DIRECTORA: PROFESORA EMÉRITA DRA. MARÍA TERESA CASPARRI

NOTAS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO I TEÓRICO - PRÁCTICAS

PRÓLOGO
PROF. EMÉRITA DRA MARÍA TERESA CASPARRI

PRIMERA EDICIÓN

MARÍA JOSÉ BIANCO[1]
ANDREA GACHE[2]
ROBERTO A. GARCÍA[3]
GUSTAVO ZORZOLI[4]

[1,2,3,4] Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas. Cátedra de Análisis Matemático I. Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.

Notas análisis matemático I teoría-prácticas / María José Bianco ... [et al.]. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas, 2022.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-950-29-1933-1

1. Análisis Matemático. I. Bianco, María José.
CDD 515.2

Autores:

María José Bianco
Andrea Gache
Roberto A. García
Gustavo Zorzoli

Editor Responsable
Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires
Av. Córdoba 2122, 2do. Piso
Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.
Contacto: cma@fce.uba.ar
Tel: 0054 011 5285-6539

ISBN 978-950-29-1933-1
9 789502 919331

Autoridades

Universidad de Buenos Aires

Rector: Dr. Alberto E. Barbieri

Facultad de Ciencias Económicas

Decano: Dr. Ricardo Pahlen Acuña

Instituto de Investigaciones en Administración, Contabilidad y Matemática

Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión

Directora: Prof. Emérita Dra. María Teresa Casparri

Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión (CMA - IADCOM)

Inaugurado en el año 2001, el **Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión (CMA)** es actualmente parte del Instituto de Investigaciones en Administración, Contabilidad y Métodos Cuantitativos para la Gestión (IADCOM) de la Universidad de Buenos Aires, con sede en la Facultad de Ciencias Económicas.

El Centro se ha especializado en el estudio del riesgo de diversas actividades económicas y financieras en el contexto de países emergentes, haciendo especial énfasis en el bloque latinoamericano y particularmente en el caso de Argentina.

A lo largo del tiempo el Centro ha explotado diversos marcos conceptuales para la estimación del riesgo de activos financieros, proyectos de inversión real y de sectores económicos en su conjunto, en el marco de los principios de la gobernanza macroprudencial responsable.

CMA
IADCOM - UBA

Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Buenos Aires
Av. Córdoba 2122 2º Piso
Página web: www.economicas.uba.ar/cma
Teléfono: 5285-6539 – Correo Electrónico: cma@fce.uba.ar

CONTENIDOS

CAPÍTULO 1: FUNCIONES

CAPÍTULO 2: LÍMITE Y CONTINUIDAD

CAPÍTULO 3: DERIVADAS

CAPÍTULO 4: APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

CAPÍTULO 5: INTEGRALES

CAPÍTULO 6: SUCESIONES Y SERIES

APÉNDICES:

A) ALFABETO GRIEGO

B) SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

ÍNDICE

ÍNDICE 6

PRÓLOGO 13

CAPÍTULO 1: FUNCIONES 15

PRODUCTO CARTESIANO 15

RELACIONES 15

FORMAS DE REPRESENTACIÓN 16

RELACIÓN INVERSA 17

FUNCIONES 17

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL 18

FUNCIÓN LINEAL 23

ECUACIÓN DE UNA RECTA CONOCIDOS UN PUNTO P Y SU PENDIENTE M 26

ECUACIÓN DE UNA RECTA CONOCIDOS DOS DE SUS PUNTOS 27

RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES 28

SISTEMAS DE ECUACIONES 30

FUNCIÓN CUADRÁTICA 32

SISTEMAS DE ECUACIONES FORMADOS POR UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA Y UNA LINEAL 37

FUNCIONES POLINÓMICAS 38

FUNCIÓN MÓDULO O VALOR ABSOLUTO 41

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO 42

FUNCIÓN HOMOGRÁFICA 42

SISTEMAS FORMADOS POR UNA FUNCIÓN LINEAL Y UNA HOMOGRÁFICA 45

FUNCIÓN EXPONENCIAL 46
FUNCIÓN LOGARÍTMICA 47
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS 49
RELACIÓN FUNDAMENTAL DE LA TRIGONOMETRÍA 51
FUNCIÓN PERIÓDICA 51
FUNCIÓN SENO 51
FUNCIÓN COSENO 52
DOMINIO DE FUNCIONES 55
CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES 56
FUNCIÓN INVERSA 59
FUNCIONES CIRCULARES INVERSAS 63
FUNCIÓN COMPUESTA 65
APLICACIONES ECONÓMICAS: FUNCIONES ECONÓMICAS 68
FUNCIÓN DE DEMANDA 68
FUNCIÓN DE OFERTA 68
PUNTO DE EQUILIBRIO DE MERCADO 68
FUNCIÓN DE COSTO 73
FUNCIÓN DE INGRESO 73
FUNCIÓN DE BENEFICIO O UTILIDAD 73
INTERÉS COMPUESTO 74
APÉNDICE UNIDAD 1 75
DIVISIÓN DE POLINOMIOS 75
TEOREMA DEL RESTO 76

CAPÍTULO 2: LÍMITE Y CONTINUIDAD 79

LÍMITE FINITO 79
DEFINICIÓN 79

PROPIEDADES DEL LÍMITE 80
COCIENTE DE INFINITÉSIMOS 82
LÍMITES LATERALES 85
GENERALIZACIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE 87
LÍMITE INFINITO 87
LÍMITE EN EL INFINITO 88
COCIENTE DE INFINITOS 89
OTRAS INDETERMINACIONES 91
ASÍNTOTAS 94
1) ASÍNTOTA VERTICAL 94
2) ASÍNTOTA HORIZONTAL 96
3) ASÍNTOTA OBLICUA 97
PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS 99
FUNCIONES DISCONTINUAS 99
CONTINUIDAD EN UN INTERVALO CERRADO 101
FUNCIONES CONTINUAS EN UN INTERVALO CERRADO 104
TEOREMA 1 104
TEOREMA 2 104
TEOREMA DE BOLZANO 104
COROLARIO DEL TEOREMA DE BOLZANO 104
TEOREMA DEL VALOR MEDIO 105
GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO 105
FUNCIONES ECONÓMICAS DISCONTINUAS 106
CAPITALIZACIÓN CONTINUA 107

CAPÍTULO 3: DERIVADAS 110
DEFINICIÓN 110
FUNCIÓN DERIVADA 114
PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DERIVABLES 116
DERIVACIÓN DE FUNCIONES COMPUESTAS 118
DERIVADA LOGARÍTMICA 120
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA 121
ECUACIONES DE LAS RECTAS TANGENTE Y NORMAL 122
DERIVADAS SUCESIVAS 125
DIFERENCIAL 126
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL DIFERENCIAL 127
COSTO MARGINAL 129
INGRESO MARGINAL 129
BENEFICIO MARGINAL 130
ELASTICIDAD DE LA DEMANDA 131
GENERALIZACIÓN DEL CONCEPTO DE ELASTICIDAD 132

CAPÍTULO 4: APLICACIONES DE LAS DERIVADAS 133

PRIMERA PARTE: ESTUDIO DE FUNCIONES 134
FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES 134
CONDICIÓN NECESARIA PARA LA EXISTENCIA DE EXTREMOS RELATIVOS 139
CONDICIÓN SUFICIENTE PARA LA EXISTENCIA DE EXTREMOS RELATIVOS 141
PRIMER CRITERIO 141
SEGUNDO CRITERIO 142

CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN 149
CRITERIO DE CONCAVIDAD 150
PUNTO DE INFLEXIÓN 150
ESTUDIO COMPLETO DE FUNCIONES 154
SEGUNDA PARTE: TEOREMAS DE LAS FUNCIONES DERIVABLES 167
TEOREMA DE ROLLE 167
TEOREMA DE LAGRANGE 169
TEOREMA DE CAUCHY 171
REGLA DE L'HOSPITAL 172

CAPÍTULO 5: INTEGRALES 178

PROPIEDADES 179
MÉTODOS DE INTEGRACION 182
MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN 182
PROPIEDADES 184
MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES 184
MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR FRACCIONES SIMPLES 187
APLICACIONES ECONÓMICAS (PRIMERA PARTE) 192
INTEGRALES 193
INTEGRAL DEFINIDA 193
PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA 195
TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO INTEGRAL 195
APLIQUEMOS LO VISTO A UN PROBLEMA 197

PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL 197
SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL 198
(REGLA DE BARROW) 198
CÁLCULO DE ÁREAS 200
APLICACIONES ECONÓMICAS (SEGUNDA PARTE) 205
INTEGRALES IMPROPIAS 208
INTEGRALES CON LÍMITES INFINITOS 208
INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN DISCONTINUA 209

CAPÍTULO 6: SUCESIONES 212

CLASIFICACIÓN 213
PROPIEDADES DEL LÍMITE DE SUCESIONES 213
SERIES NUMÉRICAS 215
CLASIFICACIÓN 216
CONDICIÓN NECESARIA DE CONVERGENCIA 216
PROPIEDADES DE LAS SERIES NUMÉRICAS 218
SERIE GEOMÉTRICA 218
SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS 220
CRITERIO DE COMPARACIÓN 220
CRITERIO DE D'ALEMBERT 221
CRITERIO DE CAUCHY 222
CRITERIO DE RAABE 222
SERIES ALTERNADAS 223
CRITERIO DE LEIBNIZ 223
CONVERGENCIA ABSOLUTA Y CONDICIONAL 224
SERIES DE POTENCIAS 225
RADIO DE CONVERGENCIA 225
CÁLCULO DEL RADIO DE CONVERGENCIA 226

CAMPO DE CONVERGENCIA 226
FÓRMULA DE TAYLOR Y MAC LAURIN 229
APLICACIONES ECONÓMICAS 232
ALFABETO GRIEGO 235
SÍMBOLOS MATEMÁTICOS 236
BIBLIOGRAFÍA 237

PRÓLOGO

Notas de Análisis Matemático I Teórico – Prácticas es el resultado de la labor de docencia y de investigación desarrollada por los profesores María José Bianco, Andrea Gache, Roberto García y Gustavo Zorzoli de nuestro Departamento Pedagógico de Matemática, en articulación con el Programa de Formación Docente en Métodos Cuantitativos del Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos aplicados a la Economía y la Gestión (IADCOM), de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires.

Para mí es muy grato tener el honor de prologar este trabajo de los docentes, producto de más de 25 años de estar al frente de cursos de Análisis Matemático I, con el fin de presentar a los alumnos un material procesado didácticamente para su fácil comprensión, pero con la rigurosidad que la asignatura exige.

El contenido de este texto está ajustado al programa de la asignatura Análisis Matemático I, que se imparte en el Primer Tramo de todas las carreras de nuestra Facultad; y que se desarrolla en seis unidades de estudio.

Debo destacar el entusiasmo y la dedicación con las que María José, Andrea, Roberto y Gustavo asumen diariamente su tarea docente, siendo este trabajo una extensión de lo que realizan dentro del aula, razón por la cual les deseo el mayor de los éxitos, ya que considero muy importante que este material se publique en la Facultad y permita el acceso libre de los estudiantes.

Prof. Emérita Dra. María Teresa Casparri
Directora IADCOM

CAPÍTULO 1

FUNCIONES

CAPÍTULO 1

FUNCIONES

PRODUCTO CARTESIANO

Dados dos conjuntos ***A*** y ***B***, se llama ***producto cartesiano de A por B*** y se designa $A \times B$ al conjunto de todos los pares ordenados cuya primera componente pertenece a ***A*** y cuya segunda componente pertenece a ***B***.

A: conjunto de partida

B: conjunto de llegada

(*x;y*) : par ordenado, siendo ***x*** la primera componente e ***y*** la segunda componente.

En símbolos:

$$\boxed{A \times B = \{(x;y) / x \in A \quad \wedge \quad y \in B\}}$$

01 Ejemplo Sean los conjuntos $A = \{1,2\}$ y $B = \{3,4,5\}$. Entonces, el producto cartesiano es:

$$A \times B = \{(1;3),(1;4),(1;5),(2;3),(2;4),(2;5)\}$$

OBSERVACIÓN: El producto cartesiano no es conmutativo, dado que $A \times B \neq B \times A$.

$$(a;b) = (c;d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \quad \wedge \quad b = d$$

Luego, cambiando el orden en que son tomados dos elementos, se obtiene un par ordenado distinto, es decir, el par **(1;3)** es distinto del par **(3;1)**.

RELACIONES

Una ***relación*** entre los elementos de un conjunto ***A*** y otro ***B*** es cualquier subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Cada subconjunto define una relación ***R***.

En símbolos:

$$R \text{ es una relación de } A \text{ en } B \quad \Leftrightarrow \quad R \subseteq A \times B$$

Análogamente ***R*** es una relación entre los elementos de un conjunto ***A*** si es un subconjunto del producto cartesiano $A \times A$.

✓ ***<u>Dominio de una relación</u>*** (D_R): Es el conjunto formado por las primeras componentes de los pares de la relación.

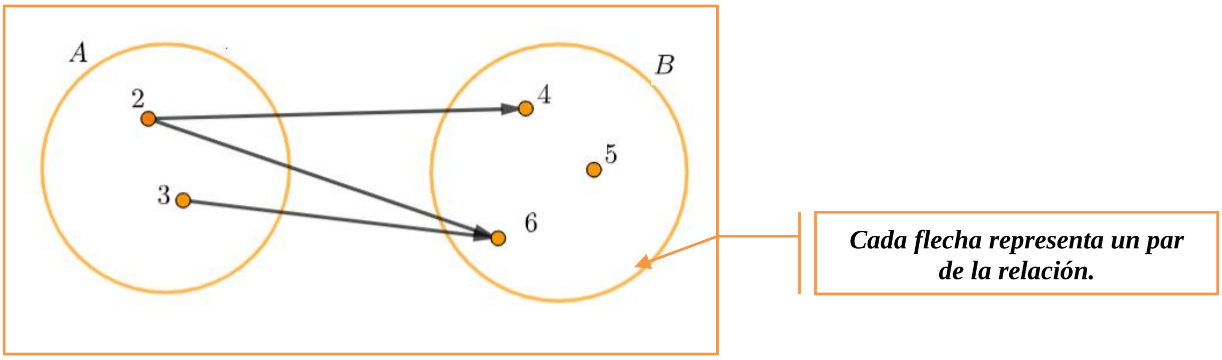
✓ ***<u>Recorrido de una Relación</u>*** (R_R): Es el conjunto formado por las segundas componentes de los pares de la relación.

OBSERVACIÓN: $D_R \subseteq A$ y $R_R \subseteq B$

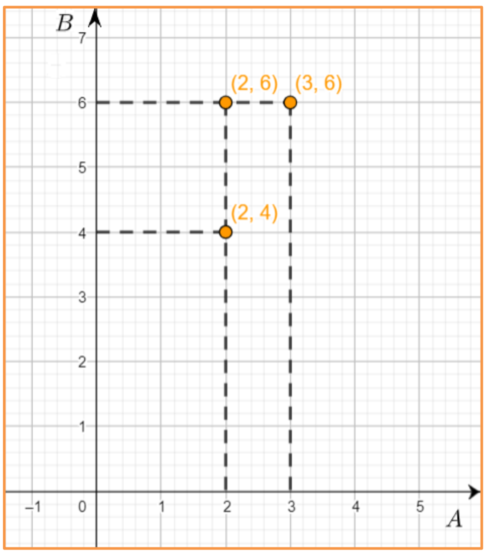
FORMAS DE REPRESENTACIÓN

1) *<u>Diagrama de Venn</u>*

$A = \{x / x \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad 2 \leq x \leq 3\}$
$B = \{x / x \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad 4 \leq x \leq 6\}$
$R = \{(x; y) / (x; y) \in A \times B \quad \wedge \quad x \text{ es divisor de } y\}$



2) *<u>Gráfico cartesiano</u>*: Continuemos con el ejemplo anterior



RELACIÓN INVERSA

Sea R una relación de A en B (R: $A \to B$). Se llama ***relación inversa*** de B en A, y se nota R^{-1}, a aquella formada por pares $(x;y)$ tales que $(y;x)$ pertenecen a R.

En símbolos:

$$\boxed{R^{-1} = \{(x;y) \in B \times A \ / \ (y;x) \in R\}}$$

FUNCIONES

Una ***función*** f de A en B es una relación que le hace corresponder a cada elemento $x \in A$ uno y sólo un elemento $y \in B$, llamado ***imagen*** de x por f, que se escribe $y = f(x)$.

En símbolos:

$$\boxed{f : A \to B \quad / \quad y = f(x)}$$

Es decir que para que una relación de un conjunto A en otro B sea función, debe cumplir dos condiciones, a saber:

1) Todo elemento del conjunto de partida A debe tener imagen, es decir, el dominio de la función debe ser A $\therefore$ $Df = A$.
   En símbolos:

$$\boxed{\forall x \in A : \quad \exists y \in B \quad / \quad y = f(x)}$$

2) La imagen de cada elemento $x \in A$ debe ser única. Es decir, ningún elemento del dominio puede tener más de una imagen.
   En símbolos:

$$\boxed{\forall x \in A \quad : (x;y) \in f \ \wedge \ (x;z) \in f \ \Rightarrow \ y = z}$$

El conjunto formado por todos los elementos de B que son imagen de algún elemento del dominio se denomina ***conjunto imagen*** o ***recorrido*** de f.
En símbolos:

$$\boxed{Rf = \{y \in B / \exists x \in A \ \wedge \ (x;y) \in f\}}$$

OBSERVACIONES:

a) En una función $f : A \to B$ todo elemento $x \in A$ tiene una y sólo una imagen $y \in B$.

b) Un elemento $y \in B$ puede:

- i) No ser imagen de ningún elemento $x \in A$.
- ii) Ser imagen de un elemento $x \in A$.
- iii) Ser imagen de varios elementos $x \in A$.

c) La relación inversa f^{-1} de una función f puede no ser una función.

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

Se dice que una función $f: A \to B$ es ***real*** si $B \subseteq \mathbb{R}$ (puede suponerse $B = \mathbb{R}$) y se dice que es de ***variable real*** si su dominio es un conjunto de números reales ($A \subseteq \mathbb{R}$).
En símbolos:

$$\boxed{f: A \to B / y = f(x) \quad con \ \ A \subseteq \mathbb{R}}$$

- *x es la variable independiente o argumento*
- *y es la variable dependiente*

Formas de expresión de una función

1) ***Mediante el uso de tablas*:**

x	y
-1	1
0	0
½	¼
1	1
2	4
…	…

2) ***Gráficamente*:** Cabe aclarar que llamamos ***gráfica*** de una función real de variable real al conjunto de puntos del plano que referidos a un sistema de ejes cartesianos ortogonales tienen coordenadas $(x; f(x))$ donde $x \in A$.

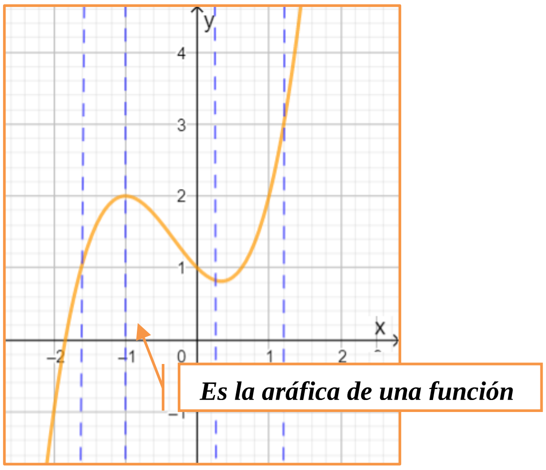
El plano cartesiano está formado por dos rectas numéricas, una horizontal y otra vertical que se cortan perpendicularmente en un punto. La recta horizontal se llama eje de las abscisas o ***eje x***, y la vertical, eje de las ordenadas o ***eje y***, el punto donde se cortan se lo llamamos ***origen***.

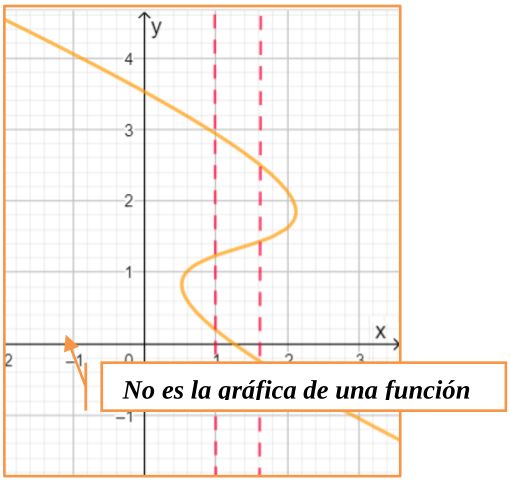
El plano cartesiano tiene como finalidad describir la posición de los puntos, los cuales se representan por sus coordenadas o pares ordenados. En símbolos $P = (x; y)$

Dada f una función real, a cada par $(x; y) = (x; f(x))$ determinado por la función f le corresponde en el plano cartesiano un único punto $P = (x; y)$ o sea $P = (x; f(x))$

OBSERVACIONES:

a) El dominio de la función se considera sobre el eje de abscisas.
b) El conjunto imagen o recorrido se considera sobre el eje de ordenadas.
c) Si trazamos paralelas al eje de ordenadas, éstas *no pueden* intersecar al gráfico de una función *en más de un punto*, pues de lo contrario habría más de una imagen para ciertos elementos del dominio, lo que contradice la definición de función.

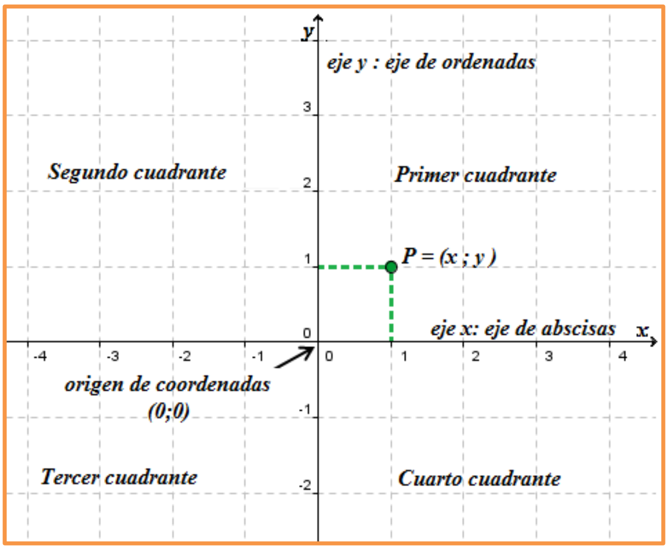




3) ***<u>Analíticamente</u>:*** Cuando la función está dada por $y = f(x)$ donde f representa a una expresión analítica.

Por ejemplo: $\boldsymbol{y = x^2 - 2}$

La fórmula o ecuación de una función nos dice qué operaciones debemos hacer con cada valor de x para obtener su correspondiente valor y = f(x).



OBSERVACIÓN: Cuando se da una función real de variable real por medio de una fórmula $\boldsymbol{y = f(x)}$ que permite hallar la imagen de cada elemento x pero no está dado expresamente el dominio, se entiende que el mismo es el conjunto más amplio posible $A \subseteq \mathbb{R}$ de valores de x para los cuales la expresión analítica $\boldsymbol{f(x)}$ adquiere un valor real determinado.

Por ejemplo, en $\boldsymbol{y = x^2 - 2}$, $A = \mathbb{R}$, pues esa expresión está definida para cualquier valor de $\boldsymbol{x}$.

En cambio, si la función está dada por $y = \dfrac{x^2}{x+2}$, la expresión está definida para cualquier valor de x excepto para $x = -2$. Luego, el dominio de la función $f(x)$ es $Df = \mathbb{R} - \{-2\}$.

IMPORTANTE:
- ***El dominio de una función no siempre viene dado y en algunos casos hay que determinarlo según la definición de f.***
- ***En los problemas económicos no sólo debemos determinar el dominio para que exista f en el contexto matemático sino para que tenga sentido económico.***

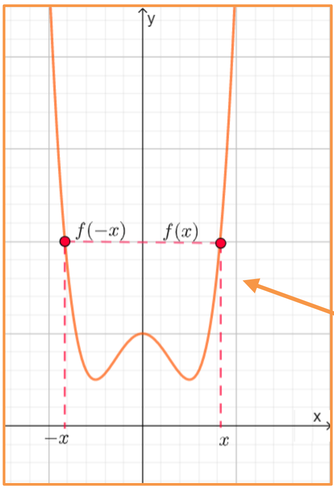
Paridad de una función

Sea una función $f : A \to \mathbb{R}$ en la que $A \subseteq \mathbb{R}$ es simétrico respecto del origen, vale decir si $x \in A \Rightarrow -x \in A$.

Se dice que:

a) $\boxed{f \text{ es una función } \textbf{\textit{par}} \Leftrightarrow \forall x \in A : f(-x) = f(x)}$

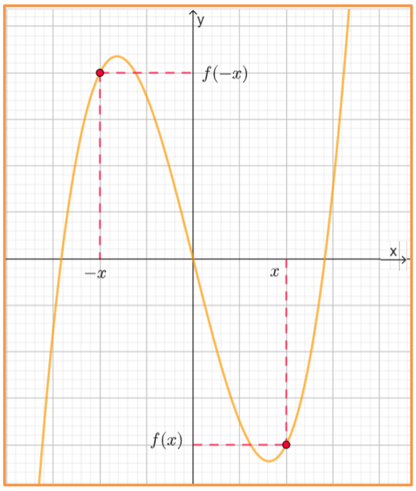
Es decir, elementos opuestos del dominio tienen la misma imagen.
En cuanto a la gráfica de una función par es una curva simétrica respecto del eje de ordenadas.



Observa se verifica que
$\forall x \in A : f(-x) = f(x)$

b) $\boxed{f \text{ es una función } \textbf{\textit{impar}} \Leftrightarrow \forall x \in A : f(-x) = -f(x)}$

Es decir que a elementos opuestos del dominio les corresponden imágenes opuestas en el recorrido. En cuanto a las gráficas de estas funciones son curvas con simetría respecto del origen de coordenadas.



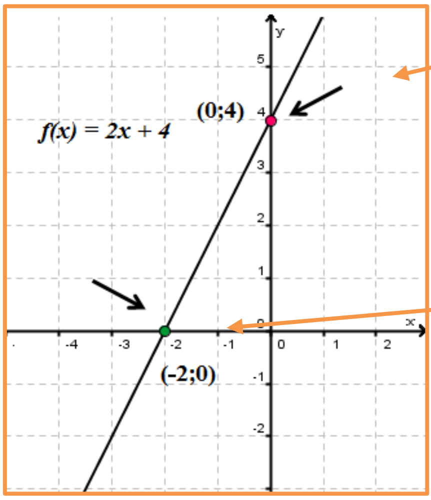
Observa se verifica que
$\forall x \in A : f(-x) = -f(x)$

Intersecciones con los ejes coordenados

Son los puntos en que la gráfica de una función interseca a los ejes de abscisas y de ordenadas.

a) **Con el eje de ordenadas** (*y*)**:** Se obtiene haciendo $x = 0$. Es decir, corresponde al par $(0; f(0))$. (Observemos que, si existe, es único, tal como lo exige la definición de función).

b) **Con el eje de las abscisas** (*x*)**:** Se obtienen para aquellos valores x del dominio donde se anula el valor de la función. Dichos valores de x se denominan ***ceros*** de la función y son las soluciones o raíces de la ecuación $f(x) = 0$.



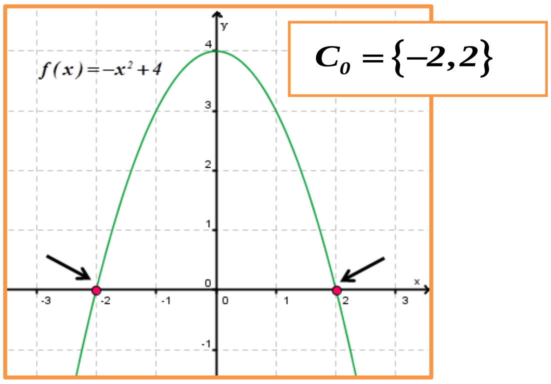
Intersección con el eje y
Hallamos la imagen de cero
f(0)=2.0 + 4 entonces f(0) = 4
La expresamos como un par ordenado $(0;4)$

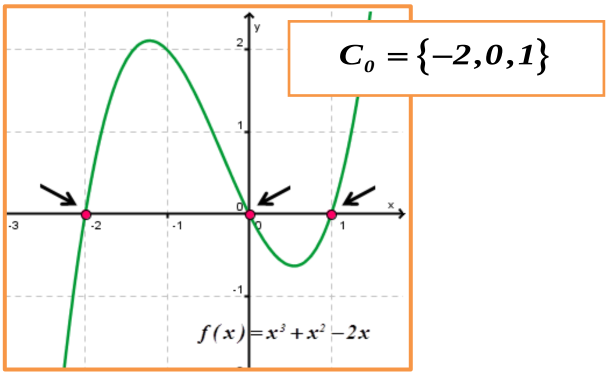
Intersección con el eje x
Hallamos la abscisa x cuya imagen es cero.
f(x)=2.x + 4=0 entonces x = –2
La expresamos como un par ordenado $(-2;0)$

✓ ***Ceros de una función***

Sea una función $f : A \to B \,/\, y = f(x)$ se dice que x_0 ***es un cero o raíz de f*** $\Leftrightarrow x_0 \in A = Domf \wedge f(x_0) = 0$

Los ceros de una función son los puntos en los que la gráfica corta al ***eje x***, como dijimos en el punto anterior





<u>Conjuntos de ceros:</u>
Se denomina ***conjunto de ceros*** al conjunto formado por los elementos del dominio cuya imagen es nula. Lo simbolizamos C_0

FUNCIÓN LINEAL

Está dada por la fórmula $y = mx + b$ donde m y b son números reales llamados ***pendiente*** y ***ordenada al origen*** respectivamente.

Su gráfica es una ***recta***.

Las intersecciones con los ejes coordenados son:

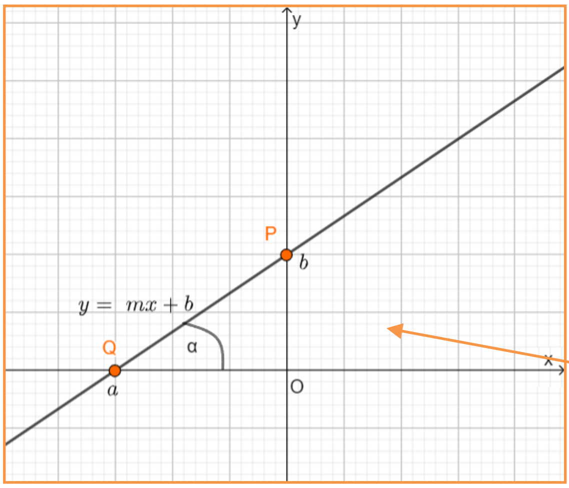
i) Con el eje y: $P = (0; b)$

ii) Con el eje x: $Q = (a; 0)$ donde a es el cero de la función y raíz de la ecuación $m\ x + b = 0$ Por lo tanto, $a = -\dfrac{b}{m}$

Observemos que, dada la ecuación $y = m\ x + b$:

a) Si $m = 0$, entonces $y = b$. Es decir, se obtiene la ***función constante,*** cuya gráfica es una recta paralela al eje x que pasa por el punto **(0; *b*).**

b) Si $b = 0$, entonces $y = m\ x$. Esta ecuación tiene por gráfica una recta que pasa por el origen de coordenadas $(0;0)$



La recta forma con el eje x un ángulo α.

Veamos la relación que existe entre m y α.

En el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{POQ}$ es:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{b-0}{0-a} = \frac{b}{-a} = \frac{b}{-\left(-\dfrac{b}{m}\right)} = m$$

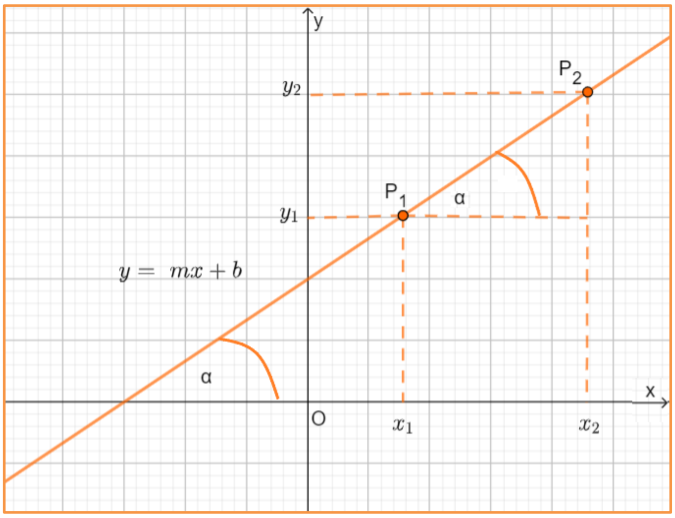
Luego, $m = \operatorname{tg}\alpha$ (la pendiente da la tangente del ángulo α, que forma la recta con el eje x medido en sentido contrario a las agujas del reloj).

Teniendo en cuenta la conclusión anterior las coordenadas de cualquier par de puntos de la recta $P_1 = (x_1; y_1)$ y $P_2 = (x_2; y_2)$ deberán cumplir:

$\Delta y = y_2 - y_1$ como el **incremento** o **variación** de y

$$\operatorname{tg}\alpha = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

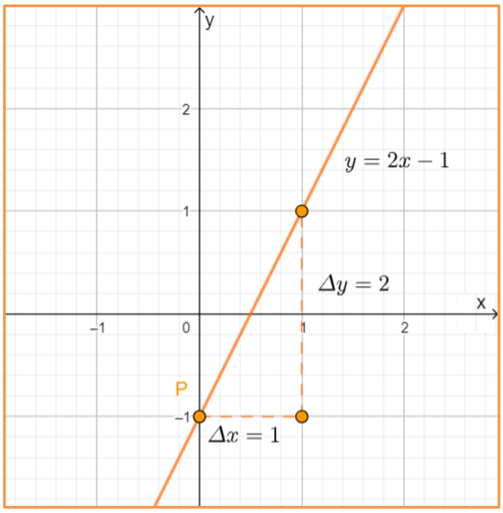
$\Delta x = x_2 - x_1$ como el **incremento** o **variación** de x.



Veamos cómo representar gráficamente una función lineal dada su ecuación.

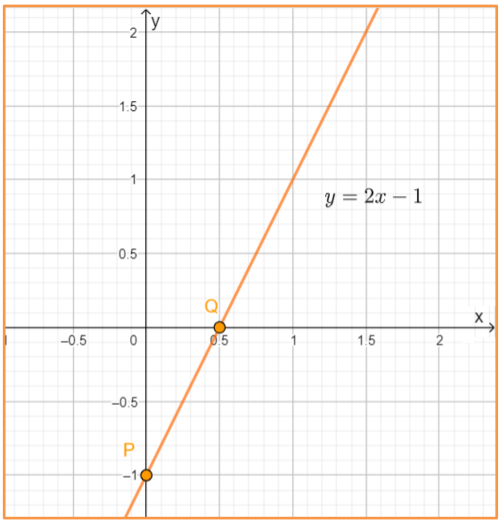
02 *Ejemplo* Representemos $y = 2x - 1$

a) Consideramos un punto y la pendiente:



$$\begin{cases} P = (0;-1)\ (\textit{intersección con el eje } y) \\ m = 2 \end{cases}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \quad \therefore \ \textbf{si } \Delta x = 1 \ \textbf{ es } \ \Delta y = 2$$

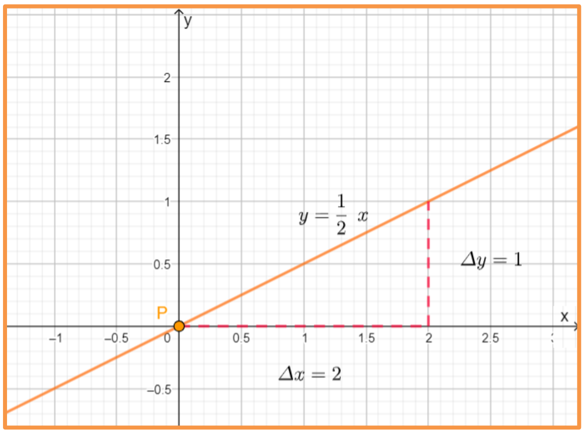


b) Consideramos dos puntos cualesquiera de la recta, por ejemplo, los puntos de intersección con los ejes ***x*** e ***y***.

$$P = (0;-1) \ \text{ y } \ Q = \left(\frac{-b}{m};0\right) = \left(\frac{1}{2};0\right)$$

03 *Ejemplo* Representemos ahora $y=\frac{1}{2}x$

Su pendiente es $m=\frac{1}{2}$ y, por ser $b=0$, pasa por el origen $(0;0)$



Marcamos $P=(0;0)$

y consideramos $\Delta x=2$ y $\Delta y=1$ para que

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{2}$$

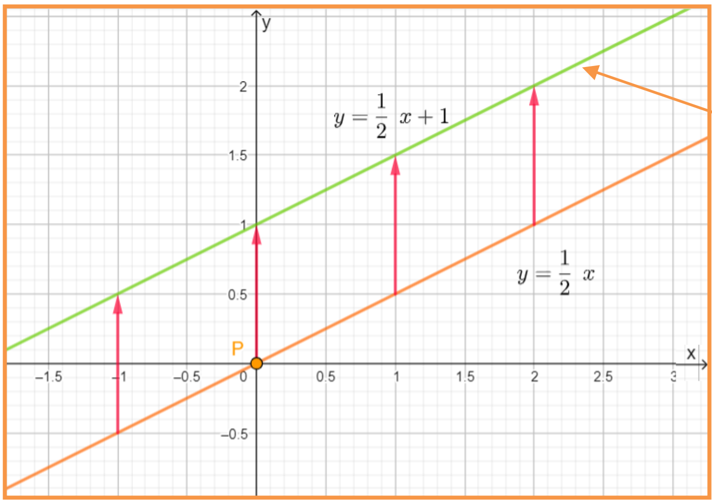
.

04 *Ejemplo* Observemos los desplazamientos que tendría la recta $y=\frac{1}{2}x$ con las modificaciones en la ecuación.

i) Sumando o restando un número real $\boxed{k>0}$ a la función.

$\boxed{y=\frac{1}{2}x+1}$

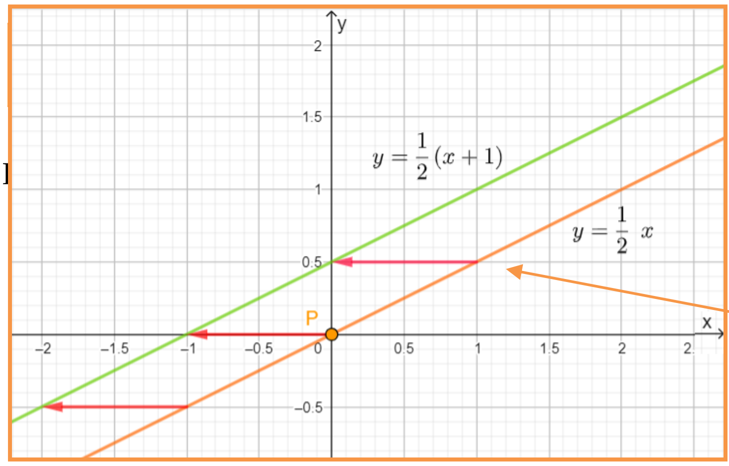
Hemos considerado $\boxed{k=1}$.



Todos los puntos de la recta de ecuación $y=\frac{1}{2}x$ se desplazaron 1 unidad en el sentido positivo del eje y.

Observemos que, si hubiésemos restado 1, el corrimiento hubiera sido en el sentido negativo del eje ***y***.

ii) Sumando o restando un número real $\boxed{\boldsymbol{k>0}}$ al argumento $\boldsymbol{x}$.



Todos los puntos de la recta de ecuación $y=\frac{1}{2}x$ se desplazaron 1 unidad en el sentido negativo del eje x.

Observemos que, si hubiésemos restado 1, el corrimiento hubiera sido en el sentido positivo del eje $\boldsymbol{x}$.

CONCLUSIÓN: Dada una función $y=f(x)$ y $k>0$:

a) La gráfica de $y=f(x)\pm k$se obtiene desplazando la curva de $y=f(x)$ en la dirección del eje y

- **i)** $\boldsymbol{k}$ unidades en el sentido positivo si $y=f(x)+k$
- **ii)** $\boldsymbol{k}$ unidades en el sentido negativo si $\boldsymbol{y=f(x)-k}$

b) La gráfica de $y=f(x\pm k)$ se obtiene desplazando la curva de $\boldsymbol{y=f(x)}$ en la dirección del eje $\boldsymbol{x}$.

- **i)** $\boldsymbol{k}$ unidades en el sentido positivo si $y=f(x-k)$
- **ii)** $\boldsymbol{k}$ unidades en el sentido negativo si $y=f(x+k)$

ECUACIÓN DE UNA RECTA CONOCIDOS UN PUNTO P Y SU PENDIENTE m

Queremos hallar la ecuación de la recta conocida su pendiente y que pasa por un punto dado $\boldsymbol{P=(x_0;y_0)}$.

Veamos un ejemplo.

05 *Ejemplo*

Sea $\boldsymbol{P=(x_0;y_0)=(-2;1)}$ y sea $\boldsymbol{m=1}$ la pendiente.

Podemos plantear: $\boldsymbol{y=mx+b}$ por tratarse de una función lineal con $\boldsymbol{m=1}$ y $\boldsymbol{b}$ a determinar.

Si el punto dado pertenece a la gráfica de la función sus coordenadas deben satisfacer la ecuación, luego:

$y_0 = m\ x_0 + b$

$1 = m\,(-2) + b$ reemplazamos $m = 1$

$1 = -2 + b$

$b = 3$

Reemplazamos los datos en la ecuación de la recta

La función buscada es entonces $\boxed{y = x + 3}$

Alternativamente puede aplicarse la siguiente expresión que se obtiene a partir de la ecuación $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$:

$$\boxed{y - y_0 = m\,(x - x_0)}$$

Utilicemos esta expresión para resolver el ejemplo anterior. Reemplazando $P = (-2; 1)$ y $m = 1$ resulta:

$$y - 1 = 1\,(x - (-2))$$
$$y - 1 = x + 2$$
$$\boxed{y = x + 3}$$

Obteniéndose el mismo resultado que por el procedimiento anterior.

ECUACIÓN DE UNA RECTA CONOCIDOS DOS DE SUS PUNTOS

Supongamos ahora que queremos hallar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos de coordenadas $P_0 = (x_0; y_0)$ y $P_1 = (x_1; y_1)$.

06 *Ejemplo*

Sean $P_0 = (x_0; y_0) = (-1; 1)$ y $P_1 = (x_1; y_1) = (-2; 4)$. Como los puntos dados pertenecen a la recta, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación de esta que es de la forma $y = mx + b$

Reemplazando las coordenadas de los puntos en la ecuación general obtenemos un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son m y b.

$$\begin{cases} y_0 = m\ x_0 + b \\ y_1 = m\ x_1 + b \end{cases}$$

En nuestro ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = m\,(-1) + b \\ 4 = m\,(-2) + b \end{array}\right\} \text{ Sistema de ecuaciones en } m \text{ y } b$$

Resolviendo el sistema planteado por igualación o por cualquier otro método:

$$\left.\begin{array}{l} b = m + 1 \\ b = 2m + 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad m + 1 = 2m + 4 \quad \Rightarrow \quad m = -3$$

Reemplazando, obtenemos que $b = -3 + 1 = -2$.

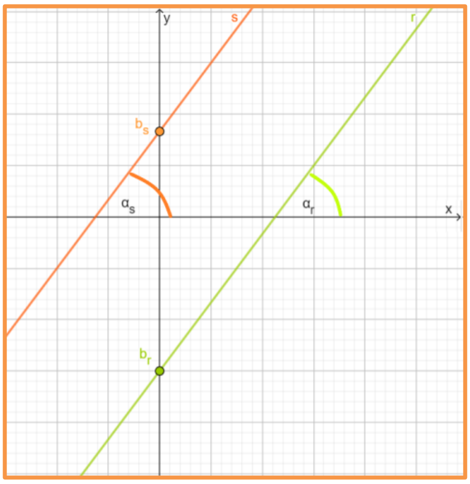
Por lo tanto, la ecuación de la recta es: $\boxed{y=-3x-2}$

Alternativamente puede utilizarse la siguiente expresión, que se obtiene reemplazando $m=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ en la ecuación $y-y_0=m\,(x-x_0)$:

$$\boxed{y-y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\,(x-x_0)}$$

RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

1) *Paralelas*



$s: y=m_s\ x+b_s$

$r\,/\,/\,s \Leftrightarrow \hat{\alpha}_r=\hat{\alpha}_s$

$\hat{\alpha}_r=\hat{\alpha}_s \Rightarrow \operatorname{tg}\hat{\alpha}_r=\operatorname{tg}\hat{\alpha}_s \Rightarrow \boxed{m_r=m_s}$

Por lo tanto, para que dos rectas sean paralelas las pendientes deben ser iguales.

Veamos un ejemplo.

07 *Ejemplo* Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_0=(1;1)$ y es paralela a la recta de ecuación $x+y=5$

Podemos plantear:

r : pasa por $P_0=(1;1)$ y tiene pendiente m_r

s : $x+y=5$

$r\,/\,/\,s$

Para determinar la pendiente de la recta s (m_s), le damos forma explícita a su ecuación:

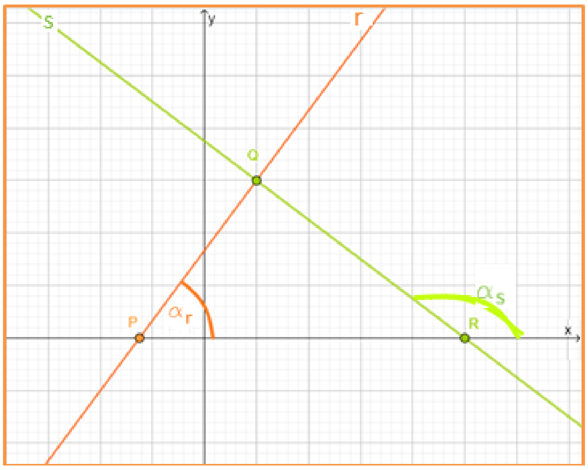
$y=-x+5$ de dónde $m_s=-1$.

Como $r\,/\,/\,s \Rightarrow m_r=m_s$

Ahora conocemos de la recta r un punto $P_0 = (1;1)$ y su pendiente $m_r = -1$, aplicando

$$y - y_0 = m_r\,(x - x_0)$$
$$y - 1 = -1\,(x - 1)$$
$$\boxed{y = -x + 2}$$

2) ***Perpendiculares***



$r \perp s \Rightarrow \overset{\Delta}{PQR}$ rectángulo

$$\hat{\alpha}_s = \hat{\alpha}_r + 90^o$$

$$\operatorname{tg}\hat{\alpha}_s = \operatorname{tg}\left(\hat{\alpha}_r + 90^o\right) = -\cot g\,\hat{\alpha}_r = -\frac{1}{\operatorname{tg}\hat{\alpha}_r}$$

$$\boxed{m_s = -\frac{1}{m_r}}$$

Por lo tanto, la condición de perpendicularidad entre dos rectas es que la pendiente de una de ellas sea la recíproca cambiada de signo de la pendiente de la otra.

Apliquemos esta condición a la resolución de un ejercicio.

08 *Ejemplo*

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $Q = (2;2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $P_0 = (0;3)$ y $P_1 = (1;1)$. Graficar ambas rectas.

Llamemos s a la recta que pasa por $Q = (2;2)$ y r a la determinada por $P_0 = (0;3)$ y $P_1 = (1;1)$.

Vamos a hallar primero la ecuación de la recta r, aplicando:

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$y - 3 = \frac{1-3}{1-0}(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = -2x + 3 \quad \Rightarrow \quad m_r = -2$$

Por la condición de perpendicularidad resulta:

$$m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

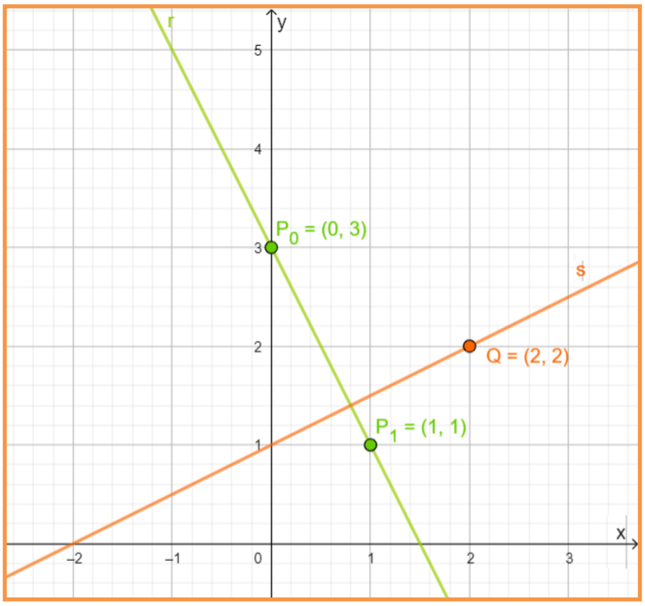
Ahora hallamos la ecuación de la recta ***s*** de la cual conocemos un punto $Q = (2;\ 2)$ y la pendiente $\boldsymbol{m_s} = \frac{1}{2}$ para lo cual aplicamos:

$$y-2=\frac{1}{2}(x-2)$$

$$y=\frac{1}{2}x-1+2$$

$$\boxed{y=\frac{1}{2}x+1}$$

Recta perpendicular a la recta dada



SISTEMAS DE ECUACIONES

Lo explicaremos con un ejemplo.

09 *Ejemplo* Resolver analítica y gráficamente el sistema $\begin{cases} 3x - 2y = -12 \\ 5x + 4y = 2 \end{cases}$

Para resolver analíticamente utilizamos el método de igualación.
Despejamos ***y*** de ambas ecuaciones e igualamos las expresiones resultantes.

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{3x+12}{2} \\ y = \dfrac{-5x+2}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{3x+12}{2} = \frac{-5x+2}{4} \quad \Rightarrow \quad 2\ (3x+12) = -5x+2 \quad \Rightarrow$$

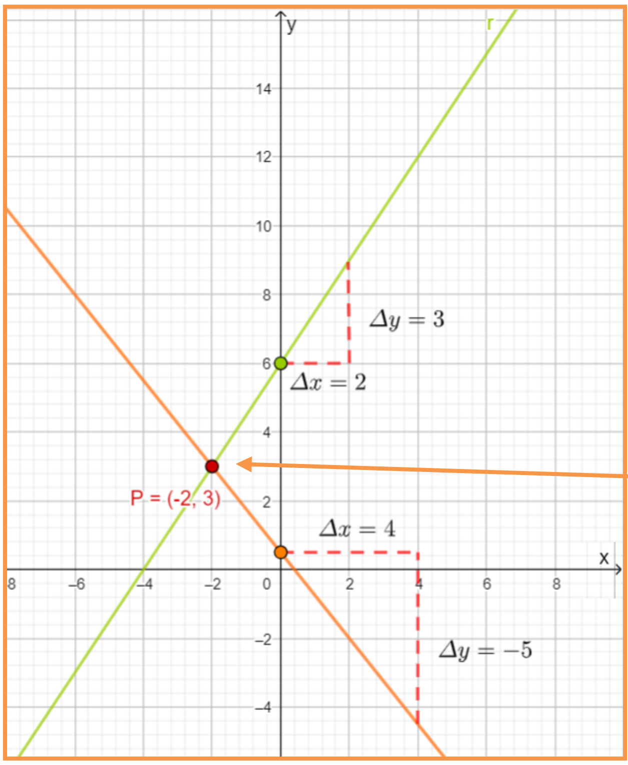
$$6x + 24 = -5x + 2 \quad \Rightarrow \quad 11x = -22 \quad \Rightarrow \quad x = -2$$

Reemplazando:

$$y = \frac{3\ (-2) + 12}{2} = 3$$

El conjunto solución es $\boldsymbol{S} = \{(\mathbf{-2}; \mathbf{3})\}$.

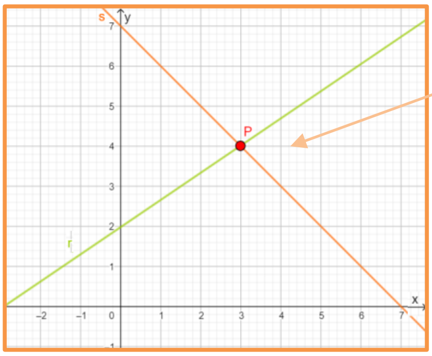
Para resolver gráficamente el sistema debemos graficar la función lineal que cada ecuación *define y determinar el punto de intersección entre las rectas.*



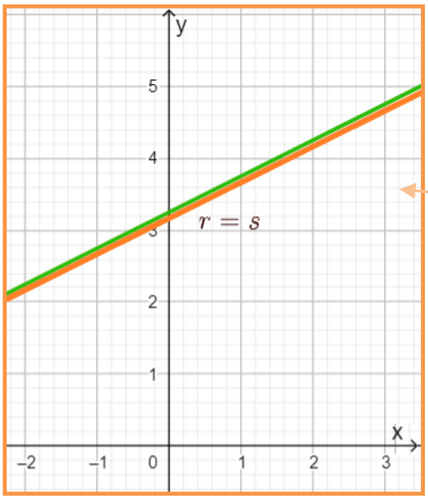
$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x + 6 \\ y = -\dfrac{5}{4}x + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

El punto de intersección es $P = (-2; 3)$

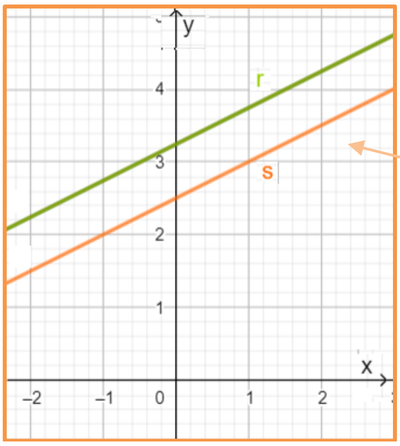
OBSERVACIÓN: Al graficar ambas funciones lineales pueden presentarse los siguientes casos:



Hay un único punto de intersección. Se trata de un ***sistema compatible determinado*** (admite solución única).



Se obtienen dos rectas superpuestas y en consecuencia hay infinitos puntos de intersección. Se trata de un sistema compatible indeterminado (existen infinitas soluciones).



Se obtienen dos rectas paralelas y, por lo tanto, la intersección es vacía. Se trata de un sistema incompatible (no tiene solución).

FUNCIÓN CUADRÁTICA

Esta función responde a la fórmula:

$$\boxed{y = a\,x^2 + b\,x + c \quad \text{con} \quad a \neq 0}$$

Su gráfica es una curva llamada **parábola** cuyas características son:

a) Si $\boxed{a > 0}$ es convexa o cóncava positiva y admite un mínimo

Si $\boxed{a < 0}$ es cóncava y admite un máximo

b) ***Vértice***: punto de la curva donde la función alcanza el mínimo o el máximo.
Sus coordenadas se obtienen de la siguiente forma:

$$\boxed{x_V = \frac{-b}{2a}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y_V = f(x_V) = a\,x_V^2 + b\,x_V + c = \dfrac{a\,b^2}{4a^2} - \dfrac{b^2}{2a} + c = \dfrac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a} = \\ = \dfrac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \dfrac{-\Delta}{4a} \qquad \textbf{donde} \quad \Delta = b^2 - 4ac \quad \textbf{(discriminante)} \end{array}}$$

Luego, $\boxed{V = (x_V\,;\,y_V)}$

c) ***Eje de simetría***: $\boxed{x = x_V}$

d) ***Intersección con el eje y*** : $\boxed{(0;\ f(0)) = (0; c)}$

e) ***Intersecciones con el eje x*** : Se obtiene resolviendo la ecuación de 2[do] grado $a\,x^2 + b\,x + c = 0$.

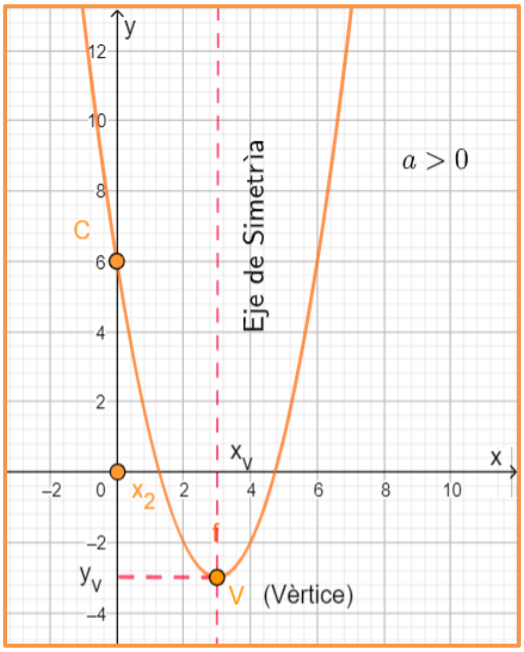
Las raíces pueden calcularse con la siguiente fórmula:

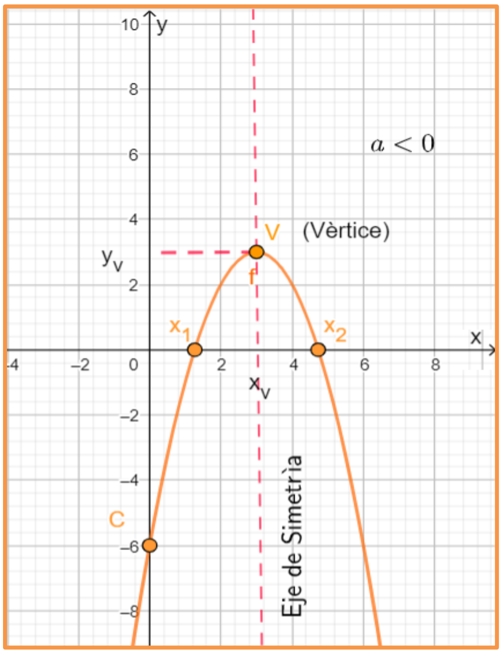
$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

y según sea el valor de $\Delta = b^2 - 4ac$ pueden presentarse los siguientes casos:

i) $\boxed{\Delta > 0}$: Las raíces son reales y distintas, en cuyo caso la función tiene dos ceros reales distintos y la parábola corta al eje *x* en dos puntos de abscisas

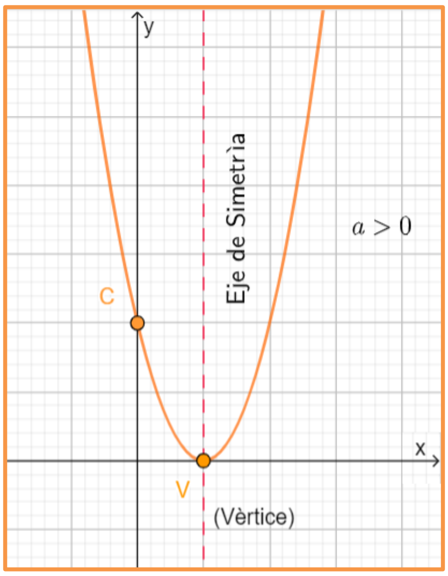
$$\boxed{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

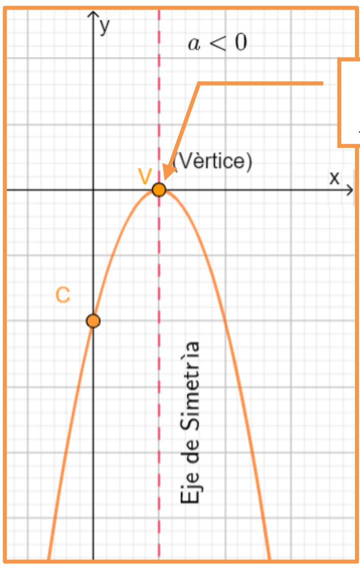




Obsérvese que $\boxed{x_V = \dfrac{x_1 + x_2}{2}}$.

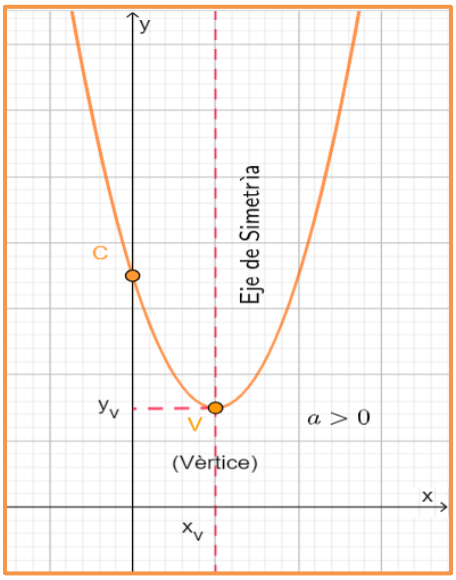
ii) $\boxed{\Delta = 0}$: La ecuación de 2do grado tiene en este caso una raíz doble y la función cuadrática un solo cero. La parábola tiene un solo punto de intersección con el eje *x* en $\boxed{x = \dfrac{-b}{2a} = x_V}$

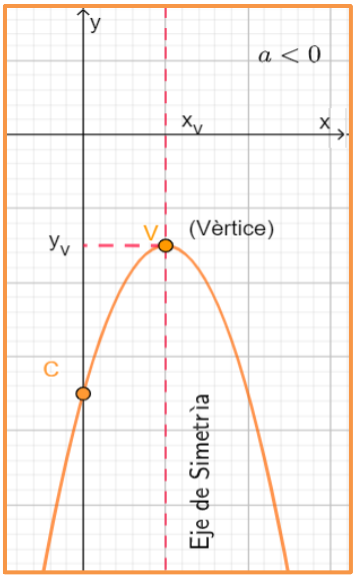




En este caso el eje x es tangente a la parábola.

iii) $\boxed{\Delta < 0}$: Las raíces de la ecuación de segundo grado $f(x) = 0$ son complejas en cuyo caso la función no tiene ceros reales y la parábola no tiene intersecciones con el eje x.





Factorización de la función cuadrática: Las posibilidades que se presentan son las siguientes:

i) $y = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$, siendo x_1 y x_2 los ceros de la función.

ii) $y = a\,(x - x_1)^2$ si tiene un cero único.

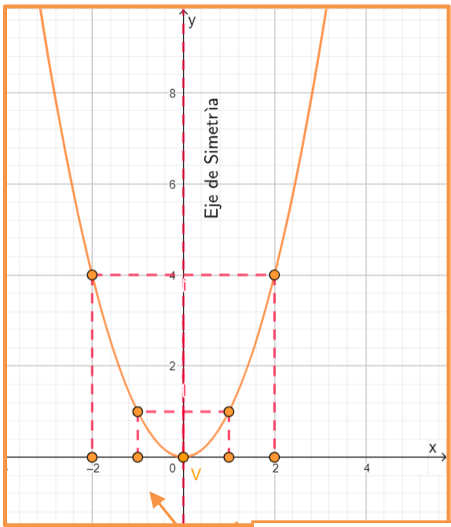
iii) Si la ecuación $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ tiene raíces complejas la función no se puede factorizar y se dice que es irreducible.

10 Ejemplo Representemos gráficamente la función cuadrática $y = x^2$.

Mediante una tabla de valores obtenemos algunos puntos de la parábola

x	$y = x^2$
0	**0**
–1	**1**
–2	**4**
1	**1**
2	**4**

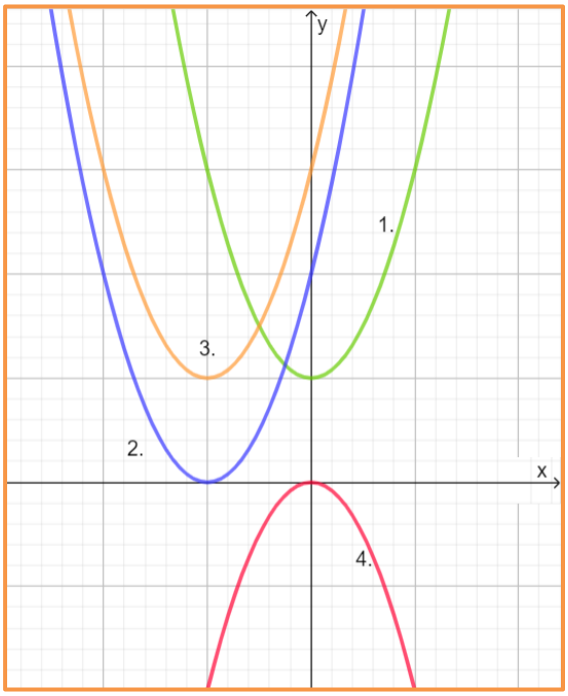
La función $y = x^2$ es par ya que $x^2 = (-x)^2$, es decir, $f(x) = f(-x)$



Observemos que $V = (0, 0)$ y el eje de simetría es $x = 0$.

11 *Ejemplo*

Estudiemos los desplazamientos de la parábola en los siguientes casos:
1. $y = x^2 + 2$ (sumamos 2 a la función $y = x^2$)
2. $y = (x+2)^2$ (sumamos 2 al argumento *x* de la función $y = x^2$)
3. $y = (x+2)^2 + 2$
4. $y = -x^2$



Observemos las gráficas. La parábola correspondiente a la función $y = x^2$ se desplaza en cada caso:

1. 2 unidades en el sentido positivo del eje y.

2. 2 unidades en el sentido negativo del eje x.

3. 2 unidades en el sentido positivo del eje y y 2 unidades en el sentido negativo del eje x.

