

# MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LAS CIENCIAS ECONÓMICAS

Trabajos seleccionados



MARÍA TERESA CASPARRI

**.UBA40<sup>∞</sup>**  
AÑOS DE  
DEMOCRACIA

**.UBAeconómicas**  
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

1913 - 2023 • 110 Años de  
Independencia



Universidad de Buenos Aires  
Facultad de Ciencias Económicas



---

# MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LAS CIENCIAS ECONÓMICAS

María Teresa **Casparri**

---

**.UBA40**<sup>∞</sup>  
AÑOS DE  
DEMOCRACIA

**.UBA**económicas  
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS  
1913-2023-110 ANIVERSARIO

Casparri, María Teresa

Métodos cuantitativos para las Ciencias Económicas / María Teresa Casparri. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Universidad de Buenos Aires. Instituto de Investigaciones en Administración, Contabilidad y Métodos Cuantitativos para la Gestión, 2023.

Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-950-29-1960-7

1. Administración Económica. I. Título.

CDD 330.02

EDITOR RESPONSABLE:

**Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas.  
Instituto de Investigaciones en Administración, Contabilidad y Métodos  
Cuantitativos para la Gestión (IADCOM) - Centro de Investigación en Métodos  
Cuantitativos para la Economía y la Gestión (CMA).**

Av. Córdoba 2122 - 1120AAQ - Ciudad Autónoma de Buenos Aires - República Argentina

Contacto: [cma@fce.uba.ar](mailto:cma@fce.uba.ar)

2023 ® Todos los derechos reservados.

Prohibida su reproducción y almacenamiento.  
Ninguna parte de esta publicación puede reproducirse o almacenarse  
por ningún medio sin la previa autorización del editor.

Primera edición: Marzo de 2023

Libro Digital, PDF

**Diseño Gráfico Editorial:** Pablo Alejandro Filosa

*pabloafilosa@gmail.com*

---

# CONTENIDO

---

Prólogo..... 9

## SECCIÓN 1: Área matemática



---

### CAPÍTULO 1.1

**Aplicación de la teoría de los valores extremos para el cálculo de la máxima pérdida esperada de una empresa que cotiza en la bolsa de comercio de Buenos Aires** ..... 17

• *María Teresa Casparri* • *Alicia Bernardello* • *María Elizabeth Cristófoli*

---

### CAPÍTULO 1.2

**Álgebras y Grupos de Lie. Aplicaciones a la Economía** ..... 25

• *Alicia Bernardello* • *María Teresa Casparri* • *Gustavo Krimker*

---

### CAPÍTULO 1.3

**Expandiendo las fronteras tradicionales en la gestión de la educación a distancia, un caso-propuesta que intenta preparar a los estudiantes para la sociedad del conocimiento** ..... 37

• *María Teresa Casparri* • *Susana C. Olivera de Marzana* • *Elba E. Font*

---

### CAPÍTULO 1.4

**Programación Dinámica Estocástica y Burbujas** ..... 55

• *María Teresa Casparri* • *Susana C. Olivera de Marzana*

## CAPÍTULO 1.5

---

- Aplicaciones actuariales de la Transformada de Laplace  
“El problema de la renovación”** ..... 73
- *María Teresa Casparri* • *Roberto Armando García*

## CAPÍTULO 1.6

---

- Análisis de la probabilidad conjunta de default utilizando  
la cópula de supervivencia** ..... 87
- *María Teresa Casparri* • *María José Bianco* • *Andrea Fabiana Lepera*

## CAPÍTULO 1.7

---

- Aplicación de control óptimo en un modelo económico  
de explotación pesquera** ..... 99
- *María Teresa Casparri* • *Verónica García Fronti* • *Ana Silvia Vilker*

## SECCIÓN 2: Temas financieros



### CAPÍTULO 2.1

---

- HuRLOs: Una innovación financiera para  
la Cobertura contra huracanes** ..... 115
- *María Teresa Casparri* • *Javier García Fronti*

### CAPÍTULO 2.2

---

- Estructura temporal de la tasa de interés en la crisis argentina 2001:  
un modelo analítico y su calibración** ..... 121
- *María Teresa Casparri* • *María José Bianco* • *Javier García Fronti*

## CAPÍTULO 2.3

---

### Liquidity risk estimation using Fuzzy Measure Teory ..... 133

• *María Teresa Casparri* • *Sebastián Rey* • *Javier García Fronti*

## CAPÍTULO 2.4

---

### A currency crisis model with a policymaker who is completely committed to a fixed exchange regime ..... 149

• *María Teresa Casparri* • *Javier García Fronti*

## CAPÍTULO 2.5

---

### Nota sobre el cálculo numérico del precio de una opción de venta americana ..... 167

• *María Teresa Casparri* • *Javier García Fronti*

## CAPÍTULO 2.6

---

### Gobernanza de innovaciones en contexto incierto: Un modelo estocástico del principio precautorio ..... 177

• *María Teresa Casparri* • *Javier García Fronti*

## SECCIÓN 3: Área actuarial



## CAPÍTULO 3.1

### Análisis de la teoría de credibilidad y su aplicación en la tarificación ..... 189

• *María Teresa Casparri* • *María Alejandra Metelli*

## CAPÍTULO 3.2

---

### La Estadística en la Ciencia Actuarial ..... 205

• *María Teresa Casparri* • *María Alejandra Metelli*

## CAPÍTULO 3.3

---

### Una aplicación actuarial al modelo de Azbel ..... 225

• *María Teresa Casparri* • *María Alejandra Metelli* • *Carolina Artuso*

## CAPÍTULO 3.4

---

### Planes de Ahorro: Análisis de la Resolución IGJ N° 14/2020 ..... 235

• *María Teresa Casparri* • *Aida Castegnaro* • *María Alejandra Metelli*

## CAPÍTULO 3.5

---

### Rentas financieras versus seguros de vida de capitales múltiples ..... 251

• *María Teresa Casparri* • *M. Alejandra Metelli* • *Eduardo Á. Tarullo*

## SECCIÓN 4: Riesgo agropecuario y cambio climático



## CAPÍTULO 4.1

---

### El riesgo agrícola, un enfoque que contemple al productor y el desarrollo sustentable ..... 287

• *María Teresa Casparri* • *Miguel Fusco* • *Verónica García Fronti*

## CAPÍTULO 4.2

---

<b>Ley de Emergencia Agropecuaria y su impacto sobre los pequeños productores .....</b>	<b>301</b>
---	------------

• *María Teresa Casparri* • *Miguel Fusco* • *Verónica Garcia Fronti*

## CAPÍTULO 4.3

---

<b>Planeamiento energético y valuación de mitigación de GEI: Modelo LEAP .....</b>	<b>323</b>
--	------------

• *María Teresa Casparri* • *Carla Squillace*

## CAPÍTULO 4.4

---

<b>Medición económica de eventos climáticos extremos en el sector agrícola: El caso de la soja en Argentina .....</b>	<b>341</b>
---	------------

• *Esteban Otto Thomasz* • *María Teresa Casparri* • *Ana Silvia Vilker*

• *Gonzalo Rondinone* • *Miguel Fusco*

## CAPÍTULO 4.5

---

<b>Índice sintético de precipitaciones ponderado por valor agrícola .....</b>	<b>375</b>
---	------------

• *María Teresa Casparri* • *Esteban Otto Thomasz*

• *Kevin Corfield* • *Ana Silvia Vilker*

<b>Acerca de los Autores .....</b>	<b>389</b>
------------------------------------	------------



---

# PRÓLOGO

---

Desde hace varias décadas tengo el honor de compartir el trabajo académico con María Teresa Casparri en nuestra querida Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires. Soy testigo privilegiado de cómo, a lo largo de su brillante carrera académica, ha convocado a profesores e investigadores a elaborar trabajos en colaboración con ella que resultaron en aportes fundamentales a las ciencias económicas. Es un placer realizar el prólogo de este libro que selecciona trabajos de María Teresa en coautoría con sus colegas a largo de su carrera. A los fines temáticos, se organiza en cuatro secciones: la primera de ellas corresponde al área matemática, la segunda a temas financieros, la tercera al área actuarial y la última al riesgo agropecuario y cambio climático.

La primera sección contiene trabajos de María Teresa en coautoría sobre temas relacionados con aplicaciones matemáticas y las formas de implementar su enseñanza en el ámbito universitario. En su mayoría fueron realizados durante la primera etapa de creación del Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión (CMA) y presentados en Jornadas de Docentes de Matemática de Facultades de Ciencias Económicas, de Tecnología Aplicada a la Educación Matemática Universitaria, de Estadística y de Profesores de Matemática Financiera.

En primer lugar, junto con Alicia Bernardello y María E. Cristófoli, se desarrolla una aplicación de la teoría de los valores extremos para el

cálculo de la máxima pérdida esperada de una empresa que cotiza en la Bolsa de Comercio de Buenos Aires.

Luego, en coautoría con Alicia Bernardello y Gustavo Krimker, se presentan los conceptos de álgebras y grupos Lie, con las correspondientes definiciones y ejemplos. En el siguiente artículo, junto con Susana C. Olivera de Marzana y Elba E. Font, se describen las relaciones percibidas entre los factores que influyen sobre el desarrollo de la educación a distancia. En cuarto lugar, trabajando con Susana C. Olivera de Marzana, realiza un desarrollo del modelo de Bellman para el caso estocástico discreto con las condiciones de primer orden y de diferenciabilidad de Benveniste y Scheinkman, juntamente con la solución de problemas vinculados con el área de finanzas.

A continuación, y junto con Roberto García, se realiza una introducción sobre la definición de la transformada de Laplace, las condiciones que aseguran su existencia y algunas propiedades de ella y de la transformada inversa que posteriormente aplican para la resolución de ecuaciones diferenciales, integrales e integro-diferenciales.

En sexto lugar, en coautoría con María J. Bianco y Andrea Lepera, se define la función de supervivencia y enuncian las principales propiedades de las cópulas. Por último, se encuentra una aplicación de control óptimo en un modelo económico de explotación pesquera, realizada en conjunto con Verónica García Fronti y Ana S. Vilker, donde se plantean los conceptos utilizados en la teoría del control óptimo.

La segunda sección contiene trabajos de María Teresa en el área financiera. En el primero de ellos, junto a Javier García Fronti, se presenta la cobertura contra huracanes denominada HuRLOs. A continuación, juntamente con María José Bianco y Javier García Fronti exponen un modelo matemático da cuenta de procesos económicos con fuerte

incremento en la tasa de interés de los bonos gubernamentales y en la estructura temporal de los mismos.

Posteriormente, en coautoría con Javier García Fronti y Sebastián Rey, se desarrolla un modelo de valor a riesgo con respecto a las fluctuaciones de precios y los posibles problemas de liquidez del mercado. En el siguiente trabajo se utiliza el modelo de Ozkan y Sutherland (1998) para comprender aspectos de la crisis monetaria que se produce en el año 2001 en Argentina.

