Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

Instituto de Investigaciones en Administración, Contabilidad y Métodos Cuantitativos para la Gestión (IADCOM)

CMA
Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión

II SEMINARIO DE DOCENCIA, INVESTIGACIÓN Y TRANSFERENCIA EN LAS CÁTEDRAS DE MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS

Bernardello – Casparri – García Fronti

2012

Editores: María Teresa Casparri
Alicia Bernardello
Javier García Fronti
Ana Silvia Vilker

II Seminario de Docencia, Investigación y Transferencia en las Cátedras de Matemática para
Economistas: Bernardello, Casparri, García Fronti / María Teresa Casparri ... [et.al.];
dirigido por María Teresa Casparri. - 1a ed. - Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires, 2012.
180 p. ; 20x15 cm.
ISBN 978-950-29-1394-0
1. Matemática. 2. Enseñanza Universitaria. 3. Actas de Congresos. I. Casparri, María Teresa II. Casparri, María Teresa, dir.
CDD 510.711

Fecha de catalogación: 03/10/2012

Autoridades del Seminario:
Prof. Titular Dr. Alberto Edgardo Barbieri
Prof. Emérita Dra. María Teresa Casparri

Comité Académico:
Víctor Álvarez
Alicia Blanca Bernardello
Javier García Fronti
Emilio Machado

Comité Ejecutivo:
María José Bianco
Pablo Fajfar
Alejo Macaya
Eduardo Rodriguez
Aldo Vicario
Ana Vilker
Alejandra Zaia

Editor Responsable:
Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión (CMA)
Facultad Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires
Av. Córdoba 2122 2º piso
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Argentina
Tel/Fax 0054 (011) 4370-6139; cma@econ.uba.ar

Índice

PREFACIO

Los trabajos aquí publicados son producto de la labor de investigación desarrollada por profesores y auxiliares docentes de varias Facultades de Ciencias Económicas de la República Argentina. Los mismos fueron presentados en el II Seminario: Docencia, Investigación y Transferencia en las Cátedras de Matemática para Economistas, Bernardello - Casparri - García Fronti, realizado el día 19 de abril de 2012 en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires y organizado por el Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos aplicados a la Economía y la Gestión (CMA).

En el primer trabajo Andrés Botalla, Diego Cortez y Mauro Cañibano, desarrollan didácticamente las características y propiedades de las diferencias finitas y sus aplicaciones a distintos tipos de funciones. En el segundo, Alicia Bernardello, Verónica García Fronti y Pablo Matías Herrera**,** analizan las formas cuadráticas y su signo, los conceptos de concavidad y convexidad y su utilización en los problemas de optimización con ejemplos de la teoría económica.

Posteriormente, Leandro Toriano, expone los aspectos fundamentales vinculados al estudio de problemas de programación no-lineal, presentando la deducción y aplicabilidad de las condiciones de Kuhn-Tucker, realizando especial hincapié en la regla del multiplicador de John y su relación con la evaluación de la calificación de restricciones. A continuación Viviana Cámara, María Laura Falco y Adriana Negri muestran un problema que ofrecen a los alumnos para que puedan darle significado a los fundamentos teóricos del Cálculo Diferencial estudiado en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional del Litoral. La resolución del problema permite transferir conceptos tales como razón de cambio promedio, razón de cambio instantánea y diferencial y sus correspondientes interpretaciones geométricas y económicas. Nora Mabel Lac Prugent y José Luis Pou, muestran la aplicación de herramientas matemáticas en el análisis económico; concretamente, la teoría de optimización y su relación con la selección de carteras de títulos o portfolios.

A continuación se encuentra el trabajo de María Magdalena Mas y María Cecilia Municoy cuentan la manera de proceder cuando se trabaja con alumnos de distintas carreras de grado: Contador Público Nacional – Licenciado en Administración – Licenciado en Economía, en un Seminario Optativo denominado "Introducción a la Optimización Global". Luego María Cecilia Municoy presenta una estrategia metodológica que intenta favorecer la generación de un ambiente propicio de aprendizaje. Carolina Vanesa Catoira realiza un relevamiento de los aspectos principales asociados a la estabilidad de los sistemas dinámicos, centrándose fundamentalmente en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

A su vez Viviana Cámara, Claudia Zanabria y Luis Córdoba, cuentan la experiencia de la implementación de secuencias didácticas con soporte informático enla cátedra de Análisis Matemático de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional del Litoral, cuya finalidad es fortalecer el sentido y semántica de algunos de los conceptos matemáticos que atraviesan la asignatura. Claudia Guzner pone a discusión los nuevos modelos de enseñanza y de aprendizaje basados en problemas de creciente complejidad, que privilegien el desarrollo de competencias del Álgebra aplicadas a diferentes campos disciplinares relacionados con las Ciencias Económicas. El anteúltimo trabajo perteneciente a Nicolás Giri y Priscila Fischer, utiliza el modelo de Patinkin como eje para desarrollar dos temas centrales de la materia "Matemática para Economistas": el análisis estático y el análisis dinámico. Saif Ellafi, Gonzalo Garcia, Agostina Santurio y Ana Vilker toman como punto de partida el modelo desarrollado por Jeffrey Sachs llamado "La trampa de pobreza" y lo estiman para Argentina entre los años 1993 y 2006 analizando los resultados obtenidos con la meta de observar si el país superó o no el valor del capital necesario para no caer en la "trampa de pobreza". Por último, Eduardo Rodríguez presenta una representación lo más fidedigna posible del sistema económico descripto por J.M. Keynes en su "Teoría general".

Esperando que esta publicación sea de interés como lo ha sido el evento tanto para nosotros como jefes de cátedra, como para todos los docentes e interesados en la temática del seminario.

Por último agradecemos a todos los participantes, que hicieron posible la realización de la jornada y la presente publicación.

María Teresa Casparri
Alicia Blanca Bernardello
Javier García Fronti

ACERCA DE LOS AUTORES

Alicia Bernardello
Directora del proyecto interdisciplinario UBACyT CC01. Miembro del Comité Científico del Programa Interdisciplinario de la Universidad de Buenos Aires sobre Cambio Climático (PIUBACC).Profesora titular de Matemática para Economistas, Algebra, Análisis I y Métodos Cuantitativos, subdirectora del Departamento Pedagógico de Matemática y coordinadora de tutores del programa Económicas+Vos y del Sistema de Pasantías, en la Facultad de Ciencias Económicas, (UBA).

Andrés Marcos Botalla
Estudiante de Actuario en Economía, Facultad de Ciencia Económicas (UBA). Colaborador en el curso de Matemática para Economistas a cargo de Javier García Fronti.

Viviana Cámara
Lic. en Matemática Aplicada y Magister en Didácticas Específicas. Profesora Titular Ordinaria de la Cátedra Análisis Matemático de la Facultad de Ciencias Económicas de la UNL. Codirectora del Proyecto Educación Matemática basada en competencias profesionales: diseño curricular y directora del Proyecto Evaluación de Competencias en el debate de la Evaluación de los Aprendizajes Universitarios.

Mauro Emmanuel Cañibano
Estudiante de Actuario en Administración, Facultad de Ciencia Económicas (UBA). Colaborador en el curso de Matemática para Economistas a cargo de Javier García Fronti.

Carolina Vanesa Catoira
Licenciada en Economía de la Facultad de Ciencias Económicas (UBA). Desde 2009 se desempeña como ayudante de la materia Matemática para Economistas.

Luis Córdoba
Profesor en Matemáticas. Especialista en Didáctica Específica. Profesor de la Cátedra Análisis Matemático de la Facultad de Ciencias Económicas de la UNL. Profesor adjunto de las Cátedras de Cálculo y Geometría Analítica y de Cálculo y Métodos Numéricos de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la UNL.

Diego Gabriel Cortez
Estudiante de Actuario en Economía, Facultad de Ciencia Económicas (UBA). Colaborador en el curso de Matemática para Economistas a cargo de Javier García Fronti.

Saif Ellafi
Estudiante de la carrera de economía y auxiliar docente de Matemática para Economistas en la Facultad de Ciencias Económicas (UBA).

María Laura Falco
Titular de las cátedras Investigación Operativa y Métodos para Economía Matemática y Profesora asociada de Matemática Financiera de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Católica de Santa Fé. Profesora de la cátedra Análisis Matemático de la Facultad de Ciencias Económicas de la UNL.

Priscila Belén Fischer
Estudiante de Actuario en Economía, Facultad de Ciencia Económicas (UBA). Auxiliar docente en la Facultad de Ciencias Económicas (UBA).

Verónica García Fronti
Ingeniería Química, Facultad de Ingeniería, (UBA). Profesora de grado en la Facultad de Ciencias Económicas, (UBA). Autora y coautora de publicaciones y de trabajos para congresos y jornadas del país.

Gonzalo García
Becario de Investigación de la Universidad de Buenos Aires. Estudiante de Economía, Facultad de Ciencias Económicas (UBA). Auxiliar docente de Cálculo Financiero.

Nicolás Giri
Licenciado en Economía, Facultad de Ciencias Económicas (UBA).Estudiante de la Maestría en Finanzas en la Universidad Torcuato Di Tella. Auxiliar docente en la Facultad de Ciencias Económicas (UBA)

Claudia D. Guzner
Magister en Docencia Universitaria y Licenciada en Matemática Aplicada; profesor Titular de Álgebra Lineal para las carreras de Administración, Economía y Contador Público Nacional; director de proyectos homologados en la disciplina y su enseñanza; expositor en congresos nacionales e internacionales; autor del Texto Álgebra Lineal para estudiantes de Ciencias Económicas.

Pablo Matías Herrera
Licenciado en Economía, Facultad de Ciencias Económicas (UBA). Auxiliar docente en la Facultad de Ciencias Económicas (UBA). Becario de maestría UBACYT. Investigador del Centro de Investigación en Métodos cuantitativos aplicados a la economía y la gestión, Facultad de Ciencias Económicas (UBA).

María Magdalena Mas
Estudiante avanzada de la Maestría de Matemática de la Facultad de Ingeniería Química de la UNL. Profesora Adjunta Ordinaria de la cátedra de Matemática Básica de la Facultad de Ciencias Económicas de la UNL, Integrante del proyecto de investigación denominado "La evaluación de competencias en el debate de la valuación de los aprendizajes universitarios".

María Cecilia Municoy
Especialista en Docencia Universitaria, Profesora Asociada Ordinaria en la cátedra de Matemática para Economistas de la Facultad de Ciencias Económicas - UNL, Integrante del proyecto de investigación denominado "La evaluación de competencias en el debate de la valuación de los aprendizajes universitarios"

Adriana Negri
Profesora adjunta de la cátedra Análisis Matemático en la Facultad de Ciencias Económicas de la UNL. Profesora Titular de Matemática General y Estadística en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Católica de Santa Fé (UCSF). Profesora Asociada de Matemática I y Matemática II en la Facultad de Arquitectura de la UCSF

José Luis Pou
Contador Público. Ayudante de 1ª de las asignaturas "*Matemática IV*" y "*Econometría*" de la Licenciatura en Economía, Escuela de Economía, Facultad de Ciencias Económicas y Estadística, Universidad Nacional de Rosario.

Nora Mabel Lac Prugent
Doctora. Licenciada en Estadística. Profesor Titular de las asignaturas "*Matemática IV*" y "*Econometría*" de la Licenciatura en Economía, Escuela de Economía, Facultad de Ciencias Económicas y Estadística, Universidad Nacional de Rosario.

Eduardo A. Rodríguez
Magister en Economía (Universidad de San Andrés). Licenciado en Economía (Universidad de Buenos Aires). Profesor regular adjunto del grupo de asignaturas del Área Actuarial en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires.

Agostina Santurio
Becaria PROPAI. Estudiante de Actuario en Administración, Facultad de Ciencias Económicas (UBA). Auxiliar docente de Matemática para Economistas, curso de Ana Vilker.

Leandro D. Toriano
Licenciado en Economía de la Facultad de Ciencias Económicas (UBA) y Magister en Finanzas Universidad del CEMA. Desde 2009 se desempeña como ayudante de primera de *Matemática para Economistas* de la Facultad de Ciencias Económicas (UBA).

Ana Silvia Vilker
Licenciada en Economía Facultad de Ciencias Económicas, (UBA). Profesora de la Facultad de Ciencias Económicas, (UBA). Investigadora del Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión, Facultad de Ciencias Económicas, (UBA).

Claudia Zanabria
Profesora en Matemática. Especialista en docencia universitaria. Postulante al título de Magister en docencia universitaria (tesis entregada) Profesora adjunto interino en la Cátedra Análisis Matemático y Jefe de Trabajos Prácticos de la cátedra de Matemática Básica de la Facultad de Ciencias Económicas. Profesora titular en la Escuela Industrial Superior. Integrante de varios proyectos CAI+D y Codirectora de proyectos de extensión.

INTRODUCCIÓN A DIFERENCIAS FINITAS

Andrés Botalla
Diego Cortez
Mauro Cañibano

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es desarrollar didácticamente las características y propiedades de las diferencias finitas, que constituyen una herramienta fundamental para la resolución de otros tipos de problemas, ya sea en el ámbito económico o actuarial, por ejemplo, en sumación, interpolación, resolución numérica de ecuaciones diferenciales, entre otros. Acerca de este último, se hace una presentación al final.

1. DIFERENCIA DESCENDENTE

1.1 Definición

La diferencia descendente se define como Δ y aplicada a una función, f(x), provoca:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

Ésa es la diferencia descendente de primer orden de f(x). La diferencia descendente de segundo orden se define como:

$$\Delta^2 f(x) = \Delta\left[\Delta f(x)\right] = \Delta\left[f(x+h) - f(x)\right] = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

Y la diferencia descendente de orden n:

$$\Delta^n f(x) = \Delta\left[\Delta^{n-1} f(x)\right]$$

A continuación se muestran en una tabla las sucesivas diferencias de una función para cada uno de sus argumentos:

Gráfico 1

x	f(x)=Δ^0	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
x	f(x)				
		Δf(x)			
x+h	f(x+h)		Δ^2f(x)		
		Δf(x+h)		Δ^3f(x)	
x+2h	f(x+2h)		Δ^2f(x+h)		Δ^4 f(x)
		Δf(x+2h)		Δ^3f(x+h)	
x+3h	f(x+3h)		Δ^2f(x+2h)		
		Δf(x+3h)			
x+4h	f(x+4h)				

Hay n+1 argumentos. En este caso n+1=5.Entonces habrán n diferencias descendentes, en este caso 4. El primer argumento es el que tiene n diferencias, es decir, se puede calcular su diferencia enésima, en este caso la diferencia cuarta.Se observa que se llama diferencia descendente porque las sucesivas diferencias de los argumentos de una función se encuentran en la diagonal descendente de la tabla.

1.2 Propiedades del operador Δ

1) Exponentes $\Delta^{p+q} f(x) = \Delta^p \Delta^q f(x)$

2) Conmutativa $\Delta^p \Delta^q f(x) = \Delta^q \Delta^p f(x)$

3) Asociativa $\Delta^p \Delta^q \Delta^r f(x) = (\Delta^p \Delta^q)\Delta^r f(x) = \Delta^p (\Delta^q \Delta^r) f(x)$

4) Diferencia de una constante $\Delta k = 0$

Ya que $\Delta k = k - k = 0$

Cuando se aplica la definición de diferencias no hay variable independiente a desplazar en h, por ende sólo queda k. Y cuando se resta f(x), es decir k, sucede que el resultado de la operación es cero.

5) Distributiva respecto de la suma de funciones ponderadas por constantes:

Sea $f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + ... + a_p f_p(x) = \sum_{s=1}^{p} a_s f_s(x)$

donde las a_s son constantes (1,2,..,p)

$$\Delta^n f(x) = \Delta^n \sum_{s=1}^{n} a_s f_s(x) = \sum_{s=1}^{n} a_s \Delta^n f_s(x) \text{ para n=1,2,3...}$$

La demostración se hace por inducción matemática completa, que consiste en comprobar que cierta propiedad vale para el primer elemento de un conjunto ordenado de infinitos elementos, por hipótesis inductiva se supone que vale para el elemento n-1, y se prueba que necesariamente vale para el elemento n. Entonces vale para todo elemento del conjunto.

Se prueba que vale para n=1

Aplicando definición de diferencias:

$$\Delta f(x) = \Delta \sum_{s=1}^{n} a_s f_s(x) = \sum_{s=1}^{n} a_s f_s(x+h) - \sum_{s=1}^{n} a_s f_s(x) = \sum_{s=1}^{n} a_s \underbrace{\left[f(x+h) - f(x)\right]}_{\Delta} = \sum_{s=1}^{n} a_s \Delta f_s(x)$$

Por hipótesis inductiva, se supone que vale para cuando n= n-1

$$\Delta^{n-1} f(x) = \Delta^{n-1} \sum_{s=1}^{n} a_s f_s(x) = \sum_{s=1}^{n} a_s \Delta^{n-1} f_s(x)$$

Se prueba que vale para n=n

$$\Delta^n f(x) = \Delta^n \sum_{s=1}^{n} a_s f_s(x) = \Delta \left[\Delta^{n-1} \sum_{s=1}^{n} a_s f_s(x) \right] = \Delta \left[\sum_{s=1}^{n} a_s \Delta^{n-1} f_s(x) \right] =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} a_s \Delta^{n-1} f_s(x+h) - \sum_{s=1}^{n} a_s \Delta^{n-1} f_s(x) = \sum_{s=1}^{n} a_s \Delta^{n-1} \underbrace{\left[f_s(x+h) - f_s(x)\right]}_{\Delta} = \sum_{s=1}^{n} a_s \Delta^n f_s(x)$$

6) Diferencia de primer orden de un producto de funciones

$$\Delta\left[f(x)g(x)\right] = \Delta f(x)g(x) + f(x+h)\Delta g(x) = \Delta g(x) f(x) + g(x+h)\Delta f(x)$$

Aplicando la definición de diferencias

$$\Delta\left[f(x)g(x)\right] = f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)$$

como

$$f(x+h) = \Delta f(x) + f(x)$$

$$g(x+h) = \Delta g(x) + g(x)$$

reemplazando

$$\Delta\left[f(x)g(x)\right]=\left[\Delta f(x)+f(x)\right]\left[\Delta g(x)+g(x)\right]-f(x)g(x)$$

despejando y sacando factor común

$$\Delta\left[f(x)g(x)\right]=\Delta f(x)g(x)+f(x)\Delta g(x)+\Delta f(x)\Delta g(x)=\Delta f(x)g(x)+\Delta g(x)\left[f(x)+\Delta f(x)\right]$$

7) Diferencia de primer orden de un cociente de funciones:

$$\Delta\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\Delta f(x)g(x)+f(x)\Delta g(x)}{g(x)g(x+h)}$$

Aplicando al definición de diferencias y obteniendo común denominador

$$\Delta\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}$$

como

$$f(x+h)=\Delta f(x)+f(x)$$
$$g(x+h)=\Delta g(x)+g(x)$$

reemplazando sólo en el numerador y operando

$$\Delta\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\left[\Delta f(x)+f(x)\right]g(x)-f(x)\left[\Delta g(x)+g(x)\right]}{g(x+h)g(x)}=\frac{\Delta f(x)g(x)+f(x)\Delta g(x)}{g(x)g(x+h)}$$

El operador Δ es la contraparte en tiempo discreto de d/dt.

1.3 Operador desplazamiento o de Boole

También conocido como operación traslación, lag, backward o forward según el exponente que presente. Aplicado a f(x) produce la siguiente transformación:

$$Ef(x)=f(x+h)$$

$$E^2 f(x)=E\left[Ef(x)\right]=E\left[f(x+h)\right]=f(x+2h)$$

$$E^n f(x)=E\left[E^{n-1}f(x)\right]$$

Algunas de sus propiedades son:

Exponentes: $E^{p+q} f(x) = E^p E^q f(x)$

Conmutativa: $E^p E^q f(x) = E^q E^p f(x)$

Asociativa: $E^p E^q E^r f(x) = \left(E^p E^q\right) E^r f(x) = E^p \left(E^q E^r\right) f(x)$

Distributiva respecto de una suma de funciones ponderadas por constantes:

$$f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_p f_p(x) = \sum_{s=1}^{p} a_s f_s(x)$$

donde las a_s son constantes (1,2,..,p)

$$E^n f(x) = E^n \sum_{s=1}^{p} a_s f_s(x) = \sum_{s=1}^{p} a_s f_s(x+nh) = \sum_{s=1}^{p} a_s E^n f_s(x)$$

Por definición del operador desplazamiento

$$E^n f(x) = E^n \sum_{s=1}^{p} a_s f_s(x) = \sum_{s=1}^{p} a_s E^n f_s(x)$$

1.4 Diferencia de operaciones y funciones especiales

1.4.1 Diferencia de un producto de funciones

Sea una función $H(x) = f(x).g(x)$ aplicando el operador diferencia y la definición:

$$\Delta H(x) = f(x+h).g(x+h) - f(x).g(x)$$

Sabiendo que

$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$, entonces $f(x+h) = \Delta f(x) + f(x)$

se reemplaza en la función anterior $f(x+h)$ y $g(x+h)$:

$$\Delta H(x) = \left[\left(\Delta f(x) + f(x)\right).(\Delta g(x) + g(x))\right] - f(x).g(x)$$

distribuyendo:

$$\Delta H(x) = \Delta f(x).\Delta g(x) + \Delta f(x).g(x) + f(x).\Delta g(x) + \cancel{f(x)}.g(x) - \cancel{f(x)}.g(x)$$

sacando factor común $\Delta f(x)$, aunque se puede también hacer alternativamente con $\Delta g(x)$:

$$\Delta H(x) = \Delta f(x).\left(\Delta g(x) + g(x)\right) + \underbrace{f(x).\Delta g(x)}_{g(x+h)}$$

La expresión definitiva es :$\Delta H(x) = \Delta f(x).g(x+h) + f(x).\Delta g(x)$

1.4.2 Diferencia de un cociente de funciones

Sea una función $H(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, aplicando el operador diferencia y la definición:

$$\Delta H(x) = \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}$$

sacando denominador común:

$$\Delta H(x) = \frac{f(x+h).g(x) - f(x).g(x+h)}{g(x).g(x+h)}$$

realizando la misma sustitución de $f(x+h)$ y $g(x+h)$ que se hizo con el producto:

$$\Delta H(x) = \frac{\big(\Delta f(x) + f(x)\big).g(x) - f(x).\left(\Delta g(x) + g(x)\right)}{g(x).g(x+h)}$$

distribuyendo:

$$\Delta H(x) = \frac{\Delta f(x).g(x) + \cancel{f(x).g(x)} - f(x).\Delta g(x) - \cancel{f(x).g(x)}}{g(x).g(x+h)}$$

La expresión definitiva es:

$$\Delta H(x) = \frac{\Delta f(x).g(x) - f(x).\Delta g(x)}{g(x).g(x+h)}$$

1.4.3 Diferencia de una función exponencial

Sea una función $f(x) = a^x$. Entonces la diferencia de primer orden será:

$$\Delta a^x = a^{x+h} - a^x = a^x.a^h - a^x = (a^h - 1).a^x$$

La diferencia de segundo orden:

$$\Delta^2 a^x = \Delta(\Delta a^x) = \Delta[a^x.(a^h - 1)]$$

sacando fuera del operador$(a^h - 1)$ por ser una constante:

$$\Delta^2 a^x = (a^h - 1).\Delta a^x = (a^h - 1).(a^h - 1).a^x = (a^h - 1)^2.a^x$$

Ahora pasamos a obtener la diferencia enésima mediante el principio de inducción matemática completa, ya probamos que sirve para n=1 y n=2 entonces planteamos como hipótesis inductiva que se cumple para n-1 y tratamos de verificarlo para n:

Hip) $\Delta^{n-1}a^x = (a^h - 1)^{n-1}a^x$

Entonces: $$\Delta^n a^x = \Delta(\Delta^{n-1}a^x)$$

reemplazando por la hipótesis inductiva:

$$\Delta^n a^x = \Delta[(a^h - 1)^{n-1}a^x]$$

sacando la constante fuera del operador y aplicando la definición:

$$\Delta^n a^x = (a^h - 1)^{n-1}\Delta a^x = (a^h - 1)^{n-1}.(a^h - 1).a^x$$

y así queda demostrado que:

$$\Delta^n a^x = (a^h - 1)^n.a^x$$

1.4.4 Diferencia de una función logarítmica

Sea una función $H(x) = \log(f(x))$ aplicando el operador diferencia y la definición:

$$\Delta H(x) = \log(f(x+h)) - \log(f(x))$$

aplicando la propiedad de resta de logaritmos ($\log(a) - \log(b) = \log(\frac{a}{b})$:

$$\Delta H(x) = \log(\frac{f(x+h)}{f(x)})$$

sustituyendo $f(x+h)$ por la expresión equivalente $\Delta f(x) + f(x)$:

$$\Delta H(x) = \log\left(\frac{\Delta f(x) + f(x)}{f(x)}\right) = \log\left(\frac{\Delta f(x)}{f(x)} + \frac{f(x)}{f(x)}\right)$$

se llega así a la expresión definitiva:

$$\Delta H(x) = \log\left(\frac{\Delta f(x)}{f(x)} + 1\right)$$

1.4.5 Diferencia de un polinomio

Sea una función $f(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p.x^p$, polinomio genérico de grado *p*, aplicando el operador diferencia y la propiedad de la diferencia de la suma ponderada por constantes:

$$\Delta f(x) = \Delta\sum_{p=0}^{n} a_p.x^p = \sum_{p=0}^{n} a_p.\Delta x^p$$

Se aplica la definición sobre la parte que quedó afectada por el operador:

$$\Delta x^p = (x+h)^p - x^p$$

Utilizando la fórmula del binomio de Newton para reexpresar el primer término y separando el primer sumando de la suma:

$$\Delta x^p = \left[\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} x^{p-i}.h^i\right] - x^p = \cancel{x^p} + \left[\sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} x^{p-i}.h^i\right] - \cancel{x^p}$$

reemplazando en la expresión original:

$$\Delta f(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p.\left[\sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} x^{p-i}.h^i\right]$$

Se puede observar que esta expresión es otro polinomio, cuyo mayor exponente de x, es decir el grado del polinomio, es $p-1$.

Con esto se concluye que la diferencia de un polinomio de grado n, es un polinomio de grado n-1, pero la expresión final no resulta muy intuitiva ni manejable, debido a que hay dos sumas, el uso del binomio de Newton y los números combinatorios. Es por eso que se intenta expresar a los polinomios de una manera distinta para facilitar los cálculos, como se verá a continuación.

1.5 Funciones factoriales

Como vimos, la diferencia de funciones polinómicas son complicadas de hallar, pero estas pueden ser transformadas en funciones factoriales, cuyas diferencias son mucho más simples de calcular.

Las funciones factoriales son productorios, que pueden ser de manera descendente o ascendentes.

Las formas más simples de estas expresiones vienen dadas cuando u(x) = x y se desarrollan de la siguiente manera:
Factorial descendente [u(x)=x]:

$$f(x) = x^{\frac{n}{-h}} = x*(x-h)*(x-2h)*\ldots*(x-nh+h)$$

Factorial ascendente [u(x)= x]:

$$g(x) = x^{\frac{n}{h}} = x*(x+h)*(x+2h)*\ldots*(x+nh-h)$$

Donde n indica la cantidad de factores del producto, y h o $-h$ el incremento o decremento de x.

A partir de aquí se introduce una nueva notación que cumple la misma función que los paréntesis, corchetes y llaves, que consiste en agregar una barra arriba de la expresión en lugar de usar los paréntesis. Por ejemplo $\overline{n-1}$, en vez de (n – 1).Entonces se pueden re-expresar las definiciones de la siguiente forma:

$$f(x) = x^{\frac{n}{-h}} = x * (x-h) * (x-2h) * \dots * (x - \overline{n-1}h) \qquad (1)$$

$$g(x) = x^{\frac{n}{h}} = x * (x+h) * (x+2h) * \dots * (x + \overline{n-1}h) \qquad (2)$$

Ahora si en (1) y (2) se invierte el orden de los factores, aplicando las definiciones dadas se deduce que:

$$x^{\frac{n}{-h}} = (x - \overline{n-1}\,h)^{\frac{n}{h}}$$

$x^{\frac{n}{h}} = (x - \overline{n-1}h)^{\frac{n}{-h}}$ respectivamente

y en particular, para n=1

$$x^{\frac{1}{h}} = x^{\frac{1}{-h}} = x$$

Para el caso de la función factorial descendente con h=1, se utiliza la siguiente notación: $x^{\frac{n}{-1}} = x^{(n)} = x * (x-1) * (x-2) * \dots * (x-n+1)$

y en particular, si *x = m*$^{\frac{n}{-1}} = n^{(n)} = n * (n-1) * (n-2) * \dots * 1 = n!$

1.6 Diferencias de funciones factoriales

En las diferencias de esta sección, se consideran funciones en x con

$$\Delta x = h$$

1.6.1 Factorial descendente

La primera diferencia para $x^{\frac{s}{-h}}$, para s=1;2;3…. es por definición:

$$\Delta x^{\frac{s}{-h}} = (x+h)^{\frac{s}{-h}} - x^{\frac{s}{-h}}$$

Como

$$(x+h)^{\frac{s}{-h}} = (x+h) * \underline{x * (x-h) * \dots * (x - \overline{s-3}h) * (x - \overline{s-2}h)} =$$

$$(x+h) * \underline{x^{\frac{s-1}{-h}}} \qquad \text{y}$$

$$x^{\frac{s}{-h}} = \underline{x * (x-h) * \dots * (x - \overline{s-3}h) * (x - \overline{s-2}h)} * (x - \overline{s-1}h)$$

$$= \underline{x^{\frac{s-1}{-h}}} * (x - \overline{s-1}h)$$

lo subrayado se toma como factor común.

Entonces:

$$\Delta x^{\frac{s}{-h}} = x^{\frac{s-1}{-h}} * [(x+h)*(x-\overline{s-1}h)] = x^{\frac{s-1}{-h}} * [sh]$$

$$\boldsymbol{\Delta x^{\frac{s}{-h}} = shx^{\frac{s-1}{-h}}}$$

Se comprueba lo que se dijo al principio acerca de lo simple que es hallar la diferencia de una función factorial y su similitud con las derivadas de $f(x) = x^s f'(x) = sx^{s-1}$

Si se calculan las diferencias de los órdenes sucesivos de$x^{\frac{n}{-h}}$para n= 1;2;3... se nota que esta función es un polinomio de grado n, donde el coeficiente que multiplica a x^n es uno. Con lo cual $\Delta^n x^{\frac{n}{-h}} = n!\,h^n$

la primera diferencia de $x^{\frac{s}{-h}}$, para (s = 1;2;3;...)

$$\Delta x^{\frac{n}{-h}} = nhx^{\frac{n-1}{-h}}$$
$$\Delta x^{\frac{n-1}{-h}} = (n-1)hx^{\frac{n-2}{-h}}$$

la diferencia de orden 2 es:

$$\Delta^2 x^{\frac{n}{-h}} = \Delta\left(\Delta x^{\frac{n}{-h}}\right) = nh\Delta x^{\frac{n-1}{-h}} = nh(n-1)hx^{\frac{n-2}{-h}}$$

si se utiliza la notación de factoriales descendentes con h=1, $n*(n-1) = n^{(2)}$ queda la siguiente expresión:

$$\Delta^2 x^{\frac{n}{-h}} = n^{(2)}h^2 x^{\frac{n-2}{-h}}$$

en general, para la diferencia de orden p:

$$\Delta^p x^{\frac{n}{-h}} = \begin{cases} p < n & n^{(p)}h^p x^{\frac{n-p}{-h}} \\ p = n & n!\,h^n \\ p > n & 0 \end{cases}$$

1.6.1 Factorial ascendente

La primera diferencia para $x^{\frac{s}{h}}$, para s=1;2;3;..., teniendo en cuenta que:

$$x^{\frac{s}{h}} = (x+\overline{s-1}h)^{\frac{s}{-h}}$$

Es $\Delta x^{\frac{s}{h}} = \Delta(x+\overline{s-1}h)^{\frac{s}{-h}}$

El segundo miembro es una diferencia de factorial descendente, entonces:

$$\Delta x^{\frac{s}{h}} = \Delta(x + \overline{s-1}h)^{\frac{s}{-h}} = sh(x + \overline{s-1}h)^{\frac{s-1}{-h}}$$

Como$(x + \overline{s-1}h)^{\frac{s-1}{-h}} = (x + \overline{s-1}h) * (x + \overline{s-2}h) * \ldots * (x+h) = (x+h)^{\frac{s-1}{h}}$ la diferencia queda de la siguiente forma:

$$\Delta x^{\frac{s}{h}} = nh(x+h)^{\frac{s-1}{h}}$$

En general, para la diferencia de orden p:

$$\Delta^p x^{\frac{n}{h}} = \begin{cases} p < nn^{(p)} h^p (x + ph)^{\frac{n-p}{-h}} \\ p = nn!\, h^n \\ P > n \quad 0 \end{cases}$$

2. RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

2.1 Introducción

La resolución de ecuaciones diferenciales muchas veces no es posible mediante los métodos tradicionales, o su implementación resulta de una complejidad elevada.

Es por esto que se desarrollaron los métodos de resolución numérica, en los cuales no se obtiene una función como resultado, sino valores tabulados, dadas condiciones iniciales.

No se obtienen aproximaciones continuas en el tiempo, sino aproximaciones en puntos específicos, equi espaciados dentro de un intervalo, es decir, en tiempo discreto. Como consecuencia, cuanto más pequeño es el "h", la variación del tiempo entre dos aproximaciones consecutivas, más similar al valor exacto es el valor obtenido, ya que el tiempo discreto "se parece más" al continuo.

Los valores se van obteniendo mediante recurrencia, esto es, para obtener un valor determinado se debe utilizar el inmediatamente anterior. Por lo tanto, a medida que nos alejamos en el tiempo del valor inicial mayor es el error que se arrastra.

Los métodos desarrollados en el presente trabajo son aplicables a ecuaciones diferenciales de primer orden ordinarias.

2.2 Método de Euler

Este método se basa fundamentalmente en el polinomio de Taylor, las condiciones para su aplicación son que la función sea clase C_2(continua y diferenciable dos veces) y que cumpla la llamada condición de Lipschitz.

Dada la siguiente ecuación diferencial genérica y su respectivo valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t; y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

A partir de esto se puede sacar una segunda condición inicial:

$$y'(t_0) = f(t_0; y(t_0))$$

Teniendo en cuenta el desarrollo de Taylor:

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}y''(c)(t - t_0)^2$$

reemplazando$t = t_1$ y tomando $t_1 - t_0 = h$:

$$y(t_1) = y(t_0) + y'(t_0)h + \tfrac{1}{2}y''(c)h^2$$

si se considera un h pequeño, h^2lo es aún más, entonces se toma el tercer término como despreciable:$y(t_1) \cong y(t_0) + y'(t_0)h$

repitiendo el proceso con $t_2, t_3, \dots, t_n$se obtiene la siguiente fórmula de recurrencia:

$$y(t_{k+1}) \cong y(t_k) + y'(t_k)h$$

2.3 Método de Heun

Para este método se utiliza una aproximación con Euler para el primer valor y luego se determina, a través de la regla del trapecio ($\int_{t_0}^{t_1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}((f'(t_1) + f'(t_0))$:$\int_{t_i}^{t_{i+h}} y'(t)\,dt = \Delta_h y(t_i) = y(t_{i+h}) - y(t_i) = \frac{1}{2}(y'(t_i) + y'(t_{i+h}))$

reordenando: $y(t_{i+h}) = y(t_i) + \frac{1}{2}(y'(t_i) + y'(t_{i+h}))$

$y'(t_{i+h})$ se obtiene de la siguiente manera, sabiendo que es una función de $f\big(t_{i+h}; y(t_{i+h})\big)$,

lo que se obtiene con Euler es $y(t_{i+h})$:

$$y(t_{i+h}) = y(t_i) + h.y'(t_i)$$

además, $y(t_i)$ y $y'(t_i)$ son valores dados en las condiciones iniciales.

2.3.1 *Ejemplo*

Cuadro 1

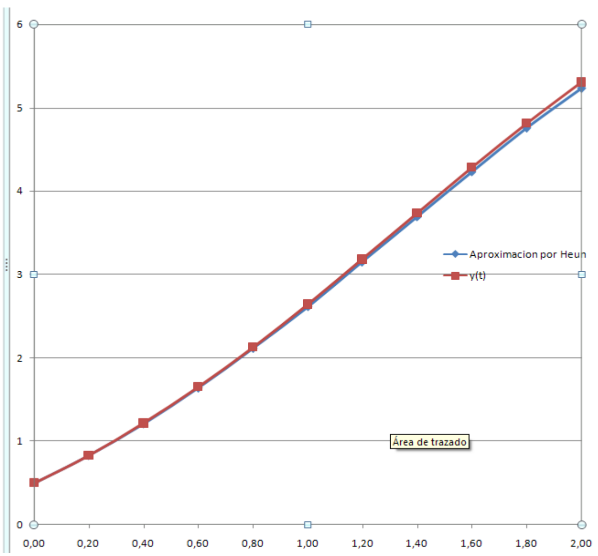
t	y(t)	Aproximacion por Heun
0,0	0,5000000	0,5000000
0,2	0,8292986	0,8260000
0,4	1,2140877	1,2069200
0,6	1,6489406	1,6372424
0,8	2,1272295	2,1102357
1,0	2,6408591	2,6176876
1,2	3,1799415	3,1495789
1,4	3,7324000	3,6936862
1,6	4,2834838	4,2350972
1,8	4,8151763	4,7556185
2,0	5,305472	5,2330546

$$y' = y - t^2 + 1 \qquad 0 \leq t \leq 2 \qquad y(0) = 0.5$$

Con n=10 ; h=0.2

siendo n la cantidad de iteraciones

Gráfico 2



3. CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo, se introdujo la definición de algunos operadores, sus propiedades y la forma en que se aplican a distintos tipos de funciones. Con esto se busca que los alumnos se familiaricen con algunos términos que van a ser las bases de materias posteriores, tales como Análisis Numérico en la carrera de actuario.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arzoumanian, R.P. (2002): *Temas de Análisis Numérico*. Material de clase. Curso de Análisis Numérico, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires.

Bernardello A.B., Bianco M.J., Casparri M.T., García Fronti J.I., Olivera de Marzana S. (2010): *Matemática para economistas utilizando Excel y MATLAB*. Buenos Aires, OMICRON SYSTEM.

Burden, R. L. y Faires, J. D. (1993): *Análisis Numérico*. Buenos Aires, Grupo Editorial Latinoamérica.

Casparri M.T., García Fronti J.I. y Krimker G. (2008): *Notas de Análisis Numérico con Aplicación al Cálculo Actuarial*. Buenos Aires, OMICRON SYSTEM.

Gandolfo G. (1971): *Mathematical Methods and Models in Economic Dynamics*. Amsterdam, North-Holland.

OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES Y SU USO EN LA ECONOMIA[1]

Alicia Bernardello
Verónica García Fronti
Pablo Matías Herrera

INTRODUCCIÓN

En los problemas de optimización económica se debe maximizar o minimizar una función objetivo de acuerdo a algún criterio preestablecido. Para la formulación matemática de estos problemas, lo que se plantea es una función objetivo en la cual la variable dependiente representa el objeto a maximizar o minimizar, y las variables independientes son las variables de elección. Estos problemas se relacionan directamente con el concepto de concavidad y convexidad, por lo tanto en este trabajo analizaremos estos conceptos y veremos cómo se los utiliza en los problemas de optimización económica.

En la primer parte del trabajo analizaremos las formas cuadráticas y su signo, ya que esto nos permitirá determinar el signo del diferencial segundo de una función. Luego, analizaremos los conceptos de concavidad y convexidad y veremos cómo se utilizan en los problemas de optimización. Veremos que el concepto de concavidad se relaciona directamente con la existencia de un máximo, y el de convexidad con la existencia de un mínimo.

Finalmente ejemplificaremos como se utilizan estos conceptos matemáticos dentro de la teoría económica. En particular, haremos referencia a dos componentes de la demanda agregada, a saber, el consumo y la inversión. En las teorías que explican el comportamiento de cada uno de estos componentes, se realizan supuestos de concavidad o convexidad para explicar sus determinantes.

1. SIGNO DE UNA FORMA CUADRÁTICA

Antes de describir como se establece el signo de una forma cuadrática vamos a definir qué es una forma cuadrática. Se define como forma cuadrática a la expresión polinómica en la cual cada término es de igual grado y en este caso de segundo grado.

---

[1]. Este trabajo que se realizó en el marco de los proyectos: UBACyT 2011-2014: Aspectos Financieros que Impactan en Dinámicas Industriales Innovadoras en Argentina: Agro, Medicamentos y Turismo dirigido por la Dra. María Teresa Casparri y UBACyT CC01: Incentivos Gubernamentales para una Agroproducción Sustentable en el Contexto del Cambio Climático: Valuación de un Proyecto de Inversión de Captura de Carbono en el Suelo dirigido por Alicia Blanca Bernardello, fue presentado en las XXVII Jornadas de Docentes de Matemática de las Facultades de Ciencias Económicas y Afines.

Por ejemplo: $3xy + 4x^2 + yz$ es una forma cuadrática en 3 variables. La definición se extiende a n variables y la podemos expresar matricialmente de la siguiente forma:

$$Q = (x_1, x_2, \dots, x_n) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{A= matriz asociada a la forma cuadrática}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Veamos ahora, cuales son las definiciones de una forma cuadrática positiva y negativa:

> Una forma cuadrática Q es **definida positiva** si Q sólo puede tomar valores positivos (salvo para el vector nulo en donde la forma cuadrática se anula). Asimismo Q es semidefinida positiva si Q puede tomar valores no negativos.
>
> Una forma cuadrática Q es **definida negativa** si Q sólo puede tomar valores negativos (salvo para el vector nulo donde la forma cuadrática se anula). Q es semidefinida negativa si Q puede tomar valores no positivos.

Es decir, que una forma cuadrática sea positiva lo único que nos indica es que la forma tomará sólo valores positivos y sólo se anulará en el vector nulo. Existen varias formas para determinar el signo de una forma cuadrática, una de las pruebas usadas es mediante el análisis de los signos de ciertos determinantes.

El signo de la forma cuadrática es igual al signo de la matriz asociada a la forma cuadrática, por lo tanto para analizar su signo se debe estudiar el signo de los menores principales de la matriz asociada a la forma cuadrática. Mediante este método se establecen *condiciones necesarias y suficientes para que la forma cuadrática sea definida positiva o negativa*, estas condiciones son:

> La *condición necesaria y suficiente* para que la forma cuadrática libre sea definida positiva es que los menores principales directores de la matriz asociada deben ser todos positivos.
>
> La *condición necesaria y suficiente* para que la forma cuadrática libre sea definida negativa es que los menores principales directores alternen de signo empezando por el signo negativo (pares positivos e impares negativos).

A continuación presentamos un ejemplo numérico:

Sea A la matriz asociada a una forma cuadrática:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Los menores principales dominantes de esta matriz son:

$$|A_1| = 3$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 11$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 51$$

Como los tres menores principales dominantes de la matriz asociada a la forma cuadrática son positivos, la forma cuadrática es definida positiva.

Más adelante calcularemos el signo del diferencial segundo de una función, que es una forma cuadrática, utilizando estas condiciones necesarias y suficientes para asegurar que la forma cuadrática (es decir el diferencial segundo de la función) sea definida positiva o negativa.

2. CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD

El concepto de concavidad y convexidad hace referencia a la forma geométrica de una función. Asimismo la caracterización de una función como cóncava (o convexa) hace referencia a la existencia de un máximo (o un mínimo).

Así, si la función tiene forma de "colina" la función se denomina cóncava y si tiene forma de "valle" se denomina convexa. Por otro lado, si la función cóncava no presenta ningún tramo recto se denomina estrictamente cóncava, de igual forma si no la función convexa no presenta ningún tramo recto se denomina función estrictamente convexa.

A su vez, como mencionamos al comienzo, la caracterización de una función cómo cóncava está asociada con la existencia de un máximo y una función convexa está asociada al concepto de mínimo.

Es importante distinguir entre *máximo absoluto y relativo*. Si una función se define cómo cóncava para todo el dominio, entonces el máximo asociado a la función será *absoluto.* Si en cambio, la función se define como cóncava solamente para un subconjunto del dominio de la función estaremos hablando de un máximo *relativo.* El mismo razonamiento lo podemos hacer para funciones convexas.

A partir de este momento y para la claridad de la explicación centraremos nuestra atención a las funciones cóncavas. Con lo mencionado hasta el momento, se puede deducir que la utilidad de definir a una función como cóncava, radica en el hecho de que esa propiedad nos permite asegurar la existencia de un máximo.

Al comienzo relacionamos concavidad con la forma geométrica de una función, cuando trabajamos con más variables es necesario incorporar la definición algebraica de concavidad. Así, para establecer que una función es cóncava existen diferentes metodologías, dependiendo del tipo de función.

A continuación se darán tres definiciones de una función cóncava. La primera hace referencia a un tipo de función que no necesariamente tiene porque ser diferenciable. La segunda hace referencia a las funciones C^1 (diferenciable en forma continúa una vez) y la tercera a las funciones C^2 (diferenciable en forma continua dos veces).

Algebraicamente, se dice que una función f es cóncava si y sólo si para cualquier par de puntos distintos de r y s en el dominio de f, y para $0 < \alpha < 1$, se cumple que:

$$\alpha f(r) + (1-\alpha) f(s) \leq f[\alpha r + (1-\alpha s)]$$

Si la desigualdad planteada en la definición anterior se cumple de manera estricta, la función f será *estrictamente cóncava*.

Para funciones C^1 la definición de concavidad se puede plantear como:

Una función$f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, de n variables y que sea C^1, es cóncava si y sólo si para cualquier par de puntos $r = (r_1, \dots, r_n)$ y $s = (s_1, \dots, s_n)$ en el dominio de f, se cumple que:

$$f(s) \leq f(r) + \sum_{i=1}^{n} f_i(r)(s_i - r_i)$$

Para funciones C^2 la definición de concavidad está directamente relacionada con el signo del diferencial segundo de la función. Sea la función $z = f(x_1, x_2, \dots x_n)$ donde $x_1, x_2, \dots, x_n$ son variables independientes, el diferencial segundo de la función $(d^2 z)$ lo podemos expresar de la forma:

$$d^2 z = (dx_1, dx_2, \dots, dx_{n-1}, dx_n) \underbrace{\begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_{n-1}} & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_{n-1}} & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{x_{n-1}x_1} & f_{x_{n-1}x_2} & \cdots & f_{x_{n-1}x_{n-1}} & f_{x_{n-1}x_n} \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_{n-1}} & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}}_{\text{Matriz hessiana}} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_{n-1} \\ dx_n \end{pmatrix}$$

En donde dx_1, dx_2, …dx_n representan cambios arbitrarios en x_1, x_2,…,x_n, por lo tanto en la diferenciación los trataremos como constantes, esto nos muestra que el d^2z depende de las derivadas parciales segundas de la función, por lo tanto d^2z es función de x_1,x_2,…x_n.

Relacionándolo con formas cuadráticas, podemos observar que el diferencial segundo es una forma cuadrática y la matriz hessiana es la matriz asociada a la forma cuadrática, por lo tanto analizando su signo podemos determinar si la forma cuadrática es definida positiva o negativa. Debemos recordar que la matriz Hessiana está formada por las derivadas parciales de segundo orden de la función y que estas pueden ser funciones.

Si eld^2z tiene signo negativo para todo el dominio de la función la misma es estrictamente cóncava, es decir podemos asegurar que existe un máximo absoluto para la función. Si el d^2z tiene signo negativo en todo el entorno a un punto puedo asegurar que la función tiene un máximo relativo, ya que solo analizamos un subconjunto del dominio de la función. En la siguiente sección cuando analicemos optimización utilizando las condiciones de primer y segundo orden veremos que encontramos un máximo relativo ya que evaluamos el signo del d^2z sólo en el punto estacionario (el punto en el cual la derivada primera se anula).

A continuación describiremos brevemente los pasos que se siguen para optimizar una función del tipo C^2 y como establecemos el signo del diferencial segundo utilizando el signo de la forma cuadrática.

3. OPTIMIZACION DE FUNCIONES

En los problemas económicos de optimización se nos presentan problemas en donde tendremos como objetivo maximizar (la utilidad del consumidor o la ganancia de una empresa) o minimizar (el costo de producción) de acuerdo a algún criterio preestablecido. Es por esto que al formular un problema de optimización debemos plantear nuestra función objetivo en la cual la variable dependiente representa el objeto a maximizar o minimizar y las variables independientes son las variables de elección. Matemáticamente si debemos optimizar la siguiente función:

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

El procedimiento es hallar los niveles de $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ que maximicen o minimicen el valor de la variable dependiente z, es decir encontrar los valores extremos de la función (estos pueden ser absolutos o relativos). Para identificar los valores extremos relativos de una función derivable dos veces utilizamos las condiciones de primer orden y segundo orden. Repasemos cada una de estas condiciones:

La *condición necesaria de primer orden* es que todas las derivadas parciales se anulen simultáneamente. Esta condición nos da los candidatos al óptimo, se determinan los llamados puntos estacionarios.

La *condición suficiente de segundo* orden se relaciona el diferencial segundo, es así como la condición suficiente para que un punto estacionario sea máximo es que el diferencial segundo en el punto estacionario sea (para valores arbitrarios de dx_1, dx_2, …,dx_n al menos uno distinto de cero)

$d^2z < 0$→el candidato a óptimo es un máximo relativo

La condición suficiente para que un punto estacionario sea mínimo es que el diferencial segundo en el punto estacionario sea (para valores arbitrarios de dx_1, dx_2, …,dx_n al menos uno distinto de cero)

$d^2z > 0$→ el candidato a óptimo es un mínimo relativo

Para determinar el signo del diferencial segundo podemos utilizar el procedimiento que se utiliza para calcular el signo de una forma cuadrática ya que **el diferencial segundo de una función es una forma cuadrática:**

$$d^2z = (dx_1, dx_2, \dots, dx_{n-1}, dx_n)\begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_{n-1}} & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_{n-1}} & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{x_{n-1}x_1} & f_{x_{n-1}x_2} & \cdots & f_{x_{n-1}x_{n-1}} & f_{x_{n-1}x_n} \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_{n-1}} & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_{n-1} \\ dx_n \end{pmatrix}$$

Para determinar el signo de este diferencial segundo en el o los puntos estacionarios, lo que vamos a tener que hacer es analizar el signo de matriz asociada a la forma cuadrática que es justamente la matriz hessiana de la función. <u>En la condición suficiente de segundo orden estudiamos el signo del diferencial segundo en el punto estacionario, por lo tanto encontraremos, si existe, un extremo relativo.</u>

Resumidamente, el diferencial segundo de una función (d^2z) es una forma cuadrática, por lo tanto cuando en un problema de optimización encontramos los puntos estacionarios y queremos evaluar el signo del d^2z en esos puntos estacionarios para asegurar la existencia de mínimo o máximo relativo debemos acudir al cálculo del signo de una forma cuadrática.

4. LOS CONCEPTOS DE CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD EN LA ECONOMÍA

Los conceptos de concavidad y convexidad son utilizados recurrentemente en la teoría económica. Con los mismos, se suelen describir tanto las preferencias como las conductas de los agentes económicos. Así, a partir de la especificación de una función en particular, se maximizará o minimizará la misma para ver el accionar de un agente. Como se discutió previamente, en el caso de una maximización se estará hablando de una función cóncava y en el caso de una minimización se estará hablando de una función convexa.

A continuación presentaremos un ejemplo numérico para entender el procedimiento descripto y luego presentaremos algunos ejemplos de textos de macroeconomía que utilizan los conceptos de concavidad y convexidad.

Ejemplo numérico

Veamos un ejemplo sencillo de optimización clásica que vamos a resolver numéricamente.

Las curvas de demanda de dos bienes son:

$Q_1 = 36 - 3P_1$ (1)

$$Q_2 = 40 - 5P_2 \qquad (2)$$

Donde:

Q_1yQ_2 cantidades demandadas del artículo 1 y artículo 2

$P_1 y P_2$ precios del artículo 1 y artículo 2.

Se supone una función de costo total (C):

$$C = P_1^2 + 2P_1P_2 + 3P_2^2 \quad (3)$$

Se pide encontrar los precios y cantidades que maximicen la función beneficio. Recordemos que la función beneficio es:

$$B = Q_1P_1 + Q_2P_2 - C \quad (4)$$

Si reemplazamos 1, 2 y 3 en 4 obtenemos la función beneficio en función de los precios.

$$B = 36P_1 - 4P_1^2 + 40P_2 - 8P_2^2 - 2P_1P_2$$

Como queremos maximizar el beneficio, nuestra tarea es hallar los precios que maximizan el beneficio. Determinamos las derivadas parciales de primer orden:

$$\frac{\partial B}{\partial P_1} = 36 - 8P_1 - 2P_2$$

$$\frac{\partial B}{\partial P_2} = 40 - 16P_2 - 2P_1$$

Ahora igualamos ambas expresiones a cero a fin de satisfacer las condiciones necesarias de primer orden:

$$36 - 8P_1 - 2P_2 = 0$$

$$40 - 16P_2 - 2P_1 = 0$$

Estas dos ecuaciones lineales producen una solución única:

$$P_1^* = 4 \text{y} P_2^* = 2$$

Estos precios cumplen la condición necesaria de primer orden, debemos comprobar la condición suficiente de segundo orden. Es decir, deberemos averiguar el signo del diferencial segundo de la función beneficio (d^2B) en el punto estacionario para asegurar que el punto estacionario es un máximo relativo.

Para averiguar el signo del d^2B estudiamos las segundas derivadas parciales, evaluadas en el punto $P_1^* = 4$ y $P_2^* = 2$ que nos dan el siguiente hessiano:

$$H(2,4) = \begin{bmatrix} -8 & -2 \\ -2 & -16 \end{bmatrix}$$

Puesto que:

$$|H_1| = -8 < 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} -8 & -2 \\ -2 & -16 \end{vmatrix} = 124 > 0$$

La matriz hessiana (o el diferencial segundo de la función beneficio) es definida negativa, por lo tanto la solución encontrada $P_1^* = 4$ y $P_2^* = 2$ maximiza el beneficio. Los niveles de producción optimas serán: Q_1=24 y Q_2=30 y el beneficio máximo (que se obtendrá reemplazando en la función de beneficios esos niveles de producción y los precios obtenidos) será: B=112

Asimismo, debemos recalcar que en este ejemplo los menores principales no dependen de dónde se los evalúe por lo tanto el diferencial segundo del beneficio es definido negativo en todo su dominio, es decir la función beneficio es estrictamente cóncava y por lo tanto el máximo encontrado es absoluto (si solo hubiésemos asegurado el signo del diferencial en un entorno del punto estacionario sería un máximo relativo). Por otro lado, si bien no lo analizamos en este trabajo a los efectos de no distraer la atención también debemos decir que como la función es estrictamente cóncava el máximo es absoluto y único.

Ejemplos descriptivos

Seguidamente, se presentarán una serie de ejemplos macroeconómicos para ver de qué manera se emplean los conceptos estudiados, no para resolver numéricamente un problema sino para entender los supuestos que se usan en los modelos macroeconómicos. Particularmente, se mostrarán los supuestos realizados para detallar dos componentes de la demanda agregada de una economía, a saber, el consumo y la inversión. Para esta tarea, se seguirá un manual de macroeconomía escrito por De Gregorio, J. (2007).

El consumo, es el componente más importante de la demanda agregada de una economía en cuanto a su peso relativo. Esta característica hace que sea esencial poder detallar de una manera coherente el comportamiento de este componente a través del tiempo. En cuanto a las teorías que se encargan de esta tarea, todas ellas se basan en la idea de que el individuo desea suavizar el consumo a través del tiempo, es decir, que prefieren consumir relativamente parejo a lo largo de su vida, y no mucho en algún momento y poco en otro. Para poder plasmar esta idea matemáticamente, se suele suponer que la función de utilidad de los individuos es ***cóncava***. Así, los agentes que presenten esta característica, consumirán las canastas que ***maximicen*** su función de utilidad.

Un supuesto utilizado recurrentemente en la economía para describir la función de utilidad de un individuo, y en consecuencia sus preferencias, viene dado por la siguiente función:

Cobb-Douglas: $U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$ con $0 \leq \alpha \leq 1$.

dondex_1 y x_2 representan los bienes que consumen los agentes. Con lo visto en el desarrollo del trabajo, el lector puede verificar que esta función es estrictamente cóncava.

La inversión, sumada al consumo, representa entre el 80% y el 90% de la demanda agregada de una economía. Para explicar el comportamiento de este componente, la teoría neoclásica parte del supuesto de que la empresa es el único agente que realiza este accionar dentro de la economía. A su vez, para decidir el nivel de inversión este agente sigue un comportamiento basado en una regla de optimización de beneficios. Para esto, se supone también que los mismos tienen una función de producción ***cóncava***, la que al ser ***maximizada*** indica el nivel de capital óptimo y en consecuencia la inversión a realizar por los empresarios.

El problema de optimización al que se enfrenta el empresario viene dado por:

$$\max_{K,L} PF(K, L) - (wL + RK)$$

donde$F(K, L)$ es la función de producción que, en la teoría neoclásica, suele representarse mediante una función Cobb Douglas. Esto es:

$$F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha} \text{con} 0 \leq \alpha \leq 1$$

donde$K$ y L son los factores de producción que representan al capital y el trabajo respectivamente.

Sin embargo, esta no es la única explicación del comportamiento de este componente. Generalmente, se supone también que existen costos al momento de realizar una inversión. Los mismos suelen ser representados por una función ***convexa*** la que al ser ***minimizada*** indica la variación de capital (inversión) necesaria.

Un ejemplo de función de costos se presenta mediante:

$$C(K) = (K_{t+1} - K^*)^2$$

que representa el costo que enfrenta una empresa por encontrarse fuera del óptimo. Se puede verificar que la función planteada, como se hizo referencia, es convexa.

Con estos los ejemplos precedentes, se ha mostrado de qué manera la teoría macroeconómica utiliza los conceptos de concavidad y convexidad para explicar ciertos comportamientos. Con la explicación del comportamiento del consumo de los agentes, se ha mostrado la utilización del concepto de concavidad, y con la explicación de la inversión se ha mostrado, la aparición en forma conjunta del concepto de concavidad y convexidad.

5. CONCLUSIONES

En los problemas de optimización económica se debe maximizar o minimizar una función objetivo de acuerdo a algún criterio preestablecido. Para la formulación matemática de estos problemas, lo que se plantea es una función objetivo en la cual la variable dependiente representa el objeto a maximizar o minimizar, y las variables independientes son las variables de elección. Estos problemas se relacionan directamente con el concepto de concavidad y convexidad, por lo tanto en este trabajo analizaremos estos conceptos y veremos cómo se los utiliza en los problemas de optimización económica.

En la primer parte del trabajo hemos analizado a las formas cuadráticas y su signo. Esto nos permitió encontrar una metodología para determinar el signo del diferencial segundo de una función. Luego, hemos analizado los conceptos de concavidad y convexidad y hemos visto cómo los mismos se utilizan en los problemas de optimización. Notamos que el concepto de concavidad se relaciona directamente con la existencia de un máximo, y el de convexidad con la existencia de un mínimo.

Finalmente ejemplificamos como se utilizan estos conceptos matemáticos dentro de la teoría económica. En particular, hemos hecho referencia a dos componentes de la demanda agregada, a saber, el consumo y la inversión. En las teorías que explican el comportamiento de cada uno de estos componentes, se realizan supuestos de concavidad o convexidad para explicar sus determinantes.

En cuanto a trabajos de investigación económica, si bien en varios de los mismos estos elementos se utilizan directamente para la resolución de un problema de optimización, en otros estos se utilizan para realizar suposiciones que aseguran que los problemas analizados tienen una resolución satisfactoria.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bernardello A.B., Bianco M.J., Casparri M.T., García Fronti J.I., Olivera de Marzana S. (2010): *Matemática para economistas utilizando Excel y MATLAB*. Buenos Aires, OMICRON SYSTEM.

Chiang, A. (1987): *Métodos fundamentales de economía matemática.* México DF, McGraw-Hill.

De Gregorio, J. (2007): *Macroeconomía. Teoría y Políticas*. México DF, Pearson Education.

ASPECTOS FUNDAMENTALES DE LA PROGRAMACIÓN NO-LINEAL

Leandro D. Toriano

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se exponen los aspectos fundamentales vinculados al estudio de problemas de programación no-lineal. Al respecto, se presenta la deducción y aplicabilidad de las condiciones de Kuhn-Tucker y se realiza especial hincapié en la regla del multiplicador de John y su relación con la evaluación de la calificación de restricciones.

1. DEFINICIÓN GENERAL DE UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN NO-LINEAL

Un problema de programación no lineal puede ser definido bajo la siguiente forma:

Maximizar	$\pi = f(x_1, x_2, ..., x_n)$	*Minimizar*	$C = f(x_1, x_2, ..., x_n)$
Sujeto a	$g^1(x_1, x_2, ..., x_n) \leq r_1$		$g^1(x_1, x_2, ..., x_n) \geq r_1$
	$g^2(x_1, x_2, ..., x_n) \leq r_2$		$g^2(x_1, x_2, ..., x_n) \geq r_2$
	....		....
	$g^m(x_1, x_2, ..., x_n) \leq r_m$		$g^m(x_1, x_2, ..., x_n) \geq r_m$
	$x_i \geq 0 \ (i = 1,\ 2,\ ....,n)$		$x_i \geq 0 \ (j = 1,\ 2,\ ....,n)$

Con $m \leq n$ o $m \geq n$

1.1 Consideraciones

Minimizar la función objetivo $f(x)$ es equivalente a maximizar $-f(x)$. Asimismo, en el caso de que el sentido de la desigualdad de las restricciones sea otra (ej.: mayor-igual en un problema de máximo), pueden invertirse fácilmente multiplicando ambos miembros por -1.

Al igual que un problema de programación lineal, su estructura posee tres elementos fundamentales:

- Función objetivo.
- Conjunto de m restricciones.

- Conjunto de restricciones de no-negatividad sobre las n variables de elección.

El conjunto de vectores $x \in \Re^n$ que verifican las restricciones del problema se denomina *conjunto admisible* o *factible*.

Considerando solo la función objetivo, es decir, sin restringir el conjunto factible, estamos ante un problema de extremos libres. Por otro lado, si las restricciones son de igualdades estrictas y con $m < n$ estamos ante un problema de optimización restringida clásica.

Es posible transformar un problema de programación no lineal en uno clásico mediante (1) la introducción de m variables artificiales para convertir las restricciones de desigualdad en igualdades; (2) considerando cada una de las n variables de elección y cada una de las m variables artificiales como el cuadrado de una nueva variable artificial para asegurar la no-negatividad.

2. DEFINICIÓN Y ANÁLISIS DE CONDICIONES DE KUHN-TUCKER

Condición Necesaria (Def.): Si A es condición necesaria de B, entonces B no puede ser verdadera a menos que A sea verdadera. Es decir, A es verdadera si B lo es. $<< B \Rightarrow A >>$ *A es condición necesaria de B*

2.1 Introducción

En un problema de optimización clásica, sin restricciones sobre los signos de las variables de elección y sin desigualdades en las restricciones, la condición de primer orden para un extremo local es simplemente que las derivadas parciales primeras de la función lagrangiana diferenciable con respecto a todas las variables de elección y los multiplicadores de Lagrange sean cero. Es decir, dado el problema

$$Max\ \Pi = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \quad \textit{sujeto a} \quad \begin{array}{l} g^1\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0 \\ g^2\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g^m\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0 \end{array}$$

con n variables de elección y m restricciones $(m < n)$ y donde f se supone diferenciable y siendo la función lagrangiana,

$$L\left(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m\right)= f\left(x_1,...,x_n\right) + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j[c_j - g^j\left(x_1,...,x_n\right)]$$

Las condiciones de Primer Orden (CPO) son:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=\frac{\partial L}{\partial x_2}=...=\frac{\partial L}{\partial x_n}=0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}=\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}=...=\frac{\partial L}{\partial \lambda_m}=0$$

En programación no lineal existe una condición de primer orden de tipo similar, conocida como *condiciones de Kuhn-Tucker*. Sin embargo, mientras la condición clásica de primer orden es siempre necesaria, las condiciones de Kuhn-Tucker pueden no serlo si no se satisface cierto requisito que será visto más adelante. Por otra parte, bajo ciertas circunstancias específicas, las condiciones de Kuhn-Tucker resultan ser *condiciones suficientes* o incluso *condiciones necesarias* y *suficientes.*

Presentaremos en primer lugar las condiciones de Kuhn-Tucker y en el siguiente apartado las condiciones para las cuales éstas se convierten en necesarias.

2.2 Presentación del problema de optimización con restricciones de no negatividad

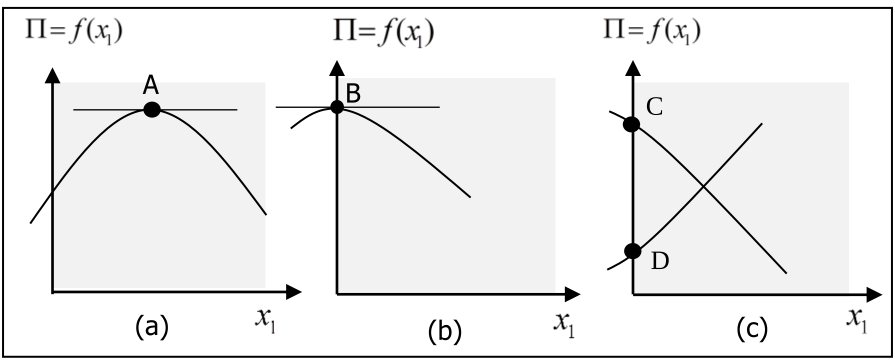
Consideremos un problema de maximización con restricciones de no-negatividad, pero sin ningún otro tipo de restricción adicional. Para el caso particular de una variable:

$$Max\ \Pi = f\left(x_1\right) \quad sujeto\ a \quad x_1 \geq 0$$

donde f se supone diferenciable.

De acuerdo con la restricción de no negatividad, $x_1 \geq 0$, pueden surgir tres situaciones que se presentan en el siguiente gráfico:

Gráfico 1



- Diagrama (a): El punto A es máximo local y puede calificarse como una *solución interior* $[x_1 > 0;\ f^{'}(x_1) = 0]$. La CPO es igual que en el problema clásico.

- Diagrama (b): El punto B es máximo local y puede calificarse como una *solución de frontera*$[x_1 = 0;\ f^{'}(x_1) = 0]$.

- Diagrama (c): El punto C es máximo local ya que el candidato a óptimo simplemente tiene que ser mayor que los puntos de su entorno pero *dentro de* la región factible $[x_1 = 0;\ f^{'}(x_1) > 0]$. El punto D $[x_1 = 0;\ f^{'}(x_1) < 0]$ puede excluirse con toda seguridad porque en un punto donde la curva tiene pendiente creciente, nunca podremos tener un máximo. Como puede observarse, D constituye un mínimo local.

En conclusión, para que x_1 sea un máximo local de Π debe satisfacer una de las tres siguientes condiciones:

$f^{'}(x_1) = 0$ y $x_1 > 0$ [punto A]

$f^{'}(x_1) = 0$ y $x_1 = 0$ [punto B]

$f^{'}(x_1) < 0$ y $x_1 = 0$ [punto C]

Resumidas en una única expresión: $f^{'}(x_1) \leq 0 \;\; x_1 \geq 0 \; y x_1 f^{'}(x_1) = 0$

Por su parte, para el caso de minimización, las condiciones pueden resumirse en: $f^{'}(x_1) \geq 0 \;\; x_1 \geq 0 \; y x_1 f^{'}(x_1) = 0$

Estas expresiones, en su conjunto, constituyen las condiciones necesarias de primer orden para la existencia de un máximo (mínimo) local donde la variable de elección debe ser no negativa. Asimismo, podemos tomarlas como condiciones necesarias para un máximo (mínimo) global, ya que por definición un máximo (mínimo) global es también un máximo (mínimo) local.

Extendiendo el problema a *n* variables de elección, para un *problema de máximo:*

$$Max\ \Pi = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \quad s.a. \quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

Condiciones necesarias de primer orden para máximo local y máximo global:

$f_i \;\; \leq 0 \;\; x_i \;\; \geq 0 \; y x_i \; f_i \;\; = 0 \; (i = 1, 2, ..., n)$ donde f_i es la derivada parcial $\partial \Pi / \partial x_i$

Para un *problema de mínimo:*

$$Min\ C = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \quad s.a. \quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

Condiciones necesarias de primer orden para mínimo local y mínimo global:

$f_i \geq 0$ $x_i \geq 0$ $y\, x_i\, f_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ donde f_i es la derivada parcial $\partial \Pi / \partial x_i$

2.3 Incorporación de las restricciones de desigualdad

Incorporando las restricciones de desigualdad, tenemos el siguiente problema para n variables:

$$Max\ \Pi = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \quad s.a. \quad \begin{array}{l} g^1(x_1, x_2, ..., x_n) \leq r_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g^m(x_1, x_2, ..., x_n) \leq r_m \\ \quad x_1, x_2, ..., x_n \geq 0 \end{array}$$

el cual, con la ayuda de variables de holgura $s_1, s_2, ..., s_m$, es decir que completan las desigualdades, tenemos:

$$Max\ \Pi = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \quad s.a. \quad \begin{array}{l} g^1\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) + s_1 = r_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g^m\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) + s_m = r_m \\ x_1, x_2, ..., x_n;\ s_1, s_2, ..., s_m \geq 0 \end{array}$$

En línea con el método clásico y desestimando por el momento las restricciones de no-negatividad de las variables x_i y s_j es posible formar la función lagrangiana:

$$L^* = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [r_j - g^j\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) - s_i]$$

Siendo las condiciones de primer orden respectivas

$$\begin{cases} L^*_{x_i} = f_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_i^j = 0 & (i = 1, 2, ..., n) \\ L^*_{s_j} = -\lambda_j = 0 & (j = 1, 2, ..., m) \\ L^*_{\lambda_j} = r_j - g^j(x_1, x_2, ..., x_n) - s_j = 0 & \end{cases}$$

Pero como las variables x_i y s_j son no-negativas, hay que modificar las condiciones de primer orden. En consecuencia, obtenemos en su lugar el siguiente conjunto de condiciones:

$$\begin{cases} L^*_{x_i} \leq 0; & x_i \geq 0; & x_i L^*_{x_i} = 0 & (i = 1, 2, ..., n) \\ L^*_{s_j} \leq 0; & s_j \geq 0; & s_j L^*_{s_j} = 0 & (j = 1, 2, ..., m) \\ L^*_{\lambda_j} = 0 & & & \end{cases}$$

donde la derivada $L^*_{\lambda_j}$ permanece igualada a 0 porque, en principio, no existen restricciones de no-negatividad en las λ_j.

Nótese que $s_j \equiv r_j - g^j\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, con lo cual podemos reemplazar las variables de holgura s_j y rescribiendo $s_j \geq 0$ en la segunda línea:

$$s_j \geq 0 \Rightarrow r_j - g^j\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \geq 0$$

A su vez, como $L^*_{s_j} = -\lambda_j \leq 0$ implica $\lambda_j \geq 0$ entonces:

$$L^*_{s_j} \leq 0 \Rightarrow \lambda_j \geq 0$$

$$s_j L^*_{s_j} = 0 \Rightarrow \lambda_j [r_j - g^j(x_1, x_2, ..., x_n)] = 0$$

Con lo cual, las condiciones para el *problema de máximo* quedan reformuladas de la siguiente manera:

Cond. Marginales *Cond. de no-negatividad*

$$L^*_{x_i} \le 0 \qquad x_i \ge 0$$

$$L^*_{\lambda_j} = r_j - g^j(x_1, x_2, ..., x_n) \ge 0 \qquad \lambda_j \ge 0$$

Cond. de holgura complementaria

$$x_i L^*_{x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

$$\lambda_j L^*_{\lambda_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, ..., m)$$

Las que reciben el nombre de ***condiciones de Kuhn-Tucker para máximo.***

De manera análoga puede demostrarse que para el *problema de mínimo* lo único que cambia es el sentido de la desigualdad de la derivada de *L*, con lo cual tenemos las ***condiciones de Kuhn-Tucker para mínimo***.

Cond. Marginales *Cond. de no-negatividad*

$$L^*_{x_i} \ge 0 \qquad x_i \ge 0$$

$$L^*_{\lambda_j} = r_j - g^j(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0 \qquad \lambda_j \ge 0$$

Cond. de holgura complementaria

$$x_i L^*_{x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

$$\lambda_j L^*_{\lambda_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, ..., m)$$

Nótese que las condiciones pueden obtenerse sin incorporar las s_j mediante un lagrangiano "común":

$$L^* = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [r_j - g^j\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)]$$

Sólo basta tener en cuenta las desigualdades a la hora de expresar las condiciones.

2.4 Ejemplos

Pasos sugeridos para la resolución de problemas en dos variables:

a) Determinación del óptimo (o los óptimos) a través de la resolución gráfica del ejercicio:

- ✓ *Curvas de nivel.*
- ✓ *Restricciones.*

b) Determinación del óptimo (o los óptimos) observados.

c) Verificación de las condiciones de Kuhn-Tucker.

- ✓ *Condiciones marginales.*
- ✓ *Condiciones de no-negatividad.*
- ✓ *Condiciones de holgura complementaria*

2.4.1 Ejemplo 1

$$Maximizar\ \prod = x_1^2 - x_2 \qquad s.a.\begin{cases} x_2 \geq 2 \\ x_1 \leq 2 \end{cases}$$

2.4.1.1 Determinación del óptimo (o los óptimos) a través de la resolución gráfica del ejercicio

- *Curvas de nivel de la función objetivo.*

$$\prod = x_1^2 - x_2 \quad \Rightarrow x_2 = -\prod + x_1^2 \ \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx_2}{dx_1} = 2x_1 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0 \\ \dfrac{d^2x_2}{dx_1^2} = 2 > 0 \ \Rightarrow \text{ Mínimo en } x_1 = 0 \end{cases}$$

Las curvas de nivel decrecen conforme disminuye x_2, cada una de ellas presentando un mínimo en $x_1 = 0$.

- *Restricciones*

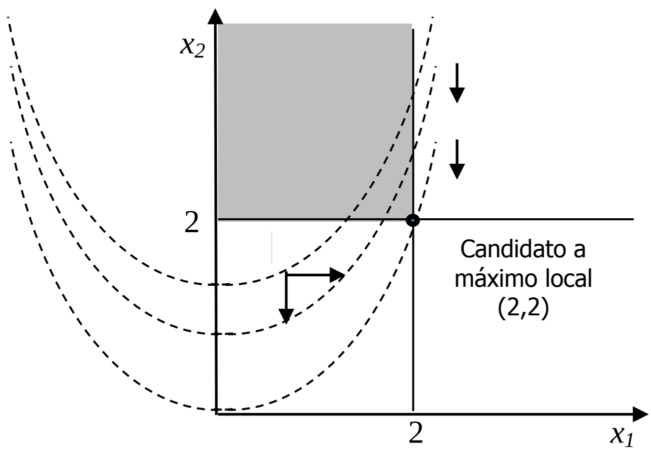
Reexpresamos las restricciones de desigualdad como igualdad para graficar.

$x_2 \geq 2 \qquad \Rightarrow x_2 = 2$

$x_1 \leq 2 \qquad \Rightarrow x_1 = 2$

En función de la región factible y las curvas de nivel resultantes es posible obtener el óptimo (los óptimos):

Gráfico 2



2.4.1.2 Determinación del óptimo (o los óptimos) observados

El punto se encuentra en la intersección de ambas restricciones $x_1 = 2 \text{ y } x_2 = 2$

El candidato a máximo local es el punto (2,2)

Para la existencia de máximo local no tiene que ser posible alcanzar una curva de nivel mayor dentro de la región factible. Cualquier otra curva de nivel superior a la que intercepta al punto (2,2) escapa la región factible.

2.4.1.3 Verificación de las condiciones de Kuhn-Tucker

En primer lugar, reescribimos la restricciones que no están establecidas como menor igual.

$x_2 \geq 2 \qquad \Rightarrow -x_2 \leq -2$

Y luego armamos el Lagrangiano y escribimos las condiciones de Kuhn-Tucker respectivas:

$$L = x_1^2 - x_2 + \lambda_1\left(-2 + x_2\right) + \lambda_1\left(2 - x_1\right)$$

$$\begin{cases} L'_{x_1} = 2x_1 - \lambda_2 \le 0 & x_1 \ge 0 & x_1 L'_{x_1} = 0 \\ L'_{x_2} = -1 + \lambda_1 \le 0 & x_2 \ge 0 & x_2 L'_{x_2} = 0 \\ L'_{\lambda_1} = -2 + x_2 \ge 0 & \lambda_1 \ge 0 & \lambda_1 L'_{\lambda_1} = 0 \\ L'_{\lambda_2} = 2 - x_1 \ge 0 & \lambda_2 \ge 0 & \lambda_2 L'_{\lambda_2} = 0 \end{cases}$$

Finalmente las evaluamos en el punto (2,2)

$$\Rightarrow x_1 = 2 > 0 \Rightarrow L'_{x_1} = 2x_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 4 > 0 \Rightarrow L'_{\lambda_1} = -2 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = 2 > 0 \Rightarrow L'_{x_2} = -1 + \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 > 0 \Rightarrow L'_{\lambda_2} = 2 - 2 = 0$$

Cumple con la condiciones de Kuhn-Tucker.

2.4.2 Ejemplo 2

$$Maximizar\ \prod = x_2 - x_1^2 \qquad s.a.\begin{cases} -(10 - x_1^2 - x_2)^3 \le 0 \\ x_1 \ge 2 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.4.2.1 Determinación del óptimo (o los óptimos) a través de la resolución gráfica del ejercicio

- *Curvas de nivel de la función objetivo*

$$\prod = x_2 - x_1^2 \quad \Rightarrow x_2 = \prod + x_1^2 \ \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx_2}{dx_1} = 2x_1 = 0 & \Rightarrow x_1 = 0 \\ \dfrac{d^2x_2}{dx_1^2} = 2 > 0 & \Rightarrow \text{mín} \end{cases}$$

Mínimo en $x_1 = 0$

Las curvas de nivel crecen conforme aumenta x_1 y x_2, cada una de ellas presentando un mínimo en $x_1 = 0$.

- *Restricciones*

Reexpresamos las restricciones de desigualdad como igualdad para graficar

$$x_1 \geq 2 \qquad \Rightarrow x_1 = 2$$

$$-(10 - x_1^2 - x_2)^3 \leq 0 \;\Rightarrow -(10 - x_1^2 - x_2)^3 = 0 \;\Rightarrow (10 - x_1^2 - x_2) = +\sqrt[3]{0} \Rightarrow$$

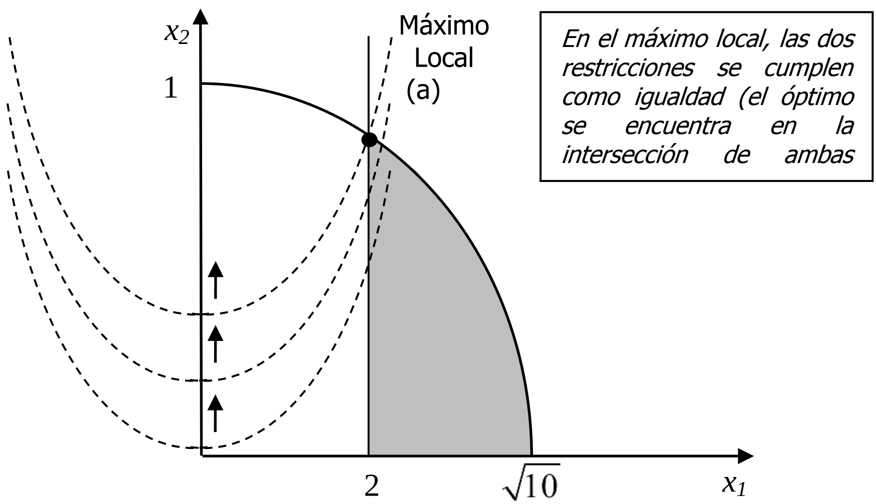
$$\Rightarrow x_2 = 10 - x_1^2 \quad \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx_2}{dx_1} = -2x_1 = 0 & \Rightarrow x_1 = 0 \\ \dfrac{d^2x_2}{dx_1^{\,2}} = -2 < 0 & \Rightarrow \text{ Máximo en } x_1 = 0 \end{cases}$$

$$si\ x_2 = 0 \quad \Rightarrow x_1^2 = 10 \quad \Rightarrow |x_1| = \pm\sqrt{10} \quad \Rightarrow (\sqrt{10}, 0)$$

$$si\ x_1 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = 10 \quad \Rightarrow (0,10)$$

En función de la región factible y las curvas de nivel resultantes es posible obtener el óptimo:

Gráfico 3



Para la existencia de máximo local no tiene que ser posible alcanzar una curva de nivel mayor dentro de la región factible. Cualquier otra curva de nivel superior a la que intercepta al punto (a) escapa la región factible.

2.4.2.2 Determinación del óptimo (o los óptimos) observados

El punto se encuentra en la intersección de ambas restricciones.

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ -(10 - x_1^2 - x_2)^3 = 0 \qquad \Rightarrow 10 - 2^2 - x_2 = 0 \qquad \Rightarrow x_2 = 6 \end{cases}$$

El punto es entonces (2,6)

2.4.2.3 Verificación de las condiciones de Kuhn-Tucker

En primer lugar, reescribimos la restricciones que no estén expresadas como menor-igual.

$$x_1 \geq 2 \qquad \Rightarrow -x_1 \leq -2$$

Luego armamos el Lagrangiano:

$$L = x_2 - x_1^2 + \lambda_1 (10 - x_1^2 - x_2)^3 + \lambda_2 (-2 + x_1)$$

- ✓ *Condiciones marginales*

$$\begin{cases} L'_{x_1} = -2x_1 + 3\lambda_1 (10 - x_1^2 - x_2)^2 (-2) x_1 + \lambda_2 \leq 0 \\ L'_{x_2} = 1 + 3\lambda_1 (10 - x_1^2 - x_2)^2 (-1) \leq 0 \\ L'_{\lambda_1} = (10 - x_1^2 - x_2)^3 \geq 0 \\ L'_{\lambda_2} = -2 + x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Entonces, reemplazando el punto (2,6) en

$L'_{x_2} \Rightarrow L'_{x_2} = 1 - 3\lambda_1 (10 - 2^2 - 6)^2 = 1 \leq 0$ inconsistencia.

No se cumple la condición marginal

- ✓ *Condiciones de no-negatividad*

Ya hemos mostrado que las restricciones se cumplen en el punto (2,6).

- ✓ *Condiciones de holgura complementaria*

Si $x_2 > 0 \Rightarrow L'_{x_2} = 0$ (por condición de holgura complementaria $(x_1 L'_{x_2} = 0)$.

Sin embargo, dado que $L'_{x_2} = 1 \Rightarrow$ no se cumple la condición.

Cabe destacar que las condiciones no son excluyentes. Es decir, pueden cumplirse algunas sin la necesidad de que otras lo hagan. Sin embargo, al no verificarse cualquiera de las condiciones puede decirse que no se verifican las condiciones de Kuhn-Tucker.

3. CALIFICACIÓN DE LAS RESTRICCIONES

Como fue mencionado en el apartado anterior, las condiciones de Kuhn-Tucker son condiciones necesarias para la existencia de un óptimo solo si se satisface cierto requisito. Este requisito, que recibe el nombre de *calificación de las restricciones*, permite desechar ciertas irregularidades en la frontera factible que invalidarían las condiciones de Kuhn-Tucker en caso de que la solución óptima se diera allí. En este sentido, el interés de estudiar las condiciones de Kuhn-Tucker pasa por describir las propiedades en el entorno del óptimo.

Regla del multiplicador de John: Sean $f, g^1, g^2, ..., g^n$ funciones de n variables continuamente diferenciables, y sea $x^* \in \Re^n$ un maximizador local de f sobre el conjunto de restricción definido por las k desigualdades

$$g^j(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_j \qquad (j = 1, 2, ..., k)$$

Se forma el lagrangiano

$$L\,(x_1, ..., x_n; \lambda_1, ..., \lambda_n) = \lambda_0 f\left(x_1, ..., x_n\right) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [b_j - g^j\left(x_1, ..., x_n\right)]$$

con el multiplicador λ_0 para la función objetivo. Entonces existen multiplicadores $\lambda^* = (\lambda_0^*, \lambda_1^*, ..., \lambda_k^*)$ tales que en el óptimo se verifica:

$$a)\ L'_{x_i}(x^*, \lambda^*) = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

$$b)\ \lambda_j^*[g^j(x^*) - b_j] = 0 \qquad (j = 1, 2, ..., k)$$

$$c)\ \lambda_j^* \geq 0 \qquad (j = 1, 2, ..., k)$$

$$d)\ g^j(x^*) \leq b_j \qquad (j = 1, 2, ..., k)$$

Similares a las condiciones de Kuhn Tucker (se contemplan también las restricciones de no-negatividad con sus respectivos multiplicadores.

$$e)\ \lambda_0^* = 0\ o\ 1$$

$$f)\ (\lambda_0^*, \lambda_1^*, ..., \lambda_k^*) \neq (0, 0, ..., 0) \bullet$$

Nótese que si $\lambda_0^* = 0$, la función objetivo que estamos maximizando desaparecería completamente de las condiciones de primer orden. Dado que la regla de John es siempre válida, si el único valor que puede tomar λ_0^* es 0, a los efectos de las condiciones de Kuhn-Tucker se obtendría algo similar a la igualación a cero de las derivadas primeras parciales de la función objetivo. De esta manera es como si se estuviera exigiendo que la maximización sea libre, cuando en realidad no lo es. A su vez, como al mismo tiempo se estaría exigiendo que alguna de las restricciones se cumpla como igualdad, podrían darse situaciones en las cuales las condiciones de Kuhn-Tucker resultan inconsistentes en el óptimo. De hecho, son precisamente en situaciones de óptimos en la frontera de la región factible donde el problema de la necesidad de las condiciones de Kuhn-Tucker se torna relevante.

El siguiente teorema resume una lista de elementos que garantizan que a λ_0^* pueda asignársele el valor 1. De esta manera, si un problema de optimización no lineal cumple uno de los elementos de esta lista, diremos entonces que *se cumple la calificación de restricciones*, con lo cual las condiciones de Kuhn- Tucker serán necesarias en el óptimo.