4. En este caso se obtiene una parábola simétrica respecto del eje x de la correspondiente a $y = x^2$.

Observando los desplazamientos del vértice podemos escribir la ecuación de una parábola cuyo vértice sea $V = (x_V, y_V)$ como:

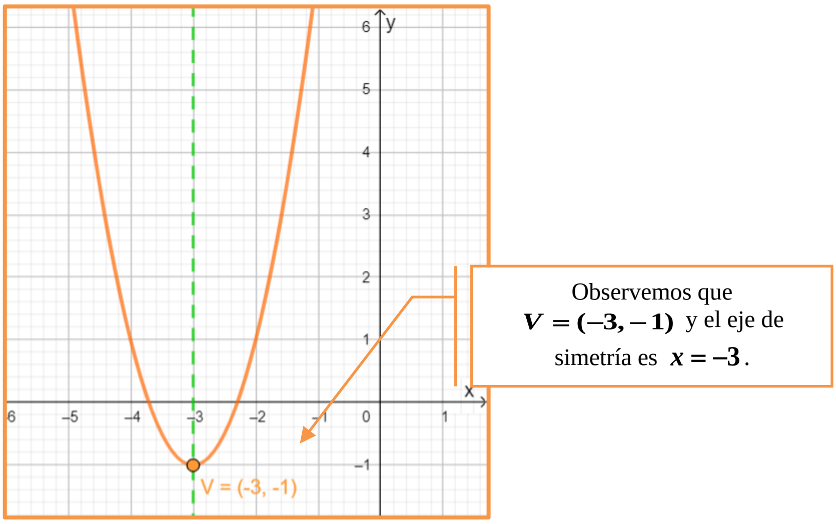
$$\boxed{y = a\,(x - x_V)^2 + y_V}$$

Dicha ecuación en la que aparecen las coordenadas del vértice se denomina ***ecuación canónica***.

Dada la ecuación canónica de una parábola es inmediato decir cuáles son las coordenadas del vértice.

12 *Ejemplo* Sea $y = 2(x+3)^2 - 1 \Rightarrow V = (-3; -1)$. Luego, como $a = 2 > 0$, la parábola es convexa y tiene un mínimo.

Si se pregunta el dominio y el recorrido o imagen podemos deducir que $Df = \mathbb{R}$ y $If = [-1, +\infty)$ ya que $y_V = y_{\min imo} = -1$



Cuando la función está escrita en forma polinómica $y = a\,x^2 + b\,x + c$ y se pide su forma canónica puede procederse de dos maneras distintas: ***hallando previamente las coordenadas del vértice,* o bien, *completando cuadrados.***

13 *Ejemplo* Escribamos la ecuación $y = 2\,x^2 - 4\,x + 1$ en forma canónica.

i) Hallando previamente las coordenadas del vértice

$$y = 2\,x^2 - 4\,x + 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_V = \dfrac{-b}{2a} = 1 \\ y_V = f(x_V) = f(1) = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 2(x-1)^2 - 1}$$

ii) Completando cuadrados

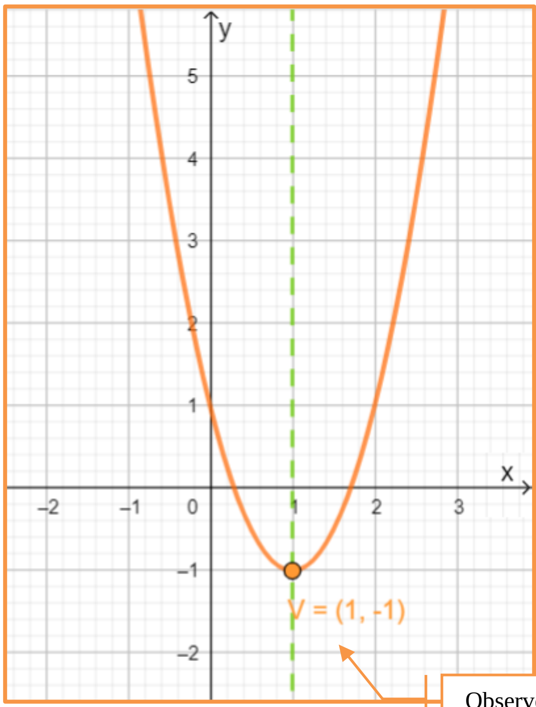
$$y = 2\,x^2 - 4\,x + 1$$

$y = 2\left(x^2 - 2\,x + \dfrac{1}{2}\right)$ Sacamos factor común ***a***. En este caso, *a* = 2.

$y = 2\left(x^2 - 2\,x + 1 - 1 + \dfrac{1}{2}\right)$ Sumamos y restamos un número para que los tres primeros términos del paréntesis sean los de un trinomio cuadrado perfecto. En este caso, el número sumado y restado es 1 (el cuadrado de la mitad del coeficiente de ***x***).

$y = 2\left[(x-1)^2 - \dfrac{1}{2}\right]$ Escribimos el trinomio cuadrado como cuadrado de un binomio.

$\boxed{y = 2(x-1)^2 - 1}$



Distribuimos $\boldsymbol{a}$.

Observemos que $V = (1;-1)$ y el eje de simetría es $x = 1$.

SISTEMAS DE ECUACIONES FORMADOS POR UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA Y UNA LINEAL

Recurrimos al siguiente ejemplo para explicarlo:

14 *Ejemplo*

Resolver analítica y gráficamente el siguiente sistema: $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = -x + 3 \end{cases}$

Analíticamente: Igualamos las funciones

$$x^2 - 4x + 3 = -x + 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = 3$$

Luego el conjunto solución es $S = \{(0;3),(3;0)\}$

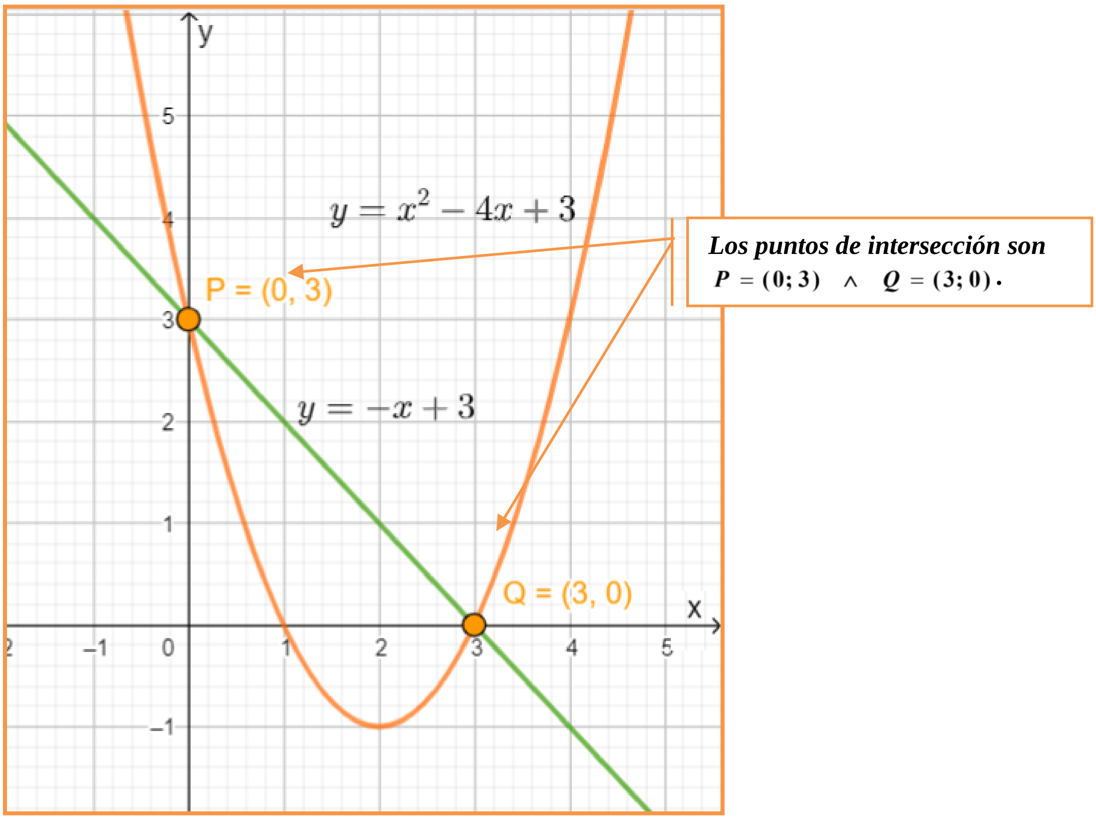
Gráficamente: Debemos representar gráficamente ambas funciones para determinar los puntos de intersección.

En este caso se trata de determinar los puntos de intersección de una recta con una parábola.

Para representar la parábola determinamos: raíces, vértice, intersección con eje y, simétrico de este respecto del eje de simetría.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad \wedge \quad x_2 = 3$$

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad y_V = -1$$



FUNCIONES POLINÓMICAS

Son de la forma:

$$y = a_n\ x^n + a_{n-1}\ x^{n-1} + \ldots + a_3\ x^3 + a_2\ x^2 + a_1\ x + a_0 \qquad \text{con} \quad a_n \neq 0\,.$$

Se dice que la función es de ***grado n*** y $n \in \mathbb{N}$.

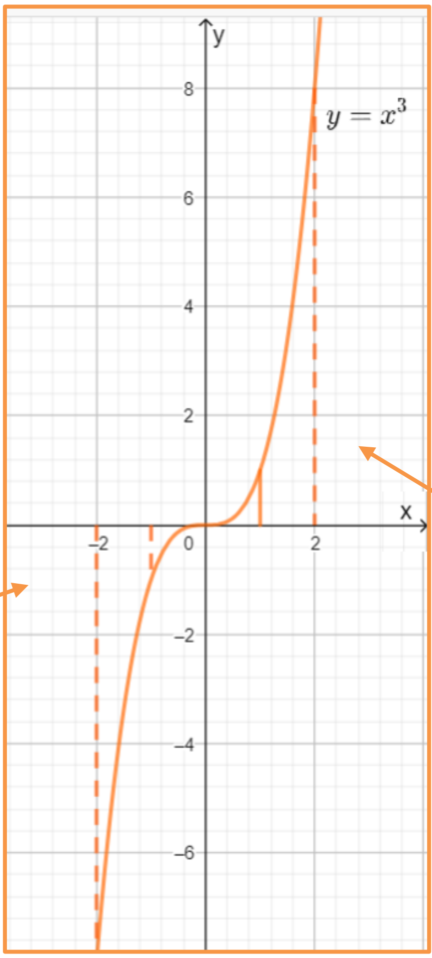
La función lineal y la cuadrática son casos particulares de ella. En efecto:

$$y = a_2\ x^2 + a_1\ x + a_0 \qquad n = 2$$

$$y = a_1\ x + a_0 \qquad n = 1$$

15 *Ejemplo*

Representemos gráficamente $y = x^3$.
Construyamos una tabla de valores para obtener algunos puntos.



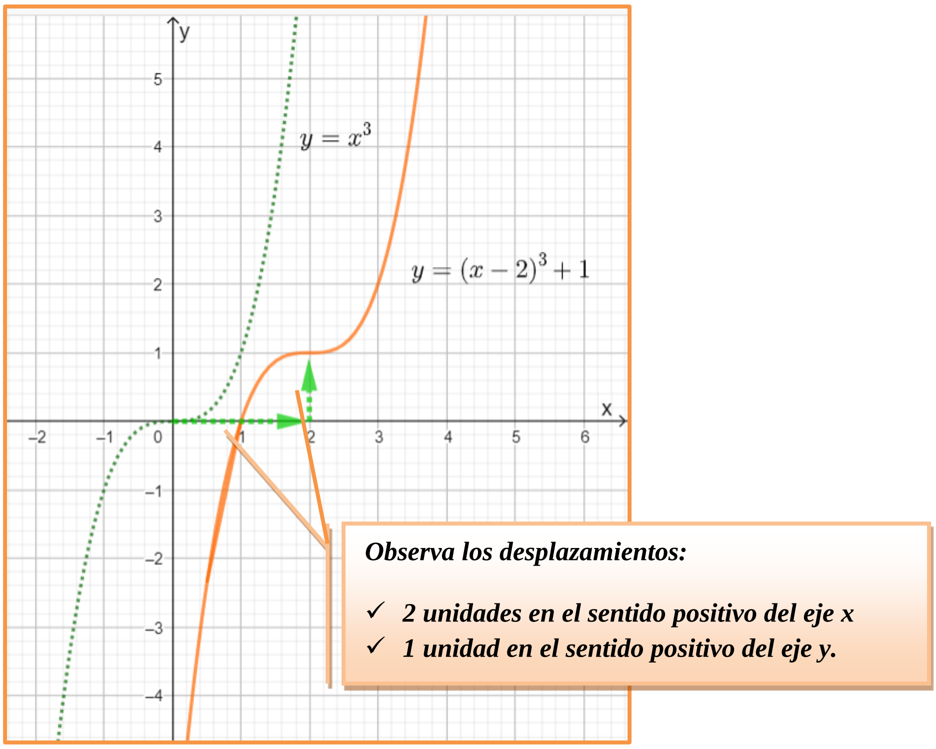
$Df = \mathbb{R}$ y $If = \mathbb{R}$.

Observando la gráfica podemos ver que se trata de una función impar, es decir: $f(x) = -f(-x)$.

16 *Ejemplo*

La gráfica de $y = (x-2)^3 + 1$ se obtiene desplazando la de $y = x^3$

x	$y = x^3$
−2	−8
−1	−1
0	0
1	1
2	8



Factorización de la función polinómica: Podemos extender lo que ya habíamos visto para función cuadrática. Dada la función:

$$y = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0 \qquad \forall\, n : a_n \in \mathbb{R}$$

Podemos escribirla como:

i) Si tiene ***n*** raíces reales simples $y = a_n\,(x - x_1)\,(x - x_2)\ldots(x - x_n)$

ii) Si tiene ***j*** raíces reales múltiples $y = a_n\,(x - x_1)^{k_1}\,(x - x_2)^{k_2}\ldots(x - x_j)^{k_j}$

Aclaremos que una raíz o cero x_j de un polinomio tiene orden de multiplicidad k_j, si el polinomio es divisible por $(x - x_j)^{k_j}$ pero no lo es por $(x - x_j)^{k_j+1}$.

OBSERVACIÓN: En la factorización de una función polinómica pueden aparecer expresiones cuadráticas irreducibles, en cuyo caso la función tiene ceros complejos conjugados.

17 *Ejemplo* Veamos algunos ejemplos de funciones polinómicas ya factorizados.

a) $y = x^2\,(x-1)$ Es una función polinómica de grado 3. Sus ceros son: $x_1 = 0$ (raíz doble) y $x_2 = 1$ (raíz simple).

b) $y = 2x\,(x-1)^2\,(x+2)^3$ Es una función polinómica de grado 6. Sus ceros son: $x_1 = 0$ (raíz simple), $x_2 = 1$ (raíz doble) y $x_3 = -2$ (raíz triple).

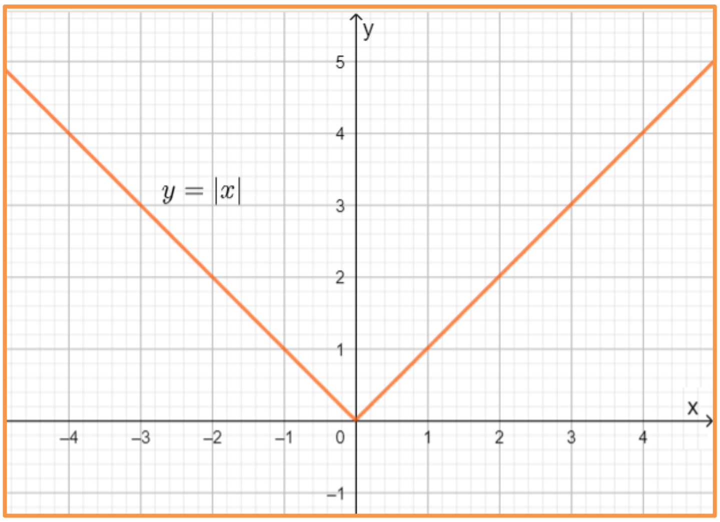
c) $y = x\,(x+1)\,(x^2+1)$ Es una función polinómica de grado 4. Tiene sólo dos ceros reales $x_1 = 0$ y $x_2 = -1$; los otros dos ceros son complejos.

FUNCIÓN MÓDULO o VALOR ABSOLUTO

Está definida por: $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

Su dominio es $Df = \mathbb{R}$ y su imagen $If = [0; +\infty)$.

Su gráfica es:



Observación: $|x| = \sqrt{x^2}$

18 Ejemplo

Desplazando convenientemente la gráfica de $y = |x|$ se pueden trazar las gráficas de funciones tales como:

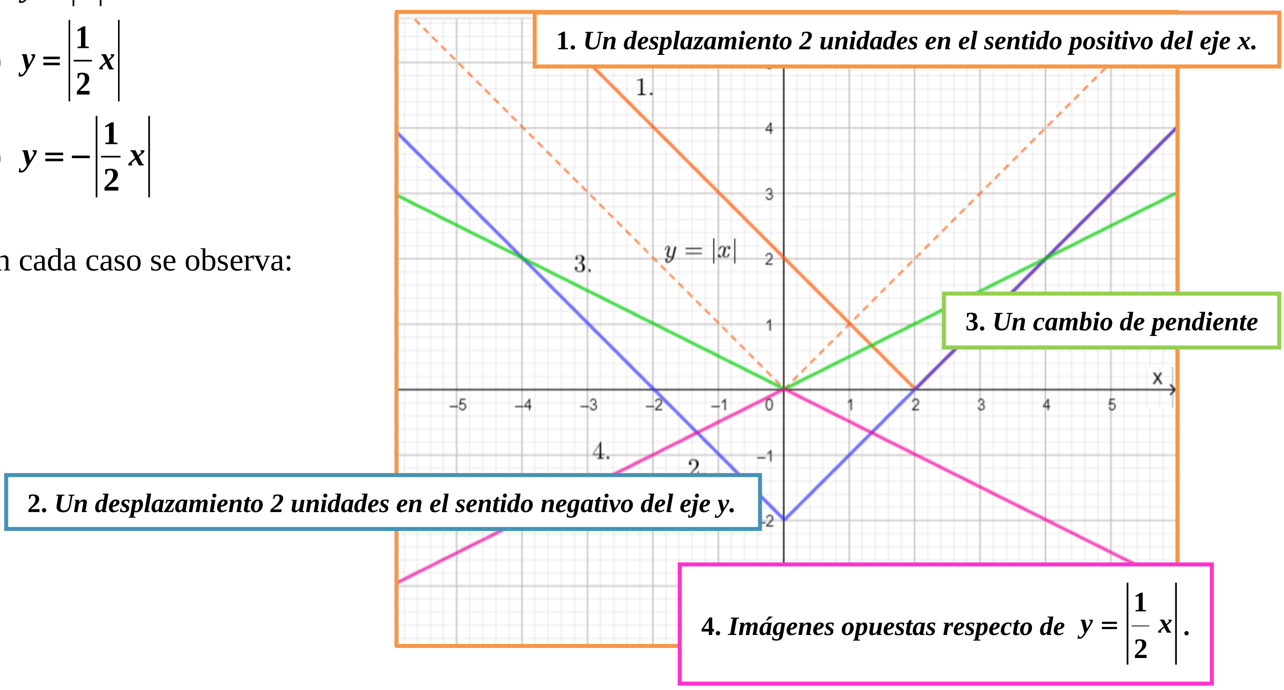
1) $y = |x - 2|$

2) $y = |x| - 2$

3) $y = \left|\frac{1}{2}x\right|$

4) $y = -\left|\frac{1}{2}x\right|$

En cada caso se observa:



PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

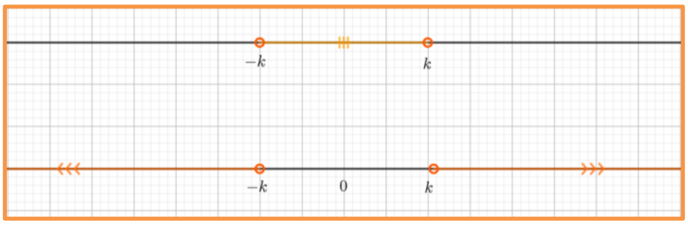
1) $\boxed{\forall x\,,\; x \neq 0 : |x| > 0}$

2) $\boxed{\forall k > 0\,, \forall x : |x| < k \Leftrightarrow -k < x < k}$

3) $\boxed{\forall k > 0\,, \forall x : |x| > k \Leftrightarrow x < -k \;\vee\; x > k}$

4) $\boxed{\forall x\; \forall y : |x\; y| = |x|\,|y|}$

5) $\boxed{\forall x, \forall y : |x + y| \leq |x| + |y|}$



19 *Ejemplo* Veamos algunos ejemplos:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \;/\; |x| = 3\}$

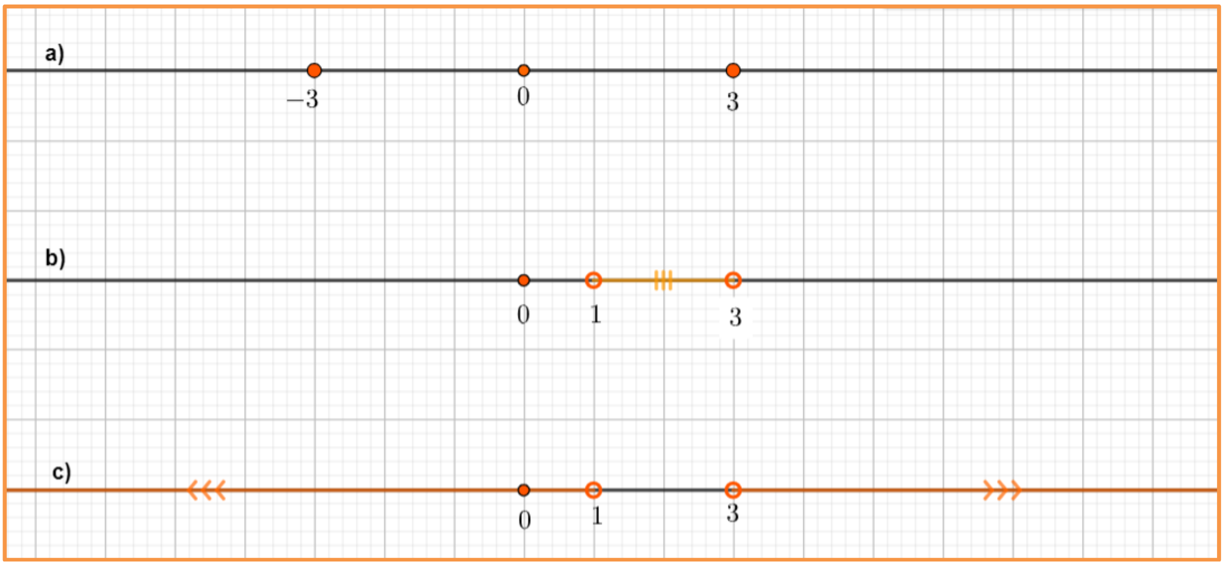
$$|x| = 3 \;\;\Rightarrow\;\; x = 3 \;\;\vee\;\; x = -3$$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \;/\; |x - 2| < 1\}$

$$|x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x - 2 < 1 \Rightarrow -1 + 2 < x < 1 + 2 \Rightarrow 1 < x < 3$$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \;/\; |x - 2| > 1\}$

$$|x-2| > 1 \Rightarrow x - 2 > 1 \vee x - 2 < -1 \Rightarrow x > 1 + 2 \vee x < -1 + 2 \Rightarrow x > 3 \vee x < 1$$



FUNCIÓN HOMOGRÁFICA

Responde a la forma $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ donde $\begin{cases} c \neq 0 \\ ad - bc \neq 0 \end{cases}$

En efecto si:

- $c = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{ax+b}{d} = \dfrac{a}{d}x + \dfrac{b}{d}$ la función es lineal.
- $ad - bc = 0 \quad \Rightarrow \quad ad = bc \quad \Rightarrow \quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$. Luego,

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{b\left(\frac{a}{b}x+1\right)}{d\left(\frac{c}{d}x+1\right)} = \frac{b}{d} \qquad \text{la función es constante.}$$

La función está definida para todo número x real excepto para aquel que anula el denominador

$$Df = \{x \in \mathbb{R} \ / \ cx + d \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq -\frac{d}{c}\right\} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$$

Su gráfica es una curva llamada ***hipérbola***.

20 *Ejemplo* Representemos gráficamente la siguiente función:

$y = \dfrac{1}{x}$ *donde* $a = 0, b = 1, c = 1$ *y* $d = 0$

Hagamos una tabla de valores para obtener algunos puntos:

x	$y = 1/x$
-2	$-1/2$
-1	-1
1	1
2	$1/2$

OBSERVACIÓN:

1) Conforme los valores de x están más próximos a $\mathbf{0}$ el valor absoluto de la función es cada vez mayor (se dice que $f(x)$ ***tiende a infinito*** cuando x se acerca a 0).

La función no está definida en $x_0 = 0$, su dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$**.** Se dice que el eje y de ecuación $x = 0$ es asíntota vertical de la curva.

2) A medida que x crece en valor absoluto los valores que toma la función se acercan cada vez más a 0. Decimos que el eje x de ecuación $y = 0$ es asíntota horizontal al gráfico de $f(x)$

Las asíntotas (los ejes coordenados en este caso) son perpendiculares (hipérbola equilátera) y se cortan en un punto que es centro de simetría de la curva.

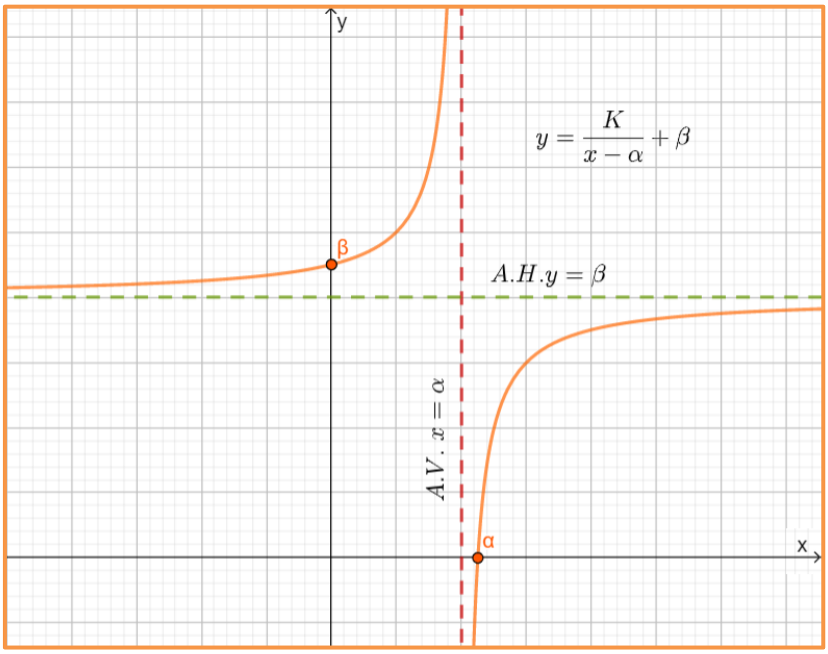
3) La hipérbola tiene dos ramas simétricas respecto del punto de intersección de las asíntotas que están situadas en el 1º y 3º cuadrante respecto de ellas.

Para la función $y = -\dfrac{1}{x}$ las ramas estarían situadas en el 2º y 4º cuadrante.

Conocida la gráfica de $\boxed{y = \dfrac{1}{x}}$ puede obtenerse mediante los correspondientes desplazamientos, la gráfica de una función que responda a:

$$\boxed{y = \frac{K}{x-\alpha} + \beta \quad con \ \ \alpha > 0 \ \ y \ \ \beta > 0}$$

A esta función le corresponde una hipérbola equilátera obtenida corriendo la hipérbola de ecuación $y = \dfrac{K}{x}$, α unidades en el sentido positivo del eje x y β unidades en el sentido positivo del eje y.



Discutir el caso de α y/o β menores que cero.

Si la función está dada en la forma $\boxed{y = \dfrac{ax+b}{cx+d}}$ puede llevarse a la forma $\boxed{y = \dfrac{K}{x-\alpha} + \beta}$ dividiendo los polinomios $(ax + b)$ y $(cx + d)$.

Sea la función $y = \dfrac{x+1}{x-2}$. Dividiendo ambos polinomios obtenemos:

$$\begin{array}{r|l} x+1 & x-2 \\ \cline{2-2} -x+2 & 1 \\ \hline 3 & \end{array}$$

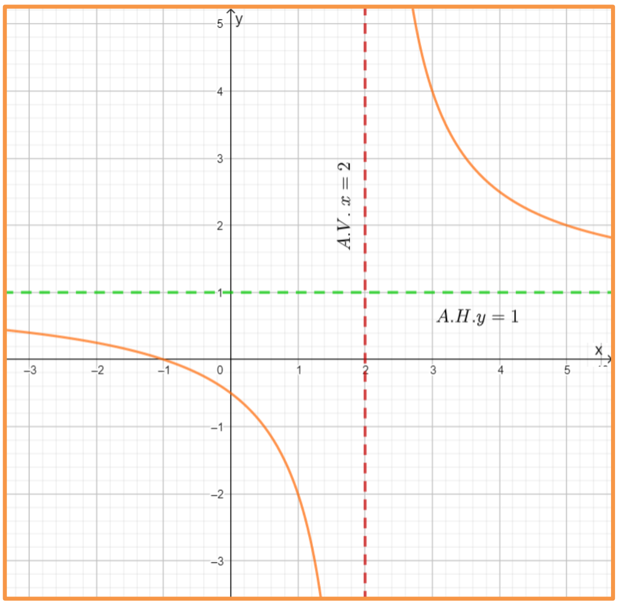
Por lo tanto, queda: $y = \dfrac{x+1}{x-2} = 1 + \dfrac{3}{x-2}$ donde $K = 3 > 0$, $\alpha = 2$ y $\beta = 1$.

Las ecuaciones de las asíntotas son:

$A.V.:$ $\boxed{x = 2}$

$A.H.:$ $\boxed{y = 1}$

El dominio de la función es $\boxed{Df = \mathbb{R} - \{2\}}$ y el recorrido o imagen es $\boxed{If = \mathbb{R} - \{1\}}$.



OBSERVACIÓN: El signo de K determina en cuáles cuadrantes respecto de las asíntotas están incluidas las ramas de la hipérbola:

1) $K > 0 \quad \Rightarrow \quad (y-\beta)(x-\alpha) = K > 0 \quad \Rightarrow$ 1º y 3º cuadrantes respecto de $A.V.$ y $A.H$
2) $K < 0 \quad \Rightarrow \quad (y-\beta)(x-\alpha) = K < 0 \quad \Rightarrow$ 2º y 4º cuadrantes respecto de $A.V.$ y $A.H.$

Alternativamente se pueden aplicar las siguientes fórmulas:

$$\boxed{A.V.\ :\ x = -\frac{d}{c}} \quad \wedge \quad \boxed{A.H.\ :\ y = \frac{a}{c}}$$

$$\boxed{Df = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}} \quad \wedge \quad \boxed{If = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}}$$

SISTEMAS FORMADOS POR UNA FUNCIÓN LINEAL Y UNA HOMOGRÁFICA

Vamos a ilustrarlo con el siguiente ejemplo.

22 Ejemplo Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} y = \dfrac{x+6}{x-2} \\ y = x+1 \end{cases}$

***Analíticamente*:** Igualamos ambas funciones

$$\frac{x+6}{x-2} = x+1 \Rightarrow x+6 = (x+1)(x-2) \Rightarrow x+6 = x^2-2x+x-2 \Rightarrow x^2-2x-8=0$$

Resolvemos ahora la ecuación de segundo grado:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \Rightarrow x_1 = -2 \wedge x_2 = 4$$

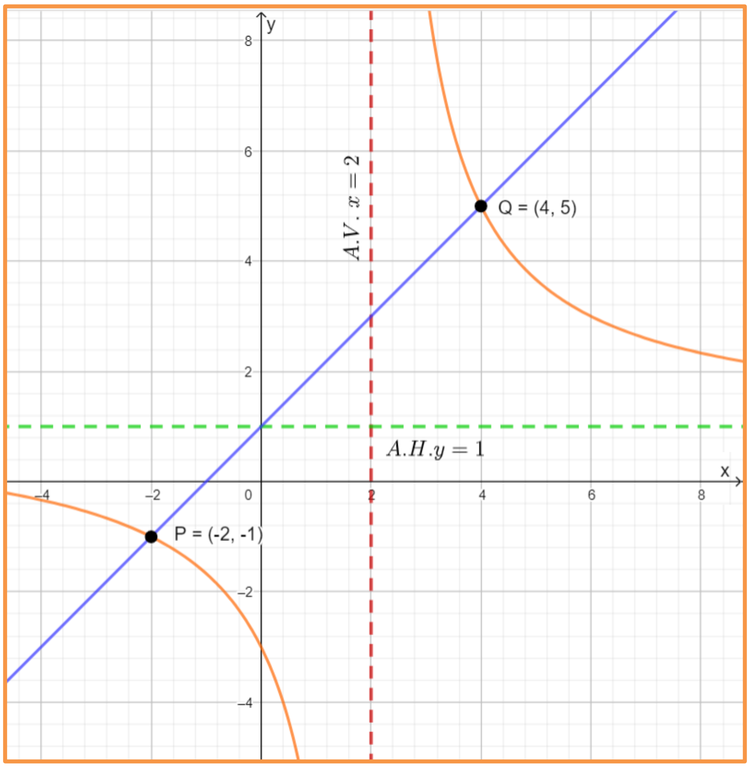
Buscamos los valores de las ordenadas: $y_1 = -1 \wedge y_2 = 5$

Por lo tanto, el conjunto solución es $S = \{(-2\,;-1),(4;\,5)\}$

***Gráficamente*:** Hay que graficar la función lineal y la homográfica.

Para trazar la hipérbola determinamos previamente: $\boxed{A.V.: x = 2} \quad \wedge \quad \boxed{A.H.: y = 1}$

Los puntos de intersección son $\boxed{P = (-2;-1) \wedge Q = (4;5)}$

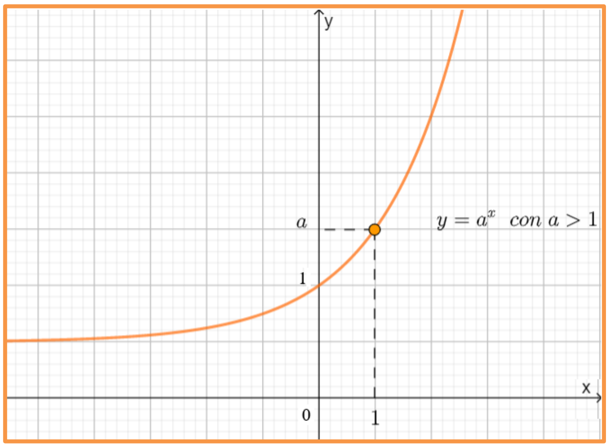


FUNCIÓN EXPONENCIAL

Es de la forma $y = a^x$ con $a > 0 \quad \wedge \quad a \neq 1$.

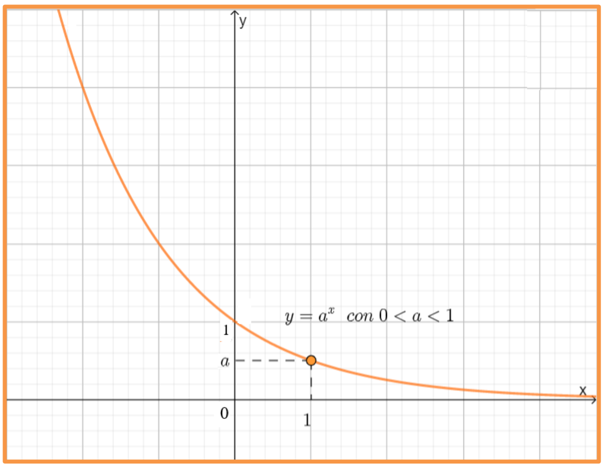
Su gráfica tiene las siguientes características:

1) $a > 1$



i) Creciente
ii) Asintótica al semieje negativo de abscisas
iii) No tiene ceros
iv) $f(0) = 1 \quad \wedge \quad f(1) = a$

2) $0 < a < 1$



i) Decreciente
ii) Asintótica al semieje positivo de abscisas
iii) No tiene ceros
iv) $f(0) = 1 \quad \wedge \quad f(1) = a$

En ambos casos: $\boxed{Df = \mathbb{R} \quad \wedge \quad If = (0, +\infty)}$

A partir de las curvas anteriores y desplazamientos correspondientes pueden obtenerse las curvas de funciones de la forma: $\boxed{y = a^{x-\alpha} + \beta}$

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Recordemos primeramente la definición de logaritmo

$$\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b$$

El logaritmo en base ***a*** $(a > 0, a \neq 1)$ de un número ***b*** ($b > 0$) es el número ***c*** al que hay que elevar la base ***a*** para obtener el número ***b***.

Si $a = 10 \Rightarrow y = \log x$ (*logaritmo decimal*)
Si $a = e \Rightarrow y = \ln x$ (*logaritmo natural*)

23 *Ejemplo* Veamos algunos ejemplos:

$i)\ log_3 81 = 4 \quad ya\ que\ 3^4 = 81$

$ii)\ log_{10} 0,001 = -3 \quad ya\ que\ 10^{-3} = 0,001$

$iii)\ log_5 \dfrac{1}{25} = -2 \quad ya\ que\ 5^{-2} \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 = \dfrac{1}{25}$

$iv)\ log_5 1 = 0 \quad ya\ que\ 5^0 = 1$

$v)\ log_{10} 0 \quad no\ está\ definido$

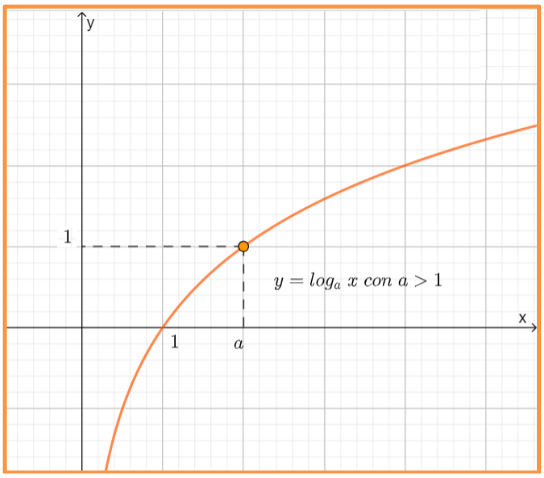
$vi)\ log_a a = 1 \quad ya\ que\ a^1 = a$

La función logarítmica responde a: $\boxed{y = \log_a x \;\; con \;\; a > 0 \quad \wedge \quad a \neq 1}$

Su dominio e imagen son: $\boxed{Df = (0, \; +\infty) \quad \wedge \quad If = \mathbb{R}}$

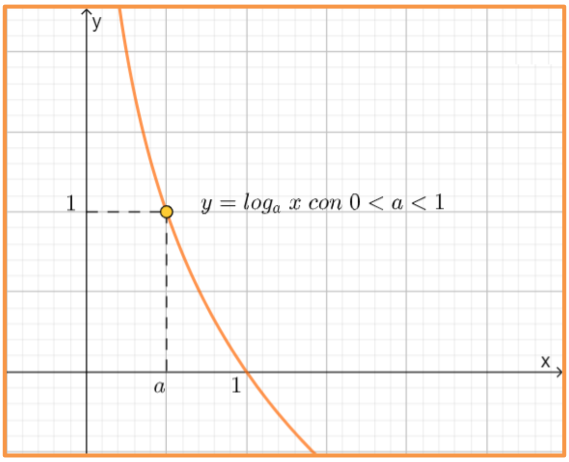
Su gráfica tiene las siguientes características:

1) $a > 1$



i) Función creciente
ii) Asintótica al semieje negativo de ordenadas
iii) $f(1) = 0 \quad \wedge \quad f(a) = 1$

2) $0 < a < 1$



i) Función decreciente
ii) Asintótica al semieje positivo de ordenadas
iii) $f(1) = 0 \quad \wedge \quad f(a) = 1$

Efectuando desplazamientos de la curva de $\boxed{y = log_a x}$ pueden obtenerse las gráficas de funciones de la forma $\boxed{y = log_a(x - \alpha) + \beta}$

Propiedades de los logaritmos

1) $\boxed{\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c}$

2) $\boxed{\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c}$

3) $\boxed{\log_a b^n = n \log_a b}$

4) $\boxed{a^{\log_a b} = b}$

24 Ejemplo Hallar los valores de x que satisfacen las siguientes ecuaciones:

a) $log_4 (x-3)^2 - log_4 (x-3) = log_4 5$

Utilizando las propiedades antes enunciadas

$$2\, log_4 (x-3) - log_4 (x-3) = log_4 5$$

$$log_4 (x-3) = log_4 5$$

$$x - 3 = 5 \Rightarrow \boxed{x = 8}$$

b) $log_3 (x^2 - 3x - 1) = 1$

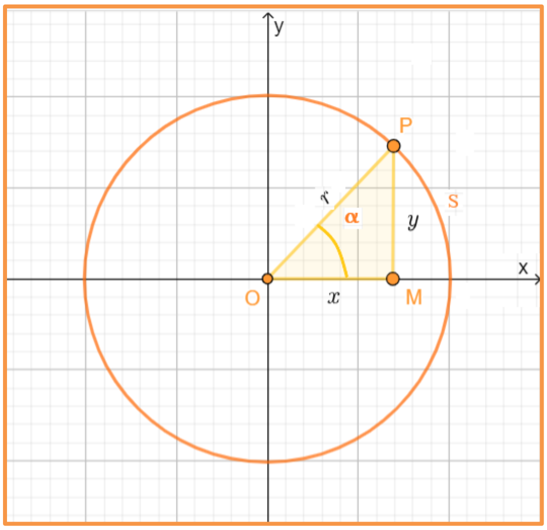
Utilizando la definición de logaritmo:

$$x^2 - 3x - 1 = 3^1 \Rightarrow x^2 - 3x - 1 = 3 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow \boxed{x_1 = 4 \quad \wedge \quad x_2 = -1}$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Consideremos una circunferencia con centro en el origen de coordenadas de radio ***r***.
Sea ***S*** la longitud del arco de circunferencia que abarca un ángulo de amplitud α.



$\boxed{long\ \overline{OP} = r}$

Luego, llamamos x a:

$$\boxed{x = \frac{S}{r}}$$

Éste es un número real que indica cuántas veces está contenido el radio r en el arco S abarcado por el ángulo α. En otras palabras, x es la medida del arco tomando como unidad al radio.
El ***sistema circular*** para la medición de ángulos toma como unidad a un ángulo que abarca un arco de igual longitud que el radio, es decir, $S = r$. A este ángulo se lo denomina ***radián***.
Así, un ángulo de x radianes abarca un arco de longitud $\boxed{S = x \cdot r}$.
Para establecer la equivalencia entre la medida de la amplitud de un ángulo en ***grados sexagesimales*** **y** ***radianes*** tengamos en cuenta que un ángulo de 360° abarca un arco cuya longitud es la de la circunferencia.
Luego:

$$\boxed{\alpha = \frac{long.\,circunf.}{r} = \frac{2\,\pi\, r}{r} = 2\,\pi\ radianes}$$

Grados sexagesimales	***Radianes***	***Grados sexagesimales***	***Radianes***
360°	2π	60°	$\frac{\pi}{3}$
180°	π	45°	$\frac{\pi}{4}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	30°	$\frac{\pi}{6}$

Las ***funciones trigonométricas*** **o** ***circulares*** son aquellas que le asignan a cada número real x las razones trigonométricas del ángulo de x radianes, las cuales son, observando el gráfico del principio del capítulo:

$$\boxed{\text{sen}\ x = \frac{ordenada\ de\ P}{r}}$$

$$\boxed{\cos x = \frac{abscisa\ de\ P}{r}} \quad \boxed{\text{tg}\ x = \frac{ordenada\ de\ P}{abscisa\ de\ P}}$$

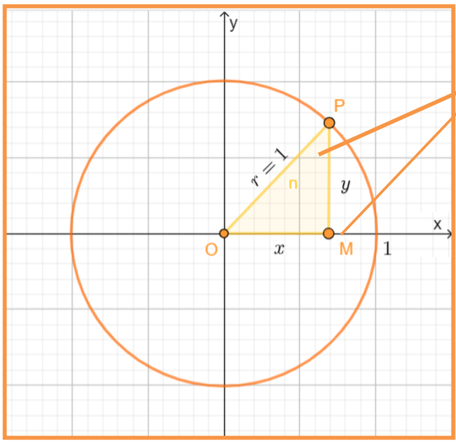
donde P es el extremo del arco con origen en $(r, 0)$ correspondiente al ángulo de x radianes.

OBSERVACIÓN:

> A partir de ahora la circunferencia trigonométrica será considerada de radio 1.

RELACIÓN FUNDAMENTAL DE LA TRIGONOMETRÍA

Consideremos el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{PMO}$.



$\overline{OM} \wedge \overline{PM}$ *catetos*
$\overline{OP}$ *hipotenusa*

Aplicando el Teorema de Pitágoras $x^2 + y^2 = 1$. Resulta: $\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$

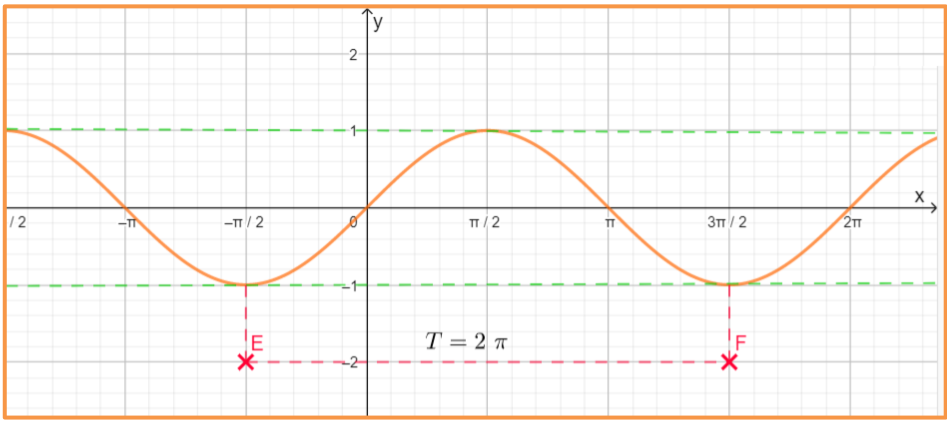
FUNCIÓN PERIÓDICA

Una función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es ***periódica***, y su período se indica con T, si se cumple $f(x+T) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

Veamos, ahora, la gráfica de algunas funciones trigonométricas.

FUNCIÓN SENO

Responde a $\boxed{y = \operatorname{sen} x}$



$Df = \mathbb{R}$
$If = [-1,\ 1]$
$T = 2\pi$

Si una función que responde a:

$$\boxed{y = a\ \operatorname{sen}(bx)}$$

a: amplitud, da el máximo y el mínimo valor que alcanza la función

$$\boxed{y_{\max} = |a| \quad \wedge \quad y_{\min} = -|a|}$$

b: factor que modifica el *período* ***T.***

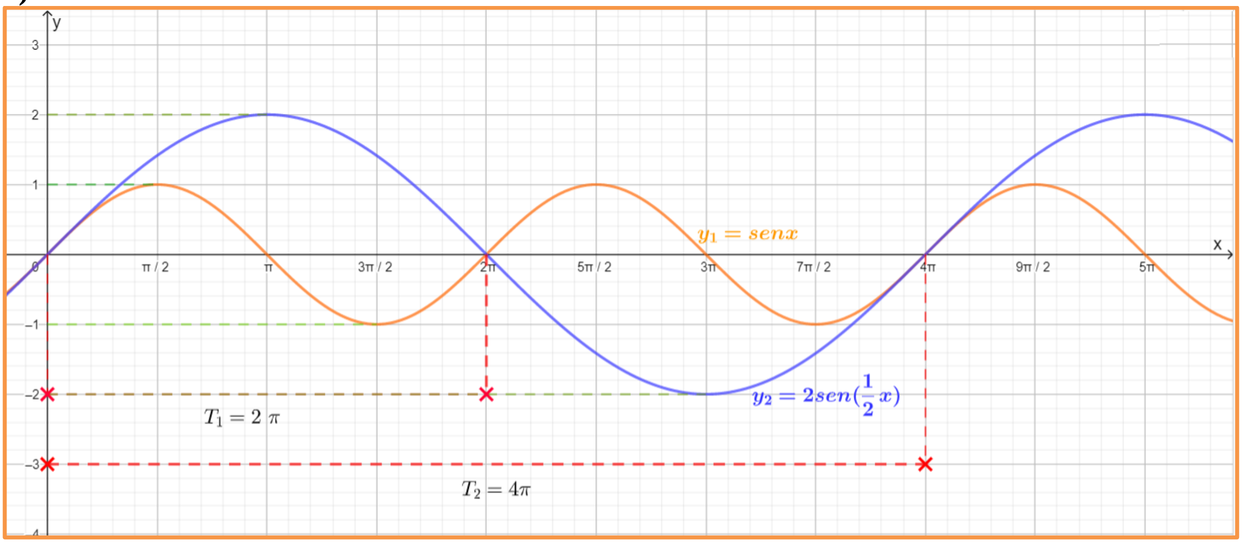
$$\boxed{T = \frac{2\pi}{b}}$$

25 *Ejemplo* Representemos en un mismo gráfico las funciones:

1) $y_1 = \operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad T_1 = 2\pi \qquad a_1 = 1$

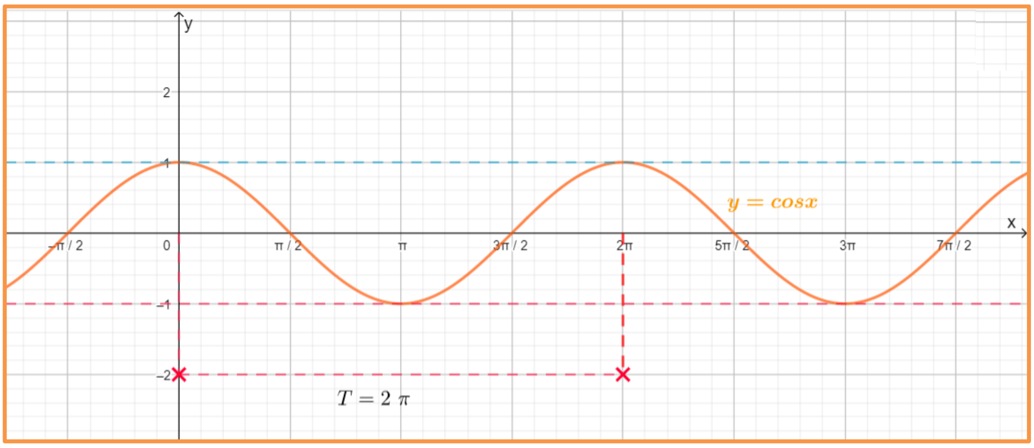
2) $y_2 = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \qquad a_2 = 2$

3)



FUNCIÓN COSENO

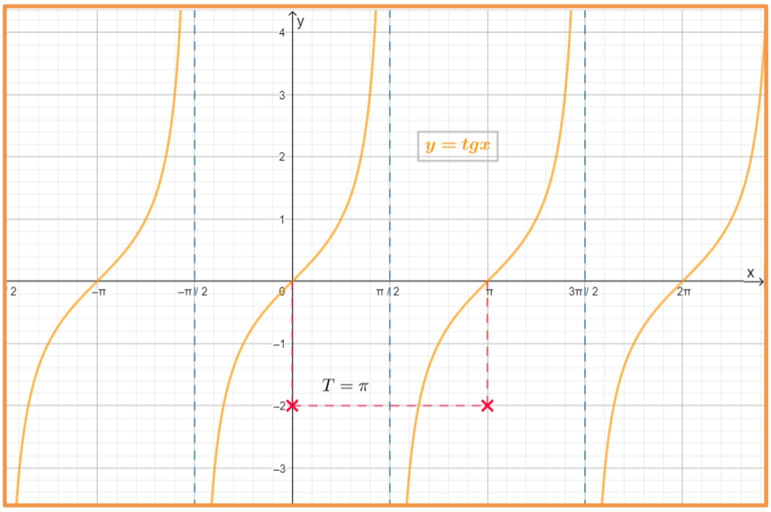
Responde a $\boxed{y = \cos x}$



$Df = \mathbb{R}$
$If = [-1,\ 1]$
$T = 2\pi$

FUNCIÓN TANGENTE

Responde a $\boxed{y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}$



$$Df = \left\{x \in \mathbb{R}/\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\ \wedge\ k \in Z\right\}$$
$$If = \mathbb{R}$$
$$T = \pi$$

FUNCIÓN COSECANTE

Responde a $\boxed{y = \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}}$

FUNCIÓN SECANTE

Responde a $\boxed{y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}}$

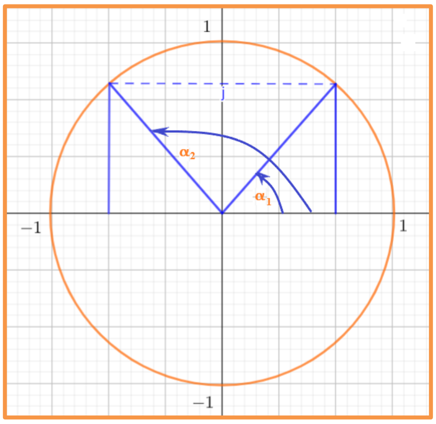
FUNCIÓN COTANGENTE

Responde a $\boxed{y = \operatorname{cotg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}$

Es conveniente tener presente la siguiente tabla sobre los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos notables del 1er cuadrante.

α (radianes)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$sen\ \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

26 Ejemplo Hallar los valores de $x \in [0, 2\pi)$ que satisfacen:



a) $\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$

Trazamos una circunferencia de $r = 1$ para guiarnos.

Observemos que el $\text{sen}\,\alpha$ está dado por la coordenada y ya que $r = 1$.

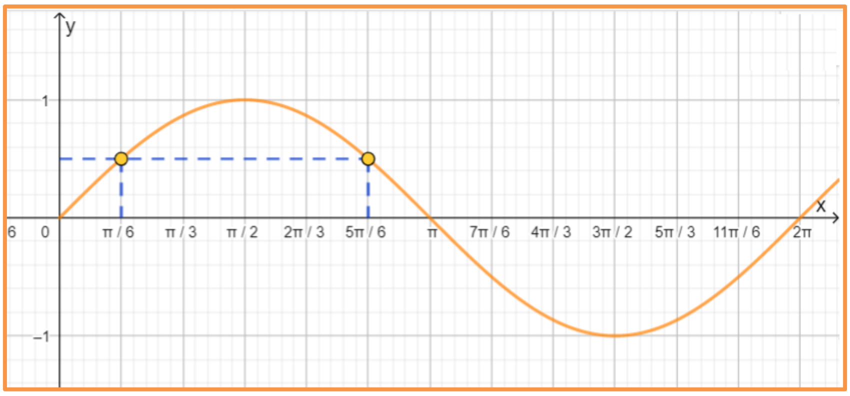
Luego, hay dos ángulos en $[0, 2\pi)$ para los que $\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$

En la gráfica de la función $y = \text{sen}\, x$ vemos que:

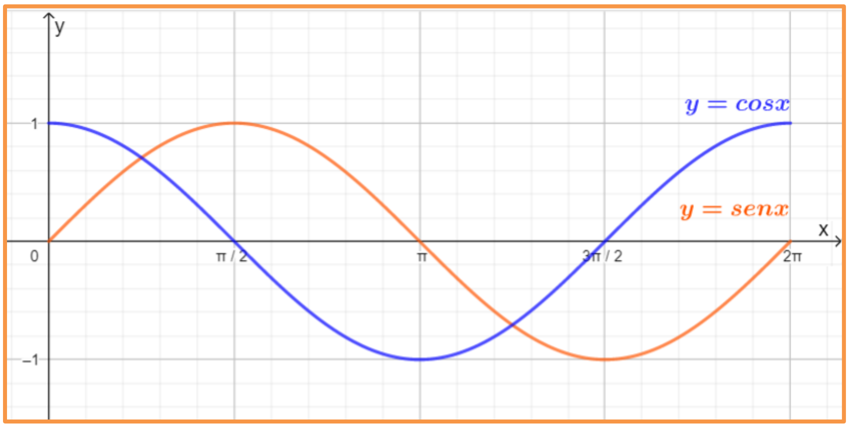
$x_1 = \frac{\pi}{6} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{5}{6}\pi$

Luego, la solución será:

$$\boxed{S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \right\}}$$



b) $\begin{cases} \text{sen}\, x = 1 \\ \cos x = -1 \end{cases}$



Observar que para ningún punto $x \in [0, 2\pi)$ se cumple simultáneamente:

$\text{sen}\, x = 1 \quad \wedge \quad \cos x = -1$

Luego, el conjunto solución es: $\boxed{S = \varnothing}$.

DOMINIO DE FUNCIONES

Determinar el ***dominio*** de una función real de variable real (función escalar) definida mediante una fórmula $y = f(x)$ cuando éste no está indicado significa hallar el subconjunto de números reales más amplio posible para el cual la expresión $f(x)$ tenga sentido y tome valores reales. Para ello deberán hacerse las siguientes consideraciones:

1) ***Denominadores:*** Cuando en la expresión $f(x)$ figuren denominadores, estos no pueden valer cero.

27 *Ejemplo* Hallar el dominio de $f(x) = \dfrac{2}{(x+1)(x-3)}$

Debemos plantear: $(x+1)(x-3) \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq -1 \;\wedge\; x \neq 3$

Por lo tanto, el dominio de la función es. $\boxed{Df = \mathbb{R} - \{-1,\ 3\}}$.

2) ***Radicales:*** Cuando figuran radicales de índice par los radicandos no pueden tomar valores negativos.

28 *Ejemplo* Hallar el dominio de $f(x) = \sqrt{(x+1)(x-3)}$

Debemos plantear $(x+1)(x-3) \geq 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 2x - 3 \geq 0$.

Completando cuadrados obtenemos:

$$x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 \geq 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow |x-1| \geq \sqrt{4} = 2 \Rightarrow$$
$$x - 1 \geq 2 \;\vee\; x - 1 \leq -2 \;\Rightarrow\; \boxed{x \geq 3 \;\vee\; x \leq -1}$$

Por lo tanto, el dominio de la función es: $\boxed{Df = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)}$.

3) ***Argumentos de logaritmos:*** Cuando figure un logaritmo su argumento no puede ser nulo ni negativo.

29 *Ejemplo* Hallar el dominio de $f(x) = \log\left[(x+1)(x-3)\right]$

Debemos plantear: $(x+1)(x-3) > 0 \;\Rightarrow\; \boxed{x > 3 \;\vee\; x < -1}$

Por lo tanto, el dominio de la función es: $\boxed{Df = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)}$.

Resolvemos a continuación algunos ejercicios sobre la determinación de dominios.

30 *Ejemplo* Hallar el dominio de las siguientes funciones:

1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$

Debemos plantear que el denominador sea distinto de cero y que el radicando sea mayor o igual a cero.

$$x^2-4>0 \;\Rightarrow\; x^2>4 \;\Rightarrow\; |x|>2 \;\Rightarrow\; \boxed{x>2 \;\vee\; x<-2}$$

Por lo tanto, el dominio de la función es: $\boxed{Df=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)}$

2) $f(x)=\dfrac{2}{\log(2x+3)}$

Debemos plantear dos condiciones:

i) $\log(2x+3)\neq 0 \;\Rightarrow\; 2x+3\neq 1 \;\Rightarrow\; \boxed{x\neq -1}$

ii) $2x+3>0 \;\Rightarrow\; \boxed{x>-\dfrac{3}{2}}$

Por lo tanto, haciendo la intersección de ambas condiciones, obtenemos:

$$\boxed{Df=\left\{x\in IR \,/\, x>-\frac{3}{2} \;\wedge\; x\neq -1\right\}=\left(-\frac{3}{2},-1\right)\cup(-1,+\infty)}$$

3) $f(x)=\begin{cases} x^3 & x>1 \\ 2x-1 & x<1 \end{cases}$

En este caso la función está definida para todo ***x*** real excepto para ***x=1***, ya que ninguna de las expresiones que definen la función es aplicable cuando ***x=1.***

Luego: $\boxed{Df=\mathbb{R}-\{1\}}$

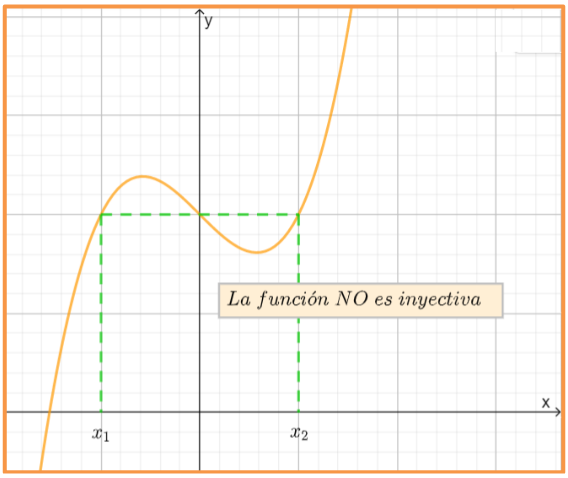
CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES

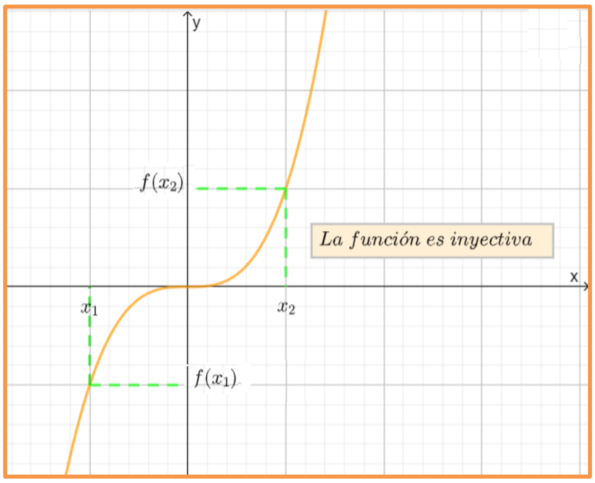
1) *Función inyectiva*: Una función $f:A\to B$ es ***inyectiva*** si y solo si a elementos distintos del dominio (A) le corresponden imágenes distintas en el codominio (B).
En símbolos:

$$\boxed{\forall x_1\in A, \forall x_2\in A \;:\; (x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2))}$$

o bien, $\boxed{f(x_1)=f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1=x_2}$

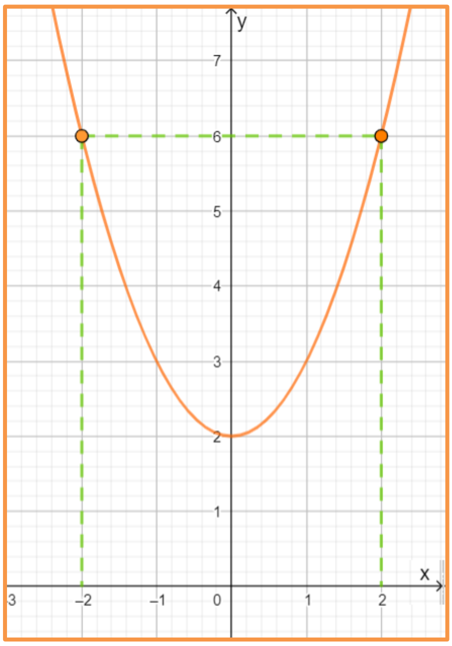
Gráficamente si una función es inyectiva cualquier recta paralela al eje ***x*** no puede intersecar al gráfico de ella en más de un punto, ya que ningún elemento del codominio puede ser imagen de más de un elemento del dominio.





31 *Ejemplo* Investigar si las siguientes funciones son inyectivas:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \ f(x) = x^2 + 2$
Para investigar analíticamente la inyectividad debemos analizar la validez de la siguiente proposición:



$$\boxed{f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}$$

En este caso, reemplazando x_2 y x_1 en $f(x)$**:**

$x_1^2 + 2 = x_2^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 = x_2^2 \quad \Rightarrow \quad |x_1| = |x_2|$

La igualdad a la que hemos llegado no quiere decir que necesariamente sea $x_1 = x_2$, ya que podrían ser números opuestos, o sea:

$$|x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \vee \quad x_1 = -x_2$$

Luego la proposición $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ***no*** es verdadera. Por lo tanto, $f(x)$ no es inyectiva.

Gráficamente se puede observar que la recta de ecuación y = 6 interseca a la parábola en los puntos $(-2;6)$ y $(2;6)$.

Luego, $f(x)$ no es inyectiva.

$$\boxed{-2 \neq 2 \quad \wedge \quad f(-2) = f(2)}$$

b) Consideremos una restricción de la función $f(x)$ del ejercicio anterior, tomando como dominio al conjunto $A = [0, +\infty)$, es decir:

$f *: 0, +\infty) \to \mathbb{R} \quad / \quad f * (x) = x^2 + 2$

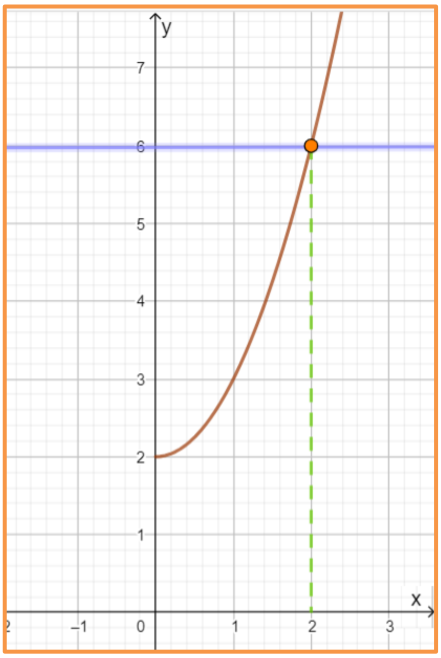
Veamos ahora si es inyectiva:

$$f^*(x_1) = f^*(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1^2 + 2 = x_2^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 = x_2^2 \quad \Rightarrow \quad |x_1| = |x_2| \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

En efecto, como $x_1 \in [0, +\infty)$ es $x_1 \geq 0$, por lo tanto, $|x_1| = x_1$. Análogamente, $|x_2| = x_2$.

La restricción $f^*(x)$ de la función es una función inyectiva.

Geométricamente: cualquier recta de ecuación $\boxed{y=k}$ (constante) interseca a la curva que es gráfica de $f^*(x)$ a lo sumo en un punto.