Por último, se presenta un algoritmo de cálculo numérico para valuar una opción de venta americana utilizando el método de regresión de mínimos cuadrados propuesto por Longstaff y Schwartz en el año 2001.

La tercera sección está dedicada al área actuarial y en todos los trabajos participan María T. Casparri y María A. Metelli acompañadas de otros investigadores. En el primero, las autoras analizan la teoría de credibilidad y su aplicación en la tarificación.

En el segundo estudio las autoras muestran cuáles son las áreas de la estadística que resultan de aplicación en la carrera de Actuario. En el siguiente, y con Carolina Artuso, proyectan en el tiempo las tablas de mortalidad de Argentina para ambos sexos, debido a la necesidad de conocer tanto de los actuarios como de otros profesionales, no sólo cuál es la fuerza de mortalidad a la que está sometida una población determinada en un momento dado del tiempo, sino también conocer su evolución futura.

A continuación, junto con Aída Castegnaro, realizan un análisis de los aspectos técnicos de la resolución IGJ N° 14/2020 dictada por el organismo contralor para los planes de ahorro. Cerrando la sección y esta vez acompañadas por Eduardo Tarullo, en el trabajo titulado rentas

financieras versus seguros de vida de capitales múltiples, muestran las relaciones, analogías y diferencias existentes entre los distintos tipos de valores actuales.

La cuarta sección del libro contiene trabajos que son de autoría de María Teresa Casparri y están referidos al riesgo agropecuario y al cambio climático. En los dos primeros es acompañada por Miguel Fusco y Verónica Garci Fronti, realizan un estudio sobre el riesgo agrícola donde se contempla la problemática del productor y el desarrollo sustentable. En el segundo trabajo, se analiza la Ley de emergencia agropecuaria y su impacto sobre los pequeños productores.

Luego, junto con Carla Squillace indagan en los múltiples objetivos del planeamiento energético: clima, desarrollo, seguridad. En los últimos dos trabajos María Teresa Casparri es acompañada en el caso de: Medición económica de eventos climáticos extremos en el sector agrícola: el caso de la soja en Argentina, por Miguel Fusco, Gonzalo Rondinone, Esteban O. Thomasz y Ana S. Vilker; donde analizan los diferentes enfoques que miden el impacto de la variabilidad climática que afecta a todas las actividades económicas pero especialmente al sector agropecuario, observando especialmente aquellos que estudian la variabilidad. A su vez brindan una primera estimación económica de la pérdida de producción de soja generada por la ocurrencia de eventos climáticos extremos, particularmente eventos de sequía.

Para finalizar, y en esta ocasión conjuntamente con Kevin Corfield, Esteban Otto Thomasz y Ana S. Vilker, muestran la elaboración de un indicador de precipitaciones ponderadas por la producción de soja de los departamentos que tienen información climática, con el fin de suplir la falta de una medición de la relación general entre el clima y la producción de esa oleaginosa en la totalidad del área sembrada en Argentina.

Considero que esta compilación tiene gran valor académico y agradezco a María Teresa y a las y los autores por compartir este material con las y los estudiantes de nuestra Facultad. La selección de artículos compilados en este libro es de interés para profesionales, estudiantes de Ciencias Económicas y toda nuestra Comunidad Educativa.

**Prof. Emérito Dr. Ricardo J.M. Pahlen**

*Decano de la Facultad de Ciencias Económicas  
Universidad de Buenos Aires*





# SECCIÓN 1

Área matemática





# 1.1

## Aplicación de la Teoría de los Valores Extremos para el cálculo de la máxima pérdida esperada de una empresa que cotiza en la Bolsa de Comercio de Buenos Aires

*María Teresa Casparri • Alicia Bernardello • María E. Cristófoli*

### Introducción

Todo tipo de inversiones se encuentra expuesto a diferentes tipos de riesgos, los cuales deben ser analizados para evaluar la conveniencia o no de realizar la inversión. Algunos de ellos son:

- Riesgo operativo
- Riesgo de liquidez
- Riesgo de crédito
- Riesgo de mercado

El riesgo de mercado es el que se deriva de las fluctuaciones de los precios de un activo financiero durante un período de tiempo determinado. La Teoría de Valores Extremos se centra en el análisis de una parte de estos riesgos, los extremos.

Esta teoría nos brinda información sobre la distribución de probabilidades de los valores extremos de una variable aleatoria, es decir, sobre valores alejados de la media. En este trabajo, la variable aleatoria en estudio es la cotización de las acciones de la empresa METROGAS S.A.

Como antecedente a esta teoría, se puede mencionar el Valor a Riesgo (Value at Risk). Para realizar su estimación, durante mucho tiempo se supuso normalidad en el comportamiento de las variables, lo cual llevó a cometer

errores en el tratamiento de series financieras, generando una subvaluación de los riesgos extremos.

La Teoría de los Valores Extremos se basa en un teorema que no parte de ningún supuesto sobre el comportamiento de la variable en estudio, el mismo establece que la distribución de cualquier variable aleatoria, en exceso de un umbral determinado, tiende a una Distribución General de Pareto (GDP).

## 1. Modelo matemático

Analizando la variación de los precios de las acciones, podemos constatar que presentan una kurtosis mayor que la normal, y que los valores alejados de la media (los valores extremos) poseen una mayor probabilidad de ocurrencia, es decir que la distribución tiene colas pesadas.

Para constatar que la variación de los precios no sigue una distribución Normal, debemos llevar adelante un test gráfico llamado Q-Q plot (gráfico de cuantil a cuantil). Si el gráfico se presenta como una recta de 45°, entonces podemos concluir que los percentiles de la distribución empírica son similares a los de la distribución paramétrica, en cambio si el gráfico no se presenta como una recta de 45°, entonces la distribución paramétrica no se condice con la empírica. Otro método gráfico de este tipo de análisis es la función esperada de excesos (MEL, Mean Excess Loss), para aplicar este método, necesitamos un conjunto de  $n$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, y con ellas calcular el siguiente valor:

$$e_n(u) = \frac{\sum_{i=k}^n (x_i - u)}{n - k + 1} \quad k = \min(i / x_i > u)$$

Donde  $k+1$  es el número de observaciones por encima del umbral  $u$ .

El conjunto de puntos a graficar es:

$$\{x_k; e_n(x_k)\}; k = 1, 2, \dots, n\}$$

Si la pendiente de la función graficada es positiva, entonces diremos que la distribución tiene colas pesadas, y si es negativa, colas delgadas.

El umbral  $u$  es el punto a partir del cual consideramos que comienza la cola de la distribución. El problema de la elección de ese umbral se da en que cuanto mayor sea ese valor, es mejor porque para que se cumpla el teorema enunciado en el apartado anterior, es necesario que ese valor sea lo más grande posible. Pero por otro lado, cuanto mayor es ese valor, menor cantidad de datos muestrales nos quedarán para poder estimar los parámetros de la GDP. No existe un método objetivo para la determinación del umbral.

Para la elección del umbral  $u$  existen varias técnicas, una de ellas es el gráfico de Hill. Para poder aplicarlo, en primer lugar debemos ordenar las variables muestrales en forma descendente. Luego debemos calcular el estimador de Hill para cada elemento de la siguiente manera:

$$H_n = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\ln(x_i) - \ln(x_{k+1})) = \varepsilon \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

Por último debemos confeccionar un gráfico con los pares  $(k; (H_k)^{-1})$ . Obtendremos un gráfico que comenzará a estabilizarse a partir de un rango de valores, el umbral que estamos buscando va a pertenecer a ese rango, pero el valor exacto seleccionado quedará a criterio de quien esté utilizando el modelo.

Una vez seleccionado el umbral, debemos constituir una submuestra que contenga todos los valores que superen a ese umbral. Esta submuestra será la que debemos utilizar para estimar los valores de los parámetros de la Distribución General de Pareto. Con estos valores buscaremos estimar la pérdida máxima que puede generar invertir en una acción determinada.

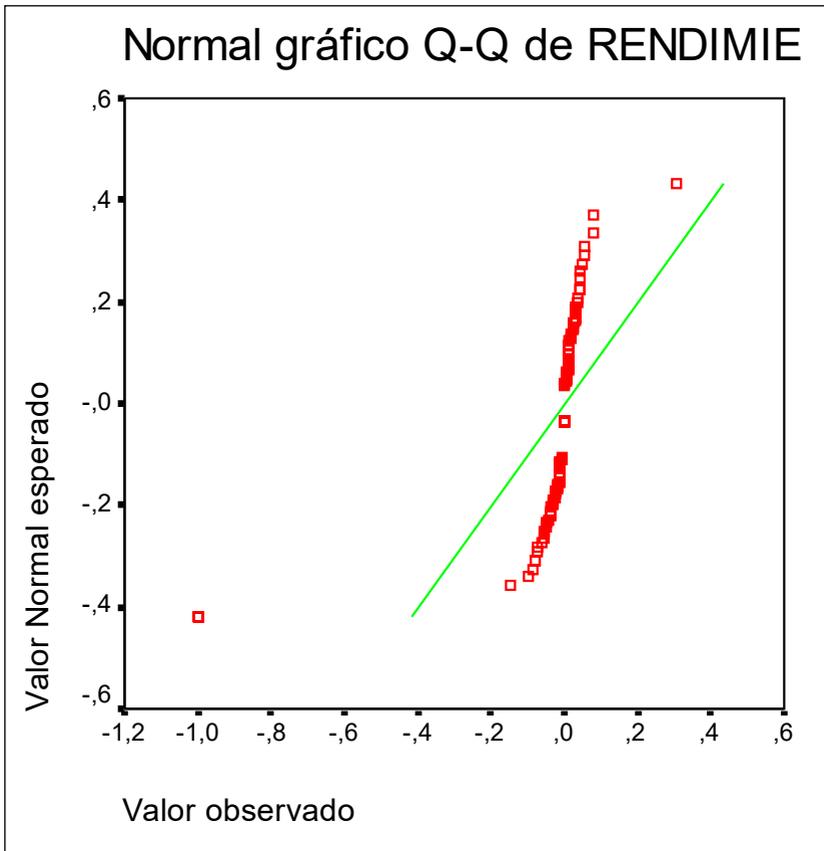
## 2. Aplicación de EVT a las acciones de Metrogas S.A.

