cuando $V(t) = N$, la población se mantiene en dicho nivel, presentándose una situación estable. Finalmente, si $V(t) > N$, $dV/dt < 0$ y $V(t)$ disminuye. Si la población de víctimas es superior a 0, eventualmente, llegará a la capacidad de carga N .

Aplicando el Método de Separación de Variables a [07] e integrando miembro a miembro, se arriba a una expresión que se asemeja a la Función Logística de Verhulst-Pearl⁶, siendo “C” la constante de integración, que puede ser valorada mediante condiciones iniciales o de límite:

$$\frac{1}{V(t) [N - V(t)]} \frac{dV}{dt} = \beta$$

⁶La función proviene de la Demografía y debe su nombre al matemático belga Pierre-François Verhulst (1804-1849) quien la propuso como una posible solución al problema malthusiano y al biólogo estadounidense Raymond Pearl (1879-1940) quien la redescubrió y la aplicó en diversos trabajos (Lupín *et al.*, 2014).



$$\frac{1}{V(t) [N - V(t)]} dV = \beta dt$$

$$\int \frac{1}{V(t) [N - V(t)]} dV = \int \beta dt$$

$$\frac{V(t)}{[N - V(t)]} = C e^{\beta t}$$

[09]

De esta manera, es posible modelar el comportamiento de una determinada población –víctimas en este caso– que experimenta, inicialmente, un crecimiento exponencial, pero que, al incluir los efectos ambientales –por ejemplo, medidas gubernamentales tendientes a disminuir los casos de violencia–, transforme dicho crecimiento en uno logístico. (Haeussler *et al.*, 2008)

Con los datos relevados –expuestos en la Figura 1–, es posible predecir $V(t)$. Para ello, primero, se estima una regresión lineal simple mediante Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO)⁷ entre el número de víctimas y el cociente de población (α). A tal fin, se plantea la diferencia:

$$V(t + 1) - V(t) = \beta V(t) [N - V(t)]$$

$$\frac{\Delta V(t)}{V(t)} = V(t)' = \beta V(t) \left[1 - \frac{V(t)}{N} \right] \Rightarrow \alpha = \beta \left[1 - \frac{V(t)}{N} \right]$$

[10]

En base a (10), se calcula “ α ” con los datos de $V(t)$ durante dos años consecutivos. Aplicando MCO entre ambas variables, se obtiene la siguiente línea de regresión: $y = 0,972982 - 0,0056045 x$. Luego, se calcula “ y ” reemplazando “ x ”, por ejemplo, con los dos primeros valores reportados de “ $V(t)$ ” (15 y 17): 0,8889145 y 0,821661. De esta manera, se procede a calcular “ N ”:

$$0,888915 = \beta \left[1 - \frac{15}{N} \right]$$

[11]

$$0,821661 = \beta \left[1 - \frac{27}{N} \right]$$

[12]

Se dividen [11] y [12]:

$$\frac{0,888915 = \beta \left[1 - \frac{15}{N} \right]}{0,821661 = \beta \left[1 - \frac{27}{N} \right]} \Rightarrow N \approx 174$$

[13]

El valor de “ β ” se puede obtener de [11] o de [12]: 0,972774 y reemplazando en [10]:

$$V(t)' = 0,9272775 V(t) \left[1 - \frac{V(t)}{174} \right] \Rightarrow 0,9272775 V(t) - 0,005591V(t)^2$$

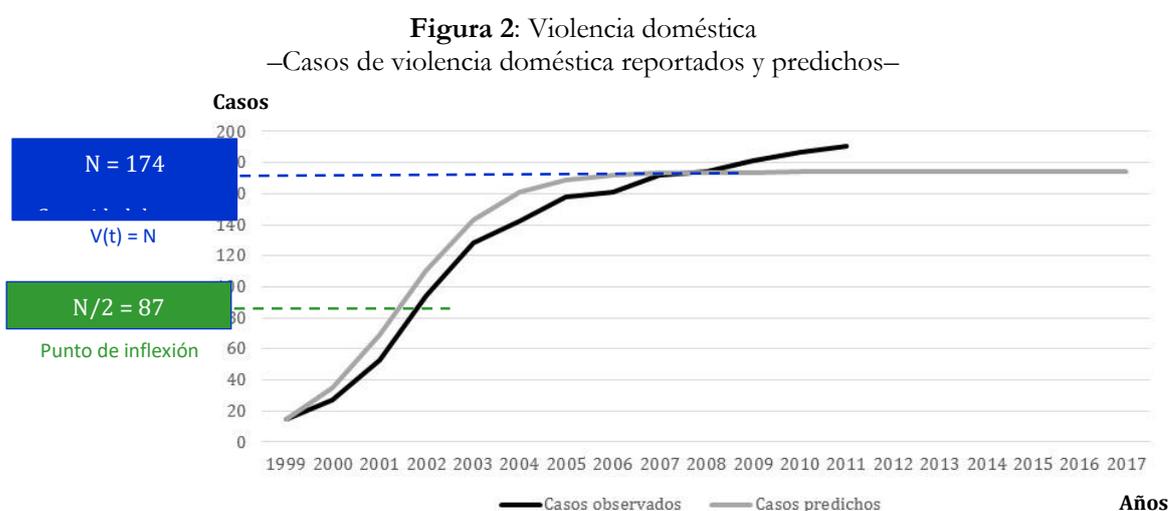
⁷Las nociones básicas de regresión lineal se estudian en la Asignatura “Estadística Metodológica” de segundo año, en la FCEyS-UNMDP.

Del análisis realizado, se deduce que el límite de víctimas, en este modelo, asciende a 174.

Aplicando el Método de Separación de Variables a [10], integrando miembro a miembro y valorando “C” mediante la condición inicial o de límite en $t = 1999$ ($V(1999) = 15$), se arriba a la siguiente expresión:

$$V(t) = \frac{173,9905}{1 + 10,5708 e^{-0,972775 t}} \quad [15]$$

Conforme a [15], si $t \rightarrow \infty \Rightarrow V(t) \rightarrow 174$, revelando que hay un límite en el crecimiento de casos de violencia. En base a dicha expresión, es posible predecir los casos de violencia para cada año, lo que se encuentra representado en la Figura 2.



Fuente: Otoo *et al.* (*op.cit.*).

Concibiendo a la Matemática y a la educación matemática con una visión compleja, que trasciende lo meramente numérico (Olivero Castro, *op.cit.*), se ha presentado una posible revisión del trabajo sobre violencia doméstica realizado por Otoo *et al.* (*op.cit.*), con el aporte de bibliografía especializada adicional, considerando las cuestiones matemáticas relevantes, pero, también, las consecuencias socioeconómicas de la problemática planteada.

El trabajo en cuestión desarrolla una versión simple del modelo SIR, el que podría ser fortalecido incorporando, por ejemplo, un tercer compartimento que incluya a las víctimas recuperadas. Con un grado mayor de complejidad, incluso, se podría analizar a los individuos violentos. Tal es así que la interacción entre víctimas y victimarios de violencia doméstica constituye el objeto de estudio de la investigación conducida por Mohammed & Musa (*op. cit.*), teniendo como uno de sus antecedentes, precisamente, el trabajo de Otoo *et al.* (*op.cit.*).

De todos modos, el énfasis de la actividad propuesta no está en la dificultad de resolución del problema matemático sino en la aplicación concreta a situaciones reales. Asimismo, se sigue la recomendación institucional de curriculizar la formación en derechos humanos de los egresados de la UNMDP (Ordenanza de Consejo Superior N° 1.774/2016). En la actualidad, esta recomendación está siendo integrada al proyecto de reforma del plan de estudios de la Carrera Licenciatura en Economía de la FCEyS-UNMDP.

Cabe indicar que la potencialidad social de estos modelos radica en la posibilidad de brindar orientaciones para la gestión de políticas públicas. Si bien la formulación simple de Otoo *et al.* (*op. cit.*) solo permite determinar la tendencia cuantitativa de las víctimas, desarrollos más sofisticados, como el ya mencionado de Mohammed & Musa (*op. cit.*), concluyen acerca de la posibilidad de erradicación significativa de la violencia doméstica.

Finalmente, es de destacar que la dificultad de captación de datos confiables constituye una de las principales limitaciones de la problemática analizada. Esto se debe, fundamentalmente, al temor de las víctimas en reconocer y manifestar el flagelo al que son sometidas.

BIBLIOGRAFÍA

- ANDONEGUI, M. (2005). Pensamiento complejo y educación matemática crítica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18, 245-251.
<https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/pensamiento-complejo-y-educacion-matematica-critica/>
- BIANCO, M. J.; CRUZ, P. D.; FRAQUELLI, A. D. & GACHE, A. L. (2020). Modelo epidemiológico SIR: una aplicación de las ecuaciones diferenciales al SARS-COV2 (Covid 19). *Revista de Investigación en Modelos Matemáticos Aplicados a la Gestión y la Economía*, 7(I), 16-38.
<https://www.economicas.uba.ar/wp-content/uploads/2016/04/Gache-Andrea-.pdf>
- CHIANG, A. C. (1987). *Métodos fundamentales de Economía Matemática*. México: Mc Graw-Hill.
- ESTRADA GARCÍA, A. (2020, outubro-dezembro). Los principios de la complejidad y su aporte al proceso de enseñanza. *Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação*, 28(109), 1.012-1.032.
<https://doi.org/10.1590/S0104-40362020002801893>
- GONZÁLEZ LÓPEZ VARCACEL, B.; TOMAINO, L.; SERRA MAJEM, LI.; BARBER, P. & RODRÍGUEZ MIRLES, S. (24/04/2020). Covid-19: pandemia de modelos matemáticos. The conversation.
<https://theconversation.com/covid-19-pandemia-de-modelos-matematicos-136212>
- GUYOT, V. (2011). *Las prácticas del conocimiento. Un abordaje epistemológico*. Buenos Aires-Argentina: Lugar S. A.
- HAEUSSLER, E. F.; PAUL, R. S. & WOOD, R. J. (2008). *Matemáticas para Administración y Economía*. México: Pearson Educación.
- KERMACK, W. O. & MCKENDRICK, A. G. (1927. August). Contributions to the Mathematical Theory of Epidemics. *Proceedings of the Royal Society*, A(115), 700-721.
- LUPÍN, B. [FCEyS-UNMDP]. (16/07/2020). *Matemática y Pandemia* [Archivo de Video]. Youtube.
<https://www.youtube.com/watch?v=s7a7wbNf6Bo&feature=youtu.be/>
- LUPÍN, B. & AGUSTINELLI, S. (2013, septiembre 12-14). *La práctica docente desde una perspectiva compleja. Teoría económica de los mercados: desde la competencia perfecta a los bienes públicos*. [Ponencia]. VII Jornadas Nacionales sobre la Formación del Profesorado: Narrativa(s), Prácticas e Investigación(es); FH-UNMDP; Mar del Plata-Argentina.
<https://nulan.mdp.edu.ar/1952/1/01517.pdf/>

- LUPÍN, B.; KEOGAN, L. & MUÑOZ, A. (2014, 26-27 junio). *Gestión de los recursos pesqueros. El Modelo Bioeconómico de Gordon-Schaefer*. [Ponencia]. XIV Jornadas Nacionales de Tecnología aplicada a la Educación Matemática Universitaria, FCE-UBA, CABA-Argentina.
<http://nulan.mdp.edu.ar/2012/>
- MOHAMMED, I. A. & MUSa, S. (2019, August). Mathematical model on the dynamics of domestic violence. *Abacus (Mathematics Science Series)*, 44(1), 427-447.
<https://www.man-nigeria.org.ng/issues/ABA-SCI-2019-45.pdf>
- MORIN, E. (2001). *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro*. Buenos Aires-Argentina: Nueva Visión.
- OLIVERO CASTRO, W. (2019, mayo-agosto). La complejidad paradigmática en el aprendizaje significativo de las Matemáticas. *Educare*, 23(2), 77-91.
<https://doi.org/10.46498/reduipb.v23i2.5/>
- OTOO, D.; SEBIL, C. & AMPONSAH, S. K. (2014). Mathematical modelling of domestic violence and its trends, case study Tamala Metropolis, Ghana. *Journal of Asian Scientific Research*, 4(8), 436-447. <https://archive.aessweb.com/index.php/5003/article/view/3659>

APLICATIVOS EN ÁLGEBRA Y ANÁLISIS MATEMÁTICO

SANTAMARIA MOSCHETTA, Juan Pablo

jsantamaria@cbc.uba.ar

Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Económicas

Palabras Clave: Aplicativos, Calculadoras, Álgebra, Análisis Matemático, TICs

RESUMEN EXTENDIDO

En la era digital actual, la tecnología ha revolucionado la forma en que los estudiantes de álgebra y análisis matemático abordan sus estudios. La introducción de calculadoras gráficas, aplicaciones de resolución de ejercicios y páginas web especializadas ha ampliado considerablemente las herramientas disponibles para comprender y resolver problemas matemáticos de manera más eficiente y efectiva.

Estos aplicativos permiten a los estudiantes realizar cálculos complejos, representar gráficamente funciones y visualizar conceptos matemáticos en tiempo real. Estas herramientas no sólo simplifican la resolución de ejercicios, sino que también facilitan la comprensión de conceptos abstractos mediante representaciones visuales.

El objetivo de este trabajo es incorporar al final de cada unidad de las materias, en su aula virtual, el aplicativo que sea necesario para desarrollar los ejercicios correspondientes, junto con el cómo hacerlo.

Aplicativo definido como todo lo que sirve para aplicar algo, ya sea páginas de internet especializadas, softwares, aplicaciones, calculadoras gráficas por supuesto todo gratuito. Junto a estos un pequeño video tutorial o instructivo que permita aprender a usar esa herramienta.

En este extenso se desarrollarán algunos ejemplos porque son 11 unidades

Un ejemplo sería: tenemos calculadoras como geogebra, que es muy sencillo cargar una función y que la dibuje, pero no lo es tanto saber la fórmula para calcular la integral definida entre dos funciones, entre dos puntos para calcular el área encerrada entre estas. Por lo tanto, al finalizar la unidad de funciones, agregaremos en el aula virtual la aplicación y la explicación para graficar estas funciones, poder verlas e interactuar. De la misma manera, al final de la unidad de integrales agregaremos el desarrollo de la fórmula para calcular y ver, el área calculada por la integral definida. Todos sabemos la importancia de ver.

Entonces, aquí está el fundamento central del trabajo: En la primaria se enseña a sumar, restar, multiplicar, dividir, sin calculadora, sin embargo, muy pocos cálculos de estos se realizan en la vida diaria manualmente. Hoy se enseña matriz inversa, determinantes, análisis completo de funciones, derivadas, integrales. Indispensable saber hacerlas con lápiz y papel. Entenderlas profundamente, así como entender cómo funciona una división. Sin embargo, en la vida profesional, simplemente está el teléfono, la computadora, se ingresan los datos del cálculo, Enter y ahí está la respuesta. Es inadmisibles que los alumnos egresen de las materias sin haber experimentado estas herramientas que utilizarán en su profesión, sin tenerlas a mano, sin haberlas podido aprender. Porque en el desarrollo profesional estas herramientas serán las que necesiten. Por lo tanto, se aprovechará el aula virtual para que las tengan en su poder y puedan utilizar los aplicativos que corresponden al finalizar cada unidad.

Sin dudas, un valor agregado necesario que no sólo optimizará el tiempo de clases, sino que acelerará los aprendizajes al poder interactuar con el ejercicio de otra manera.



Aquí algunos de los ejemplos que se llevaron a la práctica y que han logrado los objetivos propuestos.

Figura 1

Aplicativos de la unidad de vectores

Aplicativos

-  Multiplicación de un escalar por un vector (interactivo)
-  Encontrar el vector unitario con Emathelp (interactivo)
-  Vectores paralelos con Chat GPT (Inteligencia artificial)
-  Resolver operaciones con vectores con Emathelp (interactivo)
-  Planos en el espacio (interactivo)

En la figura 1 se encuentran la i diferentes maneras de llevar adelante lo escuchado en el aula. Este es el menú que tienen los alumnos, en el campus virtual justo debajo de los videos de las clases, las prácticas y la teoría de la primera unidad.

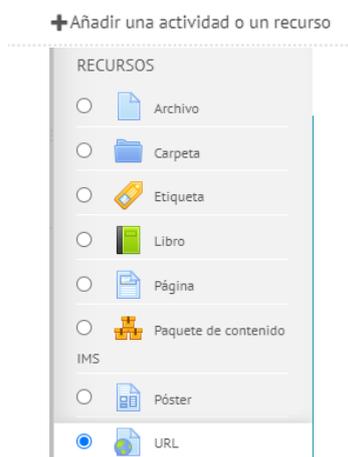
Aplicar lo aprendido, objetivo principal de este trabajo.

Se van a analizar las diferentes experiencias que tendrá el alumno. Cada vinculo llevará a lugares distintos, algunos dentro del campus, otros afuera, y otros mixtos.

Primero, cada una de estas opciones son enlaces que llevan a URLs externas. Que se insertan en el aula virtual a través de “Añadir una actividad o un recurso” y el recurso que se debe elegir es el de “URL”. Como se ve en la figura 1.1

Figura 1.1

Aplicativos de la unidad de vectores



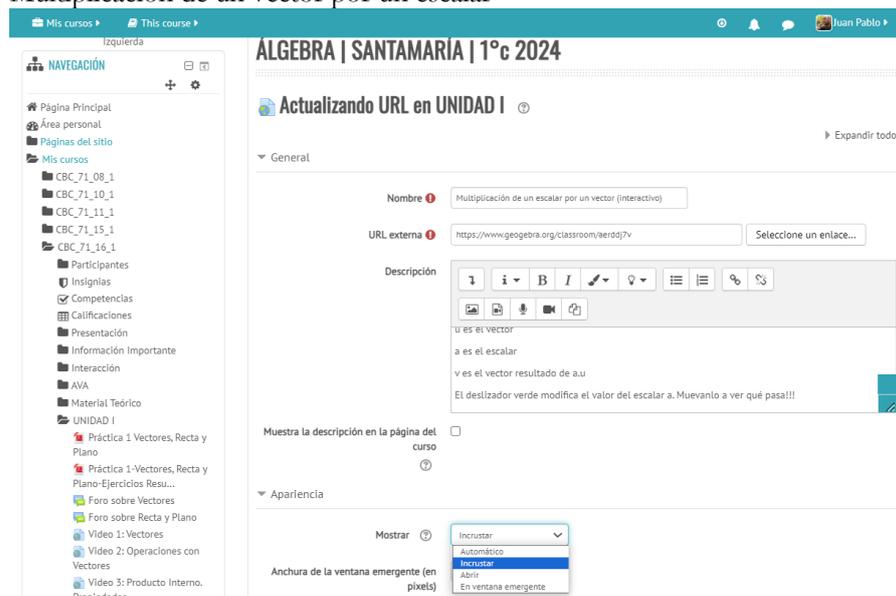
Segundo, cada aplicativo tiene un comportamiento diferente. Algunas páginas permiten utilizar la función del aula virtual que se denomina “Incrustar”, como se ve en la figura 2.1, en la solapa “Apariencia”, ahí aparece un menú desplegable que permite elegir esta alternativa y generar que el aplicativo se muestre y se opere dentro del aula virtual, como vemos en la figura 2.2. Esta opción es altamente recomendada porque posibilita realizar las operaciones sin salir del campus virtual, de esta manera seguir accediendo a todas las opciones de ésta y teniendo visibles los menús de navegación que cada uno haya configurado. Otra ventaja de esto es evitar que el alumno se distraiga y pierda la concentración, habilidades más difíciles de conseguir en estos tiempos. Además de una visualización más sobria y prolija.