También hubiéramos obtenido una función inyectiva restringiendo el dominio de la función al conjunto $(-\infty, 0]$.

c) $g(x) = 2^{x+3}$ / $g: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$
Veamos si es inyectiva:

$$g(x_1)=g(x_2) \Rightarrow 2^{x_1+3}=2^{x_2+3} \Rightarrow \log_2 2^{x_1+3}=\log_2 2^{x_2+3} \Rightarrow$$
$$(x_1+3)\log_2 2=(x_2+3)\log_2 2 \Rightarrow x_1+3=x_2+3 \Rightarrow x_1=x_2$$

Luego, $g(x)$ es inyectiva.

2) ***<u>Función Sobreyectiva o Suryectiva</u>***: Una función $f: A \to B$ es ***suryectiva*** si y solo si todos los elementos del codominio **(*B*)** tienen preimagen en el dominio **(*A*).** Dicho con otras palabras, el codominio **(*B*)** y el recorrido o imagen ***If*** deben coincidir.
En símbolos:

$$\boxed{\forall y \in B\ \exists x \in A / y = f(x)}$$

32 *Ejemplo* Investigar si las siguientes funciones son suryectivas:

a) $f(x) = x^2 + 2$ $/ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Para determinar si una función es sobreyectiva debemos hallar el recorrido para ver si coincide con el codomonio.
El recorrido o conjunto imagen lo podemos obtener analíticamente despejando x y determinando para que valores reales de y se obtendrían valores de x pertenecientes al dominio ($\mathbb{R}$**).**

$$y = x^2 + 2 \Rightarrow y - 2 = x^2$$

Como $x^2 \geq 0 \Rightarrow y-2 \geq 0 \Rightarrow y \geq 2$. Luego, $\boxed{If = [2, +\infty)}$

La imagen o recorrido If no coincide con el codominio ($\mathbb{R}$) lo cual implica que no todos los elementos del codominio tienen preimagen en el dominio. Por ejemplo 1 no es imagen de ningún elemento x del dominio. Concluimos que la función dada no es sobreyectiva.

b) Si efectuamos una restricción en el codominio del ejemplo anterior:

$$f:\mathbb{R} \to 2,+\infty)/f(x) = x^2 + 2$$

obtenemos una función suryectiva ya que el codominio coincide con la imagen.

c) $g:\mathbb{R} \to (0,+\infty)/g(x) = 2^{x+3}$

Busquemos la imagen:

$$y = 2^{x+3} \quad \Rightarrow \quad \log_2 y = \log_2 2^{x+3} \quad \Rightarrow \quad \log_2 y = (x+3)\log_2 2 \quad \Rightarrow \quad x = \log_2 y - 3$$

Nótese que y sólo puede tomar valores positivos para que se obtengan valores reales de x.

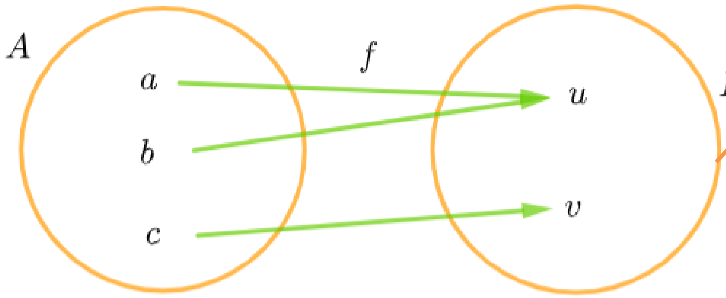
Luego, $If = (0,+\infty)$ que coincide con el codominio o conjunto de llegada.

Por lo tanto, la función g es suryectiva.

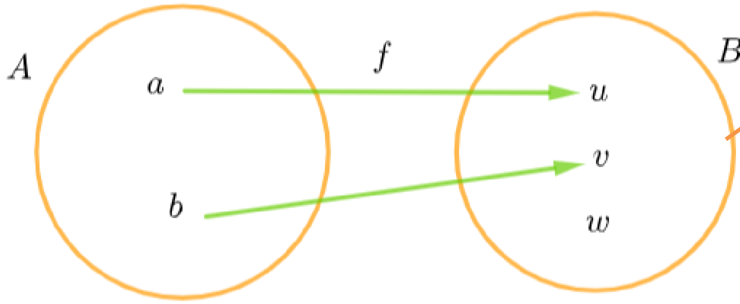
3) ***Función biyectiva***: Una función es ***biyectiva*** si y solo si es inyectiva y suryectiva.

FUNCIÓN INVERSA

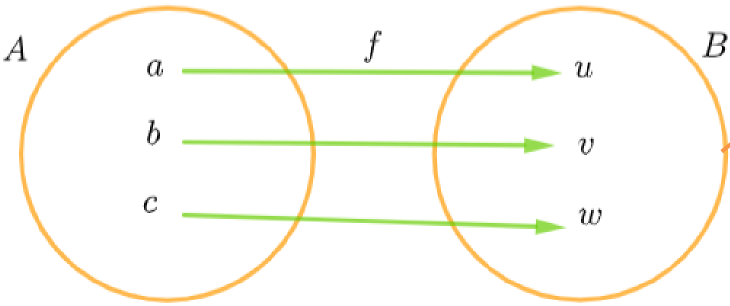
Las relaciones inversas de funciones biyectivas son también funciones biyectivas. En efecto, si f es una función cualquiera su relación inversa puede o no ser una función; solo si f es biyectiva, la relación inversa es otra función llamada ***función inversa***, que anotamos f^{-1}.



- f es suryectiva pero no inyectiva.
- f^{-1} no es función (no cumple la Condición de unicidad de la imagen).



- f es inyectiva pero no suryectiva.
- f^{-1} no es función (no cumple la Condición de existencia de imagen para todo elemento del conjunto de partida).



- f es biyectiva, por lo tanto f^{-1} es función.

$$\boxed{Df^{-1} = If \ \wedge \ If^{-1} = Df}$$

33 Ejemplo Dada la función $f: (-3, +\infty) \to \mathbb{R} / f(x) = log_{\frac{1}{3}}(x+3)$. Clasificarla y hallar, si existe, su inversa.

- Analizamos inyectividad:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \log_{1/3}(x_1+3) = \log_{1/3}(x_2+3) \Rightarrow x_1 + 3 = x_2 + 3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

- Investigamos suryectividad:

$$y = \log_{1/3}(x+3) \Rightarrow \quad x+3 = \left(\frac{1}{3}\right)^y \Rightarrow x = \left(\frac{1}{3}\right)^y - 3$$

Todo número real y tiene preimagen x en el conjunto $(-3, +\infty)$.

En símbolos:

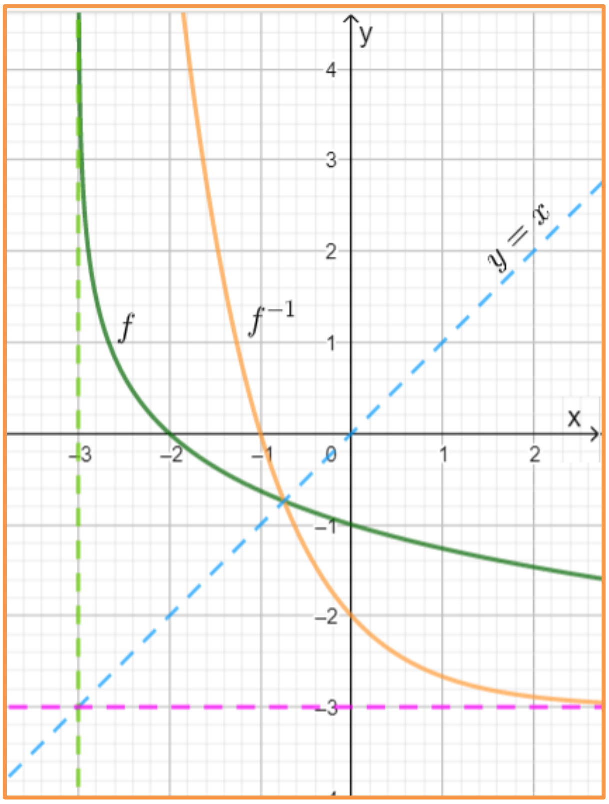
$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R} \ \ \exists x \in (-3, +\infty) \ / y = f(x)}$$

Por lo tanto, $f(x)$ es suryectiva.

- Concluimos que la función $f(x)$ es biyectiva y por lo tanto admite función inversa. Para hallar $f^{-1}(x)$ despejamos x de $y = f(x)$ y en la expresión obtenida cambiamos x por y, e y por x pues por costumbre se designa con x a la variable independiente e y a la dependiente.

$$x = \left(\frac{1}{3}\right)^y - 3 \quad \Rightarrow f^{-1}: IR \to (-3, +\infty) / \boxed{f^{-1}(x) = y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3}$$

Trazamos las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$.



OBSERVACIÓN:

Las curvas que son gráficas de una función y de su inversa son simétricas respecto de la recta de ecuación $y = x$.

34 Ejemplo Dadas las siguientes funciones clasificarlas. Redefinir, si fuera necesario, dominio y codominio para que sean biyectivas y hallar su inversa.

a) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ / $f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$

- Investigamos la inyectividad:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1+1}{x_1-2} = \frac{x_2+1}{x_2-2} \Rightarrow (x_1+1)(x_2-2) = (x_2+1)(x_1-2) \Rightarrow$$

$$x_1\, x_2 - 2x_1 + x_2 - 2 = x_1\, x_2 - 2x_2 + x_1 - 2 \Rightarrow x_2 + 2x_2 = x_1 + 2x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Por lo tanto, $f(x)$ es inyectiva.

- Investigamos la suryectividad:

$$y = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow y\,(x-2) = x+1 \Rightarrow y\,x - 2y = x+1 \Rightarrow y\,x - x = 2y+1 \Rightarrow$$

$$x\,(y-1) = 2y+1 \Rightarrow x = \frac{2y+1}{y-1}$$

Luego, $If = \mathbb{R} - \{1\}$ y, como no coincide con el codominio $\mathbb{R}$, $f(x)$ no es suryectiva.
Redefinamos el codominio para que sea biyectiva.

$$f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{1\} / f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

- Luego, $f(x)$ es biyectiva por ser inyectiva y suryectiva, por lo tanto $f^{-1}(x)$ es función. Despejamos x

$$x = \frac{2y+1}{y-1}$$

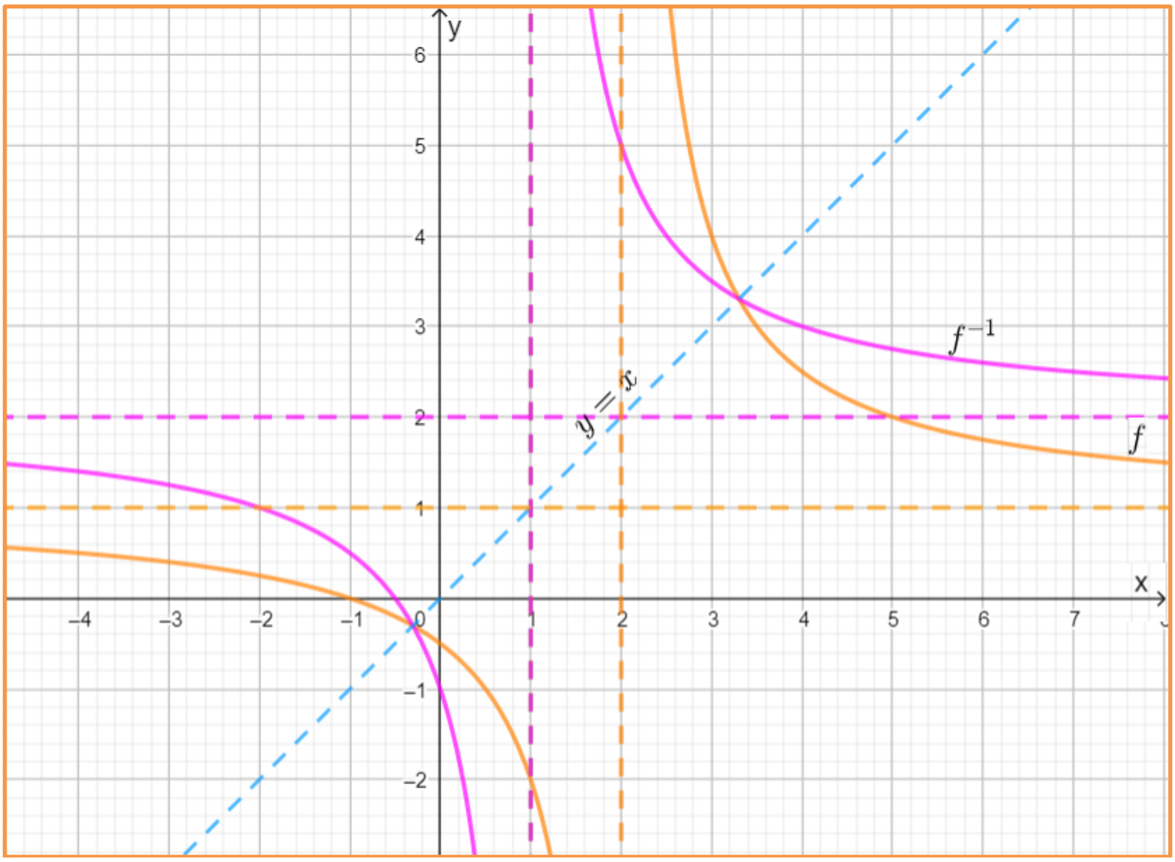
En la fórmula obtenida cambiamos las variables

$$y = \frac{2x+1}{x-1}$$

Definamos entonces la función inversa:

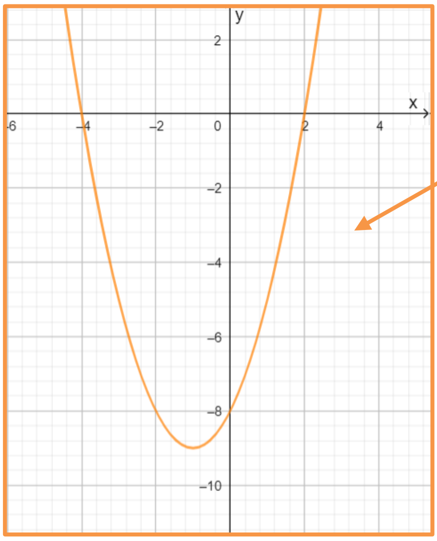
$$f^{-1}: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{2\} / f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

Las gráficas de ambas funciones son las siguientes:



b) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = x^2 + 2x - 8$

Se trata de una función cuadrática cuya gráfica es una parábola como muestra la figura siguiente:



Observando el gráfico podemos decir que la función no es inyectiva, ya que cualquier recta de ecuación $y = k$ ***con*** $k > -9$ ***interseca a la parábola en dos puntos. Tampoco es suryectiva, ya que la imagen es el conjunto*** $[-9,+\infty)$ ***y el codominio es*** $\mathbb{R}$ ***.***

Redefinimos dominio y codominio para que sea biyectiva de la siguiente manera:

$$f^*:[-1,+\infty) \to [-9,+\infty) \quad / \quad f^*(x) = x^2 + 2x - 8$$

Hallamos la inversa despejando **x**, para lo cual completamos cuadrados.

$$y = x^2 + 2x - 8 = (x^2 + 2x + 4) - 4 - 8 = (x+1)^2 - 9 \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2 = y + 9 \quad \Rightarrow \quad |x+1| = \sqrt{y+9}$$

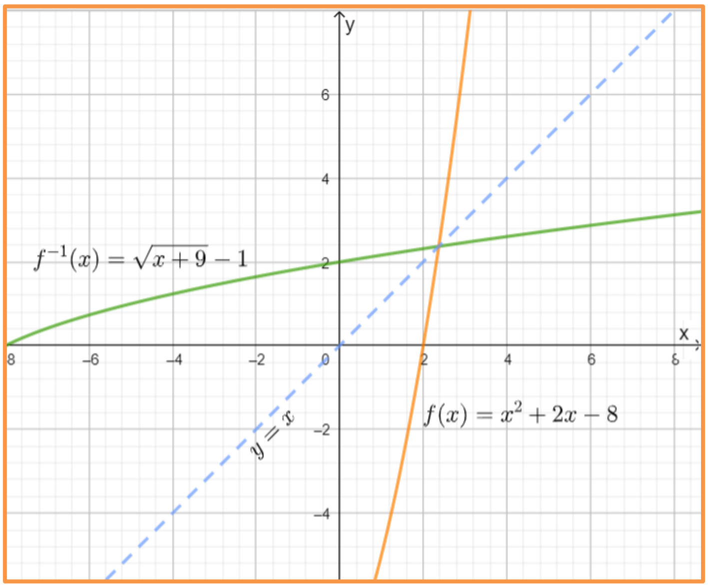
Luego, como $x \in [-1,+\infty)$, se verifica que:

$$x \geq -1 \quad \Rightarrow \quad x+1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |x+1| = x+1 \quad \therefore \quad x = \sqrt{y+9} - 1$$

Por lo tanto, la función inversa es:

$$f^{*-1} : [-9,+\infty) \rightarrow [-1,+\infty) \quad / \quad f^{*-1}(x) = \sqrt{x+9} - 1$$

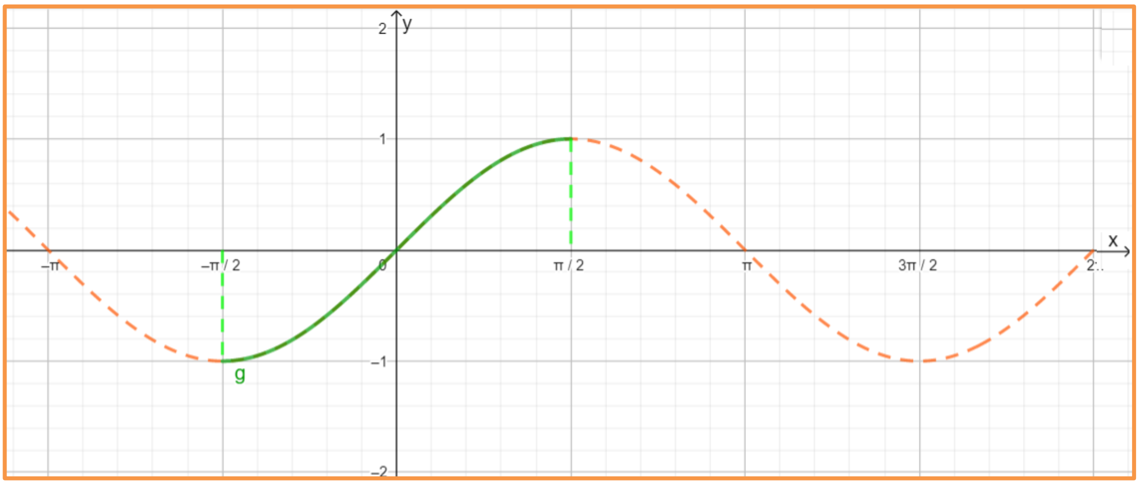
En la siguiente figura mostramos las gráficas de $f^*(x)$ y $f^{*-1}(x)$.



FUNCIONES CIRCULARES INVERSAS

1) $y = arcsen\, x$

La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = sen\, x$ no es inyectiva. En efecto, hay infinitos valores $x \in IR$ que tienen la misma imagen. Por ejemplo, consideremos $x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 = x_1 + 2k\pi \; con \; k \in Z$, entonces $\mathbf{sen}\, x_1 = \mathbf{sen}\, x_2$.



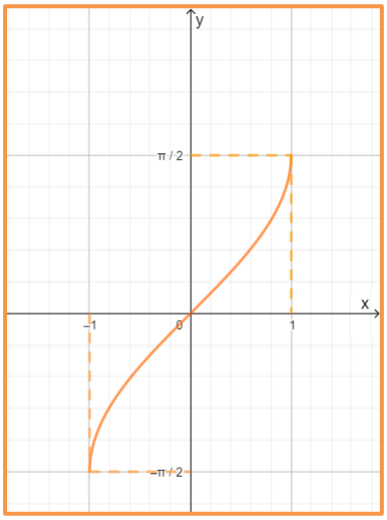
Por lo tanto, el seno no tiene función inversa, pero sí la tiene una restricción del seno al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ya que $f^*: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} / f^*(x) = sen\, x$ es inyectiva.

Si consideramos como codominio al intervalo $[-1, 1]$, la función:

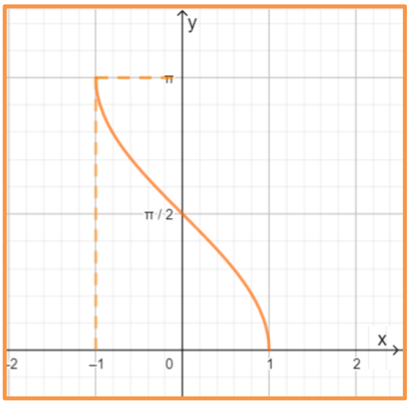
$$f^*:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\rightarrow[-1,1]\ /\ f^*(x)=\text{sen}\,x$$

es biyectiva y por lo tanto tiene inversa llamada ***arco seno***

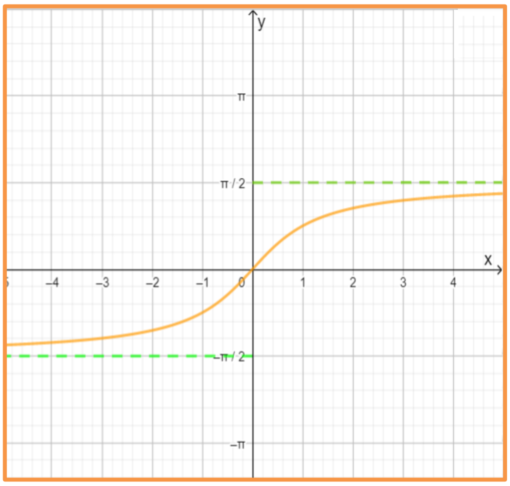
$$f^{*-1}:[-1,1]\rightarrow\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]/\ \ f^{*-1}(x)=arcsenx$$



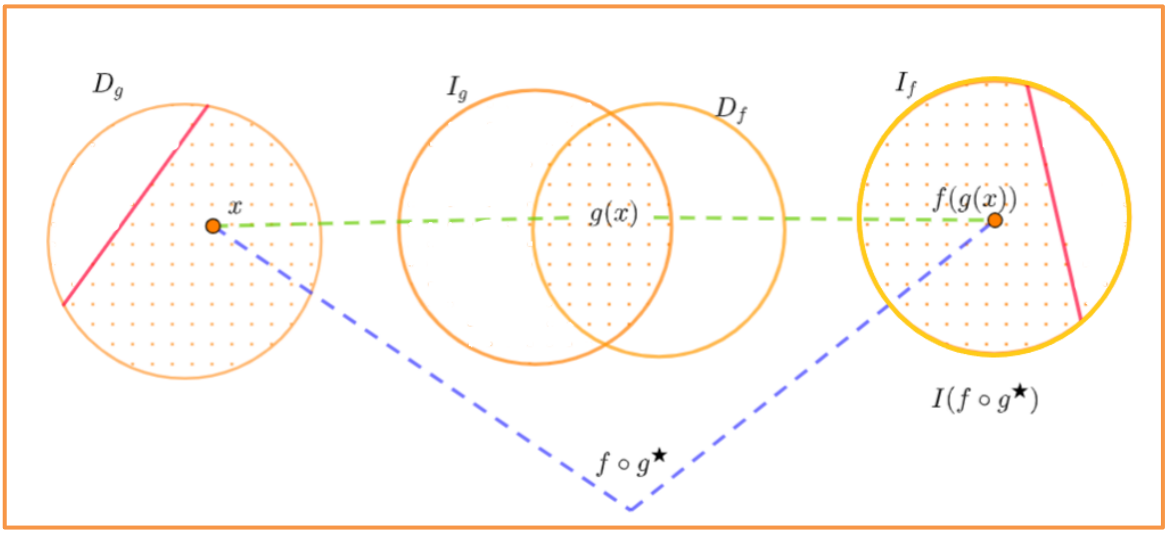
$f:[-1,\ 1]\rightarrow[0,\ \pi]/\ f(x)=arccos\,x$



3) $f:\mathbb{R}\rightarrow\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)/f(x)=arctg\,x$

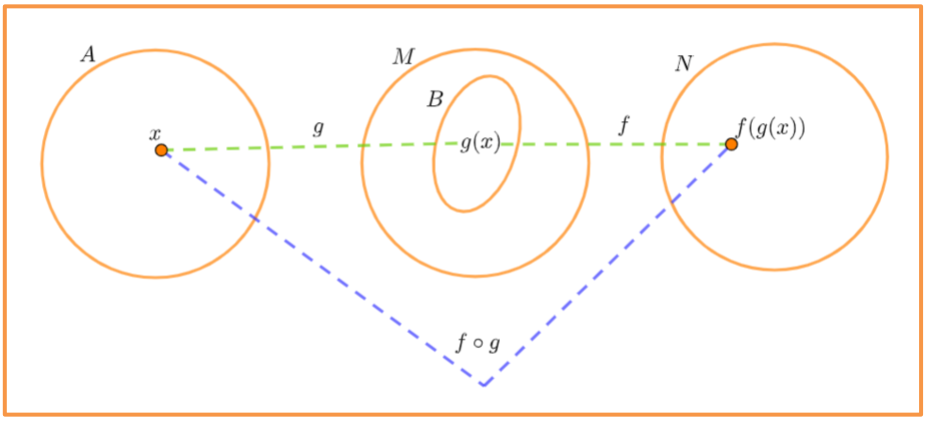


FUNCIÓN COMPUESTA



Dadas dos funciones $g: A \to B$ y $f: M \to N$ donde $B \subseteq M$ se llama ***composición de g con f*** a la función $f \circ g: A \to N$ definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Obsérvese que para que la función compuesta $f \circ g$ exista es necesario que la imagen de ***g*** esté incluida en el dominio de ***f***, o sea, $Ig \subseteq Df$ **.** Si esta condición no se cumple debemos considerar una restricción de ***g*** como se ilustra en la figura siguiente:



El asterisco indica que se ha compuesto una restricción de g con f.

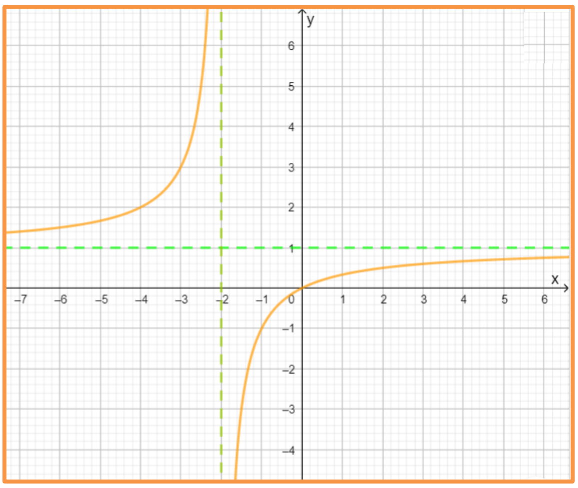
Resolvemos a continuación algunos ejemplos.

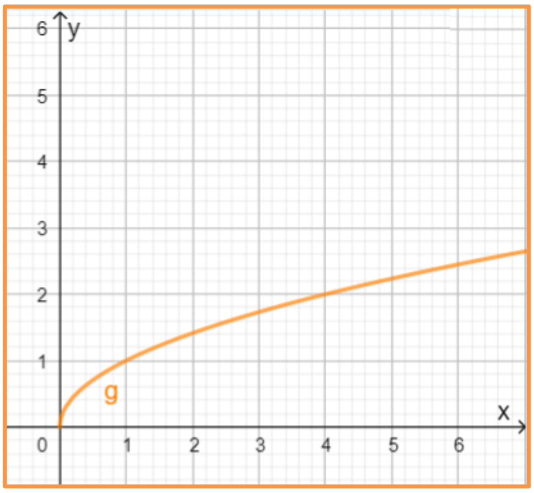
35 *Ejemplo* Hallar la composición de las siguientes funciones realizando en los casos que sea necesario restricciones para que la compuesta sea función.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x+2} \quad g(x) = \sqrt{x}$

Comenzamos determinando dominio e imagen de cada función.

$$\boxed{\begin{array}{l} Df = \mathbb{R} - \{2\} \\ If = \mathbb{R} - \{1\} \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} Dg = 0, +\infty) \\ Ig = 0, +\infty) \end{array}}$$





- Para que $f \circ g$ sea una función debe cumplirse que $Ig \subseteq Df$. Como $(\mathbf{0}, +\infty) \subset \mathbb{R} - \{-\mathbf{2}\}$, no es necesario hacer restricciones a g.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

Observemos que $D(f \circ g) = [0,+\infty)$ (coincide con el dominio de g) y $I(f \circ g) = [0,1)$.
Por lo tanto,

$$f \circ g : [0,+\infty) \to [0,1) \quad / \quad (f \circ g)(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

- Para hallar $g \circ f$ debe cumplirse que $If \subseteq Dg$. Vemos que esto no se cumple, ya que $\mathbb{R} - \{\mathbf{1}\} \not\subset \mathbf{0}, +\infty)$**.** Por lo tanto, debemos considerar una restricción de f.

Llamando f^* a dicha restricción.

$$If^* = If \cap Dg = [0,1) \cup (1,+\infty) \quad \Rightarrow \quad Df^* = (-\infty,-2) \cup [0,+\infty)$$

Observemos que $D(g \circ f^*) = Df^*$ (no coincide con el dominio de f ya que hemos considerado una restricción de f) y $I(g \circ f^*) = [0,1) \cup (1,+\infty)$.

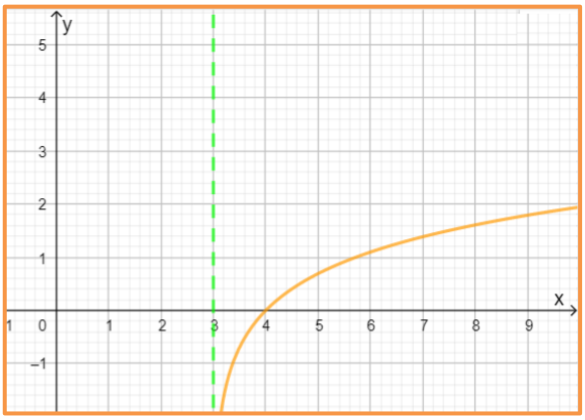
Por lo tanto,

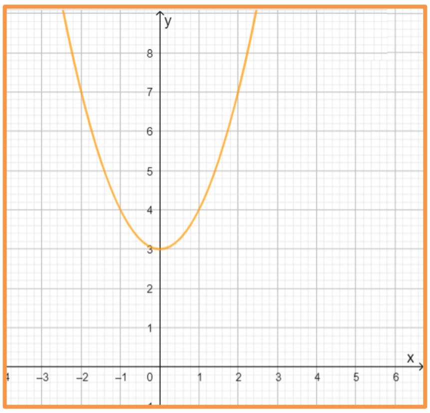
$$(g \circ f^*)(x) = g(f^*(x)) = g\left(\frac{x}{x+2}\right) = \sqrt{\frac{x}{x+2}}$$

Concluimos que

$$g \circ f^* : (-\infty,-2) \cup [0,+\infty) \to [0,1) \cup (1,+\infty) \quad / \quad \boxed{(g \circ f^*)(x) = \sqrt{\frac{x}{x+2}}}$$

b) $f(x) = ln(x-3) \quad g(x) = x^2 + 3$





$\boxed{\begin{array}{l} Df = (3,+\infty) \\ If = \mathbb{R} \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{l} Dg = \mathbb{R} \\ Ig = 3,+\infty) \end{array}}$

- Vamos a hallar $\boldsymbol{f \circ g}$. Como $\boldsymbol{Ig \not\subset Df}$, debemos considerar una restricción de $\boldsymbol{g}$ tal que:

  $Ig *= Ig \cap Df = (3,+\infty) \quad \Rightarrow \quad Dg *= \mathbb{R} - \{0\}$

  Observemos que $\boldsymbol{D(f \circ g^*) = Dg^*}$ y $I(f \circ g *) = \mathbb{R}$.

Por lo tanto,

$$(f \circ g^*)(x) = f(g^*(x)) = f\left(x^2+3\right) = \ln(x^2+3-3) = \ln x^2$$

Concluimos que:

$$f \circ g *: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} \ / \ \boxed{(f \circ g *)(x) = ln\, x^2}$$

- Vamos a hallar $\boldsymbol{g \circ f}$. Como $\boldsymbol{If \subseteq Dg}$, no es necesario considerar una restricción de ***f***.

Por lo tanto, $\boldsymbol{D(g \circ f) = Df = (3,+\infty)}$ y $\boldsymbol{I(g \circ f) = Ig = [3,+\infty)}$.

Luego: $\boldsymbol{(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\ln(x-3)\right) = \ln^2(x-3)+3}$.

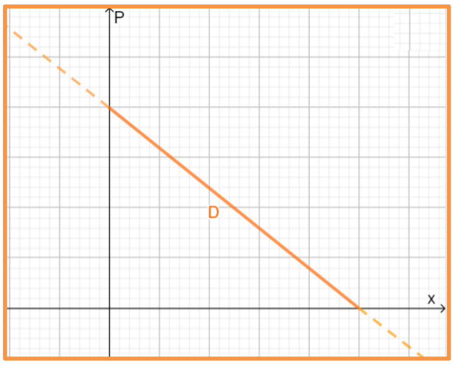
Concluimos que:

$$\boldsymbol{g \circ f : (3,+\infty) \to [3,+\infty) \ / \ \boxed{(g \circ f)(x) = \ln^2(x-3)+3}}$$

APLICACIONES ECONÓMICAS: FUNCIONES ECONÓMICAS

FUNCIÓN DE DEMANDA

Si bien la cantidad demandada de un producto depende de varias variables como precio del bien, precio de los bienes sustitutos y complementarios, el ingreso de los consumidores, los gustos, las costumbres, etc., para simplificar el análisis consideramos como variable fundamental al precio del producto resultando una función $\boldsymbol{x = D(p)}$, donde $\boldsymbol{x}$ representa la cantidad que los consumidores están dispuestos a adquirir para distintos niveles o valores del precio $\boldsymbol{p}$.



Para los llamados *bienes típicos* la cantidad demandada disminuye al aumentar el precio, es decir, las funciones de demanda son decrecientes.

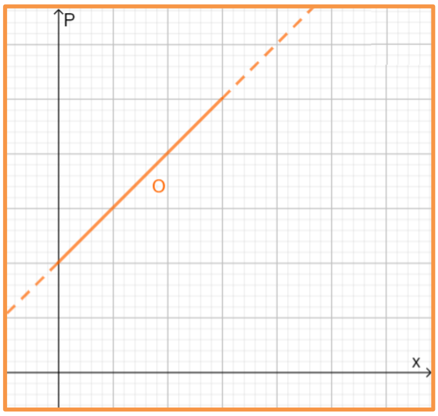
La gráfica de una función de demanda constituye la curva de demanda. Cabe aclarar que sólo tiene sentido económico la sección o tramo de la curva que queda en el primer cuadrante, ya que las cantidades de un producto y sus precios toman valores nulos o positivos. Las funciones de demanda están en algunos casos representadas por ecuaciones lineales, en otros casos dichas funciones no son lineales.

OBSERVACIÓN:

La convención de los economistas es representar $\boldsymbol{p}$ en el eje de las ordenadas y $\boldsymbol{x}$ en el de abscisas.

FUNCIÓN DE OFERTA

Haciendo la misma hipótesis simplificativa que para el análisis de la demanda, una función de oferta es $\boldsymbol{x = Of\left(p\right)}$, estableciendo las cantidades $\boldsymbol{x}$ del bien considerado que los productores ofrecen para cada valor del precio.



Comúnmente al aumentar el precio, aumenta la cantidad ofrecida y si el precio disminuye se reduce la oferta.

También hacemos aquí las consideraciones sobre la no negatividad de las variables $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{p}$. Las curvas de oferta se representan en el primer cuadrante.

OBSERVACIÓN:

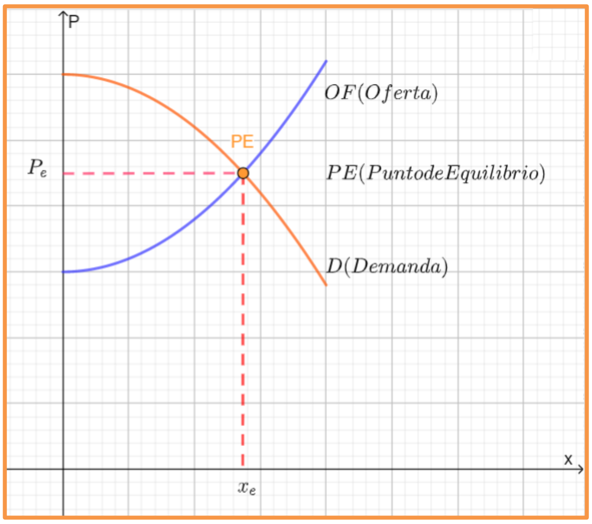
Si las funciones de demanda u oferta están expresadas en función del precio p, habrá que hallar la función inversa.

PUNTO DE EQUILIBRIO DE MERCADO

Se produce equilibrio de mercado cuando la cantidad demandada de un producto es igual a la cantidad ofrecida del mismo.

El precio y la cantidad de equilibrio corresponden a las coordenadas del punto de intersección de las curvas de la oferta y la demanda.

Para determinar analíticamente el punto de equilibrio debe resolverse el sistema de ecuaciones que representan las funciones de oferta y de demanda.



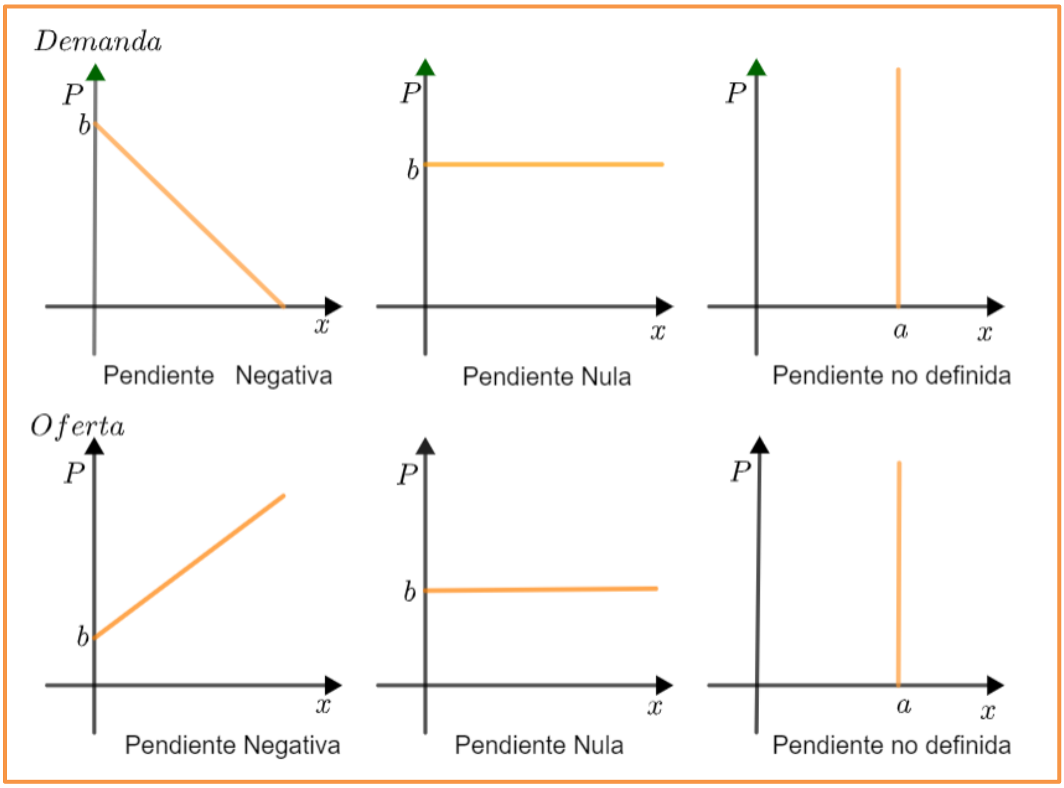
Resolvemos a continuación algunos ejemplos ilustrativos

36 *Ejemplo* ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones representan curvas de demanda, oferta o ninguna de ellas?

i) $\mathbf{3x + 4p - 12 = 0}$
ii) $\mathbf{x - 3 = 0}$
iii) $\mathbf{2p + 3x + 2 = 0}$
iv) $\mathbf{x - 3p = 0}$

En todos los casos se trata de ecuaciones lineales. Para determinar si representan funciones de oferta o demanda determinamos la pendiente. El caso más común es que la pendiente de una recta de demanda sea negativa y la de una oferta positiva, aunque pueden darse los casos siguientes:

- la pendiente de la recta de demanda es cero: precio constante cualquiera sea la cantidad demandada.
- la pendiente de la gráfica de demanda no está definida: cantidad demandada constante cualquiera sea el precio.
- la pendiente de la recta de oferta es cero: precio constante, cualquiera sea la cantidad ofrecida.
- la pendiente de la gráfica de oferta no está definida: la cantidad ofrecida es constante e independiente del precio.



i) $4p = -3x + 12 \quad \Rightarrow \quad p = -\frac{3}{4}x + 3 \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{3}{4} < 0 \quad \Rightarrow$ ***demanda***

ii) $x - 3 = 0 \quad \Rightarrow x = 3$. Como la pendiente es no definida, entonces ***oferta*** o ***demanda.***

iii) $p = -\frac{3}{2}x - 1$. Luego, no representa a ninguna, pues ningún punto de la recta pertenece al primer cuadrante.

iv) $p = \frac{1}{3}x \quad \Rightarrow \quad m = \frac{1}{3} > 0 \quad \Rightarrow$ ***oferta***.

37 *Ejemplo*

Cuando el precio de un producto es \$ 6 se venden 30 unidades; cuando el precio sea \$ 8, sólo se venderán 10 unidades.
Hallar la ecuación que corresponde a la función de demanda suponiéndola lineal. Graficar la curva de demanda.

$\boldsymbol{x_0 = 30} \qquad \boldsymbol{p_0 = 6}$

$\boldsymbol{x_1 = 10} \qquad \boldsymbol{p_1 = 8}$

Conocemos dos puntos de la recta de demanda. Aplicando la ecuación de la recta que pasa por dos puntos obtenemos:

$$p - p_0 = \frac{p_1 - p_0}{x_1 - x_0}\,(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad p - 6 = \frac{8 - 6}{10 - 30}(x - 30) \quad \Rightarrow \quad p = -0.1\,x + 9$$

38 *Ejemplo*

La ecuación de la oferta de un artículo es lineal y se sabe que cuando el precio es \$ 60 hay disponibles en el mercado 900 unidades y que la oferta disminuirá 270 unidades si el precio disminuyera \$ 15.

i) Hallar la ecuación de la oferta

ii) Cuál es el menor precio al que los productores ofrecerían este artículo?

iii) Graficar la curva

Veamos cómo resolver este problema:

$$p_0 = 60 \qquad x_0 = 900 \quad \Rightarrow \quad \Delta x = -270 \quad \wedge \quad \Delta p = -15$$

Podemos calcular la pendiente de la recta de oferta.

$$m = \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{-15}{-270} = \frac{1}{18}$$

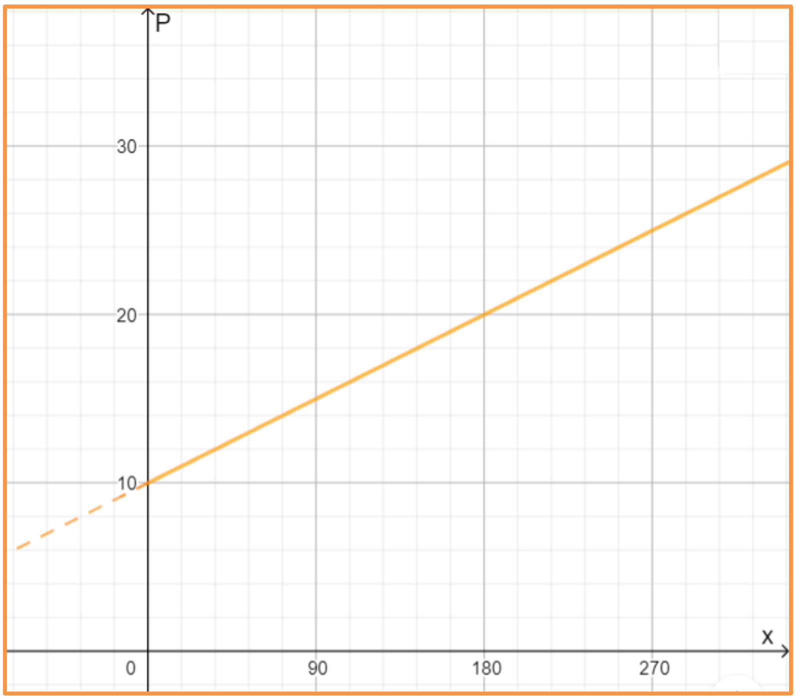
Aplicando la ecuación de la recta de pendiente m que pasa por un punto (x_0, p_0):

$$p - p_0 = m\,(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad p - 60 = \frac{1}{18}(x - 900) \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = \frac{1}{18}x + 10}$$

ii) Se nos pide hallar el precio por debajo del cual no habría oferta

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{18}0 + 10 \quad \Rightarrow \quad p = 10$$

iii)



39 *Ejemplo* Dado el siguiente sistema.

$$\begin{cases} p = 2 + 0.2\,x + 0.01\,x^2 \\ p = 7.5 - 0.25\,x \end{cases}$$

i) ¿Cuál ecuación representa una curva de demanda y cuál una de oferta?

ii) Determinar analítica y gráficamente el punto de equilibrio de mercado.

Vamos a resolver este problema:

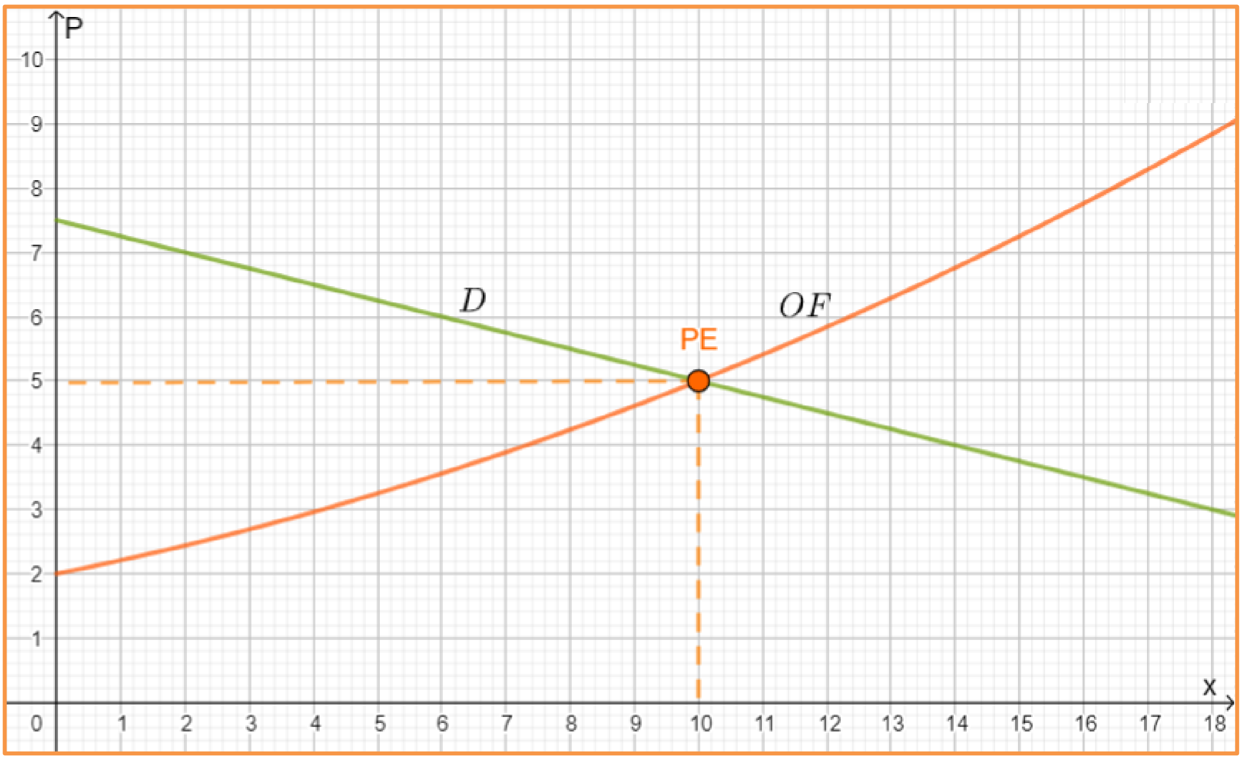
i) $p = -0.25\ x + 7.5 \quad \Rightarrow \quad m = -0.25 < 0$ (ecuación de una recta con pendiente negativa) $\Rightarrow$ Demanda.

$p = 0.01\ x^2 + 0.2\ x + 2$ (es la ecuación de una parábola de eje de simetría paralelo al eje p) $\Rightarrow$ Oferta.

ii) Para representar la parábola determinemos el vértice y los ceros.

$$x_{1,2} = \frac{-0,2 \pm \sqrt{(0,2)^2 - 4.2.0,01}}{0,02} = \frac{-0,2 \pm \sqrt{-0,04}}{0,02} \Rightarrow \text{no tiene ceros}$$

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-0,2}{2.(0,01)} = -10$$



Para hallar el punto de equilibrio igualamos la oferta y la demanda.

$$0.01\ x^2 + 0.2\ x + 2 = -0.25\ x + 7.5 \quad \Rightarrow \quad 0.01\ x^2 + 0.45\ x - 5.5 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-0.45 \pm \sqrt{(0.45)^2 + 4\ 0.01\ 5.5}}{0.02} = \frac{-0.45 \pm 0.65}{0.02} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 10 \quad \wedge \quad x_2 = -55}$$

Observemos que este último valor carece de sentido económico. Luego,

$$p = -0.25\ 10 + 7.5 = 5 \Rightarrow \boxed{P.E. = (10, 5)}$$

FUNCIÓN DE COSTO

Una función lineal de ***costo*** está dada por:

$\boxed{C(x) = a\,x + b}$ con $a > 0$ y $b > 0$, donde x es la cantidad producida y $C(x)$ es el costo total de producir x unidades de un bien.

Si no se fabrica el producto $(x = 0)$ hay un costo $C(0) = b$ llamado ***costo fijo***.

Las funciones de costo pueden estar dadas en muchos casos por ecuaciones no lineales.

Llamamos ***costo medio***, ***promedio*** o ***costo por unidad*** a la función: $\boxed{\overline{C}(x) = \dfrac{C(x)}{x}}$

FUNCIÓN DE INGRESO

Se llama ***ingreso total I*** al producto del número x de unidades demandadas por el precio unitario p.

$$\boxed{I(x) = x \cdot p}$$

Para cualquier función de demanda $p = f(x)$ es $I(x) = x \cdot f(x)$

El ***ingreso medio*** o ***ingreso por unidad*** $\boxed{\overline{I}(x) = \dfrac{I(x)}{x}}$

FUNCIÓN DE BENEFICIO O UTILIDAD

Se la define como la diferencia entre la función de ingreso y la función de costo total.

$\boxed{B(x) = I(x) - C(x)}$

El ***beneficio medio*** $\boxed{\overline{B}(x) = \dfrac{B(x)}{x}}$

Veamos algunos ejemplos de aplicación.

40 *Ejemplo* Una empresa tiene una función de costo total representada por la ecuación $C(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

¿Cuál es la ecuación de costo promedio?

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{2x^3 - 3x^2 - 12x}{x} = 2x^2 - 3x - 12$$

41 *Ejemplo* Hallar la ecuación de la función de ingreso si la demanda está dada por $p = -3x + 24$.

$$I(x) = x \cdot p = x\,(-3x + 24) = \boxed{-3x^2 + 24x}$$

INTERÉS COMPUESTO

Una suma de dinero C_0 (***capital***) colocada a la ***tasa de interés i*** (interés ganado por cada peso en un intervalo definido de tiempo llamado ***período***) capitalizada ***k*** veces por período, se transforma al cabo de ***n*** períodos en una suma C_n llamada ***monto*** (capital + interés).

La expresión que permite calcular el monto es:

$$C_n = C_0\left(1+\frac{i}{k}\right)^{k\,n}$$

Veamos algunos ejemplos

42 *Ejemplo*

Una persona tiene $5000 para depositar al 10% anual. Calcular el monto al cabo de 3 años, si los intereses se capitalizan:

i) Una sola vez por año.
ii) Cada 90 días.

Luego:

i) $k = 1 \quad \Rightarrow \quad C_n = C_0\,(1+i)^n$. Como la tasa es del 10%, entonces $i = \dfrac{10}{100} = 0.10$. Por lo tanto, $C_n = 5000\,(1+0.10)^3 = 6655$.

ii) $k = \dfrac{360}{90} = 4$ ya que la tasa de 10% anual se paga 4 veces por año.

$$C_n = C_0\left(1+\frac{i}{k}\right)^{k\,n} = 5000\left(1+\frac{0.10}{4}\right)^{4\,3} = 5000\,(1+0.025)^{12} = 6724,45$$

43 *Ejemplo*

¿Cuánto debemos depositar ahora para contar con $ 12000 dentro de 2 años si nos pagan el 6% anual de interés capitalizable por mes?

Que la capitalización sea por mes significa que la tasa del 6% anual se capitaliza 12 veces por año. En efecto:

$k = k = \dfrac{360}{30} = 12$. Como la tasa es del 6 %, entonces $i = \dfrac{6}{100} = 0.06$.

Debemos calcular C_0

$$C_0 = C_n\left(1+\frac{i}{k}\right)^{-k\,n} = 12000\left(1+\frac{0.06}{12}\right)^{-12\,2} = 12000\,(1+0.005)^{-24} = 10646.25$$

APÉNDICE UNIDAD 1

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Recordemos que un polinomio $P(x)$ puede dividirse por otro polinomio $Q(x)$ si se verifica: $gr\ P \geq\ gr\ Q$.

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array}$$

donde $P(x)$ es el dividendo; $C(x)$ el cociente; $Q(x)$ el divisor y $R(x)$ el resto

Además, $\begin{cases} gr\ Q \leq gr\ P \quad \wedge \quad (\ gr\ R < gr\ Q \quad \vee \quad R = 0) \\ C(x)\ \ Q(x) + R(x) = P(x) \end{cases}$

44 *Ejemplo*

Sean $\boldsymbol{P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 3}$ y $\boldsymbol{Q(x) = x^2 - 2x + 1}$. Para efectuar la división los polinomios deben ordenarse según potencias decrecientes de $\boldsymbol{x}$ y el dividendo debe completarse.

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 0x - 3 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} -x^4 + 2x^3 - \ x^2 \qquad\qquad & x^2 - 3 \\ \cline{1-1} -3x^2 + 0x - 3 & \\ 3x^2 - 6x + 3 & \\ \cline{1-1} -6x \quad & \end{array}$$

Observemos que $\boldsymbol{C(x) = x^2 - 3}$ y $\boldsymbol{R(x) = -6x}$.

<u>Regla de Ruffini</u>: Se utiliza para hallar los coeficientes del cociente de la división de un polinomio por otro que guarda la forma $\boldsymbol{x + a}$

45 *Ejemplo*

Hallar cociente y resto de la división $\boldsymbol{(x^3 - 7x^2 + 14x - 21) : (x - 2)}$

No hay que olvidar completar y ordenar el dividendo si fuera necesario.
La disposición práctica es la siguiente:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 14 & -21 \\ -a = 2 & \downarrow & 2 & -10 & 8 \\ \hline & 1 & -5 & 4 & -13 \end{array}$$

$\leftarrow$ coeficientes del dividendo

$\leftarrow$ resto

$\nwarrow$ coeficientes del cociente ordenado

Por lo tanto, obtenemos que $\boldsymbol{C(x) = 1x^2 - 5x + 4}$ y $\boldsymbol{R(x) = -13}$. Observemos que el grado del cociente es igual al grado del dividendo menos 1, es decir: $\boldsymbol{gr\ C(x) = 3 - 1 = 2}$

46 *Ejemplo*

Se pide probar que 1 es raíz de $P(x)=x^3-x^2+x-1$. Debemos probar que $P(1)=0$, o bien, que el polinomio dado es divisible por $(x-1)$.

Calculamos $P(1)=1^3-1^2+1-1=0$.

Para determinar el orden de multiplicidad de la raíz $x_1=1$ dividimos por $(x-1)$ en forma consecutiva hasta que el resto de la división sea distinto de cero.

Podemos aplicar la Regla de Ruffini en forma reiterada.

	1	**-1**	**1**	**-1**
1		**1**	**0**	**1**
	1	**0**	**1**	**0**
1		**1**	**1**	
	1	**1**	**2**	

Observar que el polinomio es divisible por $(x-1)$ pero no lo es por $(x-1)^2$ ya que el resto de la segunda división no es cero. Luego x_1 es una raíz simple.

Para factorizar el polinomio escribimos el productoindicado entre $(x-1)$ y el cociente de la división entre $P(x)$ y $(x-1)$: $P(x)=(x-1)(x^2+1)$

Obsérvese también que ha aparecido un factor cuadrático irreducible por lo cual el polinomio tiene un par de raíces complejas conjugadas.

TEOREMA DEL RESTO

> "El resto de la división de un polinomio $P(x)$ por otro de la forma $(x+a)$ es igual al valor del polinomio $P(x)$ especializado en $x=-a$, o sea, $P(-a)$"

En efecto:

$$\begin{array}{c|l} P(x) & x+a \\ \hline R & C(x) \end{array}$$

Como $P(x)=C(x)(x+a)+R$, si hacemos $x=-a$ resulta

$P(-a)=C(-a)(-a+a)+R=R$

47 *Ejemplo*

Utilizar el teorema del resto para determinar los valores de k, de modo que $g(x)$ sea un factor de $f(x)$.

$$f(x)=x^3+k\,x^2-k\,x-9 \text{ y } \quad g(x)=x+3$$

Para ello debe ser $f(x)$ divisible por $(x+3)$, es decir el resto de la siguiente división $f(x):(x+3)$ debe ser cero.

Podemos plantear:

$$R=f(-3)=0 \quad \Rightarrow \quad (-3)^3+k\,(-3)^2-k\,(-3)-9=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k=3}$$

48 *Ejemplo*

Hallar una función polinómica de grado **3** cuyos ceros sean $x_1 = 0,\ x_2 = 1$ y $x_3 = -2$.

Podemos plantear: $y = a\, x\,(x-1)\,(x+2)$

Como no está determinado el valor de ***a***, existen infinitas funciones polinómicas de 3er grado que cumplen con la condición dada. Obtenemos cualquiera de ellas dándole un valor cualquiera a ***a***, por ejemplo si *a* = 1: $y = x\,(x-1)\,(x+2)$, que obviamente no es única.

Si además nos hubieran pedido que: ***f*** **(2)** = **4** entonces ***a*** está determinada pues:

$$f\,(2) == a\; 2\,(2-1)\,(2+2) = 4 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{4}{2\left(2-1\right)\left(2+2\right)} = \frac{1}{2}$$

y la función pedida sería:

$$\boxed{y = \frac{1}{2}\, x\,(x-1)\,(x+2)}$$

CAPÍTULO 2

LÍMITES Y CONTINUIDAD

CAPÍTULO 2

LÍMITE Y CONTINUIDAD

LÍMITE FINITO

INTRODUCCIÓN

Sea f una función definida en todos los puntos del intervalo $(a;b)$, salvo quizá en $x_0 \in (a;b)$. Vamos a estudiar ahora cómo se comporta **$f(x)$** cuando x se acerca a x_0, independientemente de lo que valga **f** en x_0.

DEFINICIÓN

Sea f una función definida en todos los puntos del intervalo $(a;b)$, salvo quizá en $x_0 \in (a;b)$. Decimos que $f(x)$ tiene ***límite*** L cuando x se acerca a x_0

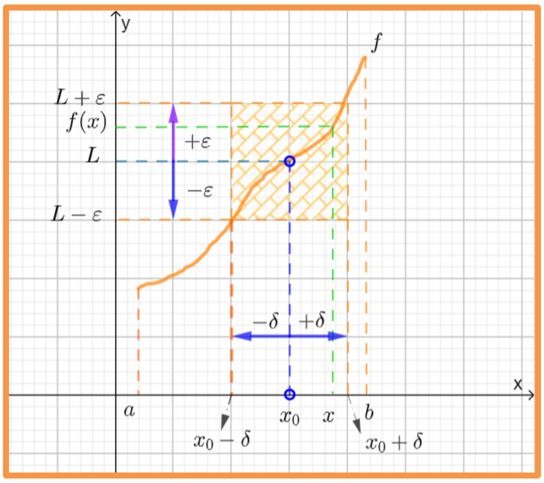
$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \big(\delta = \delta(\varepsilon)\big) / 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon}$$

01 *Ejemplo* Probemos el siguiente límite por definición: $\lim\limits_{x\to 1} 3x + 2 = 5$

Dado $\varepsilon > 0$ buscamos $\delta > 0$ tal que si $|x-1| < \delta$, entonces:

$$|(3x+2)-5| = |3x-3| = 3|x-1| < \varepsilon$$

Por lo tanto, tomando $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$ resulta que si $0 < |x-1| < \delta$, entonces



$$|f(x) - L| = |(3x+2)-5| = |3x-3| = 3|x-1| < 3\delta \leq 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

como queríamos demostrar.

Observemos que si $\varepsilon = 0.10$ entonces $\delta = 0.0\hat{3}$ y si $\varepsilon = 0.01$ entonces $\delta = 0.00\hat{3}$.

02 Ejemplo Utilizando la definición, probar el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$

Dado $\varepsilon > 0$ buscamos $\delta > 0$ tal que si $|x-2| < \delta$, entonces:

$$|x^2-4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2|\,|x+2| < \varepsilon$$

Aquí no se puede proceder como en el ejercicio anterior, ya que si despejamos nos quedaría $|x-2| < \dfrac{\varepsilon}{|x+2|}$, con lo cual δ dependería de ε y de la variable x y eso no debe ocurrir.

Luego, vamos a ***acotar***: sea $\delta' = 1$, entonces

$|x-2| < \delta' \;\Rightarrow\; |x-2| < 1 \;\Rightarrow\; -1 < x-2 < 1 \;\Rightarrow\; 1 < x < 3 \;\Rightarrow\; 3 < x+2 < 5$

Por lo tanto:

$$|x-2|\,|x+2| < |x-2|\,5 < \varepsilon \;\Rightarrow\; |x-2| < \frac{\varepsilon}{5} \quad \therefore \quad \delta \le \frac{\varepsilon}{5}$$

Pero no hay que olvidar que tomamos un valor particular de $\delta(\delta' = 1)$, por lo tanto:

$$\boxed{\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\}}$$

Ahora probamos nuestra afirmación: sea $\delta > 0$ tal que $0 < |x-2| < \delta$, entonces

$$|f(x) - L| = |x^2-4| = |x-2|\,|x+2| < |x-2|\,5 < \delta\,5 \le 5\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

como queríamos demostrar.

Observemos que si $\varepsilon = 0.10$ entonces $\boxed{\delta = \min\{1, 0.2\} = 0.2}$

PROPIEDADES DEL LÍMITE

1) ***Unicidad del límite***: Sea f definida en todo $(a;b)$, salvo quizá en $x_0 \in (a;b)$.

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1$ *y* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_2$ *entonces* $\boxed{L_1 = L_2}$.

2) Sea $k \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ entonces se verifica:

$$\boxed{\begin{array}{l} a)\; L < k \;\Rightarrow\; \exists\, \delta > 0 \;/\; 0 < |x - x_0| < \delta \;\wedge\; f(x) < k \\ b)\; L > k \;\Rightarrow\; \exists\, \delta > 0 \;/\; 0 < |x - x_0| < \delta \;\wedge\; f(x) > k \end{array}}.$$

3) Sean ***f***, ***g*** y ***h*** tres funciones definidas en un intervalo (a,b), salvo quizá en $x_0 \in (a,b)$ y tales que:

i) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L$

ii) $g(x) \le f(x) \le h(x) \quad \forall x \in (a;b) \quad x \ne x_0$

Entonces $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L}$.

4) Sean f y g dos funciones definidas en todo $(a;b)$, salvo quizá en $x_0 \in (a;b)$ y tales que:

i) $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$

ii) $\exists\, \delta > 0 \,/\, f(x) = g(x) \quad \forall x:\ 0 < |x - x_0| < \delta$

Entonces $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L}$.

5) Si $f(x) = k$ con k constante, entonces $\boxed{\lim_{x \to x_0} k = k}$.

6) Sean f y g dos funciones definidas en $(a;b)$, salvo quizá en $x_0 \in (a;b)$ y tales que:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$

Entonces:

a) $\lim_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = L_1 \pm L_2$

b) $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = L_1 \cdot L_2$

c) $L_2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$

d) $L_1 > 0 \quad \Rightarrow$ **i)** $\lim_{x \to x_0} \ln f(x) = \ln L_1$

ii) $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} = L_1^{L_2}$

03 Ejemplo Calculemos un límite utilizando álgebra de límites:

$$\lim_{x\to 2}\left[x^3 + 2\ln(x^2-3)\right] = \lim_{x\to 2} x^3 + \lim_{x\to 2} 2\ln(x^2-3) = \left(\lim_{x\to 2} x\right)^3 + 2\lim_{x\to 2}\ln(x^2-3) =$$

$$= \left(\lim_{x\to 2} x\right)^3 + 2\ln\left(\lim_{x\to 2} x^2 - 3\right) = \left(\lim_{x\to 2} x\right)^3 + 2\ln\left[\left(\lim_{x\to 2} x\right)^2 - \lim_{x\to 2} 3\right] =$$

$$= 2^3 + 2\ln(2^2-3) = 8 + 2\ln 1 = 8$$

OBSERVACIÓN:

En general, para determinar analíticamente el valor de un límite, si $x_0 \in Df$ y la función está definida por una única expresión algebraica, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

La justificación de este procedimiento se verá más adelante con la noción de *continuidad.*

04 Ejemplo Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 + 5x - 2}{\sqrt{1-3x}} = \frac{(-1)^2 + 5(-1) - 2}{\sqrt{1-3(-1)}} = -3$$

COCIENTE DE INFINITÉSIMOS

DEFINICIÓN: f es un ***infinitésimo*** para $x = x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

OBSERVACIÓN: A veces, en la resolución de ciertos límites, no podemos hacer el reemplazo directo pues llegamos a una expresión donde numerador y denominador tienden a cero (***cociente de infinitésimos***).