Propiedad: Sean $f, g^1, g^2, ..., g^n$ como en el teorema de John y supóngase que $x^* \in \Re^n$ es un maximizador local de f sobre el conjunto de restricciones definido por $g^j(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_j \ (j = 1, 2, ..., k)$

Supóngase además, que $g^1, g^2, ..., g^h$ son restricciones activas en x^*, que las restantes $g^{h+1}, g^{h+2}, ..., g^k$ no lo son, y que las restricciones activas satisfacen una de las siguientes condiciones:

a) La matriz jacobiana de las restricciones activas tiene rango[1] maximal h en x^*, es decir, tiene el mayor rango posible.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}\left(x^*\right) & \cdots\cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}\left(x^*\right) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}\left(x^*\right) & \cdots\cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}\left(x^*\right) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial g_h}{\partial x_1}\left(x^*\right) & \cdots\cdots & \frac{\partial g_h}{\partial x_n}\left(x^*\right) \end{pmatrix}$$

[1] Recordemos que el rango es equivalente a la cantidad de vectores linealmente independientes que tiene una matriz o, alternativamente, el orden del determinante de mayor orden no nulo.

b) Teorema de Karush-Kuhn-Tucker: Para todo vector $v$en $\Re^n$ que satisface $Dg_i\left(x^*\right)(v) \le 0$ para todo $i = 1, 2, ..., h$, existe un $\varepsilon > 0$ y una curva continua diferenciable $\alpha : \left[0, \varepsilon\right) \to \Re^n$ tal que:

(i) $\alpha(0) = x^*$ es decir, con origen en x^*

(ii) $\alpha'(0) = v$ es decir, con pendiente v

(iii) $g_j\left(\alpha(t)\right) \le b_j$ para todo $j = 1, 2, ..., k$ y para todo $t \in \left[0, \varepsilon\right)$ es decir, contenida en la región factible.

Se exige que la curva exista para todo v con las condiciones requeridas.

c) Condición de Slater: Existe una bola U con centro en $x^* \in R^n$ tal que $g^1, g^2, ..., g^h$ son funciones convexas en U (es decir, son funciones convexas en el entorno) y existe $z \in U$ tal que $g^j(z) < b_j$

d) $g^1, g^2, ..., g^h$ son funciones cóncavas.

e) $g^1, g^2, ..., g^h$ son funciones lineales.

Entonces se puede hacer $\lambda_0^* = 1$ en el teorema de John, asegurándose el cumplimiento de las condiciones de Kuhn-Tucker en el óptimo.

En el caso de que se trate de un problema de minimizacion con restricciones de desigualdad la forma $g^j(z) \ge b_j$, lo mencionado previamente se cumple asegurándose los reemplazos "$\le$" por "$\ge$" por "convexa" por "cóncava".

Es evidente que $e) \Rightarrow d) \Rightarrow c)$. Resulta menos obvio que $d) \Rightarrow b)$. La condición *a)* es la más fácil de verificar pero no hay nada que asegure que su cumplimiento implique alguna de las restantes (o que su incumplimiento implique el no-cumplimiento de todas las otras). Solo basta el cumplimiento de una de ellas para concluir que se satisface la calificación de restricciones. En este sentido, **el cumplimiento de una calificación de restricciones es condición suficiente para que las condiciones de Kuhn-Tucker sean necesarias para la existencia de un óptimo en un programa no-lineal.**

Es conveniente remarcar que este listado de condiciones no es exhaustivo. Existen también condiciones más débiles que la *a*) y que no necesariamente se implican mutuamente, tanto entre ellas como con las restantes condiciones antes mencionadas.

En la práctica, son preferidas calificaciones de restricciones más débiles dado que proveen condiciones de optimalidad más fuertes ("dicen más" respecto de las propiedades del entorno del óptimo) pero pueden ser más difíciles de verificar.

Retomando el *Ejemplo 1*verificamos las condiciones mencionadas previamente:

$$\begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 = 2 \end{cases}$$

a) Restricciones que se cumplen como igualdad:

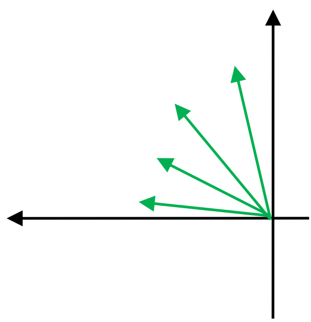
$$\begin{bmatrix} \partial g^1 / \partial x_1 & \partial g^1 / \partial x_2 \\ \partial g^2 / \partial x_1 & \partial g^2 / \partial x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \text{Rango} = 2 = \text{Rango maximal} = 2$$

Cumple la calificación de restricciones de "matriz Jacobiana".

b)

Gráfico 4

$$\begin{cases} dx_2 \geq 0 \\ dx_1 \leq 0 \end{cases}$$



Cumple con el teorema de Karush-Kuhn-Tucker, dado que todos los vectores tienen una curva tangente a ellos enteramente contenida en la

A continuación verificamos las condiciones para el *Ejemplo 2*:

a)

$$\begin{cases} g^1(x_1, x_2) = -(10 - x_1^2 - x_2)^3 \\ g^2(x_1, x_2) = -x_1 + 2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \partial g^1/\partial x_1 & \partial g^1/\partial x_2 \\ \partial g^2/\partial x_1 & \partial g^2/\partial x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\left(10-x_1^2-x_2\right)^2(-2)\ x_1 & -3\left(10-x_1^2-x_2\right)^2(-1) \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3\left(10-2^2-6\right)^2(-2)\ 2 & -3\left(10-2^2-6\right)^2(-1) \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Rango = 1 $\neq$ Rango maximal = 2

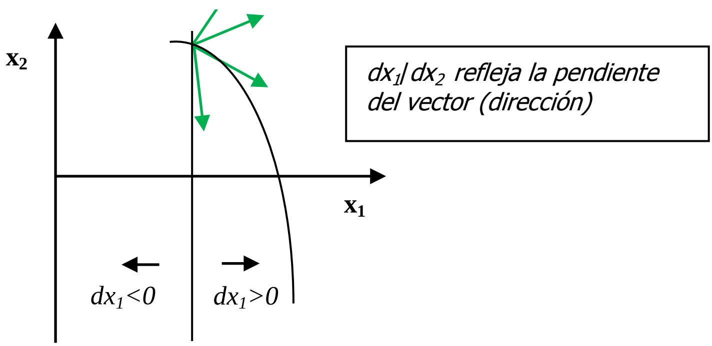
No cumple la calificación de restricciones de "matriz Jacobiana".

b)

$$\begin{cases} -3\left(10-x_1^2-x_2\right)^2(-2)\ x_1\ dx_1 - 3(10-x_1^2-x_2)^2(-1)\ dx_2 \leq 0 \\ -dx_1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g^1(2;6) = 0 \leq 0 \\ g^2(2;6) = dx_1 \geq 0 \end{cases}$$ *(Multiplicamos ambos términos por -1)*

Gráfico 5



Los vectores $v \in \Re^n$ que satisfacen la exigencia sobre el diferencial primero de la restricción con igualdad son del tipo $\left(dx_1, dx_2\right): dx_1 \geq 0$ No hay restricciones sobre dx_2.

Todos estos vectores *no* tienen una curva tangente a ellos enteramente contenida en la región factible.

Es claro que cualquier punto interior a la región factible que no cumpla con las condiciones de Kuhn-Tucker posiblemente no puede ser una solución óptima. Asimismo, un punto frontera que satisface la calificación de restricciones pero falla en las condiciones de Kuhn-Tucker se rechaza como solución óptima. Sin embargo, si un punto no cumple con las condiciones de Kuhn-Tucker, no se puede concluir *a priori* que no constituya la solución óptima. El cumplimiento de las condiciones de Kuhn-Tucker implica la optimalidad de la solución, sólo si se cumple la calificación de restricciones.

Cumplimiento de alguna de las calificaciones de restricciones	⇒	Condiciones de K-T son necesarias	⇒	Condiciones de K-T son propiedades del óptimo

4. CUASICÓNCAVA

Condición Suficiente (Def.): Si A es condición suficiente de B, entonces A no puede ocurrir sin B. Es decir, si A es verdadera B también lo es.

$<< A \Rightarrow B >>$ *A es condición suficiente de B*

Las condiciones de Kuhn-Tucker antes expuestas, cuando se satisfacen la calificación de restricciones son condiciones necesarias para la existencia de un extremo *local*. Si lo que se quiere es estudiar extremos globales se requieren condiciones más fuertes.

A continuación se mostrará, que bajo ciertas circunstancias, las condiciones de Kuhn-Tucker pueden tomarse como condiciones suficientes para un extremo global e incluso como condiciones necesarias y suficientes[2].

4.1 Programación cóncava: Teorema de suficiencia de Kuhn-Tucker

Considerando el problema de programación no lineal

$$Max \prod = f\left(x_1,..,x_n\right) \;\; s.a. \;\; \mathrm{g}^{\mathrm{j}}\left(x_1,...,x_n\right) \le c \;\; (j=1,2,...,m) \;\; \wedge \;\; x \ge 0$$
$$x \in \Re^n$$

[2] La expresión "condición de primer orden para la existencia de extremos" no es equivalente a "condición necesaria para la existencia de extremo". Tampoco "condición de segundo orden" es equivalente a "condición suficiente". La primeras (condición de primer y condición de segundo orden) son específicas del problema de optimización, mientras que "condición necesaria" y "condición suficiente" son propiedades lógicas. De hecho, las "condiciones deLegendre" en optimización dinámica son condiciones necesarias de segundo orden para la existencia del óptimo.

con m no acotado por el número de variables, donde la función objetivo y las restricciones son continuamente diferenciables, f es cóncava y las restricciones son convexas. Suponiendo que existen $\lambda_j \ (j=1,2,...,m)$ y un vector $x^* \in \Re^n$ tales que:

$$L^*_{x_i} \leq 0 \quad ; \quad x_i \geq 0 \quad ; \quad x_i L^*_{x_i} = 0 \quad (i=1,2,...,n)$$

$$L^*_{\lambda_j} = r_j - g^j(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0 \ ; \ \lambda_j \geq 0 \quad ; \quad \lambda_j L^*_{\lambda_j} = 0 \quad (j=1,2,...,m)$$

Entonces en el óptimo x^* la función se maximiza y constituye un máximo global. Es decir, **si f es cóncava, las restricciones son convexas y en x^* se cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker para máximo, entonces existe un máximo global en x^*. Para las condiciones de mínimo global basta con reemplazar "cóncava" por "convexa" para la f, "convexa" por "cóncava" para las restricciones y cambiar el sentido de las desigualdades de las condiciones marginales.**

4.2 Programación cuasicóncava: Teorema de suficiencia de Arrow-Enthoven

Considerando el problema de programación no-lineal

$$Max \prod = f\left(x_1,..,x_n\right) \ \ s.a. \ \ \mathrm{g}^{\mathrm{j}}\left(x_1,...,x_n\right) \leq c \ \ (j=1,2,...,m) \ \ \wedge \ \ x \geq 0 \ \ x \in \Re^n$$

donde la función objetivo y las restricciones son continuamente diferenciables.

Suponiendo que existen $\lambda_j \ (j=1,2,...,m)$ y un vector $x^* \in \Re^n$ tales que:

a) x^* es factible y se verifican:

b) $L_{x_i^*} \leq 0 \quad ; \quad x_i \geq 0 \quad ; \quad x_i L_{x_i^*} = 0 \quad (i=1,2,...,n)$

c) $L^*_{\lambda_j} = r_j - g^j(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0 \ ; \ \lambda_{\mathrm{j}} \geq 0 \ ; \ \lambda_{\mathrm{j}} L^*_{\lambda_j} = 0 \quad (j=1,2,...,m)$

d) $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ es cuasicóncava y $g^j(x_1, x_2, ..., x_n)$ es cuasiconvexa con $(j=1,2,...,m)$ en el ortante no-negativo.

e) Se satisface cualquiera de las siguientes:

i. $L^*_{x_i} < 0$ para al menos una variable x_i.

ii. $L^*_{x_i} > 0$ para alguna variable x_i que pueda tomar un valor positivo sin violar las restricciones.

iii. $\nabla f(x^*) \neq 0$ y la función es dos veces diferenciable en un entorno de x^*.

iv. $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ es cóncava.

Entonces en el óptimo x^* la función se maximiza y constituye un máximo global. Es decir, **si se verifica a), d) y e) en x^* y se cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker para máximo, entonces existe un máximo global en x^*. Para las condiciones de mínimo global basta con reemplazar "cuasicóncava" por "cuasiconvexa" para la f, "cuasiconvexa" por "cuasicóncava" para las restricciones y cambiar el sentido de las desigualdades de las condiciones marginales.**

La cuasiconcavidad no implica que las condiciones de Kuhn-Tucker sean suficientes para tener un máximo global al no ser lo suficientemente restrictivas. Por esto se exige el cumplimiento de la condición e). Nótese que las condiciones suficientes de Arrow-Enthoven implican las condiciones de suficiencia de Kuhn-Tucker, con lo cual las primeras son más generales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arrow, K. y Enthoven, A. (1964): *Quasi-concave programming.* Econometrica, Vol. 29, No 4, pp. 779-800.

Chiang, A. (1987): *Métodos fundamentales de economía matemática.* México DF, McGraw-Hill.

Intriligator, M. (1973): Optimización matemática y teoría macroeconómica. Madrid, Prentice Hall Internacional.

Simon C. & Blume, L. (1994): *Mathematical for Economists*. New York, W.W. Norton & Company, Inc.

Takayama, A. (1991): *Mathematical Economics*. New York, Cambridge University Press.

Yamane, T. (1981): Matemática para economistas. Barcelona, Ariel.

UNA APLICACIÓN A LAS CIENCIAS ECONÓMICAS

Viviana Cámara
María Laura Falco
Adriana Negri

INTRODUCCIÓN

El propósito de este trabajo es mostrar un problema que ofrecemos a nuestros alumnos para que puedan darle significado a los fundamentos teóricos del Cálculo Diferencial estudiados.

El mismo fue pensado luego de detectar las dificultades que tenían los alumnos para diferenciar e interpretar las variaciones que se producen en las magnitudes, tanto en el campo discreto como en el continuo.

Dado que la transferencia del aprendizaje no se produce en forma espontánea y que implica relacionar un área del conocimiento con otra, es nuestro propósito ayudar al alumno a que interrelacione nuevos conceptos tales como incremento, cociente incremental, derivada y diferencial con los propios de otros campos disciplinares.

La resolución del problema permite transferir los conceptos antes mencionados y darles un significado, no sólo desde el punto de vista geométrico, sino fundamentalmente económico.

1. FUNDAMENTACIÓN

Enmarcados en la postura epistemológica dada por los constructivistas, acordamos que un aprendizaje será significativo, cuando el alumno pueda tener la posibilidad de darle un significado al objeto que aprende. Es decir, "el nuevo aprendizaje debe ser funcional, integrable, potencialmente significativo e internamente coherente" (Santurjo & Vera, 1994, p. 33).

Consideramos entonces, que si nuestros alumnos logran darle un significado al objeto de aprendizaje, podrán modificarlo, enriquecerlo y establecer relaciones entre sus saberes previos y los nuevos, sean o no de la misma área de conocimiento, integrándolos y transfiriéndolos.

Como el objetivo de este trabajo es la transferencia de conceptos, pensamos en proponer una estrategia didáctica basada en la resolución de una situación problemática que tiende a desarrollar el pensamiento superior del alumno.

2. METODOLOGÍA

El problema que forma parte del presente trabajo surge de la necesidad de encontrar una metodología que le permitiera al alumno contextualizar y transferir conceptos teóricos a situaciones inherentes a su futuro desempeño profesional.

Para esto, se seleccionó una función sencilla, conocida por el alumno para que la misma función no sea un obstáculo, y que pudiera representar una situación económica. Se enunciaron una serie de ítems de tal manera que, secuencialmente, el alumno pudiera transferir los conceptos aprendidos a la economía. En cada ítem se trabajó especialmente la interpretación económica. Se resaltó el análisis numérico y gráfico, tanto desde el punto de vista geométrico como económico.

Finalmente, cabe destacar que una vez redactado el problema, se aplicó en una comisión de la cátedra de Análisis Matemático de la Facultad.

3. DESARROLLO DEL PROBLEMA

La empresa "Dulces Sabores" se dedica a la elaboración y comercialización de helados artesanales. Durante el verano, su función de utilidad es $y = -0{,}1\,x^2 + 13\,x - 120$, donde "y" representa las utilidades percibidas (en miles de pesos) y "x" la producción de helados (en miles de kilogramos).

A) Determinar en cuánto varían las utilidades cuando se producen y venden entre:

a) 25.000 y 45.000 kilogramos

b) 45.000 y 65.000 kilogramos

c) 50.000 y 70.000 kilogramos

d) 70.000 y 90.000 kilogramos

Establecer estas variaciones significa hallar en cuánto varía la función ante cambios cualesquiera en los valores de la variable independiente; a estos cambios los simbolizamos con $\Delta x = x2 - x1$ y $\Delta y = f(x2) - f(x1) = y2 - y1$, donde la letra griega delta Δ significa "cambio en".

Luego, dado que: f(25) = 142,5; f(45) = 262,5; f(50) = 280; f(65) = 302,5; f(70) = 300 y f(90) = 240 resulta, para cada una de las variaciones en los niveles de producción:

a) Δy = f(45) – f(25) = 262,5 – 142,5 = 120 (miles de pesos)

b) Δy = f(65) – f(45) = 302,5 – 262,5 = 40 (miles de pesos)

c) Δy = f(70) – f(50) = 300 – 280 = 20 (miles de pesos)

d) $\Delta y = f(90) - f(70) = 240 - 300 = -60$ (miles de pesos)

En los tres primeros casos, podemos observar que un aumento en las cantidades de helado fabricadas produce un aumento en las utilidades de \$120.000, \$ 40.000 y \$ 20.000, respectivamente, mientras que en el tercero las utilidades disminuyen en \$ 60.000.

B) Analizar, para cada una de las situaciones dadas en A) cómo varía la utilidad por cada 1.000 kilos de helados producidos y vendidos. Interpretar los resultados obtenidos.

En este caso, debemos comparar la variación producida en las utilidades con respecto a la variación en los niveles de producción. Lo hacemos mediante el cociente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Este cociente se denomina cociente incremental, en tanto relaciona las variaciones de ambas variables a través de un cociente. Esto mide la variación de una variable respecto de otra; da la razón de cambio promedio.

En nuestro caso:

a)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(45) - f(25)}{45 - 25} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6$$

miles de pesos por cada mil kilogramos

b)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(65) - f(45)}{65 - 45} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$$

miles de pesos por cada mil kilogramos

c)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(70) - f(50)}{70 - 50} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

miles de pesos por cada mil kilogramos

d)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(90) - f(70)}{90 - 70} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = -3$$

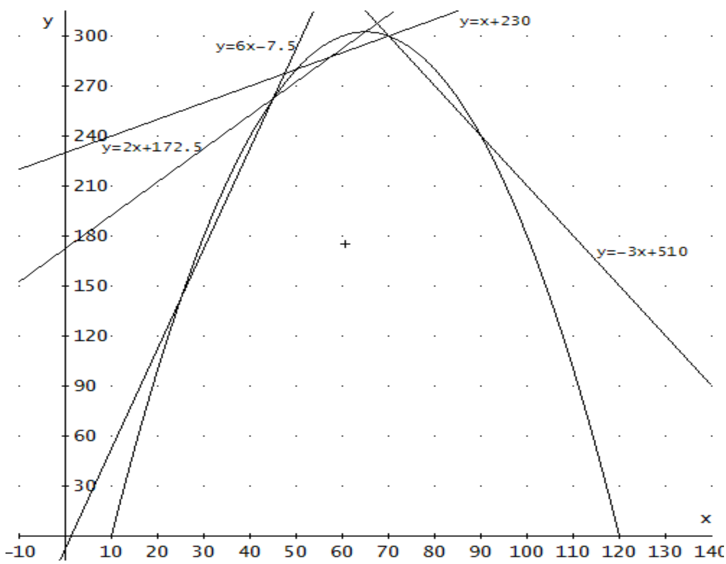
miles de pesos por cada mil kilogramos

Puede observarse que el incremento de la variable independiente es, en todos los casos igual a 20, mientras que el valor que asume el cociente incremental es distinto. Para las diferentes situaciones planteadas, algunos casos son positivos y otro, negativo.

Estos cocientes muestran, en promedio, el aumento o disminución de las utilidades para determinados cambios en los niveles de producción. Por ejemplo, el primero de ellos indica que, cuando la producción aumenta de 25.000 kilogramos a 45.000 kilogramos, los beneficios aumentan, en promedio, $ 6.000 por cada 1.000 kilogramos de helado y, el cuarto, que si se aumenta la producción en 20.000 kilogramos a partir de 70.000 kilos, las utilidades disminuyen, en promedio, en $3.000 por cada 1.000 kilos de helado producidos.

C) Representar gráficamente la función de utilidad y trazar las rectas secantes que corresponden a cada una de las situaciones dadas en A).

Gráfico 1



D) Desde el punto de vista geométrico, ¿qué relación existe entre los resultados del ítem B) y las gráficas del C)?.

Los resultados obtenidos en B) indican que cada uno de los cocientes $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

corresponde a la respectiva pendiente de la recta secante.

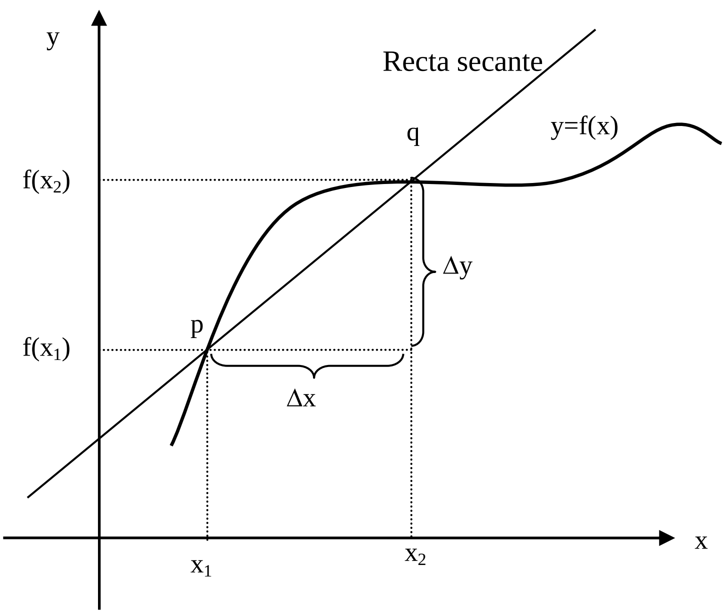
En general, si se considera una función y = f(x) continua en un cierto intervalo abierto I, que contiene a x1 y a x2 , con x1 ≠x2 y dos puntos, p (x1; f(x1)) y q(x2; f(x2)), y se traza la recta secante que pasa por p y q, como se muestra en la figura, resulta que su pendiente está dada por:

$$m_{pq} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Y, dado que x2 = x1 + Δx, la expresión anterior puede escribirse como:

$$m_{pq} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Gráfico 2



E) Determinar la rapidez del cambio de la utilidad cuando la producción aumenta en cantidades muy pequeñas a partir de x = 25; x = 45; x = 50; x = 65; x = 70 y x = 90. Interpretar geométrica y económicamente los resultados obtenidos.

Si la producción de helados aumenta en cantidades muy pequeñas, se debe estudiar el cambio de la función en las cercanías de cualquier nivel de producción; es decir, cuando $x_2 \to x_1$. En estas condiciones, es necesario analizar la razón de cambio promedio cuando $\Delta x \to 0$ (Es común que, en algunos textos en lugar de Δx se emplee la letra "h", con idéntico significado); resulta entonces:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[-0{,}1\left(x+\Delta x\right)^2 + 13\left(x+\Delta x\right) - 120\right] - \left(-0{,}1\,x^2 + 13\,x - 120\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-0{,}2\;x\;\Delta x - 0{,}1\left(\Delta x\right)^2 + 13\,\Delta x}{\Delta x}$$

$$= -0{,}2\;x + 13$$

Este límite da una expresión que permite determinar la razón de cambio instantánea en cualquier valor del dominio, denominada función derivada primera de la función y = f(x). Dado que ésta es una función de la variable independiente "x", su cuantía dependerá del nivel de producción que se considere. En símbolos:

$$f\,'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -0{,}2\;x + 13$$

Esta función derivada representa la utilidad marginal, en el contexto que estamos estudiando.

Para la empresa "Dulces Sabores", las correspondientes razones de cambio instantáneo o utilidades marginales son:

Tabla 1

x	25	45	50	65	70	90
f´(x)	8	4	3	0	-1	-5

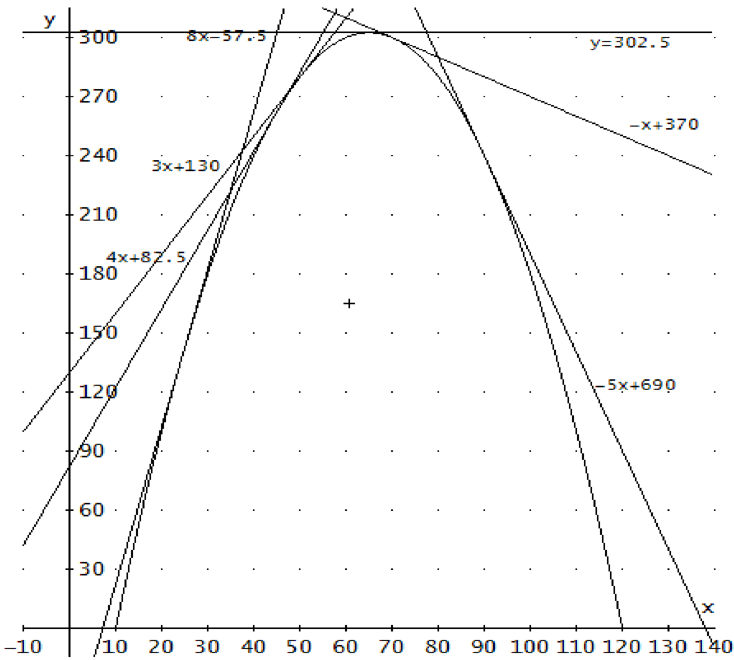
Estas razones pueden interpretarse desde dos puntos de vista:

Geométricamente, cada una de ellas corresponde a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto considerado.

Por ejemplo, la recta tangente a la gráfica de $y = -0{,}1\,x^2 + 13\,x - 120$ en el punto (25; 142,5) tiene pendiente igual a 8, en el punto (65; 302,5) es 0 y en el (70; 300), -1.

En el primer caso, la pendiente positiva indica que, en ese punto, la función f es creciente; en el segundo, que la función no crece ni decrece y en el tercero que es decreciente.

Gráfico 3



Físicamente, cada derivada expresa la velocidad, fuerza o intensidad a la que cambia la función ante cambios muy pequeños (infinitesimales) de la variable independiente.

En el punto (25; 142,5), el valor de la derivada es 8; esto significa que, cuando la producción de helados se incrementa en una cantidad muy pequeña a partir de los 25.000 kilogramos, la función de utilidad crece con una intensidad de $ 8.000

por cada 1.000 kilogramos adicionales del producto. Desde el punto de vista práctico, se dice que la función utilidad aumenta, aproximadamente, en $ 8.000 por cada 1.000 kilogramos adicionales fabricados y vendidos, cuando la producción se incrementa en una pequeña cantidad a partir de 25.000 kilogramos.

De la misma manera se interpretan los valores de las razones de cambio instantánea correspondientes a $x = 45$ y $x = 50$.

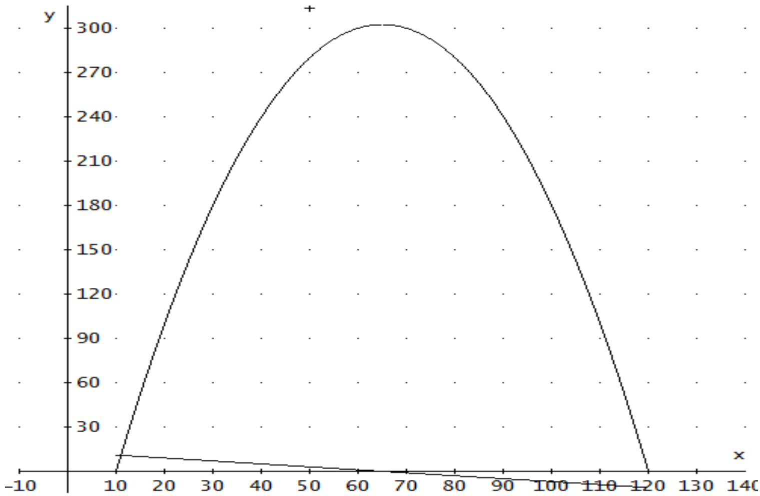
Además, puede observarse que en los tres casos arriba mencionados, la razón de cambio es positiva, pero decreciente, esto es: $f'(25) > f'(45) > f'(50) > 0$. Esto significa que la utilidad de la empresa crece a tasa decreciente, conforme aumenta el nivel de producción; es decir, la intensidad del crecimiento disminuye. También puede decirse que el aumento de las utilidades decrece a medida que aumentan las cantidades producidas y vendidas. ¿Será siempre así?

Observando la tabla puede verse que la razón de cambio instantánea en $x = 65$ es 0 y, para niveles de producción superiores a éste, menor que 0. Como en $x = 65$, $f'(65) = 0$, se dice que es un punto estacionario; es decir, la intensidad de cambio no varía.

Cuando la producción supera los 65.000 kilogramos, las razones de cambio instantáneas son negativas y decrecientes: $f'(70) > f'(90)$.

Para $x = 70$, $f'(70) = -1$. En términos económicos, significa que cuando la producción de helados se incrementa en una cantidad muy pequeña a partir de los 70.000 kilogramos, las utilidades decrecen con una intensidad de $ 1.000 por cada 1.000 kilogramos. Es decir, las utilidades disminuyen, aproximadamente, en $ 1.000 por cada 1.000 kilogramos adicionales fabricados, cuando la producción se incrementa en cantidades muy pequeñas a partir de 70.000 kilogramos. En este caso, la función de utilidad decrece a tasa creciente; esto es, la intensidad del decrecimiento aumenta. Puede decirse también que la disminución de las utilidades crece a medida que aumentan las cantidades elaboradas y comercializadas.

Gráfico 4



F) Analizar, para cada uno de los niveles de producción propuestos, con qué intensidad varían las utilidades por cada peso ganado.

En el punto E) se analizó el cambio en las utilidades debido a incrementos infinitesimales en las cantidades producidas; se estudiará ahora dicho cambio por unidad de moneda ganada: f´(x) / f(x). A este cociente se lo denomina tasa instantánea de variación relativa de f(x) y si se lo multiplica por 100, se obtiene la tasa instantánea de variación relativa porcentual.

Para la empresa "Dulces Sabores", estas tasas se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 2

x	25	45	50	65	70	90
f(x)	142,5	262,5	280	302,5	300	280
f´(x)	8	4	3	0	- 1	- 5
f´(x)/f(x)	0,05614	0,0152	0,0107	0	- 0,0033	- 0,0178
f´(x)/f(x) (en %)	5,614	1,524	1,071	0	- 0,33	- 1,78

Para un nivel de producción de 25.000 kilogramos, la tasa de variación relativa porcentual es igual a 5,614 %; esto significa que por cada 1.000 kilogramos adicionales de helado a partir de una producción de 25.000 kilos, las utilidades aumentan, aproximadamente, en un 5,614%. Si dicho nivel es de 65.000 kilogramos, las utilidades prácticamente no varían y para 90.000 kilogramos, las ganancias disminuyen aproximadamente en 1,786 % por cada 1.000 kilogramos adicionales de producto. (Recordar que los incrementos a partir de cualquiera de los niveles de producción deben ser muy pequeños).

En concordancia con los resultados obtenidos en los puntos antes analizados, puede observarse que a medida que aumenta la producción y hasta valores menores pero muy cercanos a los 65.000 kilogramos, las tasas instantáneas de variación relativa son positivas y decrecientes; es decir, las utilidades por cada 1.000 kilogramos crecen a tasa decreciente o bien, decrece la intensidad del crecimiento. Para 65.000 kilogramos, las utilidades marginales unitarias no varían y a partir de este valor decrecen a tasa creciente; esto es, aumenta la intensidad del decrecimiento.

Si se analiza la tasa instantánea de variación relativa porcentual puede decirse que, si es positiva, expresa el porcentaje en que aumentan las utilidades marginales por cada 1.000 kilogramos adicionales producidos, si es negativa, el porcentaje en que disminuyen y, si es igual a cero, la no variación de éstas.

G) Evaluar el cambio real y el cambio aproximado en las ganancias cuando "x" cambia de:

a) 25 a 26

b) 25 a 25,5

c) 25 a 25,1

d) 25 a 25,01

El cambio real que se produce en el valor de las utilidades se determina mediante el incremento Δy de la función, para cualquier incremento de la variable independiente, tal como se mostró en el punto A. El cambio aproximado en las ganancias en las cercanías de determinado nivel de producción, se evalúa a través del diferencial de la función: $dy = f'(x). \Delta x$ para pequeños incrementos de la variable independiente.

Partiendo de una producción de 25.000 kilogramos y para los distintos valores de Δx propuestos, dichos cambios son:

Tabla 3

Situación	Δx	Δy	dy	Δy - dy
a	1	7,9	8	- 0,1
b	0,5	3,975	4	- 0,025
c	0,1	0,799	0,8	- 0,001
d	0,01	0,07999	0,08	- 0,00001

Puede observarse que, a medida que Δx disminuye, la diferencia entre Δy ydy se hace cada vez más pequeña. ¿A qué se debe esta diferencia?

Como ya se estudió, para valores pequeños de Δx, la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto es aproximadamente igual a la pendiente de la recta secante (si ambas pendientes existen):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f\,'(x) \Rightarrow \Delta y \approx f\,'(x) \cdot \Delta x$$

Donde, si $\Delta x \to 0$, $f'(x)\,.\Delta x$ se define como la diferencial de y = f(x):

$dy = f'(x)\ .\ \Delta x \Rightarrow \Delta y \approx dy$

Además, para cada valor de Δx, el correspondiente de Δy – dy es menor que el de Δx; esto es, dy es una aproximación de Δy cuando Δx es pequeño.

La diferencia Δy – dy es el error que se comete al evaluar el cambio producido en una función ante una variación muy pequeña en la variable independiente, empleando la razón de cambio instantánea en lugar de la función dada. Para la función de utilidad de "Dulces Sabores" cuando se producen 1.000 kilogramos adicionales de helado a partir de una producción de 25.000 kilogramos , las utilidades aumentan, aproximadamente, en $ 8.000 (error, por exceso, de $ 100), mientras que si se elaboran 10 kilogramos más, las ganancias se incrementan en $ 80 (error, por exceso, de $ 0,01).

H) Determinar con qué rapidez cambia la utilidad marginal cuando la producción aumenta en cantidades muy pequeñas a partir de x = 25, x = 50, x = 65, x = 70 y x = 90. Interpretar geométrica y económicamente los resultados obtenidos.

Ya se ha estudiado que la derivada primera de una función mide la fuerza, velocidad o intensidad a la que cambia la función ante cambios muy pequeños de la variable independiente. Teniendo en cuenta que la derivada primera es también una función en la misma variable independiente, es posible derivarla, obteniendo "la derivada primera de la derivada primera de la función original"; esto es, la derivada segunda de ésta: $(f'(x))' = f''(x)$. Esta derivada segunda mide la rapidez de cambio de la rapidez de cambio; si $f''(x) > 0$, aumenta y si $f''(x) < 0$, disminuye.

En el contexto de la empresa "Dulces Sabores" y teniendo en cuenta que la función de utilidad marginal es $f'(x) = -0{,}2x + 13$, resulta:

$(f'(x))' = f''(x) = -0{,}2$

Desde el punto de vista geométrico, que la derivada segunda sea negativa en cierto intervalo, significa que la función es cóncava hacia abajo; esto es, las rectas tangentes a la gráfica de la función en cada uno de los puntos del intervalo están por debajo de dicha gráfica y estas rectas tendrán pendiente positiva, negativa o nula, según sea la función creciente, decreciente o haya un punto crítico o estacionario. En nuestro caso, como $f''(x) < 0$, la derivada primera es una función decreciente.

La interpretación económica se realiza teniendo en cuenta el punto de vista físico: que la derivada segunda de la función de utilidad sea constante y negativa para cualquier nivel de producción, significa que la función de utilidad marginal es decreciente. Esto es, la razón de cambio de la utilidad marginal decrece a tasa constante e igual a (- 0,2); es decir, la rapidez con la que varían las utilidades marginales disminuyen con velocidad constante.

4. CONCLUSIONES

Se observa que esta manera de abordar los conceptos matemáticos permitió: a) lograr mayor interés de los estudiantes, b) una participación más intensa de los alumnos, c) interpretar correctamente las magnitudes utilizadas d) dar sentido económico al concepto, e) obtener una actitud diferente de los alumnos.

Consideramos que como profesionales de la educación es pertinente abocarnos a la búsqueda de "nuevas maneras de enseñar", es decir, caminar en la búsqueda de metodologías "activas" donde el eje de la enseñanza sea el alumno logrando una participación comprometida y responsable de su propio aprendizaje.

Contextualizar y transferir el concepto teórico al campo de la economía le da sentido al mismo y lo prepara al estudiante para el entendimiento de los que deberá aprender, en el futuro, en otras áreas del conocimiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Budnick, F. (1990): *Matemáticas Aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales*. México, Mc Graw Hill.

Leithold, L. (1988): *Cálculo para Ciencias Administrativas, biológicas y sociales*. México, Oxford.

Weber, J. (1984): *Matemáticas para Administración y Economía*. México, Harla.

Arya, J.yLardner, R. (1992): *Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía*. México, Prentice Hall.

Tishman, S.,Perkins, D. yJay, E. (1994): *Un aula para pensar. Aprender y enseñar en una cultura de pensamiento*. Buenos Aires,Aique.

Sanjurjo, L. y Vera, M. (1994): *Aprendizaje significativo y enseñanza en los niveles medio y superior*. Rosario, Homo Sapiens Editores.

PROGRAMACIÓN NO LINEAL Y LA INCORPORACIÓN DE TICS EN LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO

Nora Mabel Lac Prugent
José Luis Pou

INTRODUCCIÓN

Este trabajo muestra la aplicación de herramientas matemáticas específicamente en el análisis económico; concretamente, la teoría de optimización y su relación con la selección de carteras de títulos o portfolios. Así pues, esta propuesta es fruto de la experiencia en el dictado de la asignatura Matemática IV, curso obligatorio en la carrera de Licenciatura en Economía de la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística (FCEyE) de la Universidad Nacional de Rosario, la cual aborda la enseñanza de la Matemática aplicada a la Economía.

La motivación del mismo se debe a la intención de mejorar progresivamente la enseñanza de la programación matemática, en especial la programación no lineal, en carreras en las cuales la Matemática cumple un rol instrumental.

Desde el año académico 1999, los docentes de la cátedra Matemática IV de la carrera de Licenciado en Economía de la FCEyE asumieron el desafío de formar a sus alumnos y al propio cuerpo docente en el uso de TICs y softwares relacionados. La actual infraestructura de esta casa de altos estudios permite actualizar la aplicación de herramientas matemáticas específicamente en el análisis económico.

La práctica se realiza en el Laboratorio de Informática de la FCEyE. Para el trabajo en aula con computadoras se dispone de valiosas herramientas:

- Cañón para la visualización de presentaciones y del escritorio del docente.
- Sistema de control remoto para el monitoreo.
- Aplicaciones (software) específicas y generales.
- Máquina virtual para compartir archivos.
- Alumnos y alumnas voluntarios.
- Comunidad virtual o grupo.

El sistema de control remoto consistente en la monitorización de aulas docentes se denomina “IntelligentTeaching and Learningwith Computers” (ITALC). Actualmente disponible, cuyos beneficios radican en tratarse de un software de uso libre en educación, siendo una herramienta didáctica y multiplataforma, encontrándose disponible tanto para Windows, Linux o ambos mezclados. Es un componente orientado a ayudar al docente en el desarrollo de clases, diseñado principalmente para utilizarse en prácticas en aulas equipadas con computadoras, teniendo las mismas conectadas en red. Existen muchos beneficios del control de un sistema desde una computadora remota, pero aplicado a la educación se destaca su función de monitoreo de aulas, lo que permite trabajar de forma ágil. Entre sus principales bondades podemos mencionar:

- Asistir remotamente.
- Supervisar remotamente.
- Controlar remotamente.
- Transferir remotamente información.
- Gestionar remotamente el aula.

La filosofía detrás de este esquema de control es la configuración de comunicación de computadoras alumno-cliente y profesor-servidor que utiliza la tecnología de redes. La interfaz, conexión entre dos ordenadores, utilizada permite un amplio espectro de intervención, desde una simple comunicación mediante un Chat hasta un acceso remoto completo, es decir, como si estuviera sentado en el ordenador del alumno, eliminando la necesidad de asistencia in situ, mejorando la ejecutoria general de la ayuda a distancia. Además la aplicación profesor brinda una interfaz gráfica de los usuarios, lo que permite al docente controlar la clase.

Hay que destacar que la aplicación del profesor sólo se encuentra disponible en su equipo. Al iniciar la aplicación intentará abrir una conexión con todos los equipos del aula. Los equipos apagados (o con algún problema de red) aparecerán como “equipo no disponible”.

Con tal fin este trabajo presenta un problema motivador vinculado con el conocimiento afín del alumno con la intención de introducir la lógica matemática como herramienta de análisis en las ciencias económicas.

La siguiente sección recuerda los aspectos teóricos de la programación no lineal, para abordar con posterioridad la específica para la aplicación económica: la programación cuadrática. La tercera parte desarrolla el ejercicio propuesto en la guía de prácticos que realizan los alumnos con la ayuda de soporte informático; permitiendo en la cuarta parte, una escueta evaluación preliminar de la experiencia. Finalmente, se presentan las consideraciones finales y las conclusiones.

1. MARCO TEÓRICO

1.1 Programación no lineal con restricciones

El problema general de programación no lineal restringido con todas las funciones dos veces diferenciables y al menos una de las mismas no lineal, puede definirse como:

Optimizar $z = f(x)$ donde: $f(x)$ la función objetivo

Sujeto a: $gi(x) \leq 0$ $i : 1,2, ..., m$

$gi(x) \geq 0$ $i: m+1, \ldots, p$ $gi(x)$las restricciones de desigualdad

$hi(x) = 0$ $i: p+1, \ldots, r$ $hi(x)$las restricciones de igualdad

$x\geq 0$ x el vector de variables de elección

Es sabido que no existe un algoritmo general para resolver modelos no lineales debido al comportamiento irregular de las funciones no lineales. Sin embargo, se han determinado condiciones que bajo ciertos requisitos se convierten en condiciones de primer orden o necesarias, e inclusive en condiciones necesarias y suficientes. Estas son las condiciones de Kuhn-Tucker, que se indicarán como condiciones de KT.

Para el caso general de n variables de elección y m restricciones, la función lagrangiana será:

$$F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum \mu_i [r_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n)]$$

Siendo las condiciones de KT las siguientes:

$\partial F / \partial xj \leq 0$ $xj \geq 0$ $xj\ (\partial F/\partial xj) = 0$

$\partial F / \partial \mu i \geq 0$ $\mu i \geq 0$ $\mu i\ (\partial F/\partial \mu i) = 0$ [Maximización]

$i: 1, 2, ..., m$ $j: 1, 2, ..., n$

$\partial F / \partial xj \geq 0$ $xj \geq 0$ $xj \partial F / \partial xj = 0$

$\partial F / \partial \mu i \leq 0$ $\mu i \geq 0$ $\mu i\ (\partial F/\partial \mu i) = 0$ [Minimización]

$i: 1, 2, ..., m$ $j: 1, 2, ..., n$

Verificándose cierta hipótesis sobre las restricciones, las condiciones de KT son condiciones necesarias para un máximo o mínimo local, respectivamente. Y dado que todo extremo global debe ser un extremo local, estas condiciones son asimismo condiciones necesarias para extremos globales, siempre que se cumpla con la cualificación de las restricciones desarrolladas a continuación.