Cuando esto no es posible se puede utilizar la opción “En ventana emergente” y de esta manera conducir al alumno a la página determinada donde se realiza la operación, como se ve en la figura 3 donde ya se trabaja en una web externa. Esta opción posibilita trabajar en dos ventanas a la vez, dejando abierta la ventana del campus virtual y con otra ventana trabajar la operación, como si se abriera una calculadora en una ventana.

La última opción utilizada es “Automático” donde se lee la dirección a la que los va a dirigir, estrategia necesaria cuando se necesita expresar algo antes de acceder, como se ve en la figura 4. De esta manera el alumno debe leer lo propuesto para poder encontrar el link de acceso.

Figura 2.1
Multiplicación de un vector por un escalar



Nota. <https://www.geogebra.org/classroom/aerddj7v>

En la figura 2 se utiliza GeoGebra (<https://www.geogebra.org>), la operación a trabajar es la multiplicación de un vector por un escalar, donde se agrega además un deslizador para experimentar lo que sucede a la hora de realizar esa operación. Se visualiza en el gráfico como cambia el módulo del vector y quizás su sentido. Esta herramienta permite incluso que se pueda identificar a los alumnos que acceden a la plataforma, si el docente así lo desea.

Está el vector \vec{u} , luego el vector $\vec{v} = a \cdot \vec{u}$ y el deslizador ubicado en el parámetro a . El deslizador está configurado para oscilar entre -5 y 5.

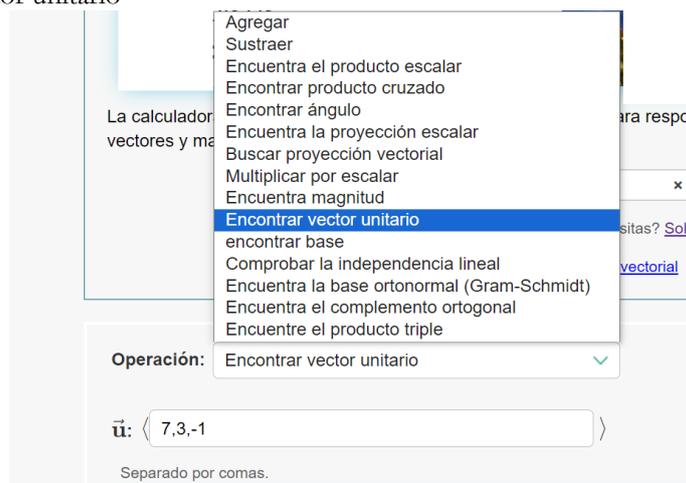


Figura 2.2
Multiplicación de un vector por un escalar



Nota. <https://www.geogebra.org/classroom/aerddj7v>

Figura 3
Encontrar el vector unitario



Nota. <https://www.emathhelp.net/es/linear-algebra-calculator/?op=u&c=&u=7%2C3%2C-1&v=4%2C0%2C3&action=operations+on+vectors>

En la figura 3 se muestra una página web (<https://www.emathhelp.net>) que posibilita operar con vectores, tenemos un menú desplegable donde elegir la operación y luego un casillero donde cargar él o los vectores según corresponda. En este caso, el vector unitario de $\vec{u} = (7; 3; -1)$. Esta plataforma, una vez presionado el botón de calcular, muestra los pasos, incluso ofrece enlaces a operaciones auxiliares como, por ejemplo, en este caso, el cálculo de la norma del vector. La figura 5 muestra la solución y los pasos correspondientes al producto escalar. Pertenece a la misma web antedicha pero esta vez para operar entre dos vectores, es el mismo menú desplegable de la figura 3, una vez seleccionado el producto escalar se habilita un renglón más para poder ingresar el otro vector.

Otro dato importante y condicionante al momento de realizar la elección de los aplicativos, es que estos tengan el desarrollo de los pasos de forma gratuita.

Figura 4
Vectores paralelos



Nota. <https://chatgpt.com/>

En la figura 4 se encuentra la opción que en la solapa de “Apariencia” se denomina “Automático”. Aquí el Moodle del campus virtual invita y dice “Haga click en el enlace para abrir el recurso”, a esto se le suma poder desarrollar un encabezado donde dar instrucciones, como en este caso.

El caso de ChatGpt y la inteligencia artificial hemos comprobado que no siempre la respuesta es completamente correcta, sin embargo, es posible darles a los alumnos, ejercicios que ya sabemos que funcionan bien y que la interacción que vaya a tener la IA con los alumnos va a ser alentadora y clarificadora. En la figura 4 se ha ingresado un prompt ya chequeado para que los alumnos lo copien y peguen en el chat de la inteligencia artificial. Esta le dará la respuesta, con la explicación y contestará todas sus preguntas. Es muy fascinante ver la paciencia y pedagogía particular que esta tiene para explicar y responder dudas.



Figura 5

Resolver operaciones con vectores, resultado del producto escalar

TU APORTACIÓN

Calcular $(7, 3, -1) \cdot (4, 0, 3)$.

SOLUCIÓN

El producto escalar está dado por $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i$.

Por lo tanto, lo que tenemos que hacer es multiplicar las coordenadas correspondientes y luego sumar los resultados: $(7, 3, -1) \cdot (4, 0, 3) = (7) \cdot (4) + (3) \cdot (0) + (-1) \cdot (3) = 25$.

RESPUESTA

$(7, 3, -1) \cdot (4, 0, 3) = 25$ ▶

Nota. <https://www.emathhelp.net/es/linear-algebra-calculator/?action=operations%20on%20vectors>

En la figura 6, podemos visualizar un plano en \mathbb{R}^3 , incluso mover los ejes del espacio para verlo desde distintos ángulos y cambiar los parámetros de la ecuación del plano para ver cómo se comporta la gráfica.

Figura 6

Planos en el espacio

Nota. <https://www.geogebra.org/3d/uuf6aacv>

Todos estos aplicativos ayudan a visualizar los conceptos tan abstractos de esta materia y con una eficiencia mucho mayor a la que tienen la tiza y el pizarrón.

Continuamos desarrollando los distintos aplicativos utilizados

En la unidad II que se refiere a matrices y determinantes, se utilizó lo que vemos en la figura 7.

Figura 7

Aplicativos de la unidad de matrices y determinantes



Aplicativos

-  Cómo multiplicar matrices con la aplicación MATHLAB (videor tutorial)
-  Cómo resolver determinantes con la aplicación MATHLAB (video tutorial)
-  Matlab (aplicación)
-  Operaciones con matrices en Matrix calculator (interfaz)
-  Resolver determinantes con Matrix Calculator (interfaz)
-  Matriz de cofactores con Emathhelp (interactivo)

Lo primero que se observa en la figura 7 son dos videos tutoriales para aprender cómo utilizar la aplicación Matlab, una aplicación para descargar en cualquier celular o tablet. Es una calculadora gráfica que además opera con matrices. En el tercer renglón está el link para descargar esta aplicación.

Luego está el Matrix Calculator (<https://matrixcalc.org/es/>), esta página sí permite insertar dentro del aula virtual la página donde operar con matrices. De una forma sumamente intuitiva como se ve en la figura 8

Figura 8
Operaciones con matrices



Nota. <https://matrixcalc.org/es/>

Esta aplicación nos permite realizar multiplicación, suma, resta de matrices, matriz inversa, transpuesta y las demás operaciones que aparecen en la figura 8. También es posible cambiar el orden de la matriz, en los botones “celdas” “+” “-”.

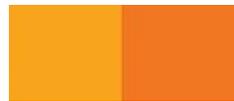
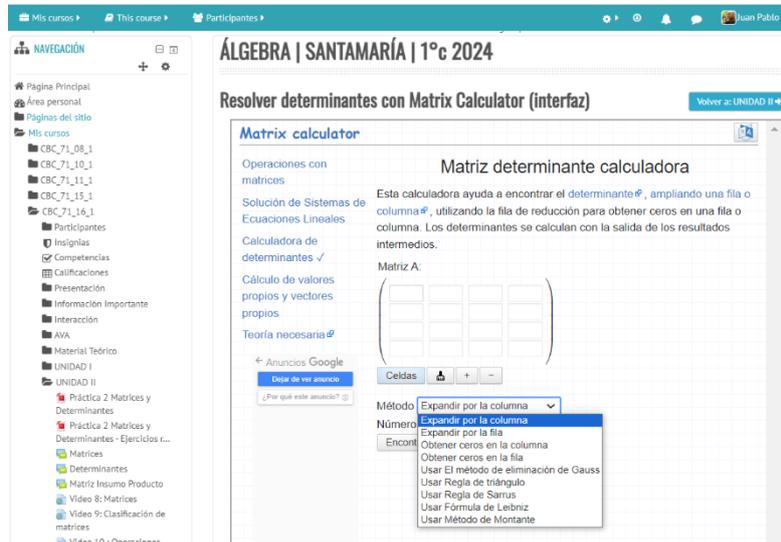


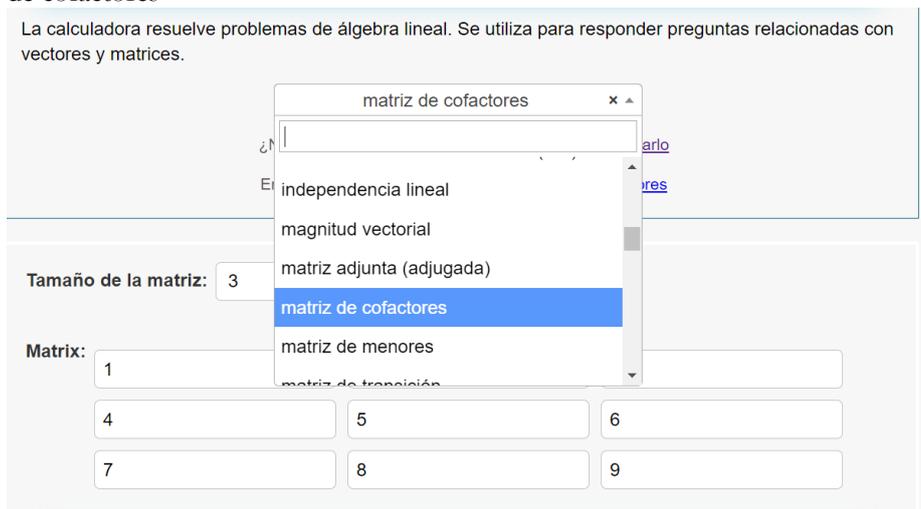
Figura 9
Determinante de una matriz



Nota. <https://matrixcalc.org/es/det.html>

Es indispensable, no sólo destacar lo intuitivo y fácil que es usar el Matrix Calculator, sino que permite elegir el método por el que se desea resolver el determinante. En la figura 9 se puede ver claramente las diferentes opciones en el menú desplegable. Además de esto, el desarrollo paso a paso de la solución es muy claro y detallado para comprender el procedimiento de cada uno de los algoritmos para resolver los determinantes

Figura 10
Matriz de cofactores



Nota. <https://www.emathhelp.net/es/linear-algebra-calculator/?action=cofactor%20matrix>



Figura 11
Resultado Matriz de cofactores

TU APORTACIÓN

Encuentre la matriz de cofactores de $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

La matriz de cofactores consta de todos los cofactores de la matriz dada, que se calculan de acuerdo con la fórmula $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, donde M_{ij} es el [menor](#), es decir, el determinante de la submatriz formada al eliminar la fila i y la columna j de la matriz dada.

Calcular todos los cofactores:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3 \text{ (para conocer los pasos, consulte [calculadora de determinantes](#)).$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 6 \text{ (para conocer los pasos, consulte [calculadora de determinantes](#)).$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 \text{ (para conocer los pasos, consulte [calculadora de determinantes](#)).$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 6 \text{ (para conocer los pasos, consulte [calculadora de determinantes](#)).$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12 \text{ (para conocer los pasos, consulte [calculadora de determinantes](#)).$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6 \text{ (para conocer los pasos, consulte [calculadora de determinantes](#)).$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3 \text{ (para conocer los pasos, consulte [calculadora de determinantes](#)).$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 \text{ (para conocer los pasos, consulte [calculadora de determinantes](#)).$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3 \text{ (para conocer los pasos, consulte [calculadora de determinantes](#)).$$

Por lo tanto, la matriz de cofactores es $\begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$.

RESPUESTA

La matriz de cofactores es $\begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ A.

Nota. <https://www.emathhelp.net/es/linear-algebra-calculator/?i=%5B%5B1%2C2%2C3%5D%2C%5B4%2C5%2C6%5D%2C%5B7%2C8%2C9%5D%5D&action=cofactor+matrix>

En la figura 10 se muestra la página web (<https://www.emathhelp.net>) que posibilita solicitar la matriz de cofactores, como así muchas otras operaciones con matrices. La figura 10 muestra el nivel de detalle de la devolución, permitiendo incluso seguir indagando, dejando un enlace para ver cómo resolvió cada determinante

Figura 12
Sistemas de ecuaciones

La solución por el método de Gauss

Transformar la matriz aumentada del sistema en una matriz en forma escalonada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \times \left(\frac{-1}{2}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -2 & -\frac{5}{2} \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \times \left(\frac{-3}{2}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & -5 & -\frac{5}{2} \end{array}\right) \times (-1) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & -5 & -\frac{5}{2} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ \frac{5}{2}x_2 - 2x_3 = -\frac{5}{2} \end{cases} \quad (1)$$

- De la ecuación 2 del sistema (1) encontramos con la variable x_2 :
 $\frac{5}{2}x_2 = -\frac{5}{2} + 2x_3$
 $x_2 = -1 + \frac{4}{5}x_3$
- De la ecuación 1 del sistema (1) encontramos con la variable x_1 :
 $2x_1 = 3 + x_2 - 2x_3 = 3 + \left(-1 + \frac{4}{5}x_3\right) - 2x_3 = 2 - \frac{6}{5}x_3$
 $x_1 = 1 - \frac{3}{5}x_3$

La respuesta:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{3}{5}x_3 \\ x_2 = -1 + \frac{4}{5}x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

Nota. <https://matrixcalc.org/es/slu.html>

Aquí en la figura 12 se destaca lo desarrollado anteriormente referido a la resolución del sistema de ecuaciones, se puede ver los diferentes métodos a elegir y el detenido paso a paso hasta llegar a la solución final.

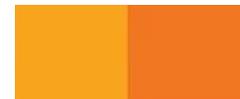


Figura 13
Dependencia e independencia lineal

Page top

ÁLGEBRA | SANTAMARÍA | 1ºc 2024

Dependencia e independencia lineal por Wims Volver a: UNIDAD IV

(interactivo)

WIMS
wims.univ-cotedazur.fr
Salir Ayuda Acerca de Lengua

Calculadora de vectores

Esta página le permite llevar a cabo operaciones entre vectores. Los coordenadas de estos vectores pueden ser números reales o complejos, así como expresiones paramétricas.

Introduzca sus vectores (de manera horizontal, separando las coordenadas con comas): (Ejemplos)

$v_1 = (1,2,3)$ $v_2 = (4,5,6)$

Luego elija lo que desea calcular.

Configuración

- Análisis de independencia lineal entre v_1, v_2 .
- Una combinación lineal de v_1, v_2 :
u =
- Complemento ortogonal de v_1, v_2 .
- Visualización de los vectores (solo para vectores en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3).
- Producto escalar de y . producto Hermitiano en el caso de vectores complejos
- Producto vectorial de y (solo para vectores en \mathbb{R}^3)

Puede el número de vectores a calcular:

Nota. <https://wims.univ-cotedazur.fr/wims/wims.cgi?session=83EDB8449C.2&+lang=es&+module=tool%2Flinear%2Fvector.en>

En esta Figura 13 vemos un nuevo aplicativo (<https://wims.univ-cotedazur.fr>) de la Universidad Côte D'azur de Francia. Donde se puede deducir, si dos o más vectores son LI o LD. Incluso grafica lo vectores ingresados.

También se ha desarrollado la visualización de combinación lineal, de sistemas de generadores del espacio vectorial, la visualización de subespacios generados, trabajo ya expuesto en el 2022. También en la unidad de programación lineal se han graficado resoluciones con el método gráfico, deslizamiento de la recta de isoutilidad y deslizadores en parámetros de la función objetivo para realizar análisis postóptimo con el método gráfico a través del Geogebra. Este nos queda incrustado en el aula virtual y ya con todas las fórmulas cargadas dónde sólo hay que apretar play para ver los deslizadores o modificar los parámetros para resolverlo.

No nos permite la extensión de trabajo seguir desarrollando los distintos aplicativos. Lo importante es que estos sean gratuitos, intuitivos y que muestren los pasos en la resolución.

Concluyendo, queda firme y descripta la fundamentación inicial. Enseñar a sumar, pero también enseñar a usar las calculadoras. Herramientas tecnológicas indispensables para realizar estas operaciones en la vida profesional y académica. Brindar estas herramientas a los alumnos, es fundamental para una formación más completa.

BIBLIOGRAFÍA

- FONT, E., LAZZARI, L., MONTERO, B., THOMPSON, S., FRAQUELLI, A., LOIACONO, T., MOULIA, P., WARTENBERG, R.; (1999); Álgebra con aplicaciones a las Ciencias Económicas; Buenos Aires, Ediciones Macchi.
- BIANCO M., GARCÍA R., ZORZOLI G.; (2000); Análisis Matemático I Notas de Teoría y Práctica; Buenos Aires, Eudeba
- COLL C. Obra coordinada por Carneiro R, Toscano J. y Díaz T.; (2009); Los desafíos de las TIC para el cambio educativo; España; Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura, Fundación Santillana.
- Ley N° 26.206; Ley de Educación Nacional; Ciudad Autónoma Buenos Aires, Argentina, 27 de diciembre de 2006.
- SANTAMARIA, J. (2023) (Ed) XXXVII Jornadas Nacionales de Docentes de Matemática de Facultades de Ciencias económicas y Afines Utilidades de la inteligencia artificial y el Chatgpt en álgebra. En N.E. Belcastro (pp.224-230), EDUPA Editorial Universitaria de la Patagonia, Chubut
- SANTAMARIA, J. (2022) Visualización de los Conceptos de Combinación Lineal, Sistema de Generadores y Subespacio Generado. En S.I. Padró (Ed) XXXVI Jornadas Nacionales de Docentes de Matemática de Facultades de Ciencias Económicas y Afines (pp.81-90), Editorial Universidad Adventista del Plata, Entre Ríos
- GACHE, A. et al. (2021) Enseñanza Remota de Emergencia Implementada para Cursos Masivos de Álgebra y Análisis Matemático de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires. En N.A. Sandez (Ed) XXXV Jornadas Nacionales de Docentes de Matemática de Facultades de Ciencias Económicas y Afines (pp. 131-140), EUNSA Editorial Universitaria Salta
- SANTAMARIA, J. (2019) Un recurso educativo más: Las redes sociales. En N.M. Sosa (Ed) XXXIV Jornadas Nacionales de Docentes de Matemática de Facultades de Ciencias Económicas y Afines (pp.271-278), Editorial Universidad Nacional de Misiones, Misiones.
- SANTAMARIA, J. (2018) Uso de la aplicación Matlab. Herramientas tecnológicas para uso en el aula. En E. Rodríguez, E. De Rosa (Ed) XXXIII Jornadas Nacionales de Docentes de Matemática de Facultades de Ciencias Económicas y Afines (pp.169-176), Editorial Universidad Nacional de Tucumán, Tucumán.



ÁREA TEMÁTICA II

Desarrollo de aplicaciones de la Matemática en áreas de las Ciencias Económicas utilizando herramientas informáticas.