En este caso se dice que el límite presenta una ***indeterminación del tipo*** $\frac{0}{0}$ y es uno de los siete tipos de indeterminación que analizaremos.

> Es importante que quede claro que, si se presenta una indeterminación, esto no quiere decir que el límite no exista, sino que ésta se debe "salvar".

Veremos ahora formas algebraicas de salvar indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ y poder así calcular esos límites.

1) ***Cociente de polinomios***: Para salvar la indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ en este caso, factorizamos ambos polinomios y simplificamos, calculando el límite del cociente de los polinomios que se obtienen de la división de $P(x)$ ***y*** $Q(x)$ ***por*** $(x - x_0)$

Es decir:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = \lim_{x \to x_0} Q(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)\, M(x)}{(x - x_0)\, N(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{M(x)}{N(x)}$$

05 *Ejemplo* Calculemos el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - x^3 - 8}{x^2 + x - 6}$

Como encontramos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, factorizamos ambos polinomios utilizando Ruffini.

	1	-1	0	0	-8
		2	2	4	8
	1	1	2	4	0

> ***Recordar***: polinomio completo y ordenado

Entonces, $x^4 - x^3 - 8 = (x-2)\,(x^3 + x^2 + 2x + 4)$

	1	1	-6
2		2	6
	1	3	0

Entonces, $x^2 + x - 6 = (x-2)\,(x+3)$

Concluimos que:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-x^3-8}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\,(x^3+x^2+2x+4)}{(x-2)\,(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x^2+2x+4}{x+3}=4$$

Recordar:
Por ser una función cuadrática podríamos factorizarla de la forma $f(x)=a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$, siendo x_1 y x_2 sus raíces, las cuales se obtenían a través de la expresión: $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

OBSERVACIÓN:

En el ejemplo anterior es lícito simplificar $(x-2)$ ya que x tiende a 2 pero $x\neq 2$. La simplificación no altera el valor del límite a pesar de cambiar la función, ya que es válida la propiedad **4)** del límite.

06 *Ejemplo* Calculemos el siguiente límite: $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^3+4x^2+5x+2}{2x^3-2x^2-10x-6}$

Como queda una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$, factorizamos ambos polinomios utilizando Ruffini.

	1	4	5	2
-1		-1	-3	-2
	1	3	2	0

	2	-2	-10	-6
-1		-2	4	6
	2	-4	-6	0

Luego,

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+4x^2+5x+2}{2x^3-2x^2-10x-6}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\,(x^2+3x+2)}{(x+1)\,(2x^2-4x-6)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{2x^2-4x-6}$$

Al llegar a este punto observamos que nuevamente obtenemos una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$.

Volvemos a factorizar:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{2x^2-4x-6}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+2)}{2(x+1)(x-3)}=\lim_{x\to -1}\frac{x+2}{2x-6}=-\frac{1}{8}$$

07 *Ejemplo* Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4-3x^2+5x}{x^2-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\,(x^3-3x+5)}{x\,(x-2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x+5}{x-2}=-\frac{5}{2}$$

2) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1}$ La generalización de este resultado es:

"Si $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, entonces $\boxed{\text{"}Si, \lim_{x\to x_0} f(x)=0 \ \ \textit{entonces} \ \lim_{x\to x_0}\frac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)}=1\text{"}}$ que es muy útil para resolver límites con esa estructura.

08 *Ejemplo*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 7x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x}\,\frac{7}{3}=\frac{7}{3}$$

09 *Ejemplo*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\,2x}{\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\,3x}=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$$

Esto se debe a que $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}=1$ y $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}=1$.

10 *Ejemplo*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$

11 *Ejemplo*

$$\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{sen}(x-2)}{x-2}$$

Estamos ante una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Realizamos un cambio de variable: $t=x-2$

Observemos que cuando x tiende a 2, t tiende a cero, luego:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{sen}(x-2)}{x-2}=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}=1$$

3) ***Cociente con expresiones irracionales***: Para salvar la indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ en este caso se multiplica y divide por el conjugado de las expresiones irracionales.

12 *Ejemplo*

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{(x-3)}\,\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{3})^2}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

13 *Ejemplo*

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x-2}}\,\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{2x-1})^2}{\sqrt{x-2}\,(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1})}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1-(2x-1)}{\sqrt{x-2}\,(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+1-2x+1}{\sqrt{x-2}\,(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1})}=\lim_{x\to 2}\frac{-x+2}{\sqrt{x-2}\,(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1})}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-x+2}{\sqrt{x-2}\,(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1})}\,\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to 2}\frac{(-x+2)\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x-2})^2(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1})}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)\,\sqrt{x-2}}{(x-2)\,(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1})}=\lim_{x\to 2}\frac{-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}}=\frac{0}{2\sqrt{3}}=0$$

LÍMITES LATERALES

DEFINICIÓN 1: Sea f una función definida en todos los puntos de un intervalo abierto $(x_0;a)$. Decimos que f tiene ***límite*** L^+ cuando x se acerca a x_0 ***por derecha*** (notándolo $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L^+$)

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L^+ \Leftrightarrow \quad \forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta>0\,(\delta=\delta(\varepsilon)) \quad / \quad 0<x-x_0<\delta \quad \Rightarrow \quad \left|f(x)-L^+\right|<\varepsilon}\,.$$

DEFINICIÓN 2: Sea f una función definida en todos los puntos de un intervalo abierto $(a;x_0)$. Decimos que f tiene ***límite*** L^- cuando x se acerca a x_0 ***por izquierda*** (notándolo $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L^-$)

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L^- \Leftrightarrow \quad \forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta>0\,(\delta=\delta(\varepsilon)) \quad / \quad 0<x_0-x<\delta \quad \Rightarrow \quad \left|f(x)-L^-\right|<\varepsilon}\,.$$

TEOREMA: Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

a) $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L}$

b) $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L}$

OBSERVACIÓN:

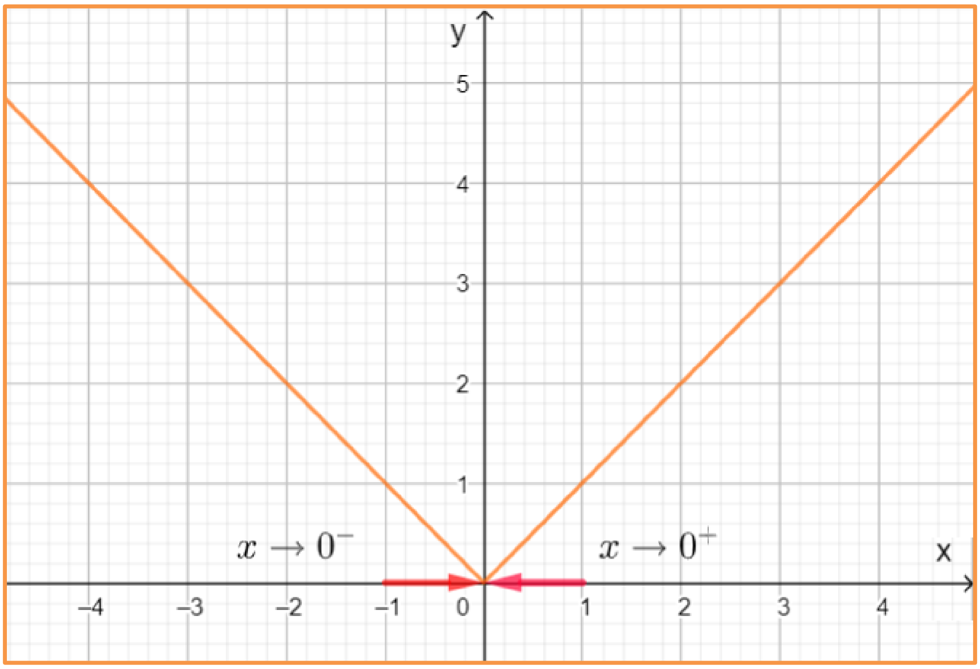
La importancia del teorema anterior radica en que, si los límites laterales son distintos, entonces ***no existe*** el límite de la función.

14 *Ejemplo* $\lim_{x\to 1^+} x^2 = 1 \ \wedge \ \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1$. Por lo tanto, $\boxed{\lim_{x\to 1} x^2 = 1}$.

15 *Ejemplo* Hallar el siguiente límite: $\lim_{x\to 0} |x|$

Como $|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$, para poder calcular este límite necesariamente tenemos que utilizar límites laterales, ya que la función módulo está definida por expresiones diferentes según nos acerquemos a 0 por derecha o por izquierda.

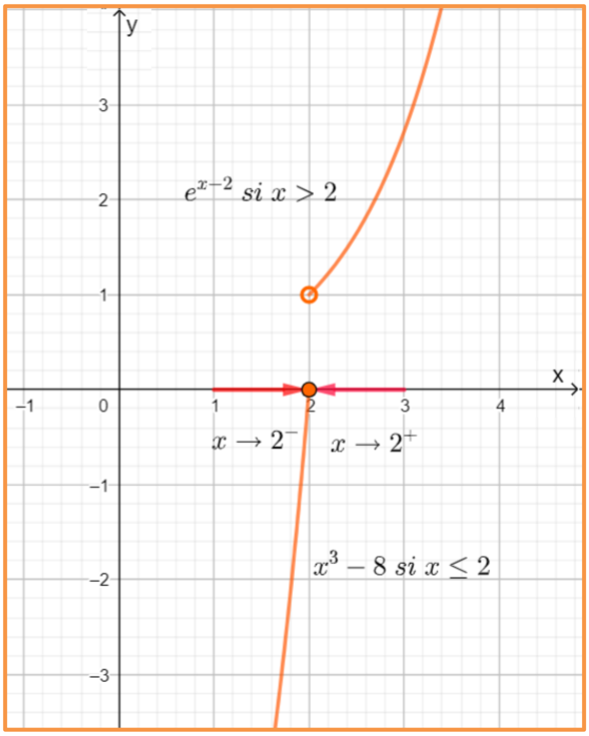
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} -x = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} |x| = 0$$



16 *Ejemplo*

Calcular el $\lim_{x \to 2} f(x)$ siendo

$$f(x)=\begin{cases} x^2-8 & si\ x \le 2 \\ e^{x-2} & si\ x>2 \end{cases}$$



Como *f* está definida por tramos, debemos utilizar límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x \to 2^-} x^2-8=-4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x \to 2^+} e^{x-2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 2} f(x)$$

GENERALIZACIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE

LÍMITE INFINITO

DEFINICIÓN 1: Sea *f* definida en $(a;b)$, salvo quizá en $x_0 \in (a;b)$. Decimos que:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall\ M>0\ \exists\ \delta>0\ /\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>M}$$

DEFINICIÓN 2: Sea *f* definida en $(a;b)$, salvo quizá en $x_0 \in (a;b)$. Decimos que:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall\ M>0\ \exists\ \delta>0\ /\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)<-M}$$

DEFINICIÓN 3: Sea *f* definida en $(a;b)$, salvo quizá en $x_0 \in (a;b)$. Decimos que:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall\ M>0\ \exists\ \delta>0\ /\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)|>M}$$

17 *Ejemplo* Demostrar, usando la definición, que $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty}$.

Sea M arbitrario, queremos probar que $\left|\frac{1}{x}\right|>M$, o sea, $|x|<\frac{1}{M}$. Por lo tanto, tomando $\delta\le\frac{1}{M}$ resulta que: $0<|x|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x)|=\left|\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{|x|}>\frac{1}{\delta}\ge\frac{1}{\frac{1}{M}}=M$ como queríamos demostrar.

OBSERVACIONES:

1) Es importante que quede claro que la división por cero ***no está definida***, pero que si en un cociente el denominador tiende a cero y el numerador a un número distinto de cero, entonces el cociente tiende a infinito.

2) $$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty\\ \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$$

LÍMITE EN EL INFINITO

DEFINICIÓN 1: Sea f definida en todos los puntos de un intervalo $(a,+\infty)$. Decimos que:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon>0\,\exists\,K>0\,/\,|x|>K\Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon}$$

18 *Ejemplo* Demostrar utilizando la definición, que $\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0}$

Sea $\varepsilon>0$ arbitrario, queremos probar que: $\left|\frac{1}{x^2}\right|=\frac{1}{|x|^2}<\varepsilon$, es decir, $|x|^2>\frac{1}{\varepsilon}$; entonces, $|x|>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Por lo tanto, tomando $K\ge\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, resulta que:

$$|x|>K \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{x^2}\right|=\frac{1}{|x|^2}<\frac{1}{K^2}\le\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2}=\varepsilon$$

como queríamos demostrar.

DEFINICIÓN 2: $\lim_{x\to\infty}$ $\boxed{f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall\,M>0\,\exists\,K>0\,/\,|x|>K\Rightarrow |f(x)|>M}$.

19 *Ejemplo* Demostrar, utilizando la definición, que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty}$.

Sea $M > 0$ arbitrario, queremos ver que $\ln x > M$, o sea, $x > e^M$ (todo sin módulo pues x tiende a $+\infty$).

Por lo tanto, tomando $K = e^M$ resulta que: $x > K \Rightarrow f(x) = \ln x > \ln K = \ln e^M = M \ln e = M$ como queríamos demostrar.

1) Si $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^\alpha} = 0$

2) Si $a > 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$

Si $0 < a < 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$

Por lo tanto:

Si $a > 1$: $\lim\limits_{x\to 0^-} a^{\frac{1}{x}} = 0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to 0^+} a^{\frac{1}{x}} = +\infty$

Si $0 < a < 1$: $\lim\limits_{x\to 0^-} a^{\frac{1}{x}} = +\infty \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to 0^+} a^{\frac{1}{x}} = 0$

Recordar

COCIENTE DE INFINITOS

OBSERVACIÓN: El ***cociente de infinitos*** es otra de las indeterminaciones que estudiaremos. Como en el caso de cociente de infinitésimos, la idea es tratar de salvar la indeterminación (a través de operaciones algebraicas que no modifiquen el valor de la expresión) y llegar a un resultado.

1) ***Cociente de polinomios:*** Para salvar la indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ en este caso, se divide numerador y denominador por x elevado al mayor exponente de la expresión dada.

20 *Ejemplo* Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{2x^3}{x^3}}{\frac{x^2+1}{x^3}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+3}{x^4+2x^2-5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^4}}{1+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^4}} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7x^3-x+2}{3x^3+x^2+2x-5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}{3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}} = \dfrac{7}{3}$

REGLA PRÁCTICA:

Sea $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ y $Q(x)=b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0$.

Entonces: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = L$ donde $\begin{cases} L=\infty & si & gr\ P > gr\ Q \\ L=0 & si & gr\ P < gr\ Q \\ L=\dfrac{a_n}{b_m} & si & gr\ P = gr\ Q \end{cases}$

2) ***Cociente con expresiones irracionales***: También se divide numerador y denominador por x elevado al mayor exponente de la expresión dada, recordando que: $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{x^m} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{x^{m.n}}}$

21 Ejemplo $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-\sqrt{x^4+5x}}{x^2-3x+\sqrt[3]{x+4}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-\sqrt{\dfrac{x^4+5x}{x^4}}}{1-\dfrac{3}{x}+\sqrt[3]{\dfrac{x+4}{x^6}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-\sqrt{1+\dfrac{5}{x^3}}}{1-\dfrac{3}{x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^5}+\dfrac{4}{x^6}}} = 1$

22 Ejemplo Calculemos el siguiente límite $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+\sqrt{x^2+1}}{2-x}$

Como x tiende a ∞, entonces dividimos numerador y denominador por $\boxed{|x|=\sqrt{x^2}}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{3x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}}{\dfrac{2-x}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{3x}{|x|}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{\dfrac{2}{|x|}-\dfrac{x}{|x|}} = L$$

- Si $x\to+\infty$, entonces $|x|=x$. Luego,

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{\dfrac{2}{x}-1} = -4$$

- Si $x \to -\infty$, entonces $|x| = -x$. Luego,

$$L = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{3x}{-x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\frac{2}{-x} - \frac{x}{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{-\frac{2}{x}+1} = -2$$

NOTA IMPORTANTE: $\boxed{\nexists \lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x \quad \wedge \quad \nexists \lim_{x\to\infty} \cos x}$

Por lo tanto, un teorema interesante es el siguiente:

TEOREMA: Sean f y g dos funciones tales que: $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ (es decir, f es un infinitésimo para $x = x_0$) y $|g(x)| \le k$ con $k \in \mathbb{R}$ (g es una función acotada).
Entonces, $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = 0$.

Este teorema (que comúnmente se conoce como "cero por acotada") da un método de resolución de ciertos límites.

23 Ejemplo $\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \operatorname{sen} x = 0$, pues $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ y $|\operatorname{sen} x| \le 1$.

24 Ejemplo $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, pues $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ y la función coseno es una función acotada.

OTRAS INDETERMINACIONES

OBSERVACIÓN: Mencionamos al principio de este capítulo que hay siete indeterminaciones.
Hasta ahora sólo vimos dos: ***cociente de infinitésimos*** $\left(\frac{0}{0}\right)$ y ***cociente de infinitos*** $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

A continuación, estudiaremos dos más y los restantes se verán más adelante en el capítulo de aplicaciones de la derivada.

1) ***Suma de infinitos de distinto signo*** $(\infty-\infty)$ Veamos algunos ejemplos de esta indeterminación.

25 *Ejemplo* Calcular los siguientes límites:

a) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x})^2-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\frac{\sqrt{x^2+3x}+x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{\frac{x^2+3x}{x^2}}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}=\frac{3}{2}$$

b) $$\lim_{x\to1}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to1}\frac{x+1-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x}{x^2-1}=\infty$$

2) ***El número e***: Otras indeterminaciones que pueden presentarse son las de las funciones potenciales-exponenciales. En este capítulo sólo veremos la que aparece cuando queremos calcular $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ (eventualmente x_0 puede ser infinito) con $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, la cual se conoce como ***indeterminación*** $\mathbf{1^\infty}$.

Observemos que cualquier potencia del número 1 da por resultado 1. La indeterminación se presenta cuando la base de una función potencial - exponencial tiende a 1 y el exponente tiende a infinito.

Veamos ahora dos resultados de suma importancia cuya demostración excede los alcances de este texto.

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \quad\wedge\quad \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$$

Este concepto puede generalizarse de la siguiente manera:

"Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$."

Análogamente:

"Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1+f(x)\right)^{\frac{1}{f(x)}}=e$."

26 Ejemplo

Calcular los límites dados a continuación, verificando previamente que existe una indeterminación.

a) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{7}}\right)^{\frac{x}{7}}\right]^{\frac{7}{x}.2x}=e^{14}$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x+5}\right)^{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3x+5}\right)^{3x+5}\right]^{\frac{2x+3}{3x+5}}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x+5}\right)^{3x+5}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{3x+5}}=e^{\frac{2}{3}}$$

c) $$\lim_{x\to0}(1+4x)^{\frac{1}{7x}}=\lim_{x\to0}\left[(1+4x)^{\frac{1}{4x}}\right]^{\frac{4x}{7x}}=\left[\lim_{x\to0}(1+4x)^{\frac{1}{4x}}\right]^{\lim\limits_{x\to0}\frac{4x}{7x}}=e^{\frac{4}{7}}$$

27 Ejemplo

Calcular el siguiente límite $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-5}\right)^{3x-1}$

Aquí vemos que el límite de la base da 1 (por ser cociente de polinomios de igual grado) y el exponente tiende a infinito. Por lo tanto, estamos frente a una indeterminación del tipo 1^{∞}. Procedemos de la siguiente manera:

$$\frac{2x+1}{2x-5}=1+\frac{2x+1}{2x-5}-1=1+\frac{2x+1-(2x-5)}{2x-5}=1+\frac{6}{2x-5}=1+\frac{1}{\frac{2x-5}{6}}$$

Luego, reemplazando obtenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-5}\right)^{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x-5}{6}}\right)^{\frac{2x-5}{6}}\right]^{\frac{6(3x-1)}{2x-5}}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-5}{6}}\right)^{\frac{2x-5}{6}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6(3x-1)}{2x-5}}=e^{9}$$

ASÍNTOTAS

1) ASÍNTOTA VERTICAL

La recta de ecuación $\boxed{x = x_0}$ es una ***asíntota vertical*** al gráfico de $f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$ y/o $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$

28 Ejemplo Analizar la existencia de asíntotas verticales en las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

Hallamos primero el dominio de la función: $Df = \mathbb{R} - \{-3\}$.
Luego, analizamos la existencia de asíntota en $x_0 = -3$.

$$\lim_{x \to -3} \frac{1}{x+3} = \infty \Rightarrow \boxed{x = -3} \text{ es asíntota vertical.}$$

b) $f(x) = e^x$

Como $Df = \mathbb{R}$, entonces la función no tiene asíntotas verticales.

c) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-4}$

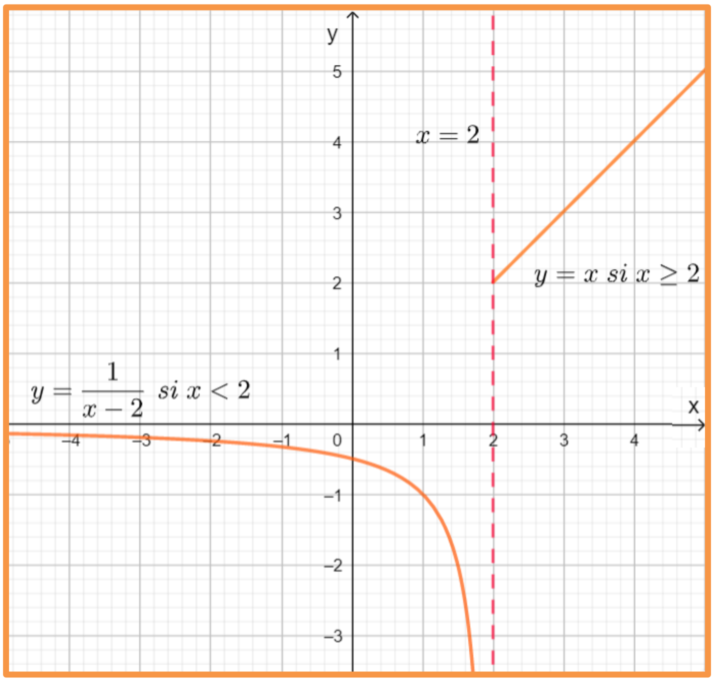
Como el dominio de la función es $Df = \mathbb{R} - \{-2,2\}$, analizaremos la existencia de asíntota vertical en los dos valores que excluimos del dominio.

i) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+2}{x^2-4} = \infty \Rightarrow \boxed{x = 2}$ es asíntota vertical.

ii) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+2}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{1}{4} \dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{1}{4}$. Por lo tanto, no hay asíntota vertical en $\boxed{x = -2}$.

29 Ejemplo Analizar la existencia de asíntotas verticales en las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & x < 2 \\ x & x \geq 2 \end{cases}$



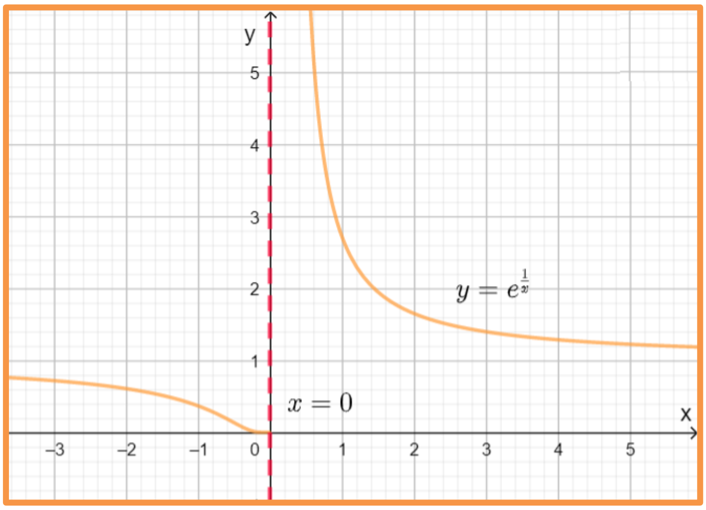
Observemos que el $Df = \mathbb{R}$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} x = 2$.

Como $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$, concluimos que $\boxed{x = 2}$ es una asíntota vertical.

b) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

El dominio de la función es $Df = \mathbb{R} - \{0\}$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \quad \wedge \quad \lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 0}$ es una asíntota vertical.



2) ASÍNTOTA HORIZONTAL

La recta de ecuación $\boxed{y = L}$ es *asíntota horizontal* al gráfico de la función $f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

Analizar la existencia de asíntotas horizontales en las siguientes funciones.

30 Ejemplo a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Como $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, entonces $\boxed{y = 0}$ es asíntota horizontal.

a) $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{5x^2-x+2}$

Como $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+1}{5x^2-x+2} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{3}{5}}$, entonces $\boxed{y = \dfrac{3}{5}}$ es asíntota horizontal.

b) $f(x) = x^3$

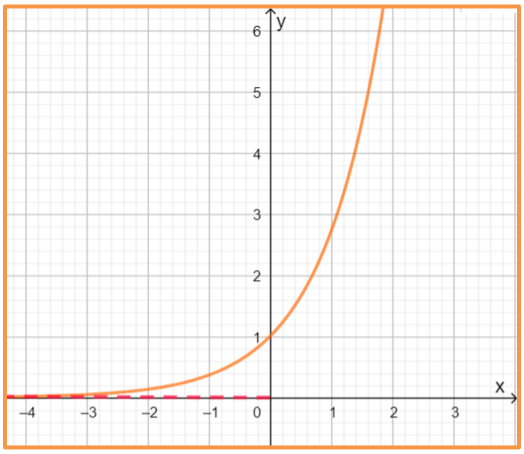
Como $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$, entonces esta función no presenta asíntotas horizontales.

31 Ejemplo Analizar la existencia de asíntotas horizontales en las siguientes funciones.

a) $f(x) = e^x$

En este ejemplo vamos a discriminar los límites para el cálculo de asíntota horizontal.
Observemos qué $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ pero $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Por lo tanto, concluimos que $\boxed{y = 0}$ es una asíntota horizontal a izquierda.

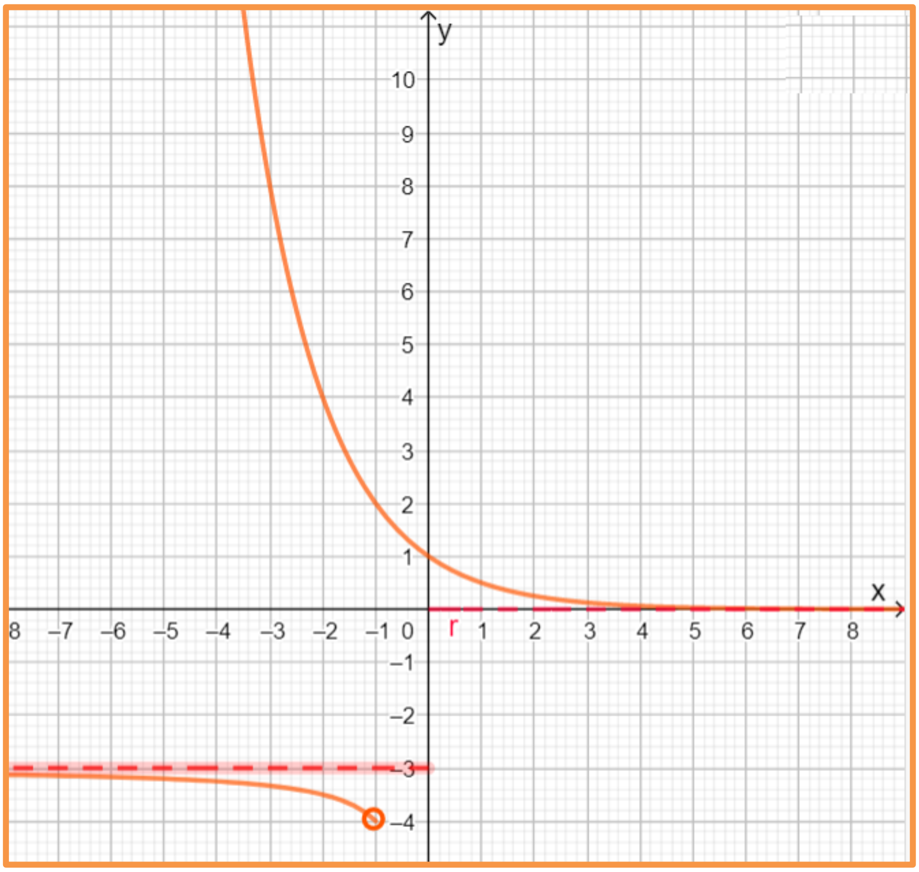


b) $\begin{cases} \frac{1}{x}-3 & x<-1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x} & x\geq -1 \end{cases}$

Observemos que:

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=0$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}-3=-3$

Concluimos que tenemos dos asíntotas horizontales: $\boxed{y=0}$ a derecha e $\boxed{y=-3}$ a izquierda.



3) ASÍNTOTA OBLICUA

La recta de ecuación $\boxed{y=mx+b}$ es una ***asíntota oblicua*** al gráfico de $f(x)\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(mx+b)\right]=0$ o $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(mx+b)\right]=0$

Determinemos cómo se calculan los valores de $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{b}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(mx+b)\right]=\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f(x)}{x}-m-\frac{b}{x}\right]=0$$

Puesto que x tiende a $+\infty$ debe cumplirse que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-m-\frac{b}{x}\right]=0$$

Como $\boldsymbol{b}$ es constante, se verifica que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{b}{x}=0$.

Luego:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-m\right]=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m}$$

Conociendo el valor de $\boldsymbol{m}$, lo reemplazamos en la expresión $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(mx+b)\right]=0$

Luego: $\boxed{b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)}$.

Por lo tanto, para calcular la pendiente y la ordenada al origen de la asíntota oblicua, basta con calcular los siguientes límites:

$$\boxed{m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}} \quad \text{y} \quad \boxed{b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)}$$

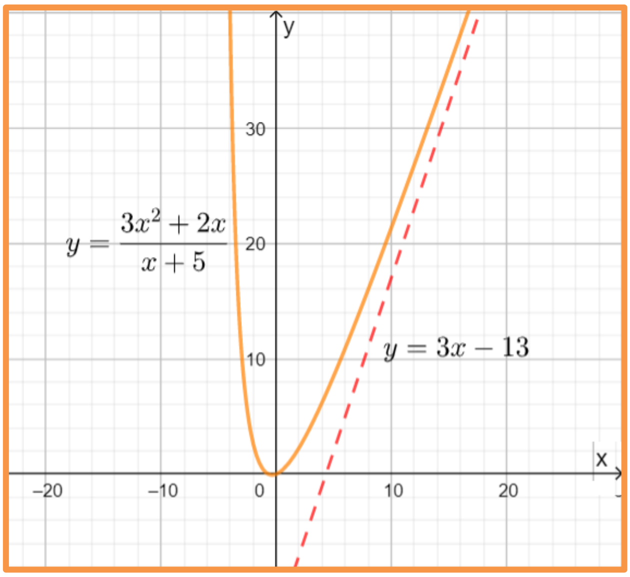
El análisis se completa con el cálculo de estos límites para $x\to-\infty$.

32 Ejemplo Analizar la existencia de asíntota oblicua en la función $f(x)=\dfrac{3x^2+2x}{x+5}$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2+2x}{x+5}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x}{x+5}:x=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x}{x+5}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x}{x^2+5x}=3$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x}{x+5}-3x=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-3x(x+5)}{x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{-13x}{x+5}=-13$$

Luego, $\Rightarrow$ $\boxed{y=3x-13}$ es asíntota oblicua.



CONTINUIDAD

DEFINICIÓN: Decimos que f es ***continua*** en $x_0 \Leftrightarrow$ se verifica:

i) $\exists\ f(x_0)$

ii) $\exists\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ y es finito.

iii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

1) Sean f y g continuas en x_0, entonces se verifica:

a) $f \pm g$ es continua en x_0

b) $f.g$ es continua en x_0

c) $\frac{f}{g}$ es continua en x_0 sí $g(x_0) \neq 0$.

2) Si $Ig \subset Df$ y g es continua en x_0 y f es continua en $g(x_0)$, entonces $f \circ g$ es continua en x_0.

FUNCIONES DISCONTINUAS

Una función se dice ***discontinua*** en x_0 si no verifica una o más de las condiciones de la definición de continuidad.

CLASIFICACIÓN:

1) **DISCONTINUIDAD EVITABLE**: Se presenta cuando existe el límite finito L de la función en x_0 pero, o bien, no está definida f en x_0, o bien, $f(x_0)$ no coincide con el límite L.

2) **DISCONTINUIDAD ESENCIAL**: Se presenta cuando la función no tiene límite finito en x_0, o bien, no existe el límite en x_0.

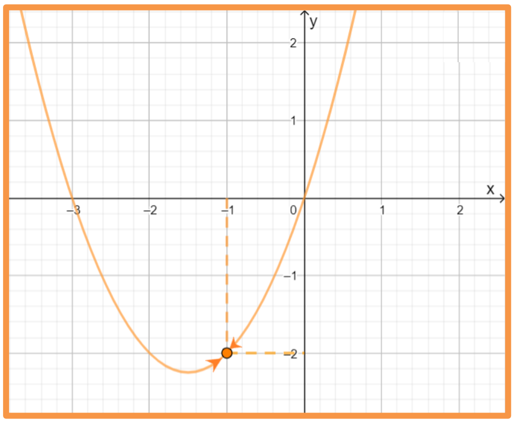
33 Ejemplo Analizar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados. En caso de ser discontinuas, clasificar.

a) $f(x) = x^2 + 3x$ en $x_0 = -1$

i) $f(-1) = -2$

ii) $\lim\limits_{x \to -1} x^2 + 3x = -2$

iii) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$



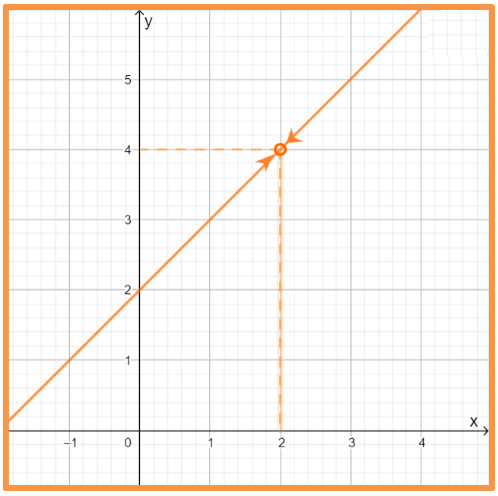
Por lo tanto, f es continua en $x_0 = -1$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ en $x_0 = 2$

i) $\nexists\ f(2)$

ii) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x - 2} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} x + 2 = 4$



Por lo tanto, f presenta una discontinuidad evitable en $x_0 = 2$.

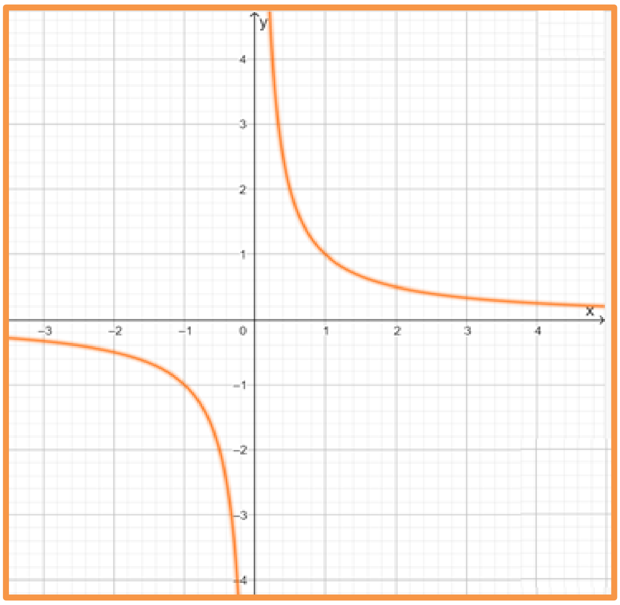
c) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ **en** $x_0=0$

i) $\nexists\ f(0)$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$

Por lo tanto, f presenta una discontinuidad esencial en $x_0=0$.

Por lo tanto, presenta una discontinuidad esencial en $x_0=0$.



OBSERVACIÓN:

Claramente en el ejemplo b) podríamos redefinir la función de la siguiente manera:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & x\neq 2\\ 4 & x=2\end{cases}$$

Esta nueva función es continua en todo valor real; por eso la discontinuidad se denomina “evitable”.

CONTINUIDAD EN UN INTERVALO CERRADO

DEFINICIÓN:

Una función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, si y sólo si:

i) f es continua $\forall x\in(a,b)$.

ii) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ y $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$

34 Ejemplo

Analizar la continuidad de las siguientes funciones.

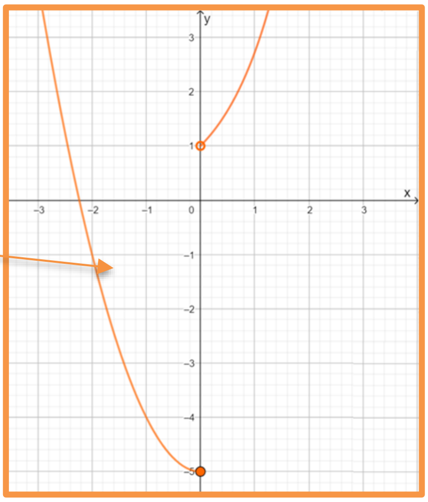
a) $$f(x)=\begin{cases} x^2-5 & x\le 0 \\ e^x & x>0 \end{cases}$$

Como las funciones polinómicas y exponenciales son siempre continuas, el único punto de análisis es $x_0 = 0$.

i) $f(0)=-5$

ii) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2-5=-5 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^x=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

Por lo tanto, f es continua para todo valor de x real, salvo para $x_0 = 0$, donde se presenta una discontinuidad esencial.



b) $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & x\le -2 \\ 2x+3 & -2<x\le 1 \\ \left(\dfrac{1}{5}\right)^{2-x} & x>1 \end{cases}$$

Los puntos para analizar son $x_0=-2$ y $x_1=1$.

- $x_0=-2$

  i) $f(-2)=-1$

  ii) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{1}{x+1}=-1 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} 2x+3=-1 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to -2} f(x)=-1$$

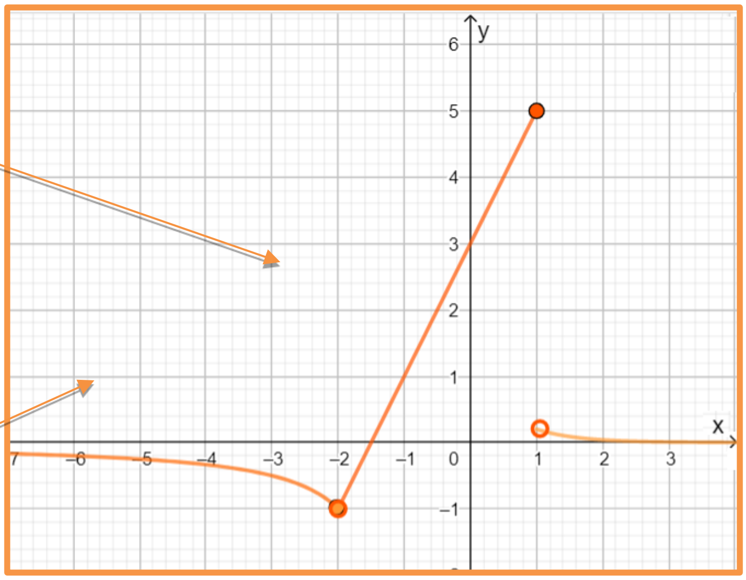
- $x_1=1$

  i) $f(1)=5$

  ii) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2x+3=5 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{5}\right)^{2-x}=\dfrac{1}{5} \end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$

Por lo tanto, f presenta una discontinuidad esencial en $x_1 = 1$

Por lo tanto, f es continua en $x_0 = -2$



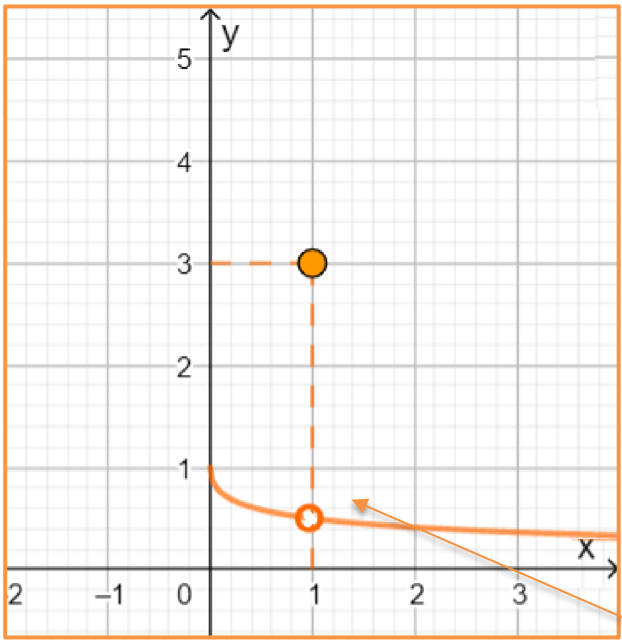
c) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$$

i) $f(1) = 3$

ii) $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\,\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x})^2-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

iii) $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$



Luego, f presenta una discontinuidad evitable en $x_0 = 1$.

FUNCIONES CONTINUAS EN UN INTERVALO CERRADO

TEOREMA 1:

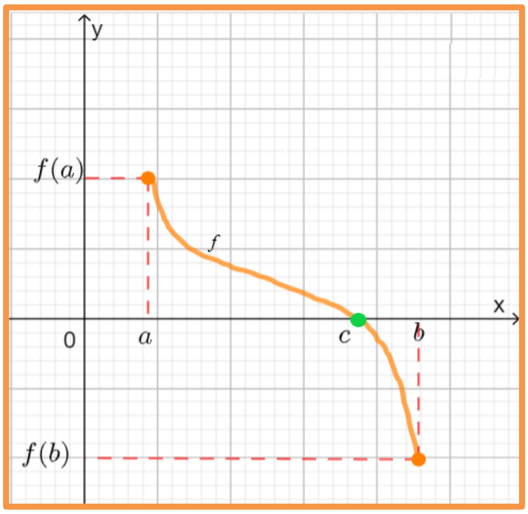
Sea f una función continua en $[a,b]$, entonces f es acotada en $[a,b]$

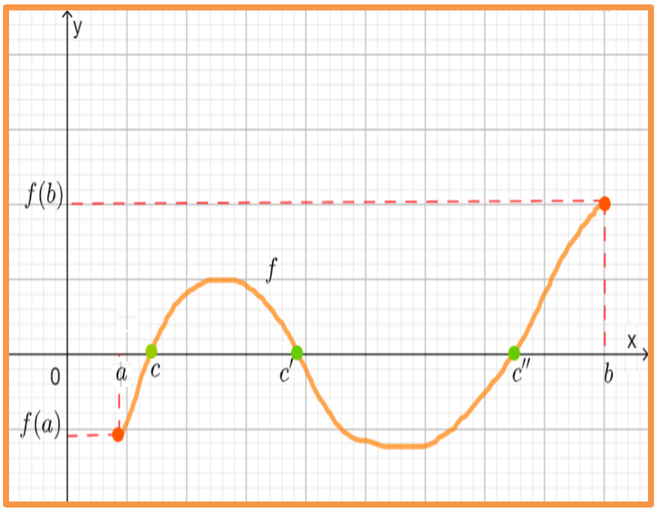
TEOREMA 2:

Sea f una función continua en $[a,b]$, entonces f alcanza un máximo y un mínimo absoluto en $[a,b]$.

TEOREMA DE BOLZANO

Sea una función continua en $[a,b]$ tal que $f(a)>0$ y $f(b)<0$ (o bien, $f(a)<0$ y $f(b)>0$), entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.





COROLARIO DEL TEOREMA DE BOLZANO

Sea f continua en $[a,b]$ y sean x_0 y x_1, dos ceros consecutivos de f en el intervalo $[a,b]$, entonces $f(x)>0 \quad \forall\, x\in(x_0,x_1)$, o bien, $f(x)<0 \quad \forall\, x\in(x_0,x_1)$.

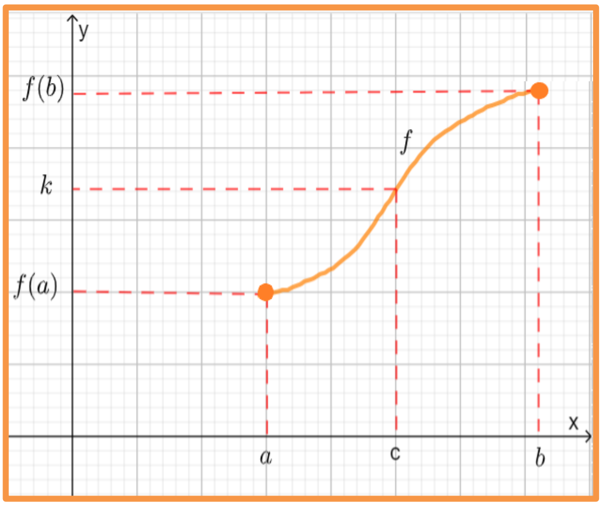
OBSERVACIÓN: El corolario anterior se podría generalizar diciendo:

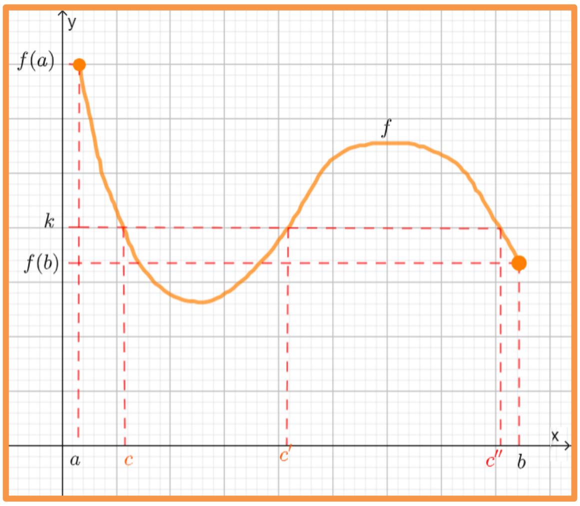
"Si una función f es continua en el intervalo (a,b) tal que $f(x)\neq 0 \quad \forall x\in(a,b)$, entonces f tiene signo constante."

Estos teoremas serán de suma utilidad cuando veamos estudio de funciones.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Sea f una función continua en $[a,b]$ tal que $f(a) < f(b)$ (o bien, $f(b) < f(a)$). Si $k \in \mathbb{R}$ es un valor comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = k$.





GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Sea f una función continua en $[a,b]$ y sea $k \in \mathbb{R}$ un valor comprendido entre el mínimo y el máximo de la función f en el intervalo $[a,b]$, entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = k$.

OBSERVACIÓN:

Este resultado lo utilizaremos para demostrar el teorema del valor medio para integrales.

APLICACIONES ECONÓMICAS

FUNCIONES ECONÓMICAS DISCONTINUAS

Un gran número de funciones que se presentan en los problemas de Administración y Economía, son funciones que presentan discontinuidades finitas. Por ejemplo, la función de costo suele tener discontinuidades, ya que los costos unitarios disminuyen (o aumentan) en el caso de cantidades específicas.

Debe notarse que hay funciones que, aun siendo discontinuas, pueden presentarse con frecuencia como continuas. Esto es aplicable, por ejemplo, a las funciones de demanda y oferta de bienes vendidos por unidades, como autos, paquetes de cigarrillos, computadoras, sillas, productos enlatados, etcétera.

Representar como continuas funciones que por naturaleza son discontinuas, hace posible utilizar herramientas matemáticas que de otro modo nos sería imposible aplicar.

35 *Ejemplo* Un comerciante mayorista vende resmas de hojas para impresora A4 en lotes puestos en cajas, de acuerdo con la siguiente lista de precios:

- \$30 por caja con la compra de 10 cajas o menos.
- \$27.50 por caja con la compra de más de 10 cajas, pero no más de 20.
- \$25 por caja con la compra de más de 20 cajas, pero no más de 30.
- \$22.50 por caja con la compra de más de 30 cajas.

Sea p el precio y x la cantidad de cajas, la función de precio se puede representar algebraicamente como:

$$p=\begin{cases} 30x & 0\le x\le 10 \\ 27.50x & 10< x\le 20 \\ 25x & 20< x\le 30 \\ 22.50x & x>30 \end{cases}$$

Su representación gráfica es:

CAPITALIZACIÓN CONTINUA

La operación por la cual un cierto valor inicial que denominamos ***capital*** se transforma en un valor final que denominamos ***monto***, recibe el nombre de ***capitalización.*** La transformación del capital en monto se consigue por la acción de dos factores: ***tiempo*** y ***tasa de interés.***

En el capítulo de funciones vimos que si una suma de dinero es invertida y el interés capitaliza por intervalos definidos, el capital final se obtiene a través de la siguiente fórmula:

$$\boxed{C_n = C_0\left(1+\frac{i}{k}\right)^{k\,n}}$$

donde $C_0 =$ capital inicial (capital en el momento cero)

$C_n =$ capital final o monto

$i =$ tasa de interés unitaria, llamado el tanto por uno (interés que gana un capital de $ 1 en un período)

$n =$ cantidad de períodos.

$k \cdot n =$ números de subperíodos o períodos de capitalización.

Si consideramos al interés como función del tiempo, esto da origen a distintos montos. Veamos qué ocurre cuando una suma de dinero se capitaliza con una frecuencia cada vez mayor, calculando el monto en cada caso.

Dado un capital inicial de $100 colocado al 12% anual por el término de un año, los montos para distintos períodos de capitalización son:

- Capitalización anual ($k=1$): $C = 100\left(1+\frac{0.12}{1}\right)^{1\cdot 1} = 112$
- Capitalización semestral ($k=2$): $C = 100\left(1+\frac{0.12}{2}\right)^{2\cdot 1} = 112.36$
- Capitalización cuatrimestral ($k=3$): $C = 100\left(1+\frac{0.12}{2}\right)^{3\cdot 1} = 112.4864$
- Capitalización trimestral ($k=4$): $C = 100\left(1+\frac{0.12}{4}\right)^{4\cdot 1} = 112.55$
- Capitalización bimestral ($k=6$): $C = 100\left(1+\frac{0.12}{6}\right)^{6\cdot 1} = 112.6162$
- Capitalización mensual ($k=12$): $C = 100\left(1+\frac{0.12}{12}\right)^{12\cdot 1} = 112.6825$

Los resultados anteriores permiten concluir que, a medida que aumenta la frecuencia de las capitalizaciones, se obtienen montos mayores.
¿Qué ocurriría si los intereses se capitalizaran en cada infinitésimo de tiempo?
En dicha situación diremos que estamos frente a un caso de ***capitalización continua*** y el monto que se obtendría puede calcularse mediante el siguiente límite:

$$\overline{C_n} = \lim_{k\to\infty} C_0 \left(1+\frac{i}{k}\right)^{k\,n} = C_0 \lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{k}{i}}\right)^{\frac{k}{i}}\right]^{\frac{i}{k}k\,n} = C_0\, e^{i\,n}$$

Luego, $\boxed{\overline{C_n} = C_0\, e^{i\,n}}$.

Observemos que como el monto aumenta al aumentar la frecuencia de las capitalizaciones, $\overline{C_n}$ representa el mayor monto que puede obtenerse para una tasa nominal ***i.***

36 *Ejemplo*

a) Calcular el monto que produce un capital de $ 20000 colocado durante 5 años al 6% nominal anual: i)con capitalización mensual.

$$C_0 = 20000$$
$$i = 0.06$$
$$n = 5$$
$$C_n = C_0\left(1+\frac{i}{k}\right)^{k\,n} = 20000\left(1+\frac{0.06}{12}\right)^{12\ 5} = 26977$$

ii) con capitalización continua.

$$\overline{C_n} = C_0\, e^{i\,n} = 20000\, e^{0.06\ 5} = 26997.18$$

b) El interés obtenido al cabo de 4 años fue de $1000 con un capital inicial de $ 5000 y un régimen de capitalización continua. Averiguar la tasa de interés nominal anual.

$$C_0 = 5000$$
$$I = \overline{C_n} - C_0 = 1000 \quad\Rightarrow\quad \overline{C_n} = 6000$$
$$n = 4$$
$$\overline{C_n} = C_0\, e^{i\,n} \quad\Rightarrow\quad 6000 = 5000\, e^{i\,4} \quad\Rightarrow\quad \frac{6}{5} = e^{i\,4} \quad\Rightarrow\quad \ln\left(\frac{6}{5}\right) = 4\,i$$
$$\Rightarrow\quad i = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{6}{5}\right) = 0.04558$$

Por lo tanto, la tasa es del 4,56 % anual.

CAPÍTULO 3

DERIVADAS

CAPÍTULO 3

DERIVADAS

INTRODUCCIÓN:

Sea $y = f(x)$ una función definida en cierto intervalo (a,b) y sea $x_0 \in (a,b)$. Supongamos que el valor x_0 de la variable x es incrementado en un valor h (no importa que h sea positivo o negativo). Entonces, la función f sufre un incremento que denominamos $\Delta f(x_0)$. Es decir, si para $x = x_0$ ocurre que $y = f(x_0)$, entonces para $x = x_0 + h$, sucede que $y = f(x_0 + h)$. Calculemos el incremento de f en $x = x_0$.

$$\boxed{\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)}$$

Efectuando la razón entre el incremento de f y el incremento de la variable x obtenemos la siguiente expresión, denominada ***cociente incremental***:

$$\boxed{\frac{\Delta f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

DEFINICIÓN

La función f es ***derivable*** en $x = x_0$ si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe y es finito. En este caso el límite se designa por $f'(x_0)$ y recibe el nombre de ***derivada*** de la función f en el punto de abscisa $x = x_0$. Luego,

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

NOTACIÓN: También suele denotarse a la derivada de f en $x = x_0$ como:

$$y'(x_0), \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = x_0} \quad \text{o} \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x = x_0}$$

OBSERVACIÓN: Para funciones derivables en $x = x_0$, podemos escribir:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

01 Ejemplo Calcular $f'(x_0)$ para $f(x)=2x+5$ en $x_0=3$.

•Primero calculamos **f(3)**: $f(3)=2\cdot 3+5=11$

- Seguidamente calculamos $f(3+h)$, recuerde que debe sustituirse a x por **3 + h.**

  $f(3+h)=2\cdot(3+h)+5=2\cdot 3+2\cdot h+5=6+2\cdot h+5$

  $f(3+h)=11+2h$
- Hallamos el incremento de f: $\Delta f(3)=f(3+h)-f(3)$.
- Realizamos el cociente incremental: $\dfrac{\Delta f(3)}{h}=\dfrac{\cancel{11}+2h-\cancel{11}}{h}=\dfrac{2\cancel{h}}{\cancel{h}}=2$.
- Finalmente, calculamos el límite para $h\to 0$: $\boxed{f'(3)=\lim\limits_{h\to 0}2=2}$

Calcular $f'(-1)$ para $f(x)=x^2-3x$.

02 Ejemplo Puesto que nos piden calcular $f'(-1)$, podemos deducir que $x_0=-1$.

- Calculamos $f(-1)$: $f(-1)=(-1)^2-3\cdot(-1)=1+3=4$
- Calculamos $f(-1+h)$:

  $f(-1+h)=(-1+h)^2-3\cdot(-1+h)=(-1)^2-2\cdot 1\cdot h+h^2+3\cdot 1-3\cdot h=1-2h+h^2+3-3h$

  $f(-1+h)=h^2-5h+4$
- Hallamos el límite del cociente incremental para $h\to 0$

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-5h+\cancel{4}-\cancel{4}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-5h}{h}$$

Sacamos factor común h en el numerador para poder resolver la indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ que se presenta.

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\,(h-5)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}h-5=-5\quad\Rightarrow\quad\boxed{f'(-1)=-5}$$

03 Ejemplo Calcular f' en el punto (3;2) de la curva que es gráfica de $f(x)=\sqrt{x+1}$.

Si debemos trabajar en el punto **(3;2)**, entonces el valor de la abscisa es 3**,** de donde $x_0=3$.

- Hallamos $f(3)$: $f(3)=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}\quad\Rightarrow\quad f(3)=2$
- Calculamos $f(3+h)$: $f(3+h)=\sqrt{3+h+1}\quad\Rightarrow\quad f(3+h)=\sqrt{4+h}$
- Calculamos el límite del cociente incremental.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}\cdot\frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{4+h}\right)^2-2^2}{h\,(\sqrt{4+h}+2)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{4}+h-\cancel{4}}{h\,(\sqrt{4+h}+2)}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\,(\sqrt{4+h}+2)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}=\frac{1}{\sqrt{4+0}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

Luego, $\boxed{f'(3)=\dfrac{1}{4}}$

04 Ejemplo Calcular la derivada de $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$ en $x_0=1$.

Apliquemos directamente la definición:

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{(1+h)+1}-\frac{2}{1+1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{2+h}-1}{h}$$

Si calculamos el límite nos encontramos ante una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$. Por lo tanto, efectuamos la resta indicada en el numerador.

$\dfrac{2}{2+h}-1=\dfrac{2-(2+h)}{2+h}=\dfrac{\cancel{2}-\cancel{2}-h}{2+h}=\dfrac{-h}{2+h}$ Volvamos al límite.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{2+h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{2+h}=-\frac{1}{2}$$

Luego, $\boxed{f'(1)=-\dfrac{1}{2}}$.

Veamos algunos ejemplos de no existencia de derivada.

05 Ejemplo Averiguar si existe la derivada de $f(x)=(x+1)^{\frac{2}{3}}$ en $x_0=-1$.

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(-1+h+1)^{\frac{2}{3}}-(-1+1)^{\frac{2}{3}}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^{\frac{2}{3}}-0^{\frac{2}{3}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{\frac{2}{3}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{1/3}}$$

Si calculamos el límite nos encontramos con que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^{1/3}}=\infty$.

Por lo tanto, la derivada no existe en $x_0=-1$.

OBSERVACIÓN: Hemos definido derivabilidad en un punto x_0. Tenemos ya otra noción puntual, que es la de *continuidad*. Es importante relacionar ambos conceptos.

TEOREMA: Si una función es derivable en x_0, entonces es continua en x_0.

DEMOSTRACIÓN: Si f es derivable en x_0, entonces existe:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Luego: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,(x-x_0)=$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Por lo tanto, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ como queríamos demostrar.

NOTA IMPORTANTE:

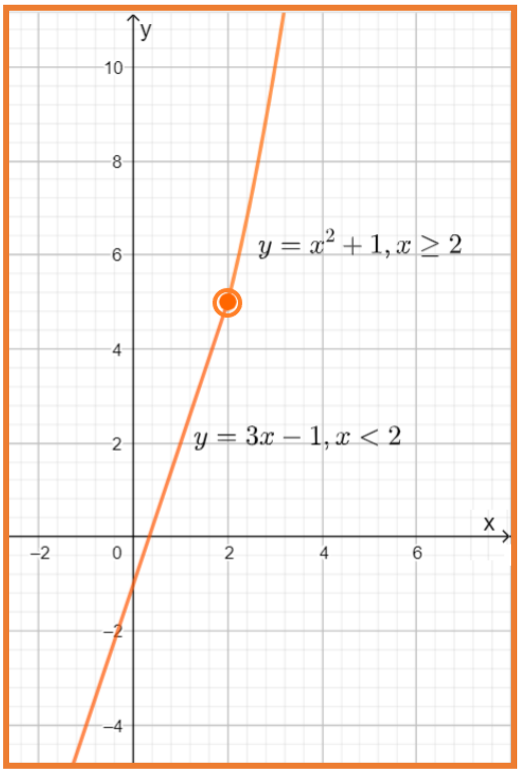
La recíproca del teorema anterior (Si es continua en x_0, es derivable en x_0) ***no es cierta***, pues hay funciones continuas en un punto que no son derivables en dicho punto.

06 *Ejemplo*

Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 2 \\ 3x - 1 & x < 2 \end{cases}$$

Se pide:



a) Verificar que f es continua en $x_0 = 2$.

Recordemos las condiciones que deben cumplirse para que f sea continua en un punto.

Sea $y = f(x)$, diremos que f es continua en x_0 si se satisfacen:

i) $\exists\ f(x_0)$

ii) Existe y es finito $\lim_{x \to x_0} f(x)$

iii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

En nuestro caso $x_0 = 2$, luego:

i) $f(2) = 2^2 + 1 = 5$

ii) $$\left.\begin{array}{l} L^+ = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x^2 + 1 = 5 \\ L^- = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 3x - 1 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

iii) $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

Por lo tanto, f es continua en $x_0 = 2$.

b) Analizar la existencia de derivada de la función f en $x_0 = 2$.

Apliquemos ahora la definición de derivabilidad.

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

Para determinar cuál de los tramos de f debemos usar, tenemos que discriminar si h es positivo o negativo. Luego, tenemos que calcular la ***derivada por derecha*** (que denotamos f'^{+}) y la ***derivada por izquierda*** (que denotamos f'^{-}).

$$f'^{+}(2) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(2+h)^2 + 1 - 5}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{4 + h^2 + 4h + 1 - 5}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\cancel{h}(h+4)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0^+} h + 4 = 4$$

Análogamente:

$$f'^{-}(2) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{3(2+h) - 1 - 5}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{6 + 3h - 1 - 5}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{3\cancel{h}}{\cancel{h}} = 3$$

Debido a que la derivada por derecha es distinta de la derivada por izquierda, decimos que ***no existe*** la derivada de f en $x_0 = 2$.

OBSERVACIÓN:

Hasta ahora sólo vimos la definición puntual de derivada, con lo cual, cada vez que cambiamos el punto en el que estamos trabajando, tenemos que calcular un nuevo límite. Para resolver este problema es que generalizamos la definición de derivada, calculando el límite en un punto genérico $x = x_0$.

DEFINICIÓN: FUNCIÓN DERIVADA

Sea f definida en un intervalo (a,b) y derivable en todos los puntos de dicho intervalo. Para cada $x \in (a,b)$ tenemos una $f'(x) \in \mathbb{R}$, de esta manera queda definida una función $(x \to f'(x))$ llamada la ***función derivada*** de f y se indica f'.

07 *Ejemplo* Hallar la derivada de la función constante $f(x) = k$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

08 Ejemplo Hallar la función derivada de $f(x)=x^3$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\,(3x^2+3xh+h^2)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}3x^2+3xh+h^2=3x^2$$

Por lo tanto, la derivada de $f(x)=x^3 \Rightarrow \boxed{f'(x)=3x^2}$

09 Ejemplo Calcular la derivada de $g(x)=\ln x$.

Para que el logaritmo esté definido, vamos a restringirnos a valores positivos de x, es decir, $x>0$.

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)=\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}=\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{1}{h}}=\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}\frac{1}{x}}=$$

$$=\ln\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}\frac{1}{x}}=\ln\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{x}}=\ln e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$$

Por lo tanto, la derivada de $f(x)=\ln x \Rightarrow \boxed{f'(x)=\frac{1}{x}}$

10 Ejemplo Calcular la derivada de $f(x)=\operatorname{sen} x$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}$$

Recordemos que $\boxed{\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a\cos b+\operatorname{sen} b\cos a}$

Reemplazando en la expresión anterior obtenemos:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} x\cos h+\operatorname{sen} h\cos x-\operatorname{sen} x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} x\cos h-\operatorname{sen} x}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h\cos x}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} x(\cos h-1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\operatorname{sen} x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}\lim_{h\to 0}\cos x$$

Veamos cuánto da el siguiente límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}\,\frac{\cos h+1}{\cos h+1}=\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h)^2-1}{h\,(\cos h+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2 h}{h\,(\cos h+1)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-\operatorname{sen} h\operatorname{sen} h}{h\,(\cos h+1)}=-\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{\cos h+1}=(-1)\,0=0$$

De manera que:

$$f'(x)=\operatorname{sen} x\cdot 0+1\cdot\cos x=\cos x$$

Por lo tanto, $f(x)=senx \Rightarrow \boxed{f'(x)=\cos x}$

OBSERVACIÓN:

Es importante notar que lo que hicimos en los ejemplos anteriores demuestra que todas las funciones consideradas son derivables en todo punto de su dominio y, por otro lado, establece cuánto valen sus derivadas en cualquier punto.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DERIVABLES

1) Si f y g son derivables en x_0, entonces $f+g$ es derivable en x_0. Además:

$$\boxed{(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)}$$

Demostración: $(f+g)'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-(f(x_0)+g(x_0))}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=$$

$$=f'(x_0)+g'(x_0)$$

2) Si f y g son derivables en x_0, entonces $f\cdot g$ es derivable en x_0. Además,

$$\boxed{(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\,g(x_0)+f(x_0)\,g'(x_0)}$$

3) Si f y g son derivables en x_0 y supuesto que $g(x_0)\neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es derivable en x_0 y además:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)\,g(x_0)-f(x_0)\,g'(x_0)}{\left[g(x_0)\right]^2}}$$

4) Si f es derivable en x_0 y k es una constante, entonces $\boxed{(k\cdot f)'(x_0)=k\ f'(x_0)}$.

Damos a continuación una tabla en la que se consignan las derivadas de las funciones que utilizaremos en adelante.

FUNCIÓN	DERIVADA
k	0
x	1
x^n	$n\,x^{n-1}$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n}\,x^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\operatorname{tg} x$	$\sec^2 x$
$\operatorname{arcsen} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Apliquemos las reglas anteriores a algunos ejercicios.