Utilizaremos esta metodología a las acciones de la empresa METROGAS, que, por ser una empresa dedicada al transporte de gas, constantemente

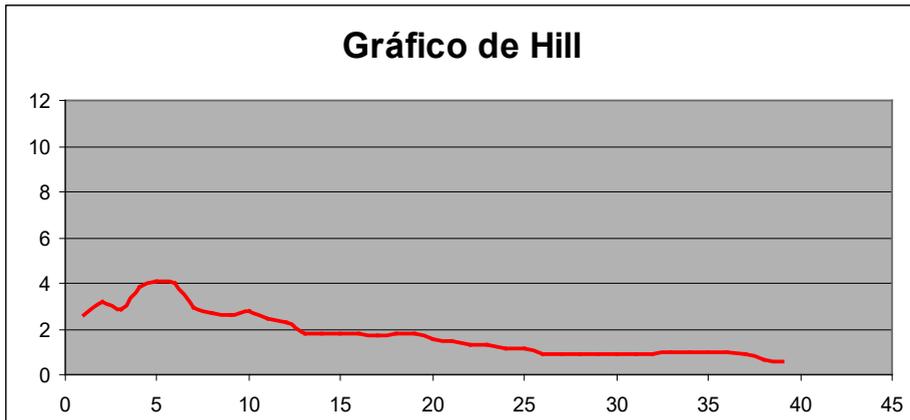
se encuentra realizando inversiones tecnológicas, pero en el año 2001 tuvo que afrontar la crisis argentina con proyectos en ejecución. El valor de las acciones de esta empresa se vio afectado por la crisis, y por los proyectos no cumplidos en tiempo y forma. Determinaremos a priori cuál era la pérdida máxima a la que se afrontaba un inversor por invertir en las acciones de esta empresa, y cuál fue la pérdida realmente alcanzada.

Utilizamos el rendimiento de las acciones desde enero de 2000 a diciembre de 2001.

En primer lugar, realizaremos el gráfico QQ Plot para corroborar que los datos no siguen una distribución Normal:



En segundo lugar, realizaremos el otro test gráfico presentado en el apartado anterior, llamado MEL. Para ello debemos seleccionar el umbral a partir del cual consideramos que comienza la cola de la distribución. En este punto, nos valdremos del gráfico de Hill:



Subjetivamente, decidimos que el valor de  $k$  para determinar el umbral  $u$  es 15. Entonces el umbral será  $-0,040540541$ . Utilizaremos las rentabilidades menores a dicho valor para estimar los parámetros de la Distribución General de Pareto. La función de esta distribución es la siguiente:

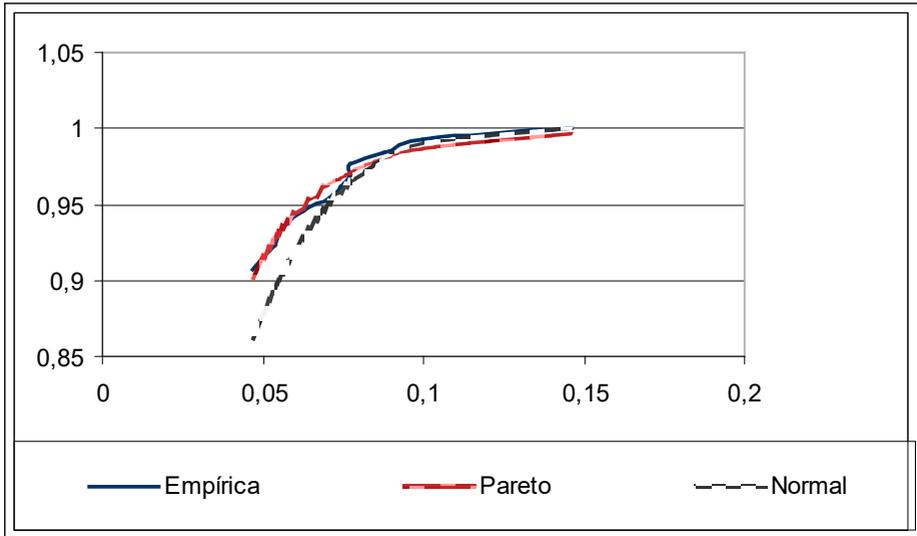
$$F(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\varepsilon \cdot y}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} & \text{con } \varepsilon \neq 0 \\ 1 - e^{-\frac{y}{\beta}} & \text{con } \varepsilon = 0 \end{cases}$$

Resolviendo la estimación de los parámetros con el método de mínimos cuadrados, obtuvimos el valor de los parámetros:

$$\varepsilon = 0,132$$

$$\beta = 0,0172$$

Para poder realizar una comparación de las estimaciones, veamos el siguiente gráfico, donde podemos visualizar las estimaciones de las funciones con la distribución Pareto y con la Normal:



Podemos ver en el gráfico, la mejor estimación obtenida con la distribución de Pareto que con la Normal, para aquellos valores superiores al umbral fijado.

El siguiente paso consistirá en calcular la máxima pérdida esperada. Para ello utilizaremos la siguiente fórmula:

$$Y = \frac{\beta}{\varepsilon} \left[ (1 - p)^{-\varepsilon} - 1 \right]$$

Siendo  $p$  el valor de la probabilidad que le asignemos a la estimación.

Reemplazando por los valores que hemos alcanzado, obtenemos cuál es la pérdida máxima estimada para el próximo período. Realizaremos los cálculos con dos valores de  $p$  diferentes, para poder realizar la comparación con los valores de rentabilidad obtenidos en el 2002 (luego de la crisis):

Para  $p = 0.99$ :

$$Y = \frac{0,0172}{0,132} \left[ (1 - 0,99)^{-0,132} - 1 \right] = 0,109$$

Esto quiere decir que la pérdida máxima estimada en la rentabilidad de las acciones para el año 2002, será de 10,9% con un 99% de confianza.

Comparando dicho valor con los datos de las cotizaciones para el 2002, podemos decir que sólo en un 2,07% de casos se sobrepasó dicho valor de pérdida.

Para  $p = 0.999$ :

$$Y = \frac{0,0172}{0,132} \left[ (1 - 0,999)^{-0,132} - 1 \right] = 0,194$$

En este caso, esto significa que la pérdida máxima estimada en la rentabilidad de las acciones para el año 2002, será de 19,4% con un 99,9% de confianza.

Comparando nuevamente los valores con los obtenidos en el 2002, podemos decir que hay un 100% de eficacia en la estimación (la pérdida máxima fue de 15,5% aproximadamente).

## Referencias

- Bärbel Finkenstädt and Holger Roozen, (2004), *“Extreme Values in Finance, Telecommunications, and the Environment”*, Ed: Chapman & Hall/CRC, Boca, Raton, London, New York, WashingtonDC
- Armagno D., Belliard M., Bernasconi J., Casparri M. T., Fajfar P., García Fronti J., Muruzabal M., Rey S., Roo E., (2004), *“Aspectos Financieros de la Crisis Argentina 2001”*, Ed: OmicronSystem, Argentina.
- María Teresa Casparri y Colaboradores, (2003), *“Acerca del Riesgo. Selección de algunos trabajos de Investigación.”*, Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión, Argentina.
- Bensalah, Y. (2000), *“Steps in Appying Extreme Value Theory to Finance: A Review”*, Working Paper, 2000-2, Bank of Canada, Canadá.
- Santiago Carrillo Menendez y ProsperLamothe, *“Nuevos Retos en la Medición del Riesgo de Mercado”*, Publicado en el número 72 de Perspectivas del Sistema Financiero.
- Almudena García Perez, (2004), *“La Teoría del Valor Extremo: Una Aplicación al Sector Asegurador”*, Madrid, España.

# 1.2

## Álgebras y Grupos de Lie. Aplicaciones a la economía

Alicia Bernardello • María Teresa Casparri • Gustavo Krimker

### 1. Álgebras y álgebras de Lie

Un álgebra es un espacio vectorial que además es un anillo. Más formalmente, dado un cuerpo<sup>1</sup>  $K$ , un **álgebra** es un espacio vectorial  $A$  sobre  $K$ , dotado de un producto que le confiere al mismo tiempo una estructura de anillo y que goza de la siguiente propiedad “asociativa”:

$$\alpha \cdot (a_1 \cdot a_2) = (\alpha \cdot a_1) \cdot a_2 = a_1 \cdot (\alpha \cdot a_2) \quad \forall \alpha \in K, \quad \forall a_1 \cdot a_2 \in A \quad (1)$$

Por ejemplo, el conjunto de todas las matrices de  $n \times n$  con coeficientes en un cuerpo cualquiera  $K$ ,  $M_n(K)$ , es un  $K$ -espacio vectorial considerando las habituales operaciones de suma de matrices y multiplicación de una matriz por un escalar; por otra parte, el producto de matrices dota al conjunto de una estructura de anillo y claramente se satisface la propiedad (1), más aún, se trata de un álgebra con unidad (la identidad de orden  $n$ ) y no conmutativa.

**Definición 1.1.** Dados un espacio vectorial  $L$  sobre un cuerpo  $K$  y una aplicación  $K$ -bilineal  $L \times L \rightarrow L$  denotada por  $(x, y) \mapsto [xy]$  y llamada corchete o corchete de Lie, diremos que  $L$  es un **álgebra de Lie** si se satisfacen los siguientes axiomas:

$$(L1) \quad [xx] = 0,$$

$$(L2) \quad [x[yz]] + [y[zx]] + [z[xy]] = 0, \quad \forall x, y, z \in L$$

El último axioma es conocido como la Identidad de Jacobi.

<sup>1</sup> A lo largo de todo el trabajo, por cuerpo entenderemos cuerpo conmutativo.

Una consecuencia inmediata del axioma (L1) junto con la bilinealidad de la aplicación  $(x, y) \mapsto [xy]$ , es que el corchete es **antisimétrico**. En efecto, se tiene que

$$0 = [x + y, x + y] = [xx] + [xy] + [yx] + [yy] = [xy] + [yx]$$

de donde  $[xy] = -[yx]$ . Recíprocamente, puede verificarse que si  $K$  es un cuerpo con característica distinta de 2, la antisimetría implica (L1). Este es el caso en la mayoría de las aplicaciones donde  $K$  es el cuerpo de números reales o complejos.

### Ejemplos:

- 1) Sea  $K = \mathfrak{R}$ ,  $A = \mathfrak{R}^3$  y  $[xy] = x \wedge y$  (Producto vectorial de  $x$  e  $y$ )<sup>2</sup>. El producto vectorial es una aplicación  $\mathfrak{R}$ -bilineal que satisface (L1). Se puede verificar que también cumple la identidad de Jacobi aplicando la siguiente igualdad:

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \cdot z) \cdot y - (x \cdot y) \cdot z$$

donde  $x \cdot y$  es el habitual producto escalar.

Por lo tanto, el producto vectorial define una estructura de álgebra de Lie en  $\mathfrak{R}^3$ .

- 2) Como mencionáramos anteriormente,  $(M_n(K), +, \cdot)$  es un álgebra, sin embargo claramente no es un álgebra de Lie ya que no se verifica el axioma (L1)
- 3) Es sencillo comprobar que si en el espacio de las matrices  $M_n(K)$ , definimos la aplicación

$$[\cdot, \cdot]: M_n(K) \times M_n(K) \rightarrow M_n(K)$$

tal que  $[AB] = AB - BA$  donde el producto del lado derecho es el habitual entre matrices, se obtiene un álgebra de Lie.