MATRIZ INVERSA GENERALIZADA

VIETRI, Silvia y DEL DUCA, Silvina
silvia.vietri@gmail.com - silvinadelduca@gmail.com

Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Económicas

Palabras Clave: matriz inversa generalizada, descomposición en valores singulares

RESUMEN EXTENDIDO

1. Introducción

Si A es una matriz cuadrada o rectangular, real o compleja, se llama *matriz pseudoinvertida de A* , a la única matriz A^+ que verifica: $A \cdot A^+ \cdot A = A$.

Por su parte, la llamada *matriz inversa de Penrose o pseudoinvertida de Penrose*, cumple las cuatro propiedades siguientes:

1. $A \cdot A^+ \cdot A = A$
2. $A^+ \cdot A \cdot A^+ = A^+$
3. $(A \cdot A^+)^T = A \cdot A^+$
4. $(A^+ \cdot A)^T = A^+ \cdot A$

Hay otras inversas generalizadas a las que se les pide menos. Por ejemplo, \bar{A} es una *g-inversa* si y solo si $A \cdot \bar{A} \cdot A = A$.

Si la matriz A es cuadrada y de orden n , la matriz A^+ será cuadrada del mismo orden, pero si A es de orden $m \times n$ con $m \neq n$, A^+ será de orden $n \times m$.

Cuando la matriz A es inversible, siendo A' la traspuesta de A , la matriz $(A' \cdot A)$ tendrá inversa y la *inversa generalizada* puede calcularse aplicando la fórmula

$$A^+ = (A' \cdot A)^{-1} \cdot A'$$

en cuyo caso coincide con la inversa A^{-1} que se obtiene a partir de adjuntos, con la fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

Teniendo en cuenta este resultado, se deduce que la *matriz inversa de Penrose o pseudoinvertida de A* es una generalización de la inversa de una matriz cuadrada a matrices rectangulares o no cuadradas, por este motivo también es conocida como *matriz inversa generalizada de A* .

Si la matriz A es singular, como la matriz $(A' \cdot A)$ no tendrá inversa, la matriz inversa generalizada se puede calcular utilizando la descomposición de A en valores singulares (SVD, por sus siglas en inglés).

La SVD descompone una matriz en tres matrices: una matriz diagonal de valores singulares (D) y dos matrices ortogonales de vectores singulares izquierdos y derechos (U y V respectivamente) tal que

$$A = U \cdot D \cdot V'$$

La fórmula de cálculo de la inversa generalizada en este caso es $A^+ = V \cdot D^+ \cdot U'$, donde D^+ es la matriz que resulta de reemplazar los elementos diagonales de D que son mayores que cero por sus inversos y dejar los elementos diagonales restantes igualados a cero.

Si la matriz A es singular, entonces matriz inversa generalizada proporciona una solución de mínimos cuadrados para el sistema lineal $Ax = b$, con $A \in R^{m \times n}$, $x \in R^{n \times 1}$ y $b \in R^{m \times 1}$.

Es importante observar, que si un sistema de ecuaciones lineales admite infinitas soluciones, muchas veces interesa hallar una de ellas, como ocurre por ejemplo, en el caso del cálculo de autovectores para cierto autovalor en particular.

Dado que la matriz generalizada se utiliza en diversas aplicaciones como el cálculo de la solución de sistemas de ecuaciones lineales, el ajuste de modelos lineales por mínimos cuadrados y la descomposición de matrices en valores singulares, constituye una herramienta muy importante en el análisis matricial y en la teoría de la aproximación.

A continuación, mostraremos cómo hallar la pseudoinversa de una matriz aplicando herramientas informáticas, en varios ejemplos de aplicación.

Aplicaciones de la matriz inversa generalizada en la resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales no Homogéneos, usando el software RStudio.

Ejemplo 1: A (matriz de coeficientes del sistema) cuadrada e inversible.

Se pide, en el caso que sea posible, resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales, en forma matricial:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ 2x + 8y - 3z = 2 \\ x + 7y + z = 3 \end{cases}$$

Escribimos el sistema de la forma $A \cdot x = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -3 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Para que sea posible hallar $x = A^{-1} \cdot b$, necesitamos que A (matriz de coeficientes del sistema, cuadrada de 3×3) sea inversible ($|A| \neq 0$).

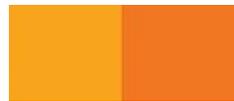
Resolvemos mediante el software RStudio:

```
A<-matrix(c(1,2,1,3,8,7,-2,-3,1),nrow=3,ncol=3)
```

```
  [1,] [2,] [3,]
[1,]  1  3 -2
[2,]  2  8 -3
[3,]  1  7  1
```

```
b<-matrix(c(1,2,3), nrow=3,ncol=1)
```

```
  [1,]
[1,]  1
```



```
[2,] 2
[3,] 3
```

```
det(A)
[1] 2
```

```
solve(A)
      [,1] [,2] [,3]
[1,] 14.5 -8.5  3.5
[2,] -2.5  1.5 -0.5
[3,]  3.0 -2.0  1.0
```

```
X<-solve(A)%*%b
      [,1]
[1,]  8
[2,] -1
[3,]  2
```

Se verifica: $A \cdot x = b$. Calculamos la matriz inversa generalizada para este sistema:

```
B<-t(A)%*%A
      [,1] [,2] [,3]
[1,]  6  26  -7
[2,] 26 122 -23
[3,] -7 -23  14
```

```
IG<-solve(B)%*%t(A)
      [,1] [,2] [,3]
[1,] 14.5 -8.5  3.5
[2,] -2.5  1.5 -0.5
[3,]  3.0 -2.0  1.0
```

Vemos que en este caso, la inversa generalizada $A^+ = (A' \cdot A)^{-1} \cdot A'$ coincide con la inversa usual $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)$.

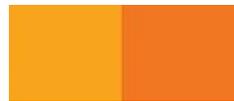
Ejemplo 2: A rectangular y $(A^t \cdot A)$ inversible

Hallar en forma matricial una solución, si existe, del siguiente sistema rectangular de ecuaciones lineales :

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = 1 \\ 5x + 6y = 1 \end{cases} \quad A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b$$

En este ejemplo, A es una matriz rectangular de 3×2 . Resolvemos con RStudio:

```
A<-matrix(c(1,3,5,2,4,6),nrow=3,ncol=2)
      [,1] [,2]
[1,]  1  2
[2,]  3  4
[3,]  5  6
```



```
b<-matrix(c(1,1,1), nrow=,ncol=1)
      [,1]
[1,]  1
[2,]  1
[3,]  1
```

```
B<-t(A)%*%A
      [,1] [,2]
[1,] 35 44
[2,] 44 56
```

```
det(B)
[1] 24
```

```
solve(B)
      [,1] [,2]
[1,] 2.333333 -1.833333
[2,] -1.833333 1.458333
```

```
IG<-solve(B)%*%t(A)
      [,1] [,2] [,3]
[1,] -1.333333 -0.3333333 0.6666667
[2,] 1.083333 0.3333333 -0.4166667
```

```
A%*%IG%*%A
      [,1] [,2]
[1,]  1  2
[2,]  3  4
[3,]  5  6
```

```
X<-IG%*%b
      [,1]
[1,] -1
[2,]  1
```

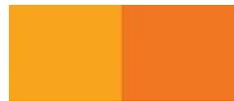
```
A%*%X
      [,1]
[1,]  1
[2,]  1
[3,]  1
```

Se verifica: $A \cdot x = b$ e $IG = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{13}{12} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{12} \end{pmatrix}$ cumple las 4 condiciones de una pseudoinversa

Penrose.

Ejemplo 3: A y $(A^t \cdot A)$ cuadradas y singulares

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales en forma matricial. En el caso en que A sea singular, usar la pseudoinversa de A para hallar, si existe, una solución del sistema:



$$\begin{cases} x + y + w = 1 \\ 2x + 2y + 2w = 2 \\ 3x + 3y + 2z + 3w = 1 \\ 4x + 4y + z + w = 0 \end{cases} \quad A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = b$$

Resolvemos usando RStudio:

```
A<-matrix(c(1,2,3,4,1,2,3,4,0,0,2,1,1,2,3,1),nrow=4,ncol=4)
b<-matrix(c(1,2,1,0), nrow=,ncol=1)
```

```
det(A)
[1] 0
```

```
B<-t(A)%*%A
```

```
det(B)
[1] 0
```

```
C<-svd(A)
```

```
$d
```

```
[1] 8.661737 1.914452 1.144200 7.0195e-16
```

```
$u
```

```
      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]
[1,] -0.1915616 -0.1184802 0.3863503 -0.8944272
[2,] -0.3831233 -0.2369604 0.7727007 0.4472136
[3,] -0.6254152 -0.6031372 -0.4950568 -5.5511e-17
[4,] -0.6522089 0.7523548 -0.0926596 1.1102e-16
```

```
$v
```

```
      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]
[1,] -0.6283832 0.3173789 0.06637197 -0.7071068
[2,] -0.6283832 0.3173789 0.06637197 0.7071068
[3,] -0.2197065 -0.2371016 -0.94631490 -3.0531e-16
[4,] -0.4024901 -0.8615823 0.30931802 1.1102e-16
```

```
IG<-C$v%*%diag(c(1/C$d[1],1/C$d[2],1/C$d[3],0))%*%t(C$u)
```

```
      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]
[1,] 0.01666667 0.03333333 -0.08333333 0.16666667
[2,] 0.01666667 0.03333333 -0.08333333 0.16666667
[3,] -0.30000000 -0.60000000 0.50000000 -8.3266e-17
[4,] 0.16666667 0.33333333 0.16666667 -0.33333333
```

```
X<-IG%*%b
```

```
      [,1]
[1,] 1.5265e-16
[2,] -2.2204e-16
[3,] -1.000000
[4,] 1.000000
```

$$X \cong \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



```
A%%X
      [,1]
[1,] 1.000000
[2,] 2.000000
[3,] 1.000000
[4,] 2.2204e-16
```

Se verifica: $A \cdot x = b$ e $IG = \begin{pmatrix} 1/60 & 1/30 & -1/12 & 1/6 \\ 1/60 & 1/30 & -1/12 & 1/6 \\ -3/10 & -3/5 & 1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 & -1/3 \end{pmatrix}$ cumple las 4 condiciones de una pseudoinversa Penrose.

En este ejemplo, $rg(A) = rg(A') = 3 < 4$ y por el *Teorema de Rouché-Frobenius*, concluimos que es un *sistema compatible indeterminado* (infinitas soluciones), con 1 variable libre.

El sistema equivalente es:
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = -1 \\ w = 1 \end{cases}$$

y el conjunto solución son los vectores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x = -y \\ z = -1 \\ w = 1 \end{cases}$

Para $y = 0$ calculamos una de las infinitas soluciones del sistema: $(0, 0, -1, 1)$, que es la solución obtenida usando la pseudoinversa.

Ejemplo 4: A rectangular y $(A^t \cdot A)$ singular

Hallar en forma matricial una solución, si existe, del siguiente sistema rectangular de ecuaciones lineales :

$$\begin{cases} x + y - 2z + w + 3v = 1 \\ 2x - y + 2z + 2w + 6v = 2 \\ 3x + 2y - 4z - 3w - 9v = 3 \end{cases}$$

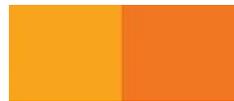
$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = b$$

Resolvemos con RStudio:

```
A<-matrix(c(1,2,3,1,-1,2,-2,2,-4,1,2,-3,3,6,-9),nrow=3,ncol=5)
b<-matrix(c(1,2,3), nrow=,ncol=1)
B<-t(A)%%A
```

```
det(B)
[1] 0
```

```
C<-svd(A)
$d
[1] 12.676784 4.190171 2.396165
$u
```



```

      [1]      [2]      [3]
[1,] -0.1591778 0.7320490 -0.6623947
[2,] -0.5089281 0.5140842 0.6904416
[3,] 0.8459638 0.4470142 0.2907295

```

\$v

```

      [1]      [2]      [3]
[1,] 0.1073504 0.7401273 0.66384294
[2,] 0.1610564 0.2653813 -0.32192169
[3,] -0.3221129 -0.5307627 0.64384338
[4,] -0.2930495 0.1000376 -0.06414413
[5,] -0.8791485 0.3001129 -0.19243238

```

C\$u%*%diag(C\$d)%*%t(C\$v)

```

      [1] [2] [3] [4] [5]
[1,] 1 1 -2 1 3
[2,] 2 -1 2 2 6
[3,] 3 2 -4 -3 -9

```

IG<-C\$v%*%diag(1/C\$d)%*%t(C\$u)

```

      [1]      [2]      [3]
[1,] -0.05555556 0.277777778 0.1666667
[2,] 0.13333333 -0.066666667 0.0000000
[3,] -0.26666667 0.133333333 -5.5511e-17
[4,] 0.03888889 0.005555556 -0.01666667
[5,] 0.11666667 0.016666667 -0.05000000

```

A%*%IG%*%A

```

      [1] [2] [3] [4] [5]
[1,] 1 1 -2 1 3
[2,] 2 -1 2 2 6
[3,] 3 2 -4 -3 -9

```

X<-IG%*%b

```

      [1]
[1,] 1.000000
[2,] 1.1102e-16
[3,] -6.1062e-16
[4,] 1.7347e-16
[5,] 2.7755e-16

```

$$X \cong \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A%*%X

```

      [1]
[1,] 1
[2,] 2
[3,] 3

```



Se verifica: $A \cdot x = b$

En este ejemplo, $rg(A) = rg(A') = 3 < 5$ y por el *Teorema de Rouché-Frobenius*, concluimos que es un sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones), con 2 variables libres.

El sistema equivalente es:
$$\begin{cases} x + y - 2z + w + 3v = 1 \\ 3y - 6z = 0 \\ 18w + 54v = 0 \end{cases}$$

y el conjunto solución son los vectores $(x, y, z, w, v) \in \mathbb{R}^5 / :$
$$\begin{cases} x = -4z - 3v + 1 \\ y = 2z \\ w = -3v \end{cases}$$

Para $z = v = 0$, calculamos una de las infinitas soluciones del sistema: $(1, 0, 0, 0, 0)$, que es la que obtuvimos usando la pseudoinversa.

Sistemas para los cuales no existe solución

Ahora veamos el caso de un sistema incompatible. El hecho de que el sistema lineal sea incompatible significa que el vector b que estamos considerando no es combinación lineal de las columnas de A .

Aunque no podemos resolver el sistema $A \cdot x = b$, sí tiene solución el sistema lineal $A \cdot x = b^*$, donde b^* es la proyección ortogonal de b sobre el subespacio generado por las columnas de A .

Al ser b^* el vector más cercano a b para el que existe solución, llamamos a la solución del nuevo sistema lineal compatible $A \cdot x = b^*$, *solución de mínimos cuadrados* del sistema incompatible.

Ejemplo 5:

Hallar, utilizando RStudio, una solución de mínimos cuadrados del sistema incompatible

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$$

```
A<-matrix(c(2,2,-1,-1),nrow=2,ncol=2)
```

```
      [,1] [,2]
[1,]    2  -1
[2,]    2  -1
```

```
b<-matrix(c(1,-2), nrow=,ncol=1)
```

```
      [,1]
[1,]    1
[2,]   -2
```

```
det(A)
```

```
[1] 0
```

```
C<-svd(A)
```

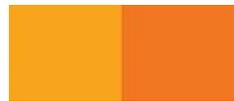
```
$d
```

```
[1] 3.162278 0.000000
```

```
$u
```

```
      [,1] [,2]
[1,] -0.7071068 -0.7071068
[2,] -0.7071068  0.7071068
```

```
$v
```



```
[,1] [,2]
[1,] -0.8944272 0.4472136
[2,] 0.4472136 0.8944272
IG<-C$v%*%diag(c(1/C$d[1],0))%*%t(C$u)
```

```
IG<-
[,1] [,2]
[1,] 0.2 0.2
[2,] -0.1 -0.1
```

```
X<-IG%*%b
[,1]
[1,] -0.2
[2,] 0.1
```

```
b*<-A%*%X
[,1]
[1,] -0.5
[2,] -0.5
```

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ y } b^* = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

El subespacio generado por las columnas de A , es la recta por el origen $y = x$.

La proyección del vector b sobre esta recta, es la solución de mínimos cuadrados del sistema incompatible. Se verifica: $A \cdot x = b^*$ (**Figura 1**)

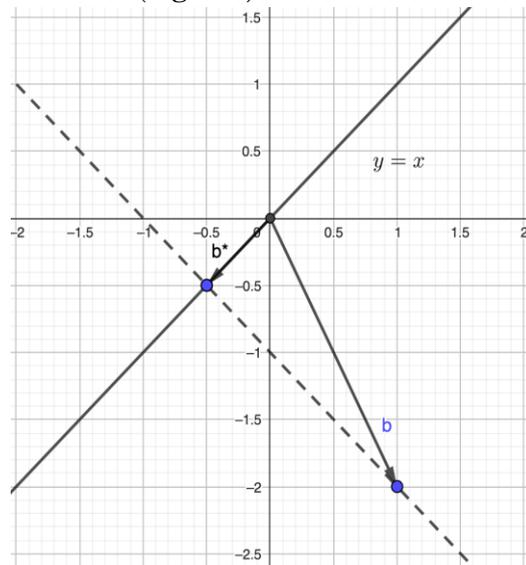


Figura 1: Proyección de b sobre el subespacio generado por las columnas de A



BIBLIOGRAFÍA

- BEN-ISRAEL, A. & GREVILLE T. N.E. (2010). Generalized Inverses. Editorial Springer-Verlag Canadá.
- BJERHAMMAR, A. (1951). Application of calculus of matrices to method of least squares; with special references to geodetic calculations. Trans. Roy. Inst. Tech. Stockholm 49.
- CAMPBELL S.L. & MEYER Jr. (1979). Generalized Inverses or linear transformations, Editorial Dover.
- PEÑA, M. (1992) Estadística, Modelos y Métodos 2-Modelos Lineales y Series Temporales, Alianza Editorial S. A., Madrid.
- PENROSE, R. (1955). A generalized inverse for matrices. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 51: 406-413.
- PRINGLE R. M. & RAYNER A.A. (1975), Generalized Inverse Matrices whit applications to statistics., Griffin London.



ANÁLISIS DE ESTABILIDAD EN UN MODELO DE MERCADO CON EXPECTATIVAS DE PRECIO CON PANELES INTERACTIVOS*

FERNÁNDEZ, María José¹; GARCÍA FRONTI, Verónica² y PARMA, Andrea³
mariajfernandez@economicas.uba.ar - vgarciagarciafronti@economicas.uba.ar - andreaparma38@gmail.com

¹Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Económicas, CONICET, Instituto Interdisciplinario de Economía Política de Buenos Aires (IIEP)

²Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Económicas, IADCOM, Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos aplicados a la Economía y la Gestión (CMA)

³Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Económicas

Palabras Clave: Ecuaciones Diferenciales, Dinámica económica, Análisis de Estabilidad

RESUMEN EXTENDIDO

INTRODUCCIÓN

La resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias y el estudio de la estabilidad de la solución hallada permite a los estudiantes de las Ciencias Económicas comprender la dinámica de los modelos de mercado con expectativa de precios. El objetivo de este trabajo es que los alumnos de la asignatura Análisis Matemático II complementen el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias utilizadas en un modelo económico mediante herramientas gráficas que favorezcan la interpretación de los resultados.

Las herramientas gráficas permiten visualizar trayectorias temporales de manera dinámica, facilitando la comprensión de la evolución de las variables económicas. Además, la capacidad de ensayar alternativas de parámetros y condiciones iniciales brinda una comprensión más profunda de las condiciones que favorecen la estabilidad del modelo. La integración de tecnología y paneles interactivos en la educación transforma el aprendizaje en una experiencia dinámica y participativa. Estas herramientas facilitan la comprensión de conceptos complejos, promoviendo un entorno educativo innovador y alentador para los estudiantes.