11 Ejemplo Derivar $f(x) = (x^3 + \ln x)\cdot e^x$

$$f'(x) = (x^3 + \ln x)'\cdot e^x + (x^3 + \ln x)\cdot (e^x)' =$$

$$= \left(3x^2 + \frac{1}{x}\right)\cdot e^x + (x^3 + \ln x)\cdot e^x$$

12 Ejemplo Derivar $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + 4\cos x}{\operatorname{tg} x}$

$$f'(x) = \frac{(\operatorname{sen} x + 4\cos x)'\,\operatorname{tg} x - (\operatorname{sen} x + 4\cos x)\,(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg}^2 x} =$$

$$= \frac{\left[\cos x + 4\,(-\operatorname{sen} x)\right]\operatorname{tg} x - (\operatorname{sen} x + 4\cos x)\sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}$$

13 Ejemplo Derivar $g(x)=e^x\cdot \operatorname{arcsen} x+\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}+\ln 2}$.

$$g'(x)=(e^x \operatorname{arcsen} x)'+\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}+\ln 2}\right)'=$$

$$=(e^x)'\cdot\operatorname{arcsen} x+e^x\cdot(\operatorname{arcsen} x)'+\frac{(\ln x)'(\sqrt{x}+\ln 2)-\ln x(\sqrt{x}+\ln 2)'}{(\sqrt{x}+\ln 2)^2}=$$

$$=e^x\cdot\operatorname{arcsen} x+e^x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\frac{1}{x}(\sqrt{x}+\ln 2)-\ln x\,\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+\ln 2)^2}$$

14 Ejemplo Derivar $h(x)=\dfrac{x^5\cos x}{3^x-2\sqrt[4]{x}}$

$$h'(x)=\frac{(x^5\cos x)'(3^x-2\sqrt[4]{x})-(x^5\cos x)(3^x-2\sqrt[4]{x})'}{(3^x-2\sqrt[4]{x})^2}=$$

$$=\frac{\left[(x^5)'\cos x+x^5(\cos x)'\right](3^x-2\sqrt[4]{x})-(x^5\cos x)\left[(3^x)'-2(\sqrt[4]{x})'\right]}{(3^x-2\sqrt[4]{x})^2}=$$

$$=\frac{\left[5x^4\cos x+x^5(-\operatorname{sen} x)\right](3^x-2\sqrt[4]{x})-(x^5\cos x)\left(3^x\ln 3-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}}\right)}{(3^x-2\sqrt[4]{x})^2}$$

DERIVACIÓN DE FUNCIONES COMPUESTAS

Hasta ahora derivamos funciones en las que la variable x estaba afectada por una única función. Enunciaremos a continuación una fórmula (conocida como ***regla de la cadena***) que nos va a permitir hallar la derivada de funciones compuestas.

TEOREMA:

Si g es derivable en x_0 y f es derivable en $g(x_0)$, entonces $f\circ g$ es derivable en x_0. Entonces: $\boxed{(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\,g'(x_0)}$.

15 Ejemplo Derivar $h(x)=\operatorname{sen} x^2$

En este caso debemos pensar que $g(x)=x^2$ y que $f(x)=\operatorname{sen} x$. De este modo $h(x)=(f\circ g)(x)$. Luego, aplicando la regla de la cadena para un valor genérico de x resulta: $h'(x)=f'(g(x))\,g'(x)=\cos x^2\cdot 2x$

16 *Ejemplo* Derivar $f(x) = \ln(\operatorname{tg}\sqrt{x})$

Observemos que en este ejemplo hay tres funciones que se componen: $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = \operatorname{tg} x$ y $k(x) = \ln x$. De este modo $f(x) = (k \circ h \circ g)(x)$ y su derivada es:

$$f'(x) = k'\left[(h \circ g)(x)\right] \cdot h'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Por lo tanto:

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}\sqrt{x}} \cdot \sec^2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

17 *Ejemplo* Derivar $g(x) = 2^{x \operatorname{sen} x}$

La derivada de funciones del tipo $g(x) = a^{f(x)}$ es $g'(x) = a^{f(x)} \ln a \; f'(x)$. Por lo tanto:

$$g'(x) = 2^{x \operatorname{sen} x} \; \ln 2 \; (\operatorname{sen} x + x \cos x)$$

18 *Ejemplo* Derivar $h(x) = \cos^3(\ln\sqrt[3]{x})$

$$h'(x) = 3\cos^2(\ln\sqrt[3]{x})\,(-\operatorname{sen}(\ln\sqrt[3]{x}))\,\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

19 *Ejemplo* Derivar $f(x) = \sqrt{\ln \operatorname{sen} x} + (\operatorname{tg}\sqrt{x})^{-2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln \operatorname{sen} x}}\,\frac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x + (-2)\,(\operatorname{tg}\sqrt{x})^{-3}\sec^2\sqrt{x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{\cos x}{2\sqrt{\ln \operatorname{sen} x}.\operatorname{sen} x} - \frac{(\operatorname{tg}\sqrt{x})^{-3}.\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

20 *Ejemplo* Derivar $g(x) = \ln\left(\dfrac{e^{x^3}}{\sec x}\right)$

Observemos que en este ejemplo vamos a necesitar la derivada de la función secante. Luego, si $f(x) = \sec x$, entonces $f'(x) = \dfrac{0.\cos x - (-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \sec x \cdot \operatorname{tg} x$. Por lo tanto:

$$g'(x) = \frac{1}{\dfrac{e^{x^3}}{\sec x}} . \frac{(e^{x^3})'.\sec x - e^{x^3}.(\sec x)'}{(\sec x)^2} =$$

$$=\frac{\sec x}{e^{x^3}}\cdot\frac{e^{x^3}3x^2\sec x-e^{x^3}\sec x\,\operatorname{tg} x}{\sec^2 x}=\frac{\sec x}{e^{x^3}}\cdot\frac{e^{x^3}\sec x\,(3x^2-\operatorname{tg} x)}{\sec^2 x}=3x^2-\operatorname{tg} x$$

21 Ejemplo Derivar $f(x)=\dfrac{\sqrt{e^{\cos x}}}{\cos e^x.\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

$$f'(x)=\frac{(\sqrt{e^{\cos x}})'.\cos e^x.\sqrt{\operatorname{sen} x}-\sqrt{e^{\cos x}}.(\cos e^x.\sqrt{\operatorname{sen} x})'}{(\cos e^x.\sqrt{\operatorname{sen} x})^2}=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{e^{\cos x}}}.e^{\cos x}.(-\operatorname{sen} x).\cos e^x.\sqrt{\operatorname{sen} x}-\sqrt{e^{\cos x}}((\cos e^x)'\sqrt{\operatorname{sen} x}+\cos e^x.(\sqrt{\operatorname{sen} x})')}{\cos^2 e^x.(\sqrt{\operatorname{sen} x})^2}=$$

$$=\frac{\dfrac{-1}{2\sqrt{e^{\cos x}}}.e^{\cos x}.\operatorname{sen} x.\cos e^x.\sqrt{\operatorname{sen} x}-\sqrt{e^{\cos x}}.\left(-\operatorname{sen} e^x.e^x.\sqrt{\operatorname{sen} x}+\cos e^x.\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}\right)}{\cos^2 e^x.\operatorname{sen} x}$$

DERIVADA LOGARÍTMICA

Sean f y g dos funciones derivables y supongamos $f(x)>0$ para todo x en el dominio de f. Estudiaremos cómo derivar funciones del tipo $f(x)^{g(x)}$.

Consideremos la función $h(x)=f(x)^{g(x)}$.

- Aplicamos logaritmo natural a ambos miembros de la igualdad.

$$\ln h(x)=\ln f(x)^{g(x)}$$

- Usamos la propiedad de logaritmo que establece $\ln a^b=b\ln a$.

$$\ln h(x)=g(x)\ln f(x)$$

- Derivamos ambos miembros recordando utilizar regla de la cadena.

$$\frac{1}{h(x)}h'(x)=g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{1}{f(x)}f'(x)$$

- Despejamos $h'(x)$.

$$h'(x)=h(x)\left[g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{1}{f(x)}f'(x)\right]$$

- Reemplazamos $h(x)$.

$$\boxed{h'(x)=f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{1}{f(x)}f'(x)\right]}$$

22 *Ejemplo* Hallar la derivada de $f(x)=x^{\operatorname{tg} x}$

$$\ln f(x)=\ln x^{\operatorname{tg} x}$$

$$\ln f(x)=\operatorname{tg} x \ln x$$

$$\frac{1}{f(x)}\,f'(x)=\sec^2 x \ln x+\operatorname{tg} x\,\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=f(x)\left[\sec^2 x \ln x+\operatorname{tg} x\,\frac{1}{x}\right]$$

$$f'(x)=x^{\operatorname{tg} x}\left[\sec^2 x \ln x+\operatorname{tg} x\,\frac{1}{x}\right]$$

23 *Ejemplo* Derivar $g(x)=(\operatorname{sen} x)^{\ln x}$

$$g(x)=(\operatorname{sen} x)^{\ln x}$$

$$\ln g(x)=\ln(\operatorname{sen} x)^{\ln x}$$

$$\ln g(x)=\ln x\;\ln(\operatorname{sen} x)$$

$$\frac{1}{g(x)}\,g'(x)=\frac{1}{x}\ln(\operatorname{sen} x)+\ln x\,\frac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x$$

$$g'(x)=g(x)\left[\frac{1}{x}\ln(\operatorname{sen} x)+\ln x\,\frac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x\right]$$

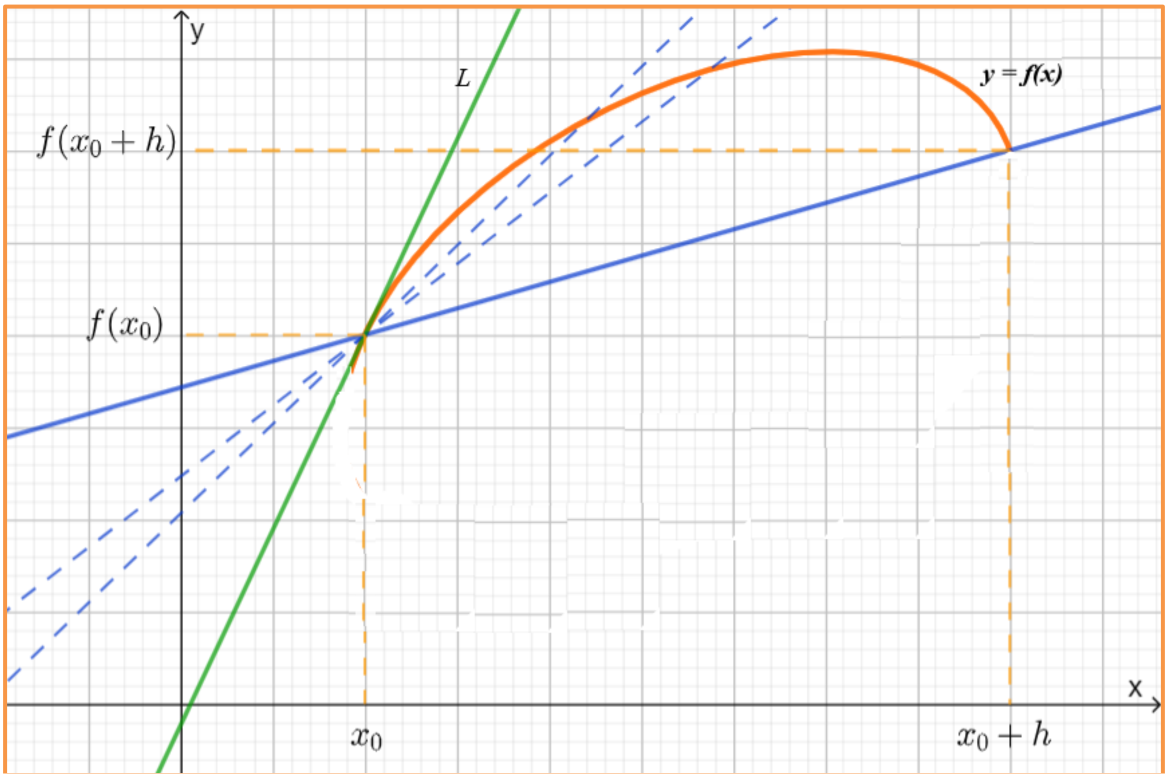
$$g'(x)=(\operatorname{sen} x)^{\ln x}\left[\frac{1}{x}\ln(\operatorname{sen} x)+\ln x\,\frac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x\right]$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

Desde el punto de vista geométrico la derivada de una función en un punto indica la pendiente de la recta tangente a la curva (que es la gráfica de dicha función) en el punto.

En efecto, consideremos la recta que pasa por los puntos $(x_0; f(x_0))$ y $(x_0+h; f(x_0+h))$. Según vimos en el capítulo de funciones la pendiente de dicha recta es:

$$\boxed{m=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$



Si ahora tomamos valores de $\boldsymbol{h}$ cada vez más pequeños se puede apreciar en la figura que la recta considerada se va aproximando a la recta $\boldsymbol{L}$, tangente a la curva en el punto de coordenadas $(x_0; f(x_0))$. Además, la pendiente $\boldsymbol{m}$ de esa recta se va aproximando a la derivada $f'(x_0)$.

Luego, concluimos que:

> "Sea f una función definida en (a,b) y sea $x_0 \in (a,b)$. Si existe $f'(x_0)$ es igual a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de coordenadas $(x_0; f(x_0))$".

ECUACIONES DE LAS RECTAS TANGENTE Y NORMAL

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de coordenadas $(x_0; f(x_0))$ es:

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

Análogamente, si $f'(x_0) \neq 0$, la ecuación de la recta normal es:

$$\boxed{y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$$

24 Ejemplo Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la función $f(x)=\dfrac{4}{x}+x^2$ en el punto de abscisa $x_0=-1$.

- Calculamos $f'(x)$: $\quad f'(x)=-\dfrac{4}{x^2}+2x$
- Reemplazamos en $x_0=-1$: $\quad f'(-1)=-\dfrac{4}{(-1)^2}+2(-1)=-4-2=-6$
- Calculamos $f(-1)$: $\quad f(-1)=\dfrac{4}{(-1)}+(-1)^2=-4+1=-3$
- Reemplazamos en la ecuación de la recta tangente.

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

$$y-(-3)=(-6)(x-(-1))$$

$$y+3=(-6)(x+1)$$

$$\boxed{y=-6x-9}$$

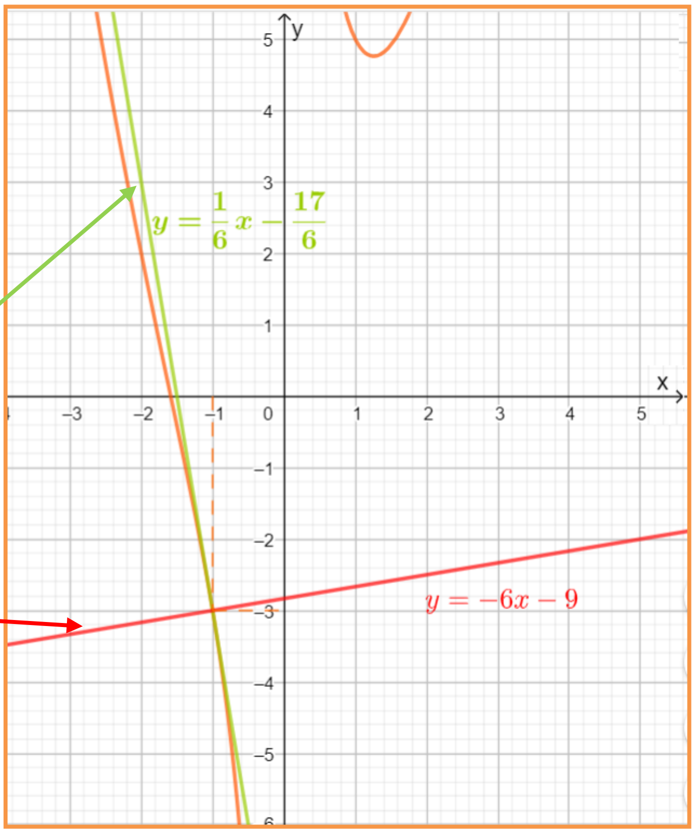
- Reemplazamos en la ecuación de la recta normal.

$$y-f(x_0)=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

$$y-(-3)=\frac{-1}{(-6)}(x-(-1))$$

$$y+3=\frac{1}{6}(x+1)$$

$$\boxed{y=\frac{1}{6}x-\frac{17}{6}}$$



25 Ejemplo Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x)=x^3-3x-5$ que es paralela a la recta de ecuación $y=9x-5$.

Si ambas rectas deben ser paralelas, debe ocurrir que sus pendientes sean iguales, es decir, $g'(x_0)=9$, ya que $g'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de g y 9 es la pendiente de la recta dada.

- Calculamos $g'(x)$: $g'(x)=3x^2-3$
- Reemplazamos por x_0 y resolvemos la ecuación: $g'(x_0)=9$

$$3x_0^2-3=9 \;\Rightarrow\; x_0^2=4 \;\Rightarrow\; |x_0|=2 \;\Rightarrow\; x_0=2 \;\vee\; x_0=-2$$

El resultado anterior indica que debemos hallar las ecuaciones de dos rectas (tangentes ambas); una para $x_0=2$ y otra para $x_0=-2$.

- Calculamos la recta tangente para $x_0=2$. Como $g(2)=2^3-3.2-5=-3$, entonces:

$$y-(-3)=9\,(x-2) \;\Rightarrow\; y+3=9x-18 \;\Rightarrow\; \boxed{y=9x-21}$$

- Calculamos la recta tangente para $x_0=-2$. Como $g(-2)=(-2)^3-3\,(-2)-5=-7$, entonces:

$$y-(-7)=9\,(x-(-2)) \;\Rightarrow\; y+7=9x+18 \;\Rightarrow\; \boxed{y=9x+11}$$

Como ejercicio de integración de los conceptos vistos resolveremos el siguiente problema.

26 Ejemplo Hallar los valores de a y b constantes para que la función f sea derivable en $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{x}+1 & x<-1 \\ b\,(x+1)+2 & x\geq -1 \end{cases}$$

Veamos primero si f es continua, ya que si no lo es tampoco puede ser derivable (recordar el teorema que relaciona continuidad con derivabilidad).

Como $\dfrac{a}{x}+1$ es continua $\forall\, x<-1$ (el único punto de discontinuidad está en $x=0$ pero no pertenece al intervalo considerado) y $b\,(x+1)+2$ también es continua $\forall\, x\geq -1$ (por ser un polinomio es continua para todo x real, en particular lo es para el intervalo considerado), estudiaremos sólo que ocurre en $x_0=-1$.

i) $f(-1)=b\,(-1+1)+2=2$

ii) $L^-=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{a}{x}+1=-a+1 \;\wedge\; L^+=\lim\limits_{x\to -1^+} b\,(x+1)+2=2$

Luego, para que el límite exista debe suceder que $L^+=L^-=L$, es decir, $-a+1=2$. Por lo tanto, $\boxed{a=-1}$.

Analicemos ahora la derivabilidad.

$$f'^-(-1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\frac{-1}{-1+h}+1-2}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{(-1+h)\,h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-1}{-1+h}=1$$

$$f'^+(-1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{b\,(-1+h+1)+2-2}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{b\,h}{h}=b$$

Luego, para que la función sea derivable debe verificarse qué $f'^{-}(-1) = f'^{+}(-1)$. Por lo tanto, $\boxed{b=1}$
.

DERIVADAS SUCESIVAS

Al hallar la derivada de una función f cualquiera, obtenemos otra función llamada f'. Luego, la noción de derivabilidad puede aplicarse a la función f' de la siguiente manera:

$$\boxed{(f')'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h}}$$

dando lugar a una nueva función (cuyo dominio son todos los puntos $x = x_0$ para los cuales f' es derivable) y que simplemente denotamos f''.

Por lo tanto, si $f''(x_0)$ existe se dice que f es dos veces derivable en $x = x_0$ y el número $f''(x_0)$ recibe el nombre de ***derivada segunda*** de f en $x = x_0$.

Análogamente, podríamos definir $f''' = (f'')'$, $f^{iv} = (f''')'$, etc. llamadas, respectivamente, ***derivada tercera***, ***derivada cuarta***, etc. Comúnmente se conocen como ***derivadas de orden superior*** de ***f.***

Para encontrar fácilmente las derivadas de orden superior de una función, calculamos primero su función derivada y sin sustituir el valor de la variable *x*, derivamos nuevamente.

27 *Ejemplo* Calcular f'' en $x_0 = 0$ si $f(x) = e^{5x} + x^3$.

- Primero calculamos $f'(x)$: $f'(x) = 5e^{5x} + 3x^2$
- Derivamos nuevamente: $f''(x) = 25e^{5x} + 6x$
- Reemplazamos a x por 0: $f''(0) = 25e^0 + 6.0 = 25$

28 *Ejemplo* Calcular f''' siendo $f(x) = ln(1+x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

DIFERENCIAL

DEFINICIÓN: Dada una función f, un número real x_0 tal que f sea derivable en $x = x_0$ y un incremento Δx, llamamos ***diferencial*** de f $\left(df = df\left(x_0, \Delta x\right)\right)$ al producto de $f'(x_0)$ por Δx. En símbolos,

$$\boxed{df = f'(x_0)\,\Delta x}$$

OBSERVACIÓN:

Si en lugar de considerar un punto en particular tomamos un punto genérico se obtiene la ***función diferencial***: $df = f'(x)\,\Delta x$.

Cualquiera sea la variable independiente, siempre su incremento coincide con su diferencial. En efecto, si $f(x) = x$ su diferencial es $df = f'(x)\ \Delta x = 1.\Delta x = \Delta x$, pero como $df = dx$, obtenemos que $\Delta x = dx$.

Luego, si consideramos $y = f(x)$, otra expresión para la función diferencial es:

$$\boxed{dy = f'(x)\,dx}$$

29 Ejemplo Calcular el diferencial de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^3 + e^x + 2$

$f'(x) = 3x^2 + e^x \quad \Rightarrow \quad df = (3x^2 + e^x)\,dx$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x+x^3}$

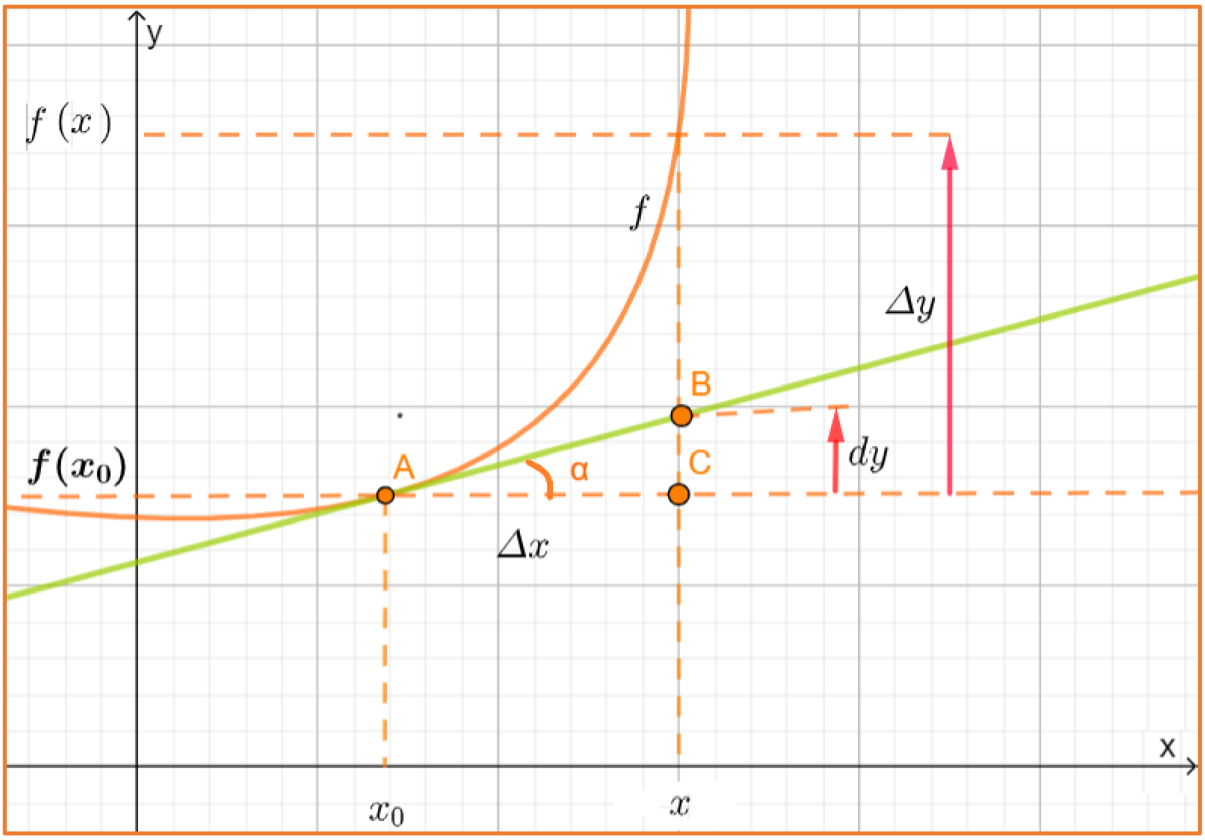
$$f'(x) = \frac{2x.(2x+x^3)-(2+3x^2).(x^2+1)}{(2x+x^3)^2} = \frac{4x^2+2x^4-2x^2-2-3x^4-3x^2}{(2x+x^3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^4-x^2-2}{(2x+x^3)^2} \quad \Rightarrow \quad df = \left(\frac{-x^4-x^2-2}{(2x+x^3)^2}\right)dx$$

c) $f(x) = e^{x^3 \operatorname{sen} x}$

$$f'(x) = e^{x^3 \operatorname{sen} x}\,(3x^2 \operatorname{sen} x + x^3 \cos x) \quad \Rightarrow \quad df = \left[e^{x^3 \operatorname{sen} x}\,(3x^2 \operatorname{sen} x + x^3 \cos x)\right]dx$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL DIFERENCIAL



$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \quad \Rightarrow \quad df = f'(x_0)\,\Delta x = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\,\overline{AC} = \overline{BC}$$

Por lo tanto, el diferencial de la función f en $x = x_0$ es igual al incremento que sufre la recta tangente a f en $x = x_0$ al pasar de x_0 al punto incrementado $x = x_0 + \Delta x$.

Observemos además que sí $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, entonces $\Delta f - df$ da la diferencia entre los incrementos de ordenadas que sufrieron la función f y su recta tangente al pasar de x_0 a $x_0 + \Delta x$.

Se puede apreciar que a medida que Δx tiende a 0, la diferencia $\Delta f - df$ también tiende a 0. Luego, para valores pequeños de Δx ocurre que $\Delta f \cong df$.

Por lo tanto, df (por ser una aproximación de Δf) da una expresión que permite calcular valores aproximados de la función.

30 *Ejemplo* Dada la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$, se pide:

a) Calcular analíticamente el Δf y el df en $x_0 = 1$ para $\Delta x = 0,5$.

b) Hallar un valor aproximado de f en $x = 1,5$ mediante el uso de diferenciales.

a) Primero hallemos la derivada de $\boldsymbol{f}$: $f'(x) = x + 1$.

Luego, reemplazamos a $\boldsymbol{x}$ por **1**: $f'(1) = 1 + 1 = 2$.

Por lo tanto, $df = f'(1)\ \Delta x = 2 \cdot 0{,}5 = 1$.

Calculamos ahora Δf:

$$\Delta f = f(1 + \Delta x) - f(1) = f(1 + 0{,}5) - f(1) = f(1{,}5) - f(1) = 2{,}625 - 1{,}5 = 1{,}125$$

b) Sabemos que $\Delta f \cong df$. Luego:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cong f'(x_0)\ \Delta x \quad \Rightarrow \quad f(x_0 + \Delta x) \cong f'(x_0)\ \Delta x + f(x_0)$$

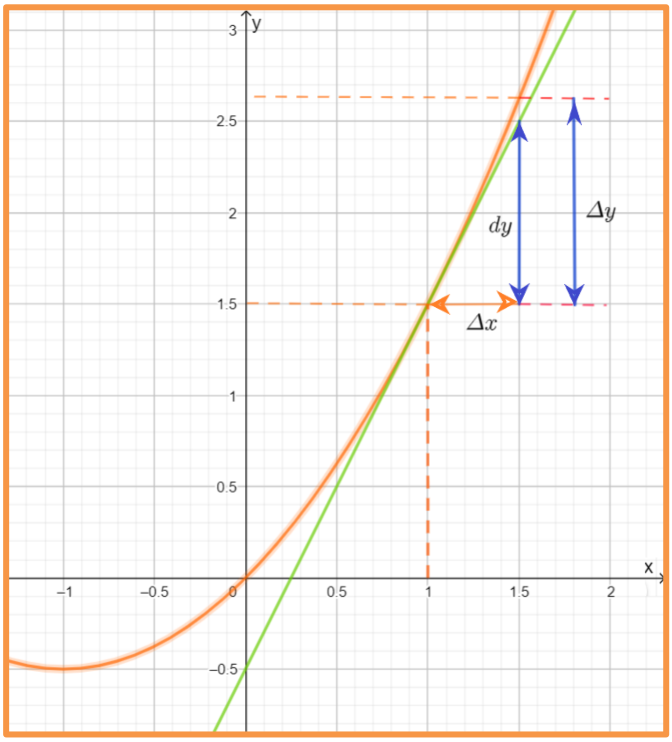
A efectos de aplicar esta fórmula de cálculo (que da una aproximación de $\boldsymbol{f}$ a partir del diferencial), debemos reconocer x_0 y $\boldsymbol{\Delta x}$.

$$x = x_0 + \Delta x = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 1 \quad \wedge \quad \Delta x = 0{,}5$$

Reemplazando, obtenemos:

$$f(1 + 0{,}5) \cong f'(1)\ 0{,}5 + f(1) \quad \Rightarrow \quad f(1{,}5) \cong 2{,}5$$

Para visualizar mejor el problema, su representación gráfica es:



APLICACIONES ECONÓMICAS: ANÁLISIS MARGINAL

COSTO MARGINAL

Definimos el ***costo marginal*** como el valor límite del costo promedio por artículo extra cuando ese número de artículos extra tiende a cero.

Expliquemos la definición anterior.
Cuando un fabricante cambia su producción (que llamamos x) a $x+\Delta x$, donde Δx representa la variación en la producción, el costo (denotado C) se incrementa en ΔC, donde ΔC representa el costo extra causado por la producción de Δx artículos extras.

Ahora bien, el costo promedio por artículo extra es: $\dfrac{\Delta C}{\Delta x}$

Luego, si deseamos calcular el costo promedio por artículo extra cuando se efectúa un cambio muy pequeño en la cantidad producida tenemos:

$$\boxed{C_{\text{Marg}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}}$$

De donde el costo marginal no es otra cosa que la primera derivada del costo total, es decir:

$$\boxed{C_{\text{Marg}}(x) = C'(x)}$$

31 Ejemplo El costo de un artículo está dado por $C(x)=0{,}002x^3-0{,}4x^2+50x+2000$ Determinar el costo marginal en función de x y evaluar el costo marginal cuando la producción es de 100 unidades.

El costo marginal es: $C'(x)=0{,}006x^2-0{,}8x+50$. Luego, si reemplazamos a x por **100** obtenemos: $C'(100)=0{,}006\,(100)^2-0{,}8\,.100+50=30$.

INGRESO MARGINAL

El ***ingreso marginal*** representa las entradas adicionales producidas por artículo adicional vendido cuando ocurre un incremento muy pequeño en el número de artículos vendidos.

$$\boxed{I_{\text{Marg}}(x) = I'(x)}$$

32 *Ejemplo* Determinar el ingreso marginal cuando $x = 200$ si la ecuación de demanda es $x + 80p = 800$.

El ingreso se calcula como el producto de la cantidad demandada por el precio, es decir:

$$\boxed{I(x) = x \cdot p}$$

Como la función de demanda está dada por $x + 80p = 800$, entonces $p = \frac{800 - x}{80} = 10 - \frac{x}{80}$.

Reemplazando en la función de ingreso: $I(x) = x\left(10 - \frac{x}{80}\right) = 10x - \frac{x^2}{80}$.

Derivando obtenemos el ingreso marginal: $I'(x) = 10 - \frac{x}{40}$.

Reemplazando la x por 200 nos queda el resultado pedido: $I'(200) = 10 - \frac{200}{40} = 5$

BENEFICIO MARGINAL

Si $B(x)$ representa el beneficio total por la venta de x unidades, $B'(x)$ (llamado ***beneficio marginal***) es el beneficio adicional por cada artículo extra si la producción sufre un pequeño incremento.

33 *Ejemplo* La ecuación de demanda de cierto artículo está dada por $p + 0{,}02x = 100$ y la función de costo por $C(x) = 6000 + 10x$. Determinar el beneficio marginal para $x = 500$.

Sabemos que $\boxed{B(x) = I(x) - C(x)}$ y que $\boxed{I(x) = x \cdot p}$.

Como $p + 0{,}02x = 100$, entonces $p = 100 - 0{,}02x$. Luego:

$$I(x) = x\,(100 - 0{,}02x) = 100x - 0{,}02x^2$$

Reemplazando en la función de beneficio:

$$B(x) = (100x - 0{,}02x^2) - (6000 + 10x) = -6000 + 90x - 0{,}02x^2$$

Derivamos la función beneficio para obtener la función beneficio marginal:

$$B'(x) = 90 - 0{,}04x$$

Reemplazando x por 500 obtenemos el resultado buscado:

$$B'(500) = 90 - 0{,}04 \,.\, 500 = 70$$

ELASTICIDAD

ELASTICIDAD DE LA DEMANDA

Para algún artículo dado se tiene que p es el precio por unidad y x el número de unidades que se adquieren durante un período determinado de tiempo al precio p. Sea $x = f(p)$.

Supongamos que el precio se incrementa de p a $p+\Delta p$. Entonces, la cantidad demandada cambiará, por ejemplo, de x a $x+\Delta x$. Luego:

$$x+\Delta x = f(p+\Delta p) \;\Rightarrow\; \Delta x = f(p+\Delta p) - x \;\Rightarrow\; \Delta x = f(p+\Delta p) - f(p)$$

El incremento de p es Δp y este es una fracción del precio original que llamamos $\dfrac{\Delta p}{p}$.

Es posible decir también que el incremento porcentual en el precio es: $100 \cdot \dfrac{\Delta p}{p}$.

Análogamente el incremento porcentual en la cantidad demandada es: $100 \cdot \dfrac{\Delta x}{x}$.

Observemos que mientras el incremento porcentual en el precio puede ser positivo, el incremento porcentual en la cantidad demandada correspondiente será negativo y recíprocamente.

Efectuamos la razón de estos dos incrementos porcentuales y calculamos el límite para Δp tendiendo a 0, a dicha razón la denominamos ***elasticidad*** y la simbolizamos $\dfrac{Ex}{Ep}$.

$$\frac{Ex}{Ep} = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{100 \cdot \dfrac{\Delta x}{x}}{100 \cdot \dfrac{\Delta p}{p}} = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{p}{x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta p} = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp} \quad \therefore \quad \boxed{\frac{Ex}{Ep} = \frac{p}{f(p)} \cdot f'(p)}$$

Así, la elasticidad de la demanda es igual al valor límite de la razón de cambio porcentual en la demanda respecto al cambio porcentual en el precio, cuando el cambio en el precio tiende a cero.

CLASIFICACIÓN DE LA DEMANDA: Sea $\boxed{\eta = \left|\dfrac{Ex}{Ep}\right|}$. Luego, de acuerdo con el valor que tome η vamos a clasificar la demanda.

η	Clasificación de la Demanda
$\eta = 0$	La demanda es ***perfectamente inelástica.***, es decir, la cantidad demandada del bien no se modifica en absoluto al variar el precio
$\eta = \infty$	La demanda es ***perfectamente elástica.***
$0 < \eta < 1$	La demanda es ***inelástica***, es decir, la demanda varía en forma proporcionalmente menor a lo que varía el precio.
$\eta > 1$	La demanda es ***elástica***, es decir, varía en una proporción mayor que el precio.
$\eta = 1$	La demanda es ***unitaria***, es decir, la demanda varía en igual proporción que el precio.

34 *Ejemplo* Sea $x = 400\ (20 - p)$ la función de demanda de cierto artículo. Hallar su elasticidad para los siguientes niveles de precio: $p = 5$, $p = 10$ y $p = 15$. Clasificar la demanda en cada caso.

Hallemos primero la derivada de la demanda: $x'(p) = -400$. Luego, la elasticidad es:

$$\frac{Ex}{Ep} = \frac{p}{x} \cdot x' = \frac{p}{400\ (20 - p)} \cdot (-400) = \frac{-p}{20 - p}$$

Reemplacemos por los distintos valores de $\boldsymbol{p}$ y clasifiquemos la demanda para cada caso.

- $\frac{Ex}{Ep}(5) = \frac{-5}{20-5} = \frac{-1}{3} \Rightarrow \boxed{\eta = \frac{1}{3}}$. Luego, la demanda es inelástica.
- $\frac{Ex}{Ep}(10) = \frac{-10}{20-10} = -1 \Rightarrow \boxed{\eta = 1}$. Luego, la demanda es unitaria.
- $\frac{Ex}{Ep}(15) = \frac{-15}{20-15} = -3 \Rightarrow \boxed{\eta = 3}$. Luego, la demanda es elástica.

GENERALIZACIÓN DEL CONCEPTO DE ELASTICIDAD:

Si $y = f(x)$, podemos definir la ***elasticidad*** de y con respecto a x como:

$$\frac{Ey}{Ex} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{o bien} \quad \frac{Ey}{Ex} = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$$

CAPÍTULO 4

APLICACIÓN DE LA FUNCIÓN DERIVADA

CAPÍTULO 4

APLICACIÓN DE LA FUNCIÓN DERIVADA

PRIMERA PARTE: ESTUDIO DE FUNCIONES

En esta primera parte del capítulo vamos a aplicar todo lo aprendido sobre derivadas para obtener la representación gráfica de funciones.

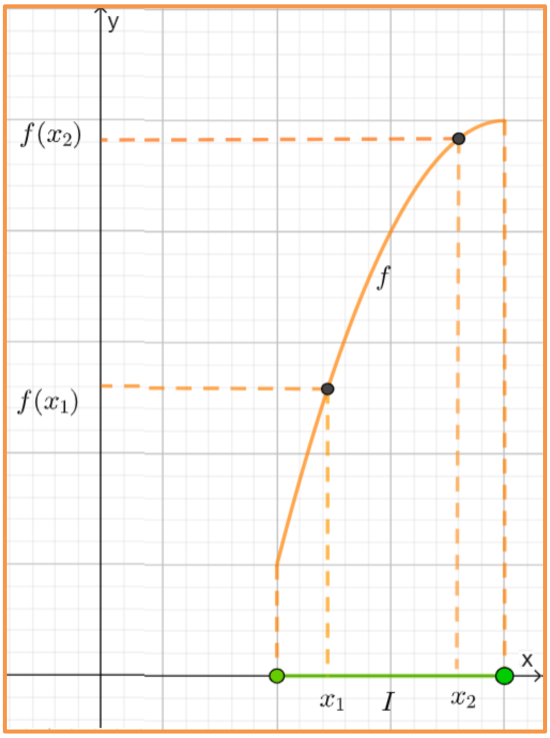
FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

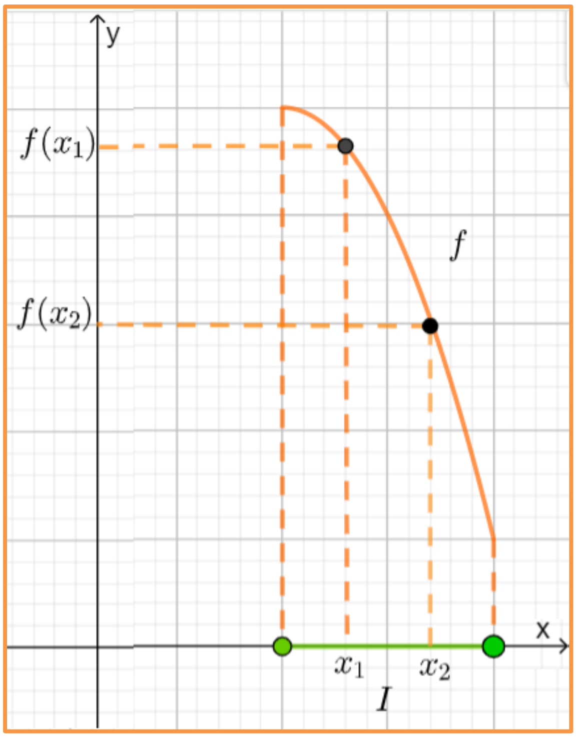
DEFINICIÓN:

Sea ***f una*** función definida en un intervalo ***I***, diremos que:

a) ***f es creciente en I*** si para todo $x_1 \in I$ y $x_2 \in I$, cuando $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$.

b) ***f es decreciente en I*** si para todo $x_1 \in I$ y $x_2 \in I$, cuando $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) \geq f(x_2)$.





OBSERVACIÓN:

Las definiciones anteriores corresponden a funciones ***crecientes*** o ***decrecientes***. Si cambiamos los signos $\leq$ y $\geq$ por $<$ y $>$ obtenemos las definiciones de ***estrictamente crecientes*** y ***estrictamente decrecientes***.

Vamos a analizar cómo el signo de la primera derivada de una función da información sobre su monotonía (crecimiento o decrecimiento).

PROPIEDAD 1: Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b).

a) Si $f'(x)>0$ para todo $x\in(a,b)$, entonces f es estrictamente creciente en $[a,b]$.

b) Si $f'(x)<0$ para todo $x\in(a,b)$, entonces f es estrictamente decreciente en $[a,b]$.

PROPIEDAD 2: Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivable en todo punto.

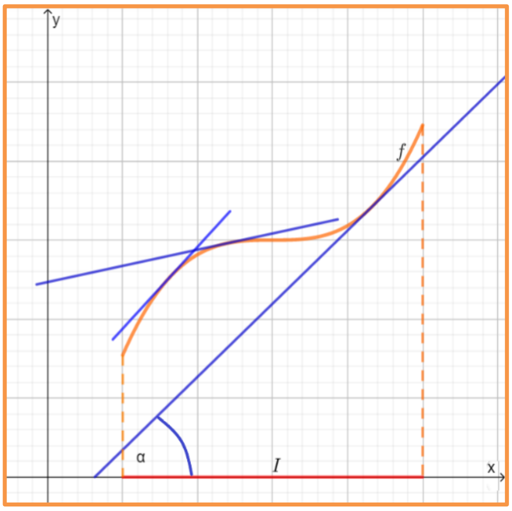
a) Si f es creciente, entonces $f'(x)\geq 0$ para todo $x\in(a,b)$.

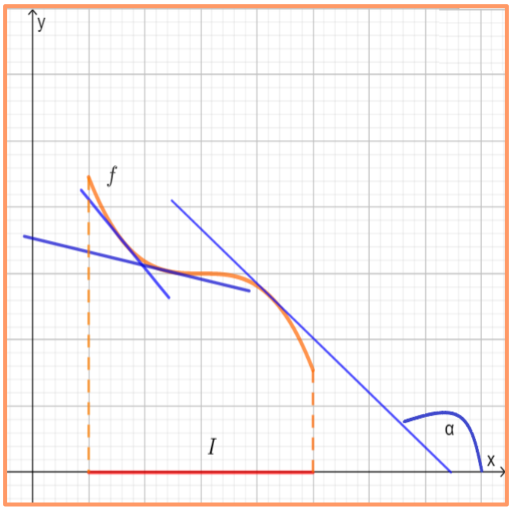
b) Si f es decreciente, entonces $f'(x)\leq 0$ para todo $x\in(a,b)$.

OBSERVACIÓN:

Las propiedades anteriores pueden interpretarse geométricamente.

- Si una función derivable crece en un intervalo I, la recta tangente a la curva de f en cualquier punto tiene pendiente no negativa (forma ángulo agudo con el semieje positivo x, pudiendo ser en algunos puntos nulo).
- Si una función decrece en I, la pendiente de la recta tangente en cualquier punto no es positiva (forma ángulo obtuso con el semieje positivo x pudiendo ser nulo en alguno de ellos).





01 Ejemplo Indicar en qué subconjunto del dominio es creciente o decreciente la función $f(x)=x^3-9x^2+15x+3$.

- Hallamos primero el dominio de f : $Df = \mathbb{R}$
- Calculamos la derivada de f : $f'(x)=3x^2-18x+15$
- Factorizamos $f'(x)$: $f'(x)=3(x-1)(x-5)$

Debemos determinar para qué subconjuntos del dominio $f'(x)$ es positiva y para cuáles es negativa.

Observemos que el signo de $f'(x)$ depende de los factores $(x-1)$ y $(x-5)$.

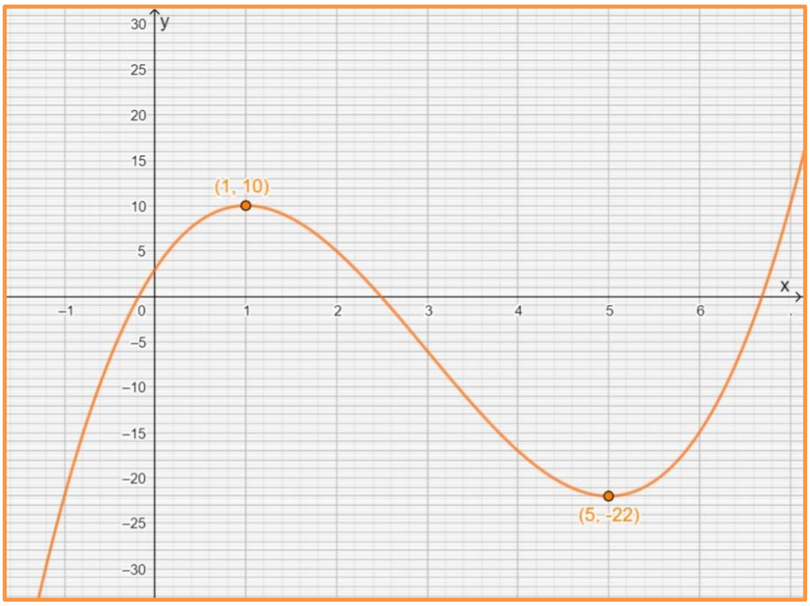
- $f'(x)>0 \iff (x-1)(x-5)>0 \iff (x>1 \wedge x>5) \vee (x<1 \wedge x<5)$
  $\iff x>5 \vee x<1$.
  Por lo tanto, f crece en $(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$.
- $f'(x)<0 \iff (x-1)(x-5)<0 \iff (x<1 \wedge x>5) \vee (x>1 \wedge x<5)$
  $\iff 1<x<5$.
  Por lo tanto, f decrece en $(1,5)$.

OBSERVACIÓN:

En el ejemplo anterior se podría proceder de otra forma: dividiendo el dominio en intervalos con los puntos que resultan raíces de $f'(x)=0$ y determinando luego el signo de $f'(x)$ en cada intervalo.

INTERVALO	$(-\infty,1)$	$(1,5)$	$(5,+\infty)$
sg $f'(x)$	+	-	+
	***f* crece**	***f* decrece**	***f* crece**

Para determinar el signo de $f'(x)$ en cada intervalo evaluamos $f'(x)$ en un punto interior cualquiera a cada uno, ya que siendo en este caso $f'(x)$ una función continua, por el corolario del teorema de Bolzano, conserva su signo entre dos ceros consecutivos.



02 *Ejemplo* Indicar en qué subconjunto del dominio es creciente o decreciente la función $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

- Hallamos primero el dominio de f : $Df=\mathbb{R}-\{0\}$
- Calculamos la derivada de f :

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)'\,x-(x)'\,(x^2+1)}{x^2}=\frac{2x\,x-(x^2+1)}{x^2}=\frac{2x^2-x^2-1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$$

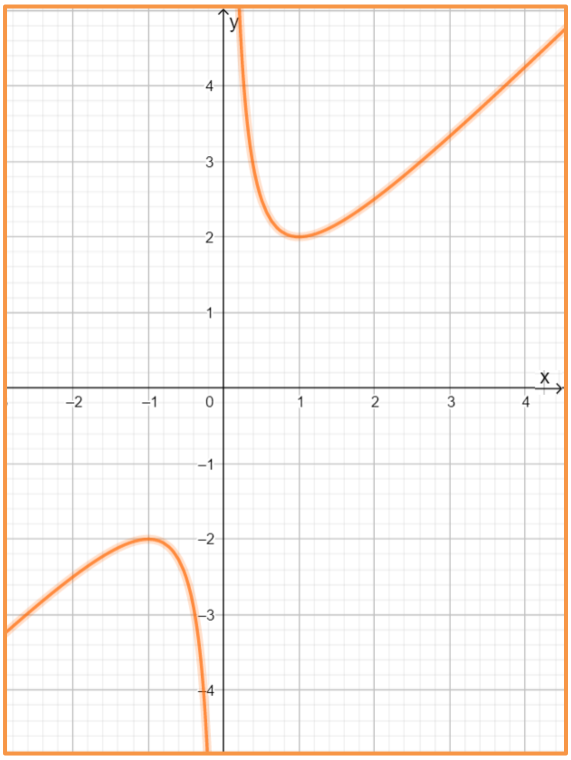
- Hallamos los ceros de $f'(x)$:

$$f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2-1}{x^2}=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2=1 \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{x=1}\ \vee\ \boxed{x=-1}$$

- Determinamos el signo de $f'(x)$: El signo de $f'(x)$ está determinado por x^2-1 ya que el divisor x^2 es siempre positivo. Como el dominio de f presenta una restricción hay que tenerla en cuenta en los intervalos que vamos a considerar para analizar el signo de la función derivada, para que se cumpla la hipótesis de continuidad que exige el corolario del teorema de Bolzano.

INTERVALO	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
sg $f'(x)$	+	-	-	+
	f **crece**	*f* **decrece**	*f* **decrece**	*f* **crece**

Por lo tanto, f crece en $\boxed{(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)}$ y f decrece en $\boxed{(-1,0)\cup(0,1)}$.

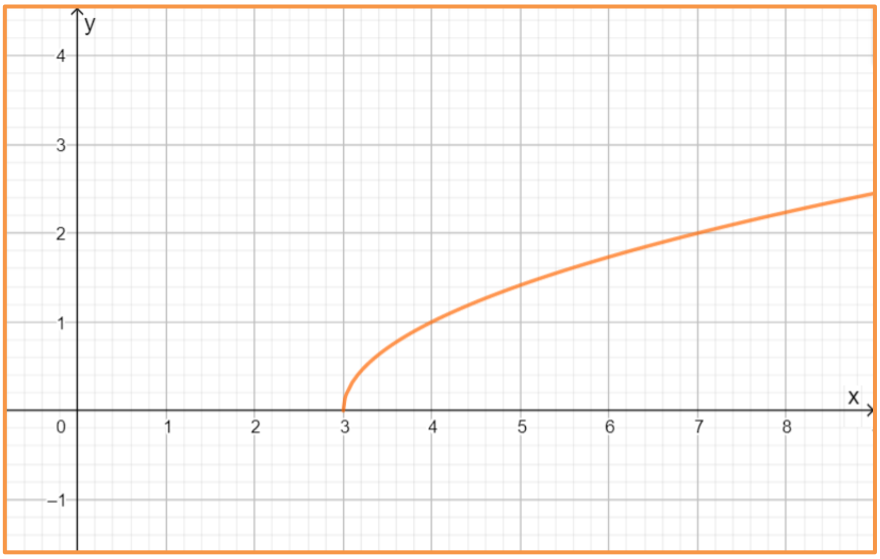


03 *Ejemplo* Indicar en qué subconjunto del dominio es creciente o decreciente la función $f(x)=\sqrt{x-3}$.

Hallamos primero el dominio de f: $Df=[3,+\infty)$. Calculamos la derivada de f :

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x-3)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}(x-3)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$

Observemos que el dominio de $f'(x)$ es $(3, +\infty)$ y que en ese intervalo es siempre positiva. Luego, por propiedad 1, ***f*** crece en $[3, +\infty)$.



EXTREMOS RELATIVOS O LOCALES

DEFINICIÓN:

Sea x_0 un punto interior al dominio de ***f*** , es decir, tal que existe un intervalo abierto $I \subset Df$ con $x_0 \in I$.

a) ***f*** alcanza en x_0 un ***máximo relativo*** o ***local*** si existe un entorno de x_0 donde se cumple que $f(x) \leq f(x_0)$ para cualquier punto ***x*** de este.

b) ***f*** alcanza en x_0 un ***mínimo relativo*** o ***local*** si existe un entorno de x_0 donde se cumple que $f(x) \geq f(x_0)$ para cualquier punto ***x*** del mismo.

DEFINICIÓN:

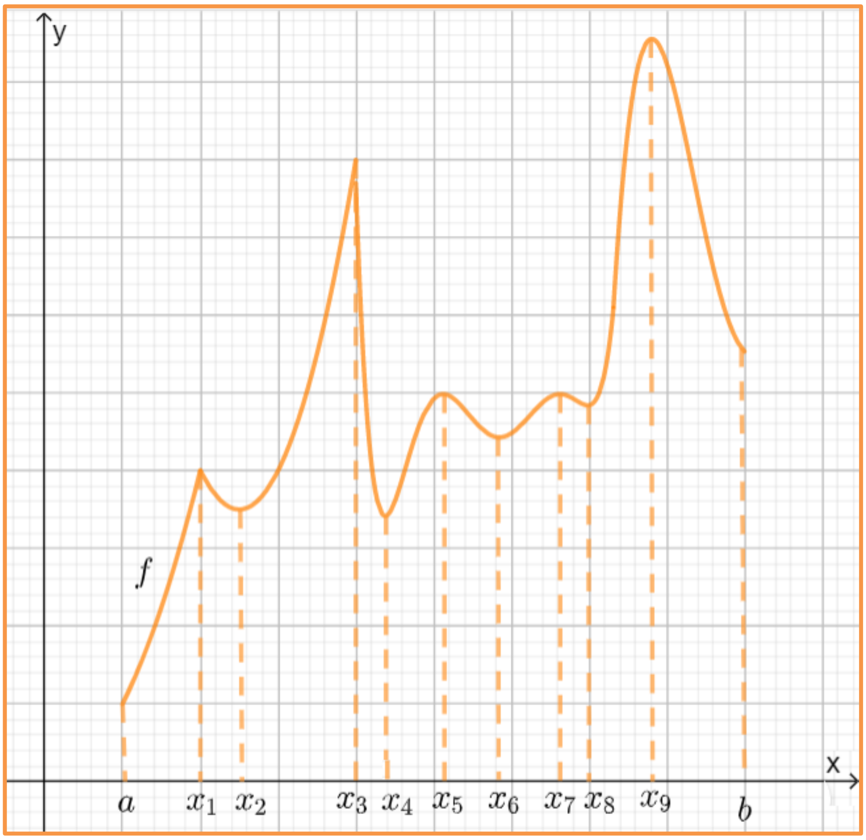
Sea ***f*** una función y sea $x_0 \in Df$.

a) ***f*** alcanza en x_0 un ***máximo absoluto*** si se cumple que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo ***x*** perteneciente al dominio de la función.

b) ***f*** alcanza en x_0 un ***mínimo absoluto*** si se cumple que $f(x) \geq f(x_0)$ para todo ***x*** perteneciente al dominio de la función.

04 *Ejemplo*

Hallar máximos y mínimos locales y absolutos en la función $\boldsymbol{f}: [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \to \mathbb{R}$ cuya gráfica está dada a continuación.



	Mínimos	*Máximos*
Relativos	$f(x_2)$ $f(x_4)$ $f(x_6)$ $f(x_8)$ $f(b)$	$f(x_1)$ $f(x_3)$ $f(x_5)$ $f(x_7)$
Absolutos	$f(a)$	$f(x_9)$

OBSERVACIÓN:

El mínimo relativo que alcanza una función en un punto puede ser mayor que el máximo que dicha función alcance en otro punto (ver el ejemplo anterior). Además, la definición de extremo relativo exige que el punto x_0 sea interior al dominio de la función.
Luego, si $\boldsymbol{f}: [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \to \mathbb{R}$ entonces $\boldsymbol{x_0} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

CONDICIÓN NECESARIA PARA LA EXISTENCIA DE EXTREMOS RELATIVOS

Vamos a ver ahora las condiciones que debe cumplir una función derivable para tener extremos relativos (máximo o mínimo). Esta condición es necesaria pero no suficiente.

TEOREMA:

Si x_0 es extremo local de $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{f}$ es derivable en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que en x_0 la función alcanza un máximo relativo. Luego, existe un entorno $\boldsymbol{I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)}$ **donde** $\boldsymbol{f(x) \leq f(x_0)} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}$.

Sea $x = x_0 + h$ con $|h| < \delta$. Entonces: $f(x_0 + h) \leq f(x_0) \quad \therefore \quad f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$.

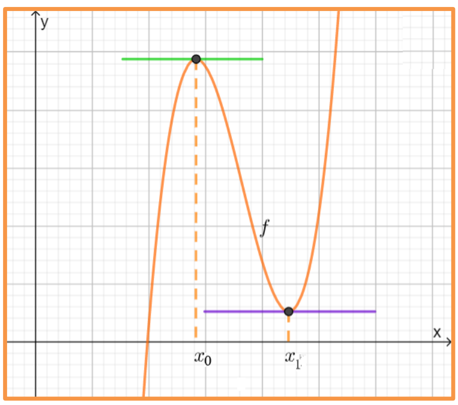
- Si $\boldsymbol{h < 0}$, entonces $\dfrac{\boldsymbol{f(x_0 + h) - f(x_0)}}{\boldsymbol{h}} \geq \boldsymbol{0}$. Luego, tomamos el límite para $\boldsymbol{h}$ tendiendo a cero por izquierda y utilizamos una de las propiedades de límite de funciones:
$$\boldsymbol{f'^{-}(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0}$$
- Si $\boldsymbol{h > 0}$, entonces $\dfrac{\boldsymbol{f(x_0+h) - f(x_0)}}{\boldsymbol{h}} \leq \boldsymbol{0}$. Luego, tomamos el límite para $\boldsymbol{h}$ tendiendo a cero por derecha: $\boldsymbol{f'^{+}(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0}$

Por hipótesis sabemos que $\boldsymbol{f}$ es derivable en x_0, por lo tanto, existe $f'(x_0)$ y esta debe ser única. En consecuencia, $\boldsymbol{f'(x_0) = f'^{-}(x_0) = f'^{+}(x_0)}$. Como obtuvimos que $\boldsymbol{f'^{-}(x_0) \geq 0}$ y $\boldsymbol{f'^{+}(x_0) \leq 0}$**,** concluimos que $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$ como queríamos demostrar.

OBSERVACIONES:

1) Que la condición anterior sea *necesaria* significa que si una función no la cumple (es decir, tiene derivada finita distinta de cero en un punto) entonces no alcanza en dicho punto ningún extremo relativo. Pero si la derivada en un punto es nula puede o no alcanzar un extremo relativo en el mismo (nada puede asegurarse pues la condición no es suficiente).
En efecto, consideremos la función $\boldsymbol{f(x) = x^3}$. Luego, $\boldsymbol{f'(x) = 3x^2}$. Claramente $\boldsymbol{f'(0) = 0}$, sin embargo, la función no tiene extremo relativo en $x = 0$. La condición estudiada no es de aplicación para funciones no derivables ya que f puede tener un extremo relativo sin que exista $\boldsymbol{f'(x_0)}$.
Tal es el caso de la función $\boldsymbol{f(x) = |x|}$. En efecto, $\boldsymbol{f(0) = 0}$ y en cualquier entorno de cero se cumple que $|x| \geq 0$. Por lo tanto, la función tiene en $\boldsymbol{x = 0}$ un mínimo relativo, aunque no exista $\boldsymbol{f'(0)}$ (recordar que $\boldsymbol{f'^{+}(0) = 1}$ y $\boldsymbol{f'^{-}(0) = -1}$**).**

2) La condición necesaria puede interpretarse geométricamente del modo siguiente: la gráfica de una función derivable tiene en los puntos donde alcanza extremos relativos recta tangente horizontal.

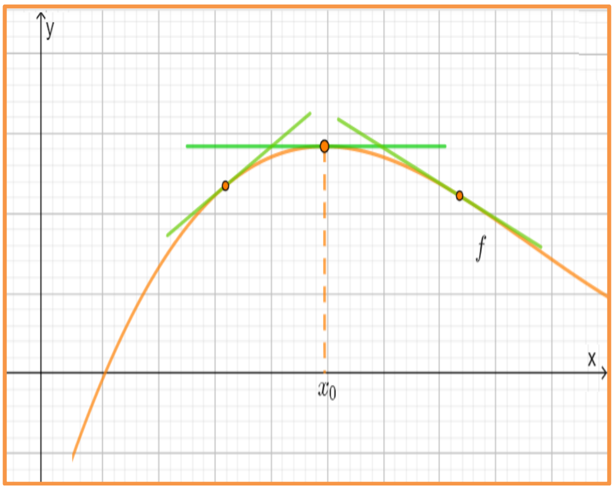


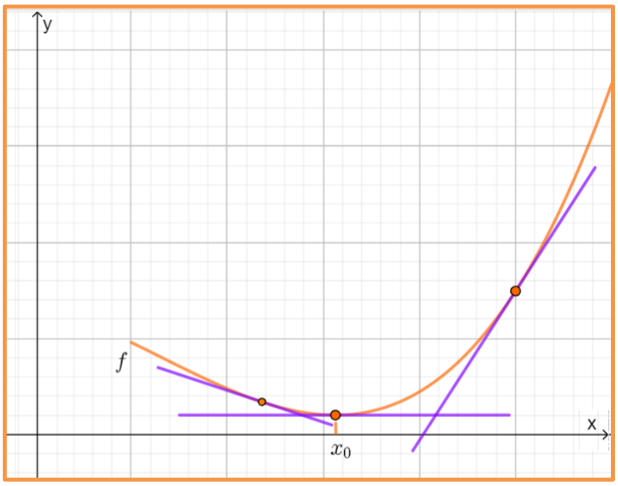
CONDICIÓN SUFICIENTE PARA LA EXISTENCIA DE EXTREMOS RELATIVOS

De todo lo dicho hasta el momento se concluye que una función sólo puede tener extremos relativos en aquellos puntos de su dominio donde la derivada existe y vale cero, o bien, en aquellos donde la derivada no existe. Llamaremos a estos ***puntos críticos***.
Cabe aclarar que para determinar si una función tiene o no un extremo relativo en un punto crítico se requiere de un análisis de la función en el mismo, utilizando dos criterios.

PRIMER CRITERIO:

Consideremos una función $\boldsymbol{f}$ continua en un entorno $\boldsymbol{I}$ de un punto crítico x_0 y derivable en cada punto $\boldsymbol{x}$ de este salvo quizá en x_0.





Geométricamente puede verse que si la recta tangente al gráfico de $\boldsymbol{f}$ tiene pendiente positiva para todo punto de $\boldsymbol{I}$ tal que $x < x_0$ y negativa para $x > x_0$ (es decir, $\boldsymbol{f}$ crece en el semientorno a izquierda de x_0 y decrece en el semientorno a derecha de x_0), entonces la función $\boldsymbol{f}$ tiene en x_0 un máximo relativo.
Análogamente, si para todo punto $\boldsymbol{x}$ perteneciente a $\boldsymbol{I}$ tal que $x < x_0$ la pendiente de la recta tangente al gráfico de $\boldsymbol{f}$ es negativa y para $x > x_0$ es positiva, o sea, $\boldsymbol{f}$ decrece en el semientorno a izquierda de x_0 y crece en el semientorno a derecha de x_0, entonces la función $\boldsymbol{f}$ tiene en x_0 un mínimo relativo.

EN SÍMBOLOS:

Sea x_0 un punto crítico de $\boldsymbol{f}$ y sea $\boldsymbol{I}$ un entorno de este en el cual $\boldsymbol{f}$ es continua y, además, derivable (salvo quizá para x_0). Si denotamos con $\boldsymbol{I}^-$ al semientorno a izquierda de x_0 y con $\boldsymbol{I}^+$ al semientorno a derecha de x_0, concluimos que:

- $\boldsymbol{f'(x) > 0} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}^- \quad \wedge \quad \boldsymbol{f'(x) < 0} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}^+ \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{f(x_0)}$ **es** máximo relativo.
- $\boldsymbol{f'(x) < 0} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}^- \quad \wedge \quad \boldsymbol{f'(x) > 0} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}^+ \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{f(x_0)}$ es mínimo relativo.

SEGUNDO CRITERIO:

DEMOSTRACIÓN:

Vamos a demostrar la parte **a).** Puesto que $\boldsymbol{f''(x)}$ es la derivada de la derivada primera, decir que $f''(x_0) < 0$ es equivalente a decir que:

$$\boldsymbol{f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0}$$

> Sea $\boldsymbol{f}$ una función derivable en un intervalo $\boldsymbol{I}$ y sea $x_0 \in I$ un punto crítico de $\boldsymbol{f}$ (es decir, $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$) tal que $f''(x_0) \neq 0$. Entonces:
>
> **a)** Si $\boldsymbol{f''(x_0) < 0}$, entonces $\boldsymbol{f(x_0)}$ es un máximo relativo de $\boldsymbol{f}$.
>
> **b)** Si $\boldsymbol{f''(x_0) > 0}$, entonces $\boldsymbol{f(x_0)}$ es un mínimo relativo de $\boldsymbol{f}$.

Por una de las propiedades de límite finito existe $\delta > 0$ tal que $\forall x\!: \ 0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$.

Como por hipótesis $f'(x_0) = 0$, entonces $\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0 \quad \forall x\!: \ 0 < |x - x_0| < \delta$.

Luego:

- $f'(x) > 0 \quad \forall x \ / \ x_0 - \delta < x < x_0$. Entonces, $\boldsymbol{f}$ es estrictamente creciente en $x_0 - \delta, x_0$.
- $f'(x) < 0 \quad \forall x \ / \ x_0 < \ x < x_0 + \delta$. Entonces, $\boldsymbol{f}$ es estrictamente decreciente en $x_0, x_0 + \delta)$.

Por lo tanto, $\boldsymbol{f}$ alcanza un máximo relativo en $x = x_0$ (ver primer criterio).

OBSERVACIÓN:

> Si la condición anterior no se cumple, o sea, en el punto crítico $f''(x_0) = 0$, puede ocurrir que la función tenga o no un extremo en el mismo. Por lo tanto, en ese caso es conveniente utilizar el primer criterio para determinar la existencia de extremo relativo.

Consideremos las siguientes funciones y veamos qué criterio conviene adoptar:

05 *Ejemplo* **a)** $f(x) = x^4$.