<sup>2</sup>  $\mathfrak{R}$  denota al conjunto de números reales.

Las álgebras de Lie surgen de manera natural cuando en un espacio vectorial de transformaciones lineales se define una nueva operación  $[xy] = xy - yx$  donde, nuevamente, el producto de la derecha es el habitual entre transformaciones lineales (es decir, la composición).

**Definición 1.2.** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita  $n$  sobre un cuerpo  $K$ . El conjunto de todas las transformaciones lineales de  $V$  en  $V$  es un espacio vectorial de dimensión  $n^2$ , que a su vez es un anillo respecto del producto habitual. Si en este conjunto definimos una nueva operación,  $[xy] = xy - yx$ , obtenemos un álgebra de Lie sobre  $K$ . Visto como un álgebra de Lie, denotaremos con  $\mathfrak{gl}(V)$  al conjunto de todas las transformaciones lineales de  $V$  en  $V$  y lo denominaremos **álgebra general lineal**, debido a su estrecha relación con el grupo general lineal,  $GL(V)$ , de todas las transformaciones lineales inversibles.

**Definición 1.3.** Sea  $L$  un álgebra de Lie. Un subespacio  $S \subseteq L$  es una **subálgebra de Lie** de  $L$  si se verifica que:

$$[xy] \in S, \quad \forall x, y \in S$$

**Definición 1.4.** Toda subálgebra del álgebra de Lie  $\mathfrak{gl}(V)$  se denomina **álgebra de Lie lineal**.

**Ejemplo:** Dado un espacio vectorial de dimensión finita  $V$ , el conjunto de todos los endomorfismos de  $V$  que tienen traza cero, constituye una subálgebra de  $\mathfrak{gl}(V)$ , denominada **álgebra lineal especial**,  $\mathfrak{sl}(V)$ . Este conjunto está íntimamente relacionado con el grupo de endomorfismos de determinante 1, conocido como **grupo lineal especial**  $SL(V)$ .

En general, resulta necesario definir cuándo los elementos de una nueva estructura son equivalentes, es decir, definir la idea de homomorfismo o simplemente morfismo, esto es, las aplicaciones que preservan la estructura.

**Definición 1.5.** Sean  $L_1$  y  $L_2$  dos álgebras de Lie sobre un cuerpo  $K$ . Una aplicación  $\varphi: L_1 \rightarrow L_2$  es un homomorfismo si

- a)  $\varphi$  es lineal, y
- b)  $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$  (preserva los corchetes)

## 2. Grupos algebraicos de matrices

En lo que sigue,  $K$  denotará al cuerpo de números reales o de números complejos. Por otra parte, denotaremos con  $GL_n(K)$  al grupo general lineal, es decir, al conjunto de todos los endomorfismos de  $K^n \rightarrow K^n$  que son inversibles. Recordemos además que  $End(K^n)$  es isomorfo a  $M_n(K)$ .

Para poder definir los grupos algebraicos de matrices, necesitamos introducir una topología en el espacio de matrices, más concretamente, dotarlo de una métrica. Recordemos entonces algunas definiciones del álgebra lineal:

**Definición 2.1.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $K$ . Un **producto interno** sobre  $V$  es una función

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow K$$

tal que para todo  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K$  y todo  $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in V$  se tiene que:

- 1)  $\langle \xi_1, \xi_2 + \xi_3 \rangle = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle + \langle \xi_1, \xi_3 \rangle$
- 2)  $\langle \alpha_1 \cdot \xi_1, \xi_2 \rangle = \alpha_1 \cdot \langle \xi_1, \xi_2 \rangle$
- 3)  $\langle \xi_2, \xi_1 \rangle = \overline{\langle \xi_1, \xi_2 \rangle}$ , donde la barra indica conjugación compleja
- 4)  $\langle \xi_1, \xi_1 \rangle \geq 0$  y  $\langle \xi_1, \xi_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \xi_1 = 0$

De la definición se deduce que

$\langle \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2, \xi_3 \rangle = \alpha_1 \langle \xi_1, \xi_3 \rangle + \alpha_2 \langle \xi_2, \xi_3 \rangle$ , o sea, el producto interno es lineal respecto de la primer variable; y

$\langle \xi_3, \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 \rangle = \overline{\alpha_1} \langle \xi_3, \xi_1 \rangle + \overline{\alpha_2} \langle \xi_3, \xi_2 \rangle$ , es lineal conjugado respecto de la segunda.

El hecho de tener definido un producto interno en un espacio vectorial  $V$ , nos permite pensarlo como un espacio dotado de una geometría euclídea ya que podemos definir la idea de ángulo y distancia entre vectores. De hecho, se tiene que el coseno de un ángulo  $\Theta \in [0, \pi]$  entre dos vectores  $\xi_1$  y  $\xi_2$  de  $V$ , está dado por  $\Re \frac{\langle \xi_1, \xi_2 \rangle}{\|\xi_1\| \cdot \|\xi_2\|}$  donde  $\|\xi\| = \langle \xi, \xi \rangle^{1/2}$ .

Por otra parte, en  $V = K^n$ , se tiene que  $\langle \xi, \eta \rangle = \sum_j \xi_j \overline{\eta_j}$  es un producto interno denominado **producto interno canónico**. Obsérvese que en dicho caso,  $\|\xi\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2}$  es la distancia euclídea de  $\xi$  al cero.

Sea ahora  $V$  un espacio con producto interno sobre  $K$ . La función  $d : V \times V \rightarrow \mathfrak{R}$  definida por  $d(\xi, \eta) = \|\xi - \eta\|$  es una métrica en  $V$  (distancia euclídea entre  $\xi$  y  $\eta$ ), con lo cual el espacio  $(V, d)$  es un espacio métrico.

**Definición 2.2.** Sea  $V$  un espacio con producto interno sobre  $K$ . La **norma** de  $A \in \text{End}(V)$  es el número denotado por  $\|A\|$  y definido mediante

$$\|A\| = \sup_{\xi \in V; \xi \neq 0} \frac{\|A \cdot \xi\|}{\|\xi\|} = \sup_{\eta \in V; \|\eta\|=1} \|A \cdot \eta\|$$

**Proposición 2.3.** Se tienen los siguientes resultados:

- 1)  $\|\cdot\|$  es efectivamente una norma en  $\text{End}(V)$ .
- 2)  $\|A\xi\| \leq \|A\| \cdot \|\xi\| \quad \forall \xi \in V$
- 3)  $\|A_1 A_2\| \leq \|A_1\| \cdot \|A_2\| \quad \forall A_1, A_2 \in \text{End}(V)$
- 4)  $\|1\| = 1$  (El uno de la izquierda representa a la transformación identidad)
- 5)  $\|A^* A\| = \|A\|^2$  ( $A^*$  es el operador adjunto de  $A$ )

De esta forma se dispone de dos espacios métricos,  $(V, d)$  donde  $d(\xi, \eta) = \|\xi - \eta\| = \langle \xi - \eta, \xi - \eta \rangle^{1/2}$  y  $(\text{End}(V), \rho)$  donde  $\rho(A, B) = \|A - B\|$ .

Esta última métrica nos permite definir de la manera usual la idea de convergencia de una sucesión. En este caso, se trata de una sucesión de endomorfismos, o si se quiere, de matrices cuadradas.

**Definición 2.4.** Se denomina **grupo algebraico de matrices** a cualquier subgrupo  $G$  de  $GL_n(K)$ , tal que  $G$  es cerrado en  $GL_n(K)$ , es decir, tal que para toda sucesión  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq G$ , si  $\{A_n\}$  converge a un elemento  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq G$ , entonces  $A \in G$ .

### Ejemplos:

- 1)  $GL_n(K)$  es un grupo algebraico de matrices.
- 2) Sea  $V$  un espacio de dimensión finita con producto interno sobre  $K$ .

El **grupo ortogonal**

$$\mathcal{O}(V) = \{A \in \text{End}(V) \mid \langle A\xi, A\eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle \quad \forall \xi, \eta \in V\} \subseteq GL_n(V)$$

o bien,

$$\mathcal{O}(V) = \{A \in \text{End}(V) \mid A^* A = 1\}$$

es isomorfo a un grupo algebraico de matrices.

Cuando  $K = \mathbb{R}$  y  $V = \mathbb{R}^n$  el grupo ortogonal es denotado por  $O(n)$ ; mientras que en el caso complejo,  $K = \mathbb{C}$  y  $V = \mathbb{C}^n$  el grupo ortogonal es denotado por  $U(n)$  y se lo llama **grupo unitario**.

- 3) El **grupo ortogonal especial**  $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$  es un grupo algebraico de matrices. Sus elementos son llamados rotaciones, ya que en el caso de  $SO(2)$  constituyen rotaciones en el plano.
- 4) Tanto el grupo unitario como el grupo unitario especial,  $SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$  son grupos algebraicos de matrices.

### 3. Exponencial de una matriz y álgebras de Lie de un grupo de matrices

De forma totalmente análoga a las definiciones de series de potencias, podemos estudiar la convergencia de una serie de matrices: dada una sucesión  $\{A_n\}$  de matrices de  $M_n(K)$ , diremos que la serie  $\sum A_n$  converge (absolutamente) si

cada serie de  $\sum_n (A_n)_j$  converge (absolutamente) hacia algún  $A_j \in K$ .

En particular se puede probar que la serie

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n = 1 + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots$$

converge siempre y cuando  $\|A\| < \infty$ , es decir, converge para toda  $A \in M_n(K)$ . La función definida anteriormente se conoce como **exponencial de una matriz** (o *exponencial matricial*).

**Propiedades 3.1.** Sea  $A \in M_n(K)$ . Se tiene los siguientes resultados:

- 1) Para todo  $x, y \in C$ ,  $\exp((x + y)A) = \exp(xA)\exp(yA)$
- 2)  $\exp(A) \in GL_n(K)$  y  $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$
- 3) Si  $A, B \in M_n(K)$  son dos matrices que conmutan, entonces  $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$ .

**Notación:** Utilizaremos la clásica notación  $e^A$  para denotar  $\exp(A)$

**Proposición 3.2.** Sea  $X \in M_n(K)$ . Sea  $\varphi : \mathfrak{R} \rightarrow M_n(K)$  la función dada por  $\varphi(t) = e^{tX}$ . Entonces  $\frac{d^n \varphi}{dt^n}$  existe para todo  $n$  natural, es decir,  $\varphi$  es una función de clase  $C^\infty$ .

**Definición 3.3** Sean  $G$  y  $H$  dos grupos algebraicos matriciales. Una función  $\psi : G \rightarrow H$  es un **homomorfismo de grupos de Lie** si se verifican las siguientes condiciones:

- 1)  $\psi(AB) = \psi(A)\psi(B) \quad \forall A, B \in G$
- 2)  $\psi$  es continua

**Observación 3.4.** Nótese que el grupo abeliano  $(\mathfrak{R}, +)$  es un grupo algebraico matricial vía la identificación de cada número real  $r$  con la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL_2(\mathfrak{R})$$

**Corolario 3.5** Para cada  $X \in M_n(K)$  fija, la aplicación  $\varphi : (\mathfrak{R}, +) \rightarrow M_n(K)$  definida en la proposición 3.2 es un homomorfismo de grupos de Lie.