En la primera parte de este trabajo se describe un modelo dinámico de ajuste de precios ante la presencia de actitudes especulativas por parte de los demandantes y se explican los principales supuestos del modelo. Luego, se resuelve la ecuación diferencial del modelo con las técnicas vistas en las clases de la asignatura Análisis Matemático II y se realiza el estudio analítico de la solución. En la segunda parte, se estudiarán varios escenarios teniendo en cuenta distintas actitudes del decisor frente al cambio de precios y se realizará un análisis a partir de la visualización de las

* Este trabajo se realiza en el marco de los proyectos:

Proyecto UBACyT “Metodologías cuantitativas innovadoras para la toma de decisiones en contextos estatales: Articulación entre la Universidad y el campo profesional.

Investigación adscrita a la Red Sistemas Inteligentes y Expertos. Modelos Computacionales Iberoamericanos (SIEMCI), número de proyecto 522RT0130 en Programa Iberoamericano de Ciencia y Tecnología para el Desarrollo (CYTED).

gráficas de la trayectoria temporal utilizando paneles interactivos diseñados con una herramienta informática. De esta forma, el trabajo permite que el estudiante entienda la utilidad de las ecuaciones diferenciales en los modelos económicos y como realizar un análisis gráfico además de la resolución analítica de la ecuación diferencial.

1. MODELO DE AJUSTE DE PRECIO CON ESPECULACIÓN

Supongamos que tenemos un modelo de mercado con ajuste de precio en el cual los demandantes presentan una actitud especulativa respecto al movimiento instantáneo de los precios ($p'(t)$).

$$\begin{cases} Q_d = \alpha - \beta p(t) + \varepsilon p'(t) & \eta, \beta, \varepsilon \in \mathfrak{R}^+ \\ Q_s = -\gamma + \delta p(t) & \gamma, \delta \in \mathfrak{R}^+ \\ p'(t) = j(Q_d - Q_s) & j > 0 \end{cases}$$

Se opera con el modelo y se llega a una ecuación diferencial de 1º orden lineal:

$$p'(t) + j \frac{\beta + \delta}{1 - j\varepsilon} p = j \frac{\alpha + \gamma}{1 - j\varepsilon}$$

La trayectoria temporal del precio para la condición inicial, $p(0) = p_0$, es:

$$p(t) = [p_0 - p_e] e^{-j t \left(\frac{\beta + \delta}{1 - j\varepsilon} \right)} + p_e \quad \text{con precio de equilibrio: } p_e = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

El precio converge para:

$$\frac{\beta + \delta}{1 - j\varepsilon} > 0$$

Como

$$\beta, \delta, \varepsilon, j \in \mathfrak{R}^+, \beta + \delta > 0$$

El precio converge cuando:

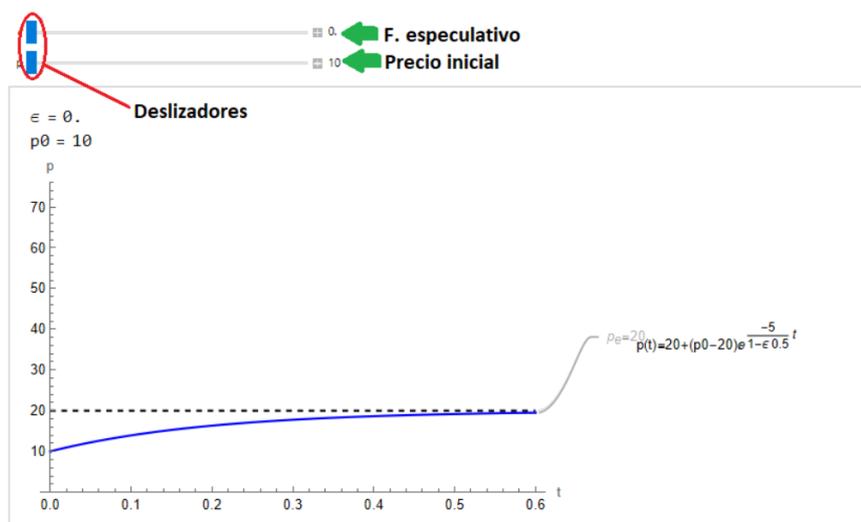
$$\varepsilon < \frac{1}{j}$$

2. VISUALIZACIÓN DE LA SOLUCIÓN

Para realizar un análisis gráfico de la estabilidad de la solución, se programó un CDF (*Computable Document Format*) que consiste en un panel interactivo de libre acceso desarrollado en el programa *Wolfram Mathematica* que permite visualizar la trayectoria del precio, modificando en forma interactiva a través de deslizadores, los valores del parámetro de especulación y el precio inicial (Figura 1).



Figura 1. Panel interactivo



Fuente: Elaboración Propia

2.1 Ejemplo numérico

Para realizar un análisis de las diferentes alternativas respecto al factor especulativo ε y su impacto en la estabilidad de la solución, se utilizará un ejemplo numérico.

El modelo queda definido de la siguiente manera:

$$\begin{cases} Q_d = 180 - 5p(t) + \varepsilon p'(t) \\ Q_s = -20 + 5p(t) \\ p'(t) = 0.5(Q_d - Q_s) \end{cases}$$

Se opera con el modelo y se llega a una ecuación diferencial de 1º orden lineal con coeficientes constantes:

$$p'(t) + \frac{5}{1 - 0.5\varepsilon}p = \frac{100}{1 - 0.5\varepsilon}$$

La trayectoria temporal del precio para la condición inicial, $p(0) = p_0$, es:

$$p(t) = [p_0 - 20]e^{\left(\frac{-5}{1-0.5\varepsilon}\right)t} + 20 \quad \text{Con precio de equilibrio: } p_e = 20$$

Por lo tanto, el precio converge al precio de equilibrio para $\varepsilon < 2$.

A continuación, se analizará gráficamente los diferentes casos del modelo partiendo del caso de un modelo en donde no existe especulación.

2.2 Caso sin especulación ($\varepsilon = 0$)

En la Figura 2 se observa que, al no existir especulación por parte del demandante, si el precio inicial es superior al precio de equilibrio, por ejemplo, $p(0) = 50$, la trayectoria del precio decrece y se estabiliza en el valor $p_e = 20$. De idéntico modo, si el precio inicial es inferior al precio de equilibrio, $p(0) = 10$, la trayectoria crece, convergiendo al precio de equilibrio.

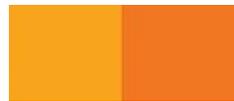
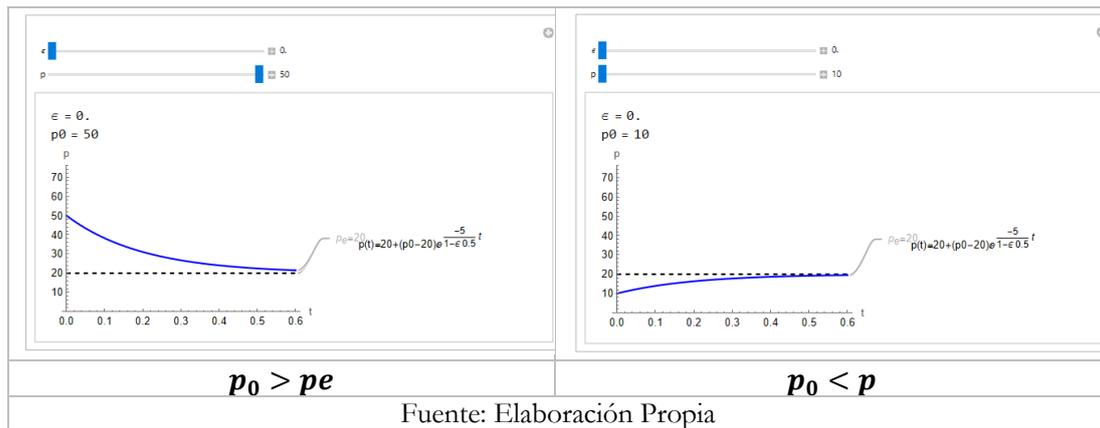


Figura 2. Caso sin especulación

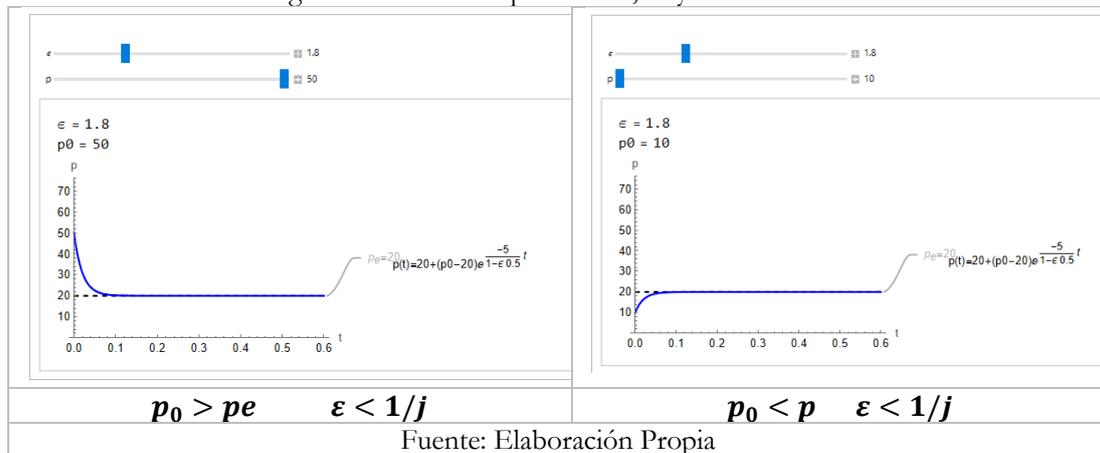


2.3 Caso con especulación ($\epsilon > 0$)

Cuando existe especulación vamos a analizar distintos escenarios para evaluar los condicionantes de la convergencia.

Si analizamos el caso en el que se cumple la convergencia del modelo, $\epsilon < \frac{1}{j}$, en este caso, $\epsilon < 2$ podemos visualizar que la trayectoria converge cualquiera sea el precio inicial. En la Figura 3 se visualiza que la trayectoria converge tanto para un precio inicial superior o inferior al precio de equilibrio.

Figura 3. Caso con especulación, trayectoria estable



Si analizamos casos en donde no se cumple la convergencia del modelo se podrá visualizar que la trayectoria diverge independientemente de las condiciones iniciales. Esto se puede ver gráficamente en la Figura 4.

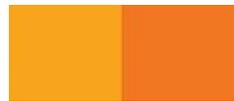
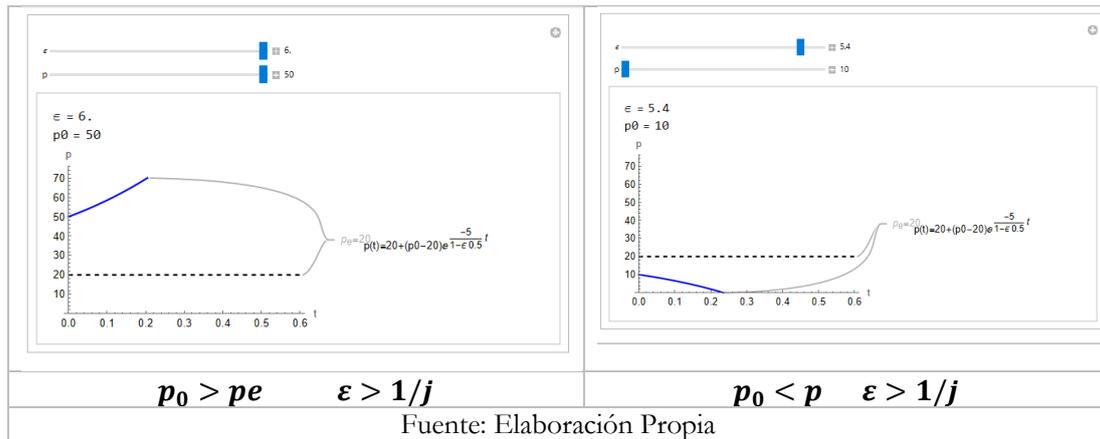
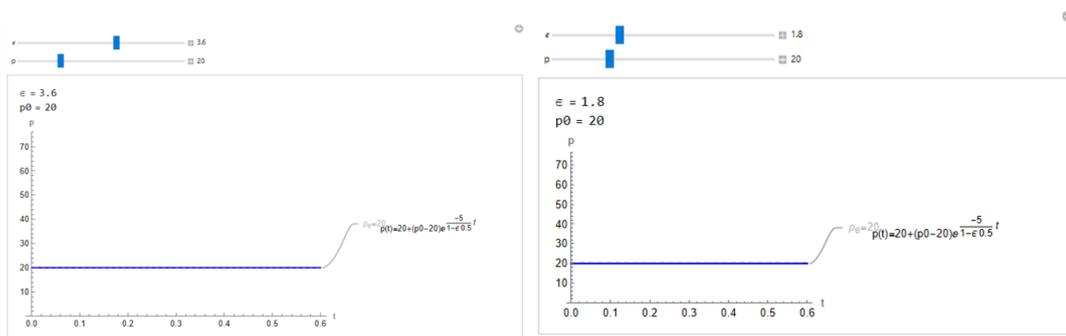


Figura 4. Caso con especulación, trayectoria inestable



Por último, si se parte del precio de equilibrio, independientemente de si el modelo es estable o no, la trayectoria del precio será constante e igual al precio de equilibrio. En la figura 5 graficamos dos casos en donde el precio inicial es igual al precio de equilibrio en ambos, pero modificamos el valor de ϵ . En un caso consideramos el caso de un modelo inestable con $\epsilon > 2$ y en el otro un modelo estable $\epsilon < 2$.

Figura 5. Caso $p_0 = p_e$



CONCLUSIONES

En este trabajo se analizó el modelo clásico de oferta y demanda con ajuste instantáneo de precio en donde la función demanda considera que los compradores son especuladores. Esto significa que se analizó un tipo de agente comprador que toma la decisión de cuánto comprar de acuerdo con el precio actual y a la velocidad a la que varía el mismo.

El estudio de la estabilidad de la solución encontrada se acompañó con un análisis gráfico que se realizó con paneles interactivos para facilitar su comprensión. Se experimentó considerando un escenario sin especulación y otro con especulación.

En el escenario sin especulación se analizó y se mostró gráficamente que el modelo, con un factor de ajuste positivo, converge al precio de equilibrio cualesquiera sean las condiciones iniciales. En el escenario con especulación por parte de los compradores se mostró que el modelo es estable siempre y cuando el parámetro de especulación (ϵ) sea menor que el inverso del factor de ajuste (j).

Como próximo trabajo consideraremos además de la velocidad del precio su aceleración a través de la segunda derivada lo que conducirá a ecuaciones diferenciales ordinarias lineales a coeficientes constantes de segundo orden.

BIBLIOGRAFÍA

- CALVO, M.; ESCRIBANO, M.; FERNÁNDEZ, G.; GARCÍA, M.; IBAR, R.; ORDÁS, M. (2003). Problemas resueltos de Matemáticas aplicadas a la Economía y a la Empresa. Madrid, AC, Thomson
- CORTEZ LOPEZ, J.C.; ROMERO BAUSET, J.V.; ROSELLÓ FERRAGUD, M.D.; VILLANUEVA MICÓ, R.J. (2012). Modelos dinámicos continuos de oferta y demanda. Parte II: Cuando el ajuste del precio depende del inventario y existe especulación. Departamento de Matemática Aplicada, Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar. Universidad Politécnica de Valencia.
- CHIANG, A.; WAINWRIGHT, K. (2006). Métodos fundamentales de economía matemática (4a. ed.). Editorial: McGraw-Hill, México.
- DI CARO, H.; GALLEGO, L. (2000) Análisis Matemático II con aplicaciones a las Ciencias Económicas. Editorial Macchi. Buenos Aires.
- GANDOLFO, G. (1976). Métodos y modelos matemáticos de la dinámica económica. Ed. Tecnos, Madrid.

MEJORANDO LA ENSEÑANZA DEL ALGEBRA CON GOOGLE COLABORATORY PARA RESOLVER PROBLEMATICAS DE PROGRAMACION LINEAL

MORRONE, Rita Beatriz; RIOS, Maylen Joselin y CARRASCO, Araceli
ritamorrone@economicas.uba.ar - maylenrios@economicas.uba.ar - aracelicarrasco@economicas.uba.ar

Cátedra de Álgebra, R. García - Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Económicas

Palabras Clave: Programación lineal - Google Colaboratory - Problemas de optimización

RESUMEN EXTENDIDO

Vivimos en una sociedad tecnológica donde las habilidades de programación son cruciales en campos académicos y profesionales. La programación lineal es esencial para la toma de decisiones informadas en diversas áreas como la industria y economía. Sin embargo, los estudiantes se enfrentan a diferentes dificultades en el momento de su aplicación a problemáticas del mundo real.

Una de las principales dificultades es la falta de comprensión de los conceptos claves. Es fundamental entender qué representa una variable de decisión, cuál es la función que están optimizando, el impacto que generan las restricciones y por qué es importante realizar un análisis de sensibilidad. Sin esta comprensión, es difícil interpretar las soluciones matemáticas en el contexto del problema que están resolviendo.

Debido a estas dificultades, tienden a recurrir a aprender los contenidos y procedimientos de memoria. Esto sumado a que trabajar en una hoja de papel en un aula nos limita a un número reducido de variables de decisión y restricciones genera una desconexión entre el entorno de aprendizaje y la realidad ya que no logran visualizar como relacionar y aplicar los modelos matemáticos abstractos a situaciones concretas del mundo real.

Es aquí donde entra en juego Google Colaboratory como una herramienta de apoyo que puede potenciar y enriquecer el proceso de aprendizaje. Tiene la capacidad de responder a los requerimientos de los usuarios, permitiéndoles experimentar en tiempo real cómo cambian los resultados al modificar los parámetros del modelo, las variables a optimizar y las restricciones aplicadas a esas variables. Esto permite a los estudiantes ver directamente cómo sus acciones afectan los resultados, y visualizarlos en tablas o gráficos dedicando más tiempo a la comprensión de los conceptos.

El uso de Google Colaboratory, es gratuito y facilita el trabajo colaborativo permitiendo a los estudiantes escribir y ejecutar código Python sin necesidad de instalación ni utilización de recursos computacionales propios. Aunque está diseñada para Python, limitando su uso con otros lenguajes de programación, su aplicación en la enseñanza del Álgebra permite una comprensión más tangible de temas de aplicación económica. A pesar de esta limitación, ofrece ventajas significativas como la accesibilidad, facilidad de uso, capacidad para importar códigos y la visualización a través de tablas y gráficos.

De esta manera, podemos abordar la problemática de que los estudiantes se centren únicamente en cálculos necesarios para llegar al resultado correcto, en lugar de comprender el significado detrás de esos cálculos. Además optimiza el tiempo de resolución y nos permite abordar

problemas más complejos y desafiantes. Esta experiencia práctica mejora significativamente la preparación de los estudiantes para aplicar sus conocimientos en situaciones reales, despertando su interés al mostrarles la aplicabilidad directa de lo que están aprendiendo.

La integración de Google Colaboratory en el aula estimula a los estudiantes a involucrarse en temas tecnológicos desde una etapa temprana. Al familiarizarse con el lenguaje de programación Python y herramientas digitales, están mejor preparados para enfrentar una sociedad cada vez más tecnológica. Esta herramienta facilita el trabajo colaborativo permitiendo dedicar mayor tiempo en las aulas a la discusión de resultados y comprensión de fundamentos optimizando el aprendizaje.