- Calculamos su derivada: $f'(x) = 4x^3$
- Hallamos los puntos críticos: $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = 0}$
- Calculamos la derivada segunda: $f''(x) = 12x^2$

Observemos que si reemplazamos en la derivada segunda por el punto crítico resulta $f''(0) = 0$ Por lo tanto, el segundo criterio no permite determinar si $\boldsymbol{f}$ admite en $x = 0$ un extremo relativo.
Luego, tenemos que utilizar el primer criterio: $f'(x) = 4x^3 > 0 \ \forall x > 0$ y $f'(x) = 4x^3 < 0 \quad \forall x < 0$. Como la derivada cambia de signo al pasar de izquierda a derecha por $x = 0$, concluimos que la función alcanza un mínimo relativo en $x = 0$.

06 *Ejemplo* **b)** $f(x) = x^3$

- Calculamos su derivada: $f'(x) = 3x^2$
- Hallamos los puntos críticos: $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = 0}$
- Calculamos la derivada segunda: $f''(x) = 6x$

Como $f''(0) = 0$ el segundo criterio no es aplicable. Utilizando el primero obtenemos que $f'(x) = 3x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$. Por lo tanto, la función no tiene extremo relativo en $\boxed{x = 0}$ (***f*** es creciente en $\mathbb{R}$).

Estamos en condiciones de dar una guía del procedimiento a seguir para el cálculo de extremos relativos de una función continua $y = f(x)$.

1) Calcular $f'(x)$
2) Hallar los *puntos críticos* resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$ y teniendo en cuenta los valores donde la derivada es discontinua (es decir, donde no existe o bien es infinita).
3) Analizar la variación del signo de la derivada primera al pasar cada punto crítico de izquierda a derecha.

- Si cambia de positivo a negativo entonces hay un *máximo relativo* en el punto.
- Si cambia de negativo a positivo entonces hay un *mínimo relativo* en el punto.
- Si no cambia de signo *no hay extremo* en dicho punto.

Hallar, si existen, extremos relativos de la función $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x^2 + 2}$.

- Hallamos el dominio de **f**: $\boldsymbol{Df} = \mathbb{R}$
- Calculamos la derivada primera: $\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 - 6x}$
- Buscamos los puntos críticos:

$$\boldsymbol{f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = 0} \quad \vee \quad \boxed{x = 2}}$$

Obsérvese que $\boldsymbol{f(x)}$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$. Luego, los únicos puntos críticos son aquellos para los cuales $\boldsymbol{f'(x) = 0}$, es decir, $\boxed{\boldsymbol{x_0 = 0}}$ y $\boxed{\boldsymbol{x_1 = 2}}$.

Los puntos críticos dividen al dominio en intervalos en cada uno de los cuales determinamos el signo de $\boldsymbol{f'(x)}$.

INTERVALO	$\boldsymbol{(-\infty, 0)}$	$\boldsymbol{(0, 2)}$	$\boldsymbol{(2, +\infty)}$
sg $\boldsymbol{f'(x)}$	+	-	+

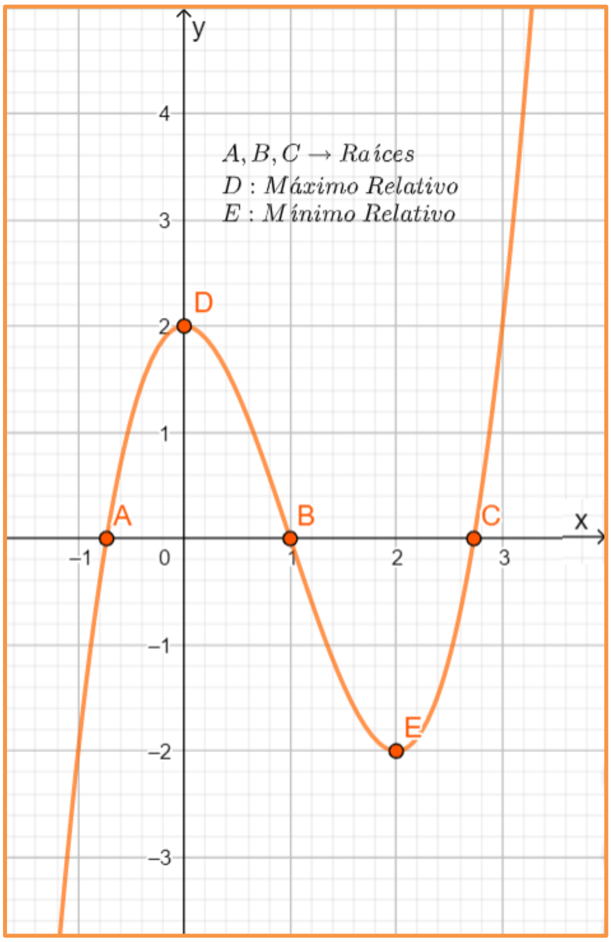
Observando la variación del signo de la primera derivada determinamos que en $x_0 = 0$ la función alcanza un máximo relativo, ya que al pasar por dicho punto de izquierda a derecha el signo de $f'(x)$ cambia de positivo a negativo. Como $f(x_0) = f(0) = 2$, el punto máximo se encuentra en $(0,2)$.

En cambio, en $x_1 = 2$ la función tiene un mínimo relativo, ya que a izquierda de este $f'(x)$ tiene signo negativo y a derecha tiene signo positivo. Como $f(x_1) = f(2) = -2$, el punto mínimo se encuentra en $(2,-2)$.

Por tratarse de una función cuya primera derivada es continua podríamos haber utilizado el segundo criterio para determinar si la función alcanza extremo en los puntos críticos.

Para ello calculamos la derivada segunda de f: $f''(x) = 6x - 6$. Luego, reemplazamos los puntos críticos en $f''(x)$:

- $f''(0) = -6 < 0$, por lo tanto, en $\boxed{x_0 = 0}$ la función alcanza un máximo relativo.
- $f''(2) = 6 > 0$, por lo tanto, en $\boxed{x_1 = 2}$ la función tiene un mínimo relativo.



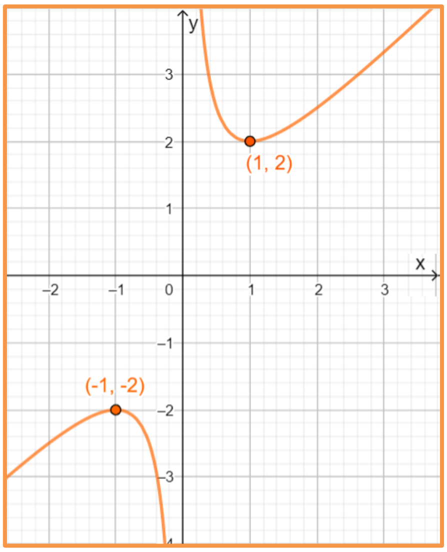
07 Ejemplo Hallar, si existen, extremos relativos de la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

- Hallamos el dominio de f: $Df = \mathbb{R} - \{0\}$
- Calculamos la derivada primera: $f'(x) = \dfrac{2x\,x - (x^2+1)}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$
- Buscamos los puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \iff \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \iff x^2 - 1 = 0 \iff \boxed{x = 1} \vee \boxed{x = -1}$$

Observemos que $f'(x)$ no está definida en $x = 0$, pero ese no es un punto crítico ya que no pertenece al dominio de la función.

- Calculamos la derivada segunda: $f''(x) = \dfrac{2x\,x^2 - (x^2-1)\,2x}{x^4} = \dfrac{2}{x^3}$
- Reemplazamos por los puntos críticos:
  $f''(-1) = -2 < 0 \quad \therefore \quad f(-1) = -2$ es un máximo relativo.
  $f''(1) = 2 > 0 \quad \therefore \quad f(1) = 2$ es un mínimo relativo.



08 *Ejemplo*

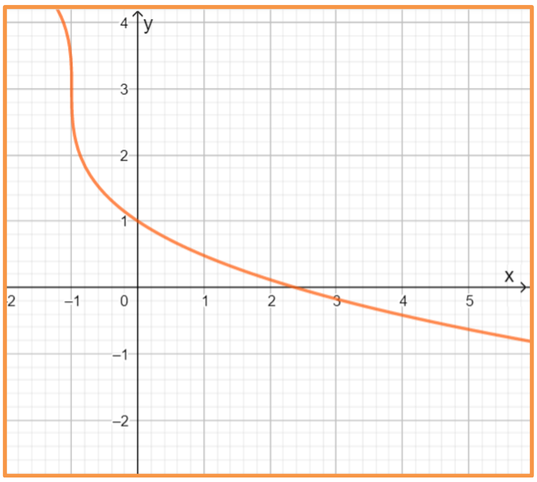
Hallar, si existen, extremos relativos de la función $f(x)=3-2(x+1)^{\frac{1}{3}}$

- Hallamos el dominio de f: $Df=\mathbb{R}$
- Calculamos la derivada primera: $f'(x)=-\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}=-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

Observemos que si bien $f'(x)\neq 0\quad \forall x\in\mathbb{R}$ la derivada no está definida para $x=-1$. Luego, el único punto crítico es $x_0=-1$. Aplicamos entonces el criterio de la variación del signo de la derivada primera. Subdividimos el dominio de la función en los siguientes intervalos, en cada uno de los cuales determinamos el signo de $f'(x)$.

INTERVALO	$(-\infty,-1)$	$(-1,+\infty)$
sg $f'(x)$	-	-

Como no hay cambio de signo de $f'(x)$ al pasar el punto crítico $x_0=-1$, concluimos que en $x_0=-1$ no hay extremo relativo. La función es decreciente en todo su dominio.



09 Ejemplo Hallar, si existen, extremos relativos de la función $f(x) = x \ln^2 x$.

- Hallamos el dominio de f: $Df = (0, +\infty)$
- Calculamos la derivada primera: $f'(x) = \ln^2 x + x\, 2\ln x \dfrac{1}{x} = \ln^2 x + 2\ln x$
- Buscamos los puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \iff \ln^2 x + 2\ln x = 0 \iff \ln x(\ln x + 2) = 0 \iff$$
$$\ln x = 0 \ \vee\ \ln x + 2 = 0 \iff \boxed{x = 1} \ \vee\ \boxed{x = e^{-2}}$$

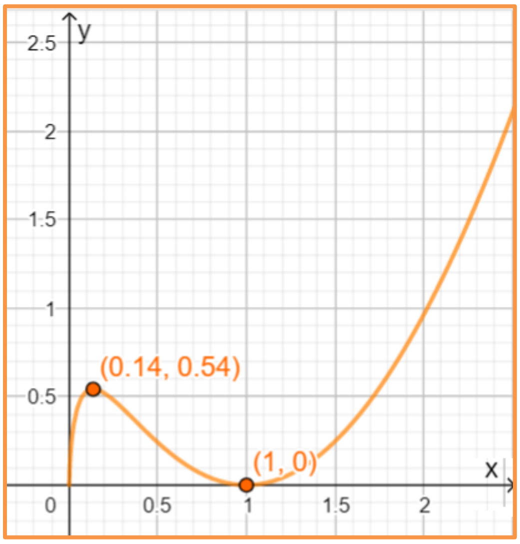
Los únicos puntos críticos son $\boxed{x_0 = e^{-2}}$ y $\boxed{x_1 = 1}$ ya que no existen puntos del dominio de f donde $f'(x)$ tenga discontinuidades.

- Calculamos la derivada segunda:

$$f''(x) = 2\ln x \frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x}(\ln x + 1)$$

- Reemplazamos por los puntos críticos:

$$f''(e^{-2}) = \frac{2}{e^{-2}}(\ln e^{-2} + 1) = \frac{2}{e^{-2}}(-2 + 1) = -2e^2 < 0$$
$$f''(1) = \frac{2}{1}(\ln 1 + 1) = 2 > 0$$



Como $f(e^{-2}) = e^{-2}\ln^2 e^{-2} = e^{-2}\,4$ y $f(1) = 0$, concluimos que la función f admite un máximo relativo en $(e^{-2}; 4e^{-2})$ y un mínimo relativo en $(1; 0)$.

10 Ejemplo Hallar, si existen, extremos relativos de la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3 & x \geq 1 \\ x^2 + 1 & x < 1 \end{cases}$$

Claramente el dominio de f es $\mathbb{R}$. Además, es continua en todo su dominio. En efecto, $y = -x + 3$ es continua $\forall x > 1$ y $y = x^2 + 1$ es continua $\forall x < 1$ ya que se trata de funciones polinómicas. Probemos que f es continua en $x_0 = 1$.

i) $f(1) = -1 + 3 = 2$

ii) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 + 1 = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} -x + 3 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

iii) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

Hallamos a continuación los puntos críticos. Buscamos para ello: los puntos del dominio donde $f'(x) = 0$ y los puntos donde no existe $f'(x)$.

Obsérvese que :

- $\forall x > 1 \quad f'(x) = -1 \neq 0$
- $\forall x < 1 \quad f'(x) = 2x$. Luego, $f'(x) = 0 \iff x = 0$.
- Analizamos ahora qué pasa en $x = 1$. Para ello debemos utilizar derivadas laterales.

$$f'^{+}(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-(1+h)+3-2}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-h}{h}=-1$$

$$f'^{-}(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^2+1-2}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+2h+h^2)-1}{h}=$$

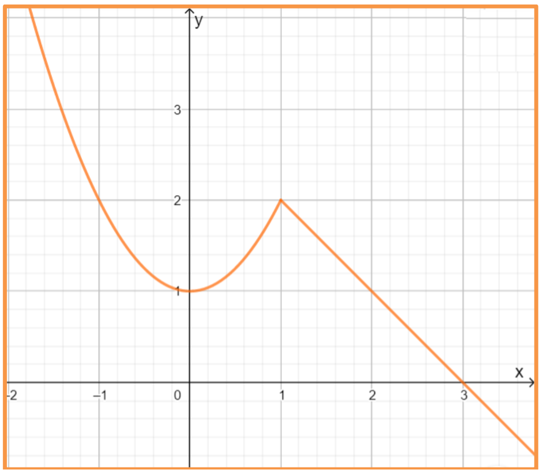
$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{h(2+h)}{h}=2$$

Como $f'^{+}(1)\neq f'^{-}(1)$ concluimos que no existe $f'(1)$.

Por lo tanto, los puntos críticos son: $\boxed{x_0=0}$ y $\boxed{x_1=1}$.

INTERVALO	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
sg $f'(x)$	-	+	-

Luego, la función f tiene un mínimo relativo en $(0;1)$ y un máximo relativo en $(1;2)$.
Veamos la gráfica de esta función.



OBSERVACIÓN:

Por un teorema visto en el capítulo de continuidad, sabemos que si una función es continua en $[a,b]$ alcanza un máximo y un mínimo absoluto en dicho intervalo. Luego, pueden ocurrir los siguientes casos:

a) El mínimo o el máximo absoluto se alcanza en un punto interior del intervalo, en cuyo caso coincidirá con un mínimo o máximo relativo.

b) El mínimo o el máximo absoluto se alcanza en alguno de los extremos del intervalo $[a,b]$.

Por lo tanto, para hallar el mínimo o el máximo absoluto de una función continua en un intervalo $[a,b]$ puede aplicarse el siguiente procedimiento:

1) Hallar todos los mínimos y máximos relativos en (a,b).

2) Determinar los valores de la función en los extremos del intervalo ($f(a)$ y $f(b)$).

3) El máximo absoluto es el mayor valor de todos los anteriormente obtenidos y el mínimo absoluto es el menor valor de ellos.

11 Ejemplo Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x) = -3x^4 + 6x^2 - 1$ en $[-2,2]$.

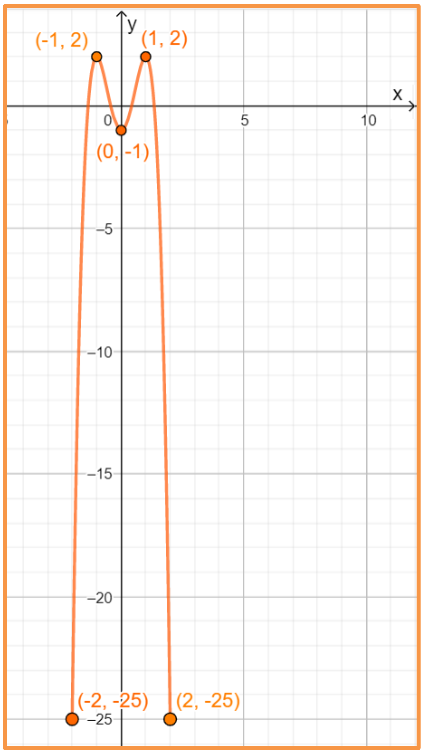
Comenzamos buscando los máximos y mínimos relativos, para lo cual necesitamos hallar

$f'(x)$: $f'(x) = -12x^3 + 12x$. Luego, buscamos los puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \iff -12x^3 + 12x = 0 \iff -12x(x^2 - 1) = 0 \iff \boxed{x = 0} \vee \boxed{x = -1} \vee \boxed{x = 1}$$

Calculamos $f''(x)$: $f''(x) = -36x^2 + 12$. Reemplazamos por los puntos críticos:

- $f''(-1) = -24 < 0$. Luego, $(-1;2)$ es un máximo relativo.
- $f''(1) = -24 < 0$. Luego, $(1;2)$ es un máximo relativo.
- $f''(0) = 12 > 0$. Luego, $(0;-1)$ es un mínimo relativo.



En los extremos del intervalo la función toma los siguientes valores: $f(-2) = -25$ y $f(2) = -25$.

Concluimos que el máximo valor de la función f en $[-2,2]$ es $y = 2$ y lo alcanza en $x = 1$ y $x = -1$. Por lo tanto, los puntos máximos absolutos de la función son $\boxed{(-1;2)}$ y $\boxed{(1;2)}$.

El mínimo valor es $y = -25$ que se alcanza en los extremos del intervalo. Por lo tanto, los puntos mínimos absolutos son $\boxed{(-2;-25)}$ y $\boxed{(2;-25)}$

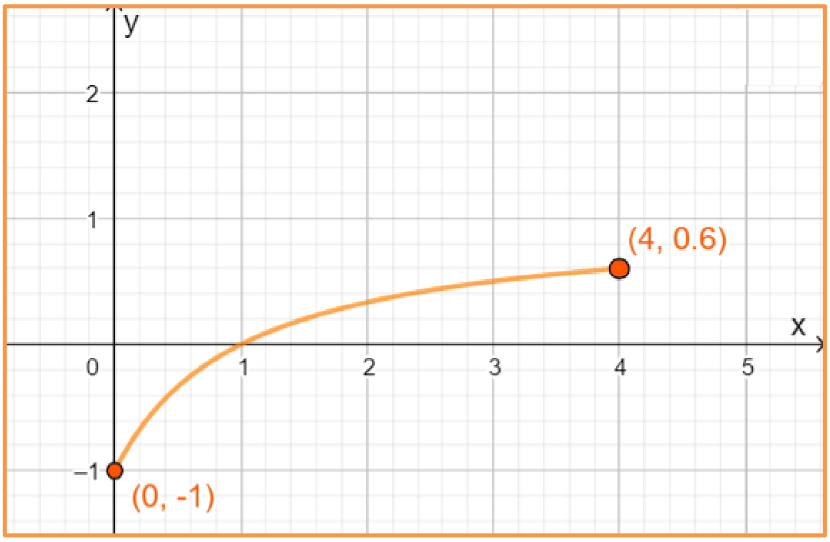
12 Ejemplo Hallar los máximos y los mínimos absolutos de la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ en $[0,4]$.

Calculamos $f'(x)$: $f'(x) = \dfrac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$.

Como $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in Df = \mathbb{R} - \{-1\}$, en particular, para todo valor de x en el intervalo considerado, concluimos que la función no tiene extremos relativos en el intervalo $(0,4)$.

Por lo tanto, calculamos el valor de la función en los extremos del intervalo:

- $f(0) = -1 \Rightarrow \boxed{(0;-1)}$ es el mínimo absoluto.
- $f(4) = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \boxed{\left(4;\dfrac{3}{5}\right)}$ es el máximo absoluto.



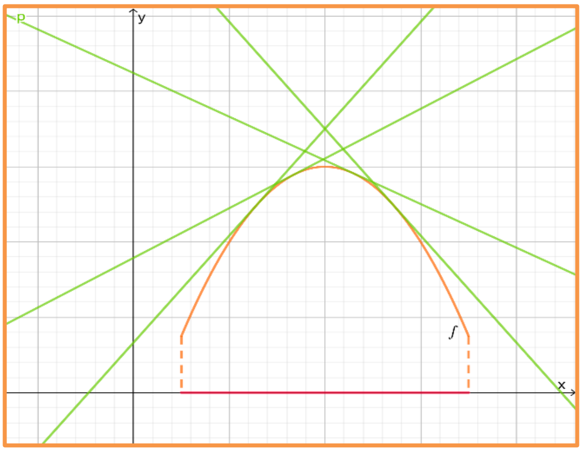
CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

DEFINICIÓN:

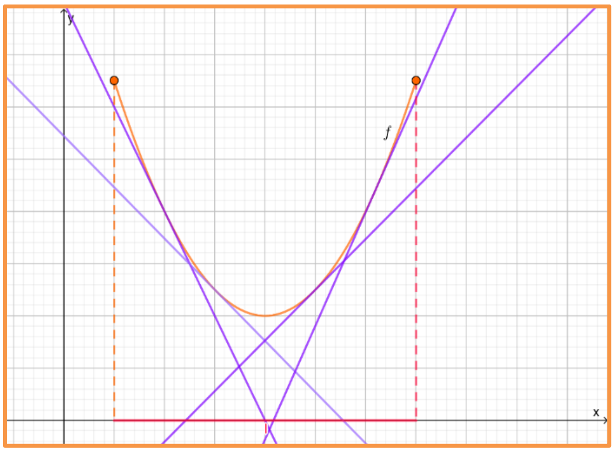
Diremos que la curva de una función ***f*** es ***cóncava positiva*** en un intervalo *I* de su dominio, si al trazar rectas tangentes a ella por puntos de *I*, la gráfica se encuentra por encima de dichas rectas.

DEFINICIÓN:

Diremos que la curva de una función ***f*** es ***cóncava negativa*** en un intervalo ***I*** de su dominio, si al trazar rectas tangentes a ella por puntos de ***I***, la gráfica se encuentra por debajo de dichas rectas.



Concavidad negativa



Concavidad positiva

OBSERVACIÓN:

Se puede observar en las gráficas anteriores que si una función es derivable y es cóncava positiva a medida que aumenta el valor de x, aumenta la pendiente de la recta tangente, es decir, aumenta $f'(x)$. En cambio, si es cóncava negativa a medida que aumenta el valor de x decrece $f'(x)$.

CRITERIO DE CONCAVIDAD

Sean f y su derivada f' dos funciones derivables en un intervalo I.

a) Si $f''(x)>0 \quad \forall x \in I$, entonces la gráfica de f es cóncava positiva en I.

b) Si $f''(x)<0 \quad \forall x \in I$, entonces la gráfica de f es cóncava negativa en I.

PUNTO DE INFLEXIÓN:

Sea f una función continua en $x = x_0$. Decimos que $(x_0, f(x_0))$ es un ***punto de inflexión*** de f si en $x = x_0$ la gráfica de la función cambia de cóncava positiva a cóncava negativa o viceversa.

PROPIEDAD:

Si en $x = x_0$ hay un punto de inflexión de f, con f dos veces derivable, entonces $f''(x_0)=0$.

OBSERVACIÓN:

La recíproca de la propiedad anterior no es cierta: sea $f(x)=x^4$ tiene derivada segunda nula en $x_0=0$ pero en cero no hay punto de inflexión, ya que su gráfica es siempre cóncava positiva.

Para determinar, si existen, los puntos de inflexión de la curva que es gráfico de una función $y=f(x)$ se aplica el siguiente procedimiento:

1) Calcular $f''(x)$.

2) Hallar los valores de x pertenecientes al dominio de la función para los cuales $f''(x)=0$, o bien, $f''(x)$ es discontinua (no existe).

3) Determinar si $f''(x)$ cambia de signo al pasar por cada punto x_0 donde $f''(x)$ es cero o discontinua.

13 Ejemplo Indicar intervalos de concavidad positiva y negativa de la siguiente función: $f(x)=x^3-3x^2-9x+9$.

El dominio de f es $\mathbb{R}$.

Derivamos dos veces sucesivas para hallar su segunda derivada:

$$f'(x)=3x^2-6x-9 \quad \Rightarrow \quad f''(x)=6x-6$$

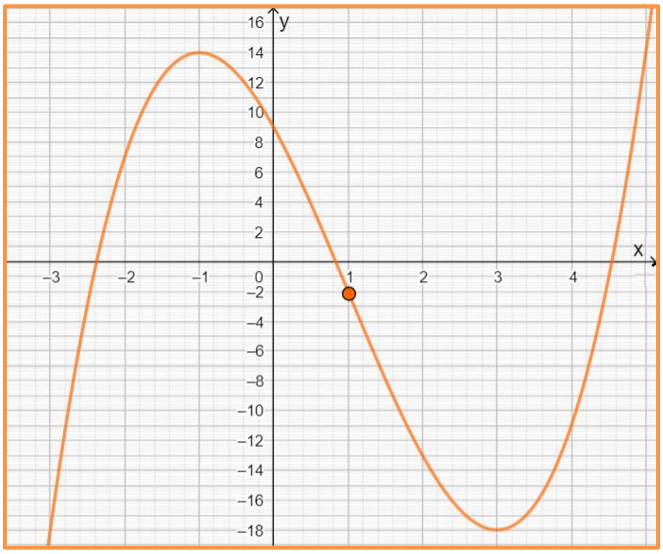
Como $f''(x)$ es continua para todo $x \in \mathbb{R}$, determinamos para qué valores se anula:

$$f''(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x-6=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x=1}$$

Este punto determina dos intervalos incluidos en el dominio de f donde estudiamos el signo de $f''(x)$.

INTERVALO	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
sg $f''(x)$	-	+
Curva de f	**Cóncava negativa**	**Cóncava positiva**

En $(1; f(1))$ la curva de f cambia el sentido de su concavidad, por lo tanto, $(1;-2)$ es un punto de inflexión.



14 *Ejemplo*

Indicar intervalos de concavidad positiva y negativa y hallar, si existen, puntos de inflexión de la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

- Hallamos el dominio de f: $Df=\mathbb{R}$
- Calculamos la primera derivada: $f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$
- Calculamos la segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{-2(x^2+1)^2+2x\,2(x^2+1)\,2x}{(x^2+1)^4}=\frac{(x^2+1)\left[-2(x^2+1)+8x^2\right]}{(x^2+1)^4}=\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

- Como $f''(x)$ es continua para todo $x\in\mathbb{R}$, sólo podría haber puntos de inflexión para aquellos valores de x donde la derivada segunda se anula.

$$f''(x)=0 \iff \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}=0 \iff 6x^2-2=0 \iff x=\frac{1}{\sqrt{3}} \ \vee\ x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

- Analizamos el signo de la derivada segunda.

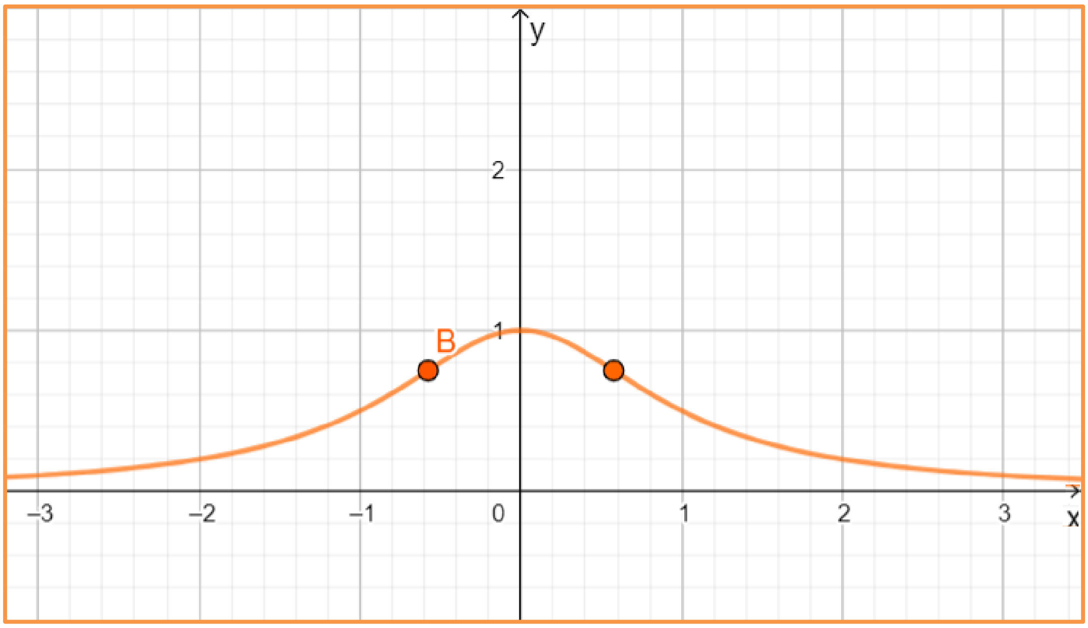
INTERVALO	$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right)$
Sg $f''(x)$	+	-	+

Por lo tanto, f es cóncava positiva en $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right)$ y f es cóncava negativa en $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. La curva de f tiene dos puntos de inflexión y ellos son: $\boxed{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{3}{4}\right)}$ y $\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{3}{4}\right)}$.

15 *Ejemplo*

Indicar intervalos de concavidad positiva y negativa y hallar, si existen, puntos de inflexión de la función $f(x)=\frac{x}{x+1}$.

- Hallamos el dominio de f: $Df=\mathbb{R}-\{-1\}$

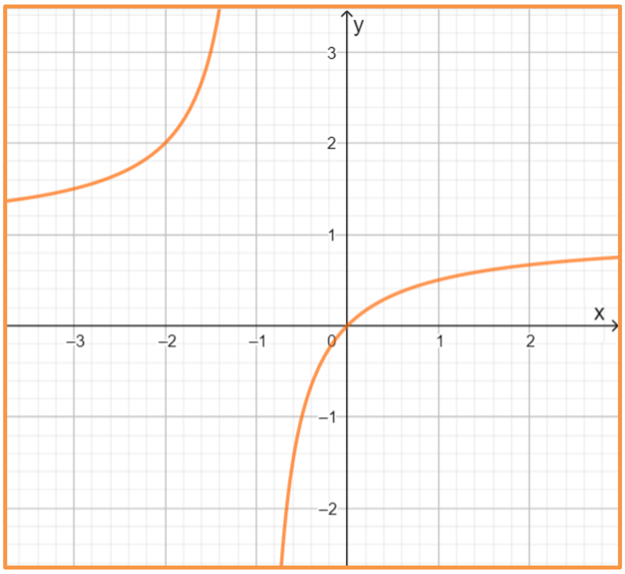


- Calculamos la primera derivada: $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$
- Calculamos la segunda derivada: $f''(x)=\frac{-2}{(x+1)^3}$
- Observamos que $f''(x)\neq 0 \quad \forall x\in Df$ y, además, $f''(x)$ es discontinua en $x=-1$.

Como la función y su primera derivada también son discontinuas en $x=-1$, concluimos que la gráfica de f no tiene puntos de inflexión.
Para determinar los intervalos de concavidad positiva y negativa estudiamos el signo de la segunda derivada.

INTERVALO	$(-\infty,-1)$	$(-1,+\infty)$
Sg $f''(x)$	+	-

Por lo tanto, f es cóncava positiva en $(-\infty,-1)$ y f es cóncava negativa en $(-1,+\infty)$.

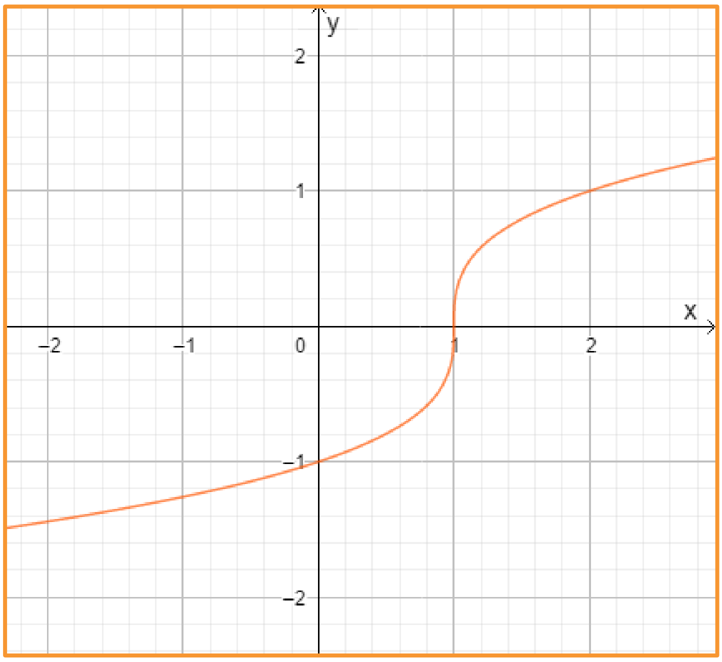


16 *Ejemplo* Indicar intervalos de concavidad positiva y negativa y hallar, si existen, puntos de inflexión de la función $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$.

- Hallamos el dominio de ***f*****:** $Df=\mathbb{R}$
- Calculamos la primera derivada: $f'(x)=\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$
- Calculamos la segunda derivada: $f''(x)=-\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}}=-\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}$
- Observemos que $f''(x)$ no se anula en ningún punto, pero es discontinua en $x=1$ (punto que pertenece al dominio de *f*). El punto $(1;0)$ es entonces un probable punto de inflexión. Estudiaremos el signo de la derivada segunda.

INTERVALO	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
Sg $f''(x)$	+	-

Por lo tanto, *f* es cóncava positiva en $(-\infty,1)$ y *f* es cóncava negativa en $(1,+\infty)$. Concluimos que el punto $(1;0)$ es un punto de inflexión.



ESTUDIO COMPLETO DE FUNCIONES

Realizar el estudio completo de una función significa determinar los siguientes elementos y características de ella que nos permitirán trazar su gráfica sin tener que confeccionar una tabla de valores:

1) Dominio.
2) Intersecciones con los ejes coordenados.
3) Intervalos de positividad y negatividad.
4) Paridad.
5) Asíntotas.
6) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
7) Extremos relativos.
8) Intervalos de concavidad positiva y negativa.
9) Puntos de inflexión.
10) Gráfico.

Como ya hemos tratado en particular cada uno de estos temas, haremos el estudio completo de algunas funciones para ilustrar el procedimiento en los siguientes ejemplos.

17 *Ejemplo* $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

1) $Df = \mathbb{R}$

2) *Intersecciones con los ejes coordenados.*

- Es fácil ver que $f(1) = 0$, por lo tanto, $x = 1$ es un cero. Factorizamos el polinomio utilizando Ruffini.

	1	-3	0	2
1		1	-2	-2
	1	-2	-2	0

Entonces, $x^3 - 3x^2 + 2 = (x-1)(x^2 - 2x - 2)$.

$f(x) = 0 \iff (x-1)(x^2-2x-2) = 0 \iff x = 1 \vee x^2 - 2x - 2 = 0$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

Luego, los ceros son: $\boxed{x_0 = 1}$, $\boxed{x_1 = 1 - \sqrt{3}}$ y $\boxed{x_2 = 1 + \sqrt{3}}$.

- La intersección con el eje y es el punto $(0;2)$.

3) *Intervalos de positividad y negatividad.*

INTERVALO	$(-\infty, 1-\sqrt{3})$	$(1-\sqrt{3}, 1)$	$(1, 1+\sqrt{3})$	$(1+\sqrt{3}, +\infty)$
Sg $f(x)$	-	+	-	+

Por lo tanto, la función es positiva en $(1-\sqrt{3}, 1) \cup (1+\sqrt{3}, +\infty)$ y es negativa en $(-\infty, 1-\sqrt{3}) \cup (1, 1+\sqrt{3})$.

4) *Paridad*

Calculamos primero $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 2 = -x^3 - 3x^2 + 2$. Luego, como $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$, concluimos que la función no tiene paridad.

5) *Asíntotas*

- *Verticales*: No tiene ya que el dominio es $Df = \mathbb{R}$.
- *Horizontales u oblicuas*:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x} = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x} = +\infty$$

Por lo tanto, no existen asíntotas ni horizontales ni verticales.

6) *Crecimiento y decrecimiento.*

- Calculamos la primera derivada de f: $f'(x) = 3x^2 - 6x$
- Hallamos los puntos críticos. Como $f'(x)$ no presenta discontinuidades, sólo buscaremos los valores que la anulan.

  $f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 6x = 0 \iff 3x(x-2) = 0 \iff \boxed{x = 0} \vee \boxed{x = 2}$
- Analizamos el signo de $f'(x)$.

INTERVALO	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
sg $f'(x)$	+	-	+

Por lo tanto, la función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y es decreciente en $(0, 2)$.

7) *Extremos relativos.*

Observando el cuadro anterior concluimos que la función tiene un máximo relativo en el punto $(0;2)$ y un mínimo relativo en el punto $(2;-2)$.

8) *Intervalos de concavidad positiva y negativa.*

- Calculamos la segunda derivada: $f''(x) = 6x - 6$
- Esta función está definida para todo x real y vale cero para $x = 1$.
- Analizamos el signo de $f''(x)$.

INTERVALO	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
sg $f''(x)$	-	+

Por lo tanto, la función es cóncava negativa en $(-\infty,1)$ y es cóncava positiva en $(1,+\infty)$.

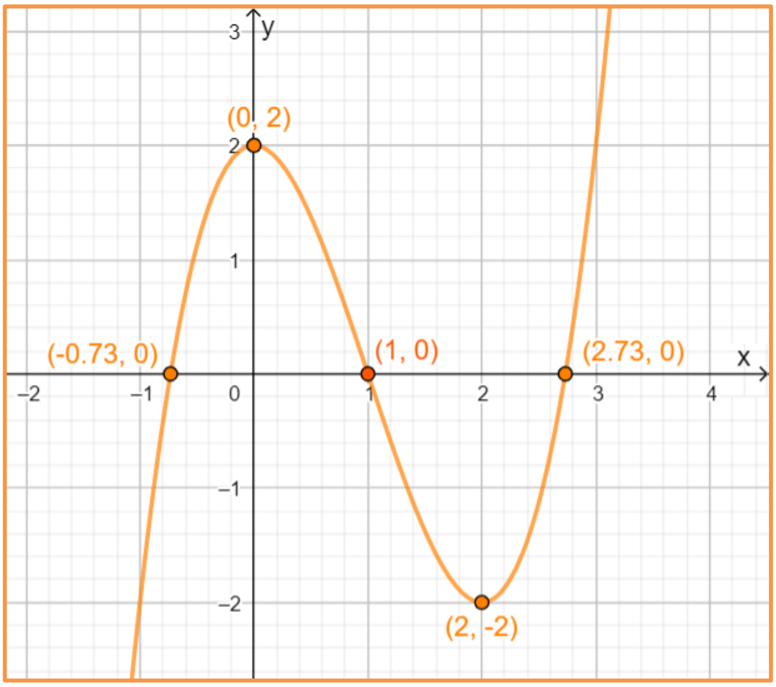
9) *Puntos de inflexión*

Del análisis hecho en el cuadro anterior se deduce que $(1;0)$ es un punto de inflexión.

10) *Gráfico*

Es de mucha ayuda para el trazado del gráfico resumir toda la información que tenemos acerca de la función en un cuadro como el siguiente.

x	$(-\infty,1-\sqrt{3})$	$1-\sqrt{3}$	$(1-\sqrt{3},0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,1+\sqrt{3})$	$1+\sqrt{3}$	$(1+\sqrt{3},+\infty)$
$f(x)$	(−)	0	(+)	2	(+)	0	(−)	−2	(−)	0	(+)
$f'(x)$	(+)	6	(+)	0	(−)	−3	(−)	0	(+)	6	(+)
$f''(x)$	(−)	$-\sqrt{3}$	(−)	−1	(−)	0	(+)	1	(+)	$\sqrt{3}$	(+)
	Crece			*Máx.*	*Decrece*			*Mín.*	*Crece*		
	Cóncava negativa					*P.I.*	*Cóncava positiva*				



17 Ejemplo $f(x)=\dfrac{18}{x^2-9}$

1) $Df=\mathbb{R}-\{-3,3\}$

2) *Intersecciones con los ejes coordenados.*

- *Con eje x*: No tiene ya que $f(x)$ no vale cero en ningún punto.
- *Con eje y*: Hacemos $x=0$, entonces $y=-2$. Luego, el punto es $(0;-2)$.

3) *Intervalos de positividad y negatividad.*
Dividimos el dominio de la función en los puntos de discontinuidad.

INTERVALO	$(-\infty,-3)$	$(-3,3)$	$(3,+\infty)$
Sg $f(x)$	+	-	+

4) *Paridad*

$$f(-x)=\frac{18}{(-x)^2-9}=\frac{18}{x^2-9}=f(x)$$

Luego, se trata de una función par. La gráfica será una curva simétrica respecto del eje de ordenadas.

5) *Asíntotas*

- *Verticales*:
- $\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{18}{x^2-9}=-\infty \;\wedge\; \lim\limits_{x\to-3^-}\dfrac{18}{x^2-9}=+\infty \;\therefore\; \boxed{x=-3}$ es asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{18}{x^2-9}=+\infty \;\wedge\; \lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{18}{x^2-9}=-\infty \;\therefore\; \boxed{x=3}$ es asíntota vertical.

- *Horizontales u oblicuas*

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{18}{x(x^2-9)}=0$$

Luego, como $m=0$ hay asíntota horizontal.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{18}{x^2-9}=0 \;\therefore\; \boxed{y=0}$ es asíntota horizontal.

6) *Intervalos de crecimiento y decrecimiento*

- $f'(x)=-18\,(x^2-9)^{-2}\,2x=\dfrac{-36x}{(x^2-9)^2}$
- $f'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{-36x}{(x^2-9)^2}=0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{x=0}$
- Como además $f'(x)$ no está definida en $x=-3$ y $x=3$, obtenemos el siguiente cuadro.

INTERVALO	$(-\infty,-3)$	$(-3,0)$	$(0,3)$	$(3,+\infty)$
sg $f'(x)$	+	+	-	-

Por lo tanto, la función crece en $(-\infty,-3)\cup(-3,0)$ y decrece en $(0,3)\cup(3,+\infty)$.

7) *Extremos relativos*

El análisis anterior muestra que en el punto $(0;-2)$ la función admite un máximo relativo.

8) *Intervalos de concavidad positiva y negativa*

$$f''(x)=\frac{-36\,(x^2-9)^2+36x\,2\,(x^2-9)\,2x}{(x^2-9)^4}=\frac{(x^2-9)\left[-36\,(x^2-9)+144x^2\right]}{(x^2-9)^4}=\frac{108x^2+324}{(x^2-9)^3}$$

Observemos que $f''(x)\neq 0 \quad \forall x\in Df$ y es discontinua en $x=-3$ y $x=3$, donde también es discontinua la función.

Estudiamos el signo de la derivada segunda.

INTERVALO	$(-\infty,-3)$	$(-3,3)$	$(3,+\infty)$
sg $f''(x)$	+	-	+

Por lo tanto, la función es cóncava positiva en $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$ y es cóncava negativa en $(-3,3)$.

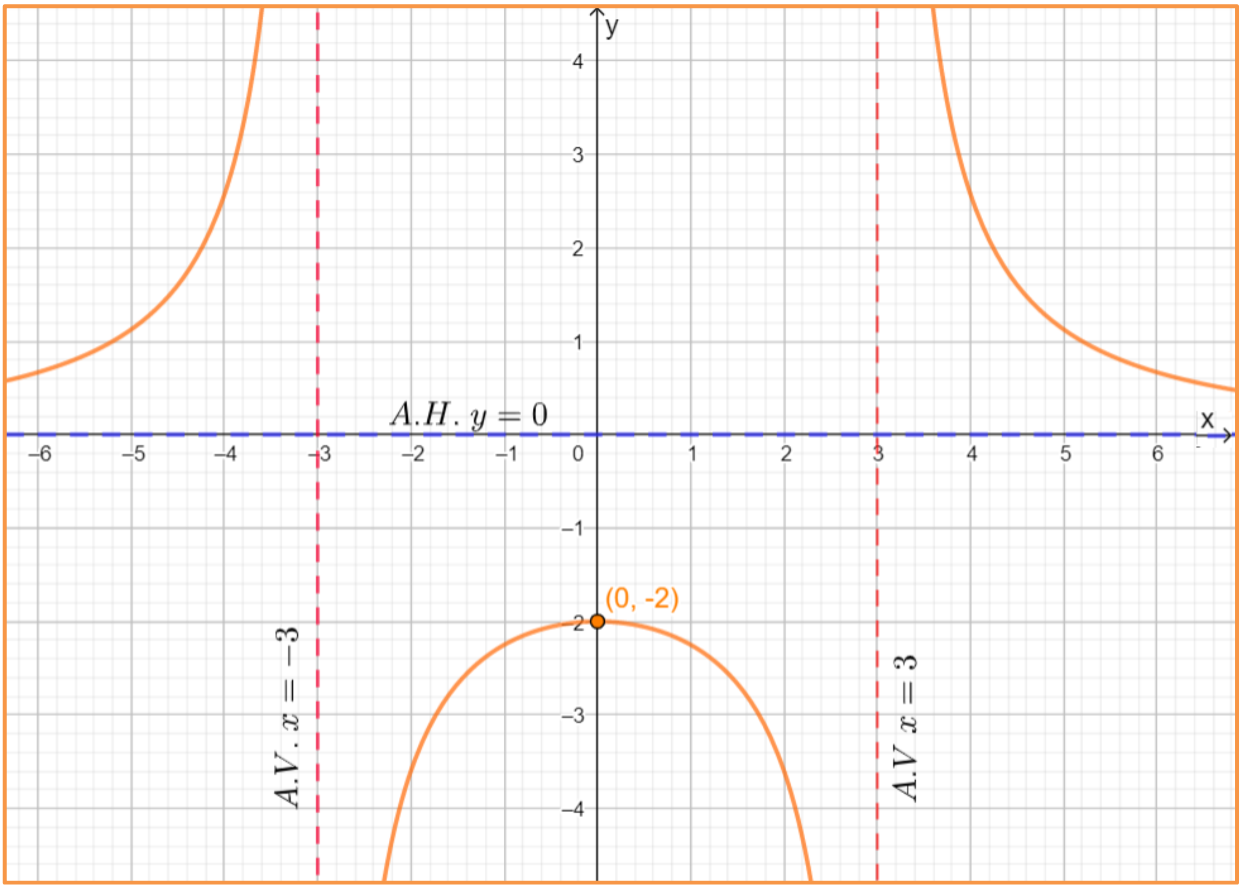
9) *Puntos de inflexión*

No tiene ya que en $x=-3$ y $x=3$ la función no está definida.

10) *Gráfica*

Resumimos la información hallada en este cuadro.

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,0)$	0	$(0,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f(x)$	$(+)$	$\nexists$	$(-)$	-2	$(-)$	$\nexists$	$(+)$
$f'(x)$	$(+)$	$\nexists$	$(+)$	0	$(-)$	$\nexists$	$(-)$
$f''(x)$	$(+)$	$\nexists$	$(-)$	$-4/9$	$(-)$	$\nexists$	$(+)$
	Crece		*Crece*	*Máx.*	*Decrece*		*Decrece*
	Cónc.positiva		*Cóncava negativa*				*Cónc. positiva*



19 *Ejemplo* $\quad f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

1) $Df = \mathbb{R} - \{1\}$

2) *Intersección con los ejes coordenados*

- *Con el eje* x: $f(x) = 0 \iff x^2 = 0 \iff \boxed{x = 0}$. Por lo tanto, la función corta al eje x en el punto $\boxed{(0;0)}$.
- *Con el eje* y: $x = 0 \Rightarrow y = 0 \therefore$ se obtiene el mismo punto $\boxed{(0;0)}$.

3) *Intervalos de positividad y negatividad.*

INTERVALO	$(-\infty, 0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
sg $f(x)$	-	-	+

Por lo tanto, la función es positiva en $(1,+\infty)$ y es negativa en $(-\infty,0)\cup(0,1)$.

4) *Paridad.*

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{-x-1} = \frac{x^2}{-x-1} \Rightarrow f(-x) \neq f(x) \wedge f(-x) \neq -f(x)$$

Por lo tanto, la función no tiene paridad.

5) *Asíntotas.*

- *Verticales*:

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2}{x-1}=\infty \quad \therefore \quad \boxed{x=1}$ es asíntota vertical.

- *Horizontales u oblicuas:*

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x\,(x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-x}=1 \quad \therefore$ hay asíntota oblicua.

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-m\,x\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x\,(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1$$

Por lo tanto, $\boxed{y=x+1}$ es asíntota oblicua.

Obviamente no hay asíntota horizontal, lo que podemos comprobar hallando el siguiente límite:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}=\infty$.

6) *Intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

- $f'(x)=\frac{2x\,(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$
- $f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-2x=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x=0} \quad \vee \quad \boxed{x=2}$

Observemos además que $f'(x)$ presenta una discontinuidad en $x=1$ donde la función $f(x)$ también la tiene.

- Analizamos el signo de la derivada primera.

INTERVALO	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
Sg $f'(x)$	+	-	-	+

Por lo tanto, la función es creciente en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ y es decreciente en $(0,1)\cup(1,2)$.

7) *Extremos relativos.*

A partir del análisis anterior podemos concluir que la función tiene en el punto $(0;0)$ un máximo relativo y en $(2;4)$ un mínimo relativo.

8) *Intervalos de concavidad positiva y negativa.*

$$f''(x)=\frac{(2x-2)\,(x-1)^2-(x^2-2x)\,2\,(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)\left[(2x-2)\,(x-1)-(2x^2-4x)\right]}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{2x^2-4x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3}$$

Observemos que $f''(x)\neq 0 \quad \forall x\in Df$ y es discontinua en $x=1$, donde también es discontinua la función.

Estudiamos el signo de la derivada segunda.

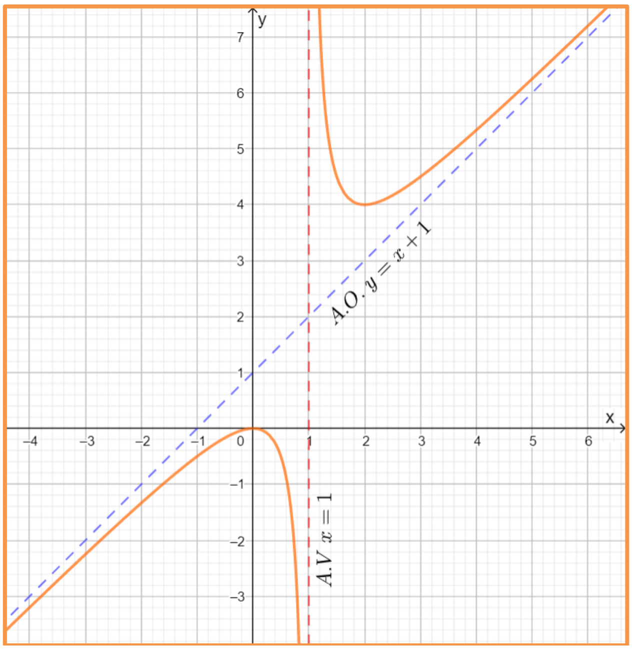
INTERVALO	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
sg $f''(x)$	-	+

Por lo tanto, la función es cóncava positiva en $(1,+\infty)$ y es cóncava negativa en $(1,+\infty)$.

9) *Puntos de inflexión.*
No tiene ya que en $x=1$ la función no está definida.

10) *Gráfica*
Resumimos la información hallada en este cuadro.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f(x)$	$(-)$	0	$(-)$	$\nexists$	$(+)$	4	$(+)$
$f'(x)$	$(+)$	0	$(-)$	$\nexists$	$(-)$	0	$(+)$
$f''(x)$	$(-)$	-2	$(-)$	$\nexists$	$(+)$	2	$(+)$
	Crece	*Máx.*	*Decrece*		*Decrece*	*Mín.*	*Crece*
	Cóncava negativa				*Cóncava positiva*		



20 *Ejemplo* $f(x)=e^{-x^2}$

1) $Df = \mathbb{R}$

2) *Intersecciones con los ejes coordenados.*
- *Con el eje x*: No tiene ya que $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- *Con el eje y*: $x=0 \;\Rightarrow\; y=1 \;\therefore\; \boxed{(0;1)}$ es el punto de intersección.

3) *Intervalos de positividad y negatividad.*
La función $f(x)=e^{-x^2}$ es positiva para todo x real.

4) *Paridad*
$f(-x)=e^{-(-x)^2}=e^{-x^2}=f(x) \quad \therefore$ la función es par.

5) *Asíntotas.*

- *Verticales*: No tiene.
- *Horizontales u oblicuas*:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y=0}$ es asíntota horizontal.

Obviamente no hay asíntotas oblicuas.

6) *Intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

$$f'(x) = -2\,x\,e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x=0}$$

INTERVALO	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
sg $f'(x)$	+	-

Por lo tanto, la función es creciente en $(-\infty,0)$ y decreciente en $(0,+\infty)$.

7) *Extremos relativos.*

Del cuadro anterior podemos concluir que en el punto $(0,1)$ la función admite un máximo relativo.

8) *Intervalos de concavidad positiva y negativa.*

$$f''(x) = -2\,e^{-x^2} - 2x\,(-2x)\,e^{-x^2} = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2\,e^{-x^2}\,(2x^2-1)$$

Como $f''(x)$ es continua para todo x real, sólo buscamos los puntos donde sea cero.

$$f''(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x=\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad \vee \quad \boxed{x=-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Analizamos la variación del signo de la derivada segunda.

INTERVALO	$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$
sg $f''(x)$	+	-	+

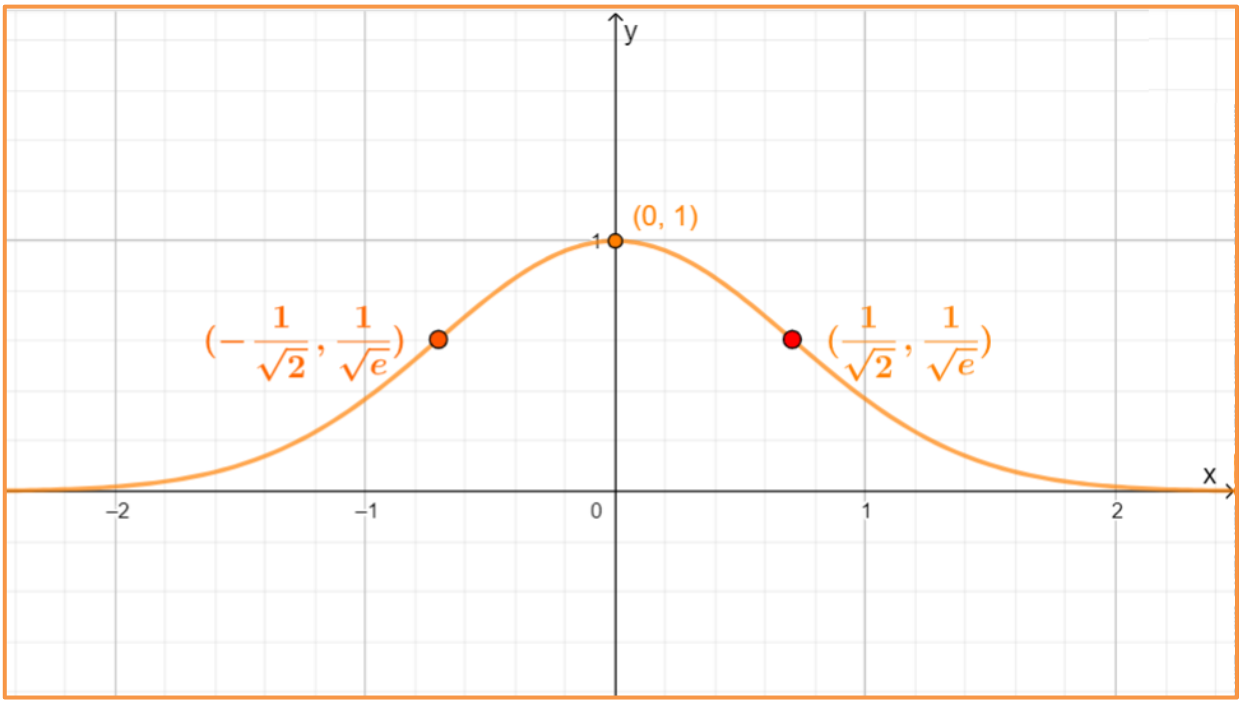
Por lo tanto, la función es cóncava positiva en $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$ y es cóncava negativa en $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

9) *Puntos de inflexión.*

Del cuadro anterior se deduce que la curva tiene dos puntos de inflexión y ellos son: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

10) *Gráfica.*
Transmitimos la información obtenida en un cuadro.

x	$(-\infty, -1/\sqrt{2})$	$-1/\sqrt{2}$	$(-1/\sqrt{2}, 0)$	0	$(0, 1/\sqrt{2})$	$1/\sqrt{2}$	$(1/\sqrt{2}, +\infty)$
$f(x)$	(+)	$1/\sqrt{e}$	(+)	1	(+)	$1/\sqrt{e}$	(+)
$f'(x)$	(+)	$2/\sqrt{2e}$	(+)	0	(−)	$2/\sqrt{2e}$	(−)
$f''(x)$	(+)	**0**	(−)	-2	(−)	**0**	(+)
	Crece			*Máx.*	*Decrece*		
	Cónc. pos.	*P.I.*	*Cóncava negativa*		*P.I.*		*Cónc.pos.*



APLICACIONES ECONÓMICAS

Como aplicación de la función derivada a la economía y a la administración, resolveremos algunos problemas de optimización.

PROPIEDAD:

Las curvas de costo marginal y costo medio se cortan en el punto mínimo de la curva de costo medio.

DEMOSTRACIÓN: La función de costo medio está dada por: $\overline{C}(x)=\dfrac{C(x)}{x}$.

- Calculamos la derivada de esta función: $\overline{C}'(x)=\dfrac{C'(x)\,x-C(x)}{x^2}$.

Para hallar los puntos críticos igualamos la derivada del costo medio a cero:

$$\overline{C}'(x_0)=0 \iff C'(x_0)\,x_0-C(x_0)=0 \iff C'(x_0)=\frac{C(x_0)}{x_0}=\overline{C}(x_0)$$

Como $C'(x)$ es el costo marginal, hemos obtenido que el costo medio y el marginal son iguales $x=x_0$.

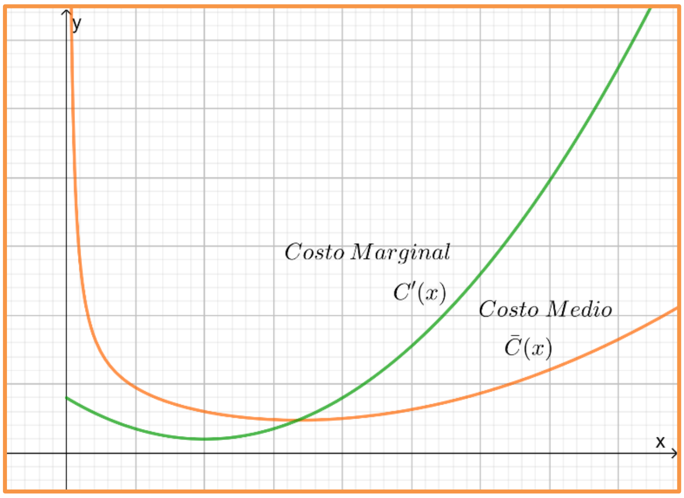
- Para comprobar que en dicho punto el costo medio tiene un mínimo, calculamos su derivada segunda.

$$\overline{C}''(x)=\frac{\left[C''(x)\,x+C'(x)-C'(x)\right]x^2-\left[C'(x)x-C(x)\right]2x}{x^4}=\frac{C''(x)\,x^2-\left[C'(x)x-C(x)\right]2}{x^3}$$

Reemplazando x por x_0 y como $C'(x_0)\,x_0-C(x_0)=0$, se obtiene:

$$\overline{C}''(x_0)=\frac{C''(x_0)}{x_0}>0$$

siendo esto válido para aquellos casos en que la curva de costo total sea cóncava positiva en el punto $x=x_0$.



21 Ejemplo Dada la función de costo medio $\overline{C}(x)=25-8x+x^2$, comprobar la propiedad anterior. Graficar.

Hallemos primero la función de costo total:

$$\overline{C}(x)=\frac{C(x)}{x} \iff C(x)=x\,\overline{C}(x)$$

Luego, $C(x)=x\,(25-8x+x^2)=25x-8x^2+x^3$.

Calculamos el costo marginal: $C'(x)=25-16x+3x^2$.

Para calcular el costo medio mínimo debemos buscar los puntos críticos de la función resolviendo la ecuación que resulta de igualar a cero su derivada primera.

$$\overline{C}'(x)=-8+2x \Rightarrow \overline{C}'(x)=0 \iff \boxed{x=4}.$$

Para determinar si en ese valor hay un mínimo, hallamos la segunda derivada y calculamos su valor en el punto.

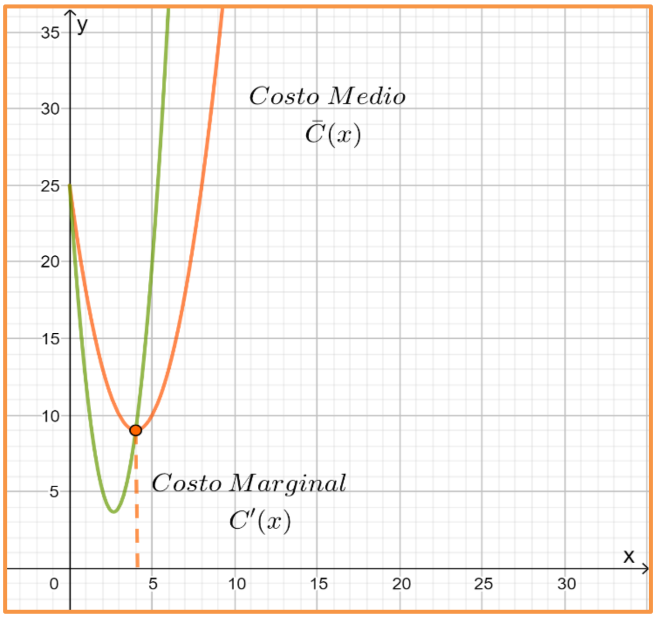
$$\overline{C}''(x) = 2 > 0$$

Por lo tanto, el costo medio tiene un mínimo en $x = 4$ y su valor es $\overline{C}(4) = 9$.

Calculamos ahora el costo marginal para una producción $x = 4$: $C'(4) = 9$.

Como nos pedía el enunciado hemos demostrado que el costo marginal y el costo medio son iguales en condiciones de costo medio mínimo.

Gráficamente:



22 *Ejemplo* Una compañía fabrica un producto cuyo costo total de producción está dado por $C(x) = 6x^2 - 2x + 4$ donde la cantidad producida *x* va en miles de unidades.

El departamento de ventas informa que deben fabricar entre 2000 y 6000 unidades de producto. Hallar la producción que minimiza el costo total.

Debemos tener en cuenta que hay que hallar el mínimo absoluto de una función continua en un intervalo cerrado, es decir, de la función $C(x) = 6x^2 - 2x + 4$ en $[2,6]$.

$$C_{Marg}(x) = C'(x) = 12x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{1}{6}}$$

Este punto crítico no pertenece al intervalo de interés. Calculamos el valor del costo total en los extremos del intervalo.

$$C(2) = 24 \quad \wedge \quad C(6) = 208$$

Por lo tanto, el costo total mínimo se da para una producción de $\boxed{x = 2}$.

23 Ejemplo La función de demanda para un bien particular está dada $p = 45 - 0,5x$ y el costo total de la empresa que lo produce y comercializa es $C(x) = x^3 - 39,5\,x^2 + 120x + 125$

Determinar la utilidad o beneficio máximo que el empresario pueda obtener.

Debemos optimizar la función de beneficio: $\boxed{B(x) = I(x) - C(x)}$

Hallamos primero la función ingreso total: $I(x) = p \cdot x = (45 - 0,5\,x)\,x = 45x - 0,5x^2$

Luego, la función beneficio queda:

$B(x) = (45x - 0,5\,x^2) - (x^3 - 39,5x^2 + 120x + 125) = -x^3 + 39x^2 - 75x - 125$

Buscamos los puntos críticos de esta función: $B'(x) = -3x^2 + 78x - 75$

$B'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3x^2 + 78x - 75 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = 1} \quad \vee \quad \boxed{x = 25}$

Aplicamos la condición suficiente de extremos: $B''(x) = -6x + 78$

$B''(1) = 72 > 0 \quad \therefore \quad B(1)$ es un mínimo relativo.

$B''(25) = -72 < 0 \quad \therefore \quad B(25) = 6750$ es el máximo beneficio que el empresario puede obtener.

24 Ejemplo La demanda para un cierto bien está dada por $p = 15\,e^{-\frac{x}{3}}$ para $x \in [0,8]$.

Determinar el precio y la cantidad para los cuales es máximo el ingreso total.

Calculamos la función ingreso total.

$I(x) = p \cdot x = 15\,x\,e^{-\frac{x}{3}} \quad \Rightarrow \quad I'(x) = 15\,e^{-\frac{x}{3}} - 15\,x\,\frac{1}{3}\,e^{-\frac{x}{3}} = 5\,e^{-\frac{x}{3}}(3 - x)$

$I'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = 3}$ (Punto crítico)

$I''(x) = -\frac{5}{3}\,e^{-\frac{x}{3}}\,(3 - x) - 5\,e^{-\frac{x}{3}} = 5\,e^{-\frac{x}{3}}\left(-2 + \frac{x}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad I''(3) = -\frac{5}{e} < 0$

Por lo tanto, $I(x)$ tiene un máximo en $x = 3$. Calculamos el precio reemplazando en la función de demanda: $p = \frac{15}{e}$.