Recíprocamente,

**Proposición 3.6.** Si  $\varphi : (\mathfrak{R}, +) \rightarrow GL_n(K)$  es un homomorfismo diferenciable de grupos de Lie y  $X = \varphi'(0)$ , entonces  $\varphi(t) = e^{tX}$  para toda  $t$  real.

**Proposición 3.7.**  $\det(e^X) = e^{\text{Traza}(X)} \quad \forall X \in M_n(K)$

**Definición 3.8.** Sea  $G \subseteq GL_n(K)$  un grupo algebraico matricial. El conjunto

$$g = \{X \in M_n(K) \mid e^{tX} \in G, \quad \forall t \in \mathfrak{R}\}$$

se denomina *álgebra de Lie* de  $G$ .

De esta forma, la función exponencial (exponencial de una matriz) es un puente que vincula los grupos algebraicos de matrices (en realidad, los grupos de Lie) con las álgebras de Lie presentadas desde un punto de vista totalmente abstracto en la primera parte de este trabajo. Existen otras formas de definir las álgebras de Lie asociadas a un grupo de Lie. De hecho la definición dada en 3.8. no es la que originariamente presentara Sophus Lie, quien asociaba a cada elemento de un grupo de transformaciones ciertas transformaciones infinitesimales, que constituían lo que hoy denominamos álgebras de Lie

Puede probarse que el conjunto  $g$  definido más arriba es un espacio vectorial y munido de un producto especial, (el corchete  $[xy] = xy - yx$ ) verifica la definición 1.1.

### Ejemplos:

1) Sea  $G = GL_n(K)$ , es decir el grupo de matrices inversibles de orden  $n$  sobre  $K$ . El álgebra de Lie asociada a  $G$  está dado por el conjunto de todas las matrices  $X$  de orden  $n$  tales que  $e^{tX} \in GL_n(K), \forall t \in \mathfrak{R}$ . Pero, en virtud de la propiedad 3.1.2) toda matriz del tipo  $e^A$  es inversible con lo cual se tiene que  $g = M_n(K)$ , es decir, el álgebra de Lie asociada a  $G = GL_n(K)$  es  $g = M_n(K)$  (compárese con lo escrito en la definición 1.2)

2) La idea de Lie era considerar elementos  $X \in M_n(K)$  "suficientemente próximos" a la matriz identidad 1. Así,  $X = 1 + A = 1 + \varepsilon A'$  con  $\|A'\| = \varepsilon$ . La teoría de infinitesimales de Lie nos pide luego que ignoremos los errores de orden  $\varepsilon^2$ . De esta forma, si  $G$  es un grupo algebraico de matrices, se define su álgebra de Lie  $g$ , como el conjunto de todas las matrices  $X$  tales que  $1 + \varepsilon X \in G$  salvo errores de orden  $\varepsilon^2$ , lo cual formalmente equivale a considerar  $\varepsilon^2 = 0$ . Supongamos que  $G = SL_n(C)$ , es decir el grupo de las matrices de determinante 1 con coeficientes complejos. Su álgebra de Lie está formada por todas las matrices de orden  $n$  sobre  $C$  tales que  $\det(1 + \varepsilon X) = 1$  salvo errores de orden  $\varepsilon^2$ .

Sean  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  los autovalores de  $X$ . Luego los autovalores de  $1 + \varepsilon X$  son  $1 + \varepsilon \lambda_1, 1 + \varepsilon \lambda_2, \dots, 1 + \varepsilon \lambda_n$ , con lo cual,

$$\det(1 + \varepsilon X) = \prod_{k=1}^n (1 + \varepsilon \lambda_k) = 1 + \varepsilon(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) + \varepsilon^2(\dots) = 1 + \varepsilon \text{Traza}(X) + \varepsilon^2(\dots) = 1 + \varepsilon \text{Traza}(X)$$

Por lo tanto,  $X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow 1 = \det(1 + \varepsilon X) = 1 + \varepsilon \text{Traza}(X) \Leftrightarrow \text{Traza}(X) = 0$ . Resulta entonces que el álgebra de Lie asociada al Grupo Especial Lineal está formado por todas aquellas matrices de traza 0. (Una vez más, compárese con la definición del álgebra lineal especial dada luego de la definición 1.4.

Con el objeto de profundizar las ideas, vamos a considerar un grupo de Lie muy sencillo. Recordemos que para cada número natural  $n$  al conjunto  $S^n = \{\xi \in \mathfrak{R}^{n+1} \mid \|\xi\| = 1\}$  se lo denomina  $n$ -esfera. En particular  $S^1 = \{\xi \in \mathfrak{R}^2 \mid \|\xi\| = 1\}$  puede ser visto en el plano complejo y es simplemente el conjunto de todos los números de módulo 1, es decir la circunferencia unitaria. Los elementos de esta circunferencia pueden ser representados en la forma  $e^{i\theta}$  con  $\theta \in \mathfrak{R}$  y es fácil ver que forman un grupo bajo la multiplicación de números complejos. Además tanto la multiplicación  $(\cdot: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1)$ , como la operación que a cada elemento le asigna su inverso multiplicativo  $(\text{inv}: S^1 \rightarrow S^1)$  son funciones de clase  $C^\infty$ . Por otra parte,  $S^1$  es un grupo matricial, ya que puede verse como el grupo unitario  $U(1)$ . Su álgebra de Lie está dada por los puntos de la recta  $i\theta$  la cual puede ser vista como la tangente a  $S^1$  en el elemento identidad 1:

## 4. Grupos de Lie

Desde un punto de vista informal, un grupo de Lie es un grupo que a su vez es una variedad diferenciable. Las variedades diferenciables son objeto de estudio de la Geometría Diferencial. Básicamente generalizan nuestras ideas acerca de curvas y superficies. Las variedades diferenciales son espacios que localmente se ven como espacios euclideos, pero que de manera global pueden ser muy diferentes a ellos.

**Definición 4.1.** Un *grupo de Lie* es una variedad diferenciable dotada de una estructura de grupo tal que tanto el producto como la aplicación que a cada elemento le asigna su inverso, son de clase  $C^\infty$ .

**Proposición 4.2.** Los grupos algebraicos de matrices son grupos de Lie.

Dado un grupo de Lie, su álgebra de Lie está definida como el espacio tangente a ella en la identidad.

## Referencias

- Baker, A. (2002) *Matrix Groups. An introduction to the Lie Group Theory*. Springer.
- Basov, S. (2004): *Lie groups of partial differential equations and their application to themultidimensional screening problems. Econometric Society 2004 Australasian Meetings* 44.
- Björk, T. (2001): *A geometric view of interest rate theory*. En: E. Jouini, J. Cvitanic y M.Musuela (eds.): *Option pricing, Interest Rates and Risk Management*, CambridgeUniversity Press, pp. 241–277.
- Björk, T. (2004): *On the Geometry of Interest Rate Models*. En: R.A. Carmona, E.C. Çinlar, I.Ekeland, E. Jouini, J. A. Scheinkman y N. Touzi (eds.): *Paris-Princeton Lectures onMathematical Finance 2003*, Springer-Verlag, pp. 133–216.
- Hoffman,K. Kunze, R.(1973) *Álgebra lineal*. Prentice Hall.
- Humphreys, J. (1972) *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer.
- Lo,C.F.;Hui, C.H.; Yuen ,P.H. (2000a): *Constant elasticity of variance option pricing modelwith time-dependent parameters. Int. J. Theor. Appl. Fin.* 3:4, pp. 661–674.
- Lo,C.F.;Hui, C.H.; Yuen ,P.H. (2000b): *Option risk measurement with time-dependentparameters. Int. J. Theor. Appl. Fin.* 3:3, pp. 581–589.
- Lo,C.F.;Hui, C.H(2001): *Valuation of financial derivatives with time-dependentparameters. Quantitative Finance* 1, pp. 73–78.
- Lo,C.F.;Hui, C.H(2002): *Pricing multi-asset financial derivatives with time-dependentparameters-Lie algebraic approach.Int. J. Math. Math. Sci.* 32:7, pp. 401–410.

Lo, C.F.; Hui, C.H. (2006): *Lie algebraic approach for pricing moving barrier options with time-dependent parameters*, *J. Math. Anal. Appl.* **323**:2, pp. 1455–1464.

Sato, R. (1981): *Theory of technical change and economic invariance. Application of Lie groups*, Academic Press.

## 1.3

# Expandiendo las fronteras tradicionales en la gestión de la educación a distancia, un caso-propuesta que intenta preparar a los estudiantes para la sociedad del conocimiento<sup>1</sup>

*María Teresa Casparri • Susana C. Olivera de Marzana • Elba E. Font*

## Introducción

El presente trabajo describe, desde la perspectiva del área matemática de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires, las relaciones percibidas entre los siguientes elementos:

- **TEMA Y OBJETIVOS DE LA CONFERENCIA:** “... está asociado a los factores que influyen sobre el desarrollo de la educación a distancia. La Conferencia ofrecerá una oportunidad para analizar las últimas investigaciones y discutir ideas vanguardistas sobre la sociedad del conocimiento, innovaciones tecnológicas y las destrezas necesarias para el Siglo XXI”.
- **SUBTEMA** en el que se encuadra este trabajo: “¿Cómo preparar a los estudiantes para la sociedad del conocimiento?”
- **TÍTULO DEL TRABAJO:** “Expandiendo las fronteras tradicionales en la gestión de la educación a distancia”.

A tal fin, el compromiso asumido al someter el Resumen al Comité Académico de este evento, incluyó los siguientes aspectos:

- a) “Se compartirá una experiencia puesta en marcha en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires. La misma se inicia con estrategias áulicas (presenciales y no presenciales), aplicadas en asignaturas del departamento de matemática, con el fin de estimular

<sup>1</sup> Documento de Trabajo para la Conferencia Internacional de Educación a Distancia “Las nuevas fronteras de la Educación a Distancia”. Puerto Rico. 2005.

la actitud pro-activa del alumno tanto en el estudio como en la investigación aplicada en el área profesional de la carrera elegida”.

- b) “Se expondrán propuestas y casos reales de vinculación integrando cursos presenciales y no presenciales, familiarizando a los docentes y estudiantes con el uso de las TIC para la integración de equipos que induzcan al aprendizaje colaborativo y para la aplicación real de ejes transversales del plan de estudio”.
- c) “El paso siguiente será mostrarlas como herramientas facilitadoras para la inserción de los estudiantes en centros de investigación de la propia Facultad. Se presentarán ejemplos concretos del *Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Gestión y la Economía y del Instituto de Investigaciones Contables*”.
- d) “Se abrirá una convocatoria a compartir las acciones”. Ello se hará con base en las conclusiones que se extraigan e incluirá analizar los rumbos para transitar, de una u otra manera, el camino a recorrer.