1.3 Cualificación de las Restricciones

Existen ciertos requisitos sobre las restricciones de un programa no lineal para que las condiciones de KT sean condiciones necesarias para un óptimo. Estos requisitos tienen la intención de salvar irregularidades que pueden existir en la frontera de la región factible cuando las restricciones son no lineales.

Considerando un punto de frontera, $x^* \equiv (x1^*, x2^*,..., xn^*)$, que es candidato para una solución y el vector de diferenciales $dx \equiv (dx1, dx2,..., dxn)$ que indica el movimiento en una dirección específica a partir del punto de frontera x^*.

La cualificación de las restricciones establece dos condiciones para los vectores dx:

Si la j-ésima variable de elección tiene valor cero en el punto x^*, entonces

$dxj \geq 0 \qquad$ si $xj^* = 0$,

Si la i-ésima restricción se satisface como igualdad en el punto x^*, entonces para un problema de maximización:

$dgi(x^*) = (\partial g/\partial x1)\, dx1 + (\partial g/\partial x2)\, dx2 + ... + (\partial g/\partial xn)\, dxn \leq 0$

y para uno de minimización: $dgi(x^*) \geq 0$;

donde todas las derivadas parciales se calculan en x^*. Todo vector que satisfaga las condiciones anteriores es considerado un vector prueba. Finalmente si existe un arco diferenciable que procede del punto x^*, está enteramente contenido en la región factible y es tangente al vector prueba dado, se le denomina arco de cualificación para dicho vector.

Con ello la cualificación de las restricciones se satisface si para cualquier punto x^* sobre la frontera de la región factible existe un arco de cualificación para cada vector de prueba.

1.4 Programación cuadrática

La programación cuadrática considera el problema de optimizar una función objetivo cuadrática sujeta a restricciones lineales y a condiciones de no negatividad. Este tipo de programación suele ser muy importante en el estudio de la Economía dado que las formulaciones de programas cuadráticos surgen de manera natural en muchas aplicaciones.

Un modelo de programación cuadrática se define de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & f(\mathbf{x}) = \mathbf{cx} + \mathbf{x}^T\mathbf{D}\,\mathbf{x} \\ \text{Sujeto a:} & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

siendo: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$

$\mathbf{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)$

$\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)^T$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \\ a_{r1} a_{r2} \dots a_{rn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11}\, d_{12} \dots\ d_{1n} \\ d_{21}\, d_{22} \dots\ d_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \\ d_{n1}\, d_{n2} \dots\ d_{nn} \end{pmatrix}$$

Al cual se le pueden establecer ciertos requisitos para que las condiciones de KT sean condiciones necesarias y suficientes. Primero, se debe destacar que la linealidad de las restricciones garantiza que el espacio de soluciones sea un conjunto convexo.

Luego el problema queda reducido a determinar la concavidad o convexidad de la función objetivo f de acuerdo si el problema es de maximización o minimización, respectivamente.

A partir de la definición de gradiente se tiene que:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \nabla(\mathbf{cx} + \mathbf{x}^T\mathbf{D}\,\mathbf{x}) = \mathbf{c} + 2\mathbf{Dx}$$

Siendo la matriz hessiana**H** de $f(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{H} = \nabla^2 f(\mathbf{x}\ ) = \nabla(\mathbf{c} + 2\mathbf{D}\,\mathbf{x}) = 2\mathbf{D}$$

Con lo cual si la matriz D es definida positiva, H también lo será, en cuyo caso f resultará estrictamente convexa. De lo anterior se deduce que en un problema de minimización las condiciones KT son condiciones necesarias y suficientes si y sólo si la matriz D es definida positiva, lo que equivale a que los autovalores de dicha matriz sean todos positivos. Asimismo, si el problema es de maximización las condiciones de KT serán condiciones necesarias y suficientes si y sólo si la matriz D es definida negativa. Lo que es equivalente a que la f(x) es estrictamente cóncava, siendo los autovalores de la matriz D todos negativos.

2. LA EJERCITACIÓN PROPUESTA

Un inversor adverso al riesgo desea invertir en un portfolio compuesto por dos títulos A y B (siendo a y b las participaciones de cada activo dentro de la cartera). La matriz de variancia y covariancia asociada a estos activos es la siguiente:

$$V = \begin{pmatrix} 0{,}0081 & 0{,}02 \\ 0{,}02 & 0{,}0036 \end{pmatrix}$$

Asimismo, el inversor desea invertir todos los fondos y espera un rendimiento mínimo de la cartera del 3%, conociendo que los rendimientos esperados de los activos A y B son de 6% y 2%, respectivamente. Se le solicita:

Plantee el problema de programación no lineal con todas sus restricciones.

Obtenga la composición de portfolio que le recomendaría al inversor.

Grafique el problema planteado anteriormente.

Estime si se cumplen las condiciones de Kuhn – Tucker.

Determine si se satisface la cualificación de las restricciones.

Determine si las condiciones Kuhn–Tucker son necesarias y/o suficientes.

La resolución del problema motivador es la siguiente.

El planteamiento del problema es:

$$\text{Minimizar } \sigma(a,b) = 0{,}0081a^2 + 0{,}04ab + 0{,}0036b^2$$

$$\text{sujeto a:} \quad 0{,}06\,a + 0{,}02\,b \geq 0{,}03$$

$$a + b = 1$$

$$a\ ,\ b \geq 0$$

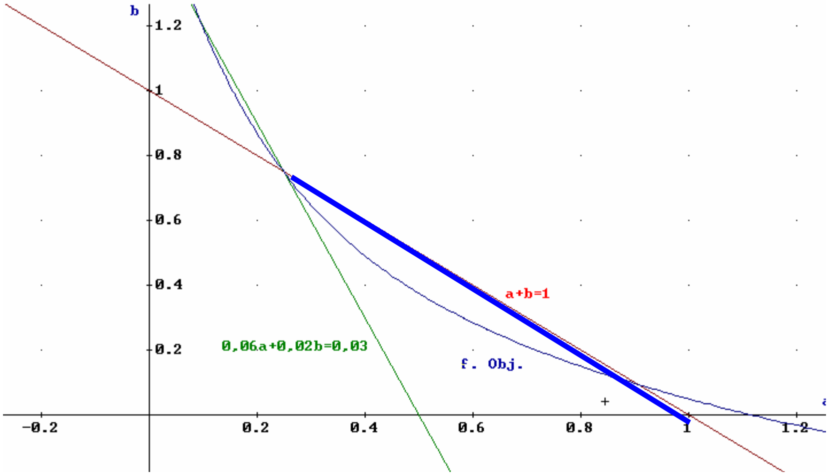
Para la solución del problema se utiliza la herramienta de Solver de la planilla de cálculo de Excel la cual indica que el mínimo riesgo implica invertir aproximadamente 25% de los fondos en el activo A y el 75% restante en el activo B, siendo $\sigma(a, b) \cong 0{,}01$. De donde, ($a^* = 0{,}25$; $b^* = 0{,}75$).

Tabla 1

Función Objetivo	
r = (0,09a)^2+0,04ab+(0,06b)^2	0,01003126
Variables	
a	0,2499995
b	0,7500015
Restricciones	
a + b = 1	1,000000
0,06a + 0,02b >= 0,03 a, b ≥ 0	0,03

Para realizar el gráfico se utilizó DERIVE for Windows. El mismo se muestra a continuación y presenta tanto las restricciones como la función objetivo evaluada en el punto mínimo. Para mantener la claridad se presentan las restricciones como igualdades y en el segmento de trazo más grueso, la región factible.

Gráfico 1



Para determinar si se cumplen las condiciones de KT se debe armar previamente la función lagrangiana para el problema de minimización, en este caso:

$$\text{Minimizar } \sigma(a,b) = 0{,}0081a2 + 0{,}04ab + 0{,}0036b2$$

$$\text{sujeto a: } 0{,}06\ a + 0{,}02\ b \geq 0{,}03$$

$$a \quad + \quad b \quad \geq \quad 1$$

$$-\ a \quad - \quad b \quad \geq -1$$

$$a \quad , \quad b \quad \geq \quad 0$$

De esta forma el lagrangiano es:

$L = 0{,}0081\ a2 + 0{,}04\ a\ b + 0{,}0036\ b2 + \mu1\ (1 - a - b) + \mu2\ (-1 + a + b) + \mu3\ (0{,}03 - 0{,}06\ a - 0{,}02\ b)$

Derivando respecto a las variables de elección (a y b) y los multiplicadores de Lagrange, y considerando el valor óptimo de las variables, se tiene:

$$\partial F / \partial a = 0{,}03405 - \mu1 + \mu2 - 0{,}06\ \mu3$$

$$\partial F / \partial b = 0{,}0154 - \mu1 + \mu2 - 0{,}02\ \mu3$$

$$\partial F / \partial \mu1 = 1 - a - b$$

$$\partial F / \partial \mu2 = -1 + a + b$$

$$\partial F / \partial \mu3 = 0{,}03 - 0{,}06\ a - 0{,}02\ b$$

Como ambas variables de elección son distintas de cero en el óptimo, entonces las dos primeras derivadas deben ser iguales a cero, con lo cual se obtiene por despejar en ambas ecuaciones el valor de $\mu 3$ y la relación entre $\mu 1$ y $\mu 2$:

$$\mu 3 = 0{,}46625$$

$$\mu 1 = 0{,}006075 + \mu 2$$

Como todas las restricciones se cumplen como igualdad, entonces todas las derivadas con respecto a los multiplicadores de Lagrange son iguales a cero, esto indica que los μi deben ser todos no negativos para que se cumplan las condiciones de KT. En este caso el valor de $\mu 3$ es positivo y dando cualquier valor positivo a $\mu 2$ se obtiene $\mu 1$ positivo. En conclusión, se satisfacen las condiciones de Kuhn – Tucker.

Para el análisis de la cualificación de las restricciones, se debe tener en cuenta cual es la región factible. En este caso, la misma comprende el segmento de la recta de la restricción a + b = 1 desde el punto óptimo (a* = 0,25; b* = 0,75) hasta el punto en que dicha recta corta el eje de las abscisas (a = 1; b = 0).

A partir de ello se deben hallar las restricciones sobre los diferenciales de las variables de elección para construir los vectores pruebas. En primer lugar, dado que ninguna de las variables es igual a cero en el óptimo, no se puede imponer que sus diferenciales sean no negativos. En cambio, como todas las restricciones se cumplen como igualdad, se deben realizar las siguientes tres diferenciaciones (recordar que dos de estas tres restricciones corresponden a una sola de las restricciones originales, que ha tenido que ser reexpresada para poder realizar el punto anterior y el presente):

$$da + db \geq 0$$

$$-da - db \geq 0$$

$$0{,}06\,da + 0{,}02db \geq 0$$

De las dos primeras se deduce que $db = -da$; de la tercera se obtiene que $db \geq -0{,}03\,da$.

A partir de ello, se puede comenzar a armar los vectores pruebas. Por ejemplo el vector (da; db) = (1; –1) si bien cumple con la primera relación hallada, no cumple con la segunda, con lo cual no es un vector prueba. De hecho ningún vector cuya componente db sea negativa es un vector prueba.

Sin embargo, el vector (–0,05; 0,05) es un vector prueba que posee un arco de cualificación. Asimismo, se pueden encontrar infinidad de vectores pruebas, poseyendo todos ellos un arco de cualificación. Esto podría deducirse igualmente al considerar que todas las restricciones son lineales, con lo cual siempre se satisfacen la cualificación de las restricciones.

A partir de lo hallado en el punto anterior se puede afirmar que las condiciones de KT son condiciones necesarias.

Para conocer si dichas condiciones son además condiciones suficientes se debe determinar si el problema es un programa convexo. Para ello hay que verificar que tanto el espacio de soluciones como la función objetivo sean convexos, dado que es un problema de minimización.

Como todas las restricciones son lineales se puede afirmar que la región factible es un espacio convexo. Asimismo, para corroborar si la función objetivo es convexa se puede analizar los menores principales o los autovalores de la matriz de variancias y covariancias. Los resultados expuestos a continuación se hallaron utilizando el programa DERIVE for Windows:

Menores principales: $v11 = 0{,}0081 > 0$

$|V| = -0{,}00037 < 0$

Autovalores (λ): $\lambda 1 = 0{,}0259761 > 0$

$\lambda 2 = -0{,}142761 < 0$

Entonces, la función objetivo no es cóncava ni convexa dado que tanto los autovalores como los menores principales muestran que la forma cuadrática asociada a la matriz V es indefinida; es decir, las condiciones KT no son suficientes.

3. EVALUACIÓN PRELIMINAR DE LA EXPERIENCIA

Desde el lugar del aprendizaje, en estos años se ha detectado en una etapa exploratoria, que:

- Los alumnos llegan al cursado de Matemática IV con conocimientos previos de computación, pero sin el manejo de un software matemático específico,

- Las dificultades del trabajo en laboratorio son leves y razonables,

- El interés, la dinámica o el estímulo que produce el trabajo en laboratorio es altamente satisfactorio. La mayoría de los entrevistados manifiesta que la tarea resultó interesante,

- Los alumnos priorizan la importancia de la rapidez en el cálculo de inversas de matrices, autovalores, autovectores y diagonalización de matrices, por ejemplo. Manifiestan que una vez incorporada la teoría se pueden reafirmar y profundizar los conceptos,

- Por último, el alumno hace una muy buena valoración en cuanto a la utilidad de la herramienta computacional en el proceso del aprendizaje no sólo para esta asignatura sino en vista a futuras materias de la curricula.

Desde el lugar de la enseñanza, se puede argumentar que la herramienta computacional constituye un verdadero aliado del profesor como facilitador del proceso pedagógico.

4. CONCLUSIONES

El presente trabajo surge como una propuesta alternativa a los métodos tradicionales de enseñanza de la Matemática, especialmente apropiado para carreras que utilizan la matemática como herramienta. La intención del mismo es presentar uno de los innumerables casos en que la teoría matemática sirve como instrumento para la resolución de problemas de Economía aplicada.

Con tal propósito, se ha intentado exhibir una metodología apropiada para las materias de Matemáticas en las carreras de Ciencias Económicas (Economía, Administración de Empresas, etc.), la cual hace hincapié en la profunda interrelación entre la Matemática y las teorías económicas que se imparten en dichas carreras.

Es así como la sinergia entre los contenidos (qué queremos que aprendan los estudiantes) y la tecnología (equipamiento informático utilizado) contribuye a mejorar la pedagogía (cómo ayudar a aprender), permitiendo a los alumnos una capacitación acorde a los requerimientos de la sociedad actual.

El dictado de clase en el aula informática y el uso de las TICs poseen una singular magia que estimula la motivación de los alumnos, brinda baterías inagotables a los docentes, y contribuye a un aprendizaje ejemplar, trabajo en equipo, enseñanza basada en las preguntas y no en respuestas, estimulando el rol activo del alumno en clases.

Finalmente, se debe destacar que por la experiencia en el aula se puede concluir que los alumnos que han participado activamente en el proceso de aprendizaje, relacionando los conceptos matemáticos con los económicos y utilizando un software que permita desviar la atención de la resolución hacia el análisis del problema, han presentado un mayor interés en los temas matemáticos y han profundizado los mismos con la finalidad de resolver problemas económicos más complejos relacionados con el problema motivador propuesto inicialmente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Chiang, A. C. (1996): Métodos *Fundamentales de Economía Matemática*. New York, McGraw Hill.

Hadley, G. (1969): *Álgebra Lineal/ Linear Álgebra*. México, Fondo Educativo Interamericano.

Ross, S. A., Westerfield R. W. y Jaffe, J. F. (1997): *Finanzas Corporativas*. New York, McGraw Hill.

Wiston, W. (1994): *Investigación de Operaciones*. New York, McGraw Hill.

UNA EXPERIENCIA ENRIQUECEDORA PARA COMPARTIR

María Magdalena Mas
María Cecilia Municoy

INTRODUCCIÓN

Considerando la importancia que tiene en la actualidad el tema de Optimización Global, lo necesario que es para la actividad de cualquier profesional, y en particular para los que se forman en nuestra facultad, dado que si tenemos en cuenta los perfiles de los profesionales que estamos formando: "… al Contador Público Nacional se lo define como un "profesional de la organización", que debe estar preparado y formado para el momento de la toma de decisiones, para la resolución de problemas y para la optimización de los recursos con mentalidad estratégica…". En el caso del Licenciado en Administración de Empresas se apunta a "… prepararlo para planificar adecuadamente sus actividades, diseñar las estructuras que mejor se adecuen a la realidad y además ejercer eficazmente las funciones propias de la administración, procurando optimizar su desempeño sin perder de vista la función social…". Por cuanto el licenciado en Economía: " … Por otra parte, y ante la imposibilidad de cubrir todos los aspectos de formación profesional que puede alcanzar un graduado en esta carrera, se privilegia dotar al mismo de una fuerte formación básica, a los efectos de que, si el mismo lo desea, pueda prolongar sus estudios y especialización en otros centros más avanzados del país o del exterior, todo ello sin descuidar impartir los conocimientos aplicados necesarios para su eventual desempeño profesional con carácter inmediato a su egreso…".

Cabe destacar que no hay dentro del plan de estudios de las tres carreras una materia específica del tema.

Por todo lo expuesto nos pareció muy interesante proponer un seminario optativo como introductorio del tema de Optimización Global, ya que dicho tema es muy amplio, y además está en pleno desarrollo y profundización.

1. CARACTERÍSTICAS DEL SEMINARIO OPTATIVO

Los objetivos planteados fueron:

- Facilitar la comprensión temática en las nociones básicas de optimización global.

- Generar capacidades para el modelado de problemas en áreas de economía.

- Desarrollar habilidades para aplicar técnicas que combinan métodos de optimización.

El Programa original consistía en 4 unidades:

Unidad 1: Conceptos básicos de optimización Global

Unidad 2: Fundamentos de optimización no lineal

Unidad 3: Lenguaje de modelado basado en ecuaciones.

Unidad 4: Programación Matemática Lineal Entera

Consideramos que la universidad debe construir nuevos modos de comunicar el conocimiento científico, que supere la transmisión lineal de conceptos y procedimientos, al alumno se lo debe preparar para una realidad flexible, dinámica y en constante cambio. Por lo que queríamos en definitiva que los alumnos logren una visión de la cuestión, de tal manera que en el futuro, cuando necesiten aplicar el tema en su actividad profesional, tengan los conocimientos básicos para poder profundizarlos de forma autónoma.

Conforme al reglamento de seminarios, el mismo tuvo una duración de un cuatrimestre y una carga horaria de 70 horas, de las cuales la mitad se destinó a sesiones de seminario y el resto a la realización de trabajos prácticos en forma independiente por parte de los alumnos, con supervisión del docente. Para cumplimentar lo mencionado anteriormente se realizó una reunión semanal durante 14 semanas.

La metodología que aplicamos consistía en: lectura previa a las clases, ya que los alumnos disponían del material con anticipación, esto generaba una comunicación más fluida con los estudiantes. Cada clase comenzaba con preguntas o dudas por parte de los estudiantes. Luego se desarrollaba el tema que estaba planificado.

Trabajamos permanentemente con el Entorno Virtual de la Universidad Nacional del Litoral, subimos al entorno todo el material teórico y las guías de Trabajo Práctico. Además los alumnos podían realizar sus consultas a través del foro del entorno.

Además se propusieron guías de trabajos prácticos que fueron resueltas algunas en clase, y otras por los alumnos en forma individual o grupal para entregar al docente.

La evaluación y promoción consistía en:

- 80% de asistencia a clases.

- Aprobar al menos dos trabajos prácticos de un total de cuatro.

- Aprobar un examen escrito individual globalizador al final del cursado, teórico práctico, de tres horas de duración.

2. MARCO TEÓRICO

La formación basada en competencias constituye una propuesta que parte del aprendizaje significativo y se orienta a la formación humana integral; integra la teoría con la práctica en las diversas actividades; promueve la continuidad entre todos los niveles educativos; fomenta la construcción del aprendizaje autónomo; busca el desarrollo del espíritu emprendedor y fundamenta la organización curricular con base en proyectos y problemas.

En nuestro proyecto asumimos la definición de Sobrado Fernández (2005) que expresa que "la Competencia Profesional suele interpretarse como el dominio de un conjunto de saberes, capacidades, actitudes y habilidades, para realizar con efectividad ciertas acciones que pertenecen a un determinado campo ocupacional.

En la mayoría de los casos, la docencia sigue anclada en la enseñanza magistral o expositiva dentro de un contexto presencial, con escasa articulación a las Nuevas Tecnologías de la información y la Comunicación, por ello nos interesamos en mostrar cómo implementar el proceso de docencia estratégica teniendo como base el enfoque de las competencias, el proceso de desempeño idóneo y la autorreflexión.

El proceso de desempeño idóneo requiere de la integración del saber ser con el saber conocer y el saber hacer y tiene especial importancia el concepto de docencia estratégica.

La docencia estratégica consiste en la comprensión y regulación que los docentes realizan del proceso aprendizaje-enseñanza, con el fin de formar determinadas competencias en sus estudiantes y, al mismo tiempo, construir y afianzar sus propias competencias como profesionales de la pedagogía, teniendo como guía la formación humana integral, la transdisciplinariedad, la apertura mental, la flexibilidad, las demandas sociales y económicas, y el entretejido del saber mediante la continua reflexión sobre la práctica (Schon, 1992, 1998).

La puesta en marcha de la formación basada en competencias está logrando que en la evaluación tradicional ya no se de tanta importancia a conocimientos específicos y factuales (referidos a hechos) y sí se ponga atención en desempeños contextualizados a un determinado entorno. Es así que Tobón Tobón propone el concepto de valoración para resaltar el carácter apreciativo de la evaluación y enfatizar en que es ante todo un procedimiento para generar valor (reconocimiento) a lo que las personas aprenden, basado en la complejidad, puesto que tiene en cuenta las múltiples dimensiones y relaciones entre estudiantes, empresas y docentes. La valoración, aunque constituye un juicio de valor, se regula en base a una serie de criterios previamente acordados con los estudiantes.

La valoración de las competencias requiere de tres procesos interdependientes: autovaloración, covaloración y heterovaloración.

Tobón Tobón define la autovaloración como el proceso por medio del cual la propia persona valora la formación de sus competencias con referencia a los propósitos de formación, los criterios de desempeño, los saberes esenciales y las evidencias requeridas. La covaloración, consiste en una estrategia por medio de la cual los estudiantes valoran entre sí sus competencias de acuerdo con criterios previamente definidos. De esta manera, un estudiante recibe retroalimentación de sus pares con respecto a su aprendizaje y desempeño. Por último la heterovaloración, según el mismo autor, consiste en la valoración que hace una persona de las competencias de otra, teniendo en cuenta los logros y los aspectos por mejorar de acuerdo con parámetros previamente acordados. El acto de valoración de las competencias es ante todo un proceso de comprensión, el cual, desde la complejidad, implica para el docente ser parte de éste, involucrarse, colocarse en el lugar del estudiante sin perder el propio lugar como profesional. Valorar implica respeto a la diferencia, discrecionalidad y confidencialidad en la información.

3. DOCENCIA ESTRATÉGICA

La docencia estratégica consiste en la comprensión y regulación que los docentes realizan del proceso aprendizaje-enseñanza, con el fin de formar determinadas competencias en sus estudiantes y, al mismo tiempo, construir y afianzar sus propias competencias como profesionales de la pedagogía, teniendo como guía la formación humana integral, la transdisciplinariedad, la apertura mental, la flexibilidad, las demandas sociales y económicas, y el entretejido del saber mediante la continua reflexión sobre la práctica (Schon, 1992, 1998).

Según Tobón Tobón, hay cuatro pasos fundamentales en la docencia estratégica: diagnóstico, planeación, valoración y monitoreo. El primero consiste en determinar necesidades de formación en los estudiantes, describir las competencias por formar, identificar quién va a llevar a cabo la formación, determinar para qué se va a llevar a cabo la formación y reconocer los aprendizajes previos que poseen los estudiantes.” El segundo, consiste en diseñar estrategias didácticas acordes a las competencias por formar, definir los instrumentos por enseñar en cada saber, determinar las estrategias de aprendizaje por formar en los estudiantes y elaborar el cronograma con los recursos necesarios. El tercero se basa en analizar los logros obtenidos en los estudiantes en base a las evidencias y criterios, determinar la disposición del docente y de los estudiantes hacia el aprendizaje y a la enseñanza, establecer la pertinencia de las actividades y tareas, y valorar las fortalezas y el impacto de las estrategias docentes empleadas. El cuarto prevé revisar de manera continua la ejecución de las estrategias docentes, determinar si las actividades están siendo pertinentes a los objetivos y realizar modificaciones en ellas cuando sea necesario, y establecer si los estudiantes están aprendiendo.

En virtud de lo expuesto anteriormente, respecto de las necesidades y para qué se va a llevar a cabo la formación, entendemos que la universidad debe construir nuevos modos de comunicar el conocimiento científico, que supere la transmisión lineal de conceptos y procedimientos, al estudiante se lo debe preparar para una realidad flexible, dinámica y en constante cambio. Por lo que queríamos, en definitiva, que los alumnos lograran una visión del tema en cuestión, de tal manera que en el futuro, cuando necesiten aplicarlo en su actividad profesional, posean los conocimientos básicos para poder profundizarlos de forma autónoma.

Además, de las 23 competencias matemáticas específicas según Tuning América Latina, nos pareció que podíamos colaborar en la formación de las siguientes competencias:

- Dominio de los conceptos básicos de la matemática superior.
- Capacidad para construir y desarrollar argumentaciones lógicas con una identificación clara de hipótesis y conclusiones.
- Capacidad para expresarse correctamente utilizando el lenguaje de la matemática.
- Capacidad de abstracción, incluido el desarrollo lógico de teorías matemáticas y las relaciones entre ellas.
- Capacidad para formular problemas en lenguaje matemático, de forma tal que se faciliten su análisis y su solución.
- Capacidad para formular problemas de optimización y toma de decisiones e interpretar las soluciones en los contextos originales de los problemas.
- Capacidad para contribuir en la construcción de modelos matemáticos a partir de situaciones reales.
- Capacidad para utilizar las herramientas computacionales de cálculo numérico y simbólico para plantear y resolver problemas.
- Destreza en razonamientos cuantitativos.
- Capacidad para comprender problemas y abstraer lo esencial de ellos.
- Capacidad para extraer información cualitativa de datos cuantitativos.
- Disposición para enfrentarse a nuevos problemas en distintas áreas.
- Capacidad para trabajar con datos experimentales y contribuir a su análisis.

Con respecto a los conocimientos previos, nos encontramos con la siguiente realidad: los alumnos que se habían anotado en el seminario, en su mayoría, eran de la carrera de CPN, y a su vez ya habían transcurrido dos años del cursado y aprobación de las matemáticas requeridas para asistir al seminario, no habiendo realizado ninguna otra matemática desde entonces.

Lo mencionado en el párrafo anterior hizo que la mayoría de los alumnos no se acordaran de los conceptos básicos de, por un lado Matemática Básica, como ser operaciones entre matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones, programación lineal; y por otro lado de Análisis matemático, como ser diferencial, máximos, mínimos, reglas de derivación, etc.

Otro inconveniente que surgió fue que los alumnos nunca habían visto el tema Vectores específicamente, por lo tanto no disponían del concepto de dependencia e independencia lineal, el cual es fundamental en todo el tema de Optimización. Además, pudimos observar que los alumnos no manejaban de manera fluida el lenguaje simbólico.

Con respecto al material de estudio, observamos que persisten las dificultades que los estudiantes universitarios de los primeros años en general, tienen para entender lo que leen de los textos académicos, ya que éstos suelen ser derivados de textos científicos. Esto se debe a que se enfrentan con textos que no están dirigidos a ellos sino a los académicos, o bien si están dirigidos a ellos, no desarrollan todo lo que contienen, dan por supuestos muchos saberes que los alumnos no disponen.

Otro obstáculo que tuvimos con el material es que la mayoría de la bibliografía se encuentra en inglés, pero nuestros alumnos, en su gran mayoría, no están preparados para ese tipo de textos.

Atendiendo al segundo paso fundamental en la docencia estratégica mencionado anteriormente, Planeación, cuando realizamos la planificación del seminario optativo, no teníamos precisión en cuanto a las características de los alumnos que se iban a inscribir, tuvimos el prejuicio de pensar que la mayoría iban a ser estudiantes de la Licenciatura de Economía, por el perfil del alumno. Tampoco sabíamos en qué año de la carrera se encontraban, solo teníamos como dato que podían ser alumnos con los dos primeros años terminados.

Por todo esto hicimos una planificación muy ambiciosa, pues pensamos que los alumnos iban a ser más autónomos en su aprendizaje y que estaban preparados para abordar la temática del seminario.

Los dos últimos pasos propuestos por Tobón Tobón, Valoración y Monitoreo, los fuimos realizando conjuntamente.

La disposición de los alumnos para el aprendizaje fue muy buena, se sentían motivados y el tema les resultaba interesante. Pudimos observar que las tareas dadas al comienzo del seminario (como por ejemplo: leer bibliografía en Inglés, leer el tema Vectores de un determinado texto, realizar algunos ejercicios solos, etc.) no eran adecuadas para el nivel de los alumnos con que estábamos trabajando, por lo que rápidamente realizamos las modificaciones necesarias para lograr que los estudiantes se involucren con el aprendizaje.

Las modificaciones que realizamos estaban orientadas fundamentalmente para lograr un aprendizaje inclusivo, es decir "poder compartir con los alumnos la cultura académica" como lo plantea la Dra. Paula Carlino. Por lo cual tuvimos que traducir el material, y hacer una lectura comprensiva del mismo en cada clase.

Para solucionar el problema del olvido del manejo algebraico, resolución de sistemas de ecuaciones, operaciones entre matrices, y entre otros, las reglas de derivación, implementamos las clases en el taller de informática haciendo uso del software DERIVE, ya que los alumnos no recordaban la parte del cálculo pero si el significado de los mismos.

Agregamos un material nuevo (con respecto a lo que teníamos planificado originalmente) con el tema de vectores, ya que era imprescindible, con esa carencia, para comprender los temas que continuaban.

Considerando la realidad con la que trabajamos y no con la que planificamos, no pudimos desarrollar la Unidad 4, pero les dejamos a los alumnos el material de dicha unidad para que lo lean solos. Tomamos la decisión de hacer esto porque priorizamos un aprendizaje real y consciente, y no puramente teórico. Además consideramos que ya les habíamos dado las herramientas necesarias para que fueran capaces de leer en forma autónoma la última unidad.

4. VALORACIÓN

Como ya definimos en el marco teórico, la valoración de las competencias requiere de tres procesos interdependientes: autovaloración, covaloración y heterovaloración.

En la etapa de la autovaloración, los alumnos se dieron cuenta de sus falencias con respecto a los saberes esenciales, por eso, en general, recurrieron a buscar material para recordar los saberes que necesitaban aplicar en esta nueva etapa. Esto sucedió cuando comenzaron a realizar las guías de ejercitación de la Unidad 1 (Conceptos básicos de optimización Global) y Unidad 2 (Fundamentos de optimización no lineal). Los alumnos utilizaron todas las herramientas que estaban a su alcance para poder realizar dichas guías. Tal es así que cuando tuvieron que realizar el Trabajo Práctico Nº 3, que se trataba de una integración de las Unidades 1 y 2, el cual se podía resolver en grupo y debían entregarlo en una determinada fecha, pues era parte de la promoción de la materia; la mayoría de los alumnos lo aprobó.

En la actividad de la Unidad 3 (Lenguaje de modelado basado en ecuaciones) solicitamos a los estudiantes que planteen tres modelos distintos de la vida real de tal manera que se aplique, en cada uno, un tipo diferente de restricciones de las que habíamos trabajado en clase: Restricciones de flujo, Restricciones simples de recursos, Restricciones de balance de material, Restricciones de Calidad, Restricciones Contables, Restricciones de Mezcla, Restricciones de diferentes modos y Restricciones suaves. Dicho trabajo podían realizarlo en forma individual o en grupos de no más de dos integrantes.

En la actividad mencionada en el párrafo anterior, los alumnos también realizaron su autovaloración, descubriendo su capacidad para formular problemas en lenguaje matemático y su capacidad para formular problemas de optimización (Competencias mencionadas según Tuning América Latina). Muy pocos alumnos tuvieron que rehacer dicho trabajo.

Con respecto a la covaloración, nosotras no creamos un espacio especial para ello. El motivo fundamental fue la falta de tiempo, ya que los encuentros eran una vez por semana y teníamos muchos conceptos nuevos para trabajar. Lo que no significa que a lo mejor se haya dado en forma particular cuando realizaban los trabajos en grupo, pero no lo podemos asegurar.

Por último la heterovaloración, la realizamos en forma paulatina y constante, a través de las sucesivas actividades que dimos durante el desarrollo de la materia y por medio de un "examen" final que se realizó en el gabinete de informática con todo el material teórico disponible. Allí observamos que la mayoría de los alumnos pudieron aplicar los nuevos conocimientos, fueron capaces de usar conocimientos en forma transversal, estaban motivados para hacer uso de los propios conocimientos para resolver la situación planteada y construir nuevos conocimientos.

5. CONCLUSIONES

Esta es nuestra primera experiencia docente basada en Competencias, fue un primer intento y la consideramos muy enriquecedora.

Como toda primera experiencia, permite, al mirar hacia atrás, visualizar las cuestiones que habría que modificar como así también lo que se debería rescatar para mejorar el seminario en caso de presentarse la posibilidad de darlo nuevamente.

El desarrollo del seminario nos permitió comprender cuán difícil y complejo, pero no imposible, es formar y evaluar competencias. Es claro que las competencias no se logran con el dictado de una materia optativa, por eso es tan importante que se implemente desde las currículas de las carreras. La educación basada en Competencias es un gran desafío que nos toca enfrentar a los docentes actuales y futuros, para lo cual deberíamos volver a formarnos desde esta postura.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Avanzini G. (1998): *La pedagogía hoy*. México, FCE.

Avriel M. (1976): *Nonlinear Programming: Analysis and Methods*. New Jersey, Prentice Hall.

Carlino P. (2003): *Leer textos científicos y académicos en la educación Superior: obstáculos y bienvenidas a una cultura nueva*. Buenos Aires. UniPluri/Versidad Vol. 3, Nº 2.

D'amore B., Diaz Godino J., Fandiño Pinilla M. (2008): *Competencias y matemática*. Bogotá, Magisterio.

Fernandez Pol J. (1980): *Lecciones de Programación no lineal*. Buenos Aires, Macchi.

Floudas C. (1995): *Nonlinear and Mixed-Integer Optimization Fundamentals and Applications.* New York, Oxford University Press.

Floudas C. (2000): *Deterministic Global Optimization. Theory, methods and applications*. Kluwer Academic Publischer.

Guéret C., Prins C., Sevaux M. (2000): *Applications of optimization with Xpress-MP*. Paris, Editions Eyrolles.

Gonzalez, M. C. Y Tourón, J. (1992): *Autoconcepto y rendimiento académico. Sus implicaciones en la motivación y en la autorregulación del aprendizaje*. Pamplona, Eunsa.

TonbónTonbón S. (2005): *Formación Basada en Competencias*. Colombia, Kimpres.
http://es.scribd.com/doc/36947238/AMP-Chapter-09-Integer-Prgramming

http://www.tuningal.org/

GUÍAS DE TRABAJO QUE FAVORECEN EL APRENDIZAJE

María Cecilia Municoy

INTRODUCCIÓN

Formo parte del equipo de investigadores que lleva a cabo el proyecto de investigación denominado "La evaluación de competencias en el debate de la valuación de los aprendizajes universitarios" el cual está inserto dentro del programa: "Problemáticas del desarrollo curricular en la FCE: diagnósticos y perspectivas para la mejora de la calidad" de la Universidad Nacional del Litoral.

En el marco de este proyecto nos encontramos frente a la necesidad de definir y analizar distintas competencias para luego poder evaluarlas. Entre otras, consideramos la competencia "Dominio de los conceptos básicos de Matemática para aplicar en Matemática para Economistas". El desarrollo y la adquisición de la misma se logran a partir de dos aspectos. El primero de ellos es que se vincula con determinadas competencias específicas, como ser:

- Capacidad para construir y desarrollar argumentaciones lógicas con una identificación clara de hipótesis y conclusiones.

- Capacidad para expresarse correctamente utilizando el lenguaje de la matemática.

- Capacidad para interpretar modelos matemáticos aplicados a economía.

- El segundo aspecto lo conforman los elementos a través de los que dicha competencia se genera, por ejemplo:

- La motivación, al plantear diversos ejemplos que den origen al concepto sometido a estudio, y al presentarlo en forma tanto intuitiva como formal.

- La participación activa del estudiante en todo momento del proceso educativo.

- Lecturas previamente orientadas que se relacionan con los temas de estudio.

- Suministro de materiales en los que se ejercite la comprensión, uso, manejo y aplicación de conceptos previos.

Si se pretende que los estudiantes desarrollen las competencias esperadas, lo cual implica una "mejora de la calidad educativa", se hace imprescindible generar un ambiente de aprendizaje donde los estudiantes se involucren y muestren disposición para aprender, para reconocer la importancia de razonar, analizar y argumentar con claridad defendiendo sus puntos de vista. El presente trabajo pretende mostrar una estrategia metodológica que intenta favorecer la generación de un ambiente propicio de aprendizaje.

1. LA IMPORTANCIA DE LAS GUÍAS DE TRABAJO

La propuesta enfatiza la significatividad, para el aprendizaje de la matemática, que revisten los materiales educativos, en particular las guías de trabajo y su relevancia según el encuadre pedagógico con el que se utilizan.

En este sentido, se considera que para garantizar un proceso de enseñanza y aprendizaje exitoso, el empleo de guías de trabajo debe diseñarse con criterio sistémico, entrelazando los múltiples factores que conforman el encuadre pedagógico que debe sustentar las prácticas de la enseñanza, tales como: concepciones psicológicas relativas a los procesos de enseñanza y aprendizaje, abordaje didáctico y materiales para la enseñanza seleccionados, entre otros.

Es pertinente destacar que se entiende por material para la enseñanza a "cualquier instrumento u objeto que pueda servir como recurso para que, mediante su manipulación, observación o lectura se ofrezcan oportunidades de aprender algo, o bien con su uso se intervenga en el desarrollo de alguna función de la enseñanza" (Gimeno, 1991). Solamente el uso de los mismos, puestos al servicio de un proceso de enseñanza aprendizaje y analizando desde una concepción determinada del mismo, permitirá entender si resultan útiles, estériles o, incluso, perjudiciales.

Los materiales para la enseñanza deben propiciar un papel significativo en la construcción de conocimientos y competencias. Es deseable que a partir de la incorporación y buen uso de las guías

de trabajo, los estudiantes puedan lograr, por ejemplo, una mejor interacción con los objetos de estudio, pues este sistema de trabajo exige del alumno una participación activa y a la vez resulta una propuesta atractiva, favoreciendo un cambio de actitud del mismo.

2. CONTEXTUALIZACIÓN

Las guías de trabajo se utilizan en la materia Matemática para Economistas, materia que forma parte del plan de estudio de la carrera de grado Licenciatura en Economía de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional del Litoral.

Por la idiosincrasia de la asignatura las clases tienen desarrollos teóricos y prácticos. Estas clases comprenden, por un lado, el desarrollo de los aspectos conceptuales de la asignatura, habilitando y orientando a la lectura previa de la bibliografía, y por otro, el desarrollo de ejercitación, trabajos prácticos y análisis de determinados problemas económicos.

Se proponen guías de trabajo, que son resueltas por los estudiantes con la orientación del docente y con el propósito de que el alumno sea protagonista de su propio proceso de aprendizaje.

En general las guías tienen una estructura en la que:

- En primer lugar, teniendo en cuenta el tema que se desarrollará a través de ellas, se dan respecto de ese tema, algunos conceptos o definiciones teóricas, mínimos.

- En base a las conceptualizaciones dadas, se proponen ejemplos, que de alguna manera ayuden a la comprensión.

- Luego a través de diferentes preguntas se orienta al estudiante para que logre obtener un modelo nuevo, relacionado con los conceptos dados, pero no presentado por el docente.

- Obtenido ese modelo, la guía continúa con la aplicación del mismo en diferentes actividades o situaciones problemáticas de distinta dificultad, en las que es necesaria la comprensión del nuevo modelo para transferirlo a situaciones nuevas y poder justificar los procedimientos empleados.

Las guías de trabajo se deben proponer en el momento adecuado. Por ejemplo, la que se expone en el anexo de esta propuesta se presenta cuando el alumno ya estudió ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes y está en condiciones de transferir esos conceptos aprendidos a la deducción de las fórmulas que le permitirán resolver ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden con coeficientes constantes. Los estudiantes realizan desarrollos teóricos sin padecerlos, no se limitan a copiar o repetir lo que transmite el docente, sino que deben construir por ellos mismos y ayudados por los conceptos previos el modelo teórico al que se pretende llegar completando la guía de trabajo. De esta manera el estudiante se involucra tanto con el aprendizaje que las clases le resultan dinámicas.

Cabe destacar que, además de las guías de trabajo, los alumnos resuelven trabajos prácticos basados en tareas de ejercitación sobre temas y procesos de resolución conocidos por los estudiantes. También se estimula el trabajo grupal tanto para la interpretación teórica como para la ejercitación práctica.

A modo de conclusión, considero que propiciar la participación activa de los estudiantes, en todo momento, es primordial para que se involucren en su propio aprendizaje. Además la propuesta didáctica hace que las clases se tornen dinámicas y favorece la comprensión, aplicación y análisis, por parte de los estudiantes, de ciertos temas específicos de la disciplina.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Chiang, A. (2006): *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*, México DF, McGraw-Hill Interamericana.

Bernardello A.B., Bianco M.J., Casparri M.T., García Fronti J.I., Olivera de Marzana S. (2010): *Matemática para economistas utilizando Excel y MATLAB*. Buenos Aires, OMICRON SYSTEM.

Gimenez, J., Santos, L., Da Ponte E, J., (2004): *La actividad matemática en el aula.* Barcelona, Graó.

Santos Guerra, M., (1995): *Evaluación de materiales didácticos*. Málaga, Aljibe.

Sydsaeter K., Hammond P., (1998): *Matemáticas para el análisis económico*. Madrid, Prentice Hall.

ESTABILIDAD EN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Carolina Vanesa Catoira

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo realiza un relevamiento de los aspectos principales asociados a la estabilidad de los sistemas dinámicos, centrándose fundamentalmente en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. El análisis de estabilidad involucra tanto la estabilidad a nivel local (estudio de los autovalores de aproximaciones lineales del sistema en el entorno del estado estacionario) como así también a nivel global (segundo método de Liapunov).

1. CONCEPTO DE ESTABILIDAD

El estudio de la estabilidad de un sistema dinámico consiste en determinar si pequeñas variaciones de los valores iniciales pueden cambiar mucho o generan un mínimo cambio de la solución con el transcurso del tiempo.