SEGUNDA PARTE: TEOREMAS DE LAS FUNCIONES DERIVABLES

TEOREMA DE ROLLE

Si f es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f(a)=f(b)$, entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

DEMOSTRACIÓN:

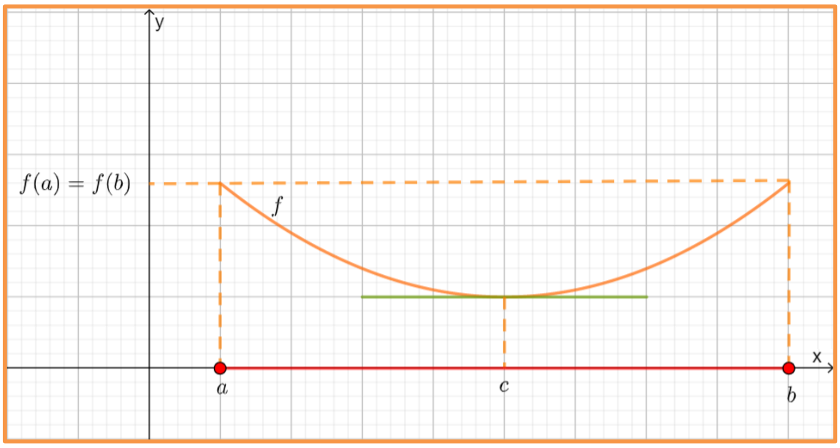
Como *f* es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces alcanza un mínimo y un máximo absoluto. Sean x_1 y x_2 esos valores respectivamente. Por lo tanto,
pueden presentarse las siguientes posibilidades:

a) Si $x_1\neq a$ y $x_1\neq b$, entonces $x_1\in(a,b)$. Luego, como x_1 es un mínimo relativo de ***f***, $f'(x_1)=0$.

b) Si $x_2\neq a$ y $x_2\neq b$, entonces $x_2\in(a,b)$. Luego, como x_2 es un máximo relativo de ***f***, $f'(x_2)=0$.

c) Si x_1 y x_2 están en los extremos del intervalo, entonces la función es constante. En efecto, $\forall x\in[a,b]$ se verifica que $f(x_1)\leq f(x)\leq f(x_2)$ por ser x_1 y x_2 el mínimo y el máximo absoluto de ***f***. Luego, $f(x)=f(x_1)=f(x_2)$ $\forall x\in[a,b]$ pues x_1 y x_2 están en los extremos del intervalo y por hipótesis $f(a)=f(b)$. Concluimos que $f'(x)=0$ para todos los puntos del dominio de ***f.***

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA: Si una función continua en un intervalo cerrado y derivable en sus puntos interiores toma el mismo valor en los extremos, en algún punto intermedio de dicho intervalo la tangente a la gráfica de la función será horizontal.

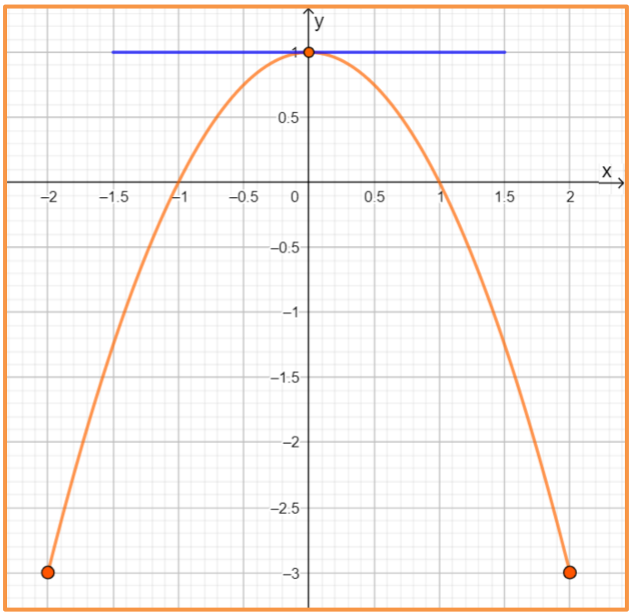


25 Ejemplo Analizar si las siguientes funciones verifican las hipótesis del teorema de Rolle. En caso afirmativo, hallar el valor de *c* correspondiente.

a) $f(x) = -x^2 + 1$ en $[-2, 2]$

Por ser una función polinómica es continua y derivable en $\mathbb{R}$. En particular lo será en el intervalo mencionado. Verifiquemos si en los extremos toma el mismo valor: $f(-2) = -(-2)^2 + 1 = -3$ y $f(2) = -2^2 + 1 = -3$. Entonces, $f(-2) = f(2)$ y por lo tanto se verifican las hipótesis de dicho teorema.

$$f'(x) = -2x \quad \Rightarrow \quad -2c = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = 0}$$

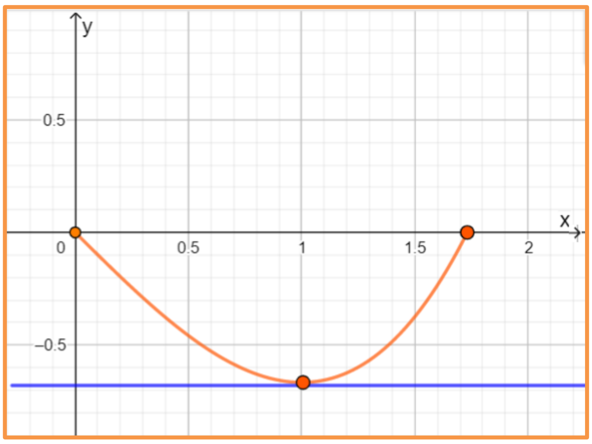


b) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x$ en $[\,0, \sqrt{3}\,]$

Por ser f una función polinómica es continua y derivable. Verifiquemos si en los extremos toma el mismo valor: $f(0) = 0$ y $f(\sqrt{3}) = \dfrac{(\sqrt{3})^3}{3} - \sqrt{3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} = 0$. Por lo tanto, $f(0) = f(\sqrt{3})$

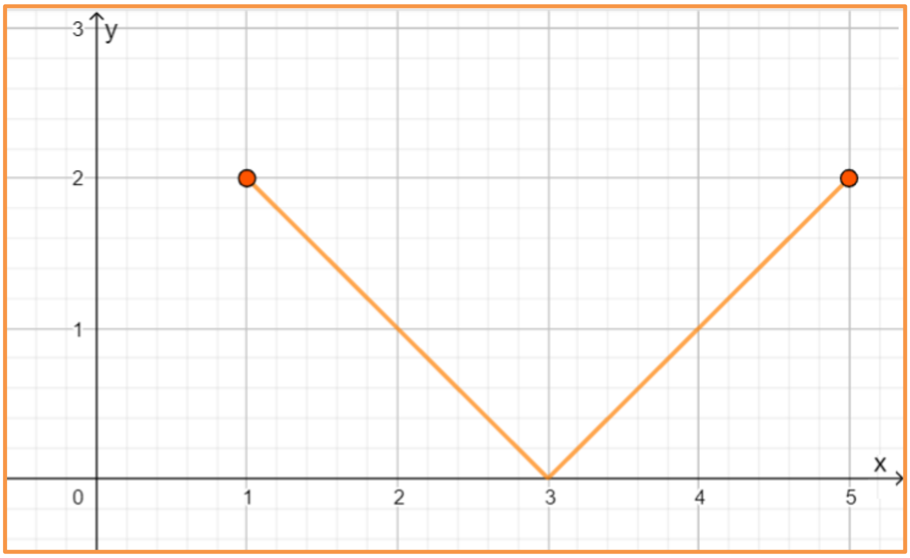
$$f'(x) = x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad c^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = -1} \quad \vee \quad \boxed{c = 1}$$

Observemos que obtuvimos dos valores de c. Pero sólo nos interesa aquél que pertenezca al intervalo que estamos considerando: $\boxed{c = 1}$.



c) $f(x)=|x-3|$ en $[1,5]$

Esta función es continua y además se cumple que $f(1)=f(5)$. Pero no es derivable en $x=3$, por lo tanto, no verifica las hipótesis del teorema de Rolle.



TEOREMA DE LAGRANGE

Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la ecuación de la recta que determinan los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$: $y-f(a)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

Consideremos ahora la función $g(x)=f(x)-y=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$

Esta función es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) por ser producto y resta de funciones de ese tipo. Además:

$$g(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)-f(a)=f(a)-f(a)=0$$

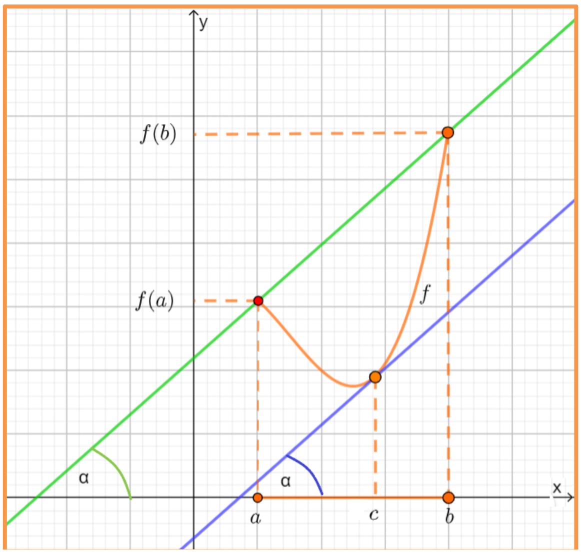
$$g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)-f(a)=f(b)-(f(b)-f(a))-f(a)=0$$

Por lo tanto, $g(a)=g(b)$. Luego, por satisfacer las hipótesis del teorema de Rolle, existe $c\in(a,b)$ tal que $g'(c)=0$.

Como $g'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot 1 \;\Rightarrow\; g'(c)=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

Concluimos que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, como queríamos demostrar.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA: El teorema establece (bajo las hipótesis enunciadas), que existe un punto en el intervalo (a,b) en donde la recta tangente a la gráfica de la función es paralela a la recta que determinan los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



26 Ejemplo

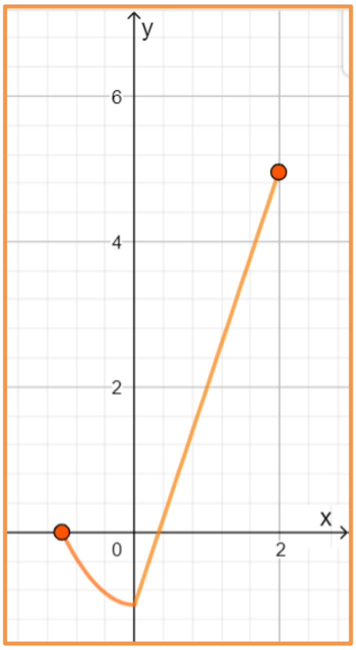
Indicar si las siguientes funciones verifican las hipótesis del teorema de Lagrange. En caso afirmativo, hallar el valor de *c* correspondiente.

a) $f(x)=\ln x$ en $[1,e]$

b) Claramente f es continua y derivable. Busquemos el valor de **c.**

$$f'(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f'(c)=\frac{f(e)-f(1)}{e-1} \Rightarrow \frac{1}{c}=\frac{1-0}{e-1}=\frac{1}{e-1} \Rightarrow \boxed{c=e-1}$$

b) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\le 0 \\ 3x-1 & x>0 \end{cases}$ en $[-1,2]$



Analicemos la continuidad de f: $y=x^2-1$ e $y=3x-1$ son continuas por ser funciones polinómicas. Veamos qué pasa en $x_0=0$.

i) $f(0)=-1$

ii) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2-1=-1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 3x-1=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=-1$$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

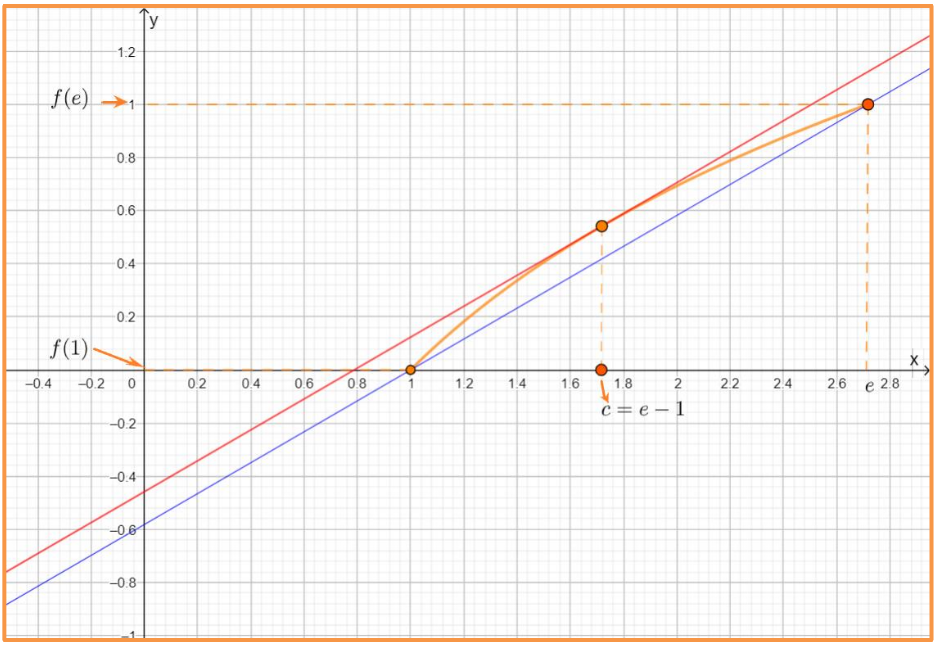
Luego, f es continua en $x_0=0$. Por lo tanto, f es continua en $[-1,2]$.

Analicemos la derivabilidad de **f:** $y=x^2-1$ e $y=3x-1$ son derivables por ser funciones polinómicas. Veamos que pasa en $x_0=0$.

$$f'^-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2-1-(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2}{h}=0$$

$$f'^+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{3h-1-(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{3h}{h}=3$$

$$\boxed{f'^-(0)\neq f'^+(0)}$$



Por lo tanto, f no es derivable en $x_0 = 0$. Concluimos que f no verifica las hipótesis del teorema de Lagrange.

COROLARIO: Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$, entonces f es constante en $[a,b]$.

TEOREMA DE CAUCHY

Si f y g son continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b) tal que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que: $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

DEMOSTRACIÓN:

Consideremos la función:

$$h(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a))$$

La función h es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) por ser producto y diferencia de funciones de ese tipo. Además:

$$h(a) = (f(b) - f(a))(g(a) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(a) - f(a)) = 0$$
$$h(b) = (f(b) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(b) - f(a)) = 0$$

Luego, h verifica las hipótesis del teorema de Rolle, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $h'(c) = 0$ Pero $h'(x) = (f(b) - f(a))\, g'(x) - (g(b) - g(a))\, f'(x)$.

Luego,

$$h'(c)= (f(b)-f(a))\,g'(c)-(g(b)-g(a))\,f'(c)=0$$

Despejando obtenemos lo que queríamos demostrar: $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

27 Ejemplo Analizar si las siguientes funciones verifican las hipótesis del teorema de Cauchy. En caso afirmativo, hallar el valor de c correspondiente.

$$\begin{cases} f(x)=2x-3 \\ g(x)=x^3-2 \end{cases} \text{ en } [1,2]$$

Observemos que f y g son funciones continuas y derivables por ser funciones polinómicas. Además, $g'(x)=3x^2$ sólo se anula en $x=0$, punto que no pertenece al intervalo considerado. Por lo tanto, ambas funciones verifican las hipótesis del teorema de Cauchy. Luego, busquemos el valor de c correspondiente:

$$\frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{1-(-1)}{6-(-1)}=\frac{2}{3c^2} \Rightarrow c^2=\frac{7}{3} \Rightarrow \boxed{c=\sqrt{\frac{7}{3}}} \vee \boxed{c=-\sqrt{\frac{7}{3}}}$$

Concluimos que $\boxed{c=\sqrt{\frac{7}{3}}}$ es el valor correspondiente al teorema de Cauchy ya que el otro valor de c no pertenece al intervalo considerado.

OBSERVACIÓN:

En el capítulo de límite vimos tres indeterminaciones: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ y 1^∞, las cuales resolvimos mediante operaciones algebraicas propias de cada caso. También en ese capítulo hablamos de la existencia de siete indeterminaciones que no mencionamos pues su resolución podía ser muy laboriosa.
Ahora estamos en condiciones de enunciarlas ya que a continuación daremos una regla para "salvarlas": $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0

REGLA DE L'HOSPITAL

Sean f y g funciones derivables en un intervalo (a,b) salvo quizá para $x_0 \in (a,b)$ y sea $g'(x)\neq 0 \quad \forall x\in(a,b),\ x\neq x_0$. Si $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ da lugar a una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, entonces $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}}$ siempre que el límite del segundo miembro exista o tienda a $\pm\infty$.

OBSERVACIÓN:

La regla de L'Hospital también puede aplicarse a los casos en los que la variable x tiende a $\pm\infty$.

28 Ejemplo Calculemos algunos límites donde se presentan indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$

Tanto numerador y denominador tienden a cero cuando x tiende a **1**. Por lo tanto, podemos aplicar la regla de L'Hospital.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1}=1$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

Tanto numerador y denominador tienden a cero cuando x tiende a **0**. Por lo tanto, podemos aplicar la regla de L'Hospital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2x}$$

Observemos que obtuvimos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, por lo tanto, aplicamos L'Hospital nuevamente.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

Vale aclarar que esta última indeterminación la podríamos haber salvado utilizando los conocimientos adquiridos en el capítulo de límite: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$.

29 Ejemplo Calculemos algunos límites donde se presentan indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2-x}$

Tanto numerador y denominador tienden a infinito cuando x tiende a $+\infty$. Por lo tanto, podemos aplicar la regla de L'Hospital.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x-1}$$

Observemos que obtuvimos una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, por lo tanto, aplicamos L'Hospital nuevamente, hasta destruirla .

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$

Tanto numerador y denominador tienden a infinito cuando x tiende a $+\infty$. Por lo tanto, podemos aplicar la regla de L'Hospital.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

OBSERVACIÓN: Veremos ahora como reducir los restantes casos de indeterminación mediante algún artificio a la forma $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$, para poder aplicar la regla de L'Hospital.

30 *Ejemplo*

Calculemos algunos límites donde se presentan indeterminaciones del tipo $0\cdot\infty$.

a) $\lim\limits_{x\to0} x\ln x$

Llevamos esta indeterminación del tipo $0\cdot\infty$ a una del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ haciendo lo siguiente:

$$\lim_{x\to0} x\ln x=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to0}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to0}-x=0$$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\sec x$

Llevamos esta indeterminación del tipo $0\cdot\infty$ a una del tipo $\dfrac{0}{0}$ de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\sec x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2}{-\operatorname{sen} x}=2$$

31 *Ejemplo*

Calculemos algunos límites donde se presentan indeterminaciones del tipo $\infty-\infty$.

a) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{1}{1+x}\right)$

Llevamos esta indeterminación del tipo $\infty-\infty$ a una del tipo $\dfrac{0}{0}$ de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to-1}\left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{1}{1+x}\right)=\lim_{x\to-1}\frac{2-(1-x)}{1-x^2}=\lim_{x\to-1}\frac{1+x}{1-x^2}=\lim_{x\to-1}\frac{1}{-2x}=\frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$

Llevamos esta indeterminación del tipo $\infty-\infty$ a una del tipo $\dfrac{0}{0}$ de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\operatorname{sen} x + x\cos x}$$

Como nuevamente obtuvimos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ aplicamos L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\operatorname{sen} x + x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x+\cos x + x\,(-\operatorname{sen} x)}=0$$

OBSERVACIÓN:

Para calcular $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ en los casos de indeterminación $(1^{\infty}, 0^0, \infty^0)$ suele ser útil calcular el logaritmo de dicho límite:

$$\boxed{\ln \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \ln f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}$$

Observemos que nos queda una indeterminación del tipo $0\cdot\infty$ que ya sabemos cómo llevar a una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, para poder aplicar la regla de L'Hospital. Luego, si el límite resulta ser L, el límite original será e^L.

32 Ejemplo Aplicar el procedimiento anterior para calcular los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$

Claramente estamos ante una indeterminación del tipo 0^0. Resolvemos aplicando el procedimiento descripto en la observación anterior.

$$\ln L = \ln \lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \ln x^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x \ln x$$

Tratamos de llevar esta indeterminación del tipo $0\cdot\infty$ a una del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, para poder aplicar la regla de L'Hospital.

$$\ln L = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x \ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{(\operatorname{sen} x)^2}\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-(\operatorname{sen} x)^2}{x\cos x}$$

Como nuevamente obtuvimos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, utilizamos la regla de L'Hospital para salvarla.

$$\ln L = \lim_{x\to 0}\frac{-(\operatorname{sen} x)^2}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\operatorname{sen} x\cos x}{\cos x + x\,(-\operatorname{sen} x)} = 0 \qquad \text{Luego, } \boxed{L = e^0 = 1}$$

.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$

Estamos ante una indeterminación del tipo 1^{∞}. Resolvemos como en el ejercicio anterior.

$$\ln L=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\left(-\frac{2}{x^{2}}\right)}{\frac{-1}{x^{2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+\frac{2}{x}}=2$$

Por lo tanto, $\boxed{L=e^{2}}$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$

Estamos ante una indeterminación del tipo ∞^{0}. Resolvemos utilizando el procedimiento anterior.

$$\ln L=\ln\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\ln x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$$

Por lo tanto, $\boxed{L=e^{0}=1}$.

CAPÍTULO 5

INTEGRALES

CAPÍTULO 5

INTEGRALES

INTEGRALES INDEFINIDAS

INTRODUCCIÓN: En el capítulo tres hemos estudiado el concepto de derivada, es decir, dada una función $f(x)$, buscamos una función $f'(x)$ a la que denominamos su función derivada. En el presente capítulo haremos justamente lo opuesto; dada una función $f(x)$, determinaremos (cuando esto sea posible) otra función $F(x)$ de modo tal que su derivada sea $f(x)$, es decir: $F'(x) = f(x)$. Por el hecho de estar procediendo en forma inversa es que muchos llaman a este proceso ***antiderivación***. También suele decirse que $F(x)$ es una ***primitiva*** de $f(x)$. Nosotros usaremos esta segunda denominación.

DEFINICIÓN: Si para todos los puntos de un intervalo real $[a,b]$ se verifica que $F'(x) = f(x)$, entonces $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ sobre ese intervalo.

01 *Ejemplo* Calcular una primitiva de $f(x) = \cos x$.

De la definición se desprende que es necesario encontrar una función $F(x)$ tal que:

$$F'(x) = \cos x$$

Sabemos que la función seno tiene por derivada a la función coseno, de modo que:

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$$

Luego, $F(x) = \operatorname{sen} x$.

OBSERVACIÓN: Claramente $\operatorname{sen} x$ no es la única primitiva de $\cos x$ ya que cualquier función de la forma $F(x) = \operatorname{sen} x + k$, con k una constante numérica arbitraria, derivada nos da la función coseno. Por lo tanto, veamos el siguiente teorema.

TEOREMA 1: Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos funciones primitivas distintas de la misma función $f(x)$ sobre el intervalo real $[a,b]$, su diferencia es una constante.

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que $F(x)$ es primitiva de $f(x)$, por lo tanto $F'(x)=f(x)$.

Análogamente, por ser $G(x)$ una primitiva de $f(x)$, se verifica $G'(x)=f(x)$.

Consideremos la función $H(x)=F(x)-G(x)$. Derivando $H(x)$ obtenemos:

$$H'(x)=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0$$

Luego, $H(x)=k$, con k constante (puesto que la derivada de una constante es cero). Por lo tanto $F(x)-G(x)=k$.

DEFINICIÓN: Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, la expresión $F(x)+k$ se denomina ***integral indefinida*** de la función $f(x)$.

NOTACIÓN: Indicamos la integral indefinida de $f(x)$ en la forma siguiente: $\boxed{\int f(x)\,dx}$.

De acuerdo con la definición resulta: $\boxed{\int f(x)\,dx = F(x)+k}$.

OBSERVACIÓN: No toda función $f(x)$ definida sobre un intervalo real $[a,b]$ admite primitiva. Por otra parte, la integral indefinida representa una familia de funciones $y=F(x)+k$, cuyas gráficas se obtienen mediante desplazamientos verticales de la curva $y=F(x)$.

02 Ejemplo Verificar si $F(x)=x^4+\operatorname{tg} x-3x$ es o no una primitiva de $f(x)=4x^3+\sec^2 x-3$.

Para verificar que $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ es necesario probar que $F'(x)=f(x)$.

Si $F(x)=x^4+\operatorname{tg} x-3x$ **entonces** $F'(x)=4x^3+\sec^2 x-3$ **por lo tanto** $F'(x)=f(x)$.

Estudiaremos ahora algunas propiedades de la integral indefinida que son de suma utilidad.

PROPIEDADES

1) La derivada de una integral indefinida es el integrando $f(x)$.

$$\boxed{\left(\int f(x)\,dx\right)' = \left(F(x)+k\right)' = f(x)}$$

2) El diferencial de una integral indefinida es igual al elemento de integración $f(x)\,dx$.

$$\boxed{d\left(\int f(x)\,dx\right) = d\left(F(x)+k\right) = f(x)\,dx}$$

3) La integral indefinida del diferencial de cierta función es igual a la función incrementada en una constante arbitraria.

$$\boxed{\int dF(x) = F(x) + k}$$

4) La integral indefinida de la suma algebraica de dos o varias funciones es igual a la suma algebraica de sus integrales.

$$\boxed{\int \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx}$$

5) La integral indefinida del producto de una constante por una función es igual al producto de dicha constante por la integral indefinida de la función.

$$\boxed{\int a \cdot f(x)\, dx = a \cdot \int f(x)\, dx}$$

El proceso mediante el cual se obtiene la integral indefinida se denomina ***integración***. Antes de pasar a estudiar los métodos de integración nos ocuparemos de establecer una tabla de integración, la que se deduce directamente de la tabla de derivación que establecimos en la página 144 del capítulo 3.
La validez de esta tabla puede verificarse inmediatamente, solo se trata de mostrar que la derivada de las funciones que aparecen en la columna correspondiente a la primitiva es igual a la función correspondiente en la otra columna.

FUNCIÓN	PRIMITIVA
0	k
1	x
$x^n \quad (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$
$\sec^2 x$	$\operatorname{tg} x$
e^x	e^x
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsen} x$
$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$

A continuación, resolveremos algunos ejercicios aplicando la tabla de integrales y las propiedades anteriores.

03 Ejemplo Hallar las primitivas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = e^x + 3 - \cos x$

$$F(x) = \int \left(e^x + 3 - \cos x\right) dx = \int e^x dx + \int 3dx - \int \cos x dx \quad = \boxed{e^x + 3x - \operatorname{sen} x + k}$$

b) $g(x) = 3\sec^2 x + 2x^5 - \dfrac{1}{1+x^2}$

$$G(x) = \int 3\sec^2 x + 2x^5 - \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int 3\sec^2 x\, dx + \int 2x^5\, dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$3\int \sec^2 x\, dx + 2\int x^5\, dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx \quad = \boxed{3\,tg\, x + \frac{1}{3}x^6 - arctg\, x + k}$$

Resolveremos a continuación otras integrales indefinidas que traen aparejada una mayor dificultad.

04 Ejemplo Hallar las primitivas de las siguientes funciones.

a) $h(x) = \dfrac{5x^2 + \sqrt{x} + 2}{x^3}$

$$H(x) = \int \left(\frac{5x^2 + \sqrt{x} + 2}{x^3}\right) dx = 5\int \frac{x^2}{x^3} dx + \int \frac{\sqrt{x}}{x^3} dx + 2\int \frac{1}{x^3} dx = 5\int \frac{1}{x} dx + \int x^{-\frac{5}{2}}\, dx + 2\int x^{-3} dx =$$

$$= 5\ln|x| + \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\frac{-3}{2}} + 2\frac{x^{-2}}{-2} + k \quad = \boxed{5\ln|x| - \frac{2}{3}x^{\frac{-3}{2}} - x^{-2} + k}$$

b) $h(x) = \dfrac{\cos^3 x + 3}{1 - \operatorname{sen}^2 x}$

$$H(x) = \int \left(\frac{\cos^3 x + 3}{1 - \operatorname{sen}^2 x}\right) dx = \int \frac{\cos^3 x + 3}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos^3 x}{\cos^2 x} dx + 3\int \frac{1}{\cos^2 x}\; dx =$$

$$= \int \cos x . dx + 3\int \sec^2 x\, dx = \boxed{\operatorname{sen} x + 3\operatorname{tg} x + k}$$

MÉTODOS DE INTEGRACION

MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN

Supongamos que necesitamos calcular $\int f(x)\,dx$, pero no es factible encontrar en forma más o menos inmediata la función primitiva $F(x)$. En algunos casos es posible efectuar una *sustitución* de la variable de integración por una función de otra variable.

Sea $x = g(t)$, con g una función derivable. Luego, $dx = g'(t)\,dt$. Sustituyendo en la integral obtenemos:

$$\boxed{\int f(x)\cdot dx = \int f(g(t)).g'(t)\cdot dt}$$

Es importante notar, que en la mayoría de los casos en el que es posible resolver una integral por sustitución, el reemplazo que se utiliza es: $\boxed{t = h(x)}$, de donde $\boxed{dt = h'(x)\,dx}$.

OBSERVACIÓN: Para ambos tipos de sustitución es importante recordar que una vez resuelta la integral en función de la nueva variable **("*t* "** o cualquier otra**)**, es necesario volver a sustituir dicha variable en la primitiva para que esta quede expresada en función de la variable original.

Resolver mediante una conveniente sustitución las siguientes integrales indefinidas.

05 *Ejemplo*

a) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x \, dx$

Sea $\boxed{t = \operatorname{sen} x}$ $\Rightarrow$ $\boxed{dt = \cos x\, dx}$. Reemplazando en la integral resulta:

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos x\, dx = \int t^3\, dt = \frac{t^4}{4} + k = \boxed{\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x + k}$$

b) $\int 2x\, e^{x^2+2}\, dx$

Sea $\boxed{t = x^2 + 2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{dt = 2x\, dx}$. Reemplazando en la integral resulta:

$$\int 2x\, e^{x^2+2}\, dx = \int e^t\, dt = e^t + k = \boxed{e^{x^2+2} + k}$$

c) $\int \sqrt{1-2x}\,(x+2)\,dx$

Sea $\boxed{t=1-2x} \quad \Rightarrow \quad dt=-2\,dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{dx=\dfrac{dt}{-2}}$.

Además, despejando x obtenemos: $\boxed{x=\dfrac{1-t}{2}}$.

Reemplazando en la integral se obtiene:

$$\int \sqrt{1-2x}\,(x+2)\,dx=\int \sqrt{t}\left(\frac{1-t}{2}+2\right)\frac{dt}{-2}=-\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-t+4}{2}\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{4}\int t^{\frac{1}{2}}\,(5-t)\,dt=-\frac{1}{4}\int (5t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{3}{2}})\,dt=-\frac{5}{4}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+k=$$

$$=\boxed{-\frac{5}{6}(1-2x)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{10}(1-2x)^{\frac{5}{2}}+k}$$

d) $\int \dfrac{1}{1+16x^2}\,dx$

Sea $\boxed{t=4x} \quad \Rightarrow \quad dt=4\,dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{dx=\dfrac{dt}{4}}$. Reemplazando en la integral resulta:

$$\int \frac{1}{1+16x^2}\,dx=\int \frac{1}{1+(4x)^2}\,dx=\int \frac{1}{1+t^2}\,\frac{dt}{4}=\frac{1}{4}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{4}\operatorname{arctg} t+k=\boxed{\frac{1}{4}\operatorname{arctg}(4x)+k}$$

e) $\int \dfrac{dx}{x\,\sqrt[5]{\ln x+1}}$

Sea $\boxed{t=\ln x+1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{dt=\dfrac{1}{x}\,dx}$. Reemplazando en la integral se obtiene:

$$\int \frac{dx}{x\,\sqrt[5]{\ln x+1}}=\int \frac{dt}{\sqrt[5]{t}}=\int t^{-\frac{1}{5}}\,dt=\frac{t^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}}+k=\boxed{\frac{5}{4}(\ln x+1)^{\frac{4}{5}}+k}$$

OBSERVACIÓN:

Antes de pasar a estudiar otros métodos de integración es oportuno presentar dos nuevas propiedades que son de gran utilidad. Si bien se trata de dos casos particulares del método de sustitución, creemos que es conveniente usarlas independientemente, pues se presentarán con frecuencia.

PROPIEDADES

1) Si $\int f(x)\,dx = F(x)+k$, entonces $\boxed{\int f(x+a)\,dx = F(x+a)+k}$.

2) Si $\int f(x)\,dx = F(x)+k$, entonces $\boxed{\int f(a\cdot x)\,dx = \frac{1}{a}F(a\cdot x)+k}$.

06 Ejemplo Calcular las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int e^{x-2}\,dx = \boxed{e^{x-2}+k}$

b) $\int \operatorname{sen} 5x\,dx = \boxed{-\frac{\cos 5x}{5}+k}$

c) $\int \frac{1}{2x+3}\,dx = \boxed{\frac{1}{2}\ln(2x+3)+k}$

MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES

Sean dos funciones derivables ***u*** y ***v***. Consideremos la función producto *w*, donde $w = u\cdot v$ y calculemos su diferencial:

$$dw = d(u\cdot v) = u\,dv + v\,du \quad \Rightarrow \quad u\,dv = dw - v\,du$$

Integrando miembro a miembro obtenemos:

$$\int u.dv = \int dw - \int v.du \quad \Rightarrow \quad \int u.dv = w - \int v.du$$

Reemplazando ***w*** obtenemos:

$$\boxed{\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du}$$

Esta fórmula es utilizada habitualmente cuando el integrando de la integral se puede expresar como el producto de dos factores, donde uno de ellos es ***u*** y el otro ***dv***. Para aplicar dicha fórmula es necesario calcular ***du*** (no es otra cosa que la diferencial de la función ***u***) y se requiere encontrar la función ***v*** (para lo cual se integra ***dv***).

NOTA: Cuando al integrar ***dv***, obtenemos ***v*** **no** colocamos constante de integración.

OBSERVACIÓN:

Para determinar cuál de los dos factores es u existe una regla que establece una especie de prioridad entre las distintas clases de funciones. La regla es conocida comúnmente con el nombre de **ILPET** (Inversa, Logarítmica, Potencial, Exponencial y Trigonométrica). Se aplica de la siguiente forma: si en el integrando aparece una función exponencial y otra logarítmica, se asigna a u la función logarítmica, si aparece una trigonométrica y una potencial, por aplicación de la regla u es la función potencial. De todos modos, si nos equivocáramos en la elección, al utilizar la fórmula nos encontraríamos (en el segundo miembro) con una integral mucho más difícil o imposible de resolver.

Veamos algunos ejemplos en los que se utiliza este método de resolución de integrales.

07 Ejemplo Resolver las siguientes integrales indefinidas aplicando el método de integración por partes.

a) $\int \sqrt[3]{x} \ln x \, dx$

Elegimos $\boxed{u = \ln x} \Rightarrow \boxed{du = \frac{1}{x} dx}$.

Luego, $\boxed{dv = \sqrt[3]{x}\, dx} \Rightarrow \boxed{v = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}}}$.

Aplicando la fórmula obtenemos:

$$\int \sqrt[3]{x} \ln x \, dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \ln x - \int \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \ln x - \frac{3}{4} \int x^{\frac{4}{3}-1} dx =$$

$$= \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \ln x - \frac{3}{4} \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \ln x - \frac{3}{4} \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + k = \boxed{\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \ln x - \frac{9}{16} x^{\frac{4}{3}} + k}$$

b) $\int e^{2x} \, x^2 \, dx$

Elegimos $\boxed{u = x^2} \Rightarrow \boxed{du = 2x \, dx}$.

Luego, $\boxed{dv = e^{2x} \, dx} \Rightarrow \boxed{v = \int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2}}$.

Aplicando la fórmula obtenemos:

$$\int e^{2x} \, x^2 \, dx = x^2 \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} 2x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \, e^{2x} - \int e^{2x} \, x \, dx$$

Esta última integral debe ser resuelta aplicando nuevamente el método de integración por partes.

$$\int e^{2x}\ x\,dx$$

Elegimos $\boxed{u = x}$ $\Rightarrow$ $\boxed{du = 1\,dx}$.

Luego, $\boxed{dv = e^{2x}\ dx}$ $\Rightarrow$ $\boxed{v = \int e^{2x}\ dx = \frac{e^{2x}}{2}}$.

Aplicando la fórmula obtenemos:

$$\int e^{2x}\ x\,dx = x\,\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,1\,dx = x\,\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\ dx = \boxed{x\,\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{e^{2x}}{2} + k}$$

Sustituyendo en la integral dada nos queda:

$$\int e^{2x}\ x^2\ dx = \frac{1}{2}\,x^2\ e^{2x} - \left[.\frac{1}{2}\,x\ e^{2x} - \frac{1}{2}\,\frac{e^{2x}}{2} + k\right] = \frac{1}{2}\,x^2\ e^{2x} - \frac{1}{2}\,x\ .e^{2x} + \frac{1}{4}\,e^{2x} + k =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\,e^{2x}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + k}$$

c) $\int e^x \cos x\,dx$

Elegimos $\boxed{u = e^x}$ $\Rightarrow$ $\boxed{du = e^x\ dx}$.

Luego, $\boxed{dv = \cos x\ dx}$ $\Rightarrow$ $\boxed{v = \int \cos x\ dx = \operatorname{sen} x}$.

Aplicando la fórmula obtenemos:

$$\int e^x \cos x\ dx = e^x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\ e^x\ dx$$

La última integral es tan compleja como la primera en cuanto a su resolución. Aplicamos nuevamente el método de integración por partes.

$$\int e^x \cos x\ dx$$

Elegimos $\boxed{u = e^x}$ $\Rightarrow$ $\boxed{du = e^x\ dx}$.

Luego, $\boxed{dv = \cos x\ dx}$ $\Rightarrow$ $\boxed{v = \int \cos x\ dx = \operatorname{sen} x}$.

Aplicando la fórmula obtenemos:

$$\int e^x .\operatorname{sen} x.dx = e^x(-\cos x) - \int(-\cos x).e^x .dx\ - e^x \cos x + \int \cos x\ e^x\ dx$$

Reemplazando esta expresión (que contiene a la integral que buscamos) en la integral dada, obtenemos:

$$\int e^x \cos x\ dx = e^x \operatorname{sen} x - \left[-e^x \cos x + \int \cos x\ e^x\ dx\right] = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\ dx$$

Pasamos la integral del segundo miembro al primero.

$$2\int e^x \cos x\ dx = e^x\ senx + e^x \cos x$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\int e^x \cos x\ dx = \frac{1}{2}\,e^x\ (\operatorname{sen} x + \cos x) + k}$$

MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR FRACCIONES SIMPLES

Este método permite encontrar primitivas de funciones racionales, es decir, funciones que sean cocientes de funciones polinómicas.
Para su utilización es necesario que el grado del polinomio del numerador sea menor que el grado del polinomio del denominador.

$$\boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \qquad \text{gr } P(x) < \text{gr } Q(x)}$$

El método de fracciones simples da la posibilidad de transformar integrandos como el anterior en suma de integrandos de fácil resolución. Para ello, lo dividiremos en varios casos según la multiplicidad de las raíces del denominador. En cada caso trabajaremos sobre un ejemplo particular, pero quedará claro la forma de resolución para cualquier otro ejemplo.

1^er^ CASO: El denominador tiene todas sus raíces reales y simples.

08 Ejemplo $\int \frac{3x^2-2}{x^3+x^2-2x}\,dx$

Como el grado del numerador es menor que el grado del denominador podemos utilizar el método de fracciones simples.

- Se factorea el polinomio denominador a partir de sus raíces: $Q(x) = a(x-x_1)\ldots(x-x_n)$
  En nuestro ejemplo: $x^3+x^2-2x = x(x-1)(x-2)$
  Observemos que tenemos tres raíces reales y distintas: $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2$.
- Aplicamos la propiedad: $\frac{P(x)}{(x-x_1)\ldots(x-x_n)} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \ldots + \frac{A_n}{(x-x_n)}$
  En nuestro ejemplo: $\frac{3x^2-2}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$
- El fin ahora es determinar los valores de A, B y C. Para ello hacemos lo siguiente:

$$\frac{3x^2-2}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$

  Igualando los numeradores, obtenemos:
  $3x^2-2 = A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1)$

  Reemplazamos x por valores cualesquiera. Con el fin de facilitar las cuentas **r***eemplazamos por las raíces del polinomio denominador.*

  - Para $x=0$: $-2 = A(-1)(-2)+B\cdot 0+C\cdot 0 = 2A \quad \Rightarrow \quad \boxed{A=-1}$
  - Para $x=1$: $1 = A\cdot 0+B(-1)+C\cdot 0 = -B \quad \Rightarrow \quad \boxed{B=-1}$
  - Para $x=2$: $10 = A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 2 = 2C \quad \Rightarrow \quad \boxed{C=5}$

Luego, la descomposición en ***fracciones simples*** es:

$$\frac{3x^2-2}{x(x-1)(x-2)}=\frac{-1}{x}+\frac{-1}{x-1}+\frac{5}{x-2}$$

- Resolvemos la integral:

$$\int\frac{3x^2-2}{x(x-1)(x-2)}\,dx=\int\frac{-1}{x}\,dx+\int\frac{-1}{x-1}\,dx+\int\frac{5}{x-2}\,dx=\boxed{-\ln|x|-\ln|x-1|+5\ln|x-2|+k}$$

2do CASO: El denominador tiene todas sus raíces reales, algunas de ellas con multiplicidad.

09 Ejemplo $\displaystyle\int\frac{x^2}{(x-1)^3}\,dx$

Como el grado del numerador es menor que el grado del denominador podemos utilizar el método de fracciones simples.

- Si en el denominador aparece una expresión de la forma $(x-a)^h$, esta raíz múltiple da origen a h fracciones simples. Luego, la descomposición es:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^h}=\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_h}{(x-a)^h}$$

En este ejemplo: $\displaystyle\frac{x^2}{(x-1)^3}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}$

Observemos que $x=1$ es una raíz con multiplicidad 3.

- El fin ahora es determinar los valores de A, B y C. Para ello hacemos lo siguiente:

$$\frac{x^2}{(x-1)^3}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}=\frac{A(x-1)^2+B(x-1)+C}{(x-1)^3}$$

Igualando numeradores, obtenemos:

$$x^2=A(x-1)^2+B(x-1)+C$$

Reemplazamos x por el valor de la única raíz: $x=1 \Rightarrow \boxed{C=1}$.

Para determinar A y B elegimos cualquier valor que no repita ninguna de las raíces (en nuestro caso, que sea distinto de 1) y lo reemplazamos en x.

- Para $x=0$: $0=A-B+C=A-B+1 \quad\Rightarrow\quad A-B=-1$
- Para $x=2$: $4=A+B+C=A+B+1 \quad\Rightarrow\quad A+B=3$

Luego, resolvemos el sistema:

$$\begin{cases}A-B=-1\\ A+B=3\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\boxed{A=1}\ \wedge\ \boxed{B=2}$$

Por lo tanto, la descomposición en ***fracciones simples*** será:

$$\frac{x^2}{(x-1)^3}=\frac{1}{(x-1)}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}$$

- Resolvemos la integral:

$$\int\frac{x^2}{(x-1)^3}\,dx=\int\frac{1}{(x-1)}\,dx+\int\frac{2}{(x-1)^2}\,dx+\int\frac{1}{(x-1)^3}\,dx=\boxed{\ln|x-1|-2(x-1)^{-1}-\frac{1}{2}(x-1)^{-2}+k}$$

10 *Ejemplo* $\displaystyle\int\frac{5}{(x-3)^2(x+2)}\,dx$

Como el grado del numerador es menor que el grado del denominador podemos utilizar el método de fracciones simples.

Descomponemos en fracciones simples, observando que $x=3$ es una raíz con multiplicidad 2 y $x=-2$ es una raíz simple.

$$\frac{5}{(x-3)^2(x+2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{C}{x+2}=\frac{A(x-3)(x+2)+B(x+2)+C(x-3)^2}{(x-3)^2(x+2)}$$

Luego, igualamos numeradores:

$$5=A(x-3)(x+2)+B(x+2)+C(x-3)^2$$

Buscamos los valores de ***A***, ***B*** y ***C***. Como tenemos sólo dos raíces y tres constantes a determinar, reemplazamos *x* por un valor arbitrario.

- $x=3:\quad 5=5B\quad\Rightarrow\quad\boxed{B=1}$
- $x=-2:\quad 5=25C\quad\Rightarrow\quad\boxed{C=\frac{1}{5}}$
- $x=0:\quad 5=-6A+2B+9C=-6A+2+\frac{9}{5}=-6A+\frac{19}{5}\quad\Rightarrow\quad-\frac{6}{5}=-6A\quad\Rightarrow\quad\boxed{A=\frac{1}{5}}$

Reemplazando en las fracciones e integrando obtenemos:

$$\int\frac{5}{(x-3)^2(x+2)}\,dx=\int\frac{\frac{1}{5}}{x-3}\,dx+\int\frac{1}{(x-3)^2}\,dx+\int\frac{\frac{1}{5}}{x+2}\,dx=$$

$$=\frac{1}{5}\ln|x-3|-(x-3)^{-1}+\frac{1}{5}\ln|x+2|+k$$

3er CASO: El denominador tiene raíces complejas simples.

11 Ejemplo $$\int \frac{2x}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$$

Como el grado del numerador es menor que el grado del denominador podemos utilizar el método de fracciones simples.

- En la expresión con raíces complejas pondremos una fracción de la forma:
  $$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} \qquad b^2-4ac<0$$
  En nuestro ejemplo, como tenemos además una raíz simple (que es $x=1$), la descomposición en fracciones simples será:
  $$\frac{2x}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$
- El fin ahora es determinar los valores de A, B y C. Para ello hacemos lo siguiente:
  $$\frac{2x}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}$$

  Igualando los numeradores, obtenemos:

  $$2x=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$$

  - $x=1:\quad 2=2A \quad\Rightarrow\quad \boxed{A=1}$
  - $x=0:\quad 0=A-C \quad\Rightarrow\quad A=C \quad\Rightarrow\quad \boxed{C=1}$
  - $x=2:\quad 4=5A+(2B+C)\cdot 1=5A+2B+C=2B+6 \quad\Rightarrow\quad 2B=-2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{B=-1}$

- Reemplazando en las fracciones e integrando, obtenemos:
  $$\int \frac{2x}{(x-1)(x^2+1)}\,dx=\int\frac{1}{x-1}\,dx+\int\frac{-x+1}{x^2+1}\,dx=\int\frac{1}{x-1}\,dx-\int\frac{x}{x^2+1}\,dx+\int\frac{1}{x^2+1}\,dx=$$
  $$=\boxed{\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+\operatorname{arctg} x+k}$$

OBSERVACIÓN:

Cabe aclarar que existe un cuarto caso, que corresponde a denominador con raíces complejas múltiples, el cual no será objeto de estudio de estas notas teóricas.

ACLARACIÓN:

Si el grado del numerador es mayor o igual al del denominador, para poder aplicar el método de fracciones simples, es necesario efectuar la división de los dos polinomios y expresar la integral de la siguiente forma:

$$\boxed{\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\int C(x)\,dx+\int\frac{R(x)}{Q(x)}\,dx \qquad \textbf{donde } C(x) \textbf{ es el cociente y } R(x) \textbf{ el resto.}}$$

12 *Ejemplo* $\int \frac{x^3+2x^2}{x^2-x-2}\,dx$

- Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, primero procedemos a efectuar la división de los dos polinomios.

$$\begin{array}{r|l} x^3+2x^2 & x^2-x-2 \\ \hline -x^3+x^2+2x & x+3 \\ \hline 3x^2+2x & \\ -3x^2+3x+6 & \\ \hline 5x+6 & \end{array}$$

De donde se deduce que: $\boxed{C(x)=x+3}$ $\boxed{R(x)=5x+6}$

Por lo tanto:

$$\int \frac{x^3+2x^2}{x^2-x-2}\,dx=\int (x+3)\,dx+\int \frac{5x+6}{x^2-x-2}\,dx=\frac{1}{2}x^2+3x+\int \frac{5x+6}{x^2-x-2}\,dx$$

- Descompongamos la fracción de la integral del segundo miembro en fracciones simples. Con ese fin, primeramente, factoricemos el polinomio $Q(x)$ del denominador.

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1) \quad \textbf{donde} \quad x_1=2 \ \wedge \ x_2=-1 \ \textbf{son las raíces de } Q(x)$$

Entonces la descomposición se hará en dos fracciones, una de denominador $x-2$ y otra de denominador $x+1$.

$$\frac{5x+6}{x^2-x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}=\frac{A.(x+1)+B.(x-2)}{(x-2).(x+1)}$$

- Para determinar las constantes A y B igualamos los numeradores.

$$5x+6=A.(x+1)+B.(x-2)$$

  - $x=2: \quad 16=3A \quad \Rightarrow \quad \boxed{A=\frac{16}{3}}$
  - $x=-1: \quad 1=-3B \quad \Rightarrow \quad \boxed{B=-\frac{1}{3}}$

- Reemplazando los valores de A y B e integrando obtenemos:

$$\int \frac{5x+6}{x^2-x-2}\,dx=\int \frac{\frac{16}{3}}{x-2}\,dx+\int \frac{-\frac{1}{3}}{x+1}\,dx=\boxed{\frac{16}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{3}\ln|x+1|+k}$$

- Sustituyendo este resultado en la integral pedida obtenemos la solución del ejercicio.

$$\int \frac{x^3+2x^2}{x^2-x-2}\,dx=\boxed{\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{16}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{3}\ln|x+1|+k}$$

APLICACIONES ECONÓMICAS (PRIMERA PARTE)

En esta sección no se introduce ningún concepto nuevo que no se haya trabajado ya en los capítulos anteriores. Solo se trata de aplicar el concepto de integral indefinida a los problemas en los cuales (al revés que antes) nos proponen alguna función económica marginal y se nos solicita que obtengamos la función económica de la cual proviene. Para aclarar lo expuesto es que resolveremos un ejemplo.

13 Ejemplo La función de costo marginal está dada por: $C'(x)=300+20x-12x^2$ y los costos fijos ascienden a **$40.000**. Determinar la función de costos totales y la de costo medio.

Como el costo marginal es la derivada primera del costo total, será necesario encontrar la integral indefinida de la función costo marginal para determinar la función de costos totales.

$$C(x)=\int (300+20x-12x^2)\,dx \quad \Rightarrow \quad C(x)=300x+20\frac{x^2}{2}-12\frac{x^3}{3}+k \quad \Rightarrow$$

$$C(x)=300x+10x^2-4x^3+k \qquad (*)$$

Para encontrar la solución al problema falta determinar la constante k, para ello usamos el dato que nos dice que el costo fijo (es decir, para $x = 0$) es de $40.000 .
Sustituyendo en (*) obtenemos:

$$C(0)=300\ .\ 0+10.\ 0^2-4\ .\ 0^3+k \quad \Rightarrow \quad 40.000=k \quad \Rightarrow \quad \boxed{C(x)=300x+10x^2-4x^3+40.000}$$

Ahora solo resta encontrar la función de costo medio, para lo cual sabemos que: $\boxed{\overline{C}(x)=\dfrac{C(x)}{x}}$.

$$\overline{C}(x)=\frac{300x+10x^2-4x^3+40.000}{x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{C}(x)=300+10x-4x^2+\frac{40.000}{x}}$$

INTEGRAL DEFINIDA

Sea $f(x)$ una función continua definida positiva sobre un segmento $[a,b]$.

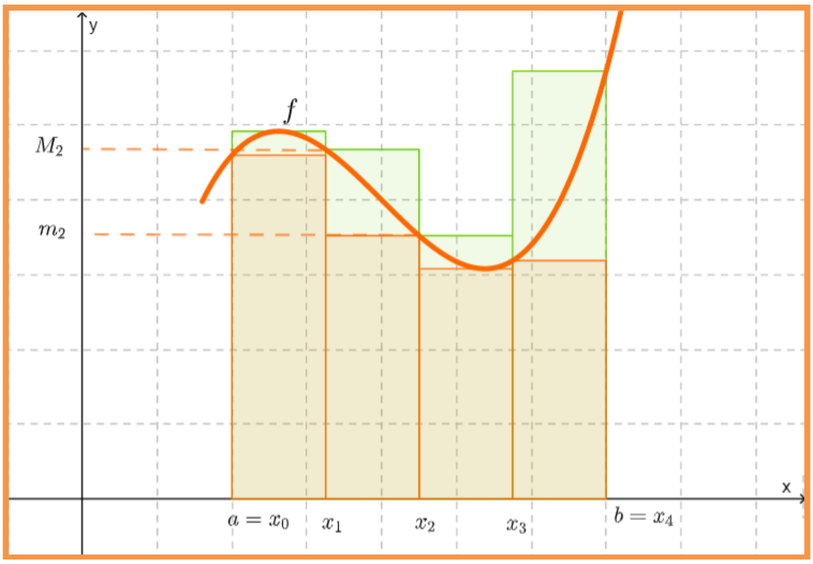
Dividamos mediante puntos el segmento $[a,b]$ en n partes.

$a = x_0,\ x_1, x_2, \dots, x_{n\text{-}1}, x_n = b$

En este caso: $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n\text{-}1} < x_n$.

Designemos: $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, $\Delta x_3 = x_3 - x_2, \dots,\ \Delta x_n = x_n - x_{n\text{-}1}$.

En cada uno de los subintervalos podemos encontrar el mínimo y el máximo que alcanza la función en dicho subintervalo, a los que denominamos m_i y M_i respectivamente.



Queremos calcular el área encerrada por la función en el intervalo $[a,b]$.

Una aproximación *por defecto* de dicha área se obtiene al sumar las áreas de los n rectángulos de base Δx_i y altura m_i. A esta área la denominaremos ***suma integral inferior.***

La expresión que permite calcular esta área es: $\boxed{s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i}$

De forma similar podemos calcular una aproximación *por exceso* al sumar las áreas de los n rectángulos de base Δx_i y altura M_i. A esta área la denominaremos ***suma integral superior.***

La expresión que permite calcular esta área es: $\boxed{S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i}$

Es claro que: $s_n \le S_n$ **puesto que en cada subintervalo** $m_i \le M_i$.

En cada uno de los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$ podemos elegir un punto interior que designaremos c_i, y para cada uno de estos puntos es posible calcular el valor de la función, al que llamamos $f(c_i)$.

Calculemos la siguiente suma: $\boxed{\Sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i}$, a la que llamaremos ***suma integral***.

Como en todos los casos $m_i \le f(c_i) \le M_i$

Tenemos que: $\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\cdot\Delta x_i$

Es decir: $\boxed{s_n \le \Sigma_n \le S_n}$

Es claro que la suma integral (Σ_n) depende de la forma en que hemos subdividido el intervalo $[a,b]$ y la forma en que se han elegido los c_i en cada subintervalo.

Designemos por: $\max\ \Delta x_i$ a la mayor longitud de los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$ y analicemos diferentes divisiones del segmento $[a,b]$ en los cuales $\max\ \Delta x_i \to 0$. Es claro que en este proceso de subdivisión $n \to \infty$.

Si para cada subdivisión elegida, el límite para $\max \Delta x_i \to 0$ de $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i$ es finito y el mismo para cada subdivisión, diremos que la función $f(x)$ es ***integrable*** en el segmento $[a,b]$.

DEFINICIÓN: El límite anterior recibe el nombre de ***integral definida*** de la función $f(x)$ en el segmento $[a,b]$ y se designa: $\int_a^b f(x)\,dx$. Es decir:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx}$$

OBSERVACIÓN: Los números a y b reciben el nombre, respectivamente, de ***límite inferior*** y ***superior*** de la integral, el segmento $[a,b]$ se llama ***segmento de integración*** y la letra x, ***variable de integración.***

NOTA: Si construimos la gráfica de la función $y = f(x)$ (admitiendo que está definida positivamente), la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ será numéricamente igual al área del así denominado ***trapecio curvilíneo*** determinado por la curva, gráfica de $y = f(x)$ y las rectas de ecuaciones $x = a$, $x = b$ e $y = 0$. Es decir: $\boxed{A = \int_a^b f(x)\,dx}$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

1) El factor constante se puede extraer fuera del signo de la integral definida.

$$\boxed{\int_a^b a.f(x)\,dx = a.\int_a^b f(x)\,dx}$$

2) La integral definida de la suma algebraica de dos o más funciones es igual a la suma algebraica de las integrales definidas de cada una de las funciones sumandos.

$$\boxed{\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx}$$

3) Si se invierten los límites de integración, la integral definida cambia de signo.

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}$$

4) Si m y M son los valores mínimo y máximo respectivamente de la función $f(x)$ en el segmento $[a,b]$, entonces se verifica que:

$$\boxed{m.(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M.(b-a)}$$

5) Para tres números arbitrarios a, b y c se verifica la igualdad:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

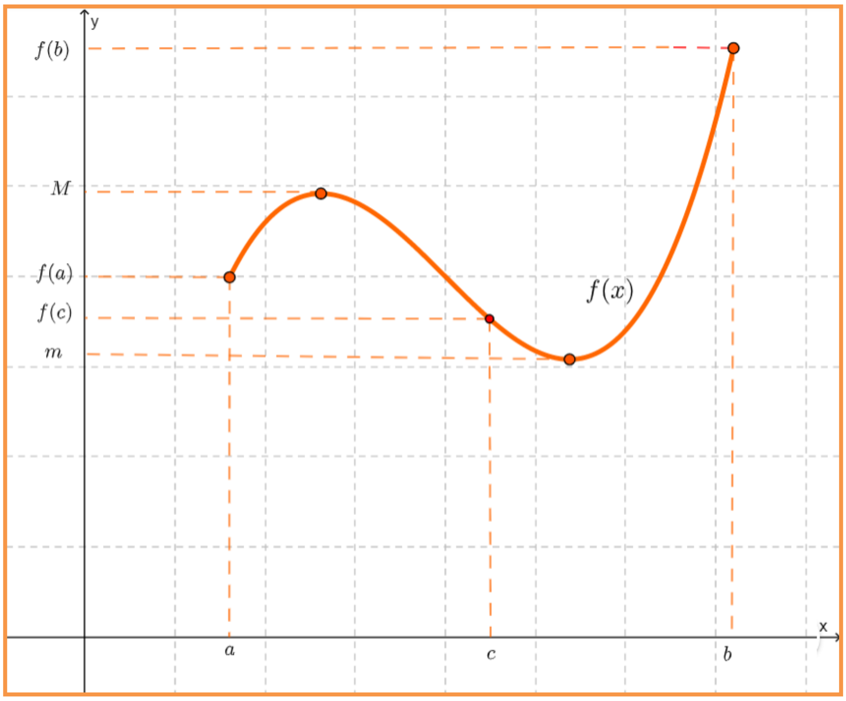
6) Si en el segmento $[a,b]$ se verifica que $f(x) \leq g(x)$, entonces:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx}$$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO INTEGRAL:

Si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a,b]$, existe $c \in [a,b]$, tal que se verifica la siguiente igualdad:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(c)$$



DEMOSTRACIÓN:

Trabajaremos en adelante suponiendo que $a < b$. Por otra parte, podemos admitir que m y M son los valores mínimo y máximo, respectivamente, de la función $f(x)$ en el segmento $[a,b]$.
Sabemos por propiedades anteriores que:

$$m\cdot(b-a)\le\int_a^b f(x)\cdot dx\le M\cdot(b-a) \quad\Rightarrow\quad m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\cdot dx\le M$$

Luego, llamando $\mu=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\cdot dx$ resulta que: $m\le\mu\le M$

Como $f(x)$ es una función continua toma todos los valores intermedios comprendidos entre m y M. Por lo tanto, por la generalización del teorema del valor medio para funciones continuas en un intervalo cerrado, sabemos que existe $c\in[a,b]$ tal que $\mu=f(c)$. Es decir:

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\cdot dx \quad\Rightarrow\quad \boxed{\int_a^b f(x)\cdot dx=(b-a)\cdot f(c)}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA: Esto quiere decir que si $f(x)$ es continua sobre un segmento $[a,b]$, el área comprendida entre la curva, el eje x y las rectas $x=a$ y $x=b$ se puede calcular como el área de un rectángulo cuya base mide $b-a$ y cuya altura es igual a $f(c)$, para algún c (no necesariamente único) del segmento $[a,b]$.

Apliquemos lo visto a un problema.

14 Ejemplo Demostrar que: $3 \le \int_1^2 \frac{30}{2+x^3}dx \le 10$

Por el teorema del valor medio sabemos que existe $c \in [1,2]$ tal que:

$$f(c).(2-1) = \int_1^2 \frac{30}{2+x^3}dx \quad \Rightarrow \quad f(c) = \int_1^2 \frac{30}{2+x^3}dx$$

Pero $f(c) = \frac{30}{2+c^3}$. Por lo tanto, es necesario acotar $f(c)$.

$$1 \le c \le 2 \quad \Rightarrow \quad 1^3 \le c^3 \le 2^3 \quad \Rightarrow \quad 1+2 \le c^3+2 \le 8+2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3} \ge \frac{1}{c^3+2} \ge \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad \frac{30}{3} \ge \frac{30}{c^3+2} \ge \frac{30}{10} \quad \Rightarrow \quad \boxed{3 \le f(c) \le 10}$$

En consecuencia, como:

$$f(c) = \int_1^2 \frac{30}{2+x^3}dx \quad \textbf{podemos concluir que:} \quad \boxed{3 \le \int_1^2 \frac{30}{2+x^3}dx \le 10}$$

PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

Si $f(x)$ es una función continua y $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, se verifica que $F'(x) = f(x)$.

Demostración: Apliquemos la definición de derivada a la función $F(x)$.

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h}$$

Aplicando la propiedad 5 en la primera integral del límite, obtenemos:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t).dt}{h}$$

Aplicando el Teorema del Valor Medio existe $c \in [x, x+h]$ tal que:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h-x)\cdot f(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\ f(c)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c)$$

Si calculamos el límite para h tendiendo a cero ocurre que $x+h$ tiende a x y por lo tanto c también tiende a x. Luego: $F'(x) = f(x)$.

NOTA: Obsérvese que si $f(x)$ es no negativa, $F(x)$ coincide numéricamente con el área bajo la curva y el eje x, entre la recta fija $x = a$ y una recta vertical que va variando en función de x.

A continuación, resolveremos algunos problemas aplicando el teorema anterior.

15 Ejemplo Calcular las primeras derivadas de las siguientes funciones.

a) $F(x)=\int_3^x (\operatorname{sen} t)^{-2}\,dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{F'(x)=(\operatorname{sen} x)^{-2}}$

En el caso anterior hemos aplicado directamente el teorema.

b) $F(x)=\int_x^{-4} \ln(1+2z)\,dz \quad \Rightarrow \quad F(x)=-\int_4^x \ln(1+2z)\,dz \quad \Rightarrow \quad \boxed{F'(x)=-\ln(1+2x)}$

Para resolver el problema precedente tuvimos que cambiar el orden de integración (lo que implica un cambio de signo de la integral), para poder aplicar el teorema.

c) $G(x)=\int_0^x x^3\,e^t\,dt \quad \Rightarrow \quad G(x)=x^3\int_0^x e^t\,dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{G'(x)=3x^2\int_0^x e^t\,dt+x^3\,e^x}$

En este ejemplo, sacamos fuera de la integral un factor que depende de la variable respecto de la que se deriva, pero no de la variable de integración para poder usar el teorema en cuestión.

d) $G(x)=\int_0^{\ln x} (t^3-t+2)\,dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{G'(x)=\left[(\ln x)^3-\ln x+2\right]\frac{1}{x}}$

En el último caso, hemos hecho uso del teorema de la derivación de funciones compuestas, puesto que, en el límite superior de la integral, en vez de aparecer la variable **x**, se encuentra una función de x.

SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL (REGLA DE BARROW):

Si $F(x)$ es una primitiva de la función continua $f(x)$, se verifica que:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)}$$

Demostración: Sea $F(x)$ una primitiva de $f(x)$. Por el teorema anterior sabemos que

$G(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ es también una primitiva de $f(x)$, puesto que $G'(x)=f(x)$.

Como dos primitivas de una misma función difieren en una constante **k**, podemos escribir

$\int_a^x f(t)\,dt=F(x)+k$.

Para determinar **k**, hagamos $x=a$: $\int_a^a f(t)\,dt=F(a)+k$.

Como $\int_a^a f(t)\,dt=0 \quad \Rightarrow \quad F(a)+k=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k=-F(a)}$

De donde resulta $\boxed{\int_a^x f(t).dt=F(x)-F(a)}$

Finalmente, sustituyendo x por b y t por x, resulta: $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$

Como queríamos demostrar.
Aplicaremos este teorema a los siguientes problemas.

16 Ejemplo Resolver las siguientes integrales definidas.

a) $\int_{-1}^{2} (8x^3 - 2x)\,dx$

Calculamos una primitiva por integración directa.

$$\int_{-1}^{2} (8x^3 - 2x)\,dx = 8\,\frac{x^4}{4} - 2\,\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{2} = 2x^4 - x^2\Big|_{-1}^{2} = \left(2\,2^4 - 2^2\right) - \left(2\,(-1)^4 - (-1)^2\right)$$

$$\int_{-1}^{2} (8x^3 - 2x).dx = 28 - 1 \qquad \Rightarrow \qquad \int_{-1}^{2} (8x^3 - 2x)\,dx = \boxed{27}$$

b) $\int_{0}^{1} (x+2).e^x\,dx$

Para resolver la integral, primeramente, es necesario encontrar una primitiva aplicando el método de integración por partes.

Elegimos $\boxed{u = x + 2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{du = 1\,dx}$

Luego, $\boxed{dv = e^x\,dx} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \int e^x\,dx = e^x}$

Por lo tanto: $\int (x+2)\,e^x\,dx = (x+2)\,e^x - \int e^x\,dx = (x+2)\,e^x - e^x$

Calculamos ahora la integral definida.

$$\int_{0}^{1} (x+2)\,e^x\,dx = \left((x+2).e^x - e^x\right)\Big|_{0}^{1} = \left[(1+2)\,e - e\right] - \left[(0+2)\,e^0 - e^0\right] = \boxed{2e - 1}$$

c) $\int_{0}^{3} (x+4).\sqrt{x+1}\,dx$

Para resolver esta integral haremos un cambio de variable, esto implica no sólo sustituirla en la función y en el diferencial, sino también reemplazar los viejos límites de integración por los nuevos que se deduzcan de la relación entre ambas variables.

Sea $\boxed{t = x + 1} \Rightarrow \boxed{dt = 1\,dx} \quad \wedge \quad \boxed{x = t - 1}$.