Antes de pasar a cumplir lo mencionado en los ítems a) a d) proponemos, como punto de partida, acordar la interpretación de los conceptos mencionados al principio de este apartado.

## Elementos para la representación social

Dado nuestro objetivo de compartir experiencias, logrando intercambios y retroalimentación recíproca que facilite el analizar rumbos en el camino a transitar, se incorporan algunas citas bibliográficas y breves comentarios que, pretendemos, motiven al lector a realizar su propia representación social de los conceptos en cuestión.

### a) Sociedad del conocimiento

- a.1) “*El nuevo libro de Andy Hargreaves (Enseñar en la sociedad del conocimiento (La educación en la era de la inventiva). Barcelona. Octaedro, pp.244) considerado un best seller, impresiona por el tratamiento tan singular que realiza sobre el tema y el sentido común que trasmite con su obra. Si hace algo más de una década las organizaciones*

*de aprendizaje eran un tópico, hoy en día son plena actualidad, decantándose como la vía de solución a los problemas que atraviesa el sistema educativo en la sociedad actual: la sociedad del conocimiento. Con traducción de Àngels Mata de la obra original en inglés: Hargreaves, Andy. “Teaching in the Knowledge Society: Education in the Age of Insecurity” (Teachers College Press, 2003), Juan María Sancho y Fernando Hernández, Directores de la colección “Repensar la Educación” de la editorial Octaedro, editan la tercera obra de Hargreaves dentro de la colección, pasando a ser el decimoctavo título. El libro consta de un prefacio escrito por el autor, siete capítulos y un anexo con las encuestas realizadas a los docentes, las cuales son la base de la investigación realizada por el autor. Cabe destacar la traducción española del subtítulo: “era de la inventiva” en lugar de “era de la inseguridad”, debido al impacto que han tenido los acontecimientos sucedidos el 11 de septiembre en New York, y que han marcado al autor, y considerado, probablemente, inapropiado para el público español, aunque sobre esto se pueden verter múltiples opiniones”*

Cabría aquí actualizar las consideraciones al respecto, a la luz de los acontecimientos vividos recientemente. **¿Usted qué opina?**

Además, nótese que la base de la investigación se corresponde con encuestas realizadas a los docentes.

**Al adherir mediante el presente trabajo al Subtema de este Congreso “¿Cómo preparar a los estudiantes para la sociedad del conocimiento?”, en qué posición considera usted debiéramos ubicarnos respecto de la pregunta: ¿Cómo preparar a los docentes para la sociedad del conocimiento?**

- a.2) “En las sociedades del conocimiento la acción humana está fuertemente condicionada por las circunstancias que se siguen del saber científico y de los artefactos técnicos. Pero, al mismo tiempo, también ocurre que las formas de pensar y de actuar en esa sociedad pueden ser más efectivamente protegidas frente al influjo de la ciencia, en la medida que se mejoran decisivamente las condiciones de posibilidad para dicha resistencia. La influencia

creciente de la ciencia y la técnica discurre al mismo tiempo que una elevada contingencia y fragilidad de la acción social, y no conduce en absoluto a una superación definitiva de la *irracionalidad* en virtud de la *racionalidad* producida por la ciencia”.

- a.3) *“las sociedades del conocimiento procesan información y conocimientos de formas que llevan al máximo el aprendizaje, estimulan la creatividad y la invención, y desarrollan la capacidad para iniciar el cambio y enfrentarse a él.”*  
*”enseñar para la sociedad del conocimiento implica cultivar estas capacidades en los jóvenes, desarrollar un profundo aprendizaje cognitivo, la creatividad y la inventiva entre los estudiantes; apostar por la investigación, el trabajo en redes y equipos, y la formación profesional permanente como docentes; y promover la resolución de problemas, la asunción de riesgos, la confianza en el proceso de colaboración, la habilidad para enfrentarse al cambio, y el compromiso y la mejora continua como organizaciones”.*

Con relación a ello, téngase presente que los planes de estudio de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires ya tienen incorporados desde su concepción los siguientes Ejes transversales:

Científico y Tecnológico, Comprensión y resolución de situaciones complejas, Ecológico y de Desarrollo Humano, Ético y Derechos Humanos, Papel del Estado. Cabe entonces preguntarnos: **¿Se hace ello realidad en la actividad académica a través de las direcciones de cada una de las carreras? ¿La aplicación de acciones que tiendan a lograr los objetivos buscados al definirlos como tales, es evaluada por algún procedimiento interno y/o externo? ¿Pueden mencionarse actividades concretas que permitan detectar acciones intercátedra, intentando abarcarlos en forma conjunta a fin de lograr resultados sinérgicos?**

b) Conceptos incluidos en el título del trabajo:

- Expandir
- Frontera
- Tradicional
- Gestión
- Educación a distancia

Repasaremos algunas definiciones (se señalan en **color**) a fin de facilitar y relacionar su interpretación con el tema y objetivo del evento.

**EXPANDIENDO LAS FRONTERAS TRADICIONALES EN LA GESTIÓN DE LA EDUCACIÓN A DISTANCIA**

a) Definiciones. Se indica la referencia de su extracción y se resalta en color lo vinculado a la interpretación que se pretende dar. En algunos caso se incorpora la definición de segundo nivel.

→ **EXPANDIR.** (Del lat. *expandĕre*).

1. tr. **Extender**, dilatar, ensanchar, **difundir**. U. t. c. prnl.

**extender.** (Del lat. *extendĕre*).

1. tr. **Hacer que algo, aumentando su superficie, ocupe más lugar o espacio que el que antes ocupaba.** U.t.c. prnl.

3. tr. Desenvolver, desplegar o desenrollar algo que estaba doblado, arrollado o encogido. U. t. c. prnl. ...

4. tr. **Dar mayor amplitud y comprensión que la que tenía a un derecho, una jurisdicción, una autoridad, un conocimiento,** etc. U. t. c. prnl. ....

9. prnl. **Dicho** de una raza, de una especie animal o vegetal, de una profesión, **de un uso**, de una opinión o de una costumbre: **Irse difundiendo donde antes no lo había.**

10. prnl. Dicho de una cosa: **A alcanzar su fuerza, virtud o eficacia a influir u obrar en otra u otras.**

...

> **difundir.** (Del lat. *diffundĕre*)

1. tr. **Extender, esparcir, propagar físicamente.** U. t. c. prnl.

2. tr. **Introducir en un cuerpo corpúsculos extraños con tendencia a formar una mezcla homogénea.** U. t. c. prnl.

3. tr. **Transformar los rayos procedentes de un foco luminoso en luz que se propaga en todas direcciones.** U. t. c. prnl.

4. tr. **Propagar o divulgar conocimientos, noticias, actitudes, costumbres, modas,** etc.

→ **FRONTERO, RA.** (De *fron*te y *-ero*).

1. adj. Puesto y colocado enfrente.

2. m. **frontero**. ...

5. f. **límite.** U. m. en pl. *Su codicia no tiene fronteras*

6. f. **fron**tis (|| fachada). ...

> **límite.** (Del lat. *limes*, *-itis*).

1. m. **Línea real o imaginaria que separa dos terrenos,** dos países, dos territorios.

2. m. Fin, término. U. en aposición en casos como *dimensiones límite, situación límite.*

3. m. Extremo a que llega un determinado tiempo. *El límite de este plazo es inamovible.*

4. m. Extremo que pueden alcanzar lo físico y lo anímico. *Llegó al límite de sus fuerzas.*

5. m. **Mat. En una secuencia infinita de magnitudes, magnitud fija a la que se aproximan cada vez más los términos de la secuencia.** Así, la secuencia de los números  $2n/(n+1)$ , siendo  $n$  la serie de los números naturales, tiene como límite el número 2.

~ inferior.

1. m. **Mat.** En un conjunto de magnitudes, magnitud máxima que es inferior a todas las del **conjunto.**

~ superior.

1. m. **Mat.** En un conjunto de magnitudes, magnitud mínima que es superior a todas las del **conjunto.**

→ **TRADICIONAL.**

1. adj. Perteneciente o relativo a la tradición.

2. adj. Que se transmite por medio de ella.

3. adj. **Que sigue las ideas, normas o costumbres del pasado.**

En este recorrido podemos observar, con cierto grado de alivio para quienes se han especializado en la matemática aplicada, que comienzan a aparecer algunos términos de uso frecuente en este área (límite, línea real o imaginaria, frontera, conjunto, entre otros). Ello nos ofrece la excusa necesaria para intentar expresar nuestra percepción sobre el tema a desarrollar utilizando las ventajas que, a nuestro entender, el “lenguaje matemático” nos ofrece.

Sin embargo, aún nos falta tener en cuenta otras palabras significativas del título del trabajo. Continuemos:

#### GESTIONAR. (De *gestión*)

1. tr. Hacer **diligencias conducentes al logro** de un negocio o de un deseo cualquiera.

#### diligencia. (Del lat. *diligentia*).

1. f. **Cuidado y actividad en ejecutar algo.**

...

hacer alguien sus ~s.

1. fr. **Poner todos los medios para conseguir un fin. ...**

*Real Academia Española © Todos los derechos reservados*

#### EDUCACIÓN A DISTANCIA

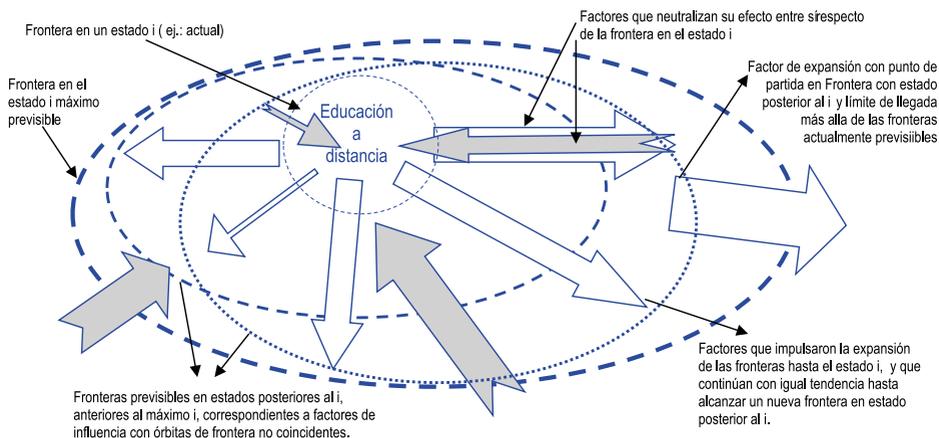
Modalidad educativa que, mediatizando la mayor parte del tiempo la relación pedagógica entre quienes enseñan y quienes aprenden a través de distintos medios y estrategias, permite establecer una particular forma de presencia institucional más allá de su tradicional cobertura geográfica y poblacional, ayudando a superar problemas de tiempo y espacio. *Mena, Marta*

Los vocablos señalados probablemente resulten significativos por sí mismos en forma independiente. A su interrelación en el marco del título elegido, dedicaremos el siguiente apartado en el que se incluye su representación.