En términos generales, se dice que un sistema dinámico es *estable* si al perturbar levemente su estado de equilibrio dinámico (es decir, su solución), todos los movimientos posteriores permanecen cerca de éste. Si, además de ser estable, cualquier perturbación próxima al punto de equilibrio converge a él a medida que $t \to \infty$, se dice que es *asintóticamente estable*. Finalmente, si no se cumple ninguna de las situaciones antes mencionada, se está en presencia de un sistema *inestable*.

Formalmente, consideramos un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma: $y' = \mathrm{f}(y, t)$

donde y' es un vector de ecuaciones diferenciales no autónomo, es decir, que depende del tiempo (t). Su solución, en forma genérica, puede ser expresada como:

$$\mathrm{y}(t) = \phi(t; y_0; t_0)$$

donde y_0 y t_0 representan las condiciones iniciales (el estado de la variable y - y_0 - y el tiempo - t_0 - en el momento inicial).

Un estado de equilibrio y_e es estable si:

$$\mathrm{f}(y_e, t) = 0 \text{ para todo } t\text{, o bien, } \phi(t; y_e; t_0) = y_e \text{ para todo } t$$

1.1 Primer y segundo método de Liapunov

Para poder analizar la estabilidad en los sistemas generales de ecuaciones diferenciales, podemos encontrar dos métodos diferentes:

1) El método indirecto (conocido como el *primer método de Liapunov*), el cual consiste en el cálculo explícito de la solución para analizar su trayectoria a lo largo del tiempo (es decir, si converge o no al punto de equilibrio) y por lo tanto, su estabilidad.

2) El método directo (o bien, el segundo método de Liapunov), el cual no requiere el cálculo de la solución del sistema para establecer conclusiones de estabilidad, permitiendo un análisis en sentido global. Es fundamentalmente, un método cualitativo.

Muchas veces resolver un sistema de ecuaciones puede generar problemas para encontrar una solución, particularmente cuando no es lineal, por lo que el segundo método de Liapunov puede resultar muy útil si se verifican determinadas condiciones. Por otra parte, si bien es posible arribar a una solución de un sistema no lineal bajo el primer método (a través de una aproximación lineal al punto de equilibrio), el análisis de estabilidad resultante será exclusivamente local[1]. Más adelante se profundizará sobre este tema.

1.2 Estabilidad en el sentido de Liapunov

Se dice que un estado[2] de equilibrio y_e de un sistema dinámico es *estable en sentido de Liapunov* si, para cualquier escalar real positivo, existe un número real $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que, dada la desigualdad $\|y_0 - y_e\| \leq \delta$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\|\varphi(t; y_0; t_0) - y_e\| \leq \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$.

En otras palabras, se dice que un punto de equilibrio es *estable* en el sentido de Liapunov si, al perturbarse levemente su estado, todos sus movimientos posteriores se mantienen cerca de su posición de equilibrio.

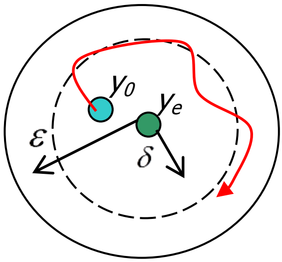
---

[1] Esto se debe a que al efectuar una aproximación lineal de un sistema no lineal, el análisis será realizado en un entorno lo suficientemente pequeño del punto de equilibrio.

[2] Recordemos que un sistema dinámico es un conjunto de elementos que interactúan entre sí y donde la evolución de sus estados se encuentra determinada por ecuaciones funcionales cuyo comportamiento depende del tiempo. El conjunto de estados presentes evoluciona a un conjunto de estados futuros, definiendo al sistema como dinámico. Una solución particular de una ecuación que no depende de la variable *t* se dice que es una solución de equilibrio y_e, o bien, un estado de equilibrio.

<u>Estabilidad:</u>Ejemplo de una sola variable

Gráfico 1



- $\|y_0 - y_e\| \leq \delta$ significa que el punto inicial y_0 se encuentra dentro o en el límite del círculo de radio δ centrado en y_e (es decir "arbitrariamente cerca").

- $\|\varphi(t;y_0;t_0) - y_e\| \leq \varepsilon$ refleja que los movimientos expresados por $\varphi(t;y_0;t_0)$ se mantienen dentro o sobre la frontera del círculo de radio ε con centro en y_e.

1.3 Estabilidad asintótica en el sentido de Liapunov

Un estado de equilibrio y_e es *estable en sentido asintótico*, si:

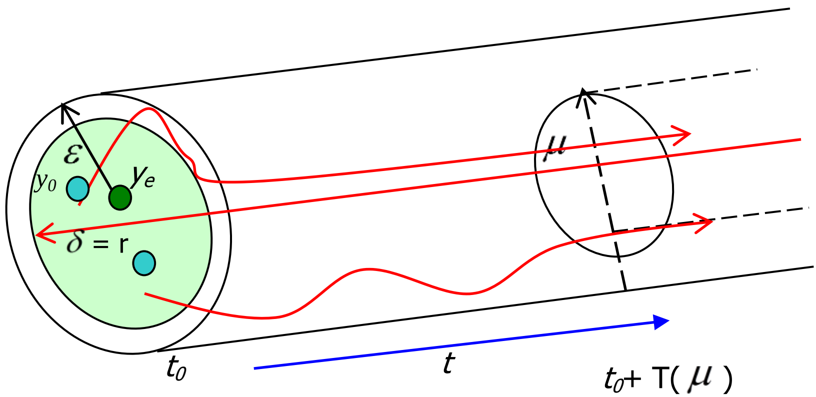
1) Es estable en sentido de Liapunov.

2) Si cualquier pequeña perturbación en las cercanías del punto de equilibrio termina por converger nuevamente a él a medida que $t \to \infty$. Es decir, si a cada número real $\mu > 0$ le corresponde un número real $\mathrm{T}(\mu, y_0, t_0) > 0$, tal que cuando $\|y_0 - y_e\| \leq r(t_0)$ con $r(t_0)$ constante real positiva se verifique:

$\|\varphi(t;y_0;t_0) - y_e\| \leq \mu$ para todo $\mathrm{t} \geq \mathrm{t}_0 + \mathrm{T}$, siendo $y_e \equiv \lim_{t\to\infty} \varphi(t;y_0;t_0)$

Estabilidad asintótica: *Ejemplo de una sola variable*

Gráfico 2



- La desigualdad $\left\| y_0 - y_e \right\| \leq r\left(t_0\right)$ define la circunferencia en el hiperplano $t_0 = t$.
- $\left\| \varphi\left(t; y_0; t_0\right) - y_e \right\| \leq \mu$ determina el cilindro de radio μ alrededor del eje t. Partiendo de cualquier punto y_0, las diferentes soluciones quedarán dentro del hipercilindro a partir del tiempo t_0+ T(μ), por más reducido que sea (cuyo tamaño dependerá del valor que adopte el parámetro μ).

En ambos casos, se trata de *estabilidad en sentido local*, dado que partimos de una perturbación cercana al equilibrio. En cambio, si la estabilidad es independiente de la distancia del estado inicial del punto de equilibrio, estamos en presencia de una *estabilidad (asintótica) en sentido global*.

Para ello, es necesario que:

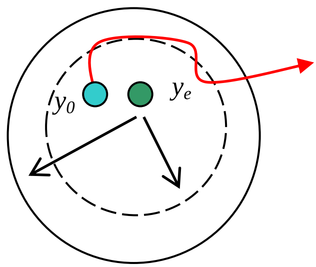
1) El estado de equilibrio sea estable
2) Cualquier perturbación converja a y_e para $\left\| y_0 - y_e \right\| \leq r$ cuando $t \to \infty$, siendo r una constante arbitrariamente alta.

1.4 Inestabilidad

Se dice que un *equilibrio es inestable* cuando, partiendo de un punto de equilibrio, cualquier perturbación producida lo aleja del mismo.

Ejemplo de una sola variable

Gráfico 3



2. PRIMER MÉTODO DE LIAPUNOV

2.1 Sistemas diferenciales lineales

Condiciones de estabilidad a través del análisis de las raíces del polinomio característico

Los sistemas autónomos lineales presentan características particulares que facilitan su estudio respecto del caso general. En este sentido, puede encontrarse la solución analítica de sus trayectorias y analizar el comportamiento asintótico.

Un sistema de ecuaciones diferenciales lineal y homogéneo puede definirse como un conjunto de ecuaciones simultáneas entre varias funciones incógnitas de una variable y sus respectivas derivadas sucesivas[3].

$$F_1\left(t,x',x'',\ldots,y',y'',\ldots\right)=0 \quad x=x(t);y=y(t)$$

$$F_2\left(t,x',x'',\ldots,y',y'',\ldots\right)=0 \quad x'=\frac{dx}{dt} \text{ y } y'=\frac{dy}{dt};x''=\frac{d^2x}{dt^2} \text{ y } y''=\frac{d^2y}{dt^2};$$

....

$$F_n\left(t,x',x'',\ldots,y',y'',\ldots\right)=0$$

donde las F_i son ecuaciones en las cuales las funciones desconocidas (*x(t) e y(t)*) se encuentran bajo el signo de derivada o diferencial.

[3] Aquí se reducirá el estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales al campo de la estabilidad. Sólo se señalarán algunos conceptos clave para poder comprender mejor el tema.

En forma matricial, dicho sistema se puede expresar de forma normal[4], es decir:

$$y' = A.y \quad \text{(I)}$$

Una solución puede ser expresada como $y = \alpha.e^{\lambda.t}$ donde $\alpha = \left[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n,\right]$ es un vector de constantes no nulo. Si reemplazamos en (I) el valor de y tendremos: $\lambda.\alpha.e^{\lambda.t} = A.\alpha.e^{\lambda.t}$

$$e^{\lambda.t}\left|A - \lambda I\right|.\alpha = 0 \quad \text{(II)}$$

Esta última ecuación solo tendrá solución no trivial para $\alpha \neq 0$ si y solo sí: $\left|A - \lambda I\right| = 0$

Resolviendo la ecuación característica de A en λ: $\left|A - \lambda I\right| = 0$ y hallando sus diferentes raíces (λ_i) podremos establecer conclusiones sobre el comportamiento del sistema:

1) Si todos los valores propios tienen parte real negativa, la estabilidad será asintótica.
2) Si los valores propios de la matriz tienen parte real negativa y aquellos con parte real nula tienen multiplicidad algebraica igual a 1[5], el equilibrio será estable.
3) Si al menos uno de los valores propios es positivo entonces el equilibrio será inestable.

Nótese que estas conclusiones pueden derivarse de la ecuación (II). Al ser α un vector no nulo y el determinante $\left|A - \lambda I\right|$ independiente de *t,* para que $\lim_{t\to\infty} e^{\lambda.t}\left|A - \lambda I\right|.\alpha = 0$ todos los valores propios (λ_i) tienen que tener parte real negativa. Si fueran positivos, con el transcurso del tiempo nos estaremos

---

[4] Vale aclarar que incluso si el sistema es lineal puede ocurrir que no pueda expresarse de esta forma. Para ello, siempre es posible formular este sistema por otro equivalente mediante operaciones elementales entre las diferentes ecuaciones y/o la definición de variables auxiliares. De esta manera, podría arribarse a otro sistema con la misma solución que el sistema inicial.

[5] La multiplicidad algebraica de un autovalor es el número de veces que aparece como raíz del determinante $\left|A - \lambda I\right| = 0$.

alejando de su solución y por lo tanto, el equilibrio será inestable: $\lim_{t\to\infty} e^{\lambda.t}\left|A-\lambda I\right|.\alpha=\infty$.

Al tratarse de un sistema lineal, en caso de existencia de estabilidad, esta será siempre **global.**

A medida que se incrementa el número de ecuaciones e incógnitas en los sistemas de ecuaciones diferenciales, encontrar el polinomio característico y hallar los valores propios resulta más laborioso. Para ello, se puede utilizar otro procedimiento para analizar la estabilidad: *Las condiciones modificadas de Routh-Hurwitz*[6].Estas resultan de desarrollar $\left|A-\lambda I\right|=0$ y obtener el polinomio característico correspondiente. Con él podemos aplicar las condiciones originales de *Routh-Hurwitz* (trabajando, en este caso, sobre los coeficientes de $\left|A-\lambda I\right|$).

Otro procedimiento para analizar la estabilidad consiste en trabajar directamente con los coeficientes de la matriz *A*, sin la necesidad de encontrar los valores propios del polinomio característico. Lo que se busca, en realidad, son condiciones para que éstos tengan la parte real negativa.

2.2 Condiciones de estabilidad para un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\boxed{X^{'}\left(t\right)=D\ X(t)=A_{nxn}X(t)\rightarrow\left(A-DI\right).X(t)=0}$$

- CONDICIÓN NECESARIA: Que la traza de A_{nxn} sea negativa:

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}<0$$

  En otras palabras, si los valores propios tienen parte real negativa, su suma es necesariamente negativa (las partes imaginarias se cancelan).[7]

- CONDICIÓN NECESARIA: Que el determinante de A tenga el mismo signo de $(-1)^n$

[6] Las condiciones Routh-Hurwitz fueron vistas para el análisis de estabilidad de ecuaciones diferenciales.

[7] Recordemos que, por propiedad, dos matrices semejantes tienen la misma traza (en este caso, A y una matriz diagonal, que tiene en su diagonal principal los valores propios resultantes de resolver la ecuación característica en λ de $\left|A-\lambda I\right|=0$).

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & .... & a_{33} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(-1)^n$$

Esta condición refleja que si los valores propios tienen parte real negativa entonces, su producto es necesariamente negativo (positivo) para n impar (par). [8]

- CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE: Si la matriz A es simétrica

$$\left(a_{ij}=a_{ji}\right)$$

que sea definida negativa. En este caso, la matriz A representa una forma cuadrática que al ser definida negativa, tiene todos sus valores propios reales y negativos.

$$a_{11}<0\ ;\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0\ ;\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}<0\ ;\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{23} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(-1)^n$$

Es decir, que los menores principales dominantes alternen signo comenzando por negativo.

- CONDICION NECESARIA Y SUFICIENTE: Si todos los elementos de A, que no pertenecen a la diagonal principal son no negativos, es condición necesaria y suficiente, que sus menores principales dominantes alternen de signo comenzando por el negativo.

  Aquí podemos aplicar el siguiente teorema para las matrices no negativas: *Dada una matriz $B\geq 0$, donde λ_B es la raíz dominante, es condición necesaria y suficiente para que un número real λ sea mayor a λ_B que todos los menores principales dominantes de la matriz $\lambda I-B$ sean definidos positivos.*

[8] El producto de los valores propios de la matriz A es igual a su determinante.

Entonces, supongamos que tenemos una matriz A donde los elementos que no pertenecen a la diagonal principal son no negativos. Sea λ un número real positivo tal que la matriz $B = A + \lambda I$ sea no negativa. Las raíces de la matriz B serán las

raíces de la matriz A sumado λ ($\lambda_i + \lambda$, siendo λ_i los valores propios de A) por lo que $\lambda_B = \lambda_A + \lambda$, siendo λ_A la raíz dominante de la matriz A.

Por lo tanto, $\lambda_B < \lambda$ si y solo si todas las raíces de A tienen parte real negativa.

Aplicando el teorema antes mencionado tenemos: $-A = \lambda I - B$ (*A* será definida negativa por lo que los menores principales dominantes alternarán de signo comenzado por el negativo).

- CONDICIÓN SUFICIENTE: Si la matriz A no es simétrica $\left(a_{ij} \neq a_{ji}\right)$, que la matriz $B = 1/2\left|A + A^T\right|$ tenga sus menores principales dominantes de signo alternado, comenzando por negativo.

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & 1/2\left(a_{12} + a_{21}\right) \ldots\ldots & 1/2\left(a_{1n} + a_{n1}\right) \\ 1/2\left(a_{21} + a_{12}\right) & a_{22} \quad \ldots\ldots & 1/2\left(a_{2n} + a_{n2}\right) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 1/2\left(a_{n1} + a_{1n}\right) & 1/2\left(a_{n2} + a_{2n}\right) \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

sea definida negativa.

Como se puede observar, la matriz *B* es una matriz simétrica, donde $b_{ij} = b_{ji} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) = \frac{1}{2}(a_{ji} + a_{ij})$. Dicha matriz representa la forma cuadrática asociada a la matriz no simétrica *A*. Al ser la matriz definida negativa *B* (y por lo tanto, tener todos los valores propios reales y negativos), la matriz *A* también lo será.

Esto se puede probar aplicando el segundo método de Liapunov (que se verá posteriormente):

Dado un sistema diferencial de la forma: $x^{'} = A.x$ y considerando la siguiente función de Liapunov $\frac{1}{2}.x^T.x$. Entonces, $d\left(\frac{1}{2}.x^T.x\right)\Big/dt < 0$ implica estabilidad.

Calculando:

$$d\left(\frac{1}{2}.x^T.x\right)\Big/dt = \frac{1}{2}\frac{dx^T}{dt}x + \frac{1}{2}x^T\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}x^T A^T x + \frac{1}{2}x^T Ax =$$

$$= x^T\frac{1}{2}\left(A^T + A\right)x < 0$$

- CONDICIÓN SUFICIENTE: Si todos los elementos de la diagonal principal de *A* son negativos, es condición suficiente que cada uno de estos resulte, en valor absoluto, mayor que la suma de los valores absolutos de todos los otros elementos que pertenecen a la misma fila o columna (es decir, si la matriz de coeficiente *A* tiene diagonal dominante).

$$a_{ii} < 0 \ ; \ \left|a_{ii}\right| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\left|a_{ij}\right|$$

Para demostrar esta condición, utilizaremos una propiedad de las matrices que asegura que toda matriz con diagonal cuasi-dominante[9] es no-singular. Sea $A - \lambda I$, puesto que $a_{ii} < 0$, si λ tiene parte real no negativa, entonces $\left|a_{ii} - \lambda\right| \geq \left|a_{ii}\right|$ para todo i. Estas desigualdades implican que $A - \lambda I$ tiene diagonal cuasi-dominante, por lo tanto es no singular. Por ende, λ no puede ser valor propio de *A*.

En el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales de orden superior, las mencionadas condiciones se pueden aplicar realizando una transformación del sistema original, llevándolo a uno de primer orden. Para ello, se puede crear variables artificiales de la forma:

$$y^{'} \equiv Z(t) \ ; \ y^{''} \equiv U(t); \text{ y así sucesivamente}$$

[9] Una matriz tiene diagonal cuasi-dominante si todos los elementos de la diagonal principal son negativos y cada uno de ellos no supera en valor absoluto la suma de los valores absolutos de los restantes elementos de la misma línea (fila o columna).

Asegurándose, de esta manera, que quede expresado de manera normal (caso contrario, habría que triangular el sistema para llevarlo a un sistema normal equivalente, es decir, que posea la misma solución).

2.3 Estabilidad local: Aproximación lineal de sistemas dinámicos generales

Como anteriormente se ha señalado, el estudio de la estabilidad a través del primer método de Liapunov (o método indirecto) permite alcanzar soluciones de estabilidad en sentido local, a excepción del análisis de sistemas lineales con coeficientes constantes, cuya solución estable es global.

Asimismo, encontrar una solución en un sistema no lineal de forma cuantitativa no siempre resulta fácil (incluso a menudo es imposible). En muchos estudios y aplicaciones económicas, se asume una forma funcional precisa (como la conocida función Cobb-Douglas), dando lugar a una clase particular de ecuaciones diferenciales para hallar su solución. Sin embargo, generalmente no conocemos la forma de la función F(y,t), pero sí algunas de sus propiedades como los signos de las derivadas parciales. Así, podremos establecer conclusiones sobre la estabilidad del equilibrio del sistema como por ejemplo a través de un análisis gráfico-cualitativo[10].

Otra técnica cualitativa para el estudio de sistemas dinámicos generales no lineales, es el método de aproximación lineal, permitiendo conclusiones de estabilidad exclusivamente locales. En este sentido, el procedimiento habitual consiste en linealizar el sistema a través de la serie de Taylor sobre la solución de equilibrio y abandonar todos los términos de orden superior. Esto es, básicamente, reducirlo a aplicar el primer método sobre una aproximación lineal del sistema en un entorno del estado de equilibrio.

En el punto de equilibrio, la aproximación lineal puede determinar con precisión el mismo equilibrio que el sistema no lineal original. En un entorno pequeño de aquél, este método proporcionará unas trayectorias con la misma configuración general que el sistema originario. Por lo tanto, mientras reduzcamos el análisis de estabilidad a las cercanías del punto de equilibrio, este método será concluyente. Por este motivo, esta técnica brinda un análisis del equilibrio únicamente en sentido local.

Volviendo al sistema de ecuaciones diferenciales general, no lineal, no autónomo: $y' = \mathrm{f}(y,t)$ (I)

siendo $y^*(t)$ la solución del sistema. Para analizar las propiedades del sistema, *en las cercanías de la solución*, introducimos las siguientes variables:

---

[10] Ver diagramas de fases.

$\overline{y}(t) = y(t) - y^*(t)$ (II) Representando el comportamiento del desvío de la solución.

donde $\overline{y}(t) = 0$, o bien, $y(t) = y^*(t)$, la solución nula o de equilibrio (*estado estacionario)*.

Mientras las variables $y_i(t)$ satisfacen (I), las nuevas variables $\overline{y}_i(t)$ satisfacen: $\overline{y}' = g(\overline{y}, t)$ (III)

donde $g(\overline{y}, t) \equiv f(\overline{y} + y^*, t) - f(y^*, t)$ (IV)

En el caso donde $y^*(t) = y_e(t)$, la ecuación anterior puede ser reducida a:

$g(\overline{y}, t) \equiv f(\overline{y} + y_e, t) - f(y_e, t)$ (V)

Expandiendo la ecuación (III) a través de la serie de Taylor sobre la solución nula, tendremos: $\overline{y}'(t) = A(t).\overline{y} + h(\overline{y}, t)$ (VI)

siendo *A(t)* la matriz Jacobiana de la función *g* valuada en $\overline{y}(t) = 0$ y $h(\overline{y}, t)$ el orden superior de la serie de Taylor.

Considerando solamente la parte lineal del sistema (VI):

$$\overline{y}'(t) = A(t).\overline{y}$$

este sistema resulta ser una buena aproximación del sistema original no lineal si:

$\left\| h\left(\overline{y}, t\right) \right\| / \left\| \overline{y} \right\| \to 0$ uniformemente[11] en t cuando $\|y\| \to 0$

2.4 Teorema de Poincaré-Lyapunov-Perron

Si el sistema linealizado en las cercanías del punto de equilibrio es asintóticamente estable (en forma autónoma) y es una buena aproximación del sistema no lineal original cerca de y_e, entonces el sistema no lineal es uniformemente asintóticamente estable en y_e.

[11] Cuando se hace mención a la convergencia uniforme, generalmente se refiere a la convergencia de funciones. La convergencia uniforme de funciones es una convergencia que se da para todo valor de la variable independiente. Es decir, en este caso, el cociente señalado converge a 0 para todo valor de *t*.

Algunas consideraciones a tener en cuenta:

- Si el sistema original no lineal es autónomo, entonces el sistema linealizado es una aproximación autónoma, siendo, además, la matriz A una matriz de constantes. En este sentido, si el sistema original es autónomo, la función *h* en el desarrollo de la serie de Taylor no depende de *t*, entonces el sistema linealizado es siempre una buena aproximación uniforme. Esto se debe a que, cuando h no depende exclusivamente del tiempo, el problema de la convergencia uniforme no aparece, dado que es independiente de *t* y se verifica que $\left\| h\left(\overline{y}\right) \right\| / \left\| \overline{y} \right\| \to 0$ cuando $\left\| y \right\| \to 0$, dado que $\left\| h\left(\overline{y}\right) \right\|$ representa a todos los términos de orden superior.
- La matriz A es independiente de *t* si el jacobiano del vector valuado en la función depende solo de las variables independientes.

Es importante resaltar que cuando el sistema no lineal no es autónomo hay que chequear cuidadosamente si las condiciones antes mencionadas se verifican.

Como vimos anteriormente, el comportamiento de un sistema lineal con coeficientes constantes, depende de los valores propios de la matriz de coeficientes del sistema. Para el caso de la linealización de sistemas diferenciales generales se puede llegar a conclusiones semejantes:

- Si las raíces de la matriz del sistema poseen parte real negativa, el equilibrio será asintóticamente estable en *sentido local*.
- Si al menos una de las raíces tiene parte real positiva, el equilibrio será inestable.
- Si las raíces tienen parte real ≤ 0 pero al menos una de ellas tiene parte real igual a 0, el proceso de linealización no brinda información sobre la estabilidad del equilibrio.
- Para el caso de un sistema con dos variables, si los autovalores de la matriz son distintos entre sí y distintos de cero se puede agregar a lo dicho anteriormente, lo siguiente:
    - Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, el punto de equilibrio es un nodo asintóticamente estable.
    - Si $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, el punto de equilibrio es un nodo asintóticamente inestable.
    - Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, el punto de equilibrio es un punto de silla.

♦ Si λ_1 es un número complejo con parte real negativa, entonces el punto de equilibrio es un foco asintóticamente estable.

♦ Si λ_1 es un número complejo con parte real positiva, entonces el punto de equilibrio es un foco inestable[12].

- A su vez, podemos analizar la estabilidad de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales con dos variables sin necesidad de encontrar sus raíces: observando el signo del determinante de la matriz Jacobiana del sistema y el signo de su traza:

Tabla 1

Caso	Signo de $\lvert J_E \rvert$	Signo de la traza de J_E	Equilibrio
$(tr\,J_E)^2 > 4\lvert J_E\rvert$	+ + -	- + +,0,-	Nodo estable Nodo intestable Punto de silla
$(tr\,J_E)^2 = 4\lvert J_E\rvert$	+ +	- +	Nodo estable Nodo inestable
$(tr\,J_E)^2 < 4\lvert J_E\rvert$	+ + +	- + 0	Foco estable Foco inestable Vértice

2.5 Dos casos prácticos

A continuación aplicaremos, a través de dos ejemplos, algunos de los conceptos vistos previamente.

2.5.1 Ejemplo 1

Determinar la estabilidad del punto crítico (0,0) para el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x' = -x - y - 2.x^2.y \\ y' = -2.x - 4.y + y.sen(x) \end{cases}$$

El sistema linealizado correspondiente resulta ser (al tomar únicamente parte lineal):

---

[12] La descripción de cada uno de los puntos de equilibrio se encuentra detallada en la sección Diagramas de fase.

$$\begin{cases} x' = -x - y \\ y' = -2.x - 4.y \end{cases}$$

donde la traza de la matriz Jacobiana del sistema resulta ser igual a -5 y el determinante igual a 2. Los valores propios del sistema resultan ser ambos negativos. Entonces se puede concluir que el punto (0,0) es, para el sistema no lineal, asintóticamente estable. También se puede concluir que se trata de un nodo estable.

2.5.2 Ejemplo 2

Hallar el punto de equilibrio y analizar su estabilidad:

$$\begin{cases} x' = x^2 - y \\ y' = 1 - y \end{cases}$$

Primero debemos buscar el punto estacionario donde $x' = 0$ *e* $y' = 0$. Resolviendo tal sistema, podemos hallar dos puntos de equilibrio: $E_1 = (1,1)$ y $E_2 = (-1,1)$. Evaluando la matriz Jacobiana del sistema: $\begin{bmatrix} 2x & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ en los dos equilibrios obtenemos:

$$J_{E_1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ y } J_{E_2} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

El primero tiene un determinante negativo, por lo que se trata de un punto de silla. El segundo, su determinante es positivo y su traza es igual a -3, por lo que se trata de un nodo estable (estamos en presencia del primer caso del cuadro señalado anteriormente).

3. SEGUNDO MÉTODO DE LIAPUNOV

Ya estuvimos viendo la manera indirecta de analizar la estabilidad de un sistema diferencial, ahora veremos la forma directa de resolución, el cual se basa en el conocido Teorema fundamental de Liapunov.

3.1 Teorema fundamental de Liapunov[13]

Consideramos un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo:

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i\left(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n\right) \quad i = 1,2,3,\ldots,n$$

donde $f_i = 0$ para $y_i = y_i^e \quad i = 1,2,3,..,n$

Si existe una función escalar $V_i\left(y_1 - y_1^e, y_2 - y_2^e, \ldots y_n - y_n^e\right)$ con derivadas parciales continuas respecto de $y_i - y_i^e$ para todo i tal que:

1) *V* es definida positiva, es decir, $V>0$ si al menos una de las variables $y_i - y_i^e \neq 0$; y V=0 si y sólo sí $y_i - y_i^e = 0$ para todo *i*.
2) *V* no está acotada superiormente, es decir $V \to +\infty$ cuando $\left\| y_i - y_i^e \right\| \to +\infty$
3) $\dfrac{dV}{dt} = \sum_i^n \dfrac{\partial V}{\partial\left(y_i - y_i^e\right)} \dfrac{d\left(y_i - y_i^e\right)}{dt}$ es definida negativa, es decir, $\dfrac{dV}{dt} < 0$ si al menos una de las variables $y_i - y_i^e \neq 0$ y $\dfrac{dV}{dt} = 0$ si y solo sí $y_i - y_i^e = 0$ para todo *i*.

entonces el estado de equilibrio $\left(y_1^e, y_2^e, y_3^e, \ldots, y_n^e\right) \ \forall \ i = 1,2,3,\ldots,n$ es **globalmente estable**.

Se puede mencionar que la inversa del teorema también resulta ser verdadero, es decir, si un estado de equilibrio es globalmente estable, entonces existe una función de Liapunov que satisface todas las condiciones antes señaladas. De esta manera, la existencia de una función de Liapunov es condición necesaria y suficiente para la estabilidad en sentido global. Asimismo, este segundo método sirve también para probar la inestabilidad, la cual ocurriría si existe una función *V* que cumpla con las propiedades 1 y 2 y $\dfrac{dV}{dt} > 0$.

---

[13] El teorema correspondiente puede ser aplicado tanto a un sistema de ecuaciones en diferencias como diferenciales (realizando los ajustes pertinentes).

Este método permite determinar cuan lejos puede estar la trayectoria de un sistema de un punto de equilibrio y seguir acercándose a él a medida que transcurre el tiempo.

Cuando nos acercamos al equilibrio o nos alejamos de él, en realidad estamos haciendo referencia a la distancia (decreciente o creciente) existente entre el punto cuya posición está dada por la solución del sistema diferencial y_i y el punto de equilibrio y_i^e.

Recordemos que la distancia $D(y)$ desde el origen de un punto en un espacio n-dimensional se define como una función escalar de variables $y_1, y_2, .., y_n$ que poseen ciertas propiedades, tales como:

- $D(y) > 0$ si $y \neq 0$
- $D(y) = 0$ si y solo si $y_i = 0$ para todo i
- $D(\mu y) = |\mu| D(y)$, siendo μ una constante real cualquiera
- $D\left(y' + y''\right) \leq D\left(y'\right) + D\left(y''\right)$, donde y' e y'' son dos puntos (o vectores) cualesquiera

Si bien existen muchas funciones que satisfacen dichas condiciones, las más utilizadas son:

- *Distancia Euclidiana:* $D(y) = \left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2\right)^{1/2}$
- *Distancia Euclidiana Modificada:* $D(y) = \left(a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + \ldots + a_n y_n^2\right)^{1/2}$
- *Distancia en valor absoluto:* $D(y) = \sum_{i=1}^{n} h_i |y_i|$ siendo h_i constantes positivas.
- *Distancia Máxima:* $D(y) = \max_i c_i |y_i|$ siendo c_i constantes positivas.

La forma más sencilla de encontrar la función de Liapunov es tratar de buscar funciones que definan *distancia*. Estas, por su propia definición, satisfacen las dos primeras condiciones del Teorema de Liapunov, por lo que quedaría probar la tercera. Es importante resaltar que a cierta distancia las funciones pueden no ser diferenciables. En estos casos, siempre que la distancia sea una función continua, la tercera condición puede ser reemplazada, exigiendo que en los puntos de no diferenciabilidad, la función sea estrictamente decreciente.

3.2 Ejemplo práctico

Podemos aplicar lo mencionado previamente al análisis de estabilidad del Equilibrio General Walrasiano, formalizado a través del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dp_i}{dt} = k_i.E(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n) \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{(I)}$$

donde, los p_i representan los precios de los n bienes, E es la función que refleja el exceso de demanda agregada y los k_i son constantes positivas.

Eligiendo como función de Liapunov el cuadrado de la Distancia Euclidiana Modificada:

$$V_i\left(y_1 - y_1^e, y_2 - y_2^e, \ldots y_n - y_n^e\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k}\left(p_i - p_i^e\right)^2 \quad \text{(II)}$$

Derivando V respecto del tiempo:

$$\frac{dV\left(y_1 - y_1^e, y_2 - y_2^e, \ldots y_n - y_n^e\right)}{dt} = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k}\left(p_i - p_i^e\right)\frac{dp_i}{dt} \quad \text{(III)}$$

Reemplazando (I) en (III), tendremos:

$$\frac{dV}{dt} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(p_i - p_i^e\right)E_i\left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right)$$

$$= \underbrace{2\sum_{i=1}^{n} p_i E_i\left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right)}_{\text{Es igual a 0 por la Ley de Walras}} - 2\sum_{i=1}^{n} p_i^e E_i\left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right)$$ [14]

$$= -2\sum_{i=1}^{n} p_i^e E_i\left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right)$$

---

[14] Nótese que para que $\sum_{i=1}^{n} p_i^e E_i\left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right) = 0$ por la Ley de Walras, se tendría que asumir que todos los precios son de equilibrio, es decir, que también deberíamos tener $E_i(\varnothing)$ para todo i.

Bajo cumplimiento de la Ley de Walras, es *condición suficiente* para la *estabilidad* del equilibrio que:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^e E_i\left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right) > 0$$ para cualquier vector de precios positivos fuera del equilibrio.

(+) (+) dado que $\dfrac{\partial E_j}{\partial p_i} > 0$ para todo i y j

Por lo que se podría concluir que $\dfrac{dV}{dt}$ siempre será negativa fuera del equilibrio. Entonces, si tal caso ocurriera, se verificarían las tres condiciones[15] del Teorema de Liapunov, con lo cual se podría afirmar la **estabilidad global** del Equilibrio General Walrasiano. Sin embargo, no hay razones económicas *a priori* para justificar este comportamiento de las funciones de exceso de demanda.

4. DIAGRAMAS DE FASE DE DOS VARIABLES

El estudio de la estabilidad a través de un diagrama de fase consiste en un *análisis gráfico-cualitativo* de un sistema de ecuaciones diferenciales *lineales o no, autónomos de primer orden*, que permite analizar la solución y estabilidad del sistema sin necesidad de resolverlo cuantitativamente.

Comenzamos partiendo del siguiente sistema: $$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

Nótese que las funciones f y g dependen únicamente de x y de y y que la variable t no entra como un argumento más en ellas. Esta característica, que hace que el sistema sea autónomo, es un requisito para poder utilizar esta técnica.

En todo análisis vamos a tener que estudiar:

- Las *curvas de demarcación*: Aquellos pares (x,y) que anulan las funciones f y g.
- Las *diversas trayectorias*: Es decir aquellos senderos que seguirán x e y en el tiempo cuando se encuentren fuera del equilibrio.

[15] Las condiciones (I) y (II) se pueden verificar en la ecuación (II) de nuestro ejemplo, donde *V* siempre es positiva y $V \to \infty$ cuando $\left|p_i - p_i^e\right| \to \infty$

4.1 Curvas de demarcación

Considerando el sistema anterior, las dos curvas de demarcación (denotadas por $x' = 0$ e $y' = 0$) representan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \ \left[\text{la curva } x' = 0\right] \\ g(x,y) = 0 \ \left[\text{la curva } y' = 0\right] \end{cases}$$

En caso de conocerse la función *f*, puede resolverse para *y* en términos de *x* y graficar la solución en el plano *xy* como la curva $x' = 0$ Lo mismo, en el caso de la función *g*.

Sin embargo, como se señaló previamente, este método permite alcanzar conclusiones de estabilidad sin la necesidad de conocer explícitamente las funciones con las que se está trabajando. En este sentido, se puede recurrir a la regla de la función implícita y asegurar:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \ \left[\text{la curva } x' = 0\right] \rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x'=0} = -\dfrac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} = -\dfrac{f_x}{f_y} \ \text{ para } f_y \neq 0 \\ \\ g(x,y) = 0 \ \left[\text{la curva } y' = 0\right] \rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{y'=0} = -\dfrac{\partial g / \partial x}{\partial g / \partial y} = -\dfrac{g_x}{g_y} \ \text{ para } g_y \neq 0 \end{cases}$$

En las curvas $x' = 0$ e $y' = 0$, las funciones *x* e *y* no varían en el tiempo. El punto de intersección de ambas es un punto en el cual ambas funciones son estacionarias, es decir, allí estamos en presencia del equilibrio intertemporal del sistema.

Supongamos que tenemos la siguiente información:

$$f'_x < 0 \ ; \ f'_y > 0; g'_x < 0; g'_y < 0$$

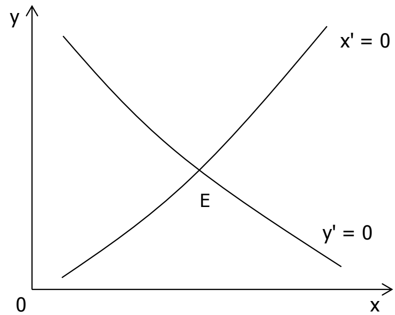
Entonces:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \ \left[\text{la curva } x' = 0\right] \rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x'=0} = -\dfrac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} = -\dfrac{f_x}{f_y} = -\dfrac{(-)}{(+)} = (+) \\ g(x,y) = 0 \ \left[\text{la curva } y' = 0\right] \rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{y'=0} = -\dfrac{\partial g / \partial x}{\partial g / \partial y} = -\dfrac{g_x}{g_y} = -\dfrac{(-)}{(-)} = (-) \end{cases}$$

Por lo que la curva $x' = 0$ tendrá pendiente positiva y la curva $y' = 0$, pendiente negativa.

Gráficamente:

Gráfico 4



Como se puede observar, las dos curvas de demarcación, que se intersectan en el punto E (siendo el equilibrio intertemporal), dividen el espacio de fases en cuatro regiones distintas. Fuera de él, *x* e/o *y* cambiarán en el tiempo, en distintas direcciones que en cada punto indiquen los signos de las derivadas x' e y' .

4.2 Las trayectorias

Como antes se mencionó, fuera del equilibrio las funciones tomarán diferentes trayectorias, las cuales podemos identificarlas a través de un conjunto de flechas direccionales para indicar el movimiento (dinámico) intertemporal de *x* e *y*. Debido a que todo punto del espacio de fases se encontrará sobre una o más trayectorias, existe un número infinito de ellas, todas siguiendo los requisitos direccionales impuestos. Sin embargo, para describir el comportamiento cualitativo del sistema, es suficiente señalar algunas trayectorias significativas.

Las trayectorias se encuentran definidas por:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial x} = f_x \\ \dfrac{\partial y'}{\partial y} = f_y \end{cases}$$

que indican qué sucede con x' a medida que varía *x*y qué sucede con y' a medida que varía *y*. En base a los signos que adopten, podremos graficar distintas trayectorias y establecer conclusiones cualitativas sobre la estabilidad del equilibrio del sistema.[16]

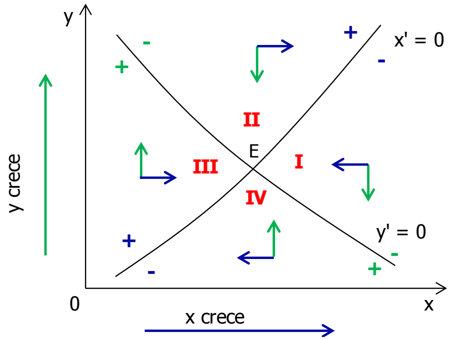
[16] Cuando no tenemos la información sobre el comportamiento de x'(o y') cuando varía *x* *(y)*, se puede tomar como alternativa el comportamiento de x' (y') cuando varia *y (x).*

Siguiendo nuestro ejemplo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial x} = f_x < 0 \\ \dfrac{\partial y'}{\partial y} = f_y < 0 \end{cases}$$

Esto implica que a medida que crece x, x' decrece y que a medida que y crece, y' también decrece. Gráficamente:

Gráfico 5

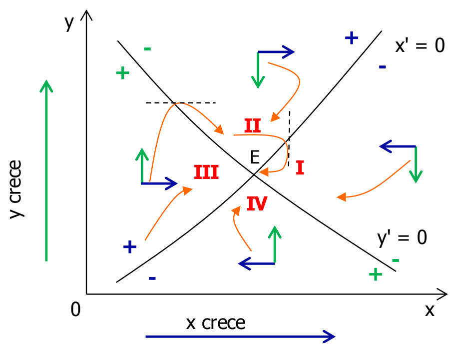


Algunas trayectorias pueden cortar las curvas de demarcación. En esos casos, éstas deben tener:

- pendiente ∞ $\left[\text{cuando corta a } x' = 0\right]$
- pendiente 0 $\left[\text{cuando corta a } y' = 0\right]$

Dibujando algunos movimientos direccionales:

Gráfico 6



En este ejemplo, puede observarse que cualquier trayectoria posible, nos lleva al punto de equilibrio, por lo que E es un *equilibrio estable*. Asimismo, se puede observar que los movimientos direccionales pueden pasar de una región a otra, o bien quedarse dentro de ella.

4.3Clases de equilibrio

De acuerdo a las diferentes trayectorias configuradas alrededor de un equilibrio intertemporal, este puede ser:

- ***Nodo:*** Es un equilibrio donde todas las trayectorias asociadas con él fluyen no cíclicamente hacia él (tratándose de un nodo estable) o hacia fuera de él (nodo inestable).

- ***Punto de silla***: Es estable en algunas direcciones e inestable en otras, por lo que se trata de un equilibrio inestable.

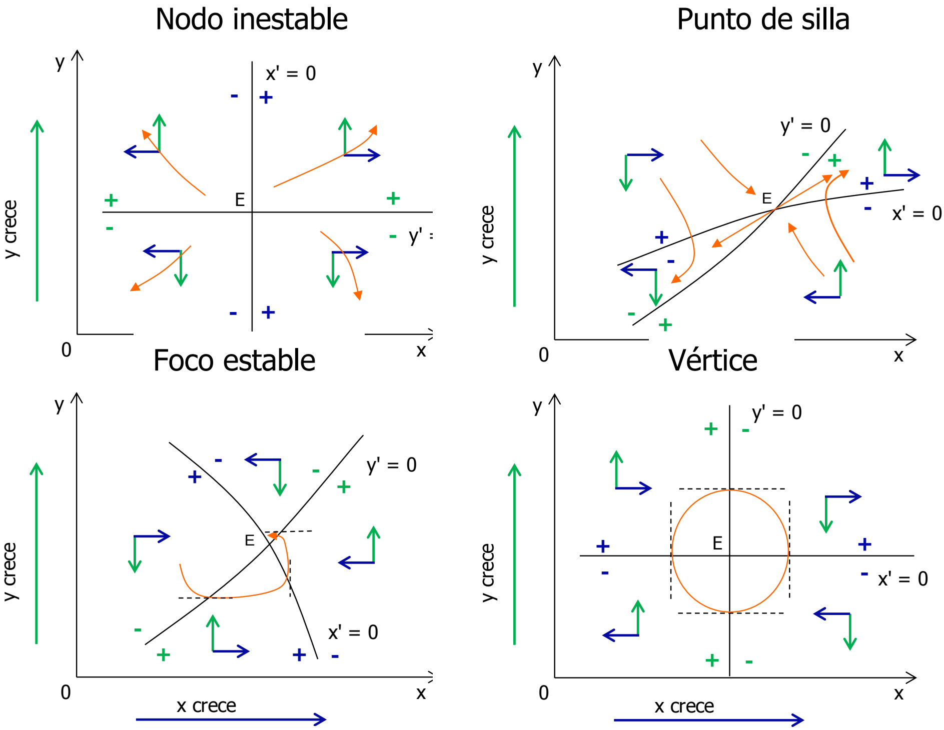
- ***Foco***: Es una clase de equilibrio donde las trayectorias son cíclicas, pudiendo aproximarse al equilibrio (entonces se trata de un equilibrio estable) o hacia fuera de él (equilibrio inestable).