Se desarrollan dos problemáticas de programación lineal, como ser una maximización de beneficio y una minimización de costo. Inicialmente se plantea una función objetivo con dos variables de elección y tres restricciones. La finalidad es generar impacto en los estudiantes utilizando problemas que habitualmente resuelven en las aulas. Posteriormente con el objetivo de amplificar la visión de los mismos generando un espacio de discusión se plantea la extensión del problema a mayores cantidades de variables de elección y restricciones.

En el primer problema se busca maximizar el beneficio de una empresa que fabrica dos productos, un aditivo para combustible y una base para solvente. En el proceso de producción se requiere de tres materias primas para la finalización de los productos. Se sabe que cada tonelada de aditivo genera una contribución de \$40 y cada tonelada de solvente genera una contribución de \$30. Además cuenta con una disponibilidad de 20 toneladas para el material 1, 21 toneladas para el material 2 y 5 toneladas para el material 3°(Anderson, 2019).

	INSUMOS	ADITIVO	SOLVENTE	DISPONIBILIDAD
0	materia prima 1	0.4	0.5	20.0
1	materia prima 2	0.6	0.3	21.0
2	materia prima 3	0.0	0.2	5.0
3	BENEFICIO	40.0	30.0	-----

Para su resolución se propone la realización de 6 pasos:

Paso 1: Instalar e importar la bibliotecas necesarias.

```
[ ] !pip install pulp
```

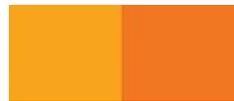
```
Collecting pulp
  Downloading PuLP-2.8.0-py3-none-any.whl (17.7 MB)
----- 17.7/17.7 MB 25.2 MB/s eta 0:00:00
Installing collected packages: pulp
Successfully installed pulp-2.8.0
```

```
# Importar la biblioteca pulp
from pulp import *
```

Paso 2: Crear el problema de programación lineal.

```
# Crear un problema de programación lineal
prob = LpProblem("Máximo Beneficio", LpMaximize)
```

Paso 3: Definir las variables de elección, función objetivo y restricciones.



```
# Definir las variables de decisión
x1 = LpVariable("x1", 0, None, LpContinuous)
x2 = LpVariable("x2", 0, None, LpContinuous)

# Definir la función objetivo
prob += 40*x1 + 30*x2

# Definir las restricciones
prob += 0.4*x1 + 0.5*x2 <= 20
prob += 0.6*x1 + 0.3*x2 <= 21
prob += 0.2*x2 <= 5
```

Paso 4: Resolución del problema, mediante el comando `prob.solve()`

```
# Resolver el problema
prob.solve()
```

Paso 5: Creación de un Dataframe, con una tabla de resultados

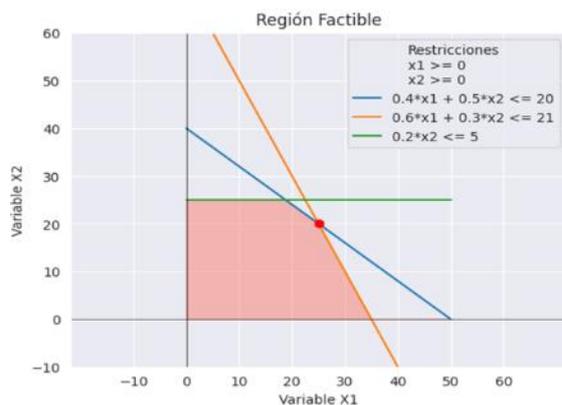
```
# Crear un DataFrame con los resultados
import pandas as pd
resultados= pd.DataFrame({
    "Estado": LpStatus[prob.status],
    "Variable": [v.name for v in prob.variables()],
    "Valor Óptimo": [v.varValue for v in prob.variables()]
})

# Mostrar la tabla de resultados

resultados
```

	Estado	Variable	Valor Óptimo
0	Optimal	x1	25.0
1	Optimal	x2	20.0

Paso 6: Visualización gráfica.



Los estudiantes pueden acceder al código a través de un link y correrlo de manera sencilla. También tienen la opción de modificar los valores de los parámetros y visualizar los resultados. Se busca generar incentivos para la realización de problemáticas con mayor número de variables de decisión y restricciones. Esto permite resolver modelos de mayor complejidad.

Posteriormente se plantea el segundo problema. Se realiza una minimización de costos para una dieta eficiente. Se busca determinar la cantidad óptima de alimentos a consumir para minimizar el costo total. La dieta debe contener al menos 300 calorías. No debe contener más de 10 gramos de

proteína. Debe contener no menos de 10 gramos de carbohidratos; no menos de 8 gramos de grasa; al menos 0,5 unidades de pescado; y al menos 1 unidad de leche (Stigler, 1930).

	Bread	Milk	Cheese	Potato	Fish	Yogurt
Cost	2.0	3.5	8.0	1.5	11.0	1.0
Protein (grams)	4.0	8.0	7.0	1.3	8.0	9.2
Fat (grams)	1.0	5.0	9.0	0.1	7.0	1.0
Carbohydrates (grams)	15.0	11.7	0.4	22.6	0.0	17.0
Calories	90.0	120.0	106.0	97.0	130.0	180.0

Para este caso, se realizan 5 pasos que llevan a la resolución del problema, simplificando la operatoria y optimizando el tiempo. Se busca profundizar la comprensión del mismo y generar un espacio de intercambio entre los estudiantes.

Paso 1: Instalar e importar la bibliotecas necesarias.

```
# opcion con 6 variables de desicion y 6 restricciones
# Importar la biblioteca pulp
from pulp import *
```

Paso 2: Crear el problema de programación lineal.

```
# Crear un problema de programación lineal
prob = LpProblem("Minimo Costo", LpMinimize)
```

Paso 3: Definir las variables de elección, función objetivo y restricciones.

```
# Definir las variables de decisión
x1 = LpVariable("x1", 0, None, LpContinuous)
x2 = LpVariable("x2", 0, None, LpContinuous)
x3 = LpVariable("x3", 0, None, LpContinuous)
x4 = LpVariable("x4", 0, None, LpContinuous)
x5 = LpVariable("x5", 0, None, LpContinuous)
x6 = LpVariable("x6", 0, None, LpContinuous)
```

```
prob += 2*x1 + 3.5*x2 + 8*x3 + 1.5*x4 + 11*x5 + 1*x6
```

```
prob += 90*x1 + 120*x2 + 106*x3 + 97*x4 + 130*x5 + 180*x6 >= 300
prob += 4*x1 + 8*x2 + 7*x3 + 1.3*x4 + 8*x5 + 9.2*x6 <= 10
prob += 15*x1 + 11.7*x2 + 0.4*x3 + 22.6*x4 + 0*x5 + 17*x6 >= 10
prob += 1*x1 + 5*x2 + 9*x3 + 0.1*x4 + 7*x5 + 1*x6 >= 8
prob += 0*x1 + 0*x2 + 0*x3 + 0*x4 + 1*x5 + 0*x6 >= 0.5
prob += 0*x1 + 1*x2 + 0*x3 + 0*x4 + 0*x5 + 0*x6 <= 1
```

Paso 4: Resolución del problema, mediante el comando prob.solve()

```
prob.solve()
```

Paso 5: Visualización de resultados

```
print("Estado:", LpStatus[prob.status])
for v in prob.variables():
    print(v.name, "=", v.varValue)
```

```
>> Estado: Optimal
x1 = 0.0
x2 = 0.053598775
x3 = 0.44949882
x4 = 1.8651678
x5 = 0.5
x6 = 0.0
```

Como puede observarse, esta herramienta permite resolver en unos pocos pasos problemáticas de programación lineal de una manera práctica a través de una computadora, tableta o un celular con el solo hecho de poseer una cuenta de Google. Los códigos son proporcionados por los docentes a través de un link y permiten el cambio de parámetros para evaluar diferentes opciones y enriquecer el aprendizaje.

En conclusión, la adopción de Google Colaboratory en el ámbito educativo no solo mejora la comprensión de la programación lineal, sino que también fomenta una cultura de aprendizaje activo y exploratorio. Al permitir a los estudiantes experimentar con diferentes variables y ver el impacto de sus decisiones en tiempo real, se promueve un enfoque más profundo y crítico hacia la resolución de problemas. Por lo cual, la herramienta brindará una mejor percepción del problema que se plantee en el aula, de forma tal que haya una idea mucho más clara del tema a abordar y por ende, su resolución sea acorde al entendimiento del mismo.

BIBLIOGRAFÍA

ANDERSON, D. R., SWEENEY, D. J., & WILLIAMS, T. A. (2019). An introduction to management science: quantitative approaches to decision making. Cengage learning.

DANTZIG, G. B. (1990). The Diet Problem. *Interfaces*, 20(4), 43–47.

GROSSMAN, S., & STANLEY, I. (2019). *Algebra lineal*.

LAY, D. C. (2007). *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. Pearson educación.

MODELOS DE REGRESION DE RESPUESTA CUALITATIVA: REGRESION LOGISTICA

VITALE, Blanca Rosa
blancavitale11@gmail.com

Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Económicas

Palabras clave: Respuesta cualitativa – Función sigmoide - Regresión logística

RESUMEN EXTENDIDO

Los modelos de regresión de respuesta cualitativa investigan efectos de las variables explicativas sobre variables de respuesta categórica. Se aplican fundamentalmente a conjuntos de datos cuya dimensión principal es la transversal. Constan de tres componentes: una *componente aleatoria*, que identifica la variable de respuesta y elige una distribución de probabilidad para dicha variable, una *componente sistemática*, que recibe el nombre de *predictor lineal*, en la que se especifican las variables explicativas, también llamadas *factores*, *covariables* o *predictores*, que se representa mediante la expresión

$$\alpha + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k$$

y una *función link* (función de enlace o función de vinculo) que relaciona la componente aleatoria con la componente sistemática y es función de la media de la variable dependiente

$$g(\mu) = \alpha + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k$$

Una de las funciones más usadas en este tipo de modelo es el *logit link*

$$g(\mu) = \log[\mu/(1 - \mu)] = \alpha + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k$$

Si un Modelo de Regresión Generalizado utiliza el logit link se lo denomina Modelo de Regresión Logística.

La regresión logística es, a modo de síntesis, una regresión simple o múltiple cuando la variable dependiente es no métrica. La variable explicada no métrica puede tener dos o más categorías. En el caso de que la variable regresada tenga dos categorías recibe el nombre de regresión logística binomial. La razón por la cual no puede aplicarse una regresión lineal múltiple para resolver este tipo de problema radica en que no es posible que se cumplan las condiciones exigidas para una regresión múltiple, por ejemplo, normalidad y homocedasticidad. A partir de que en estos casos la variable dependiente estimará la probabilidad de éxito de un suceso, podrían obtenerse valores predichos que no estén acotados entre cero y uno, es decir, valores superiores a 1 o inferiores a cero. La solución consiste en linealizar de alguna forma una relación no lineal. Este objetivo conduce a la utilización de la función logística sigmoidea y en eso se basa el modelo de regresión logística. La función a utilizar, en el caso de que se emplee una única variable explicativa, debe cumplir con las siguientes condiciones:

1. A medida que aumente el valor de la variable explicativa, la probabilidad de éxito aumente, pero no se salga del intervalo $[0, 1]$.
2. La relación entre la probabilidad de éxito y la variable explicativa no sea lineal.

3. La probabilidad de éxito se acerca a cero a medida que el valor de la variable se hace más pequeño y se acerca a 1 a medida que el valor de la variable se hace muy grande.

La función logística, cuya expresión se presenta a continuación, posee las características señaladas

$$p(Y) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X}}$$

Su representación gráfica está dada por la curva sigmoidea. De este modo, se tiene

$$\ln\left(\frac{p}{1-p}\right) = \beta_0 + \beta_1 x_1$$

Para el caso de más de una variable explicativa, se tienen las siguientes expresiones

$$p(Y) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_i x_i}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_i x_i}}$$

$$\ln\left(\frac{p}{1-p}\right) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_i x_i$$

El Modelo de Regresión Logística adopta forma lineal para el logit de la probabilidad de éxito p , para una variable dependiente cualitativa binaria.

La Regresión Logística Simple o Múltiple, desarrollada por David Cox en 1958, es un método de regresión que permite estimar la probabilidad de éxito para una variable cualitativa binaria en función de una o más variables explicativas, tanto métricas como no métricas. Una de las principales aplicaciones de la regresión logística es la de clasificación binaria, en el que las observaciones se clasifican en un grupo u otro, dependiendo de los valores que tomen las variables empleadas como regresores. La regresión logística múltiple es una extensión de la regresión logística simple. Se basa en los mismos principios que la regresión logística simple, pero ampliando el número de predictores. Los predictores pueden ser tanto continuos como categóricos. A la hora de evaluar la validez y calidad de un modelo de regresión logística múltiple, se analiza tanto el modelo en su conjunto como los predictores que lo forman, es decir que se realizan tanto pruebas de significación global como de significación individual con estadísticos de prueba definidos especialmente para este tipo de modelos. Se considera que el modelo es útil si es capaz de mostrar una mejora respecto al modelo nulo, esto es, el modelo sin predictores.

En el desarrollo de este trabajo se presentará, en primer lugar, el modelo lineal de probabilidad y se expondrán los motivos por los cuales, con frecuencia, no es el más adecuado para estimar la probabilidad de ocurrencia de un evento, ya que puede producir valores superiores a uno o inferiores a cero para la estimación de la probabilidad. Por esta razón, se mostrará entonces la conveniencia de utilizar la función logística, ya que este tipo de función no presenta las dificultades del modelo lineal de probabilidad. Por otra parte, se definirán los conceptos de odd y odd ratio, de modo tal que un modelo que utiliza como función de link el logit link da lugar a lo que se conoce como Modelo de Regresión Logística. El trabajo se ocupa específicamente de presentar un modelo de regresión logística binaria múltiple. Las variables explicativas pueden ser tanto cuantitativas como cualitativas. Los parámetros del modelo deben estimarse por el

método de máxima verosimilitud, ya que los estimadores obtenidos de ese modo poseen las propiedades de ser insesgados o asintóticamente insesgados, consistentes, eficientes o asintóticamente eficientes y se distribuyen en forma asintóticamente normal, con esperanza igual al valor del parámetro estimado y varianza igual a la cota de Cramer Rao.

Se expondrán los fundamentos de la regresión logística múltiple, y se pondrá de manifiesto la importancia de la utilización de un software apropiado para la resolución de problemas. Se presentará un caso de aplicación con el objeto de ilustrar los conceptos desarrollados en el trabajo, que será resuelto con el software R Studio. A partir de la observación de los resultados que arroje la salida de R, se interpretarán dichos resultados en términos del problema planteado, y se realizará la evaluación de la validez del modelo utilizado, a través de pruebas de significación individuales y globales. Se explicará el concepto de devianza y el modo en el que debe interpretarse su valor. También se analizará el significado del valor proporcionado por el Criterio de Información de Akaike (AIC), utilizado con frecuencia para la selección de modelos. Para completar el análisis de la bondad del modelo, se utilizará la matriz de confusión, que permite medir el porcentaje de aciertos de los valores predichos.

BIBLIOGRAFÍA

- AGRESTI, A. (2007). *An introduction to categorical data analysis*. Prentice Hall Inc., New Jersey. 2da. edición.
- CAMERON A.C. y TRIVEDI PK (2005). *Microeconometrics Methods and Applications*. Cambridge University Press, New York.
- DOBSON, A y BARNETT, A. (2008). *An Introduction to Generalized Linear Models*. 4ta Edición.
- GREENE, W. (2012). *Econometric Analysis*. Pearson. 7ma Edición.
- GROUP, U. S. C. (2014b). R data analysis examples: Logit regression. Institute for Digital Research; Education. Retrieved October 24, 2014, from <http://www.ats.ucla.edu/stat/r/dae/logit.htm>
- JOHNSTON, J. (1996). *Econometric Methods*. McGraw-Hill. 4ta Edición.



MERCADO FINANCIERO: EJERCITACIÓN APLICANDO CADENAS DE MARKOV

GONZÁLEZ¹Martín; RODRÍGUEZ TRILNIK¹, Tomás; FASCIGLIONE¹, Franco;
PALAZZANI MUÑOZ², Brenda; BRILLANT³, Carla; YNOUB⁴, Gustavo y LUPÍN⁵, Beatriz
martingonzalezabcd@gmail.com - trtrilnik@gmail.com - francofasciglione@gmail.com - brenpalazzani@gmail.com -
brillanticarla@gmail.com - gusynoub@yahoo.com.ar - beatrizlupin@gmail.com

Universidad Nacional de Mar del Plata

Palabras Clave: Matriz de Transición – Árbol de Probabilidades – fondo de inversión – rendimientos

RESUMEN EXTENDIDO

Para el desarrollo de este trabajo, se consultaron, fundamentalmente, la siguiente bibliografía: Arya *et al.* (2009); Budnick (1996); Chiang & Wainwright (2008); Haeussler *et al.* (2008) y Simon & Blume (1994). Así, en lo que sigue, se referencian solo las fuentes complementarias.

Una cadena de Markov (CdM) es un proceso estocástico, una sucesión de ensayos u observaciones, efectuados en un determinado sistema físico, en la que cada ensayo tiene el mismo número de resultados posibles. Cada resultado deja al sistema en cierto estado y cada movimiento se llama “paso” o “transición”. La probabilidad de cada resultado, para un ensayo dado, depende solo del resultado del ensayo inmediato anterior y no del resultado de cualquier ensayo anterior. En general, esta metodología se aplica a procesos discretos, para analizar movimientos en el tiempo, tal el caso del precio de cierre diario de la acción de una determinada compañía ya que depende, en gran medida, del comportamiento del mercado de valores durante el día anterior o de la elección de una marca específica por parte de un consumidor al estudiar la demanda de un bien o servicio pues puede depender de elecciones precedentes.

Debe su nombre al matemático ruso Andréi Márkov (1856-1922), quien planteó este tema al analizar textos poéticos. Él percibía a los mismos como una sucesión de estados vinculados, donde lo que sucede con una letra está vinculado con la letra previa –por ejemplo, hay cierta probabilidad de que una vocal sea precedida por una consonante–. (García Fronti, 2020)

Considerando la evolución histórica de un determinado evento, la CdM permite realizar predicciones de cambios de estado mediante el cálculo de la probabilidad de transición del mismo. En este sentido, la “Matriz de Transición” es la herramienta clave de esta metodología. Se trata de un arreglo probabilístico compuesto por n filas y n columnas –matriz cuadrada–, cuyos elementos son las probabilidades de transición, vale decir, las probabilidades de que el sistema pase a un estado “ j ” después de un estado inmediato anterior “ i ” (p_{ij}), siendo la suma de los elementos por fila igual a la unidad. Dado que “ i ” simboliza los elementos de la fila y “ j ” los elementos de la columna, si $i = j \Rightarrow$ el sistema permanece en el mismo estado (p_{ii}), en cambio, cuando $i \neq j \Rightarrow$ el sistema pasa de un estado a otro (p_{ij}). En las filas, se representan los estados actuales y, en las columnas, los siguientes. Por su parte, los elementos de la

¹Estudiante Avanzado Carrera Licenciatura en Economía. Docente de la Asignatura “Matemática para Economistas II”.

²Estudiante Avanzada Carrera Licenciatura en Economía.

³Licenciada en Economía y Contadora Pública. Docente colaboradora de la Asignatura “Matemática para Economistas II” e Integrante del Centro de Investigaciones Económicas y Sociales, FCEyS-UNMDP.

⁴Licenciado en Economía. Docente de trabajos prácticos de la Asignatura “Matemática para Economistas II”.