## Interpretación del título del trabajo

***“Expandiendo las fronteras tradicionales en la gestión de la educación a distancia, un caso-propuesta que intenta preparar a los estudiantes para la sociedad del conocimiento”.***

Las nuevas fronteras de la educación a distancia serán el resultado de un conjunto de factores que actúan, en sentido positivo y negativo sobre su desarrollo, algunos potenciándose, otros neutralizándose y otros en forma independiente entre sí, con puntos de partida y límites de llegada sobre diferentes líneas imaginarias de fronteras posibles, y aún fuera de ellas .El siguiente gráfico intenta dar una muestra de dicha situación (lo señalado es sólo a título de ejemplo).



## ¿Podría describir algún factor real que conozca y considere se identifica con una o más de las situaciones presentadas aquí?

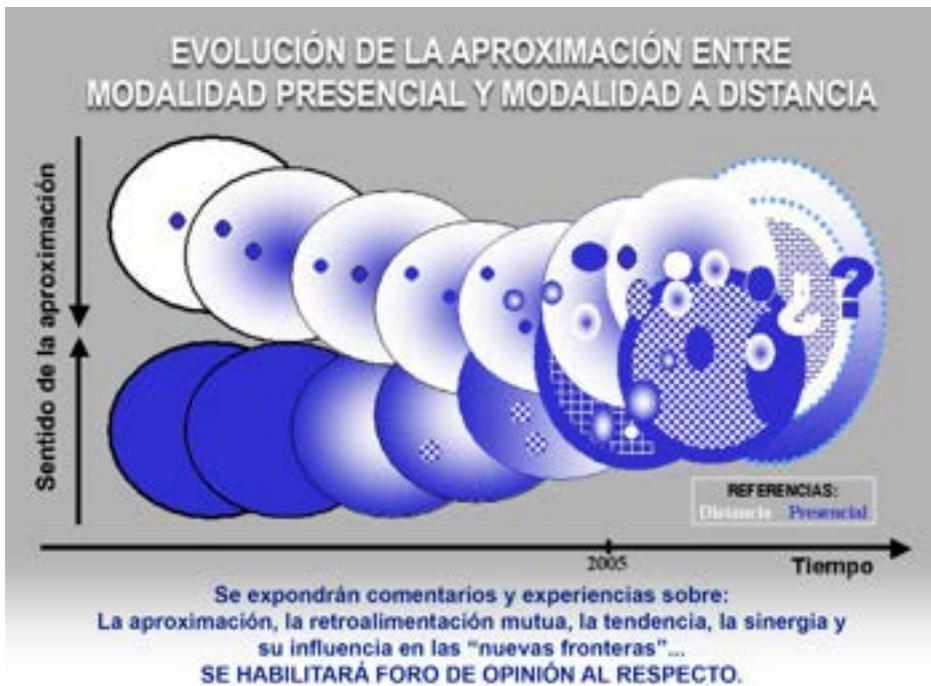
Entendemos que a ello hace referencia el objetivo de este Congreso Internacional de Educación a Distancia y que, para tender a su logro, cada uno de los trabajos presentados debe encuadrarse en uno o más de los subtemas fijados apuntando al tema central desde alguna de las perspectivas posibles.

Nuestra propuesta trata de vincular la perspectiva elegida, factores expansivos de las fronteras de la educación a distancia, con las estrategias aplicadas en los distintos momentos del proceso metodológico de diseño del proyecto, con vista a dar respuesta a una pregunta de interés generalizado “¿Cómo preparar a los estudiantes para la sociedad del conocimiento?”.

Pasaremos pues a describir, desde nuestra experiencia en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires, la evolución y tendencia de las fronteras, en la medida que existan, entre la modalidad a distancia y la modalidad presencial.

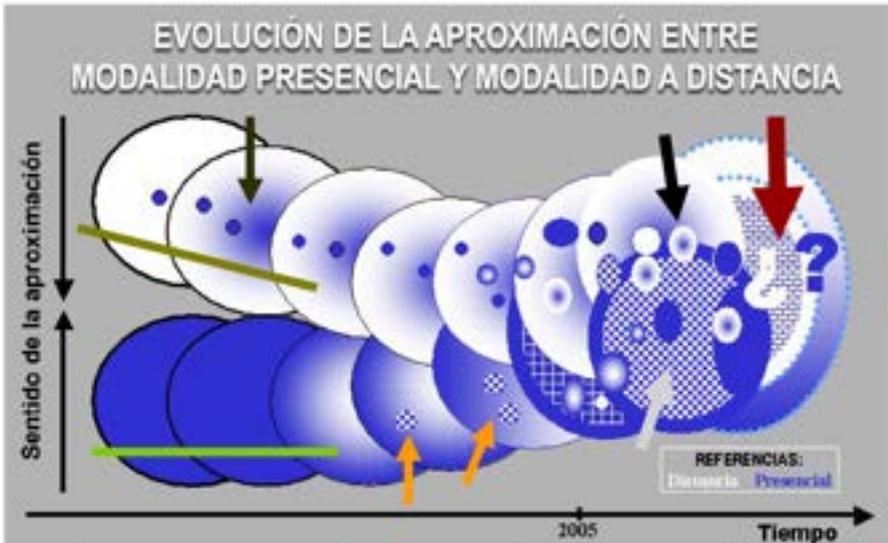
## Aproximación entre la modalidad a distancia y la modalidad presencial. Su evolución.

También aquí nos valdremos del recurso gráfico como estímulo para la interpretación e imaginación del interesado en este tema y como elemento facilitador para quien lo expone.



A continuación se incorporan algunos comentarios como elementos disparadores para su participación en el Foro respectivo.

Experiencias en el área matemática de la FCE-UBA



- La MP permanece "independiente".
- La MD se acerca a la MP (incorpora elementos gracias a las TIC)
- La MD siempre mantuvo al menos un núcleo presencial (evaluación).

La MP comienza a incorporar pequeños núcleos de actividades combinadas (uso de correo electrónico).

Ambas modalidades incorporan variados núcleos combinados. La MP apoya cada vez más las actividades propias con recursos de la MD, gracias al uso de las NTIC's. Aumentan las acciones compartidas.

El "juego" (teoría económica) entre la modalidad a distancia y la presencial, no es de suma cero.  
¿Se Siente a "construir" una modalidad "única" con porcentajes de presencialidad adaptables?

**La MP no retrocederá en su acercamiento a la MD**

¿Está dispuesto a participar con la visión del tema desde su experiencia particular?  
Por favor, aporte al Foro algún caso que valide / confronte lo aquí expresado y/o comente sus expectativas al respecto.

## Propuestas

Nos toca ahora seguir cumpliendo con el resto de lo prometido en el Resumen presentado oportunamente (*se intercalan los párrafos respectivos, en letra cursiva, como a), b) y c)*), a la luz de lo desarrollado hasta aquí. En cada caso lo haremos mediante la incorporación de imágenes que permitan detectar la estrategia aplicada.

Durante la presentación se realizarán los comentarios adicionales pertinentes y se quedará a disposición para consultas e intercambio en el Foro habilitado a tal efecto.

**ACLARACIÓN:** Los distintios ítems quedarán incorporados en los subtítulos, manteniendo la numeración original.

- b) (*del Resumen*) “*Se expondrán propuestas y casos reales de vinculación integrando cursos presenciales y no presenciales, familiarizando a los docentes y estudiantes con el uso de las TIC para la integración de equipos que induzcan al aprendizaje colaborativo y para la aplicación real de ejes transversales del plan de estudio*”. (Se marca con flecha azul).

The image shows a screenshot of a website for 'ALGEBRA Código: 345'. The page has a dark blue header with the course name and code. Below the header, the main content area is white and features the title 'POR QUÉ ESTUDIAR ESTA MATERIA?'. There are three main sections: 'Información de cursos', 'Exámenes finales', and a sidebar on the left. The sidebar contains a list of navigation items: Normas, Temario, Bibliografía, Foros, Material, Didáctico, Temas de Examen, Ética y Matemática, Mensajes, and Principal. Four blue arrows point to specific elements: three arrows point to 'Temario', 'Bibliografía', and 'Foros' in the sidebar; one arrow points to 'A Distancia' in the 'Información de cursos' section; and another arrow points to 'Búscadan en Sede Paternal' in the 'Exámenes finales' section.

**ALGEBRA**  
Código: 345

**POR QUÉ ESTUDIAR ESTA MATERIA?**

**Información de cursos**

- Sede Córdoba
- Sede Avellaneda
- Sede Paternal
- Sede San Isidro
- Sede Tucumán (ex-Uriburu)
- A Distancia**

**Exámenes finales**

Alumnos de Sede (Libres y Regulares)  
14 de Julio de 2005  
9 hs. (CONFIRMAR EN CADA SEDE)

INDISPENSABLE: DOCUMENTO DE IDENTIDAD  
SE RECOMIENDA VERIFICAR CON ANTERIORIDAD LA INCLUSIÓN EN EL LISTADO.

ALUMNOS REGULARES QUE CURSARON A DISTANCIA:  
Búscadan en Sede Paternal

Normas  
Temario  
Bibliografía  
Foros  
Material  
Didáctico  
Temas de Examen  
Ética y Matemática  
Mensajes  
Principal

El acceso a esta página es libre a través de <http://www.econ.uba.ar/www/departamentos/matematica/plan97/algebra/index.html>

Durante la exposición se mostrará el funcionamiento on-line de cada una de estas opciones con énfasis en el contenido y utilización hecha de las mismas hasta el presente.

c) (del Resumen) “El paso siguiente será mostrarlas como herramientas facilitadoras para la inserción de los estudiantes en centros de investigación de la propia Facultad. Se presentarán ejemplos concretos del Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Gestión y la Economía y del Instituto de Investigaciones Contables” (flechas en azul).

The screenshot shows a web page with a sidebar menu on the left and a main content area. The sidebar menu includes items like 'Inicio', 'Normas', 'Temario', 'Bibliografía', 'Foros', 'Material', 'Didáctico', 'Temas de Examen', 'Ética y Matemática', 'Mensajes', 'Principal', 'Encuadre General', 'Metodología', and 'Programa'. The main content area has a header 'MÉTODOS CUANTITATIVOS' with 'Codigo: 750' and 'Institucional'. Below this is a section titled 'Participación en Eventos (últimos tres años)'. The text in this section asks for contact information to request more details: 'Para solicitar más información deben enviar un mensaje con los siguientes datos: Apellido: Nombre: Carrera: Año: Universidad: ¿Te encuentras cursando alguna materia en la FCE-UBA. ¿Cuál? Cómo te enteraste de la existencia de este material: Porque o para qué te interesa: Dirección de Mail para enviarte la información solicitada: Teléfono (optativo): Dirección (optativo):'. There are two bullet points: '• 2º Congreso Internacional y 6º Nacional de Administración, Contaduría y Mercadotecnia. Área Temática: "La proyección de la contaduría, sus riesgos y oportunidades", Título del Trabajo: "Información contable proyectada, modelos matemáticos y formación de valores; una integración posible" Universidad de Guanajato. México. 2005. Biondi, Mario; Casparri, María Teresa; Font, Elba.' and '• Cuartas Jornadas de Tecnología aplicada a la Educación Matemática'. A 'Más información' link is at the bottom right. A star icon is in the bottom right corner of the screenshot.