- ***Vértice***: Es un equilibrio donde las trayectorias son cíclicas y dan vuelta, formando círculos o espirales concéntricos. En este caso, al describirse órbitas alrededor del equilibrio, en continuo movimiento, sin lograr alcanzarlo, se trata de un equilibrio inestable.

Veamos unos ejemplos gráficamente[17]:

[17] En el caso del gráfico del Foco estable, se dibujó únicamente una sola trayectoria. El movimiento giratorio es provocado por la posición de las curvas de demarcación, que se encuentran inclinadas de forma tal que delimitan el movimiento de la trayectoria, formando un espiral.

Gráfico 7



En todos los casos antes señalados, se presenta un solo equilibrio, dado que trabajamos con sistemas lineales. Cuando aparece la no linealidad, las curvas de demarcación se pueden cruzar más de una vez, apareciendo equilibrios múltiples. En este sentido, pueden existir más de cuatro regiones a considerar.

5. LIMITACIONES DEL ANÁLISIS DINÁMICO

A lo largo de todo este trabajo se han expuesto los diversos métodos existentes para el estudio de la estabilidad en los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales o no lineales.[18]

En cada uno de ellos se señalaron algunas limitaciones existentes para su utilización, entre ellas se encuentran:

Para hacer manejable el estudio y obtener sencillez, los modelos se suelen formular en términos de ecuaciones lineales. En la realidad, la mayoría de los sistemas no gozan de esta característica.

---

[18] Un análisis similar puede ser aplicado a los sistemas de ecuaciones en diferencias.

En la mayoría de los sistemas dinámicos se emplean coeficientes constantes en las ecuaciones, con el objeto de especificar los parámetros del modelo y "congelar" el entorno del problema, evitando así la intervención de factores exógenos al mismo.

Sin embargo, mientras el análisis dinámico se interprete y se aplique correctamente, ejerce una función relevante en el estudio de diversos fenómenos económicos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bernardello, A.; Bianco, M.J.; Casparri, M.T.; García Fronti, J. y Olivera de Marzana, S. (2004): *Matemática para Economistas con Microsoft Excel y Matlab*; Buenos Aires, Argentina; Omicron System; 1° Edición.

Chiang, Alpha C. (1999): *Métodos fundamentales de economía matemática*. McGraw-Hill. 3° Edición. Chile.

Gandolfo, G. (1997): *Economics Dynamics*; Berlín, Alemania; Springer.

Monzón, Pablo (2003): *Notas sobre estabilidad de sistemas dinámicos*; Curso de actualización.

Jimenez Jimenez, Nieves; *Estabilidad en sistemas de ecuaciones diferenciales*; Universidad de Sevilla, España.

EL DESAFÍO DE ENSEÑAR CÁLCULO INCORPORANDO LA TECNOLOGÍA EN CÁTEDRAS MASIVAS

Viviana Cámara
Claudia Zanabria
Luis Córdoba

INTRODUCCIÓN

Hasta hace algunos años, el docente ha sido la fuente de información más disponible para los estudiantes en el acompañamiento del aprendizaje de las ciencias, pero el advenimiento de las nuevas tecnologías de la información abrió el escenario permitiendo obtener información de diferentes sitios, como la web-site de su profesor, de otros profesores mediante Internet.

Específicamente, en matemáticas, se dispone de sitios web donde es posible "bajar" programas (software) matemáticos, en modo "free" o "en modo de prueba" por un tiempo determinado. Estos programas permiten realizar además de la operatoria numérica básica, cálculos en forma simbólica, como por ejemplo, calcular una derivada, resolver una ecuación diferencial o sistemas de ecuaciones diferenciales, calcular un determinante, solo por nombrar algunas de los cálculos que se pueden realizar. Es de destacar también la visualización de relaciones que involucran dos o más variables lo cual implica abordar los conceptos matemáticos desde el tratamiento de imágenes.

Ante este nuevo panorama y compartiendo las expresiones de James Stewart (2008:2): "El énfasis está en entender conceptos" y "Los temas deben presentarse de manera geométrica, numérica, algebraica, gráfica y también con un carácter descriptivo, verbal" nos propusimos incorporar en la enseñanza de la asignatura Análisis Matemático la tecnología superando la problemática de tratarse de una cátedra numerosa en cuanto a la cantidad de alumnos que debemos atender.

En nuestro carácter de docentes de matemática nos preguntamos ¿cómo incorporamos las herramientas tecnológicas en nuestras clases en especial cuando se trata de cátedras masivas de modo que podamos aprovechar sus potencialidades? y ¿qué lugar le damos a la tecnología en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo? En primer lugar acordamos que las tecnologías de la información en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática son ante todo y sobre todo instrumentos y en segundo lugar entendemos que solamente el uso de estas herramientas tecnológicas, puestas al servicio de un proceso de enseñanza aprendizaje, permitirá entender si resultan útiles, estériles o, incluso, perjudiciales. Es decir el éxito no depende sólo de su utilización sino de un entrelazado de múltiples factores como: contenidos bien seleccionados, articulación correcta de los mismos, actividades adecuadas, función del docente, función del pasante alumno y función del alumno.

1. FUNDAMENTOS DE LA PROPUESTA

Hoy en día, las nuevas tecnologías han cambiado profundamente el mundo de las matemáticas y el de las ciencias, ya que no sólo han afectado las preocupaciones propias de su campo y la perspectiva como éste se ve, sino también, el modo en que las ciencias y las matemáticas se hacen, se enseñan y se transmiten. Desde una perspectiva teórica, donde la tecnología no queda excluida pero tampoco es central, consideramos a Duval (1998) que señala lo siguiente: "estamos entonces en presencia de lo que se podría llamar la paradoja cognitiva del pensamiento matemático: por un lado, la aprehensión de los objetos matemáticos no puede ser otra cosa que una comprensión conceptual y, por otro lado, solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos".

Además, teniendo en cuenta que uno de los propósitos de la educación matemática es formar al estudiante para que adquiera fluidez representacional, entendida esta, como la representación verbal, gráfica, geométrica, tabular, icónica, algebraica, pictórica; mediante la que exprese conceptos y procedimientos matemáticos; en el diseño de las actividades se busca una perspectiva multimodal donde se propicie la construcción de diferentes representaciones por parte de los estudiantes y la interpretación de significados y sentidos de conceptos matemáticos.

Por otro lado, desde el punto de vista pragmático, "comprender" o "saber" un objeto matemático consiste en ser capaz de reconocer sus propiedades y representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos y usar este objeto en toda la variedad de situaciones problemáticas prototípicas que le son propuestas en el aula. Desde este punto de vista la comprensión alcanzada por un sujeto en un momento dado difícilmente será total o nula, sino que será parcial y progresiva.

Desde esta perspectiva consideramos que un alumno ha comprendido un determinado contenido cuando lo utiliza de manera competente en diversas prácticas. Se entiende pues, la comprensión, básicamente, como una capacidad que tiene el alumno y no tanto como un proceso mental que se produce en su mente cuando articula representaciones.

La enseñanza de los principios del Cálculo presenta tensiones al momento de su tratamiento, y aunque seamos capaces de enseñar a los estudiantes a resolver de forma más o menos mecánica algunos problemas estándar, o bien, realizar algunas derivadas o integrales, tales acciones están muy lejos de lo que supondría una verdadera comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento de esta rama de la matemática.

A continuación detallamos una propuesta didáctica que incluye el uso de dos software matemáticos. La metodología que utilizamos es la resolución de problemas ya que ella nos permite desarrollar actividades de integración de contenidos y de transferencia conceptual al área de la economía.

2. LA PROPUESTA

La asignatura Análisis Matemático tiene en el Plan de estudios de las carreras de grado de la Facultad de Ciencias Económicas de la UNL un total de 70 horas, está ubicada en el 2do. cuatrimestre del primer año del plan de estudios y se inscriben anualmente entre 400 y 500 alumnos. La propuesta presencial contempla el desarrollo de la materia en 8 comisiones de aproximadamente 50 alumnos. Las clases se organizan en forma teórica – práctica.

El contenido programático está planificado por módulos conceptuales: Límite funcional y continuidad, Derivada, Integral, Función de varias variables, Ecuaciones diferenciales y Sucesiones y series.

La cátedra ofrece a los estudiantes los siguientes recursos para abordar su aprendizaje:

- clases presenciales
- material de estudio preseleccionado por el docente responsable de la cátedra
- página virtual de la cátedra
- clases abiertas a cargo de un alumno tutor de la cátedra
- clases en la sala de informática.

La propuesta se aplicó en el segundo semestre del 2010 a la totalidad de los estudiantes inscriptos a la asignatura y se desarrollaron cuatro encuentros en el Laboratorio de Computación con un total de 12 hs.

Llevar adelante esta modalidad, es decir, incorporar la tecnología en el aula de Cálculo, implicó la realización de las siguientes etapas, previas a la implementación en el aula de informática: a) apertura de una convocatoria a estudiantes avanzados de las carreras de grado de la Facultad con la finalidad de participar en este proyecto en carácter de estudiantes pasantes y su correspondiente selección, b) formulación por parte de dos profesores de la cátedra de las actividades, c) formación de los alumnos pasantes tanto en el manejo de los software que utilizamos como en la formación docente y disciplinar, d) prueba piloto de las actividades que propusieron los profesores efectuando un análisis de factibilidad de las mismas, con la participación de los alumnos pasantes; donde a partir de este análisis se hicieron las correcciones respectivas. Y por último, e) se realizó un Seminario Taller donde participaron todos los profesores de la cátedra que tuvieron, así, la oportunidad de realizar las modificaciones y observaciones que estimaron necesarias.

Las actividades se formularon en base a los siguientes objetivos:

*Ofrecer al estudiante la oportunidad de fortalecer su saber acerca de conceptos matemáticos de la asignatura Análisis Matemático, desde la resolución de problemas.

*Crear un ámbito de aula que propicie el aprender a aprender en matemática mediante el empleo de la tecnología.

Es importante tener presente que la propuesta de cada software demanda un conocimiento básico de los conceptos fundamentales del Cálculo. Por tal motivo las actividades centraron su eje en las relaciones conceptuales sin dispersar la atención en extensos cálculos.

El primer encuentro abordó el tema límite de funciones reales en una variable y continuidad. Se eligió el software Graph V4.3. La importancia de este software, radica especialmente en que a los estudiantes les permite explorar las ideas geométricas y numéricas. El software permitió trabajar el concepto de límite con un abordaje numérico donde se evidenciaron los criterios de validación de los saberes dados en las clases presenciales.

El segundo encuentro abordó el concepto de derivada, especialmente, la resolución de problemas de optimización inherentes a las ciencias económicas. Se hizo especial referencia a la relación entre máximos relativos y puntos de inflexión en el contexto de un problema económico.

En el tercer encuentro se trabajó el cálculo de áreas mediante la integral definida. Y por último, en el cuarto encuentro se resolvieron problemas de optimización de índole económica que involucran funciones de varias variables.

3. ACTIVIDADES PROPUESTAS

Problema 1: Organización de un viaje de turistas, en euros…pero que me alcance.

Se sabe que a una empresa de turismo internacional llega la siguiente información:

Un hotel único como el Meliá De Mar, abierto para todo tipo de Convenciones ha motivado una decisión sin precedentes. A partir de ahora acoge grupos durante todo el año y además ofrece la oportunidad de reservar el establecimiento en exclusiva. El hotel Meliá De Mar (Calviá, Islas Baleares) ha presentado su oferta de servicios para el segmento MICE (Meeting, Incentivos, Convenciones y Exposiciones). El establecimiento anuncia así por primera vez su apertura indefinida para grupos durante todo el año. Los clientes de Meliá De Mar encontrarán a su disposición las mejores instalaciones para celebrar grupos de reuniones, convenciones e incentivos, sin renunciar a la comodidad de un hotel que goza de un entorno privilegiado frente al mar Mediterráneo.

Ante esta oferta, una agencia de turismo, decide planificar una salida a un grupo de 1000 personas. La idea es formar subgrupos con la misma cantidad de gente en cada uno.

Existen distintos costos que la empresa ha calculado:

Costo 1: que se refiere a gastos administrativos de € 200 por millar de personas.

Costo 2: que comprende el pago de los coordinadores grupales y es de € 50 por grupo.

Costo 3: que depende solamente del número de personas de cada grupo y es para otorgar un premio al grupo ganador de un concurso. El valor del costo es de 20 centavos de € por cada integrante del grupo.

Además existen los costos básicos (viaje, alojamiento, seguro), que no serán tenidos en cuenta para este caso.

El gerente de planificación de viajes desea ofrecer este hotel a un grupo de 1000 personas siendo conveniente formar subgrupos de igual cantidad de personas. El problema que se le presenta al gerente es:

¿Cuántos grupos conviene formar y de qué tamaño para minimizar los costos?

*Problema 2:*Cria en feelots, …las penas son de nosotros, las vaquitas…son ajenas. (A. Yupanqui)

En base a los datos de crecimiento del peso de un novillo Holando Argentino tipo Exportación durante sus primeros cuatro años de vida se ha encontrado que el crecimiento responde a la expresión:

$$y = \frac{650}{1 + 5{,}32489.e^{-0{,}07807x}}$$

Donde y representa el peso en kg. y x los meses de vida del animal.

Obs: Esta función fue desarrollada por un grupo de estudiantes de la Facultad en base a datos experimentales en el Seminario Optativo denominado Modelación Matemática en el año 2004.

Todos sabemos la importancia que tiene la carne vacuna en una sociedad como la nuestra, que además de ser un aparte indispensable de la pirámide nutricional, forma parte de nuestras costumbres argentinas. Sin embargo la faena ocupa un lugar destacado en la cría de ganado vacuno y redunda en el logro de buenos beneficios. La primera campaña de vacunación anti-aftosa de la Dirección Nacional de Sanidad Animal (Senasa) del año 2008 (el modo más fiable de determinar cuántos animales hay en el país) dio que el stock rondaba los 53 millones de cabezas, contra los 61 millones que contabilizaba en 2006. Al parecer, la segunda campaña, que se está terminando, daría peores resultados, pues computaría lo liquidado por la sequía. Ante esta situación, surge lo que se denomina "cría en Feed-lot", engorde a corral. Un ejemplo de este tipo de emprendimiento lo constituye Pilagá Ganadera S. A. de Venado Tuerto - Argentina. Ante esta situación los veterinarios reconocen un momento de faena adecuado, ¿cuál es entonces, el tiempo óptimo de faena?

Para responder esta pregunta resuelve los siguientes ítems:

a) Representa gráficamente a las funciones: y, y´e y´´.

b) ¿cuáles son las intersecciones con el eje x en cada una de ellas?

c) Observa conjuntamente la tabla de valores asociadas de la función, su derivada primera y segunda.

d) Observa de a pares: la gráfica de y - la gráfica de y´, la gráfica de y´-la gráfica de y´´, la gráfica de y- la gráfica de y´´.

e) ¿Puedes estimar la raíz de y´´?. Utiliza la opción tabla.

f) ¿Qué relación puedes establecer entre la raíz de y´´ con el punto extremo de y´?

g) ¿Qué significa en el contexto de la situación la raíz de y´´?

Puedes identificar el tiempo óptimo de faena ¿por qué dices lo que dices?

Problema 3: Eficiencia de un operador de máquinas en una empresa.

El departamento estadístico de una empresa ha realizado un estudio referido a la eficiencia de las personas que operan las máquinas. Se deduce que esta varía con el tiempo de trabajo realizado durante un día (8 hs) a una variación de 10 % por hora, siendo creciente en las primeras cuatro horas de trabajo y después decrece en las 4 horas restantes,

a) Escribe la expresión algebraica de E´(t), si llamamos E a la eficiencia, expresada en porcentaje, y t al tiempo (en horas) de trabajo del operador.

b) Representa gráficamente la función hallada y analiza los signos de E´(t) según el dominio.

c) Halla la expresión analítica de la función que representa la eficiencia del operador. Representa gráficamente estas curvas.

d) Si suponemos que para una tarea específica el operador Ricardo Pérez tiene una eficiencia de 72% después de haber trabajado 2 horas. Obtenga la función eficiencia de este caso particular.

e) ¿Cuál es la eficiencia de Ricardo Pérez después de 8 horas de trabajo? ¿y cuál es su eficiencia al iniciar el trabajo?

f) ¿Después de cuántas horas de trabajo Ricardo Pérez logra su máximo en eficiencia?

g) Bajo las condiciones descritas por el modelo, ¿todos los operadores alcanzan su máximo de eficiencia a las 4 hs de trabajo?

h) Halla E´´(t), ¿qué significa este valor en el contexto del problema?

Problema 4: Un problema de integración en contexto matemático.

La función $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ presenta un punto máximo y un punto de inflexión. Calcula el área bajo la curva, sobre el eje x y entre los dos puntos críticos nombrados.

Problema 5: En referencia al problema ya abordado relativo a la cría de novillos Holando Argentino tipo exportación, cuyo crecimiento se describe mediante el modelo:

$$y = \frac{650}{1 + 5{,}32489.e^{-0{,}07807x}}$$

siendo x su edad expresada en meses de vida y la variable y el peso en Kg.

a) Obtiene la expresión analítica y la gráfica la función derivada y realiza una descripción de su comportamiento en el marco del problema.

b) Calcula la integral definida de la función hallada en a), en el intervalo comprendido desde x = 0 hasta la abscisa del punto de inflexión e indica qué representa el resultado de dicha integral en el problema.

Como lo mencionamos anteriormente estas actividades se propusieron a los estudiantes que cursaron Análisis Matemático en el segundo semestre de 2010. Los pasantes acompañaron a los docentes y rescatamos su opinión respecto a la implementación de esta propuesta.

Resultados

Al finalizar el semestre se les solicitó a los alumnos pasantes que respondieran lo siguiente:

*Considerando los conceptos trabajados, ¿surgieron dudas de parte de los estudiantes, indica cuáles son?

*¿Cuáles fueron tus impresiones, conversaciones, acontecimientos que han retenido más tu atención en los encuentros?

*Detalla anécdotas o vivencias surgidas en las clases.

*Qué reflexiones puedes hacer sobre tu experiencia en las clases de laboratorio.
A partir de sus respuestas formulamos las siguientes categorías de análisis, las cuales se transcriben a continuación:

-*Aspectos relacionados con el conocimiento matemático necesario para afrontar la resolución de las guías:* Los estudiantes presentan dificultades en conocimientos previos (por ejemplo, construir la ecuación de una recta o la expresión analítica de una función cuadrática o exponencial). No identifican la representación gráfica de una función a partir de la expresión analítica. Falta de manejo de las escalas en las gráficas. Carecen de información respecto del significado de muchas palabras (unido a esto, la falta de voluntad para buscar las palabras desconocidas en el diccionario). No dedican tiempo a la lectura reflexiva. Por otro lado, expresan que el software les ayudó a comprender mejor temas vistos en materias anteriores.

-*Aspectos relacionados a cuestiones técnicas de software:* En general, los estudiantes asumían muy rápidamente el manejo y las funciones de los programas utilizados. Su dificultad residía en la identificación de elementos de los conceptos matemáticos.

-*Con respecto a la motivación:* Sólo una minoría se mostraba interesada y trabajaba activamente en clase, mientras que los demás se dispersaban y utilizan las computadoras como entretenimiento. Muchos estudiantes preguntaban: ¿Qué fines prácticos tiene esto? ¿Qué tan importante es?

-*Con respecto a las relaciones alumnos-docente-pasante:* Los estudiantes recurrían más al alumno pasante que a la docente para hacer consultas. Se observa mayor relación de confianza entre pares: alumno- alumno pasante. Sin embargo, para los pasantes las preguntas de los alumnos fueron insignificantes y limitadas.

-*Con respecto a las guías* los pasantes opinaron que estaban muy bien elaboradas y fueron sencillas. Cumplían con el objetivo de los docentes. Para los estudiantes resultaban realmente integradoras de los conceptos dados en la clase presencial.

-*Con respecto a la propia práctica o a la experiencia frente a alumnos:* Los pasantes expresaron lo siguiente: "Esta fue para mí, la primera experiencia frente a un curso. Creí que iban a ser demasiado alborotados, me supuse lo peor. Me sorprendí cuando estuve frente a ellos explicando. Ahora, más allá de que su silencio se deba a la vergüenza por preguntar, me tocó un grupo respetuoso" (pasante A). "La primera clase estaba bastante nerviosa y es la que más tengo presente. Me encantó que los alumnos me prestaran atención y poder realizar todas las consignas. Fue una gran experiencia el tener que hacerme cargo de una comisión por la gran cantidad de alumnos ya que las docentes depositaron en mi toda su confianza, y espero haber hecho las cosas lo mejor posible" (pasante B).

4. CONCLUSIONES

Las características de la Educación Superior requieren que quien inicia los estudios universitarios debe tener competencias generales como: interés por aprender, pensamiento crítico, autonomía en el estudio y hábitos de estudio. Sin embargo, los estudiantes muestran un determinado grado de insuficiencia en estas competencias básicas. Destacamos la expresión de un pasante respecto a un estudiante: "les falta información respecto al significado de muchas palabras (unido a esto, la falta de voluntad para buscar un diccionario). Son puntos que tienen en común según como lo entiendo, la falta de lectura, el hábito de lectura".

Nos preocupa la falta de interés que muestran los adolescentes por el conocimiento disciplinar, en general por el conocimiento en sí mismo.

Mencionamos que ni en la evaluación final ni en las evaluaciones parciales de la asignatura se evalúo directamente el software utilizado, sin embargo se incorporaron ítems que evaluaban los significados de algunos conceptos matemáticos. Somos conscientes de que no es posible determinar aún si la propuesta tuvo éxito, puesto que la comprensión e internalización de los conceptos abordados se desarrolla en forma lenta y paulatina.

Cabe destacar la importancia de la incorporación de estudiantes pasantes a la cátedra. Y por ende, la formación de los recursos humanos, ya que como ellos lo mencionan, su rol de "docente" fue muy significativo y les ayudó a comprender los modos de gestión del conocimiento de esta cátedra, a superar miedos y conflictos personales y por sobre todo les ayudó a crecer en la autonomía de su estudio. Destacan, además, la confianza que los docentes depositamos en ellos.

En nuestro rol de docentes de Cálculo de una cátedra masiva estamos convencidos de que para lograr incentivar el interés de nuestros alumnos por matemática es fundamental el tipo de actividad propuesta y la comunicación entre alumnos y docentes. El empleo de estas nuevas herramientas tecnológicas puede resultarnos útiles en estos aspectos pues ellas producen la ruptura de las rutinas o hábitos perceptivos, y poseen distintas funciones didácticas como: a) instrumento para aprender a aprender, b) instrumento para la propiciar la motivación y c) instrumento para reforzar la comunicación docente-alumno. Aspectos fundamentales, sobre todo si se trata de una cátedra masiva.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Duval R. (1998): Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Stewart, D. (2008): *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*. 6ta edición. México. Cengage Learning

ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA LINEAL POR COMPETENCIAS EN CARRERAS DE CIENCIAS ECONÓMICAS

Claudia D. Guzner

INTRODUCCIÓN

El papel que en la actualidad tiene la Matemática en general, y el Álgebra Lineal en particular, en las Ciencias Económicas, hace que la "alfabetización matemática" de los alumnos de carreras relacionadas con aquella se vuelva relevante. Sin embargo, se observa que la situación en materia de su enseñanza y aprendizaje resulta en extremo preocupante. En relación con la naturaleza del problema, la reflexión sobre la propia práctica docente, muestra que no se trata sólo de la cantidad de tiempo que se le dedica en los planes de estudio sino que, una parte sustancial del problema, radica en el enfoque utilizado para abordarla.

A la luz de estas reflexiones, este trabajo pone a discusión los nuevos modelos de enseñanza y de aprendizaje basados en problemas de creciente complejidad, que privilegien el desarrollo de competencias del Álgebra aplicadas a diferentes campos disciplinares relacionados con las Ciencias Económicas.

El interés reposa en que se advierte que las transformaciones plasmadas en los sucesivos materiales de estudio utilizados, no han logrado superar la sobrevaloración de la formación teórica en detrimento de la formación práctica. Se espera que la puesta en acto de las ideas que aquí se presentan provoque un impacto significativo en el mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra, a partir de un abordaje no convencional, basado en la comprensión, la visualización, la objetivación y la conceptualización, con el objeto de fortalecer una visión unificada entre la Matemática y sus aplicaciones.

El escrito ha sido organizado en dos partes. En tanto que la primera conjuga aspectos ontológicos, analíticos interpretativos y valorativos, con la finalidad de enmarcar la problemática bajo estudio, en la segunda se da respuesta a las cuestiones planteadas acerca de la competencia en general, y de la competencia matemática en particular, en el contexto de carreras la enseñanza del Álgebra Lineal en carreras de Ciencias Económicas.

1. COMPETENCIAS Y COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

1.1 Aproximaciones conceptuales a la noción de competencia

Múltiples y variadas aproximaciones conceptuales se han hecho de la idea de competencia, muchas de ellas ligadas a la acepción que la Real Academia Española da para este término (Del lat. competentĭa; cf. competente): *"pericia, aptitud, idoneidad para hacer algo o intervenir en un asunto determinado"*.

Sin embargo, el uso diverso que se hace de esta noción ha dado lugar a un desorden conceptual que requiere consensuar una definición operativa. Una idea generalmente aceptada es la que define competencia como la capacidad real y demostrada para llevar a cabo exitosamente una actividad plenamente identificada, en un entorno real o en otro contexto (Guzner, 2005).

Tácitamente, esta concepción involucra una característica inherente a una parte profunda de la personalidad de los individuos, asociada a la capacidad de actuar de manera eficaz en un tiempo dado, frente a una situación definida, pero que, como bien afirma Perrenoud (1999) se apoya en conocimientos, pero no se reduce a ellos.

Es decir, la competencia involucra no sólo el conocimiento, sino también la puesta en marcha de ese conocimiento. En otras palabras, competencia es lo que una persona hace dentro de un contexto determinado –a partir de un contenido mediador-con el objeto de alcanzar un resultado y manifestarlo.

En este contexto, desde una perspectiva estrictamente conceptual, hablar de competencias supone referirse a la capacidad del sujeto para movilizar los recursos que ha adquirido: los conocimientos, las habilidades y las actitudes, para afrontar y resolver una situación problemática. Se acepta que competencia es el conjunto de conocimientos, habilidades, aptitudes y actitudes observables, medibles, modificables y entrenables- de un individuo a llevar a cabo una tarea determinada.

Como bien señala Thierry García (2001), esta concepción del término subsume tres características:

- la competencia está asociada a criterios de ejecución o desempeño (niveles de dominio);
- la competencia es el resultado de un proceso de integración,
- la competencia implica responsabilidad del sujeto por su aprendizaje.

Esta tipología delimita claramente las diferentes dimensiones de una competencia:

1.1.1 *SABER*, entendida como la capacidad para adquirir y comprender conocimientos teóricos, asociado al conocimiento conceptual. Un sujeto "sabe" cuando tiene conocimientos sobre un campo disciplinar, reconoce y distingue sus elementos como datos aislados de su estructura cognitiva y los retiene en la memoria temporalmente, incorporando, por medio de la abstracción o conceptualización, nuevos conocimientos a sus conocimientos previos;

1.1.2 *SABER HACER*, en relación a la capacidad de utilizar el conocimiento en la práctica, en referencia al conocimiento procedimental. Un sujeto "sabe hacer" cuando "hace uso comprensivo de los objetos o elementos de un sistema de significación", es decir, cuando es capaz de transferir los conocimientos adquiridos a situaciones hipotéticas o reales. Pero también el sujeto "sabe hacer" cuando crea nuevas alternativas, a fin de responder en diferentes situaciones o contextos (frente a diferentes casos con un problema similar), poniendo en juego su potencial de analizar, sintetizar, inferir, asociar, "navegando en un océano de incertidumbres a través de archipiélagos de certeza". (Morin, 2000);

1.1.3 *SABER SER*, en cuanto a la capacidad de desenvolverse a partir de actitudes y valores determinados. Un sujeto "sabe ser" cuando es capaz de dar sentido a las otras dos dimensiones de una competencia a lo largo de toda su vida.

Estas dimensiones tienen un significado intrínseco y se las puede percibir en los resultados o productos esperados. Tienen sentido sólo en función del conjunto, aunque se pueden explicitar separadamente, por sí solas no constituyen la competencia: ser competente implica el dominio de la totalidad de las dimensiones y no sólo de alguna(s) de ellas.

Cuanto más se desarrolle, en un sujeto, cada uno de estos niveles de competencia, más competente será el sujeto. Es de señalar que este progreso queda ligado a distintas capacidades, según sea la dimensión a que se atienda.

1.2 Aproximaciones conceptuales a la noción de competencia matemática

Particularmente, una competencia matemática es una conducta que se expresa en un saber hacer o actuar frente a tareas que plantean requerimientos matemáticos, que suponen conocimientos, saberes y habilidades que emergen en la interacción que se establece entre el individuo y una determinada situación (Guzner, 2009). A grandes rasgos, podría decirse que la competencia es la puesta en acto, con habilidad, del conocimiento. Implica la capacidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo se conoce.

Bajo esta concepción, la competencia no es una finalidad general de la educación matemática, ni tampoco un listado teórico de procesos cognitivos, sino que está estrechamente asociada a conocer objetos, definiciones, resultados, procedimientos y estructuras; a razonar deductiva e inductivamente; a conocer términos, notaciones y convenciones, a utilizar el lenguaje adecuando en contextos sociales de comunicación.

Esta concepción delimita claramente los alcances de cada una de las dimensiones de la competencia si se las traslada a la noción de competencia matemática – Figura 1.- :

Figura 1. Operacionalización competencia matemática

Dimensión	Descripción	Indicadores
SABER *memoria significativa*	identificación y descripción de objetos matemáticos, de atributos, de relaciones, de propiedades, de representaciones y de operaciones	• usar diferentes registros (lenguaje simbólico, coloquial, técnico) • comprender la relación entre diferentes representaciones • operar • encontrar regularidades y patrones • reconocer isomorfismos con problemas ya conocidos
SABER HACER *potencia matemática*	construcción de modelos y representaciones, formulación de problemas, exploración, investigación	• refinar y ajustar modelos • combinar e integrar modelos • traducir un problema a un modelo • interpretar resultados • validar procesos
SABER SER *comunicación matemática*	interacción social, desde los que se construyen los significados, argumentaciones, inferencias y generalizaciones	• argumentar y generalizar • plantear interrogantes • enunciar problemas • explicar y justificar resultados • comunicar el proceso y la solución • criticar el modelo y sus límites

Fuente: elaboración propia.

La mencionada operacionalización hace que el desarrollo de la competencia matemática, en cada sujeto, se evidencie a través de su capacidad para plantear problemas y abordarlos a partir de teorías adecuadas, su conocimiento de técnicas diversas para resolverlos, su comprensión acerca de las implicancias matemáticas del abordaje escogido, pero a la vez teniendo en cuenta su adaptación para trabajarlos en grupo, su visión de aplicar ideas matemáticas tanto a los estándar como a los más complejos, así como su predisposición para enfrentar los abiertos.

Luego, si lo que se persigue es el logro de un sujeto "matemáticamente" competente, el currículo debe impregnarse de acciones que promuevan:

- ✓ la desmitificación del tradicional binomio teoría-práctica;
- ✓ la integración de la enseñanza y el aprendizaje,
- ✓ la resolución de problemas, la formulación de hipótesis, la recopilación de evidencia, la elaboración de argumentos,
- ✓ el logro de un pensamiento crítico, reflexivo, autónomo y creativo,
- ✓ el desarrollo de la capacidad inquisitiva y autogestionaria,
- ✓ la participación activa, la búsqueda de alternativas propias y la toma de decisiones razonadas,
- ✓ la interacción en un equipo de trabajo,

Queda claro que, a partir de esa concepción, los contenidos ya no se identifican únicamente como tradicionalmente se lo hace con los disciplinares, sino que una apropiada refuncionalización redunda en que se los entienda como "conocimientos, actitudes, valoraciones, habilidades, métodos, procedimientos, etc., que se enseñan tanto explícita como implícitamente". Se tipifican en:

a) *conceptuales:* conceptos y teorías, sistematizados y organizados, que configuran el campo de la disciplina;

b) procedimentales: estrategias cognoscitivas generales, habilidades, reglas, métodos que se emplean para producir el conocimiento o para operar sobre *objetos y conceptos,*

c) *actitudinales:* actitudes, valoraciones y disposiciones significativas para el desarrollo personal y social.

2. ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA LINEAL POR COMPETENCIAS

2.1 El caso de la licenciatura en Economía FCE-UNCuyo

Si bien la adhesión a la implantación de un sistema por competencias no está exenta de polémica, particularmente interesante resulta la extrapolación de las ideas expuestas a la asignatura Álgebra Lineal de la carrera Licenciatura en Economía FCE-UNCuyo.

La misma es una asignatura de primer año, primer semestre, con una carga horaria presencial de siete horas semanales. La población está compuesta por sujetos cuyas edades promedio, al momento del comienzo del curso, son 18.3 años para los de sexo masculino y 18.29 para los de femenino. La distribución por género revela que la proporción de sujetos de sexo femenino es levemente superior que la de sexo masculino (50% vs. 49%).

La gestión del aula está basada en una metodología aula-taller. Sintéticamente, se persigue un aprendizaje activo, donde el alumno se apropia de los conocimientos, y, el profesor ejecutor responsable de la administración de la currícula, acompaña este proceso con la sola intención de provocar en aquél la construcción de las ideas básicas del Álgebra Lineal y la posterior reflexión sobre ellas. Ambos- docente y discente- están abiertos a escuchar, a recibir, a incorporar.

Hacia el interior del aula-taller, la actividad se divide en tres momentos:

i. *actividad inicial:* práctica que estimula a los sujetos a poner en acto lo que ya saben, lo que les interesa, o su sentido común, adelantando la elaboración del marco teórico;

ii. *desarrollo del marco teórico:* orientación y guía que el docente, generalmente a partir de un texto informativo, realiza para que los sujetos puedan elaborar el conocimiento que se pretende enseñar;

iii. *actividades de afianzamiento:* tareas que deben permitir que los sujetos reelaboren y recreen el marco teórico, entendidas estas acciones no como una aplicación, sino como una apropiación.

Para gestionar contenidos, se conviene en hacerlo a partir de módulos de aprendizaje, entendidos éstos como "… la unidad de enseñanza y aprendizaje con sentido completo, que integra los conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes requeridas para el logro de una capacidad, a través del desarrollo de diversas experiencias y actividades complejas, que se relacionan con el contexto real del campo laboral. Los módulos deben contemplar: el saber**,** el saber hacer y el saber ser integrados en desempeños prácticos que se ponen en acto en situaciones concretas, mostrando determinados niveles de logro de la conducta o niveles de competencia en el desempeño, los que se expresan curricularmente como indicadores de logro".

Si bien el marco político-pedagógico-institucional en el cual se inserta la titulación mencionada no es flexible, se realiza una desagregación de contenidos según los siguientes criterios:

- *funcionalidad:* en relación a la posibilidad de articularse con otros contenidos, de aplicarse en situaciones diversas para la comprensión, análisis y modificación de la realidad, como mediadores del logro de las capacidades previstas en los objetivos generales de la asignatura;

- *actualización disciplinar:* en cuanto al estado del arte del conocimiento en el área, a modo de aporte a la comprensión del modo en que se elaboran nuevos conocimientos;

- *significatividad psicológica:* en función de las características evolutivas y necesidades de los estudiantes del nivel, como facilitadores del proceso de construcción del conocimiento; resultando – Figura 2.- una organización en torno a cinco ejes disciplinares organizadores.

Hacia el interior de cada uno de los mencionados ejes, las actividades quedan clasificadas según el contenido conceptual que abordan, el contexto al que se refieren y la forma en que se socializan. Presentan distintos niveles de complejidad según sea el ítem propuesto.

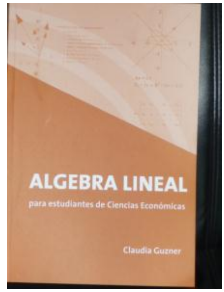
Figura 2. Contenidos Álgebra Lineal FCE-UNCuyo

<table>
<tr><td>CONCEPTUALES
Organizados en torno a seis ejes organizadores disciplinares de los contenidos que articulan.</td><td>PROCEDIMENTALES
Trabajados transversalmente a los contenidos conceptuales, con soporte informático</td><td rowspan="5">ACTITUDINALES
Trabajados transversalmente a los contenidos conceptuales.
Comunicación oral y escrita, intercambio y confrontación de ideas, opiniones, experiencias, en un marco de respeto mutuo, tomar decisiones, manejar conflictos interpersonales</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Matrices y determinantes: introducción de herramientas matemáticas necesarias para la manipulación de grandes conjuntos de datos, así como para el tratamiento algebraico de las relaciones lineales entre variables de distinta índole</td></tr>
<tr><td>Orden, elemento, igualdad- Trasposición, simetría, antisimetría- Algebra de matrices: suma, diferencia, producto por un escalar, multiplicación, potencia- Matrices elementales, matrices equivalentes- Inversión- Determinante</td><td>Identificar, interpretar, comparar, operar, relacionar, clasificar, generalizar</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Sistemas de ecuaciones lineales: tratamiento del Álgebra a un nivel lógico y específico, principalmente orientado a la resolución de problemas, que potencia la aplicación del Álgebra a otros campos del conocimiento</td></tr>
<tr><td>Matrices y sistemas - Eliminación gaussiana- Sistemas lineales y matriz inversa</td><td>Detectar problemas y resolverlos, tomar decisiones, elaborar informe, planificar, obtener manejar y procesar información</td></tr>
</table>

3. Vectores en R^2 y R^3: introducción a la geometría vectorial.		
Segmentos de recta - Vector como segmento de recta dirigido- Vectores equivalentes- Vectores en el plano: igualdad, dirección, norma, paralelismo, suma, diferencia, producto por un escalar, producto escalar- Vectores en el espacio: igualdad, dirección, paralelismo, ángulos directores, suma, diferencia, recta, combinación lineal, producto escalar, plano	Comparar, relacionar, clasificar, ordenar	
4. Espacios vectoriales: sistematización del concepto de vector, desde una perspectiva analítica, avanzando hacia un nivel de abstracción que permite desarrollar un aprendizaje intuitivo, global y formal del comportamiento de diferentes conjuntos.		
Espacios vectoriales- Subespacios- Espacio generado por un conjunto de vectores- Espacios asociados a una matriz- Independencia lineal, base y dimensión	Deducir, identificar, interpretar, comparar, relacionar, clasificar, generalizar	
5. Diagonalización: desarrollo de algunas herramientas matemáticas necesarias para el estudio de problemas dinámicos		
Autovalores y autovectores- Espacios propios- Diagonalización	Representar, intuir, describir, construir, generalizar	
6.Transformaciones lineales: abordaje una herramienta matemática apta para manipular un tipo especial de funciones que ocurren a menudo en un número importante de aplicaciones.		
Núcleo imagen de una transformación lineal- Matriz asociada a una transformación lineal- Semejanza	Identificar, interpretar, operar, relacionar, clasificar, generalizar	

Fuente: elaboración propia

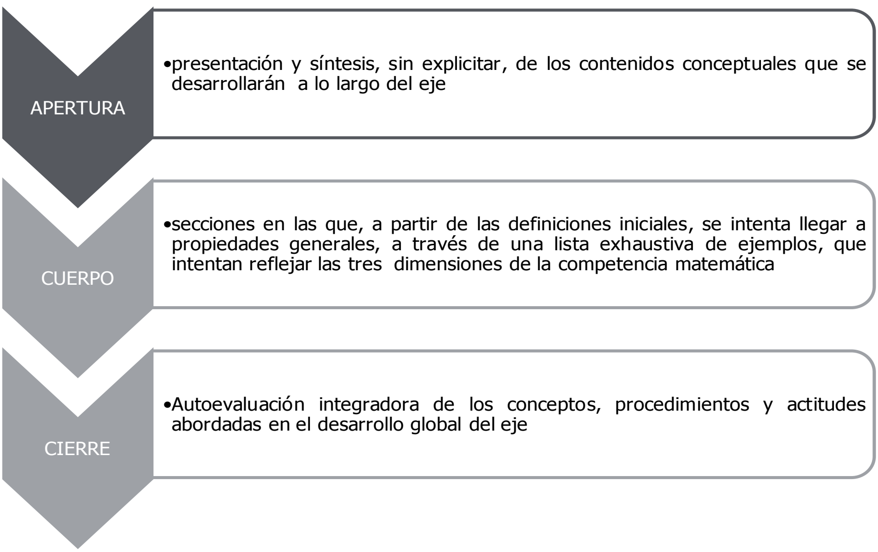
2.2 Álgebra Lineal para estudiantes de Ciencia Económicas



Las derivaciones obtenidas llevaron a concretar la redacción de un texto de Álgebra Lineal especialmente orientado a alumnos de Ciencias Económicas. La primera edición tuvo lugar en el año encontrándose en la actualidad en uso la segunda edición, fruto de la revisión y ajustes posteriores al primer año de uso.

La versión impresa consta de seis capítulos, cada uno de los cuales, en correspondencia con la metodología descrita up Sutra consta de una apertura, un cuerpo y un cierre. Cada capítulo se organiza en secciones.

Figura 3. Estructura capítulos Álgebra Lineal para estudiantes de Ciencias Económicas



Fuente: elaboración propia.

La presentación recurre a diferentes registros de representación semiótica –lenguaje coloquial, lenguaje simbólico, lenguaje computacional, tablas-. Asimismo, se retrotrae a contenidos abordados en capítulos anteriores y se los trabaja desde los nuevos que se están aprendiendo, a fin de mostrar la coherencia interna del Álgebra.

Cada sección finaliza con una serie de EJERCICIOS y PROBLEMAS, siendo el primero de la lista una reflexión "algebraica" sobre la actividad de comienzo de capítulo. Los ejercicios, al igual que los ejemplos, se organizan en torno a las tres dimensiones de la competencia matemática.

El Anexo 1. ilustra la propuesta en el caso particular del contenido MATRICES Y DETERMINANTES.

3. CONCLUSIONES

El surgimiento de un nuevo modelo productivo, fundado en la utilización intensiva del conocimiento, obliga a revalorizar la gestión del saber y de la información. Sin perder de vista el horizonte de la calidad en educación –formal o informal-, ni el interés por sus resultados y efectos en el ámbito personal y social de los sujetos, una adaptación a la realidad actual se torna imprescindible y se considera que el enfoque por competencias responde a aquellos nuevos requerimientos del contexto.

En este marco, se considera que las ideas plasmadas en el texto Álgebra Lineal para estudiantes de Ciencias Económicas atienden a las tres categorías teóricas – saber, saber hacer y saber ser -, las cuales contemplan tanto a los aspectos más formales de la disciplina como a los de modelización y resolución de problemas y confrontación de resultados.