⁵Licenciada en Economía. Especialista en Docencia Universitaria. Profesora Adjunta, Responsable de la Asignatura “Matemática para Economistas II” e Integrante del Centro de Investigaciones Económicas y Sociales, FCEyS-UNMDP. Profesora e Investigadora, Departamento de Ingeniería Pesquera, UTN-FRMDP.



diagonal principal reflejan el poder de retención y los elementos del resto de las celdas reflejan el poder de atracción. (Figura 1)

Figura 1: Matriz de Transición

Actual	Siguiente				
	Estados	Estado 1	Estado 2	Estando n
Estado 1		p_{11}	p_{12}	p_{1n}
Estado 2		p_{21}	p_{22}	p_{2n}
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
Estado n		p_{n1}	p_{n2}	p_{nn}

Fuente: elaboración propia.

Siguiendo a Raposo (2021), un estado se puede clasificar en:

- 1) Absorbente → una vez alcanzado, no se puede salir de él ($p_{ii} = 1$).
- 2) Transitorio → una vez alcanzado, es posible cambiar de estado, pero no se puede volver al estado original.
- 3) Recurrente → cuando no es transitorio y tiene una probabilidad 1 de volver a él.

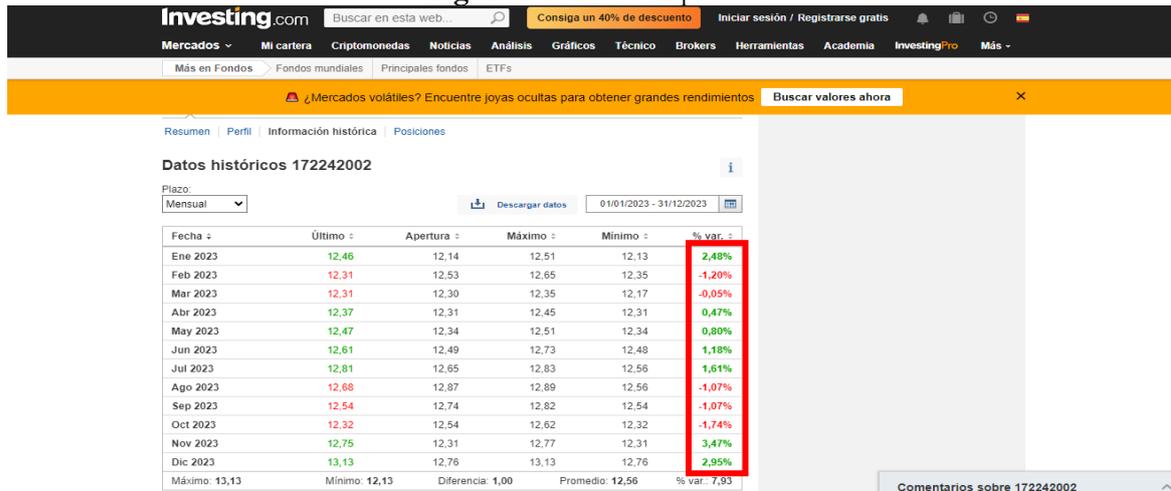
Una CdM es absorbente si tiene, al menos, un estado absorbente y si, de cualquier estado, se puede ir al estado absorbente, aunque implique dar varios pasos. Si hay más de un estado absorbente puede resultar interesante conocer en qué proporción se distribuirá la población entre los mismos. Ahora, si solo hay un estado absorbente no tiene sentido el análisis pues toda la población seguirá allí. Cuando una CdM no presenta estados absorbentes, se puede obtener un vector a largo plazo con la distribución de los estados en el futuro. (Casparri *et al.*, 2012)

Otra herramienta útil de esta metodología, aunque solo aplicable a casos sencillos, es el “Árbol de Probabilidades”. El mismo es un diagrama que permiten predecir la probabilidad de que un determinado estado ocurra en el futuro. Si se considera un sistema de n estados, en el que cada ensayo tiene n resultados posibles, no se puede decir certeramente en qué estado se encontrará el mismo en un determinado momento futuro, pero se puede estimar la probabilidad de que se encuentre en cada uno de los estados $1, 2, \dots, n$.

Conforme a lo precedente, la CdM es una estrategia apropiada para analizar la dinámica de los mercados financieros. En tal sentido, esta propuesta presenta una ejercitación desarrollada en la Asignatura “Matemática para Economistas II”, que se dicta a los estudiantes de tercer año de la Carrera Licenciatura en Economía, en la FCEyS- UNMDP, aplicando conceptos matemáticos para analizar un fenómeno financiero concreto. El objetivo general es construir la Matriz de Transición de inversiones financieras y diagramar el árbol de probabilidades correspondiente.

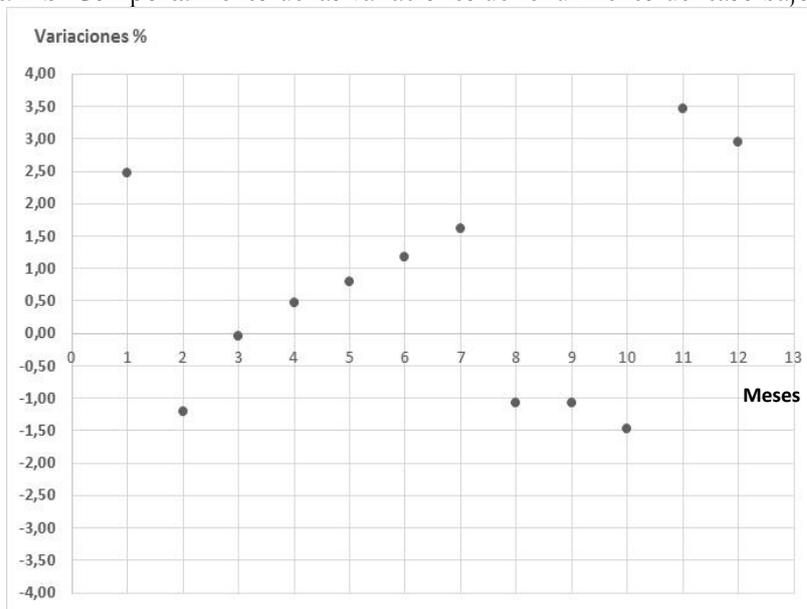
A tal fin, se emplean datos de variaciones porcentuales inter-mensuales de rendimiento de un fondo común de inversión multiactivo global (FCI), con perfil de riesgo medio-bajo, recomendado para inversiones a más de 3 años, registrado en España por el Grupo BBVA, durante el período 01 enero-31 diciembre 2023, tomados del sitio investing.com. (Figuras 2-a y 2-b)

Figura 2-a: Datos empleados



Fuente: <https://es.investing.com/funds/quality-inversion-moderada-fi-historical-data>.

Figura 2-b: Comportamiento de las variaciones de rendimiento del caso bajo estudio



Microsoft Excel®

Fuente: elaboración propia.

Particularmente, se eligió España pues los fondos de inversión tuvieron un lucrativo desempeño durante el año bajo estudio (García López, 2024) y, además, no se encuentran tan afectados por un proceso inflacionario. Por su parte, los “estados” fueron establecidos siguiendo los lineamientos del criterio adoptado por Zhang & Zhang (2009) para el mercado de valores chino. Así, el primer estado agrupa las variaciones porcentuales de rendimiento que superan el 1,00%; el segundo, las variaciones porcentuales de rendimiento que oscilan entre el 1,00% y el -1,00% y el tercero, las variaciones porcentuales de rendimiento que presentan caídas mayores al 1,00%. La siguiente Tabla expone los estados:

Tabla 1: Estados para el caso bajo estudio

ene	feb	mar	abr	may	jun	jul	ago	sep	oct	nov	dic
2,48%	-1,20%	-0,05%	0,47%	0,80%	1,18%	1,61%	-1,07%	-1,07%	-1,74%	3,47%	2,95%
Meses enero, junio, julio, noviembre y diciembre								Estado 1			
Meses marzo a mayo								Estado 2			
Meses febrero y de agosto a octubre								Estado 3			

Fuente: elaboración propia.



La probabilidad de que un elemento pase del Estado 1 al Estado 1, en un solo paso, se determina por la cantidad de veces en que estando en el Estado 1 pasa al Estado 1, dividido por la cantidad de veces que estando en el Estado 1 se produzca una transición: $p_{11} = 2/4 = 0,50$ y, así, se procede sucesivamente para calcular el resto de las probabilidades. De esta manera, se obtiene una Matriz de Transición de orden 3×3 ($i = j = 3$), no presentándose estados absorbentes. (Figuras 3-a y 3-b)

Figura 3-a: Matriz de Transición genérica para el caso bajo estudio

		Siguiete		
		Estados	Estado 1	Estado 2
Actual	Estado 1	p_{11}	p_{12}	p_{13}
	Estado 2	p_{21}	p_{22}	p_{23}
	Estado 3	p_{31}	p_{32}	p_{33}

Fuente: elaboración propia.

Figura 3-b: Matriz de Transición aplicada al caso bajo estudio

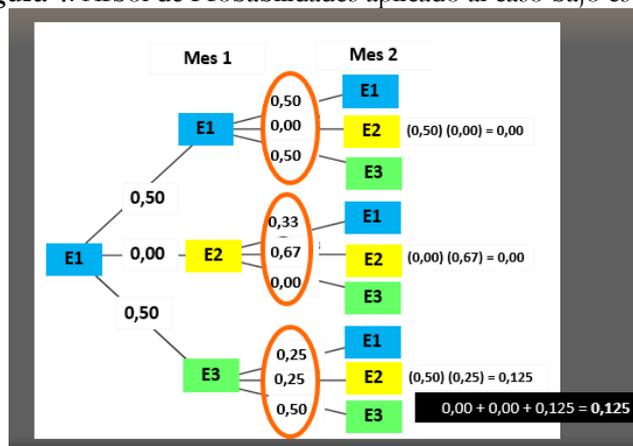
		Siguiete		
		Estados	Estado 1	Estado 2
Actual	Estado 1	0,50	0,00	0,50
	Estado 2	0,33	0,67	0,00
	Estado 3	0,25	0,25	0,50

Fuente: elaboración propia.

Los elementos de cada fila reflejan la probabilidad de que una variación porcentual de rendimiento se mantenga o se altere en los próximos meses. Por su parte, los elementos de cada columna reflejan la probabilidad de que una variación porcentual de rendimiento se mantenga o se extienda a los próximos meses. Se observa que el mayor poder de retención lo presenta el Estado 2 pues es el que consigna una mayor probabilidad ($p_{22} = 0,67$). A su vez, no hay probabilidad que del Estado 1 se pase al Estado 2 o que del Estado 2 se pase al Estado 3 ($p_{12} = p_{23} = 0,00$).

A continuación, se presenta el Árbol de Probabilidades correspondiente. El mismo permite determinar la probabilidad de que partiendo de un determinado estado, predomine el mismo u otro estado, luego de un período de tiempo, empleando probabilidades conjuntas. Por ejemplo, suponiendo que el Estado 1 (E1) predomina en el sistema, la probabilidad de que el Estado 2 (E2) predomine luego de dos meses es igual a 0,125. (Figura 4)

Figura 4: Árbol de Probabilidades aplicado al caso bajo estudio



Fuente: elaboración propia.

Si bien la propuesta no reviste gran complejidad matemática, la misma es una ejercitación que comprende la aplicación empírica de un tema del programa de la Asignatura. El eje de la misma es la construcción

de la Matriz de Transición, a partir de datos reales, siendo lo usual, en cursos matemáticos de grado en el área de las Ciencias Económicas, el análisis de matrices ya armadas. También es de resaltar la consulta a plataformas y a literatura especializada, la vinculación con temas propios de la Asignatura “Matemática Financiera”, la que se cursa en paralelo con “Matemática para Economistas II” en la FCEyS-UNMDP, y el trabajo colaborativo entre estudiantes.

BIBLIOGRAFÍA

- ARYA, J. C.; LARDNER, R. W. & IBARRA MERCADO, V. C. (2009). *Matemáticas aplicadas a la Administración, Economía, Ciencias Biológicas y Sociales*. México: Pearson Educación de México, SA de CV.
- BBVA Asset Management.
<https://www.bbvaassetmanagement.com/es/fondos/?ES0172242002>
- BUDNICK, F. (1996). *Matemáticas aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales*. México: Mc Graw Hill.
- CASPARRI, M. T.; GARCÍA FRONTI, V. & MARCÓ, S. (2012, 31 mayo-01 junio). *Cadenas de Markov: un ejemplo para el sector ganadero utilizando planilla de cálculo*. [Ponencia]. XII Jornadas Nacionales de Tecnología Aplicada a la Educación Matemática Universitaria, FCE-UBA, CABA-Argentina.
http://bibliotecadigital.econ.uba.ar/download/libros/Casparri_Jornada-tecnologia-matematica-12-2012.pdf/
- CHIANG, A. C. & WAINWRIGHT, K. (2008). *Métodos fundamentales de Economía Matemática*. México: Mc Graw-Hill.
- GARCÍA FRONTI, J. [FCE-UBA]. (2020, abril). *Introducción a las Cadenas de Markov* [Archivo de Video]. Youtube. <https://www.youtube.com/watch?v=CU7FRAFSSU>
- GARCÍA LÓPEZ, E. (17/03/2024). *Los fondos de inversión españoles disparan su rentabilidad más del 100% y duplican la que ofrecen los mejores extranjeros*. Infobae.
<https://www.infobae.com/espana/2024/03/17/los-fondos-de-inversion-espanoles-disparan-su-rentabilidad-mas-del-100-y-duplican-la-que-ofrecen-los-mejores-extranjeros/>
- HAEUSSLER, E. F.; PAUL, R. S. & WOOD, R. J. (2008). *Matemáticas para Administración y Economía*. México: Pearson Educación.
- INVESTING. <https://es.investing.com/funds/quality-inversion-moderada-fi-historical-data>
- LAKSHMI G. & MANOJ, J. (2020, March). Application of Markov Process for prediction of stock market performance. *International Journal of Recent Technology and Engineering*, 8(6), 1.516-1.519.
<https://www.ijrte.org/wp-content/uploads/papers/v8i6/F7784038620.pdf>
- RAPOSO, E. (2021). Un caso de aplicación de Cadenas de Markov para determinar patrones de morosidad de los clientes bancarios. *Revista de Investigación en Modelos Matemáticos aplicados a la Gestión y la Economía*, 8(I (2021-I)), 38-51.
<https://www.economicas.uba.ar/wp-content/uploads/2016/04/Raposo-Eugenia.pdf>
- SIMON, C. P. & BLUME, L. (1994). *Mathematics for Economists*. U.S.A.: W. W. Norton & Company Inc.
- ZHANG, D. & ZHANG, X. (June 2009). Study on forecasting the stock market trend based on Stochastic Analysis Method. *International Journal of Business and Management*, 4(6), 163-170.
<https://www.ccsenet.org/journal/index.php/ijbm/article/view/2336>

MODELO DIDACTICO CONSTRUIDO CON PYTHON PARA PROCESOS DE MARKOV

DA TORRE, Juan Ignacio y MORRONE, Rita
Juandatorre.eco@gmail.com - ritamorrone@economicas.uba.ar

Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Económicas

Palabras Clave: Matemática- Google Colaboratory- Tecnología -Python –Procesos de Márkov.

RESUMEN EXTENDIDO

La integración de la tecnología en diversas disciplinas, especialmente en la economía, ha resaltado la importancia de la programación y la automatización. Los procesos de Márkov se presentan como un tema de gran relevancia y utilidad para los estudiantes de ciencias económicas, permitiendo modelar y analizar fenómenos económicos, financieros y sociales. Esta metodología no solo facilita la comprensión de conceptos teóricos complejos, sino que también ofrece herramientas prácticas para abordar problemas reales del entorno económico.

El objetivo principal de este trabajo es proponer un modelo didáctico interactivo sobre los procesos de Márkov, desarrollado en Google Colaboratory utilizando Python. Este modelo busca facilitar la enseñanza y el aprendizaje colaborativo, proporcionando una comprensión profunda y visual del tema a través de ejercicios teóricos y prácticos, así como un juego interactivo. La interactividad del modelo permite a los estudiantes experimentar y visualizar los resultados de diferentes escenarios, consolidando así su aprendizaje de manera efectiva.

El modelo se implementa en Google Colaboratory, una plataforma accesible desde cualquier dispositivo con conexión a internet y una cuenta de Google. El acceso es algo central aquí debido a que es lo que proporciona la practicidad a la hora de interactuar con esta tecnología para el aprendizaje de conceptos matemáticos, el no requerir un esfuerzo tan grande y tan solo sacar el teléfono para acceder a información complementaria a la cursada es algo fundamental para un alumno. La plataforma no solo es la protagonista aquí, Python es el lenguaje de programación elegido y el cual Google Colaboratory nos proporciona debido a su gran capacidad para el manejo de datos. El modelado matemático y su accesibilidad para usuarios con conocimientos básicos de matemáticas es algo central en la utilización de este lenguaje de programación. Evidenciando aún más a la elección de Google Colaboratory se debe a su facilidad de uso y a la posibilidad de compartir y colaborar en proyectos de manera sencilla. Además, Google Colaboratory utilizando hardware externo y diferentes librerías para mejorar la interactividad aumenta la capacidad y hace que sea una plataforma ideal para este tipo de proyectos educativos. La plataforma soporta la inclusión de imágenes, gráficos y LaTeX, lo cual es esencial para la escritura matemática.

$$\begin{pmatrix} \text{Estados} & A & B & C \\ A & P_{aa} & P_{ab} & P_{ac} \\ B & P_{ba} & P_{bb} & P_{bc} \\ C & P_{ca} & P_{cb} & P_{cc} \end{pmatrix}$$

Abarcando ahora si la descripción del modelo, este posee una base teórica sólida sobre los procesos de Márkov, incluyendo definiciones, clasificación de cadenas y vectores de largo plazo. Este apartado es fundamental para que los estudiantes comprendan los conceptos teóricos antes de aplicarlos en ejercicios prácticos. Luego de otorgar una base sólida teórica

Se proponen ejercicios de opción múltiple y problemas prácticos recolectados de parciales anteriores y bibliografía especializada. Estos ejercicios permiten a los estudiantes practicar y aplicar los conceptos aprendidos, reforzando así su comprensión teórica y práctica.

> Ejercicio 1:

 [Mostrar código](#)

 ¿Cuál es la probabilidad de transición de A a B?

a) Paa

b) Pab

c) Pac

d) ninguna

$$\begin{pmatrix} \text{Estados} & A & B & C \\ A & P_{aa} & P_{ab} & P_{ac} \\ B & P_{ba} & P_{bb} & P_{bc} \\ C & P_{ca} & P_{cb} & P_{cc} \end{pmatrix}$$

Haciendo hincapié aquí, Este desarrollo de juegos de opción múltiple fueron desarrollados en base a un sustento teórico proporcionado por la teoría y lo que se ve en la catedra o curso, y luego ya la construcción con Python y una serie de librerías proporcionadas por colab y por la comunidad de programadores. A continuación, se proporciona un poco de la estructura del código

Librerías utilizadas en el ejercicio:

```
import ipywidgets as widgets
from IPython.display import display, clear_output
```

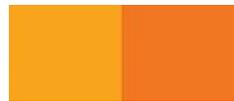
Definiciones de variables con bucles else-if para que el alumno si se equivoca no lo haga por descarte y piense:

```
def verificar_respuesta(respuesta, index):
    if respuesta == respuestas_correctas[index]:
        return "¡Respuesta correcta!" + explicaciones[index]
    else:
        if len(intentos_previos[index]) == 1:
            intentos_previos[index].append(1)
            return "Respuesta incorrecta. Aquí tienes una pista: " + explicaciones[index]
        elif len(intentos_previos[index]) == 2:
            intentos_previos[index].append(2)
            return "Respuesta incorrecta. Inténtalo de nuevo."
        else:
            return "Respuesta incorrecta. La respuesta correcta es " + respuestas_correctas[index] + ". " + explicaciones[index]

# Ciclo para iterar sobre las preguntas y opciones
for i in range(len(preguntas)):
    # Crear botones para las opciones de respuesta
    buttons = []
    for j, opcion in enumerate(opciones[i]):
        button = widgets.Button(description=opcion)
        button.on_click(lambda x, b=i, r=j: on_button_clicked(x, b, chr(97 + r)))
        buttons.append(button)

    # Mostrar la pregunta y los botones
    display(widgets.VBox([widgets.Label(preguntas[i]), widgets.HBox(buttons), outputs[i]]))
```

Abordando el apartado más importante del modelo se propone un juego interactivo



donde se simula una epidemia donde los estudiantes deben evaluar la letalidad del fenómeno y explorar escenarios alternativos, como una "vacuna milagrosa". Este juego incluye la clasificación de cadenas y la evaluación de vectores de largo plazo, facilitando una comprensión práctica y teórica integrada. El juego está diseñado para que los estudiantes puedan experimentar con diferentes variables y observar cómo afectan los resultados, promoviendo así un aprendizaje activo y participativo, es decir, demostramos lo siguiente:

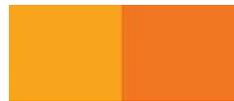
- Una serie de eventos donde la probabilidad de que ocurra un evento depende del evento inmediato anterior. Este concepto es clave para entender los procesos de Márkov y su aplicación en diversas áreas.