Además, cuando $\boxed{x = 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 1}$ y cuando $\boxed{x = 3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 4}$.

Entonces:

$$\int_0^3 (x+4).\sqrt{x+1}.dx = \int_1^4 (t-1+4).\sqrt{t}.dt = \int_1^4 (t+3).t^{\frac{1}{2}}.dt = \int_1^4 \left(t^{\frac{3}{2}} + 3\,t^{\frac{1}{2}} \right) dt = \left. \left(\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 3\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) \right|_1^4 =$$

$$= \left[\frac{2}{5} 4^{\frac{5}{2}} + 2\,4^{\frac{3}{2}} \right] - \left[\frac{2}{5} 1^{\frac{5}{2}} + 2\,1^{\frac{3}{2}} \right] = \boxed{\frac{132}{5}}$$

Con lo visto hasta el momento estamos en condiciones de resolver una serie bastante variada de ejercicios y problemas. Veamos algunos de ellos.

17 *Ejemplo* Calcular el siguiente límite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_1^{e^x} (z^2+z)\,dz}{\int_0^x (e^t - e^{2t})\,dt}$

Si calculamos directamente el límite nos encontramos con una indeterminación del tipo cero dividido cero, ya que los límites de integración en cada una de las integrales tenderían a coincidir, con lo cual, la integral se anula.

Para resolver el problema, aplicaremos el Primer Teorema Fundamental del Cálculo Integral, derivando respecto de la variable x, que es la variable del límite.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_1^{e^x} (z^2+z)\,dz}{\int_0^x (e^t - e^{2t})\,dt} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^{2x}+e^x)\,e^x}{(e^x - e^{2x})} = \infty$$

CÁLCULO DE ÁREAS

OBSERVACIÓN:

Obsérvese que no es lo mismo calcular la integral de $f(x)$ entre a y b que el área limitada por la gráfica de $f(x)$, el eje x y las rectas de ecuaciones: $x = a$ y $x = b$.

Para confirmar lo antedicho nos proponemos efectuar el siguiente ejercicio.

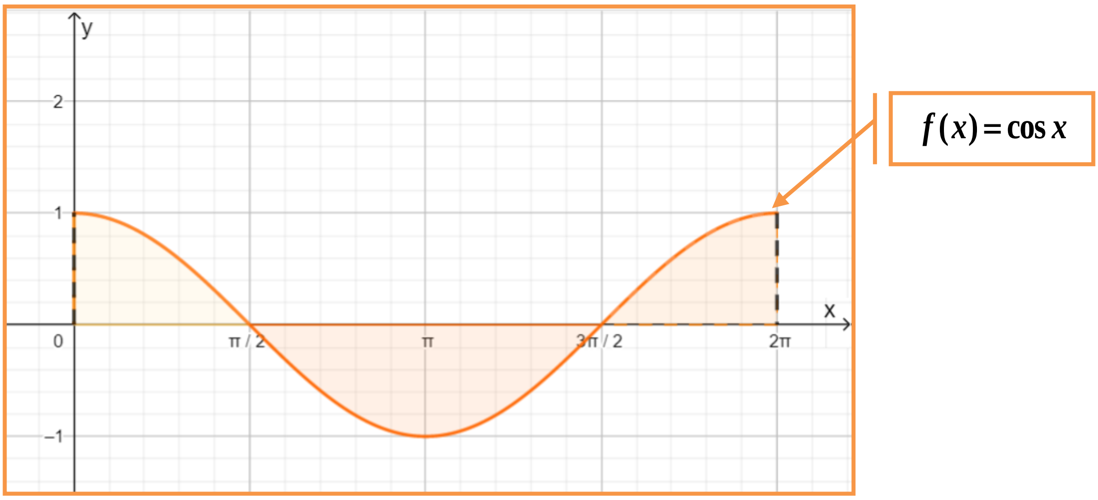
18 *Ejemplo* Calcular:

a) $\int_0^{2\pi} \cos x \, dx$

$$\int_0^{2\pi} \cos x\, dx = sen\ x\Big|_0^{2\pi} = sen 2\pi - sen 0 = 0 - 0 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\int_0^{2\pi} \cos x\, dx = 0}$$

b) El área limitada por la curva de $f(x) = \cos x$, el eje x sobre el segmento $[0, 2\pi]$.

Recuérdese que, para calcular el área de una región mediante una integral definida, debe ser $f(x) \geq 0$. En el caso de la función coseno esto no ocurre, pero como es ciertamente simétrica podemos calcular el área sobre el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y multiplicar por cuatro.



$$A = 4.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.dx = 4.senx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4.(sen\frac{\pi}{2} - sen 0) = 4.(1-0) = 4 \quad \Rightarrow \boxed{A = 4}$$

NOTA: De los resultados encontrados en **a)** y en **b)** podemos verificar lo afirmado en la observación precedente.

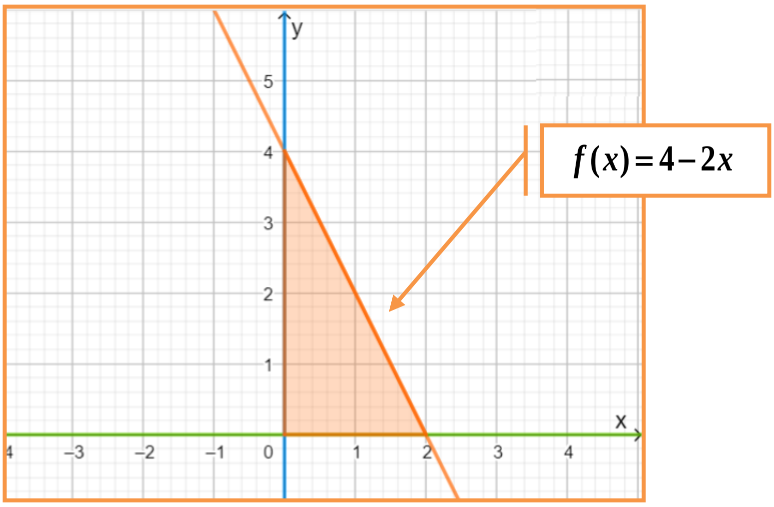
En primer lugar, procederemos a calcular el área de una región limitada por la gráfica de una función y uno o más ejes (rectas horizontales y/o verticales).

19 Ejemplo Calcular el área de las regiones limitadas por las gráficas de las funciones y los ejes indicados.

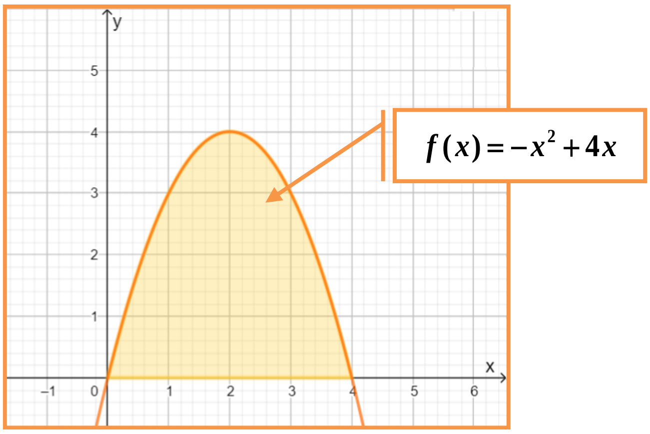
a) $f(x) = 4 - 2x$ el eje x y eje y

En primera instancia representamos gráficamente la función $f(x)$, sombreando la región limitada por dicha recta y los ejes coordenados.

$$A = \int_0^2 (4-2x)\, dx = \left(4x - x^2\right)\Big|_0^2 = (4.2\text{-}2^2) - (4.0 - 0^2) = \boxed{4}$$



b) $f(x)=-x^2+4x$ eje x

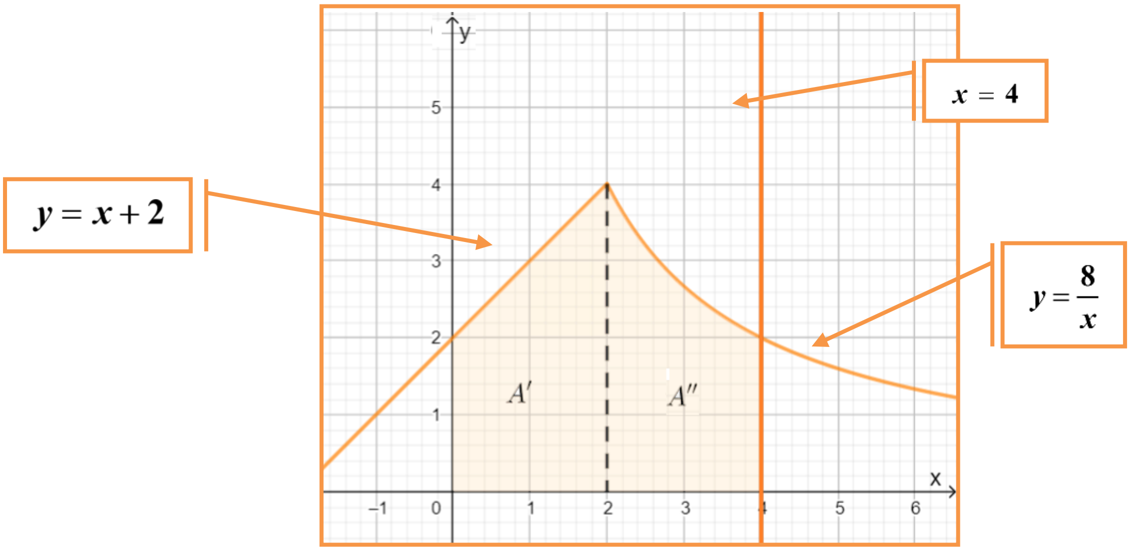


La región ha quedado limitada por el arco de parábola y el eje x.

$$A=\int_0^4(-x^2+4x)\,dx=\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2\right)\Bigg|_0^4=\left(-\frac{4^3}{3}+2\cdot 4^2\right)-\left(-\frac{0^3}{3}+2\cdot 0\right)=\boxed{\frac{32}{3}}$$

c) $f(x)=\begin{cases} x+2 & x<2 \\ \dfrac{8}{x} & x\geq 2 \end{cases}$ $\quad y=0;\quad x=0\quad \text{y}\quad x=4$

Recordar que $y=0$ *representa el eje x e* $x=0$



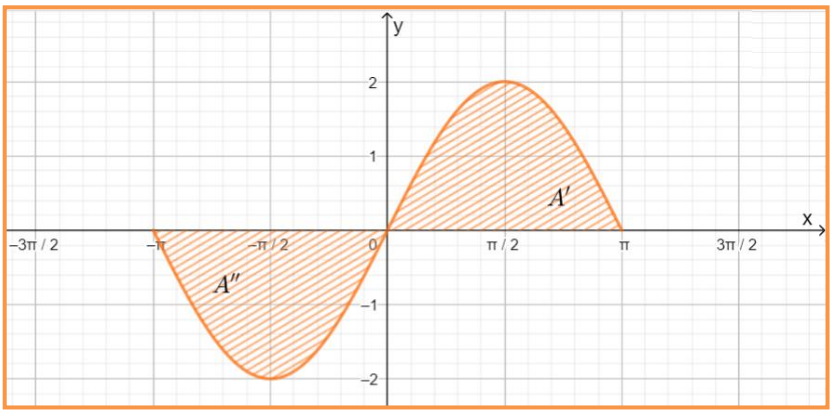
Para calcular el área de la región limitada por el arco de hipérbola y los cuatro segmentos de rectas es necesario dividir la región en dos sectores, cada uno de los cuales tiene por medidas del área A' y A''. Por lo tanto, calcularemos mediante una integral definida el área de cada sector y por la propiedad de aditividad del área tendremos el área de la región total.

$$A' = \int_0^2 (x+2).dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_0^2 = \left(\frac{2^2}{2} + 2\,2\right) - \left(\frac{0^2}{2} + 2\,0\right) = 6$$

$$A'' = \int_2^4 \frac{8}{x}\,dx = 8\ln x\Big|_2^4 = 8\ln 4 - 8\ln 2 = 8\ln 2$$

Por lo tanto: $\boxed{A = A' + A''}$ $\Rightarrow$ $\boxed{A = 6 + 8\ln 2}$

d) $f(x) = -2\,\text{sen}(x-\pi)$ eje x entre $x = -\pi$ y $x = \pi$



Este problema puede resolverse de dos maneras diferente. Sabiendo que la función seno es simétrica respecto del origen de coordenadas ($A' = A''$), es posible calcular el área de la región cuya área es A' y multiplicar por dos; o calcular el área de ambas regiones y sumar. Si bien el primer procedimiento es más simple, usaremos el segundo para confirmar la validez del primero y además para ejemplificar cómo se calcula el área de regiones ubicadas en el tercer y cuarto cuadrante.

$$A' = \int_0^{\pi} -2sen(x-\pi).dx = 2\cos(x-\pi)\Big|_0^{\pi} = 2\cos 0 - 2\cos(-\pi) = \boxed{4}$$

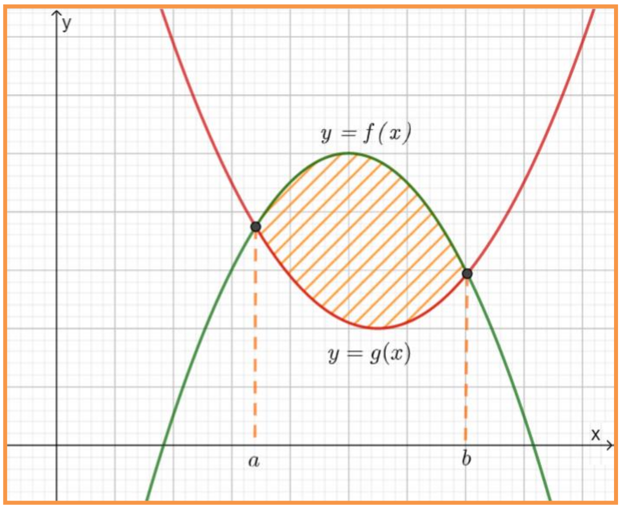
Para calcular el área de la región II, anteponemos un signo menos delante de la integral correspondiente, o lo que es lo mismo, calculamos el valor absoluto de la integral definida.

$$A'' = -\int_{-\pi}^{0} -2\,\text{sen}(x-\pi).dx \Rightarrow A = -2\cos(x-\pi)\Big|_{-\pi}^{0} \Rightarrow A'' = -2\cos(-\pi) + 2\cos(-2\pi) \Rightarrow \boxed{A'' = 4}$$

Por lo tanto : $\quad A = A' + A'' \quad \Rightarrow \quad \boxed{A{=}8}$

A continuación, calcularemos el área de regiones limitadas por las gráficas de dos o más funciones.

$$\boxed{A = \int_a^b \left(g(x) - f(x)\right) dx}$$

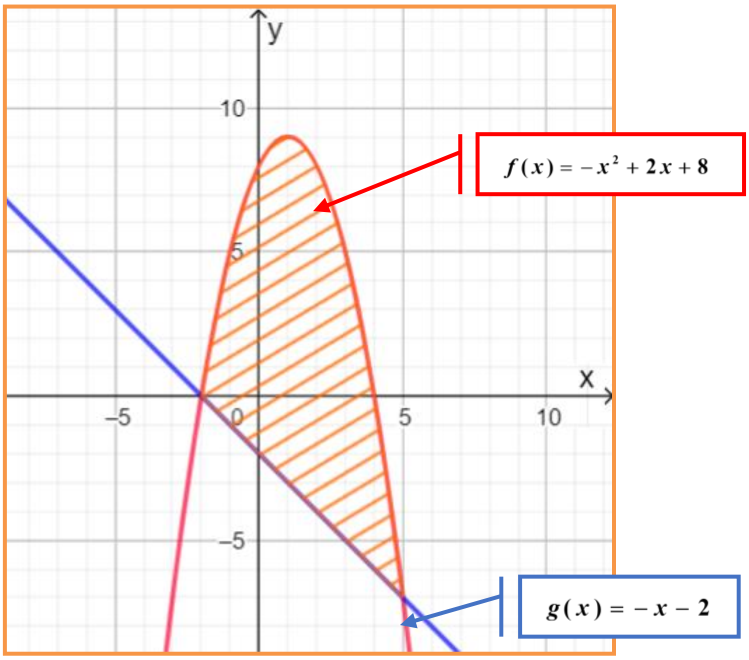


Nota: Obsérvese que $g(x)$ está por encima de $f(x)$, y es por eso por lo que la diferencia en la integral es $\boxed{g(x) - f(x)}$.

20 *Ejemplo*

Calcular el área de las regiones limitadas por las gráficas de las funciones indicadas:
$f(x)=-x^2+2x+8 \qquad g(x)=-x-2$

Representemos gráficamente ambas funciones para delimitar la región de la cual necesitamos calcular el área.



En primer término, encontramos la intersección entre las gráficas de ambas funciones, para lo cual igualamos las fórmulas de cada una de ellas construyendo una ecuación.

$$f(x)=g(x) \quad \Rightarrow \quad -x^2+2x+8=-x-2 \quad \Rightarrow \quad x^2-3x-10=0 \quad \Rightarrow$$

$$x=-2 \quad \wedge \quad x=5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_1=(-2;0)} \quad y \quad \boxed{P_2=(5;-7)}$$

A continuación, planteamos la integral.

$$A=\int_{-2}^{5}\left[(-x^2+2x+8)-(-x-2)\right].dx=\int_{-2}^{5}(-x^2+3x+10).dx = -\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}+10x\Bigg|_{-2}^{5} =$$

$$=\left(-\frac{5^3}{3}+3\frac{5^2}{2}+10.5\right)-\left(-\frac{(-2)^3}{3}+3\frac{(-2)^2}{2}+10.(-2)\right)=\boxed{\frac{343}{6}}$$

APLICACIONES ECONÓMICAS (SEGUNDA PARTE)

Consideremos dos funciones, una de demanda ($p=f(x)$) y otra de oferta ($p=g(x)$), ambas de un mismo artículo. En este caso x denota la cantidad del artículo que puede venderse u ofertarse a un precio p por unidad. Como ya sabemos, en general la función de demanda es decreciente, mientras que la de oferta es creciente. Por otra parte, el punto $(x_0;p_0)$ de intersección de las dos gráficas representa el punto de equilibrio del mercado; es decir, a un precio p_0 los consumidores estarán dispuestos a comprar y los productores a vender una misma cantidad x_0 de unidades del artículo.

En un mercado de libre competencia existen productores que estarían dispuestos a vender el artículo a un precio menor que el del equilibrio de mercado p_0, puesto que este precio está por encima del que ellos ofertan. En estas condiciones los productores se benefician. Esta utilidad adicional de los productores se denomina ***superávit del productor.***

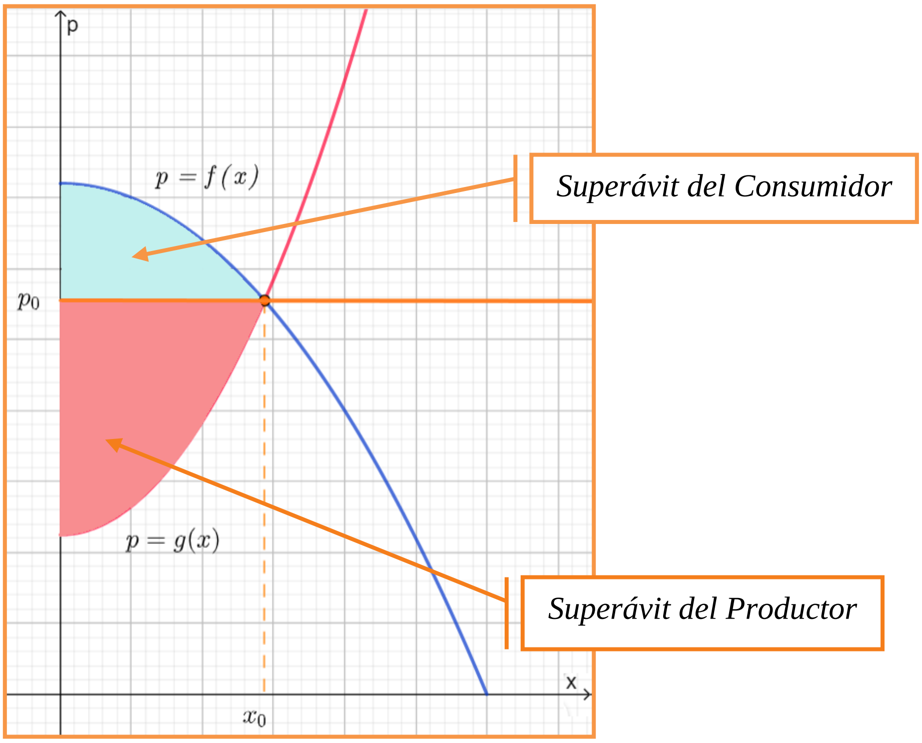
El área de la zona sombreada del gráfico que aparece a continuación representa el superávit del productor.

Veamos ahora cómo se calcula esa área.

Aplicaremos la fórmula del cálculo del área de una región limitado por dos curvas, una es la recta horizontal de ecuación $p = p_0$, y la otra es la gráfica de la función de oferta $p = g(x)$.
Por lo tanto, puede calcularse el superávit del productor como:

$$\boxed{S.P. = \int_0^{x_0} \left[p_0 - g(x) \right].dx = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} g(x)\, dx}$$

En el gráfico siguiente se muestra sombreada la región correspondiente al superávit del productor.



En forma similar puede pensarse el ***superávit del consumidor***. Es decir, habrá algunos consumidores dispuestos a comprar el artículo a un precio mayor que el del equilibrio del mercado. De esta manera estos consumidores harán un ahorro como resultado de la operación del mercado de libre competencia.

El área de la región comprendida entre la recta de ecuación $p = p_0$, la curva de demanda y el eje p representa el superávit del consumidor y puede calcularse como:

$$\boxed{S.C. = \int_0^{x_0} \left[f(x) - p_0 \right].dx = \int_0^{x_0} f(x)\,dx - p_0 x_0}$$

En el gráfico anterior la región sombreada de celeste corresponde al superávit del consumidor.

Apliquemos lo visto a un problema.

21 Ejemplo Las funciones de oferta y demanda de cierto producto están dadas por:

$$O: \quad \boxed{p = g(x) = 45 + 2x} \qquad \text{D:} \quad \boxed{p = f(x) = 144 - x^2}$$

Determinar el superávit del productor y el consumidor, suponiendo que se ha establecido el equilibrio del mercado.

En primer lugar, determinamos el punto de equilibrio del mercado.

$$g(x) = f(x) \Rightarrow 45 + 2x = 144 - x^2 \Rightarrow x^2 + 2x - 99 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 9} \vee \boxed{x = -11}$$

La única solución aceptable económicamente es $x = 9$.

Por lo tanto, el precio del equilibrio es: $p = 45 + 2.9 \Rightarrow \boxed{p = 63}$

Calculemos ahora el superávit del productor.

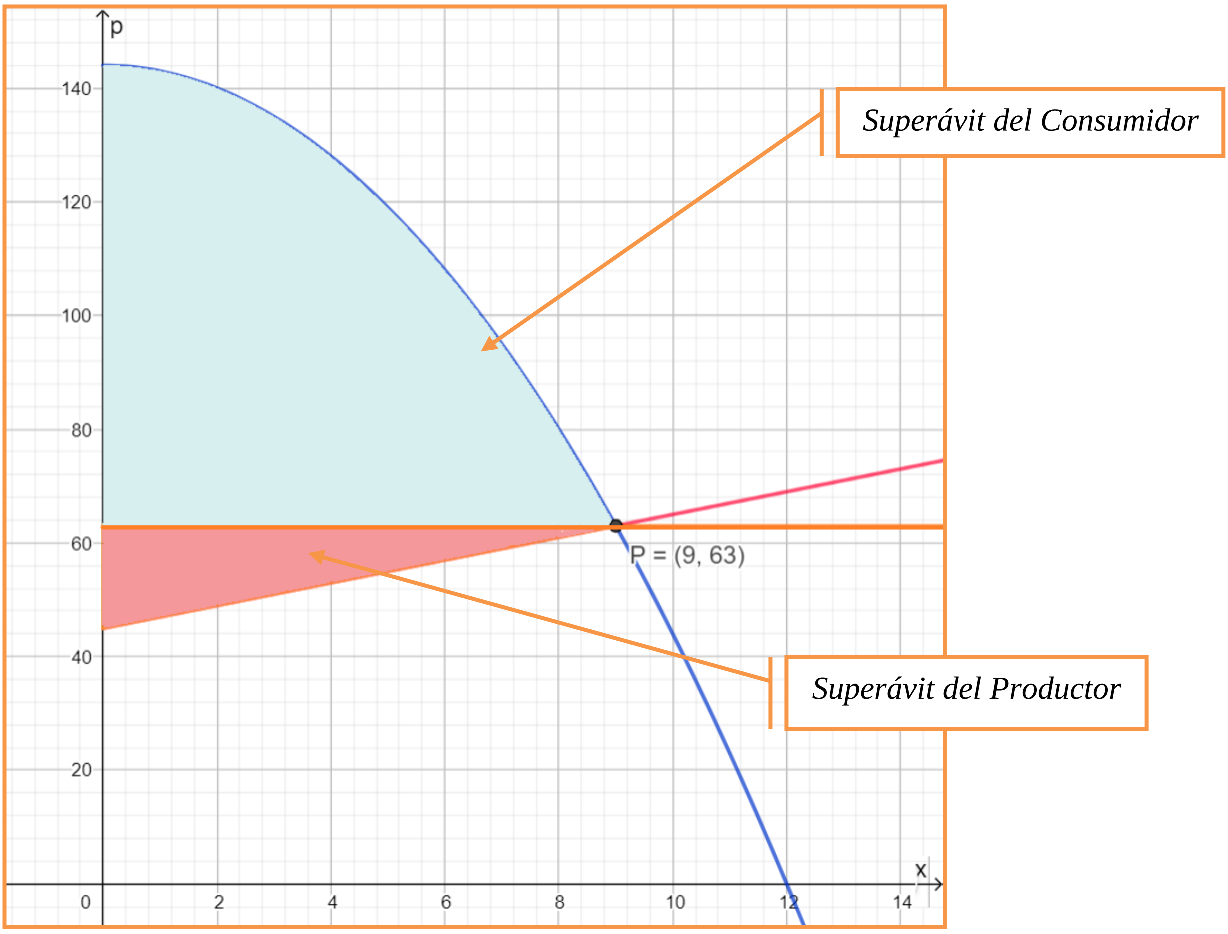
$$S.P. = \int_0^9 \left[63 - (45 + 2x) \right].dx = 63\ .\ 9 - \int_0^9 (45 + 2x).dx = 567 - \left[45x - x^2 \right]\Big|_0^9 \Rightarrow$$

$$S.P. = 567 - \left[(45.9 - 9^2) - (45.0 - 0^2) \right] = 567 - (405 - 81) \Rightarrow \boxed{S.P. = 243}$$

En forma similar calculamos el superávit del consumidor.

$$S.C. = \int_0^9 \left[(144 - x^2) - 63 \right].dx = \int_0^9 (144 - x^2).dx - 63.9 = \left[144x - \frac{x^3}{3} \right]\Bigg|_0^9 - 567 \Rightarrow$$

$$S.C. = \left[(144.9 - \frac{9^3}{3}) - (144.0 - \frac{0^3}{3}) \right] - 567 = 1296 - 243 - 567 \Rightarrow \boxed{S.C. = 486}$$



INTEGRALES IMPROPIAS

INTEGRALES CON LÍMITES INFINITOS

Sea $f(x)$ una función definida y continua para todos los valores de x tales que: $x \geq a$.
Examinemos la siguiente integral que tiene sentido para $b > a$.

$$\boxed{I(b) = \int_a^b f(x)\,dx}$$

Analicemos que sucede cuando b tiende a más infinito.

DEFINICIÓN: Si existe el límite finito de $\lim\limits_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$, este límite se denomina ***integral impropia*** de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, +\infty]$ y se designa por: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

De acuerdo con la definición tenemos que:

$$\boxed{\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx}$$

Nota: Si el límite es finito se dice que la integral impropia ***converge***, en caso contrario se dice que ***diverge.***

De forma análoga se definen las integrales impropias en otros intervalos infinitos.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{a} f(x)dx}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)dx}$$

A continuación, aplicamos estas definiciones a algunos problemas.

22 *Ejemplo* Calcular la siguiente integral impropia: $\int_{-\infty}^{2} e^{-2x+1}\,dx$

$$\int_{-\infty}^{2} e^{-2x+1}.dx = \underset{b\to-\infty}{Lim}\int_{b}^{2} e^{-2x+1}.dx = \underset{b\to-\infty}{Lim}\left[\frac{e^{-2x+1}}{-2}\right]_{b}^{2} = \underset{b\to-\infty}{Lim}\left[\frac{e^{-3}}{-2} - \frac{e^{-2b+1}}{-2}\right] = +\infty$$

Diremos entonces que la integral impropia diverge.

INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN DISCONTINUA

Sea $f(x)$ una función definida y continua para $a \le x < c$, salvo para $x = c$. En este punto no se puede definir la integral $\int_{a}^{c} f(x)\,dx$ como límite de sumas integrales.

DEFINICIÓN: Se dice que la integral impropia es ***convergente*** si existe el límite finito del segundo miembro de la siguiente igualdad: $\int_{a}^{c} f(x)dx = \lim_{b\to c^-}\int_{a}^{b} f(x)dx$, en caso contrario se dice que es ***divergente***.

Veamos cómo podemos aplicar esta definición al cálculo de integrales impropias.

23 *Ejemplo* Calcular la siguiente integral impropia: $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$

Del análisis del integrando puede concluirse que existe una discontinuidad en $x=1$.

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{b\to 1^+} \int_b^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{b\to 1^+} 2\sqrt{x-1}\Big|_b^2$$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{b\to 1^+} \left(2-2\sqrt{b-1}\right)$$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = 2$$

Por lo tanto, la integral impropia es convergente.

CAPÍTULO 6

SUCESIONES Y SERIES

CAPÍTULO 6

SUCESIONES

DEFINICIÓN: Una ***sucesión*** de números reales es una función $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, la cual notaremos $a(n)=a_n$.

01 Ejemplo Veamos algunos ejemplos de sucesiones.

a) $\boxed{a_n = n}$

Luego: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3,$ etc.

b) $\boxed{b_n = \frac{1}{n}}$

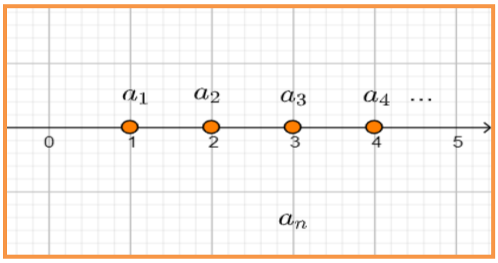
Luego: $b_1 = 1, b_2 = \frac{1}{2}, b_3 = \frac{1}{3}$, etc.

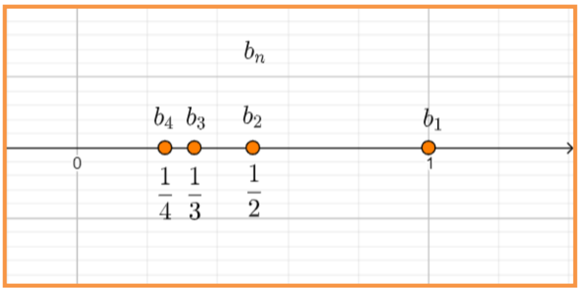
c) $\boxed{c_n = (-1)^n}$

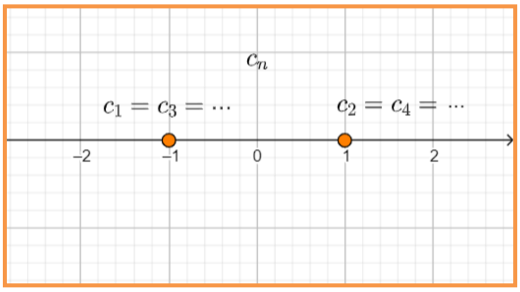
Luego: $c_1 = -1, c_2 = 1, c_3 = -1$, etc.

OBSERVACIÓN: La representación gráfica de una sucesión se hace en general sobre una recta, ya que este tipo de diagrama nos permite determinar "hacia dónde va" la sucesión. En efecto, la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ del ejemplo anterior "va hacia infinito", $(b_n)_{n\geq 1}$ "va hacia cero" y $(c_n)_{n\geq 1}$ "salta entre –1 y 1".

$\boxed{a_n = n}$







$\boxed{b_n = \frac{1}{n}}$ $\boxed{c_n = (-1)^n}$

DEFINICIÓN:

Se dice que una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ tiene ***límite L*** (notándolo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$)
$\Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in IN \quad / \quad \forall\, n \geq n_0 \quad |a_n - L| < \varepsilon$.

Una sucesión es ***convergente*** si tiene límite finito, ***divergente*** si tiene límite infinito y ***oscilante*** si no existe el límite.

CLASIFICACIÓN:

02 *Ejemplo* La sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ del ejemplo 1 es divergente pues $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. La sucesión $(b_n)_{n\geq 1}$ es convergente pues $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. La sucesión $(c_n)_{n\geq 1}$ es oscilante.

PROPIEDADES DEL LÍMITE DE SUCESIONES

Las propiedades del límite de sucesiones son exactamente iguales a las ya enunciadas para límite de funciones.

1) Una sucesión no puede tener más de un límite.

2) Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión convergente entonces está acotada.

3) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ y $L > 0$ entonces $a_n > 0$ para casi todo n.

4) Si dos sucesiones convergen a un mismo límite L entonces cualquier sucesión comprendida entre ellas también converge a L.

5) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión acotada entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

6) ***Algebra de límites*:** Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ entonces:

i) $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a}$

ii) $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b}$

iii) Si $b \neq 0$ (entonces $b_n \neq 0$ para casi todo n) $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}}$

iv) Si $k \in \mathbb{R}$ entonces $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} k \cdot a_n = k \cdot a}$

v) $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|}$

03 *Ejemplo* Hallar, si existen, los límites de las siguientes sucesiones.

a) $(a_n)\ /\ \forall\, n \in \mathbb{N}\quad a_n = \frac{3n^2+2}{2n^2+5n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{2n^2+5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2+2}{n^2}}{\frac{2n^2+5n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n^2}}{2+\frac{5}{n}} = \frac{3}{2}$$

b) $(a_n)\ /\ \forall\, n \in \mathbb{N}\quad a_n = \sqrt{n+2}-\sqrt{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2}-\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = 0$$

c) $(a_n)\ /\ \forall\, n \in \mathbb{N}\quad a_n = \frac{(-1)^n}{n}+\frac{n}{n+1}$

Observemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ **por** ser "cero por acotada" y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{n}{n+1}\right] = 1.$$

d) $(a_n)\ /\ \forall\, n \in \mathbb{N}\quad a_n = \left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n+7}$

Observemos que estamos ante una indeterminación 1^∞, por lo tanto, hay que salvarla.

$$\frac{3n+2}{3n-1} = 1+\frac{3n+2}{3n-1}-1 = 1+\frac{3}{3n-1} = 1+\frac{1}{\frac{3n-1}{3}}$$

Reemplazando en el límite dado, obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n+7} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3n-1}{3}}\right)^{\frac{3n-1}{3}}\right]^{\frac{3}{3n-1}\cdot(2n+7)} = e^2$$

e) $(a_n)\ /\ \forall\, n \in \mathbb{N}\quad a_n = \left(\frac{5n-2}{2n+3}\right)^n$

Observemos que la base de esta sucesión tiende a $\frac{5}{2}$ cuando n tiende a infinito, por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n-2}{2n+3}\right)^n = +\infty .$$

f) $(a_n)\ /\ \forall\, n \in \mathbb{N}\quad a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ 5 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

Claramente esta sucesión no tiene límite.

OBSERVACIÓN:

En el ejemplo anterior **a)**, **b)**, **c)** y **d)** son sucesiones convergentes, **e)** es una sucesión divergente y **f)** es una sucesión oscilante.

DEFINICIÓN: Se dice que $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión ***creciente*** si $a_{n+1} \geq a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ y se dice que es ***decreciente*** si $a_{n+1} \leq a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$. En ambos casos decimos que la sucesión es ***monótona***.

TEOREMA: Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión monótona.

a) Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es acotada entonces es convergente.

b) Si $(a_n)_{n\geq 1}$ no es acotada entonces:

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ en el caso que (a_n) sea creciente.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ en el caso que (a_n) sea decreciente.

SERIES NUMÉRICAS

DEFINICIÓN: Dada una sucesión de números reales $(a_n)_{n\geq 1}$, se llama ***suma parcial n-ésima*** a la suma $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ (por ejemplo: $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, etc.).

DEFINICIÓN: Se llama ***serie numérica*** asociada a una sucesión de números $(a_n)_{n\geq 1}$, a la sucesión de sumas parciales $(S_n)_{n\geq 1}$.

04 Ejemplo Sea la sucesión $a_n = (-1)^{n+1}$. Calculemos las sumas parciales de sus términos:

$$S_1 = a_1 = 1$$
$$S_2 = a_1 + a_2 = 1 - 1 = 0$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 - 1 + 1 = 1$$
$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$
$$\vdots$$

Luego, la serie asociada es: $(S_n) = (1, 0, 1, 0, \ldots)$

CLASIFICACIÓN:

Como una serie es por definición una sucesión (la de sumas parciales), se clasifican de igual manera:

a) *Convergente* cuando $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ es un número finito.

b) *Divergente* cuando $\lim_{n\to\infty} S_n$ es un infinito.

c) *Oscilante* cuando no existe $\lim_{n\to\infty} S_n$.

DEFINICIÓN: Llamamos ***suma de una serie*** al límite de la sucesión de sumas parciales $(S_n)_{n\geq 1}$ cuando éste existe, es decir, cuando es convergente.

NOTACIÓN: $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k}$

OBSERVACIÓN:

De todo lo anterior se concluye que la expresión "sucesión de sumas parciales correspondiente a la sucesión $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$" es equivalente a decir "la *serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$".

Cabe aclarar que con la misma expresión $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se denota al límite de la sucesión $(S_n)_{n\geq 1}$, con lo cual, si este límite existe, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es un número real.

Así hablamos, por ejemplo, de la *serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ refiriéndonos a la sucesión $(S_n)_{n\geq 1}$ de sumas parciales: $(S_n) = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \ldots\right)$, aunque, más adelante vamos a ver, esta serie es divergente (***serie armónica***) y, por lo tanto, no existe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ como número real.

Por lo tanto, el núcleo de este capítulo estará en determinar criterios que nos permitan determinar si una serie converge o no.

CONDICIÓN NECESARIA DE CONVERGENCIA:

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

OBSERVACIÓN:

La recíproca de esta proposición no es cierta, ya que existen series que cumplen esta condición y no son convergentes. Tal es el caso de *serie armónica* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, como probaremos más adelante.

Por lo tanto, la condición $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ es necesaria pero no suficiente, es decir, que si una serie la cumple nada puede asegurarse sobre el carácter de la misma. Pero si no la cumple (es decir, $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$) puede afirmarse que la serie no converge.

Antes de seguir resolveremos algunos ejercicios a modo de ejemplo.

05 Ejemplo Escribir en forma de sumatoria y aplicando la condición necesaria de convergencia indicar cuales de las siguientes series no pueden ser convergentes:

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\ldots$$

Para escribir en forma de sumatoria debemos hallar la expresión del término general:

$$a_n = \frac{n}{n+1} \quad \therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$$

Ahora calculamos el límite del término general:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1 \quad \therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ no converge}$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\ldots$$

Para escribir en forma de sumatoria debemos hallar la expresión del término general:

$$b_n = \frac{1}{n!} \quad \therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

Ahora calculamos el límite del término general:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!} = 0 \quad \therefore \text{ nada puede asegurarse sobre el carácter de } \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

PROPIEDADES DE LAS SERIES NUMÉRICAS

1) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a un número *A*, entonces para todo número real k la serie $\sum_{n=1}^{\infty} k\, a_n$ converge al número $k \cdot A$.

En símbolos: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} k\, a_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n}$

2) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen a los números *A* y *B* respectivamente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ converge a $A+B$.

En símbolos: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n}$

3) El carácter de una serie no se altera si se suprime de ella un número finito de términos.

SERIE GEOMÉTRICA:

Vamos a ver ahora un tipo importante de serie, la llamada ***serie geométrica*** de razón $r \in \mathbb{R}$.
Su forma general está dada por:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a\, r^{n-1} = a + a\, r + a\, r^2 + \ldots}$$

donde a es el primer término y r es la razón.

Analicemos la convergencia de esta serie. Sea S_n la suma *n*-ésima de la serie.

$$\begin{array}{l} S_n = a + a\,r + a\,r^2 + \ldots + a\,r^{n-1} \\ r\,S_n = a\,r + a\,r^2 + \ldots + a\,r^{n-1} + a\,r^n \\ \hline S_n\,(1-r) = a - a\,r^n \end{array}$$

restando miembro a miembro

Luego, si $r \neq 1$ despejando nos queda que $\boxed{S_n = a\,\dfrac{(1-r^n)}{1-r}}$

Veamos los distintos casos que se pueden presentar:

- $|r| < 1 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} r^n = 0$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\,\frac{(1-r^n)}{1-r} = a\,\frac{(1-0)}{1-r} = \boxed{\frac{a}{1-r}}$$

Por lo tanto, como el límite de S_n es finito la serie es *convergente* y su suma es $\boxed{S = \dfrac{a}{1-r}}$.

- $|r| > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r^n = \infty$

Por lo tanto, la serie es *divergente*.

- $r = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a = a + a + a + \ldots$

Por lo tanto, la serie es *divergente*.

- $r = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a\,(-1)^n = a - a + a - a + \ldots$

Por lo tanto, la serie es *oscilante*.

06 Ejemplo Indicar el carácter de las siguientes series geométricas. Si son convergentes indicar su suma.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \ldots$

Escribamos esta serie en forma de sumatoria: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

Claramente $a = 2$ y $r = -\frac{1}{2}$. Como $|r| = \frac{1}{2} < 1$, la serie converge a:

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{2}{1+\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + \ldots$

Escribamos esta serie en forma de sumatoria: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\, 2^{n-1}}$

Claramente $a = \frac{1}{2}$ y $r = 2$. Como $|r| = 2 > 1$, la serie no converge (diverge).

c) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 3 - 3 + 3 - 3 + \ldots$

Escribamos esta serie en forma de sumatoria: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} 3\,(-1)^{n-1}}$

Claramente $a = 3$ y $r = -1$. Por lo tanto, la serie no converge (oscila entre 0 y 3).

SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS

Nos ocuparemos ahora de estudiar el carácter de series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para las que sea $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

OBSERVACIÓN:

Las sumas parciales de este tipo de series son crecientes. Luego, si la sucesión de sumas parciales $(S_n)_{n\geq 1}$ está acotada, entonces existe el $\lim_{n\to\infty} S_n$, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Análogamente, si la sucesión de sumas parciales $(S_n)_{n\geq 1}$ no está acotada, entonces existe el $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ y, por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Concluimos que las series de términos positivos no son oscilantes, o bien son convergentes o bien son divergentes.

Veremos a continuación criterios que nos permitan determinar el carácter de este tipo de series.

CRITERIO DE COMPARACIÓN

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series tales que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \geq \nu$ (o sea, a partir de cierto índice ν). Se verifica que:

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también diverge.

NOTA: Se dice que:

- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es *mayorante* de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *minorante* de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

07 *Ejemplo* Apliquemos el criterio anterior para estudiar el carácter de la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

.

Sea la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{16}+\cdots$

Comparemos con:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)}_{\frac{1}{2}}+\cdots$$

Se ve que cada uno de los términos de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es mayor o igual que los correspondientes términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Además, esta última es divergente ya que si agrupamos sus términos convenientemente quedará formada una serie geométrica cuyo primer término es $\frac{1}{2}$ y cuya razón es $r=1$. Luego por el criterio de comparación, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ también diverge.

OBSERVACIÓN: Para aplicar el criterio de comparación debe comparase la serie estudiada término a término con una serie cuyo carácter sea conocido. Se emplean con frecuencia como series mayorantes o minorantes las geométricas, a las que ya nos hemos referido, y la serie armónica generalizada. Esta última está dada por la expresión:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots}\,.$$

Puede demostrarse que esta serie es convergente si $p>1$ y divergente si $p\le 1$.

CRITERIO DE D'ALEMBERT

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos tal que $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. Se verifica que:

- $L<1 \quad\Rightarrow\quad$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *convergente*.
- $L>1 \quad\Rightarrow\quad$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *divergente*.
- Si $L=1$ el criterio no permite concluir sobre el carácter de la serie.

08 Ejemplo Indicar el carácter de la siguiente serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n!}$.

Calculamos primero $a_{n+1} = \frac{9^{n+1}}{(n+1)!}$ y $a_n = \frac{9^n}{n!}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{9^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{9^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{9^n \cdot 9 \cdot n!}{n! \cdot (n+1) \cdot 9^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{n+1} = 0$$

Luego, como $L < 1$ concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n!}$ es convergente.

CRITERIO DE CAUCHY

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos tal que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. Se verifica que:

- $L < 1 \;\;\Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *convergente*.
- $L > 1 \;\;\Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *divergente*.
- Si $L = 1$ el criterio no permite concluir sobre el carácter de la serie.

09 Ejemplo Indicar el carácter de la siguiente serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n$

Utilizamos el criterio de Cauchy.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

Luego, como $L < 1$ concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n$ es convergente.

CRITERIO DE RAABE

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos tal que Se verifica que:

- $L < 1 \;\;\Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *convergente*.
- $L > 1 \;\;\Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *divergente*.
- Si $L = 1$ el criterio no permite concluir sobre el carácter de la serie.

10 Ejemplo Indicar el carácter de la siguiente serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

Calculamos primero $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2+1}$ y $a_n = \frac{1}{n^2+1}$.

Entonces: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = \frac{n^2+1}{n^2+2n+2}$

Luego: $1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{n^2+1}{n^2+2n+2} = \frac{n^2+2n+2-n^2-1}{n^2+2n+2} = \frac{2n+1}{n^2+2n+2}$

Reemplazando en el límite obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\cdot\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[n\cdot\frac{2n+1}{n^2+2n+2}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{n^2+2n+2} = 2$$

Por lo tanto, como $L > 1$ concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ es convergente.

SERIES ALTERNADAS

Estas series son de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ con $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daremos a continuación el criterio de convergencia para series de este tipo.

CRITERIO DE LEIBNIZ:

Si la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ verifica:

- $a_n \geq 0 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$
- $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Entonces, la serie es convergente.

Determinar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$.

11 Ejemplo Verifiquemos las hipótesis del criterio de Leibniz.

- $\frac{1}{n} > 0 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$
- $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Por lo tanto, la serie es convergente.

CONVERGENCIA ABSOLUTA Y CONDICIONAL

DEFINICIÓN:

Una serie cualquiera $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es ***absolutamente convergente*** si converge la serie formada por los valores absolutos de sus términos, es decir, si converge $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

PROPIEDAD: Toda serie absolutamente convergente es convergente.

OBSERVACIÓN: La recíproca de la propiedad anterior no es cierta, ya que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ puede ser convergente sin que lo sea $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Tal es el caso de la serie del ejemplo 11.

En efecto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ es convergente pero la serie formada por los valores absolutos $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es la serie armónica, que no converge como hemos probado oportunamente.

DEFINICIÓN:

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es ***condicionalmente convergente*** si ella es convergente pero no lo es la serie formada por los valores absolutos de sus términos, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

NOTA: La serie del ejemplo 11 es *condicionalmente convergente*.

12 Ejemplo Determinar si las siguientes series son divergentes, condicional o absolutamente convergentes.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{2^n}$

b)

Estudiemos la convergencia de la serie de los valores absolutos de sus términos.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{n^2}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

Apliquemos el criterio de D'Alembert por tratarse de una serie de términos positivos.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

Luego, como $L = \frac{1}{2} < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ es convergente.

Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{2^n}$ es absolutamente convergente.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+2}{n+1}$

Como $a_n = \frac{n+2}{n+1}$, aplicamos la condición necesaria de convergencia de una serie numérica.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1 \neq 0$$

Por lo tanto, la serie es divergente.

SERIES DE POTENCIAS

Es una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots$$

donde los números reales $a_0, a_1, a_2, \ldots$ son sus coeficientes y $x \in \mathbb{R}$ la variable.

NOTA: También son series de potencias las que guardan la forma $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (x - x_0)^n}$.

OBSERVACIÓN:

El problema ahora consistirá en determinar para qué valores de x la serie de potencia es convergente, ya que existen series de potencias que convergen:

- solamente sí $x = 0$.
- para todo x real.
- para algunos valores de x.

RADIO DE CONVERGENCIA

Es el número positivo R que verifica:

- Si $\boxed{|x| < R}$, entonces la serie $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n}$ es absolutamente convergente.

- Si $\boxed{|x| > R}$, entonces la serie $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\ x^n}$ no es convergente.
- Para $\boxed{x = R}$ y $\boxed{x = -R}$ la serie puede o no ser convergente.

CÁLCULO DEL RADIO DE CONVERGENCIA

Se obtiene estudiando la convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n\ x^n|$ aplicando los criterios para series de términos positivos, en particular el de D'Alembert.

Puede demostrarse que si existe $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ entonces $\boxed{R = \frac{1}{L}}$.

OBSERVACIONES:

- Si $L = 0$, se dice que el ***radio es infinito***. Luego, la serie converge $\forall\ x \in \mathbb{R}$.
- Si el límite es infinito, se toma $R = 0$. Luego, la serie sólo converge para $x = 0$.
- Si $L \neq 0$, la serie converge $\forall\ x \in (-R, R)$, llamado ***intervalo de convergencia***. El carácter de la serie en los extremos de este intervalo debe analizarse para cada caso en particular.

CAMPO DE CONVERGENCIA

Es el conjunto de valores de x para los cuales la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\ x^n$ es convergente.

13 *Ejemplo* Determinar el radio y el campo de convergencia de las siguientes series de potencias.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$

Como $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ calculamos L.

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{(n+1)+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = 1$$

Luego, $R = \frac{1}{L} = 1$ y el intervalo de convergencia es $\boxed{I = (-1, 1)}$.

Analizamos el carácter de la serie en los extremos del intervalo.

- $x=-1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ obtenemos una serie numérica alternada. Para estudiar su convergencia utilizamos el criterio de Leibniz.

i) $\frac{1}{\sqrt{n+1}} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ii) $\frac{1}{\sqrt{n+2}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$

Por lo tanto, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ es convergente.

- $x=1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ obtenemos una serie numérica de términos positivos. Para estudiar su convergencia utilizamos el criterio de D'Alembert.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{(n+1)+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}=1$$

Como este criterio no nos da información, aplicamos el criterio de Raabe.

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(1-\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}\right)=\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\,(n+2-n-1)}{\sqrt{n+2}\,(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2+\sqrt{(n+2)\,(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}+\sqrt{\frac{n^2+3n+2}{n^2}}}=\frac{1}{2}$$

Como $L=\frac{1}{2}<1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ es divergente.

Por lo tanto, el campo de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$ es $\boxed{[-1,1)}$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,(x-1)^n$

Como $a_n = n!$ calculamos L.

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty} n+1=+\infty$$

Luego, $R=0$ y, por lo tanto, la serie sólo converge para $x=1$.

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{(n+1)^2}$

Como $a_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}$ calculamos L.

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}=1$$

Luego, $R=\dfrac{1}{L}=1$ y el intervalo de convergencia es:

$$|x+3|<1 \;\Rightarrow\; -1<x+3<1 \;\Rightarrow\; -4<x<-2 \;\Rightarrow\; \boxed{I=(-4,-2)}$$

Analizamos el carácter de la serie en los extremos del intervalo.

- $x=-4 \;\Rightarrow\; \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ obtenemos una serie numérica alternada. Para estudiar su convergencia utilizamos el criterio de Leibniz.

  i) $\dfrac{1}{(n+1)^2}>0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

  ii) $\dfrac{1}{(n+2)^2}<\dfrac{1}{(n+1)^2} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

  iii) $\displaystyle lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=0$

  Por lo tanto, la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ es convergente.

- $x=-2 \;\Rightarrow\; \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$ obtenemos una serie numérica de términos positivos. Para estudiar su convergencia utilizamos el criterio de D'Alembert.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(n+2)^2}}{\dfrac{1}{(n+1)^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2=1$$

Como este criterio no nos da información, aplicamos el criterio de Raabe.

$$\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(1-\frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(\frac{(n+2)^2-(n+1)^2}{(n+2)^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(\frac{n^2+4n+4-n^2-2n-1}{n^2+4n+4}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{n^2+4n+4}=2$$

Como $L=2>1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$ es convergente.

Por lo tanto, el campo de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{(n+1)^2}$ es $\boxed{[-4,-2]}$.

d) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$

Como $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ calculamos L.

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

Luego, $R=\frac{1}{L}=1$ y el intervalo de convergencia es $\boxed{I=(-1,1)}$

Analizamos el carácter de la serie en los extremos del intervalo.

- $x=-1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,(-1)^n}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ obtenemos la serie armónica que ya sabemos que es divergente.
- $x=1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ obtenemos la serie alternada del ejemplo 11, la cual probamos que es convergente.

Por lo tanto, el campo de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ es $\boxed{(-1,1]}$.

FÓRMULA DE TAYLOR Y MAC LAURIN

Sea f una función derivable hasta el orden $(n+1)$. En un entorno E del punto x_0 es posible aproximarla mediante un polinomio $P_n(x)$ de grado n según potencias de $(x-x_0)$ cuyo valor y el de sus n derivadas sucesivas en $x=x_0$ sean iguales al valor de la función y el de sus n derivadas sucesivas en el mismo punto. Dicho polinomio $P_n(x)$ se denomina ***polinomio de Taylor*** y es:

$$\boxed{P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$$

La diferencia entre la expresión de $f(x)$ y el polinomio de Taylor $P_n(x)$ que la aproxima se denomina ***resto*** o ***término complementario*** que será notado $R_n(x)$.

$$\boxed{R_n(x) = f(x) - P_n(x)}$$

El valor del término complementario nos da el grado de precisión con que el polinomio de Taylor $P_n(x)$ aproxima localmente (para x cerca de x_0) los valores de la función $f(x)$.
Puede demostrarse que una expresión para el cálculo del término complementario es la siguiente:

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}$$

donde ξ es un valor comprendido entre x_0 y x.

OBSERVACIÓN:

La aproximación de una función mediante un polinomio de Taylor depende para cada x del grado del polinomio, mejorando cuando aumenta n.

Al escribir $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ obtenemos lo que se conoce como la ***fórmula de Taylor***:

$$\boxed{f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{P_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}}$$

Reemplazando en la fórmula de Taylor x_0 por cero, obtenemos la ***fórmula de Mac Laurin***:

$$\boxed{f(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{\substack{P_n(x) \\ \text{polinomio de Mac Laurin}}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R_n(x)}}$$

donde η es un número comprendido entre 0 y x.

13 Ejemplo Hallar el polinomio de Taylor de grado 4 en $x_0 = \frac{\pi}{2}$ para la función seno.

$f(x) = \text{sen}\, x \quad f(x_0) = f(\frac{\pi}{2}) = 1$

$f'(x) = \cos x \quad f'(x_0) = f'(\frac{\pi}{2}) = 0$

$f''(x) = -\text{sen}\, x \quad f''(x_0) = f''(\frac{\pi}{2}) = -1$

$f'''(x) = -\cos x \quad f'''(x_0) = f'''(\frac{\pi}{2}) = 0$

$f^{iv}(x) = \text{sen}\, x \quad f^{iv}(x_0) = f^{iv}(\frac{\pi}{2}) = 1$

$$P_4(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^4 + \frac{f^{iv}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4$$

$$P_4(x) = 1 - \frac{(x - \frac{\pi}{2})^2}{2} + \frac{(x - \frac{\pi}{2})^4}{24}$$

14 Ejemplo Calcular un valor aproximado del $\operatorname{sen}\left(100^{\circ}\right)$ utilizando el polinomio del ejemplo anterior.

Hacemos primeramente la conversión de grados sexagesimales a radianes:

$$100^{\circ}=\frac{5}{9}\pi\cong 1,7453$$

$$P_4(1,7453)=1-\frac{(1,7453-1,5708)^2}{2}+\frac{(1,7453-1,5708)^4}{24}=0,9848$$

15 Ejemplo Desarrollar en potencias de $(x+1)$ el polinomio $f(x)=x^5+2x^4-x^2+x+1$.
En este caso $f(x)=P(x)$ y $x-x_0=x+1$ por lo tanto $x_0=-1$.

$$f(x)=P(-1)+P'(-1)(x+1)+\frac{P''(-1)}{2!}(x+1)^2+\frac{P'''(-1)}{3!}(x+1)^3+$$
$$+\frac{P^{iv}(-1)}{4!}(x+1)^4+\frac{P^{v}(-1)}{5!}(x+1)^5$$

$$f(x)=x^5+2x^4-x^2+x+1 \quad f(-1)=0$$
$$f'(x)=5x^4+8x^3-2x+1 \quad f'(-1)=0$$
$$f''(x)=20x^3+24x^2-2 \quad f''(-1)=2$$
$$f'''(x)=60x^2+48x \quad f'''(-1)=12$$
$$f^{iv}(x)=120x+48 \quad f^{iv}(-1)=-72$$
$$f^{v}(x)=120 \quad f^{v}(-1)=120$$

Observemos que como $f^{vi}(x)=0$ el resto o término complementario vale cero.

$$\boxed{P(x)=(x+1)^2+\frac{12}{6}(x+1)^3-\frac{72}{24}(x+1)^4+\frac{120}{120}(x+1)^5}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{f(x)=P(x)=(x+1)^2+2(x+1)^3-3(x+1)^4+(x+1)^5}$$

16 Ejemplo Desarrollar en serie de Mac Laurin la función $f(x)=e^{2x}$ indicando radio y campo de convergencia.

$$f(x)=e^{2x} \quad f(0)=1$$
$$f'(x)=2e^{2x} \quad f'(0)=2$$
$$f''(x)=4e^{2x} \quad f''(0)=4$$
$$f'''(x)=8e^{2x} \quad f'''(0)=8$$
$$f^{iv}(x)=16e^{2x} \quad f^{iv}(0)=16$$
$$\vdots$$

Por lo tanto:

$$\boxed{f(x)=1+2x+\frac{4}{2!}x^2+\frac{8}{3!}x^3+\frac{16}{4!}x^4+\ldots+\frac{2^n}{n!}x^n+\ldots}$$

Obsérvese que se trata de una serie de potencias del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ donde $\boldsymbol{a_n = \frac{2^n}{n!}}$.

Para hallar el radio de convergencia hallamos el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0$$

Luego, el campo de convergencia es $\mathbb{R}$.

ACLARACIÓN:

Para que una función $f(x)$ infinitamente derivable admita un desarrollo en serie de Taylor o Mac Laurin, la serie de potencias debe ser convergente al valor de la función para cada valor de x de su campo de convergencia, para lo cual es condición necesaria y suficiente que el término complementario $R_n(x)$ tiende a cero cuando n tiende a infinito para cada uno de dichos valores de x, o sea, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Existen series que tienen un campo de convergencia donde no se verifica que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$; en dicho caso la serie no representa a la función.

APLICACIONES ECONÓMICAS

Las series geométricas encuentran su aplicación en el cálculo del valor de una ***renta perpetua***. Llamamos ***renta*** a una sucesión de pagos efectuados periódicamente a través del tiempo con distintas finalidades como la constitución de un capital, la extinción de una deuda, etc.
Cuando el número de cuotas no es finito, es decir la duración de la renta es ilimitada, la misma recibe la denominación de ***renta perpetua***.

Notemos:

- C = *capital*
- i = *interés mensual*
- $V(\infty, i) =$ *valor de la renta*
- $v = (1+i)^{-1}$ *factor de actualización*

Luego, si $(v_n)_{n\geq 1}$ representa el *valor actual de cada uno de los pagos*, podemos escribir:

$$V(\infty,i)=v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots$$
$$V(\infty,i)=C\cdot v+C\cdot v^2+C\cdot v^3+\ldots+C\cdot v^n+\ldots$$
$$V(\infty,i)=C\cdot\left(v+v^2+v^3+\ldots+v^n+\ldots\right)$$

La suma indicada entre paréntesis es la suma correspondiente a una serie geométrica de razón $r=v<1$ y por ende convergente. Llamando a dicha suma S, sabemos que se puede calcular por la fórmula $S=\frac{a}{1-r}$, donde a es el primer término de la serie.

Sustituyendo a por v y r por v, obtenemos:

$$S=\frac{v}{1-v}=\frac{\frac{1}{1+i}}{1-\frac{1}{1+i}}=\frac{\frac{1}{1+i}}{\frac{1+i-1}{1+i}}=\frac{1}{i}$$

Por lo tanto, $V(\infty,i)=C\cdot\frac{1}{i}$

17 *Ejemplo* Analicemos el caso de querer saber la deuda que podríamos contraer hoy si estuviéramos dispuestos a pagar indefinidamente \$50 mensuales con el 5% de interés mensual capitalizable por mes comenzando con el primer pago dentro de 30 días.

$$\left.\begin{array}{l}C=\$50\\ i=0{,}05\end{array}\right\}\Rightarrow\quad V(\infty,i)=C\cdot\frac{1}{i}=50\cdot\frac{1}{0{,}05}=\boxed{1000}$$

APÉNDICES

ALFABETO GRIEGO

Αλφαβετο Γριεγο

	Minúscula	Mayúscula		Minúscula	Mayúscula
alfa	α	Α	nu	ν	Ν
beta	β	Β	xi	ξ	Ξ
gamma	γ	Γ	ómicron	ο	Ο
delta	δ	Δ	pi	π	Π
épsilon	ε	Ε	rho(ro)	φ	Ρ
zeta	ζ	Ζ	sigma	σ	Σ
eta	η	Η	tau	τ	Τ
theta (tita)	θ	Θ	Ípsilon	υ	Υ
iota	ι	Ι	phi(fi)	φ	Φ
kappa	κ	Κ	ji o chi	χ	Χ
lambda	λ	Λ	psi	ψ	Ψ
mu	μ	Μ	omega	ω	Ω

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

Símbolo	Significado
$=$	igual
$<$	menor que...
$\leq$	menor o igual que...
$>$	mayor que...
$\geq$	mayor o igual que...
$\neq$	distinto
$\approx$	aproximadamente igual
$\pm, \mp$	más menos / menos más
$\sum$	sumatoria
$\prod$	productoria

$\forall$	para todo, cuantif. universal
$\exists$	existe, cuantif. existencial
$\Rightarrow$	implica (si…entonces…)
$\Leftrightarrow$	equivale (si y solo si)
$/$	tal que
$\therefore$	por lo tanto, por consiguiente
$\because$	porque, puesto que
$\wedge$	conjunción ("y", "además")
$\vee$	disyunción ("o")
∞	infinito

$\mathbb{N}$	conjunto de los números naturales
$\mathbb{Z}$	conjunto de los números enteros
$\mathbb{Q}$	conjunto de los números racionales
$\mathbb{R}$	conjunto de los números reales
$\mathbb{C}$	conjunto de los números complejos
$\mathbb{R}^+$	conjunto de los reales positivos

(a,b)	intervalo abierto
$[a,b]$	intervalo cerrado
$[a,b),(a,b]$	intervalo semiabierto
$(a,\infty),[a,\infty)$	semirrecta derecha
$(-\infty,a),(-\infty,a]$	semirrecta izquierda
$(-\infty,\infty)$	recta real

$\varnothing$	conjunto vacio
$\cap, \bigcap$	intersección de conjuntos
$\cup, \bigcup$	unión de conjuntos
$\subset$	incluido en el conjunto
$\not\subset$	*no* incluido en el conjunto
$\in$	pertenece a un conjunto
$\notin$	*no* pertenece a un conjunto

BIBLIOGRAFÍA

Allen, R. (1978). *Análisis matemático para Economistas*. Madrid: Aguilar.

Apostol,T. (1982). *Cálculo*. Buenos Aires: Reverté.

Batschelet, E. (1978). Matemáticas básicas para biocientíficos; biólogos, médicos veterinarios, bioquímicos, etc (No. 04; QH323. 5, B3.).

Bressan, A. (1995). *El cálculo mediante ejercicios*. Buenos Aires: UADE.

Budnick, F. (1996). Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales. México :Mc Graw-Hill.

Chiang, A. (1999). *Métodos fundamentales de economía matemática*. Tercera edición. Chile :Mc Graw-Hill.

Courant, R. ; John, F. (1971). *Introducción al cálculo y al análisis matemático*. México: Limusa-Wiley.

Bianco, M.J.; Carrizo, M.A.; Matera, F.; Micheloni, H. ; Olivera, S. (2001) *Análisis Matemático I con aplicaciones a las Ciencias Económicas*. Buenos Aires: Macchi.

Haeussler, E.; Paul, R. (1997). *Matemáticas para administración, economía y ciencias sociales.* México: Prentice Hall Hispanoamericana.

Hoffman L.; Bradley, G.S. (1998). Cálculo para administración, economía y ciencias sociales. Bogotá: Mc Graw-Hill.

Piskunov (1977) *Cálculo Diferencial e Integral*. Editorial Mir. Moscú.

Sadosky, M. – Guber, R. (1956).*Elementos de Cálculo Diferencial e Integral*. Editorial Alsina.

Stewart, J. (1999) *Cálculo. Conceptos y Contextos*. Editorial Thomson

Spivak, M. (1978) *Calculus (Cálculo Infinetesimal)* Bogotá : Reverté.

Larson, R.; Hosteler, R.; Edwards, B. (1995). *Cálculo y geometría analítica*. Madrid:Mc Graw – Hill.

Leithold, L. (1998). *Cálculo con geometría analítica*. México: Oxford University Press.

Noriega, R. J. (1991). *Cálculo diferencial e integral*. Buenos Aires: Docencia.

Rey Pastor (1952). *Análisis Matemático*. Volumen I. Buenos Aires: Kapelusz.

Purcell, E. ; Varberg, D. (1993). *Cálculo diferencial e integral.* México: Prentice Hall Hispanoamericana.

Stewart, J. (1999) .*Cálculo. Trascendentes tempranas.* México: International Thomson.

Weber, J. (1982) *Matemáticas para Administración y Economía*. México: Harla.