En relación a los logros obtenidos a la fecha, no puede decirse que sean representativos ni de todos los alumnos, ni de todas las instituciones, ni de todo el currículo, pero, en nuestra opinión, es una buena aproximación a la problemática planteada. Habrá que ampliar la llegada a más actores del sistema educativo, y diseñar bibliotecas como las explicitadas para la enseñanza de otros objetos matemáticos.

Si bien la adhesión a la implantación de un sistema por competencias no está exenta de polémica, no puede soslayarse que el avance hacia la educación por competencias optimiza la educación integral, ya que el enfoque recupera el valor instrumental del conocimiento, tornándolo relevante.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barentt, R. (2001): *Los límites de la competencia. El conocimiento, la educación superior y la sociedad*. Barcelona, Gedisa.

Delors, J. (1996): *La educación encierra un tesoro*. Madrid, Santillana Unesco.

Dolz, J. y Ollagnier, E. (2000): *La notion de compétence: nécessité ou vogue éducative*. En: Raisons éducatives, v1999/1-2(2). Bruselas. De Boeck Université.

Gonczi, A. (2002): *Teaching and Learning of the Key Competencies*. Presentation at DeSeCo's 2nd International Symposium. Neuchâtel, Switzerland. Swiss Federal Statistical Office.

Goody, J. (2001): *Competencies and Education: Contextual Diversity*. In D. S. Rychen& L. H. Salganik (Eds.), *Defining and Selecting Key Competencies* (pp. 175–190). Göttingen, Germany. Hogrefe & Huber.

Gonzalez, J. Y Wagenaar, R. (2003): *Tuning Educational Structures in Europe*. Informe Final. Fase 1. Bilbao: Universidad de Deusto. Barcelona, Graó.

Guzner, C. (2005): *Las NTIC como recurso para la gestión por competencias de un aula universitaria*. España, Organización de Estados Iberoamericanos.

Guzner, C. y Del Vecchio, S. (2008): A*proximaciones conceptuales a la noción de competencias.* Argentina, FCE-UNCuyo

Guzner, C. (2010): *Un estudio descriptivo exploratorio en relación a las competencias y la teoría curricular*. En Educación basada en competencias. Enfoques y perspectivas. Capítulo 3. Argentina, EDIUNC.

Guzner, C. y otros (2010): *Un aporte a la formación docente desde la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática para la integración de las NTIC´s a las prácticas aúlicas.* Capítulo de libro La tecnología educativa al servicio de la educación tecnológica. Argentina. edUTecNe.

Guzner, C (2012): *Álgebra Lineal para estudiantes de Ciencias Económicas.* Argentina. Talleres Gráficos de Dirección de Publicaciones FCE-UNCuyo.

Guzner, C. y Del Vecchio, s. (2012): *La concreción del enfoque basado en competencias, aplicaciones en el nivel microcurricular.* España, EAE.

IBERFOP-OEI, (1998): *Metodología para definir competencias.* Madrid, CINTER/OIT.

LeBoterf, G. (2000): *Ingeniería de las competencias*. Barcelona, Gestión.

MorinN, E. (2000): *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro*. Barcelona, Paidós.

Perrenoud, P. (1999): *Construir competencias desde la escuela*. Santiago de Chile, Dolmen.

Rue, J. (2002): *Qué enseñar y por qué. Elaboración y desarrollo de proyectos de formación*. Barcelona, Paidós.

Thierry García, D. (2001): *La educación y capacitación basadas en competencias. Modelos y metodologías*. España, Revista Iberoamericana de Educación.

ANEXO 1

Al consultar:

http://mip.cba.gov.ar/matriz.php?idMatriz=1&nombreMatriz=Matriz%20Insumo%20-%20Producto%20(%20simétrica)

Encontrará los sectores y subsectores en que se divide la economía de la provincia de Córdoba y las transacciones intersectoriales en miles de pesos corrientes a precios de mercado en un año dado.

Responda:

i. ¿Cuáles son los sectores en que se divide la economía de la provincia de Córdoba?

ii. ¿Cuáles son los subsectores del sector A. y B. AGRICULTURA, GANADERIA, CAZA, SILVICULTURA Y PESCA?

Para el sector A. y B. AGRICULTURA, GANADERIA, CAZA, SILVICULTURA Y PESCA:

i. Si se consideran los subsectores:

○ CULTIVOS DE CEREALES, OLEAGINOSAS Y PASTOS FORRAJEROS;

○ CULTIVO DE HORTALIZAS, LEGUMBRES, FLORES Y PLANTAS ORNAMENTALES;

○ CULTIVO DE FRUTAS;

○ CULTIVOS INDUSTRIALES;

○ PRODUCCION DE SEMILLAS;

se obtendrán los datos[1] de la Figura 1.

ii. Diga en relación a los datos:

○ ¿Qué representa el número 2.138,7563? Podría darse otra interpretación del mismo valor?

○ ¿Cuál es, en miles de pesos, la compra que el subsector PRODUCCION DE SEMILLAS realiza en el de CULTIVOS INDUSTRIALES?

○ ¿La compra que realiza el subsector PRODUCCION DE SEMILLAS en el subsector CULTIVO DE FRUTAS es la misma que realiza éste último en el primero?

[1] N. del autor: eventualmente, los datos serán truncados para facilitar los cálculos.

Responda:

¿Qué se le debería agregar al cuadro anterior si se desea registrar también las transacciones con el subsector CRIA DE GANADO, PRODUCCION DE LECHE Y LANA?

Responda:

iii. ¿Cómo deberían rotularse las filas y las columnas del siguiente cuadro de números – Figura 2.- para que el mismo represente las transacciones entre los subsectores CULTIVOS DE CEREALES, OLEAGINOSAS Y PASTOS FORRAJEROS; CULTIVO DE HORTALIZAS, LEGUMBRES, FLORES Y PLANTAS ORNAMENTALES; CULTIVO DE FRUTAS; CULTIVOS INDUSTRIALES Y PRODUCCION DE SEMILLAS?

↓ columnas

→ filas

329.959,502	2.138,75634	0,1830472	111,72205	4.694,16047
0	15.129,6233	0,00144882	0,84512902	0
0	0	0	0	0
11,6866011	6,64337222	0,00056858	0,36926404	8,33819351
10.717,3386	82,5188808	0,00706245	4,42844855	177,543136

iv. ¿Cómo deberían rotularse las filas y columnas del siguiente cuadro - Figura 3.- de forma tal que la información represente las transacciones entre los subsectores CULTIVOS DE CEREALES, OLEAGINOSAS Y PASTOS FORRAJEROS; CULTIVO DE HORTALIZAS, LEGUMBRES, FLORES Y PLANTAS ORNAMENTALES; CULTIVO DE FRUTAS; CULTIVOS INDUSTRIALES Y PRODUCCION DE SEMILLAS?

↓ columnas

→ filas

329.959,502	0	0	11,6866011	10.717,3386
2.138,75634	15.129,6233	0	6,64337222	82,5188808
0,1830472	0,00144882	0	0,00056858	0,00706245
111,72205	0,84512902	0	0,36926404	4,42844855
4.694,16047	0	0	8,33819351	177,543136

Consulte: www.indec.gov.ar búsqueda temática Cuentas Nacionales / Matriz insumo producto.

Encontrará los sectores y subsectores en que se divide la economía nacional y las respectivas transacciones intersectoriales en miles de pesos corrientes a precios de mercado en un año dado.

Diga cuál es **a nivel nacional** la compra que el subsector CULTIVO DE CEREALES, OLEAGINOSAS Y FORRAJERAS realiza en el de PRODUCCIÓN DE SEMILLAS.

Diga, de ser posible, cuál es **a nivel nacional** la compra que el subsector CULTIVO DE CEREALES, OLEAGINOSAS Y FORRAJERAS realiza en el de CULTIVO DE FRUTAS.

Construya un cuadro que muestre las transacciones intersectoriales nacionales entre los sectores CULTIVOS DE CEREALES, OLEAGINOSAS Y PASTOS FORRAJEROS; CULTIVO DE HORTALIZAS, LEGUMBRES, FLORES Y PLANTAS ORNAMENTALES; CULTIVO DE FRUTAS; CULTIVOS INDUSTRIALES Y PRODUCCION DE SEMILLAS.

A partir de los datos de 3. y 8., responda:

v. ¿Es posible obtener la información relativa a transacciones intersectoriales en el país, sin considerar la región Córdoba, entre los CULTIVOS DE CEREALES, OLEAGINOSAS Y PASTOS FORRAJEROS; CULTIVO DE HORTALIZAS, LEGUMBRES, FLORES Y PLANTAS ORNAMENTALES; CULTIVO DE FRUTAS; CULTIVOS INDUSTRIALES Y PRODUCCION DE SEMILLAS?

vi. Si su respuesta es afirmativa, ¿qué debería tenerse en cuenta?

Si se estima que el crecimiento en el nivel de transacciones intersectoriales **en el país** será constante e igual al 3% anual:

vii. Responda: ¿sería posible obtener la nueva información a partir de los datos actuales?

viii. Si su respuesta es afirmativa, obtenga el cuadro de transacciones intersectoriales para los mismos sectores:

- correspondientes al año 2005,
- correspondiente al año en curso.

Si en 1. Los sectores de la Economía de Córdoba se agrupan sólo en tres: Sector I o PRIMARIO DE ACTIVOS EXTRACTIVOS, Sector II o MANUFACTURERO y Sector III o de SERVICIOS **no stockeable.**

Responda:

ix. ¿A qué sector de estos tres pertenecen los subsectores de 2.?

x. ¿El subsector ELECTRICIDAD, pertenece al Sector MANUFACTURERO?

xi. ¿Qué subsectores componen el Sector SERVICIOS?

xii. ¿Cómo se interpreta el siguiente cuadro – Figura 4.- de transacciones intersectoriales?

	SECTOR I	**SECTOR II**	**SECTOR III**
SECTOR I	2.392.169,324	2.758.564,737	284.330,6231
SECTOR II	290.720,717	2.414.017,046	1.350.511,12
SECTOR III	577.262,452	1.188.497,866	4.666.116,526

xiii. ¿Qué representa el valor 5.435.064,685?

xiv. ¿Cuál es el total de ventas del Sector II?

xv. ¿Cuál es el total de compras del Sector I?

De 1. también se obtienen los siguientes datos, que representan, respectivamente, las demandas internas de cada uno de los Sectores I, II y III: 11.396.905,7; 17.278.884,7 y 25.221.688,7.

xvi. Construya un nuevo cuadro que incorpore estos valores.

xvii. Diga qué representan los valores :

- 16.831.970,4; 21.334.133,6 y 31.653.565,5;
- $\frac{290.720,717}{16.831.970,4}$.

xviii. Responda qué representa el siguiente cuadro – Figura 5.-, llamado *matriz de coeficientes técnicos*.

	0,142120576	0,129302872	0,008982578
	0,017271936	0,113152805	0,042665371
	0,034295596	0,055708748	0,147412035

Si se supone que los coeficientes técnicos se mantienen constantes durante dos años consecutivos, y x_i es la compra total que subsector i realiza en esos años, responda qué representa:

xix. $$x_1 \begin{bmatrix} 0{,}142120576 \\ 0{,}017271936 \\ 0{,}034295596 \end{bmatrix}$$

xx. $$\begin{array}{lcl} 0{,}142120576\, x_1 + 0{,}129302872\, x_2 + 0{,}008982578\, x_3 \\ 0{,}017271936\, x_1 + 0{,}113152805\, x_2 + 0{,}042665371\, x_3 \\ 0{,}034295596\, x_1 + 0{,}055708748\, x_2 + 0{,}147412035\, x_3 \end{array}$$

Recapitulando, en:

1. Se construye un cuadro de números dispuestos en líneas verticales y horizontales;
2. Se interpreta la información en función de la relación entre cada una de las líneas horizontales y cada una de las líneas verticales del cuadro construido según 1.;
3. Se interpreta un dato del cuadro construido según 1. en función de su posición dentro del mismo;
4. Se observa cómo cambia el cuadro construido según 1. si se agregan nuevos datos;
5. Se reconstruye la información a partir de un nuevo cuadro de números ordenados por filas y columnas sin rotular, de dos maneras diferentes;
6. Se procede como en 1., con los mismos datos relevados para otros actores;
7. Se procede como en 2., con los datos de 6;
8. Se procede como en 3., con los datos de 6;
9. Se opera con los cuadros 3. y 8. para obtener la misma información para otros actores;
10. Se opera con el cuadro 8. indistintamente 3. para obtener información relativa a los mismos actores, en otros períodos;
11. Se interpretan valores en un nuevo cuadro;
12. Se interpretan valores en un nuevo cuadro y se presenta la *matriz de los coeficientes técnicos*;

13. Se interpreta información obtenida a partir de los nuevos cuadros y de los nuevos datos.

1.1 Definiciones básicas

Definición 1.	Una **matriz** es un **arreglo** de **números** dispuestos por **filas y** por **columnas.**

- Las **matrices** se nombran con letras mayúsculas **A**, **B**, etc.
- Un **elemento** de una matriz se identifica con la **letra minúscula respectiva** a, b, etc. y **dos subíndices**, **uno** por la **fila** y **otro** por la **columna** en la cual se encuentra.

Ejemplo:

xxi. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 12 & \frac{1}{2} & 0.5 \end{bmatrix}$:

- A es una matriz de orden 2x3;
- $a_{11} = 1$; $a_{12} = -1$; $a_{13} = 0$; $a_{21} = 12$; $a_{22} = \frac{1}{2}$; $a_{23} = 0.5$;
- A no es una matriz columna, A tiene tres columnas;
- A no es una matriz fila, A tiene dos filas;
- A no es una matriz cuadrada, A es una matriz rectangular;
- A no es una matriz triangular, A no es una matriz cuadrada;
- A no es una matriz diagonal, A no es una matriz cuadrada.

Ejercicios y Problemas

Antes de encarar la resolución de los siguientes ejercicios y problemas, **revise cuidadosamente** las notaciones específicas y propiedades enunciadas y/ o demostradas relativas a:

matriz; elemento de una matriz; orden de una matriz; ; matrices cuadradas; igualdad de matrices; matriz traspuesta; matriz simétrica; matriz antisimétrica.

Identifique las tareas que en los ítems 1-13 págs. 1- 4 corresponden a los conceptos de:

- matriz;
- elemento de una matriz;
- orden de una matriz;
- igualdad de matrices;
- matriz traspuesta.

Dada la matriz A = $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{...} \\ \mathbf{..} & \mathbf{1} \\ \mathbf{...} & \mathbf{...} \end{bmatrix}$, indique si es posible completar las columnas de A de forma tal que se cumplan cada una de las condiciones que se listan a continuación. Si su respuesta es afirmativa, muestre la matriz A.

xxii. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. ☐

xxiii. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. ☐

xxiv. $a_{31} = 2$. ☐

xxv. $a_{21} = a_{12}$. ☐

xxvi. A es una matriz simétrica. ☐

xxvii. A es una matriz triangular superior. ☐

xxviii. A es una matriz columna. ☐

Escriba, de ser posible, una condición:

xxix. Necesaria y suficiente para que la traspuesta de una matriz sea una matriz de orden mxn;

xxx. Necesaria y suficiente para que la traspuesta de una matriz sea una matriz simétrica;

Suponga que tres empresas – A, B, C- comparten actualmente el mercado de un cierto bien. Para el año entrante, se espera un cambio en las preferencias de los consumidores representado por la matriz $T = \begin{bmatrix} .85 & .1 & .1 \\ .05 & .55 & .05 \\ .1 & .35 & .85 \end{bmatrix}$.

xxxi. Responda:

- ¿Qué significa el valor t_{11}?
- ¿Qué significa el valor t_{23}?
- por qué los elementos de cualquier columna de la matriz T suman 1?
- ¿Cómo debería cambiar la matriz T si para el año subsiguiente si se espera que 0.18 clientes de la empresa B cambien sus preferencias a la empresa C?

xxxii. Escriba una matriz T que represente el cambio, en un cierto período, de preferencias en los consumidores de cierto bien cuyo mercado es compartido por cuatro empresas.

Consulte – en el sitio de la Dirección de Estadísticas y censos de la provincia de Mendoza (www.deie.mendoza.gov.ar) - la página correspondiente a temáticas/ participación electoral.

xxxiii. Si se desea confeccionar una matriz A que represente el número de votos emitidos en las últimas elecciones presidenciales, discriminados por departamento y por positivos, en blanco y anulados, responda:

- ¿Cuál es el orden de la mencionada matriz A?
- ¿$a_{11} = 0$?
- ¿A es una matriz simétrica?

xxxiv. Si se construyera una matriz B con iguales características que la matriz A, pero respecto del año 2003, responda: qué tiene en común las matrices A y B?

Una empresa produce cantidades no negativas $z_1, z_2, \ldots, z_n$ de n bienes distintos, a partir de cantidades no negativas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de los mismos bienes.

Para cada i entre 1, .., n se define la producción neta del bien i como como $y_i = z_i - x_i$. Si p_i es el precio unitario del bien i, sean las matrices:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ \ldots \\ p_n \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \ldots \\ z_n \end{bmatrix}$$

Matriz de precios	matriz de inputs	matriz producción neta	matriz producción

xxxv. Suponiendo que la empresa produce y vende el total de sus n bienes, calcule los ingresos y costos de la empresa.

xxxvi. Suponiendo que la empresa produce y vende el total de sus n bienes, determine una expresión que le permita calcular las ganancias totales de la empresa.

xxxvii. Suponga que la empresa tiene tres plantas, A, B, C, cada una de las cuales produce los n bienes. Suponga además que a_i representa la producción del bien i i entre 1 y n en la planta A, b_ii entre 1 y n la producción del bien i en la planta B y c_i la producción del bien i i entre 1 y n en la planta C. Suponga además que los precios unitarios de cada bien en las tres plantas son los mismos.

- Escriba una matriz que represente la producción en las tres plantas;
- Indique los ingresos en las tres plantas mediante una única operación matricial.

Ejemplo:

$\begin{bmatrix} 1100 & 660 \\ 1232 & 686.4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 56000 \\ 59560 \end{bmatrix}$ representa la cantidad de empleados jerárquicos y no jerárquicos con que cuenta la empresa del **Ejemplo**. Sección 1.2.2**,** si:

- En un nuevo contrato, se conviene en aumentar los aportes mensualmente y por individuo el 12% para el personal jerárquico y el 4% para el personal no jerárquico;
- Y el monto total de $56000 aportado por la empresa mensualmente aumenta a $59560 después del nuevo contrato.

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

Lea atentamente la siguiente definición:

Una matriz cuadrada es ortogonal si y sólo si su inversa es igual a su transpuesta.

xxxviii. Escriba la definición de matriz ortogonal en símbolos.

xxxix. Compruebe que:

- $\mathbf{I}_2$ es una matriz ortogonal;
- Q = $\mathbf{I} - 2UU^T$ es una matriz ortogonal si $U^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

xl. Proporcione, de ser posible, un ejemplo de una matriz ortogonal de orden 2 distinta de la de ii. Sugerencia: utilice Mathematica.

xli. Proporcione, de ser posible, un ejemplo de una matriz ortogonal de orden 3.

xlii. Para las matrices de ii. respectivamente iii. tenga en cuenta que cada columna C_j j = 1, 2 respectivamente j = 1, 2,3 es una submatriz de orden 2x1 respectivamente 3x1 y verifique que:

- $C_h^T\ C_k$ **$h \neq k$; h, k = 1,2 es cero respectivamente $h \neq k$; h, k = 1, 2, 3;**
- $C_h^T\ C_h$ h = 1,2 es uno respectivamente h =1, 2, 3.

xliii. Diga por qué sí o por qué no es suficiente que una matriz cuadrada A = $\begin{bmatrix} C_1 & \ldots & C_n \end{bmatrix}$ satisfaga que $C_h^T\ C_k$ $h \neq k$; h, k = 1,..., n sea cero y $C_h^T\ C_h$ h = 1,2,..,n sea uno para que A sea una matriz ortogonal. Responda: la condición también es necesaria?

xliv. Responda, justificando su respuesta:

- Si A es una matriz ortogonal de orden n, cuánto vale det A?
- Si A y B son matrices ortogonales conformables, puede decir lo mismo de AB? Y de A+B?

xlv. Diga por qué sí o por qué no si A es una matriz ortogonal, existe una única **X** conformable con A tal que la igualdad matricial A**X**= B tiene solución, para cualquier B.

ANÁLISIS ESTÁTICO Y DINÁMICO DEL MODELO DE PATINKIN

Nicolás Giri
Priscila Fischer

INTRODUCCIÓN

El modelo de Patinkin es de aparición recurrente en materias como "Dinero, crédito y bancos" entre otras. Sin embargo, al querer consultar bibliografía, el alumno se encuentra con un desarrollo del modelo demasiado complejo. Por este motivo se decidió escribir el presente trabajo, de manera que se encuentre disponible un análisis más simple del modelo que permita llegar a los mismos resultados.

Se utilizará el modelo de Patinkin como eje para desarrollar dos temas centrales de la materia "Matemática para Economistas": el análisis estático y el análisis dinámico.

En primera instancia se realizará una breve reseña del modelo, para luego trabajar con el análisis dinámico. Resolviendo por una aproximación lineal (mediante una expansión de Taylor) se buscará la ecuación característica para poder conocer las raíces y así determinar la convergencia del modelo.

Finalmente, como el modelo tiende al equilibrio, se desarrollará el análisis estático del mismo. Se buscará estudiar el efecto de un cambio de preferencia en la liquidez sobre los valores de equilibrio del modelo.

1. MODELO

El modelo de Patinkin es una teoría monetaria en una economía de producción que funciona en un régimen de competencia perfecta y bajo los supuestos de pleno empleo.

El modelo posee un total de 11 ecuaciones que reemplazadas en las respectivas ecuaciones de equilibrio se pueden reducir al siguiente sistema:

Mercado de trabajo	$Q\left(\frac{w}{p}; K_0\right) = R\left(\frac{w}{p}\right)$
Mercado de Mercancías	$F\left(Y_0; r; \frac{M_0}{p}\right) = Y_0$
Mercado de Valores	$r\,p\,H\left(Y_0; \frac{M_0^H}{p}; \frac{1}{r}\right) = r\,p\,J\left(Y_0; \frac{M_0^F}{p}; \frac{1}{r}\right)$
Mercado de dinero	$p\,L\left(Y_0; \frac{M_0^F}{p}; r\right) = M_0$

Para simplificar el modelo se va a suponer que existe una reacción instantánea a la presión ejercida por el excedente de demanda u oferta en el mercado de trabajo.

Si el mercado de trabajo, mercancías y valores está en equilibrio, por medio de la ley de Walras podemos afirmar que el mercado de dinero estará en equilibrio también.

De esta manera se circunscribe el modelo a los mercados de valores y mercancías para simplificar el trabajo.

2. ANÁLISIS DINÁMICO

Se parte de las ecuaciones del mercado de bienes y valores para el análisis:

B (Y0; 1/r; $\frac{M_0}{p}$)=0

F (Y0; r; $\frac{M_0}{p}$) = Y0

Luego, se expresa en función de excesos de demanda

B (Y0; 1/r; $\frac{M_0}{p}$)=0

F (Y0; r; $\frac{M_0}{p}$)- Y0=0

Para facilitar el análisis, se trabajará en el mercado de bienes con el precio de los bonos en vez de con la tasa de interés. Siendo de esta forma el precio de los bonos y el precio de los bienes las variables endógenas de nuestro modelo.

Ecuación de exceso de demanda de bonos=B (Y0; Pb; M0; P)=0

Ecuación de exceso de demanda de bienes=F (Y0; Pb; M0; P)=0

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial B}{\partial Pb} & \frac{\partial B}{\partial p} \\ \frac{\partial F}{\partial Pb} & \frac{\partial F}{\partial p} \end{pmatrix}$$

Para que el sistema sea estable el determinante de la matriz Jacobiana evaluada en el punto de equilibrio debe ser mayor a cero y su traza negativa.

El comportamiento de las derivadas parciales es el siguiente:

$$\frac{\partial B}{\partial Pb} < 0$$

A medida que sube el precio de los bonos cae el exceso de demanda de los mismos:

$$\frac{\partial F}{\partial p} < 0$$

Si sube el precio de los bienes cae la demanda de los mismos:

$$\frac{\partial B}{\partial p} < 0$$

El aumento de precios provoca un aumento en la misma proporción de las cantidades ofrecidas de bonos. Si los precios suben las firmas quieren producir más y por lo tanto ofertan más bonos. La oferta por el aumento de precios es mayor que el aumento de la demanda, lo cual implica que caiga el exceso de demanda de bonos.

$$\frac{\partial F}{\partial Pb} > 0$$

Si sube el precio de los bonos las familias que poseen su riqueza en bonos, serán más ricas y consumirán más bienes, generando un Exceso de demanda de bienes

Se concluye entonces que:

$$|J| = \frac{\partial B}{\partial Pb} * \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial p} * \frac{\partial F}{\partial Pb} > 0$$

$$|J| = (-) * (-) - (-) * (+) > 0$$

El signo del determinante de la matriz Jacobiana es positivo.

La traza de la matriz Jacobiana evaluada en el punto de equilibrio está dada por

$$TrJ = \frac{\partial B}{\partial Pb} + \frac{\partial F}{\partial p} = (-) + \ (-) < 0$$

Por lo tanto el sistema es dinámicamente estable.

3. ANÁLISIS ESTÁTICO

Se verá ahora como afecta el cambio de una preferencia por la liquidez a los valores de equilibrio del modelo, para ello se realizará un análisis estático del modelo en cuestión agregándole a este una variable adicional ($1/\ \alpha$), que representa la preferencia por la liquidez.

B (Y0; Pb; M0; P; 1/α)=0

F (Y0; Pb; M0; P)=0

Primero se comprobará que cumpla las condiciones necesarias para la aplicación del análisis estático:

Todas las funciones del sistema anterior poseen derivadas parciales continuas respecto a todas las variables (ya se analizaron sus signos previamente), el determinante jacobiano en un punto que satisface el equilibrio del sistema resulta positivo, y por lo tanto distinto de cero. Entones es válido realizar el análisis.

Luego se diferencia las ecuaciones con respecto a $1/\alpha$ se obtiene:

$$\frac{\partial B}{\partial Pb}\frac{\partial Pb}{\partial(1/\alpha)}+\frac{\partial B}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial(1/\alpha)}-1/\alpha^2=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial Pb}\frac{\partial Pb}{\partial(1/\alpha)}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial(1/\alpha)}=0$$

Se expresa el sistema en su forma matricial

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial B}{\partial Pb} & \frac{\partial B}{\partial p}\\ \frac{\partial F}{\partial Pb} & \frac{\partial F}{\partial p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial Pb}{\partial(1/\alpha)}\\ \frac{\partial p}{\partial(1/\alpha)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\alpha^2\\ 0\end{pmatrix}$$

A través del Método de Cramer se buscan las incógnitas, que en este caso son las derivadas parciales de las variables endógenas respecto de la variable $1/\alpha$.

$$\frac{\partial Pb}{\partial(1/\alpha)}=\frac{\begin{vmatrix}1/\alpha^2 & \frac{\partial B}{\partial p}\\ 0 & \frac{\partial F}{\partial p}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial B}{\partial Pb} & \frac{\partial B}{\partial p}\\ \frac{\partial F}{\partial Pb} & \frac{\partial F}{\partial p}\end{vmatrix}}=\frac{-}{+}<0$$

$$\frac{\partial p}{\partial(1/\alpha)}=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial B}{\partial Pb} & 1/\alpha^2\\ \frac{\partial F}{\partial Pb} & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial B}{\partial Pb} & \frac{\partial B}{\partial p}\\ \frac{\partial F}{\partial Pb} & \frac{\partial F}{\partial p}\end{vmatrix}}=\frac{-}{+}<0$$

Se puede concluir que un aumento de la preferencia por la liquidez trae como consecuencia la caída del precio de los bonos, dado que los individuos preferirán tener más saldos reales y por lo tanto ante la falta de demanda, se genera un exceso de oferta de los mismos, que hace caer su precio.

En la segunda derivada se puede observar que un aumento de la liquidez provoca a su vez una disminución de los precios de los bienes, ya que las familias desean mantener sus saldos reales y como consecuencia reducen su consumo de bienes.

4. CONCLUSIONES

A través de una simplificación del modelo original se comprobó la estabilidad del mismo y se realizó un análisis estático que arrojó como resultado el impacto negativo de un aumento de la preferencia por la liquidez en el precio de los bonos y en los precios de los bienes. Siendo estos resultados coincidentes, como era de esperarse, con los del modelo original.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bernardello, A., Bianco M.J., Casparri M.T., García FrontiJ. I. y Olivera de Marzana S. (2004): *Matemática para Economistas*. Buenos Aires, Omicron System.

Chiang, A. (2006): *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*. México DF, McGraw-Hill Interamericana.

Patinkin, D. (1959): *Dinero, Interés y Precio.* Madrid, Aguilar.

LA TRAMPA DE POBREZA EN ARGENTINA[1]

Saif Ellafi
Gonzalo Garcia
Agostina Santurio
Ana Silvia Vilker

INTRODUCCIÓN

El siguiente trabajo ha tomado como punto de partida el modelo económico desarrollado por Jeffrey Sachs llamado "La trampa de pobreza". El reconocido economista estadounidense ha debatido durante años acerca de la problemática de los países con elevado endeudamiento externo, sumidos en el estancamiento económico. Dentro de las actividades del autor se destacan la participación en "El proyecto del milenio" de las Naciones Unidas (ONU), en el que se propusieron 8 objetivos a cumplir hasta el año 2015 para mejorar las condiciones sociales de los países más empobrecidos del mundo.

El modelo a ser analizado surge de uno de sus informes llamado "Resolviendo las crisis de deuda de países de bajos ingresos" publicado en el año 2002, posteriormente mencionado en su libro "El fin de la pobreza" (2005).

El objetivo del trabajo es estimar con los valores reales de las variables del modelo correspondientes a Argentina entre los años 1993 y 2006, para analizar los resultados obtenidos del mismo, con la meta de observar si Argentina superó o no el valor del capital necesario para no caer en la "trampa de pobreza".

1. EL MODELO

El modelo de la trampa de pobreza, analiza variables económicas per cápita que contemplan el ahorro, el ingreso, el nivel de endeudamiento y la ayuda externa, como también el nivel y la evolución del capital. El objetivo es buscar el nivel óptimo de capital, o también llamado de equilibrio, a partir del cual la economía de un país pueda entrar en un proceso de crecimiento. El capital de equilibrio se obtiene a partir de la resolución de una ecuación diferencial de grado uno que se deduce de la ecuación de acumulación de capital y de las condiciones del modelo.

Al comparar dicho resultado con el capital real per cápita, se podrá concluir si la economía del país en estudio se encuentra atrapada en una trampa de pobreza

[1] Este trabajo se realizó en el marco de los proyectos UBACyT 432: Riesgo de precios de *commodities*: Propuesta de elaboración de un índice para América Latina, dirigido por Ana S. Vilker y UBACyT 478: Aspectos financieros que impactan en dinámicas industriales innovadoras en Argentina: Agro, Medicamentos y Turismo, dirigido por María Teresa Casparri.

o no. Es decir, cuando el capital real es inferior al de equilibrio se estará ante una trampa de pobreza y en caso contrario el país no se encontrará atrapado en la pobreza y su economía estará apta para crecer.

1.1 Presentación del modelo

En este apartado se presentarán las variables del modelo y las ecuaciones que lo conforman, así como también la resolución del mismo para luego derivar en su análisis y aplicación.

El modelo examinará las siguientes variables:

s: Ahorro per cápita

y: Ingreso per cápita

σ: Propensión Marginal del ahorro

m: Línea de Pobreza

q: Producto

f: Ayuda externa

d: Servicios de deuda

n: Tasa de crecimiento de la población

δ: Tasa de depreciación del capital

El análisis parte de la ecuación representativa del ahorro en función del ingreso, la línea de pobreza y la propensión marginal al ahorro. Si se encuentra en el caso de un país en el que los ingresos per cápita son inferiores a la línea de pobreza, no permitiendo cubrir las necesidades básicas, entonces no hay ahorro. En cambio, cuando el ingreso supera dicha línea, existe la posibilidad de ahorro en base a una propensión marginal, es decir por cada peso que el ingreso supere a la línea de pobreza, el individuo ahorrará σ pesos.

$$(1)\ \ s = \begin{cases} 0 & si\ y < m \\ \sigma(y - m) & si\ y > m \end{cases}$$

El ingreso resulta de la suma de la producción nacional y la ayuda externa menos los pagos de los servicios de la deuda:

$$(2)\quad y = q + f - d$$

Así reemplazando (2) en (1) se obtiene una reexpresión del ahorro en función de las últimas variables mencionadas:

$$(3)\ \ s = \begin{cases} 0 & si\ y < m \\ \sigma(q + f - d - m) & si\ y > m \end{cases}$$

Como aclaración el autor destaca que la diferencia entre la ayuda externa y los servicios de la deuda no alcanzan a cubrir la línea de pobreza ($f - d < m$). Por lo tanto será necesario tener una producción mayor a la parte no cubierta de las necesidades básicas para poder ahorrar ($q > m - f + d$). Ahora bien, el producto será expresado como una función lineal del capital:

(4) $q = Ak$

En este caso "A" será el coeficiente lineal que los relaciona, el cual será una productividad marginal del capital.

Por último plantea la ecuación que representa la acumulación de capital, que es la variación del capital en una unidad de tiempo (se supone el año), que dependerá positivamente del ahorro y negativamente de la tasa de natalidad y la tasa de depreciación del capital.

(5) $\frac{dk}{dt} = s - (n + \delta)k$

Reemplazando (3) y (4) en (5) se obtiene la siguiente ecuación:

(6) $\frac{dk}{dt} = \sigma\left(Ak + f - d - m\right) - (n + \delta)k$

Reordenando se llega a:

(7) $\frac{dk}{dt} = k(\sigma A - n - \delta) + \sigma (f - d - m)$

Donde k es el único valor intrínseco al modelo, quedando así una ecuación diferencial de orden uno en torno a la variable k, que es posible de resolver con los conocimientos adquiridos en Análisis II y Matemática para Economistas.

De esta manera se procede con la resolución primero de la ecuación homogénea asociada dando como resultado:

$$k^h = C_1\, e^{(\sigma A - n - \delta)t}$$

Posteriormente se halla la solución complementaria, la que resulta ser:

$$k* = k(t)^p = \frac{\sigma\,(\mathrm{m} + \mathrm{d} - \mathrm{f})}{(\sigma A - n - \delta)}$$

Esta última solución será equivalente al punto de equilibrio de la ecuación, es decir aquel punto donde la derivada se anula –como se podrá apreciar más adelante- no se producirá ni un aumento ni una disminución del capital.

Uniendo ambas soluciones se obtiene la solución general[2]:

$$k(t) = C_1\, e^{(\sigma A - n - \delta)t} + \frac{\sigma\,(\mathrm{m} + \mathrm{d} - \mathrm{f})}{(\sigma A - n - \delta)}$$

[2] Desarrollo de la solución en el anexo al final del trabajo.

reemplazando t=0 se puede obtener la constante C_1:

$$C_1 = k(0) - \frac{\sigma(m + d - f)}{(\sigma A - n - \delta)}$$

Y sustituyendo:

$$k^* = \frac{\sigma(m + d - f)}{(\sigma A - n - \delta)}$$

Se tiene la siguiente expresión:

$$k(t) = [k_0 - k*]e^{(\sigma A - n - \delta)t} + k*$$

Esta solución permitirá apreciar el diagrama de fases, el gráfico de la acumulación del capital en función del capital, que posibilita entender el comportamiento del modelo y de la trampa de pobreza en sí misma ante distintos valores de sus variables. Para ello es necesario reemplazar dicha solución en la ecuación de la acumulación del capital, quedando expresada del siguiente modo:

$$\frac{dk}{dt} = \left[(k_0 - k)e^{(\sigma A - n - \delta)t}\right](\sigma A - n - \delta)$$

Nuevamente, se hará un reemplazo de la expresión entre corchetes por k – k*, igualdad que se desprende del despeje en la solución general obtenida anteriormente.

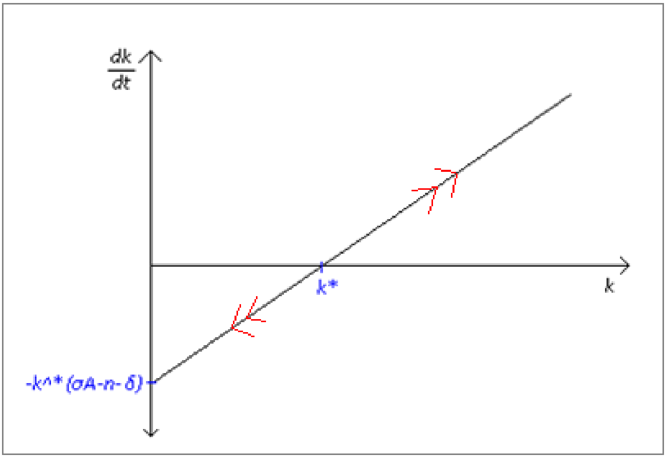
(8)$\frac{dk}{dt} = (k - k^*)(\sigma A - n - \delta)$

1.2 Diagrama de fases

Tomando la última expresión de la ecuación de acumulación del capital se graficará y analizará el diagrama de fases resultante de ella. Este representará una función que exprese la variación del capital según el monto de capital inicial de un país. La ordenada al origen será el valor de la acumulación del capital cuando el capital inicial sea 0, y esto será $\frac{dk}{dt} = -k^*(\sigma A - n - \delta)$. Como condición del modelo se plantea que $(\sigma A - n - \delta) > 0$ para poder asegurar el crecimiento, por lo tanto la pendiente de la recta será positiva. Al ser esta positiva podemos observar que, a valores de k $>k^*$, la acumulación del capital será positiva y por lo tanto la economía crecerá. Por el contrario, para valores de k$<k^*$, habrá una des acumulación del capital, y la economía se verá atrapada en la trampa de pobreza.

$$\boxed{\frac{dk}{dt} = (k - k*)(\sigma A - n - \delta)}$$

Gráfico 1. Diagrama de fases. Acumulación del capital en función del capital actual



1.3. Analizando el modelo

A continuación se recopilan las ecuaciones más importantes derivadas del modelo para su análisis.

(1) $\begin{cases} 0 & si \quad y < m \\ s = \sigma\,(q + f - d - m) & si \quad y > m \end{cases}$

(2) $y = q + f - d$

(3) $q = A\,k$

(4) $\frac{dk}{dt} = s - (n + \delta)k$

(13) $k(t) = [k_0 - k*]e^{(\sigma A - n - \delta)t} + k*$

Si el ingreso es insuficiente para cubrir con las necesidades básicas, (y < m) entonces tendremos un ahorro nulo:

$$q + f - d < m$$

$$A\,k + f - d < m$$

$$k < (m - f + d)/A < k*$$

$$\boxed{s = 0}$$

Y por lo tanto al pasar a la ecuación de acumulación de capital (4) esta tomaría la siguiente forma:

$$\frac{dk}{dt} = -(n+\delta)k$$

Como se puede ver, estamos en presencia de una desaceleración en la acumulación del capital con una tasa igual a $(n+\delta)k$

Ahora bien, si la economía se encuentra en un punto intermedio, es decir hay ahorro (y > m) pero no se llega al capital de equilibrio $\boxed{k * = k(t)^p = \frac{\sigma\,(m+d-f)}{(\sigma A-n-\delta)}}$.

$$q + f - d > m$$

$$A\,k + f - d > m$$

$$(m - f + d)/A < k < k*$$

Como hay ahorro, ahora la ecuación de acumulación de capital tomará la siguiente forma: $\frac{dk}{dt} = \sigma(Ak + f - d - m) - (n+\delta)k < 0$

Ecuación igual a la obtenida en (6). Pero sin embargo si se analiza la ecuación (8) se puede afirmar que como el capital en este caso no alcanza al de equilibrio -K*-como para impulsar el crecimiento, la economía decrecerá a la tasa indicada hasta el punto en el que el capital sea igual o inferior a (m –f + d)/A, donde comenzará a disminuirá la tasa $(n+\delta)k$.

En los casos en que se llegue a esa tasa, el decrecimiento llegará hasta el punto extremo en donde el capital tienda a cero, punto en el que la tasa de decrecimiento tenderá a:

$$\frac{dk}{dt} = -k * (\sigma A - n - \delta)$$

expresión que surge de reemplazar k= 0 en la ecuación (7) de la sección anterior.

Con esta información se puede elaborar el diagrama de fases, en el que se puede observar la inestabilidad del punto de equilibrio –la curva tiene pendiente positiva-. Al encontrarse un país fuera del valor de capital necesario para el equilibrio nunca se tenderá a llegar a él a menos que se produzcan cambios en las condiciones iniciales del modelo. Así, un país con capital insuficiente se verá sumido en el empobrecimiento prolongado de su economía, esto es una "trampa de pobreza" de la que no podrá salir por sí solo. Es aquí donde Sachs propone que se aumente la ayuda externa (f) y se disminuyan los servicios de deuda para poder disminuir dicho capital mínimo necesario para poder impulsarse al crecimiento.

2. DESCRIPCIÓN DE LAS VARIABLES

En este trabajo se ha tomado el valor real de las variables involucradas en el modelo descripto en los apartados anteriores, correspondientes a los años comprendidos entre 1993 a 2006. A continuación se comentará el origen y el tratamiento realizado a los datos utilizados. Para neutralizar el efecto de la inflación a lo largo de los años se trabajará con las variables a precios de 1993.

2.1. Producto bruto interno, ingreso y ahorro

Las variables producto, ingreso y ahorro han sido desagregadas de un cuadro estadístico llamado "Ingreso Nacional y Ahorro Nacional a precios de 1993", información provista por el Ministerio de Economía. Al estar expresado en millones de pesos se lo transformó multiplicando por 1.000.000, y luego para obtener los valores per cápita se los dividió por el número de habitantes proporcionados por estimaciones del Instituto Nacional de Estadística y Censos (INDEC) en base al Censo del año 2001.

Cuadro 1. Ingreso Nacional y Ahorro Nacional a precios de 1993

		1993
	Producto Interno Bruto a Precios de Mercado	**236,505**
más:	Ganancia (+) O Pérdida (-) Real del Intercambio	0
igual:	**Ingreso Interno Bruto**	**236,505**
menos:	Remuneración Neta a Factores del Exterior	2,995
igual:	**Ingreso Nacional Bruto**	**233,510**
más:	Transferencias Corrientes Netas	520
igual:	**Ingreso Nacional Bruto Disponible**	**234,030**
menos:	Consumo Nacional Total (privado y público)	195,628
igual:	**Ahorro Nacional Bruto**	**38,402**

$$s_{1993} = \frac{38{,}402 * 1{,}000{,}000}{33{,}917{,}440} = 1132.22$$

$$q_{1993} = \frac{236505 * 1{,}000{,}000}{33{,}917{,}440} = 6972.96$$

$$i_{1993} = \frac{234{,}030 * 1{,}000{,}000}{33{,}917{,}440} = 6899.99$$

2.2 Propensión marginal al ahorro

La propensión marginal al ahorro se calculó haciendo el cociente entre el ahorro y el ingreso disponible. Cálculo equivalente a uno menos la propensión marginal al consumo que surgiría del cociente entre el consumo total y el ingreso disponible.

$$\sigma_{i} = \frac{Ahorro_i}{IngresoDisponible_i}$$

$$\sigma_{1993} = \frac{Ahorro_{1994}}{IngresoDisponible_{1994}} = \frac{38402}{234030} = 0.164089388$$

2.3 Línea de pobreza

Ante la falta de un indicador de esta variable que represente el valor anual y que sea representativo de todo el país se decidió utilizar el valor correspondiente al mes de septiembre elaborado con información del Gran Buenos Aires provista por la Encuesta Permanente de Hogares.