- Los procesos de Márkov se utilizan en análisis de fenómenos como el clima y en aplicaciones económicas para analizar y predecir aspectos del mundo financiero, como el riesgo en bonos y acciones. Estas aplicaciones prácticas demuestran la versatilidad y utilidad de los procesos de Márkov en diferentes contextos. En nuestro caso lo utilizamos para un fenómeno endémico.

Contrayendo el juego es necesario de crear la matriz de transición, se utilizan calificaciones de las personas en esta sociedad donde los estados son Sano, enfermo leve, grave, recuperado y fallecido con cada fila de la matriz representando una calificación, desde la más alta hasta la más baja, y la última siendo absorbente dependiendo si es la parte 1 o 2 del juego el estado absorbente cambiara. Una vez construida la matriz de transición, los usuarios pueden elegir el número de periodos para resolver el modelo, utilizando el vector inicial X. Este proceso permite a los estudiantes ver cómo la situación cambia con el tiempo y cómo diferentes escenarios pueden afectar los resultados. Se proporciona como sería la forma de la construcción con latex del juego parte 2, donde el estado absorbente es recuperado.

$$\begin{pmatrix} \text{Estados} & \text{😊} & \text{😬} & \text{🟢} & \text{😷} & \text{😞} \\ \text{😊} & \text{😊😊} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{😬} & \text{😊😬} & \text{😬😬} & 0 & 0 & 0 \\ \text{🟢} & 0 & \text{😬🟢} & \text{🟢🟢} & 0 & 0 \\ \text{😷} & \text{😊😷} & \text{😬😷} & \text{🟢😷} & 1 & 0 \\ \text{😞} & 0 & 0 & \text{🟢😞} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La construcción del modelo en Python es algo que se complementa a lo anteriormente dicho para ello la utilización de librerías tales como Numpy Para manipulación de matrices y procesos de Márkov es esencial para las operaciones matemáticas. También Matplotlib Para visualización gráfica la cual permite a los usuarios ver los resultados de manera clara y comprensible. ipywidgets Para crear una interfaz interactiva con sliders la cual facilita la interacción del usuario con el modelo, permitiendo ajustar parámetros y ver los resultados en tiempo real. Se proporciona un avistamiento de la estructura del código donde se ve las librerías mencionadas y la construcción de la matriz con sus estados.



```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import display, clear_output
import ipywidgets as widgets

# Función para actualizar el gráfico y mostrar el vector final
def update_plot(dias, sl, lg, lr, gr, gf):
    X = np.array([[1000000], [0], [0], [0], [0]])

    A = np.array([[1-sl, 0, 0, 0, 0],
                  [sl, 1-lr-lg, 0, 0, 0],
                  [0, lg, 1-gr-gf, 0, 0],
                  [0, lr, gr, 1, 0],
                  [0, 0, gf, 0, 0]])

    sanos = [X[0][0]]
    leves = [X[1][0]]
    graves = [X[2][0]]
    recuperados = [X[3][0]]
    fallecidos = [X[4][0]]
```

> Ajusta las probabilidades a tu parecer y observa que tan rapido se recupera la gente y su vector final

Mostrar código

Días: 49

: 0.29

: 0.43

: 0.26

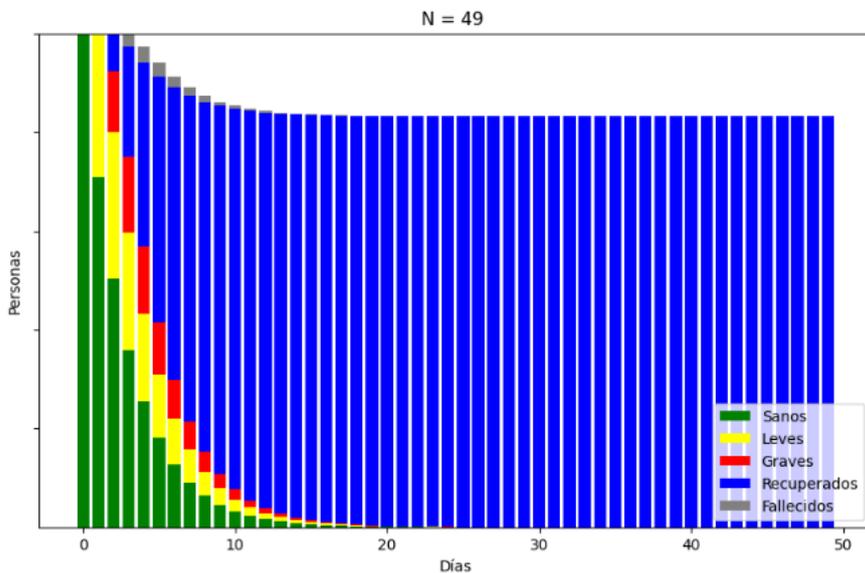
: 0.57

: 0.21

Actualizar Gráfico

Vector Final:

[1. 1. 1. 832224. 0]



En las fotos se logra ver tanto el desarrollo del código con las librerías mencionadas y también se puede ver la matriz de transición. Luego en la foto posterior se ve la parte interactiva donde se puede mover la barra a gusto de la persona y por último se ve el resultado a nivel grafico para analizar la evolución de cómo se recupera la gente y que tan efectiva es la vacuna. Esta segunda parte del juego donde se analiza que tan rápido se recupera la gente sirve como contraste perfecto e la primera parte donde la enfermedad es tan letal que se debe analizar cuanto tiempo tienen para el desarrollo de una vacuna en base a los datos arrojados.



Concluyendo, La implementación de un modelo didáctico interactivo para procesos de Márkov utilizando Python en Google Colaboratory representa una valiosa adición a los recursos educativos en ciencias económicas. Este enfoque no solo enriquece la experiencia de aprendizaje, sino que también prepara a los estudiantes para enfrentar desafíos profesionales con una base sólida en matemáticas aplicadas. El modelo propuesto permite a los estudiantes aprender de manera práctica y visual, facilitando la comprensión de conceptos complejos y su aplicación en situaciones reales. Además, la interactividad del modelo promueve un aprendizaje activo y participativo, aumentando la motivación y el interés de los estudiantes por el tema.

BIBLIOGRAFÍA

ALPHA C. CHIANG, & WAINWRIGHT, K. (2006). Métodos fundamentales de economía matemática. McGraw-Hill.

BERNARDELLO, A. B., BIANCO, M. J., CASPARRI, M. T., García Fronti, J., & OLIVERA DE MARZANA, S. (2004). Matemáticas para economistas: con Microsoft excel y matlab.

BATTOCCHIO, M., BIANCO, M. J., HERRERA, P. M., & RODRÍGUEZ, E. A.
Notas de matemática para economistas.

DA CUNHA, C. R. (2021). Introduction to Econophysics: contemporary approaches with Python simulations. CRC Press.



ÁREA TEMÁTICA III

Aportes y propuestas interdisciplinarias mediante el uso de tecnología.

HACIA UN MONITOREO DE LA AGRICULTURA MÁS EFICIENTE: PREDICCIONES DE LA PRODUCCIÓN DE SOJA UTILIZANDO DATOS AGRONÓMICOS DE ALTA FRECUENCIA

THOMASZ, Esteban Otto ; CORFIELD, Kevin y VILKER, Ana Silvia
ottobomasz@gmail.com - kecorfield@gmail.com - anavilker@gmail.com

Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas. Instituto de Investigaciones en Administración, Contabilidad y Métodos Cuantitativos para la Gestión (IADCOM). Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión (CMA).

Palabras clave: Rindes soja, Reserva hídrica, Evaluación de impacto, Pronóstico

RESUMEN EXTENDIDO

La soja es el principal *commodity* agrícola producido y exportado por Argentina, representando el 16% de la producción mundial y siendo el tercer mayor productor después de Estados Unidos y Brasil. La producción de soja en Argentina es mayormente orientada a la exportación, con un fuerte componente de industrialización. Los porotos de soja representan el 20% de las exportaciones, mientras que la harina y el aceite representan el 80%. A nivel nacional, la soja constituye el 81% de la producción de cultivos y el 77% del área sembrada en los últimos años. Además, la soja y sus derivados han representado en promedio el 24% del valor total de las exportaciones del país entre 2003 y 2020.

El agua es uno de los insumos más importantes para la producción de soja. Su escasez dentro del período crítico y su exceso durante la cosecha afectan su rendimiento y recolección. El contenido de agua en el suelo es una variable útil para diagnosticar el estado de los cultivos, sin embargo, una evaluación apropiada del impacto acerca de cómo este recurso afecta la producción todavía supone un desafío en el caso de Argentina.

Además, a sabiendas que las sequías generan importantes pérdidas económicas en la producción de soja, todavía falta un modelo estandarizado que proporcione un análisis de sensibilidad para explicar en qué medida el agua afecta el rendimiento. Los estudios previos se han centrado en la respuesta de los cultivos a las emisiones proyectadas de dióxido de carbono y a la variabilidad climática, pero no han desarrollado una metodología de valoración adecuada para estimar las pérdidas económicas desde una perspectiva de flujo de caja. Tampoco existe un modelo que pueda ser calibrado para generar pronósticos útiles para decisiones de cobertura como seguros basados en índices o instrumentos de cobertura.

El objetivo principal de este estudio es probar si el índice de balance hídrico, publicado por la Oficina de Riesgo Agropecuario de Argentina (ORA), es lo suficientemente robusto para explicar el rendimiento de la soja. Este índice no sólo calcula el contenido de agua en el suelo, sino también la cantidad de agua útil para diferentes cultivos entre ellos la soja.

En particular, se estudia la relación entre el contenido de agua en el suelo, reflejada en los valores del balance hídrico, y los rendimientos de la soja con el objetivo de responder a las tres preguntas siguientes: ¿Cuál período de tiempo provee la mejor relación entre ambas variables? ¿Cuál es el

nivel de sensibilidad entre el contenido de agua y los rendimientos de soja para cada departamento? Y, ¿es posible usar las estimaciones para realizar predicciones robustas?

Metodología

La investigación abarca 28 departamentos productores de soja de la zona núcleo de Argentina, que cuentan con estaciones meteorológicas territoriales con suficiente información agroclimática histórica. Durante los años recientes, la Oficina de Riesgo Agrícola (ORA) de la Secretaría de Agricultura elaboró un sistema de monitoreo de la reserva de agua, calculado para diferentes cultivos a nivel departamental, denominado Balance Hídrico. Se utilizaron datos diarios de este indicador, información de precipitaciones y el índice estandarizado de evapotranspiración de precipitación (SPEI). Estos datos fueron obtenidos de diversas fuentes tales como: el Servicio Meteorológico Nacional (SMN) y el Centro Regional del Clima para el Sur de América del Sur. Además, se consideraron los datos de la producción agrícola, incluyendo el área sembrada, el área cosechada, el nivel de producción y los rendimientos por departamento desde 1970 hasta 2020.

Para alcanzar el primer objetivo -determinar cuál período de tiempo provee la mejor relación entre el contenido de agua en el suelo y los rendimientos de soja- se debió tener en cuenta que el índice de rendimiento calculado por el Sistema de Evaluación de Pérdidas por Sequías e Inundaciones (SEPSI) para cada departamento es de frecuencia anual, mientras que la variable balance hídrico tiene una frecuencia más alta de tres valores por mes, uno cada diez días. Por lo tanto, se construyeron ventanas temporales de 30, 40, 50 y 60 días, moviendo cada ventana diez días entre el 1 de diciembre y el 30 de abril.

Luego se calculó el coeficiente de correlación de Pearson ρ_t entre los valores de cada ventana de tiempo $(\widetilde{hr}_t^{c,s})$ y el índice de rendimiento del departamento c (YI_t^c) :

$$\rho_t = (YI_t^c, \widetilde{hr}_t^{c,s})$$

Posteriormente, se halló la ventana óptima definida como el valor supremo de correlación entre el índice de rendimiento y los valores de balance hídrico para cada ventana temporal, identificando así el período de tiempo (ventana) que presentaba la mayor correlación.

$$\rho_c^* = \text{Sup}\{(YI_t^c, \widetilde{hr}_t^{c,s})\}$$

Esto permitió evaluar cómo diferentes períodos de acumulación de agua en el suelo, a lo largo de la temporada de crecimiento, afectan los rendimientos de la soja, proporcionando una visión detallada de las relaciones temporales entre estas variables críticas.

Para responder el segundo objetivo: ¿Cuál es el nivel de sensibilidad entre el contenido de agua y los rendimientos de soja? se construyeron regresiones lineales departamentales utilizando como variable independiente el valor promedio del balance hídrico correspondiente a la ventana con la que se obtuvo la máxima correlación y como variable dependiente el índice de rendimiento del departamento.

$$YI_t^c = \beta_0 + \beta_1 \overline{hr}_t^c + \varepsilon_t^c \text{ donde } \varepsilon_t^c \sim N(0, \sigma^2)$$

Donde YI_t^c es el índice de rendimientos del departamento c en el año t, \overline{hr}_t^c es el balance hídrico promedio (la ventana con la que se obtuvo la máxima correlación) del departamento c en el período t y ε_t^c son los errores de la regresión estimada para el departamento c en el año t.

Resultados

Mediante análisis de correlación se encontró que los valores de los coeficientes de correlación se distribuyen de la siguiente manera: 4 departamentos muestran correlaciones entre el 84 % y el 80 %, 12 están en el intervalo entre el 70 % y el 80 %, y 9 se encuentran entre el 50 % y el 70 %. Los 2 departamentos restantes están por debajo del 50 %. El período de tiempo que maximiza la correlación es consistente con la fenología de la soja, cuyo período crítico es en general durante los meses de enero y febrero en todo el territorio.

Con respecto al análisis de regresión, en la mayoría de los casos los cambios en el índice de rendimiento se explican en un 50% o más por los cambios en el balance hídrico. El 60% de los departamentos tienen un coeficiente de determinación mayor al 50%. En particular, en 20 de los 28 departamentos el poder explicativo de la regresión es de al menos el 50%, con diez de ellos por encima del 60%.

Finalmente, para lograr el tercer objetivo planteado, se estudió la posibilidad de usar las estimaciones para implementar un análisis predictivo utilizando la metodología *leave one out cross validation*. Este método consiste en definir aleatoriamente una parte de las observaciones para ajustar el modelo y la otra para proyectar. Dado el tamaño de la muestra, se definen los datos para la estimación en t-1 observaciones.

El resultado del ejercicio de pronóstico arrojó que los modelos son lo suficientemente robustos para proporcionar pronósticos a un período, ya que el error de pronóstico se explica principalmente por la desviación estándar del índice de rendimiento. En particular, el departamento con el menor *Root Mean Square Error* (RMSE) es Bolívar, con un valor de 0,1273 y el departamento con el mayor RMSE es San Cristóbal, ubicado en Santa Fe, con un valor de 0,3043.

Conclusiones

El balance hídrico explica al menos el 50% de la variabilidad del rendimiento de la soja, con un máximo del 70%. Este estudio demuestra la robustez del indicador de reservas hídricas para explicar y predecir los rendimientos de la soja. Los resultados respaldan la planificación de medidas de contingencia y la toma de decisiones relacionadas con la asistencia fiscal, la elección de cultivos y los instrumentos de cobertura.

Además, el modelo podría ser utilizado para el diseño de seguros basados en índices. La existencia de un indicador objetivo y exhaustivo, calculado con datos certificados, con suficiente historial, de código abierto y con trazabilidad a lo largo del tiempo, satisface la mayoría de los requisitos necesarios para las coberturas basadas en índices. También la metodología empleada en este trabajo es útil para proyectar el rendimiento y ser insumo de análisis económicos y financieros para la toma de decisiones de inversiones en obras de infraestructura de adaptación.

BIBLIOGRAFÍA

- BARROS, V. R., BONINSEGNA, J. A., CAMILLONI, I. A., CHIDIAC, M., MAGRÍN, G. O. y., & RUSTICUCCI, M. (2015). Climate change in Argentina: trends, projections, impacts and adaptation. *WIREs Climate Change*, 6(2), 151–169. <https://doi.org/10.1002/wcc.316>
- BARROS, V., VERA, C., AGOSTA, E., ARANEO, D., CAMILLONI, I., CARRIL, A. F., DOYLE, M. E., FRUMENTO, O., NÚÑEZ, M., ORTIZ DE ZÁRATE, M. I., PENALBA, O., RUSTICUCCI, M., SAULO, C., & SOLMAN, S. (2014). Tercera

Comunicación Nacional Sobre Cambio Climático. Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.

- FORTE LAY, J. A., & BURGO, J. J. (1983). Verificación de métodos de estimación de la variación del almacenaje de agua en suelos pampeanos. Actas del Taller Argentino-Estadounidense sobre sequías (CONICET-NSF), realizado en Mar del Plata entre el 4 y el 8 de diciembre de 1978. Editor J. J. Burgos. Buenos Aires, Argentina. Pág. 162-180.
- HASTIE, T., TIBSHIRANI, R., & FRIEDMAN, J. (2009). Model Assessment and Selection. En *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction* (2nd ed., pp. 219-257). Springer.
- IRWIN, S., & GOOD, D. (2015). Forming Expectations for the 2015 US Average Soybean Yield: What Does History Teach Us?. *Farmdoc daily*, 5(51). Department of Agricultural and Consumer Economics, University of Illinois at Urbana-Champaign.
- LETSON, D., LACIANA, C., BERT, F., WEBER, E., KATZ, R., GONZALEZ, X., & PODESTÁ, G. (2009). Value of perfect ENSO phase predictions for agriculture: evaluating the impact of land tenure and decision objectives. *Climatic Change*, 97(1-2), 145-170.
- LOBELL, D. B., & BURKE, M. B. (2010). On the use of statistical models to predict crop yield responses to climate change. *Agricultural and Forest Meteorology*, 150(11), 1443-1452. <https://doi.org/10.1016/j.agrformet.2010.07.008>
- MAGRIN, G., GAY GARCÍA, C., CRUZ CHOQUE, D., GIMÉNEZ, J. C., MORENO, A. R., NAGY, G. J., NOBRE, C., & Villamizar, A. (2007). Latin America. In *Climate Change 2007: Impacts, Adaptation and Vulnerability. Contribution of Working Group II to the Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*. Cambridge University Press.
- MASSOT, J., BAEZ, G., PRIETO, K., PETRI, G., ARGÜERO, L., THOMASZ, E., GAYA, R., & FUSCO, M. (2016). *Agroindustria, innovación y crecimiento económico en la Argentina*. EDICON.
- MURGIDA, A. M., TRAVASSO, M. I., GONZÁLEZ, S. y., & RODRÍGUEZ, G. R. (2014). Evaluación de impactos del cambio climático sobre la producción agrícola en la Argentina. *Serie medio ambiente y desarrollo*, No. 155. Naciones Unidas. Santiago de Chile, Chile.
- THOMASZ, E., VILKER, A., & RONDINONE, G. (2017). The economic cost of extreme and severe droughts in soybean production in Argentina. Recuperado de

<https://www.cya.unam.mx/index.php/cya>.

THOMASZ, E., ERIZ, M., VILKER, A., RONDINONE, G., & CORFIELD, K. (2020).
Proyecciones soja campaña 2020/21. Reporte Provul 3/2020. Recuperado de
http://www.economicas.uba.ar/institutos_y_centros/provul/.

THOMASZ, E., ERIZ, M., VILKER, A., RONDINONE, G., & CORFIELD, K. (2021). Resultados PDE:
Proyección y monitoreo campaña soja 2021. Reporte Provul 1/2021. Recuperado de
http://www.economicas.uba.ar/institutos_y_centros/provul/.

REFERENCIAS WEB:

Australian Bureau of Meteorology. (n.d).
Recuperado de <http://www.bom.gov.au/climate/drought/#tabs=Soil-moisture/>

Climate Prediction Center. (n.d).
Recuperado de <https://www.cpc.ncep.noaa.gov/products/Drought>

European Drought Observatory. (n.d).
Recuperado de <https://edo.jrc.ec.europa.eu/edov2/php/index.php?id=1000>

Open data source of agricultural data. (n.d).
Recuperado de <https://www.agroindustria.gob.ar/datosabiertos/>

SISSA. (n.d). Recuperado de <https://sissa.crc-sas.org/monitoreo/estado-actual-de-la-sequia/>

ALGORITMOS EN ACCIÓN: EL NUEVO ROSTRO DEL TRADING DE CRIPTOMONEDAS

LÓPEZ ALFARO Sonia Olga
solopezalfaro@gmail.com

Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Económicas

Palabras Clave: Criptomonedas, Trading Automatizado, Inteligencia Artificial, Análisis Estadístico, Tecnología Blockchain

RESUMEN EXTENDIDO

En la emergente economía digital, las criptomonedas han irrumpido como una fuerza disruptiva, alterando el paisaje financiero con su singular amalgama de tecnología y economía.

Fundamentadas en la tecnología blockchain, estas divisas digitales ofrecen una alternativa descentralizada al sistema financiero tradicional, la cual permite transacciones más rápidas y seguras, eliminando intermediarios y reduciendo costos asociados.

Sin embargo, la fluctuación en sus valores, impulsada por un complejo entramado de factores como la oferta y demanda, eventos macroeconómicos, regulaciones gubernamentales y el sentimiento del mercado, crea un entorno dinámico y a menudo volátil.

Esta volatilidad es precisamente lo que atrae a numerosos inversores y traders, quienes buscan capitalizar las rápidas variaciones de precio.

En este contexto, el trading de criptomonedas se ha convertido en una actividad de creciente popularidad.

Los traders, motivados por la posibilidad de obtener grandes ganancias en cortos periodos, aprovechan la volatilidad inherente del mercado de criptomonedas.

Es precisamente en este aspecto en que la estadística juega un papel crucial, proporcionando herramientas para analizar tendencias, identificar patrones y tomar decisiones informadas con el fin último de generar una estrategia de trading sólida.

Utilizando los análisis técnico y fundamental, los traders pueden desarrollar estrategias robustas que les permitan minimizar riesgos y maximizar beneficios. La capacidad de interpretar gráficos, reconocer patrones a través del análisis de los mismos, y aplicar indicadores como medias móviles simples o exponenciales, RSI (Relative Strength Index) y MACD (Moving Average Convergence Divergence), es esencial para el éxito en este campo.

En este entorno, emergen los bots de trading, los cuales son, simplemente, softwares programados para comprar y vender criptomonedas de manera automática, basándose en un conjunto de parámetros y señales predefinidas.

La relevancia de estos bots radica en su capacidad para operar continuamente, respondiendo en tiempo real a los cambios del mercado, eliminando el factor emocional del trading, que, con frecuencia, lleva a decisiones impulsivas y no óptimas.

Los bots pueden ejecutar estrategias disciplinadas sin dejarse influenciar por emociones humanas como el miedo o la avaricia, lo que los hace especialmente efectivos en mercados volátiles.

Operan de manera constante y sin descanso, lo que los habilita a reaccionar instantáneamente a los cambios del mercado, algo que es prácticamente imposible para los humanos.

Además, estos bots pueden analizar grandes volúmenes de datos en tiempo real, identificando patrones y oportunidades que una persona podría pasar por alto.

Como consecuencia de esta capacidad para realizar operaciones con una velocidad y precisión inigualables, los bots pueden aprovechar hasta las más mínimas oportunidades de arbitraje, generando beneficios consistentes y reduciendo el riesgo de pérdidas.

Esta combinación de velocidad, precisión y disciplina los convierte en herramientas extremadamente valiosas en el mercado de criptomonedas.

En el pasado, desarrollar bots de trading era una tarea complicada y laboriosa que requería una sólida comprensión tanto de la estadística como de la programación avanzada.

Los desarrolladores necesitaban estar altamente capacitados en lenguajes de programación de cuarta y quinta generación, conocidos por su capacidad para manejar instrucciones y procesos complejos.

Este conocimiento técnico especializado no solo incluía la habilidad para escribir código eficiente, sino también la capacidad para integrar modelos matemáticos y estadísticos avanzados que pudieran analizar el mercado y tomar decisiones de trading informadas.

La creación de estos sistemas automatizados implicaba una serie de desafíos, desde el diseño de algoritmos precisos hasta la optimización del rendimiento y la gestión de grandes volúmenes de datos en tiempo real.

El elevado nivel de complejidad significaba que solo un grupo muy selecto de profesionales con habilidades técnicas avanzadas podía llevar a cabo el desarrollo de bots de trading efectivos y confiables.

Es así como se generaba una barrera significativa a la entrada, limitando la creación de bots de trading a profesionales con una formación técnica avanzada siendo que los desarrolladores debían tener una comprensión profunda de algoritmos, estructuras de datos, y modelos estadísticos para construir bots eficientes y efectivos.

Sin embargo, con el advenimiento de herramientas y plataformas más accesibles, la integración de tecnologías de inteligencia artificial y lenguajes de programación más amigables han democratizado el acceso a la creación de bots de trading.

Ahora, incluso personas con conocimientos limitados en programación pueden diseñar y desarrollar bots de trading eficientes.

Las herramientas de inteligencia artificial, como los sistemas avanzados de ChatGPT, Claude o Gemini, han revolucionado el proceso de configuración de bots de trading. Estas plataformas

permiten a los usuarios, incluso a aquellos con poca experiencia en programación, crear bots eficientes mediante interfaces intuitivas.

Estas interfaces guían a los usuarios paso a paso a través del proceso de configuración, simplificando tareas que anteriormente requerían conocimientos técnicos profundos.

Además, ofrecen tutoriales detallados, ejemplos preconfigurados y soporte en tiempo real, lo que facilita la personalización de estrategias de trading según las necesidades específicas del usuario.

Con estos instrumentos, los usuarios pueden ajustar parámetros, probar diferentes enfoques y optimizar el rendimiento del bot sin tener que escribir una sola línea de código.

Esta accesibilidad ha democratizado el desarrollo de bots de trading, permitiendo que una mayor cantidad de personas participe en el mercado de criptomonedas con herramientas avanzadas que antes estaban reservadas para expertos técnicos.

Este cambio representa una revolución no solo en el campo del trading, sino también en la educación y el desarrollo profesional.

Para los estudiantes interesados en finanzas y tecnología, el conocimiento de estadística aplicada al análisis técnico se convierte en una habilidad invaluable. Les permite no solo entender las complejidades del mercado de criptomonedas, sino también diseñar y ajustar sus propias estrategias de trading.

En este marco, la estadística básica, en la que se basan el 90% de las estrategias de trading, se convierte en la lente a través de la cual pueden interpretar datos y tendencias, maximizando sus oportunidades en este campo.

La accesibilidad a herramientas de creación de bots de trading ha abierto nuevas oportunidades para los profesionales del sector financiero, destacándose la estadística como una herramienta fundamental en su desarrollo.

Asimismo, los bots pueden ser utilizados para diversificar estrategias de inversión, permitiendo a los inversores institucionales y minoristas gestionar mejor sus carteras y optimizar sus rendimientos.

A su vez, la automatización del trading reduce la carga de trabajo manual, permitiendo a los profesionales concentrarse en el análisis estratégico y la planificación a largo plazo.

La evolución de los bots de trading está estrechamente ligada al desarrollo de la inteligencia artificial y el aprendizaje automático. Los más modernos pueden aprender y adaptarse a los cambios del mercado, mejorando continuamente sus estrategias a través del análisis de grandes volúmenes de datos.

La capacidad de analizar datos históricos y actuales, identificar patrones emergentes y prever movimientos del mercado se basa fundamentalmente en los conceptos básicos de estadística que se imparte en la materia.

Esta disciplina permite una formulación precisa de estrategias de trading, lo que se traduce en decisiones más informadas y respuestas más rápidas a las fluctuaciones del mercado, ofreciendo así una ventaja competitiva significativa.

El uso y desarrollo de bots de trading ha potenciado la investigación en inteligencia artificial aplicada a las finanzas, donde, como acabamos de mencionar, la estadística juega un papel crucial.

Las instituciones académicas y los centros de investigación están constantemente explorando nuevas formas de mejorar los algoritmos de trading. Es así que, a través del análisis estadístico, buscan optimizar estrategias y reducir riesgos asociados, avanzando significativamente en nuestra comprensión y operación dentro de los mercados financieros.

Este enfoque multidisciplinario, que integra estadística, inteligencia artificial y finanzas, está generando avances más que significativos.

En este ámbito, la estadística no solo facilita la identificación de tendencias y patrones en grandes volúmenes de datos, sino que también permite la creación de modelos predictivos más precisos, mejorando la eficacia de los bots de trading y elevando el nivel de sofisticación en las estrategias de inversión.

En términos de educación, la accesibilidad a herramientas de inteligencia artificial está transformando la forma en que se enseñan finanzas y economía.

Además, las universidades y escuelas de negocios están incorporando módulos sobre criptomonedas, análisis técnico y bots de trading en sus currículas, lo cual no solo prepara a los estudiantes para el futuro del trading, sino que también les proporciona habilidades prácticas que pueden aplicar en diversas áreas del sector financiero.

La familiaridad con estas herramientas y técnicas es cada vez más valorada en el mercado laboral, donde las empresas buscan profesionales capacitados en tecnología financiera.

Para los emprendedores y las startups, la capacidad de desarrollar y utilizar bots de trading ofrece nuevas oportunidades de negocio. Permiten la creación de plataformas de trading automatizado, ofrecer servicios de asesoría basados en inteligencia artificial o desarrollar aplicaciones móviles que integren funciones de trading automatizado.

Esto no solo diversifica sus fuentes de ingresos, sino que también les permite aprovechar el creciente interés en las criptomonedas y la tecnología blockchain.

El aspecto más importante a considerar es la manera en que puede brindarle un gran valor agregado a los alumnos de ciencias económicas.

Al tener la oportunidad de aplicar sus conocimientos teóricos en un proyecto práctico como la creación y el uso de bots de trading, los estudiantes pueden obtener una comprensión más profunda de los conceptos económicos y financieros.

Esta aplicación práctica refuerza el aprendizaje y permite a los estudiantes experimentar de primera mano cómo las teorías económicas se traducen en la práctica del mercado real.

Además, trabajar con bots de trading les brinda una experiencia valiosa en el manejo de herramientas tecnológicas avanzadas, algo cada vez más demandado en el mercado laboral.

Los alumnos de ciencias económicas también se benefician al adquirir habilidades en el análisis de datos y la programación, competencias que son altamente valoradas en el mundo profesional actual.

El proceso de desarrollar un bot de trading requiere un enfoque analítico riguroso, donde los estudiantes deben evaluar diferentes estrategias, analizar resultados y ajustar parámetros para optimizar el rendimiento del bot.

Este tipo de trabajo no solo mejora sus habilidades técnicas, sino que también fomenta el pensamiento crítico y la capacidad de resolución de problemas.

Asimismo, la experiencia con bots de trading les proporciona a los estudiantes una visión más clara de la dinámica del mercado de criptomonedas. Les permite observar cómo las fluctuaciones del mercado afectan las decisiones de trading y cómo las estrategias pueden adaptarse para mitigar riesgos y maximizar beneficios.

Esta comprensión puede ser invaluable para aquellos que deseen seguir una carrera en finanzas, inversión o gestión de riesgos.

Otro beneficio significativo es la oportunidad de colaborar en proyectos interdisciplinarios. Los estudiantes de ciencias económicas pueden trabajar en conjunto según las distintas carreras que escogieron, pudiendo conformar equipos cuya colaboración no solo enriquece su experiencia educativa, sino que también los prepara para trabajar en equipos multidisciplinarios en sus futuras carreras.

La implementación de bots de trading en la currícula educativa también puede estimular el interés por la investigación y la innovación entre los estudiantes.

Al enfrentarse a los desafíos de optimizar un bot de trading, es posible identificar áreas de mejora y explorar nuevas técnicas y enfoques, lo cual puede llevar a la creación de proyectos de investigación, publicaciones académicas y presentaciones en conferencias, contribuyendo al avance del conocimiento en este campo emergente.

En conclusión, las criptomonedas y los bots de trading están remodelando el paisaje financiero de manera significativa. La combinación de tecnología blockchain, estadística, inteligencia artificial y accesibilidad a herramientas de creación de bots está democratizando el trading y abriendo nuevas oportunidades para individuos y empresas.

La estadística y el análisis técnico siguen siendo fundamentales para desarrollar estrategias de trading exitosas, pero la barrera de entrada se ha reducido considerablemente.

A medida que más personas se familiarizan con estas tecnologías, el mercado de criptomonedas continuará evolucionando, ofreciendo nuevas posibilidades y desafíos. En este dinámico entorno, aquellos que se adaptan y adoptan estas innovaciones estarán bien posicionados.

Para los estudiantes, especialmente aquellos interesados en finanzas y tecnología, el conocimiento de estadística aplicada al análisis técnico se convierte en una habilidad invaluable. Les permite no solo entender las complejidades del mercado de criptomonedas, sino también diseñar y ajustar sus propias estrategias de trading.

En este marco, la estadística básica, se convierte en el pilar fundamental.



BIBLIOGRAFÍA

- ANTONOPOULOS, A. M. (2023). "Mastering Bitcoin: Unlocking Digital Cryptocurrencies". Amazon.
- Binks, J. & Maholm, G. (2024). "Bots & Brilliance: 101 Things You Should Know About Artificial Intelligence". Amazon.
- BURNISKE, C. & TATAR, J. (2017). "Cryptoassets: The Innovative Investor's Guide to Bitcoin and Beyond". Amazon.
- FORTNOW, M. & QUHARRISON, T. (2021). "The NFT Handbook". Amazon.
- LEISING, M. (2020). "Out of the Ether: The Amazing Story of Ethereum and the \$55 Million Heist that Almost Destroyed It All". Amazon.
- LÓPEZ ALFARO, S. O. (2022) "Análisis De Datos". Amazon.
- LÓPEZ ALFARO, S. O. (2022) "Estadística Descriptiva e Inferencial". Amazon.
- LÓPEZ ALFARO, S. O. (2022) "Todo Sobre Correlación y Regresión". Amazon.
- LÓPEZ ALFARO, S. O. (2023) "Keywords: Statistical Intelligence". Amazon.
- MCFARLAND, E. (2021). "Blockchain Wars: The Future of Big Tech Monopolies and the Blockchain Internet". Amazon.
- MEZRICH, B.; DAMRON, W. et al (2019). "Bitcoin Billionaires". Amazon.
- PATEL, N. (2018). "An Altcoin Trader's Handbook", Amazon.
- ROWE, A. (2024) "Chatgpt 4 Millionaire 2024: Bot Driven Side Hustles, Prompt Engineering Shortcut Secrets, and Automated Income Streams Others are already using to Build Ai Employees that print money while they sleep", Amazon.
- RUSSO, C. (2020). "The Infinite Machine". Amazon.
- SCARAMUCCI, A. (2022). "The Genius of Algorand: Technical Elegance and the DeFi Revolution". Amazon.
- SCHWAGER M J. (2024) "Build Your Own Forex Trading Bot.: 98% Accuracy, Set it and Leave it Trading Bot Course". Amazon.
- SEYMOUR, R. B. (2022). "The Blockchain Future: Bitcoin, Cryptocurrency, Blockchain Technology, De-centralised Ledgers, Smart Contracts, Crypto Wallets, NFTS and Web 3.0. What... do in the real world now and in the future!". Amazon.
- SHIN, L. (2022). "The Cryptopians: Idealism, Greed, Lies, and the Making of the First Big Cryptocurrency Craze". PublicAffairs. Amazon.
- WEALTH, P. (2024) "Building a Forex Trading Bot With Chatgpt: A Step-by-Step Guide to Leveraging ChatGPT for Forex Trading". Amazon



Papers adicionales consultados para evaluar la viabilidad de la aplicación de la estadística a las estrategias de trading:

JAUREGUÍZAR FRANCÉS, GRAU CARLES Y ARELLANO (2018) realizan un análisis de las series de precios diarios de varias criptomonedas, utilizando técnicas estadísticas para visualizar relaciones de mercado y correlaciones entre diferentes criptomonedas (Jaureguizar Francés, Grau Carles, & Arellano, 2018).

KAKUSHADZE Y SERUR (2019) presentan un libro que incluye descripciones detalladas y fórmulas matemáticas para más de 150 estrategias de trading en diferentes clases de activos, incluyendo criptomonedas. Algunas estrategias se basan en algoritmos de aprendizaje automático (Kakushadze & Serur, 2019).

RIQUELME (2020) describe una aplicación móvil diseñada para apoyar el aprendizaje de la estadística inferencial, que puede ser útil para comprender las metodologías estadísticas aplicadas al trading de criptomonedas (Riquelme, 2020).

Papers adicionales consultados para evaluar la viabilidad y enfoque de la propuesta presentada:

JASPIN, S, y S (2023) investigan la aplicación de un chatbot para el trading de criptomonedas, resaltando la importancia de los bots automatizados en el trading y la eficiencia de la inteligencia artificial en este contexto (Jaspin, S, & S, 2023).

LEE, FRANK, e IJSSELSTEIJN (2021) estudian un chatbot de criptomonedas, enfocándose en la confianza y las tensiones sociales entre desarrolladores y usuarios, lo que puede ser vital para entender la interacción entre tecnología y finanzas (Lee, Frank, & Ijsselsteijn, 2021).

LÓPEZ (2021) explora los desafíos y oportunidades del blockchain en el derecho tributario, considerando su impacto en los contratos inteligentes y la economía digital (López, 2021).

RODRÍGUEZ-LÓPEZ, PIÑEIRO-SÁNCHEZ, Y DE LLANO-MONELOS (2018) describen la tecnología blockchain y su aplicación en la contabilidad y la verificación de información contable, lo que es relevante para el entendimiento de las criptomonedas como una extensión digital en la economía (Rodríguez - López, Piñeiro-Sánchez, & de Llano-Monelos, 2018).

TARAEVSKA y VOLOSHYNOVYCH (2023) discuten el impacto de ChatGPT y herramientas similares de IA en el marketing, un aspecto relevante para comprender cómo la IA puede influir en el mercado de criptomonedas y su trading (Taraevska & Voloshynovych, 2023).