La fuente fueron dos cuadros estadísticos del INDEC con series históricas, uno desde 1988 al 2003 y el otro del 2000 al 2011.

Al no contar con los valores a precios de 1993, se elaboró un índice deflactor que permite expresar los datos en valores constantes de 1993. Para su elaboración se partió de los datos del Producto bruto interno que se tenían tanto en valores corrientes como en valores constantes. La relación entre ambos valores es la siguiente:

$$Valor_{1993} = ValorCorriente_i * Deflactor_i$$

Por ello, el deflactor para el año i será el cociente entre el valor a precios de 1993 y el valor corriente del año i.

$$Deflactor_i = \frac{Valor_{1993}}{ValorCorriente_i}$$

Una vez obtenido el deflactor, se procedió a multiplicarlo por los datos referentes a la línea de indigencia para cada año entre 1993-2006, y así obtener los valores a precios contantes de 1993.

Con los datos del año 1994 se elaboró el siguiente ejemplo:

Cuadro 2. Producto bruto interno a precios corrientes y precios de mercado

	En millones de pesos
Producto interno bruto de 1994 a precios de 1993	250307.90
Producto interno bruto a precios de mercado	257440.00

El cálculo del deflactor esel siguiente:

$$Deflactor_{1994} = \frac{Valor_{1993}}{ValorCorriente_{1994}} = \frac{250307{,}9}{257440} = 0.972296069$$

Cuadro 3. Línea de indigencia, línea de pobreza e inversa del coeficiente de Engel

Mes	CBA: línea de indigencia	Inversa del coeficiente de Engel	CBT: línea de pobreza
Abril 1993	60.89	2.25	137.01
Septiembre 1993	62.44	2.21	137.99
Abril 1994	61.59	2.32	142.89
Septiembre 1994	62.82	2.33	146.38

Dado que se tomarán los valores de Septiembre, multiplicando estos por el deflactor del año 1994 se los obtiene a precios constantes de 1993:

$$m_{1994} = 146.38 * 0.972296069 = 142.3247128$$

2.4 Tasa de crecimiento de la población

La tasa de crecimiento poblacional se encuentra en los informes estadísticos de la CEPAL y del INDEC a valores quinquenales, para hallar el dato anual se ha tomado la información de las estimaciones de población del país provistas por el INDEC.

Cuadro 4. Población estimada anual

Año	1993	1994
Total	33,917,440	34,353,066
Varones	16,645,978	16,858,144
Mujeres	17,271,462	17,494,922

Para medir el crecimiento de un año a otro se realizó el siguiente cálculo:

$$n_i = \frac{P_{i+1}}{P_i} - 1$$

siendo: $n_i$la tasa de crecimiento poblacional para el período *i*.

P_{i+1} población total en el período *i+1.*

P_i población total en el período *i.*

$$n_{1993} = \frac{P_{1994}}{P_{1993}} - 1 = \frac{34353066}{33917440} = 1.28\%$$

2.5 Depreciación del capital

Para el parámetro δ, depreciación del capital, se utilizó la estimación realizada en el trabajo: Simulación experimental y calibración de los parámetros de un modelo de ciclo real para la economía de M. Cecilia Gómez y Agustín A. Alonso, en el que se fijó el parámetro en un 2%.

2.6 Ayuda externa y servicios de la deuda

Tanto la información de la ayuda externa como los servicios de deuda pagados, fueron extraídos de un estado de la deuda pública al 31-12-2009 publicado por el Ministerio de Economía. Uno de sus cuadros especifica los flujos netos con organismos internacionales. De allí se relacionaron los conceptos de Desembolsos de las instituciones financieras con la ayuda externa (f) y la suma de los intereses más los reintegros de capital con los servicios de la deuda (d). Al estar las variables expresadas en dólares se procedió a transformarlas a pesos mediante un índice anual del tipo de cambio elaborado por la Comisión Económica para América Latina CEPAL.

Cuadro 5

	1993
Total de desembolsos (1)	4,170
Total capital reembolsado (2)	(813)
Capital neto (1) - (2)	3,356
Total intereses pagados	(762)
Flujo neto total	2,594

2.7 Capital y productividad marginal del capital

Para el capital se tomó la valuación realizada por el INDEC cuyas componentes son: El equipo durable (maquinaria y material de transporte), Construcción (residencial y no residencial) y activos cultivados.

Cuadro 6. Stock de capital

Año	STOCK DE CAPITAL AGREGADO
1993	543,164,234
1994	564,398,250
1995	580,000,768
1996	593,887,427
1997	615,345,507
1998	636,592,081
1999	652,936,506
2000	663,113,276

La productividad marginal del capital se obtuvo realizando el siguiente cálculo:

$$A_i = \frac{q_i}{k_i}$$

siendo: $\mathrm{A_i}$La productividad marginal del capital del período i.

$\mathrm{q_i}$Producto del período i.

$\mathrm{k_i}$ Capital del período i.

por ejemplo para el año 1993 este valor resultó ser el siguiente:

$$A_{1993} = \frac{q_{1993}}{k_{1993}} = \frac{6972.960819}{16014.30514} = 0.435420754$$

3. APLICACIÓN DEL MODELO

Las siguientes ecuaciones, correspondientes al modelo tratado en este estudio, se calcularon con los valores de las variables descriptas en el apartado anterior, entre los años 1993 y 2006, con el objetivo de comparar los resultados obtenidos con lo sucedido en la economía argentina en ese mismo periodo.

$$s = \sigma (q + f - d - m) \quad siy > m$$

$$y = q + f - d$$

$$q = Ak$$

$$k^* = \frac{\sigma (\mathrm{m} + \mathrm{d} - \mathrm{f})}{(\sigma A - n - \delta)}$$

$$\frac{dk}{dt} = (k - k*)(\sigma A - n - \delta)$$

Resolviéndolas se hallaron los valores anuales de ***s*** (ahorro), ***y***(ingreso), ***q*** (producto),$\frac{dk}{dt}$ (acumulación del capital) y ***k**** el capital de equilibrio.

Estas estimaciones arrojan valores muy cercanos a los del ahorro, ingreso y producto real. Los valores del capital de equilibrio anual obtenidos, se presentan en el siguiente cuadro enfrentándolos a la medida real del capital.

Cuadro 7. Capital real contra capital de equilibrio

	K	K*
1993	15089.0058	264.364879
1994	15031.5162	597.394509
1995	15097.4684	297.988123
1996	15432.7422	542.946539
1997	15851.9411	550.752155
1998	16108.7219	466.19366
1999	16316.2265	735.351534
2000	16728.6827	647.883887
2001	17132.8652	-583.587662
2002	17404.3851	2427.92974
2003	17510.3777	1415.08938
2004	17496.9959	1519.03561
2005	17150.3869	1751.80753
2006	17106.7414	2976.20878

Al ser superado en todo momento el requerimiento mínimo de capital que surge del modelo, se puede concluir que el país contó durante todos estos años del capital necesario para que la economía crezca, hallándose fuera de una trampa de pobreza. Puede notarse que en 2001, según el modelo, el capital de equilibrio es negativo, ya que aumentó en gran proporción la ayuda externa que provocó que el capital necesario para crecer sea muy pequeño, virtualmente nulo[3].

Finalmente, para una profundización del análisis matemático, específicamente gráfico, del modelo se graficó el diagrama de fases correspondiente a cada uno de los años, partiendo de la ecuación de capital obtenida en última instancia en la que se expresa la acumulación del capital en función del mismo, tomando el resto de las variables como dadas. Si bien no se grafica cada uno de los años analizados, se tomó el año de partida y de finalización del análisis, como también el 2001, donde se puede observar un cambio importante en el capital de equilibrio del país.

Desde la ecuación de acumulación de capital:

$$\boxed{\frac{dk}{dt} = (k - k*)(\sigma A - n - \delta)}$$

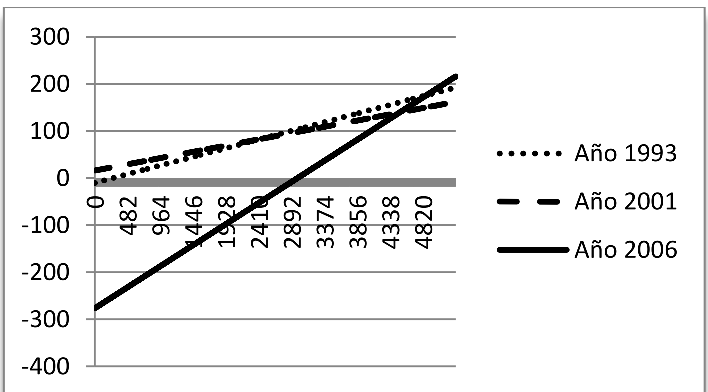
reemplazando cada una de las variables tomadas como constantes, en este caso: $k*$, $\sigma, A,\ n, y\ \delta$,surgirán las siguientes ecuaciones para cada año seleccionado.

$$dk/dt_{1993} = 0.038231049 * \mathrm{k}\ - 10.1069465$$

$$dk/dt_{2001} = 0.027549081 * \mathrm{k} + 16.077304$$

$$dk/dt_{2006} = 0.09292715 * \mathrm{k}\ - 276.570601$$

Gráfico 2



[3] En el año 2001 durante la presidencia de Fernando de la Rúa, el ministro de Economía Domingo Cavallo llevo a cabo el "Megacanje" que consistió en la postergación de los vencimientos de deuda del período 2001-2005, valuada en aproximadamente 50000 millones de dólares. Al suspenderse los pagos los ingresos por ayuda externa pasaron a ser mayores que los egresos, por cumplimientos de la deuda, permitiendo así que el modelo encuentre un punto de equilibrio de capital negativo.

El gráfico muestra como durante los años transcurridos el diagrama de fases fue cambiando y junto con este, el capital de equilibrio y la velocidad de crecimiento o decrecimiento de la economía. Como punto de partida, si se toma el año 1993, en el que el capital de equilibrio es de 264.36, se puede observar una acumulación del capital de 0.038231049 por unidad de capital existente. Ya pasando al año 2001, la recta se desplaza hacia la izquierda disminuyendo así el capital necesario para estar en equilibrio que pasa a ser de -583.59, como fue explicado, fue causado por un aumento de las transferencias de capital del exterior que se convertían en deuda y una disminución de los pagos de sus amortizaciones. Como se puede desprender del gráfico y también de los cálculos, el capital de equilibrio se torna negativo, situación que sólo se puede presentar en las estimaciones pero no en la realidad. Por último, en el año 2006 se observa un deslizamiento de la recta hacia la derecha, aumentando el capital de equilibrio a 2976.21, debiéndose este resultado al desembolso de dinero para la cancelación de la deuda con el Fondo Monetario Internacional (FMI), produciendo una necesidad de capital mayor para el crecimiento de la economía.

4. CONCLUSIONES

A partir de los cálculos realizados se puede concluir que en el período analizado la economía argentina nunca se encontró dentro de una trampa de pobreza, es decir el capital nacional supera durante todo el período al capital de equilibrio definido por el modelo.

Por otro lado, el ahorro a nivel general y durante los años comprendidos entre 1993 y 2006, ha sido positivo, por lo tanto no hubo un decrecimiento del capital igual a la tasa de crecimiento de la población más la tasa de depreciación del capital.

Tampoco se encontró la economía argentina en una situación en la que el capital es menor que el capital de equilibrio y por lo tanto se produzca un decrecimiento, hasta el extremo en que la tasa de decrecimiento tienda a valores tales que el país se encontraría con una economía en caída continua.

Queda para próximos trabajos, que están supeditados a la disponibilidad de los datos, reproducir el modelo para otros países latinoamericanos que presenten una economía más vulnerable que la argentina.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Gómez Kort, M. (2005): "Resolviendo la crisis de la deuda en los países pobres (Jeffrey D. Sachs)" en Bernardello, A., Bianco, M. J., García Fronti, J.: M*atemática de los Modelos Económicos. Ejercicios y Aplicaciones*. Buenos Aires, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires.

Sachs, J. D. (2002): *Resolving the Debt Crisis of low-income countries.* Brookings Paperson Economic Activity*, Harvard* University.

Gómez, M. C., Alonso, A. A.(2012): "Simulación experimental y calibración de los parámetros de un modelo de ciclo real para la economía argentina*" en* Casparri, M. T., Bernardello A., García Fronti J. y Vilker A. S.: *Undécimas Jornadas de Tecnología aplicada a la educación matemática universitaria*, Buenos Aires, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires.

CUADRO 1: *Ingreso Nacional, Ahorro Nacional y Préstamo Neto a precios corrientes* http://www.mecon.gov.ar/secpro/dir_cn/agregados2007/03-cuadro1.xls

CUADRO 3: *Ingreso Nacional y Ahorro Nacional a precios de 1993* http://www.mecon.gov.ar/secpro/dir_cn/agregados2007/03-cuadro3.xls

Población por sexo y año calendario http://www.indec.gov.ar/nuevaweb/cuadros/2/proyecciones_cuadro1.xls

Stock de capital a precios de 1993. Años 1990-2006 http://www.indec.gov.ar/nuevaweb/cuadros/17/stock-constantes.xls

ANEXO

Resolución de la ecuación diferencial asociada al modelo

En el presente apartado se ampliará el desarrollo de resolución de la ecuación diferencial de orden uno necesaria para desarrollar el modelo tratado en el trabajo. Siendo la ecuación a resolver:

$$\frac{dk}{dt} - k(\sigma A - n - \delta) = \sigma\,(f - d - m)$$

Como primer paso se resuelve la ecuación homogénea asociada a la ecuación diferencial, utilizando el reemplazo de la variable por el valor e^{rt}.

$$\frac{dk}{dt} - k(\sigma A - n - \delta) = 0$$

$$k = e^{rt}$$

$$\frac{dk}{dt} = re^{rt}$$

Reemplazando en la ecuación dichos valores se obtiene la siguiente expresión, de la cual despejando el valor de r se obtendrá el valor de la raíz.

$$re^{rt} - e^{rt}(\sigma A - n - \delta) = 0$$

$$e^{rt}[r - (\sigma A - n - \delta)] = 0$$

$$r - (\sigma A - n - \delta) = 0$$

$$\boxed{r = \sigma A - n - \delta}$$

Una vez obtenida la raíz se presenta la solución homogénea: $\boxed{k^h = C_1\, e^{(\sigma A - n - \delta)t}}$

Para obtener la solución complementaria de la ecuación, al estar igualada a una constante, se debe ensayar con un valor de la variable igual a una constante arbitraria: $k = B$

$$\frac{dk}{dt} = 0$$

Reemplazando obtenemos la siguiente re expresión de la ecuación completa de grado uno, de la cual despejando el valor de B se obtendrá la solución complementaria:

$$0 - B\,(\sigma A - n - \delta) = \sigma\,(f - d - m)$$

$$\boxed{B = \frac{\sigma\,(-f + d + m)}{(\sigma A - n - \delta)}}$$

Por lo tanto la solución particular, a la cual llamaremos k^*, será:

$$\boxed{k^* = k(t)^p = \frac{\sigma\,(\mathrm{m} + \mathrm{d} - \mathrm{f})}{(\sigma A - n - \delta)}}$$

Sumando ambas soluciones obtenemos la solución general de la ecuación diferencial de primer orden que se utiliza en la resolución del modelo:

$$k(t) = C_1\, e^{(\sigma A - n - \delta)t} + \frac{\sigma\,(\mathrm{m} + \mathrm{d} - \mathrm{f})}{(\sigma A - n - \delta)}$$

UNA FORMALIZACIÓN DEL SISTEMA ECONÓMICO DE LA "TEORÍA GENERAL" DE KEYNES

Eduardo A. Rodríguez

INTRODUCCIÓN

La presente nota propone una formalización del sistema económico descripto por John Maynard Keynes en su "Teoría general de la ocupación, el interés y el dinero". Se busca llegar a una representación lo más fidedigna posible exclusivamente a partir de las discusiones y análisis del propio Keynes en dicha obra. De esta manera se evita deliberadamente la consulta de otros trabajos del autor como así también estudios de otros autores al respecto.

Dado el carácter de la obra que se intenta formalizar, es esperable que haya puntos aquí expuestos que puedan ser interpretados por otros de manera diferente. Por ello, trataremos de aclarar qué puntos son formalizados expresamente por Keynes y cuáles se derivan de una interpretación propia de su discusión.

Siguiendo estas premisas, se concluye que, en definitiva, lo que Keynes realizó es un análisis de la volatilidad del nivel de ocupación al exponer su elevada dependencia de las expectativas. El instrumento fundamental utilizado a tal efecto es la llamada "función de ocupación" que vincula de manera unívoca el nivel de ocupación con la demanda global efectiva medida en unidades de salario. Visto de esta manera, la Teoría General es una exposición de los determinantes de la demanda global efectiva y de cómo su elemento más volátil (la inversión) depende de escenarios de muy difícil predicción (rendimientos esperados y liquidez futura) y, por ende, sujetos a revisiones bruscas en periodos de tiempo muy cortos.

Plan de trabajo

La nota comienza presentando el principio de demanda efectiva, para luego analizar la propensión marginal a consumir y a invertir. Una vez definido esta última, se discute la presentación de Keynes del mercado de dinero. Una vez presentada la función de ocupación, la nota finaliza con la determinación del nivel de ocupación, poniendo en evidencia su alta dependencia de las expectativas.

En un anexo se desarrollan las demostraciones de cuatro igualdades presentadas en los capítulos 20 y 21 de la Teoría General que Keynes utiliza para mostrar que su teoría es más general que la teoría "clásica".

1. PRINCIPIO DE DEMANDA EFECTIVA

La demanda efectiva de una economía capitalista viene determinada por su nivel de ocupación, el cual surge surge como resultado del siguiente conjunto de relaciones (cap. 3):

$$\begin{cases} Z = \Phi(N) \\ D = f(N) \\ Z = D \end{cases}$$

donde Φ es la función de oferta global y f la función de demanda global. Z expresa, en palabras de Keynes, "el precio de oferta global resultante del empleo de N hombres", el cual viene determinado por los costos (cap. 6, Apéndice), mientras que D es "el importe del producto que los empresarios esperan recibir con el empleo de N hombres". La tercera relación exige la igualación de ambas funciones que determina el nivel de ocupación N, siendo el valor de D resultante la "demanda efectiva".

El problema a estudiar, para Keynes, se encuentra en la demanda[1], ya que es la que presenta mayor volatilidad. El nivel de ocupación efectiva genera un nivel de demanda global determinado. Si su precio es igual al de la oferta, el nivel de ocupación se mantiene ya que las previsiones de costo y ganancia esperada se cumplen. Por otra parte, si el precio de la demanda es inferior al de la oferta, el nivel de ocupación es insostenible para las empresas, con lo cual se reduce.

La demanda en la Teoría General de Keynes tiene dos componentes: la propensión a consumir (caps. 8 a 10) y la propensión a invertir (cap. 11). La combinación de ambas con la función de oferta global (dependiente de los costos y más estable que la demanda global) es lo que determina el nivel de ocupación.

Tal vez, una manera más apropiada de describir el principio de demanda efectiva sea mediante la siguiente sucesión:

$$\text{Demanda} \Rightarrow \text{Precio Demanda} \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} \text{Precio Oferta} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \uparrow \\ = \\ \downarrow \end{Bmatrix} \text{Ocupación}$$

[1] Para Keynes, la doctrina "clásica" supone que $\Phi \equiv f$, es decir que "la oferta crea su propia demanda" (cap. 3).

lo que llevará a Keynes a poder definir una función de ocupación dependiente de la demanda. Por ello, tal vez convenga ver la igualdad $Z = D$, no como una condición que permite "cerrar" un sistema, sino como una función identidad que, para cada valor de D asigna un único (e igual) valor de Z.

2. PROPENSIÓN A CONSUMIR

Keynes establece una relación causal entre el ingreso neto medido en términos de salarios $Y_s \equiv Y/S$, el nivel de salarios S y la propensión a consumir medida en dinero C:

$$C = S\chi\left(Y_s\right) \Rightarrow C_s \equiv \frac{C}{S} = \chi\left(Y_s\right).$$

La relación entre "consumo medido en salarios" C_s e "ingreso neto medido en salarios" Y_s viene dada por la función χ. A esta función Keynes la llama "propensión a consumir", la cual describe como "característica psicológica".

La propiedad fundamental de la propensión a consumir es

$$\frac{dC_s}{dY_s} < 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2C_s}{\left(dY_s\right)^2} < 0.$$

El requisito de propensión marginal a consumir menor a la unidad impide que cualquier crecimiento del ingreso neto medido en salarios se traslade íntegramente al consumo. La negatividad de la derivada segunda dice que este traslado es cada vez menor mientras mayor sea el ingreso neto. De esta manera queda definido un límite al crecimiento del ingreso, ya que para poder ser mantenido, se requerirá que el otro componente de la demanda (la inversión) crezca cada vez más para cerrar la brecha ingreso-consumo.

3. PROPENSIÓN A INVERTIR

La inversión es consecuencia de un diferencial de tasas: la eficiencia marginal del capital y la tasa de interés.

Keynes define la eficiencia marginal del capital como "la tasa de descuento que lograría igualar el valor presente de la serie de anualidades dada por los rendimientos esperados del bien de capital, en todo el tiempo que dure, a su precio de oferta" (cap. 11). Es decir, se define en términos de expectativas del rendimiento *probable* y del precio de oferta *corriente* del bien de capital.

Cabe aclarar que "precio de oferta del bien de capital" no es el precio al cual es adquirido en el mercado, sino "el precio que bastaría exactamente para inducir a un fabricante a producir una nueva unidad adicional del mismo, es decir lo que alguna vez se llama *costo de reposición*" (cap. 11).

Se supone además que la eficiencia marginal del capital se reduce a medida que aumenta la inversión. Para Keynes esto es así porque la capacidad de los bienes de capital de generar renta se fundamenta en su escasez (los rendimientos esperados serán menores mientras mayor sea el stock de capital existente) y, a su vez, porque la producción de una unidad de capital adicional genera presiones alcistas sobre su precio de oferta (costo).

La propensión a invertir crecerá mientras la eficiencia marginal del capital sea superior a la tasa de interés corriente. Una vez alcanzada la igualación de ambas tasas, la inversión dejará de crecer. No habrá inversión si la eficiencia marginal del capital es inferior a la tasa de interés corriente.

Si llamamos d a la eficiencia marginal del capital y r a la tasa de interés corriente, podríamos escribir la propensión a invertir como una función κ (Keynes no la expresa formalmente):

$$I = S\kappa\left(Max\left\{0, d\left(\frac{I}{S}\right) - r\right\}\right) \Rightarrow I_s \equiv \frac{I}{S} = \kappa\left(Max\left\{0, d\left(I_S\right) - r\right\}\right)$$

con $\kappa' > 0$, $\kappa'(0) = 0$ y $d' < 0$, donde d resuelve la ecuación

$$P_K\left(I_s\right) = \sum_t \frac{Q_t\left(I_S\right)}{\left(1+d\right)^t} \qquad Q_t' < 0 \qquad P_K' > 0$$

siendo P_K el precio de oferta del bien de capital y Q_t su rendimiento esperado al momento t. Nótese que la negatividad de d' pone un límite al crecimiento del stock de capital.

Claramente, la eficiencia marginal del capital tiene un alto componente de expectativas, siendo precisamente esta característica la que la torna volátil y, por ende, también a la propensión a invertir.

De hecho, Keynes destaca la precariedad de los pronósticos que se realizan sobre las condiciones económicas futuras, tanto en lo que respecta al mecanismo en sí como a la confianza en los pronósticos obtenidos. En particular Keynes distingue dos tipos de expectativas (cap. 5):

- Expectativas de corto plazo: Son relativamente estables. Por ser de corto plazo pueden bien aproximarse mediante una proyección o extrapolación de las condiciones económicas actuales.
- Expectativas de largo plazo: Son muy volátiles. Pueden ser revisadas en cualquier momento de manera imprevista y no pueden ser reemplazadas por los resultados pasados.

Con expectativas de corto plazo extrapolables a partir de la situación actual, la eficiencia marginal del capital resulta muy dependiente de las de largo plazo. Su precariedad[2] torna muy inestable los rendimientos probables y, por ende, la propensión a invertir ya que una fuerte revisión a la baja en los rendimientos futuros esperados puede reducir la eficiencia marginal del capital de manera tal de ubicarla por debajo de la tasa de interés corriente.

La extrema volatilidad de la eficiencia marginal del capital torna imposible que la propensión a invertir sea siempre exactamente igual a la diferencia entre el ingreso neto y la propensión al consumo. Cuando esta brecha no es cerrada por la inversión, el ingreso neto se reducirá para poder restablecer la igualdad.

El otro factor decisivo de la inversión es la tasa de interés corriente. Su determinación hay que buscarla en el mercado de dinero, más precisamente en la demanda especulativa de dinero.

4. DEMANDA DE DINERO

El mercado de dinero se describe por una única ecuación

$$M = L_1(Y) + L_2(r) \text{ con } L_1' > 0 \text{ y } L_2' < 0$$

donde Y es el ingreso neto medido en dinero, r la tasa de interés monetaria corriente y M la cantidad de dinero (independiente de Y e r). La función L_1 capta la demanda transaccional y precautoria de dinero, que se caracteriza por depender del ingreso y ser relativamente estable respecto de la tasa de interés. Por su parte, L_2 capta la demanda especulativa de dinero.

[2] En el capítulo 12 de la Teoría General Keynes discute cómo la bolsa de valores convierte en líquidas las inversiones y cómo tal situación torna más inestable el sistema económico al requerirse un continuo recalculo del valor de las empresas. En efecto, dado que la existencia de la bolsa de valores permite al dueño de una empresa desprenderse de ella de manera relativamente fácil en cualquier momento y que los participantes de la bolsa buscan maximizar su ganancia derivada de la compraventa de instrumentos financieros, las inversiones terminan rigiéndose por el precio de las acciones (vinculados a la "psicología de masas" y la especulación) y no por un cálculo profesional de los rendimientos de la empresa en su período útil.

La demanda especulativa de dinero surge de la existencia de incertidumbre respecto del comportamiento futuro de la tasa de interés, es decir de cuán costoso será hacerse de liquidez en el futuro cuando ésta sea necesaria.

La función L_2 cambiará (se desplazará) si lo hacen las expectativas futuras sobre la tasa de interés o, en términos más generales, la política futura el Banco Central. De hecho, si no hubiera incertidumbre, L_2 sería siempre cero porque no tendría sentido mantener dinero si existen otros activos que pagan una tasa de interés positiva.

En este contexto, la tasa de interés es la "recompensa por desprenderse de liquidez"[3] y su determinación es el resultado de la igualación del nivel de ventas de los "bajistas" (aquellos que esperan que la tasa de interés futura se reduzca respecto de un nivel "seguro", es decir de un nivel de tasa de interés que no les genere problemas de liquidez) y del nivel de compras de los "alcistas" (los que esperan que la tasa a futuro aumente en relación al nivel "seguro").

Al respecto, Keynes afirma que "es evidente, pues, que la tasa de interés es un fenómeno altamente psicológico" y que "su valor está determinado en gran parte por la opinión que prevalezca acerca del valor que se espera va a tener". De hecho, para Keynes "*cualquier* nivel de tasa de interés que se acepte con suficiente convicción como *probablemente* duradero, *será duradero*" (cap. 15).

5. RESUMEN DEL SISTEMA

Hasta ahora se han analizado los componentes y determinantes de la demanda global. Escritos formalmente:

$$\begin{cases} D = C + I \\ C = S\chi\left(\dfrac{Y}{S}\right) \\ I = S\kappa\left(Max\left\{0, d\left(\dfrac{Y}{S}\right) - r\right\}\right) \\ M = L_1(Y) + L_2(r) \end{cases} \quad \text{con} \begin{cases} \chi' < 1 \quad \chi'' < 0 \\ \kappa' > 0 \quad \kappa(0) = 0 \quad d' < 0 \\ L_1' > 0 \quad L_2' < 0 \end{cases}$$

---

[3] Keynes señala que todos los bienes (mercancías o dinero) tienen un rendimiento igual a $q - c + l$, donde q es el rendimiento derivado de su uso, c su costo de almacenamiento y l "prima de liquidez", es decir el valor de disponer de él durante un período determinado siendo ésta "una cosa por la cual la gente está dispuesta a pagar algo" (cap. 17). Las mercancías se caracterizan por tener un elevado $q - c$ pero un l muy bajo, mientras que en el caso del dinero l es muy alto y $q - c$ es despreciable.

De esta manera, el sistema consta de tres elementos: los factores psicológicos (χ , κ y L_2), la unidad de salarios S y la cantidad de dinero M . Las "variables independientes" de la demanda son la propensión a consumir χ , la eficiencia marginal del capital κ y la tasa de interés r .

Si quisiéramos "cerrar" el sistema, necesitaríamos introducir la "oferta global". A tal efecto, Keynes aclara que la relación Φ entre el ingreso neto Y y el nivel de ocupación N es una relación uno-a-uno, con lo cual, también lo será para una unidad de salaros S determinada. Una vez incorporada la oferta global en el sistema, Y y N serían las variables dependientes, pero como la relación es uno-a-uno, solo bastaría determinar una de ellas para luego obtener la otra.

Sin embargo, por aplicación del principio de la demanda efectiva, el ingreso neto es determinado por la demanda, a partir del cual se obtiene el nivel de ocupación correspondiente. De esta manera, Keynes termina vinculando el nivel de ocupación a la demanda global de la economía mediante lo que llama la "función de ocupación".

6. FUNCIÓN DE OCUPACIÓN

Partiendo de la función de oferta global $Z=\Phi\left(N\right)$ y sabiendo que la relación Φ es uno-a-uno, podemos escribir su función inversa $N=\Phi^{-1}\left(Z\right)$. Pero, como la oferta global debe ser igual a la demanda global $(Z=D)$, entonces $N=\Phi^{-1}\left(D\right)$, obteniéndose una función que vincula unívocamente el nivel de demanda global con el nivel de ocupación. Si esta misma función es definida sobre la demanda global en unidades de salario $D_s \equiv D/S$, la relación resultante $N=F\left(D_s\right)$ será la función de ocupación que también es una relación uno-a-uno.

6.1 Determinación del nivel de ocupación

El consumo es relativamente estable respecto del ingreso. Pero la inversión no lo es ya que está afectada tanto por la eficiencia marginal del capital (que depende de los rendimientos esperados de la inversión) y la tasa de interés (determinada por las perspectivas de liquidez futura). Partiendo de una situación inicial de igualación entre oferta y demanda global, dada la unidad de salarios, la cantidad de dinero, la propensión a consumir, la propensión a invertir y las demandas transaccional y precautoria de dinero, una revisión "pesimista" de las expectativas (caída de los rendimientos esperados de la inversión, menor liquidez esperada a futuro o combinación de ambos) reduce la demanda global y consecuentemente, el nivel de ocupación. De hecho,

$$N = F\left(D_s\right) = F\left(C_s + I_s\right) = F\left(\chi\left(Y_s\right) + \kappa\left(Max\left\{0, d - r\right\}\right)\right)$$

con lo cual una caída de d o una suba de r necesariamente deriva en una retracción de N .

Para Keynes, ningún mecanismo asegura que, para un nivel de ingreso neto dado, la propensión a invertir medida en unidades de salario (altamente volátil) sea exactamente igual a la diferencia entre el ingreso neto medido en salarios (dado) y la propensión a consumir medida en salarios (también dada porque lo está el ingreso neto medido en salarios)[4].

De esta manera, las razones del ciclo económico (y de las crisis económicas) habría que buscarlas, según Keynes, en las variaciones de la eficiencia marginal del capital y su impacto en la inversión. Esta última depende de expectativas volátiles y cálculos precarios, determinándose en parte en la bolsa de valores.

Por ello, Keynes reflexiona que para mantener un nivel de actividad determinado se requiere promover la propensión a consumir, porque la inversión determinada por los privados no puede asegurarse que sea la necesaria (cap. 22).

7. CONCLUSIONES

La función de ocupación vincula de manera unívoca el nivel de ocupación con la demanda global efectiva. Su alta dependencia de la eficiencia marginal del capital (afectado por los rendimientos futuros esperados) y de la tasa de interés monetaria corriente (influido por las perspectivas futuras de liquidez) tornan al sistema económico muy inestable al depender de escenarios de muy difícil predicción y, por ende, de cálculos que son fuertemente revisados en un sentido u otro en períodos muy cortos de tiempo.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Keynes, J. M. (1936): *Teoría general de la ocupación, el interés y el dinero*. Fondo de Cultura Económica. México, 2001.

---

[4] Incluso Keynes destaca que un mayor ahorro, es decir, un menor nivel de demanda presente, no implica un mayor nivel de actividad futuro (cap. 16). De hecho, señala que con una decisión de ahorro lo que se busca es una *potencialidad de consumo futuro* y no necesariamente el consumo de un determinado bien en una determinada fecha. El ahorro no se traduciría necesariamente en inversión, ya que un bien de capital no es deseable por sí mismo, sino por su rendimiento probable.

ANEXO

Las fórmulas derivadas en los capítulos 20 y 21 de la Teoría General

En los capítulos 20 y 21 Keynes calcula algunas relaciones para demostrar que su teoría es más general que la teoría "clásica". Para ello, hay que tener presente el uso recurrente de las siguientes igualdades:

$$D = pO, \qquad D \equiv SD_S, \qquad p \equiv p_s S \qquad \text{y} \qquad D_S = p_s O,$$

donde D es la demanda global medida en dinero, O la oferta global medida en "cantidades" y p el nivel de precios.

Las primeras dos igualdades conciernen a la situación de una industria en particular. Las dos restantes a la economía en su conjunto.

<u>Primera igualdad</u>: Si el precio p_s es igual al costo primo marginal CMg, entonces

$$dD_s = \frac{1}{1-e_0} dP.$$

donde P es la ganancia esperada y $e_0 \equiv \left(D_s/O\right)\left(dO/dD_s\right)$.

Partiendo de la igualdad $D_s = p_s O \Rightarrow dD_s = p_s dO + Odp_s \Rightarrow$

a) $D_s = \frac{D_s}{O} dO + Odp_s \Rightarrow Odp_s = dD_s - \frac{D_s}{O} dO \frac{dD_s}{dD_s} = dD_s - e_0 dD_s =$

$= dD_s\left(1-e_0\right)$

b) $Odp_s = dD_s - p_s dO = dD_s - CMgdO = dP$.

A partir de a) y b) se deduce que

$$dD_s\left(1-e_0\right) = dP \Rightarrow dD_s = \frac{1}{1-e_0} dP \text{. Q.E.D.}$$

Keynes destaca que de esta relación se sigue que si $e_0 = 0$, "el alza de la demanda efectiva irá a dar al empresario como ganancia", mientras que si $e_0 = 1$ "no se esperaría que parte alguna del aumento de la demanda efectiva se convierta en ganancia, siendo el total del mismo absorbido por los elementos que entran dentro del costo primo marginal".

Respecto a este último caso $e_0 = 1$ resulta relevante la siguiente igualdad.

Segunda igualdad: Si la producción es función $\Phi(N)$ de la mano de obra empleada, entonces bajo la condición de equilibrio del productor es cierto que $\frac{1-e_0}{e_e} = -\frac{N}{p_s}\frac{\Phi''(N)}{\left[\Phi'(N)\right]^2}$, siendo $e_0 \equiv (D_s/O)(dO/dD_s)$ y $e_e \equiv (D_s/N)(dN/dD_s)$.

Partimos de la igualdad:

$$D_s = p_s O \Rightarrow dD_s = Odp_s + p_s dO \Rightarrow \frac{dD_s}{dD_s} = O\frac{dp_s}{dD_s} + p_s\frac{dO}{dD_s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = O\frac{dp_s}{dD_s} + \frac{D_s}{O}\frac{dO}{dD_s} = O\frac{dp_s}{dD_s} + e_0 \Rightarrow \frac{1-e_0}{e_e} = O\frac{dp_s}{dD_s}\left(\frac{dD_s}{dN}\frac{N}{D_s}\right) =$$

$$= N\frac{O}{D_s}\frac{dp_s}{dN} = \frac{N}{p_s}\frac{dp_s}{dN}.$$

Teniendo en cuenta la condición de equilibrio del productor

$$\frac{S}{p} = \Phi'(N) \Rightarrow p_s = \frac{1}{\Phi'(N)} \Rightarrow \frac{dp_s}{dN} = -\frac{\Phi''(N)}{\left[\Phi'(N)\right]^2}$$

resulta entonces

$$\frac{1-e_0}{e_e} = -\frac{N}{p_s}\frac{\Phi''(N)}{\left[\Phi'(N)\right]^2}\text{. Q.E.D.}$$

Esta igualdad le permite a Keynes afirmar que la condición $e_0 = 1$ implica $\Phi''(N) = 0$, es decir que hay rendimientos constantes a escala en respuesta al aumento de la ocupación.

<u>Tercera igualdad</u>: $e_p = 1 - e_0(1 - e_s)$, donde $e_p \equiv (D/p)(dp/dD)$, $e_0 \equiv (D_s/O)(dO/dD_s)$ y $e_S \equiv (D/S)(dS/dD)$.

Partimos de la igualdad

$$p \equiv p_s S \Rightarrow dp = Sdp_s + p_s dS \Rightarrow dp = Sdp_s + \frac{p}{S} dS.$$

Definiendo $e'_p \equiv (D/p_s)(dp_s/dD_s) \Rightarrow dp_s = e'_p(p_s/D_s)dD_s$, lo cual reemplazando en la fórmula anterior resulta

$$dp = Se'_p\left(\frac{p_s}{D_s}\right)dD_s + \frac{p}{S}dS.$$

También sabemos que

$$D \equiv D_s S \Rightarrow dD = D_s dS + SdD_s \Rightarrow SdD_s = dD - D_s dS \Rightarrow$$
$$\Rightarrow SdD_s = dD - (D/S)dS$$

con lo cual reemplazando tenemos

$$dp = e'_p \frac{p_s}{D_s}\left(dD - \frac{D}{S}dS\right) + \frac{p}{S}dS = e'_p \frac{p}{D}\left(dD - \frac{D}{S}dS\right) + \frac{p}{S}dS =$$
$$= e'_p \frac{p}{D}dD - e'_p \frac{p}{S}dS + \frac{p}{S}dS = e'_p \frac{p}{D}dD + \frac{p}{S}dS\left(1 - e'_p\right).$$

Multiplicando la última expresión miembro a miembro por D, y luego dividiéndola miembro a miembro por pdD obtenemos:

$$\frac{dp}{p}\frac{D}{dD}(\equiv e_p) = e'_p \frac{p}{D}\frac{dD}{p}\frac{D}{dD} + \frac{p}{S}\frac{dS}{p}\left(1 - e'_p\right)\frac{D}{dD} =$$
$$= e'_p + \frac{D}{S}\frac{dS}{dD}\left(1 - e'_p\right) = e'_p + e_s\left(1 - e'_p\right).$$

A su vez, también es cierto

$$D_s = Op_S \Rightarrow dD_s = Odp_s + p_s dO \Rightarrow \frac{dD_s}{dD_s} = O\frac{dp_s}{dD_s} + p_s\frac{dO}{dD_s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{D_s}{p_s}\frac{dp_s}{dD_s} + \frac{D_s}{O}\frac{dO}{dD_s} \Rightarrow e'_p + e_0 = 1.$$

Reemplazando esto último en la ecuación anterior $e_p = e'_p + e_s\left(1 - e'_p\right)$ tenemos

$$e_p = e'_p + e_s\left(1 - \left(1 - e_0\right)\right) = \left(1 - e_0\right) + e_s - e_s\left(1 - e_0\right) =$$

$$= 1 - e_0 + e_s - e_s + e_s e_0 = 1 - e_0\left(1 - e_s\right). \text{ Q.E.D.}$$

Nótese que si $e_0 = 0$ o $e_s = 1$, la producción permanecerá invariable y todo aumento en la demanda se trasladará a precios. Por ello Keynes afirma que esta ecuación es "el primer paso hacia una teoría cuantitativa del dinero generalizada".

<u>Cuarta igualdad</u>: $e = e_d e_p = e_d\left(1 - e_e e_o + e_e e_o e_s\right)$, donde se define $e \equiv \left(M/p\right)\left(dp/dM\right)$, $e_p \equiv \left(D/p\right)\left(dp/dD\right)$, $e_d \equiv \left(M/D\right)\left(dD/dM\right)$ y $e_e \equiv \left(D_s/N\right)\left(dN/dD_s\right)$.

La "demostración" de Keynes no es presentada de manera formal, sino discursiva (al menos en sus instancias decisivas).

En primer lugar es inmediato que $e = e_d e_p$, ya que

$$e \equiv \frac{M}{p}\frac{dp}{dM} = \frac{D}{p}\frac{dp}{dD}\frac{M}{D}\frac{dD}{dM} = e_p e_d.$$

Lo que resta demostrar es que $e_p = 1 - e_e e_o\left(1 - e_s\right)$. Nótese que esta igualdad difiere de la "tercera igualdad" sólo en el hecho de que e_o aparece multiplicado por e_e. Sobre la validez de este "reemplazo", nótese que $e_0 \equiv \left(D_s/O\right)\left(dO/dD_s\right)$ mientras que (recordando que $O = D_s$)

$$e_e e_o = \frac{D_s}{N}\frac{dN}{dD_s}\frac{D_s}{O}\frac{dO}{dD_s} = \frac{O}{N}\frac{dN}{dO}\frac{D_s}{O}\frac{dO}{dD_s} = \frac{D_s}{N}\frac{dN}{dD_s}.$$

Si bien es cierto que por la función de ocupación existe una relación uno-a-uno entre D y N, esto no habilita a realizar el mencionado reemplazo.

Para que la igualdad de Keynes quede demostrada, se requieren verificar las condiciones bajo las cuales el "reemplazo" de e_o por $e_e e_o$ en la "tercera igualdad" es válido. Para ello partimos de la definición de e_o:

$$e_0 \equiv \frac{D_s}{O}\frac{dO}{dD_s} = \frac{D_s}{O}\frac{dO}{dD_s}\frac{N}{N}\frac{dN}{dN} = \frac{D_s}{N}\frac{dO}{dN}\frac{N}{O}\frac{dO}{dN} = e_e\frac{N}{O}\frac{dO}{dN},$$

por ello la igualdad $e_o = e_e e_o$ requiere que

$$e_0 = \frac{N}{O}\frac{dO}{dN}.$$

Pero como ya sabemos que $e_0 \equiv \left(D_s/O\right)\left(dO/dD_s\right)$, la igualdad de ambas expresiones implica

$$\frac{D_s}{O}\frac{dO}{dD_s} = \frac{N}{O}\frac{dO}{dN} \Rightarrow \frac{dN}{N} = \frac{dD_s}{D_s} \Rightarrow \frac{D_s}{N}\frac{dN}{dD_s} = 1$$

es decir que la demanda global medida en términos de unidades de salario y el nivel de ocupación crezca a la misma tasa.[5] En términos de las definiciones de Keynes, que la función de ocupación $N = F\left(D_s\right)$ sea homogénea de grado 1. Solo así Q.E.D.

[5] Una situación tal podría darse, por ejemplo, si $D = \beta SN$ para algún $\beta > 0$. Si bien la dependencia de la demanda global D del nivel de ocupación N está en el centro del principio de demanda efectiva en la Teoría General de Keynes, no resulta evidente a lo largo de su presentación la homogeneidad de grado 1 de la función de ocupación.