Puede accederse al listado completo a través de <http://www.econ.uba.ar/www/departamentos/matematica/plan97/metodos%20cuantitativos/INDEX.html>

COMENTARIOS PARA CONTINUAR  
Y CONVOCATORIA A PARTICIPAR

Nos basaremos en el caso señalado para resaltar algunos aspectos que intentan, a la vez que transferir lo actuado, convocar al intercambio y participación para “continuar camino en la expansión de las fronteras de la educación a distancia” y así aprovechar la potencial sinergia que produce el trabajo integrado en esta área.

Tomado pues a simple título de ejemplo, diremos que dá muestra de:

- Integración del Departamento de Matemática, del Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión y del Instituto de Investigaciones Contables para el desarrollo de investigaciones en temas de interés profesional y social.
- Aplicación en la formación curricular de los ejes transversales mencionados, incluyendo en forma expresa el vinculado a la “Ética”, aún y con más énfasis, en las materias técnicas.
- Transferencia a través de participación en eventos de carácter nacional e internacional.
- Posibilidades de incorporación de becarios, alumnos y graduados a equipos de investigaciones interdisciplinarios.
- Acceso libre a la información y convocatoria abierta a participar.

De esta forma la expansión, tendiente a la supresión, de las barreras imaginarias entre la modalidad a distancia y la modalidad presencial, hizo posible lo descripto. Sin embargo el proceso no termina allí, el apoyo a la expansión de las barreras que se mantengan o surjan a la surgiente “modalidad integrada” deber seguir siendo continua, en pos de la actualización docente y la preparación de los estudiantes para la “sociedad del conocimiento”, tal como fue caracterizada al inicio de este trabajo.

Tenemos la convicción de que las estrategias puestas en marcha constituyen uno de los elementos base en la construcción del andamiaje necesario para ello, pudiendo mencionarse:

- a) La organización de eventos académicos, entre el Departamento de Matemática y el Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos aplicados a la Economía y la Gestión, fomentando la participación activa de docentes y la difusión de la actualización del conocimiento en el área de las aplicaciones matemáticas al ámbito de las carreras de Ciencias Económicas.
- b) La expansión de la prueba piloto para la aplicación de los avances de la tecnología educativa como herramienta para mejorar la calidad frente a la masividad, conjuntamente con el Gabinete Académico de Computación y con la Subsecretaría Pedagógica.
- c) La continuidad en el estímulo, captación y formación de recursos humanos orientados a la docencia y/o a la investigación, tanto en el ámbito propio como integrado a otros institutos de investigación.
- d) La difusión de la aplicabilidad del eje curricular/transversal de la Ética en la enseñanza de materias del área matemática, capacitando a los docentes con este enfoque e impulsando propuestas de investigación-acción en el aula, vinculadas a la formación en valores y su transferencia al medio.

Pero también estamos seguros de que hace falta mucho más, lo que da lugar al último compromiso expresado.

## CONVOCATORIA A PARTICIPAR

- e) *(del Resumen) “Se abrirá una convocatoria a compartir las acciones”. Ello se hará con base en las conclusiones que se extraigan e incluirá analizar los rumbos para transitar, de una u otra manera, el camino a recorrer.*

Foro que se habilitará en

[www.econ.uba.ar](http://www.econ.uba.ar)

Mientras, para ir pensando también en ese “mucho más” indicado, queremos dejar latente tres citas y un artículo anexo.

- 1) “La enseñanza es una profesión paradójica. De todos los trabajos que son o que aspiran a ser una profesión, sólo de la enseñanza se espera que cree las habilidades y capacidades humanas que deben permitir a individuos y organizaciones sobrevivir y tener éxito en la sociedad del conocimiento actual.”.
- 2) “La enseñanza es la profesión nuclear, el agente clave del cambio en la sociedad del conocimiento actual. Los docentes son las parteras de la sociedad del conocimiento. Sin los docentes, su confianza y competencia, el futuro nacerá muerto y con malformaciones.”
- 3) “La calidad es un elemento medular de la educación que no sólo tiene repercusiones en lo que aprenden los alumnos, sino también en su manera de aprender y en los beneficios que obtienen de la instrucción que reciben. La búsqueda de medios para lograr que los alumnos obtengan resultados escolares decorosos y adquieran valores y competencias que les permitan desempeñar un papel positivo en sus sociedades, es una cuestión de plena actualidad en las políticas de educación de la inmensa mayoría de los países”.
- 4) Etcheverry, Guillermo Jaim. (2005). “Maestros arcaicos”. **ANEXO I**.

La sociedad del conocimiento está llamando a todos y cada uno y, en particular a las vocaciones docentes. Se debe reconocer el derecho de acceso a la educación de más alto nivel a todas las personas, estamos empeñados en ello y necesitamos trabajar en equipos sin “fronteras”, ...

¿ACEPTA UNA CITA EN UN “AULA VIRTUAL”?

[www.econ.uba.ar](http://www.econ.uba.ar)

[http://www.interecon.econ.uba.ar/tecnologia\\_educativa/](http://www.interecon.econ.uba.ar/tecnologia_educativa/)

# ANEXO 1

---

## Maestros arcaicos

*Por Guillermo Jaim Etcheverry*

Por qué los maestros pretenden imponerse a sus alumnos, reclamando silencio y respeto? ¿Lo hacen porque consideran que ellos son los que “saben”? Para la sociedad actual, ésta parece ser una imposición inaceptable que confirma la existencia de una violencia simbólica intolerable ejercida por los **docentes** en la institución escolar. No es que existan maestros y profesores que abusen de su autoridad, que sin duda los hay y deberían ser sancionados. Se sostiene que la autoridad de quien enseña es, en sí misma, abusiva e intolerable. La tarea esforzada y difícil que supone contribuir pacientemente a la construcción de una persona se percibe como un acto violento contra su libertad, ante el que, a los alumnos y a sus padres, sólo les cabe rebelarse, incluso recurriendo a la agresión física.

En realidad, esta descripción grotesca de la enseñanza confunde el discurso de los **docentes** con la instancia de la palabra personal, subjetiva. Lo que se esconde detrás de esta caracterización es la sincera convicción de una sociedad que cree que no hay nada por enseñar. Sólo si esto fuera así, si los profesores no supieran nada, si no debieran transmitir nada, todo quedaría reducido a su palabra personal. En ese caso, su “autoridad” se volvería no sólo superflua, sino completamente abusiva. Los alumnos no tendrían ninguna razón para escucharlos y menos aún para tener que hacerlo.

En este escenario de una relación entre individuos comunes, y por lo tanto iguales, la pretendida docencia se convierte en una vinculación totalmente interpersonal: desaparecen profesores y alumnos y, por lo tanto, se evapora la enseñanza. En las aulas se reunirían personas que sólo se refieren a sí mismas, por lo que resultaría incomprensible que alguna de ellas pretendiera lograr por parte de las otras atención, silencio y respeto; la “escuela café”, una reunión de amigos en la que se escucharían voces en un coro de iguales.

Lo que parecería no advertirse es que, cuando un docente se dirige como tal a alumnos que son eso, alumnos, no es su persona quien les habla. Lo hace el maestro que esa persona es en ese momento preciso y en esas circunstancias singulares. No dirige su discurso a las personas que tiene frente a sí, sino a los alumnos que ellas son. Por eso, el silencio que la palabra del maestro reclama de los alumnos es un silencio que el docente se ha impuesto de entrada a sí mismo. Aunque hable, ha silenciado su propio discurso para prestar su palabra al conocimiento. Ese convertirse en vehículo del saber es lo que lo instituye como maestro, lo que legitima su palabra. En esa exigencia que el buen maestro se impone a sí mismo se funda su derecho imprescriptible a ser atendido por sus alumnos. Es decir, no hay enseñanza si no existe un contenido a enseñar, porque sólo ese contenido es el que la legitima.

Cuando se caracteriza como arcaica la concepción comentada, lo que queda expuesto es esta ruptura del vínculo inseparable entre el conocimiento y la enseñanza. El calificativo de “arcaico” se emplea con la definitiva contundencia de un certificado de defunción.

Pero *arkhé*, en griego, significa a la vez principio, origen, punto de partida, comienzo, autoridad. La concepción de la enseñanza que condena nuestra época –en nombre del avance de la sociedad moderna y aun a riesgo de privar a la humanidad de sus recursos más profundos– es en realidad arcaica, pero no porque esté muriendo, como se pretende señalar. Lo es porque enseñar está en el punto de partida, en el origen de lo humano. Precisamente por eso, la enseñanza es una actividad “arcaica”.

**El autor es educador y ensayista**

**Publicado en Diario La Nación**

## Referencias

- Boada Caño, J. *Recensiones bibliográficas del volumen 2004 - 5 - Teoría de la educación: educación y cultura en la sociedad de la información. Hargreaves, a. (2003). Enseñar en la sociedad del conocimiento (La educación en la era de la inventiva)*. Barcelona. Octaedro, pp.244. Ediciones Universidad de Salamanca.
- Inneraty, Daniel. *Hemeroteca Virtual ANUIES*. Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior. <http://www.anuiex.mx> <http://www.hemerodigital.unam.mx/ANUIES>
- Hargreaves, A. (2003) *Enseñar en la sociedad del conocimiento*. Barcelona. Ed. Octaedro
- Hargreaves, A.2003, *Enseñar en la sociedad del conocimiento*. Barcelona. Ed. Octaedro, p.19.
- Hargreaves, A.2003, *Enseñar en la sociedad del conocimiento*. Barcelona. Ed. Octaedro, p.181.
- Informe de Seguimiento de la EPT en el Mundo. 2005 – “*El Imperativo de la Calidad*”. UNESCO. [http://portal.unesco.org/education/es/ev.php-URL\\_ID=35939&URL\\_DO=DO\\_TOPIC&URL\\_SECTION=201.html](http://portal.unesco.org/education/es/ev.php-URL_ID=35939&URL_DO=DO_TOPIC&URL_SECTION=201.html)
- Mena, Marta y otros.(2005) “*El diseño de proyectos de educación a distancia*”. Argentina. Editorial Stella. Ediciones La Crujía.



# 1.4 Programación dinámica estocástica y burbujas<sup>1</sup>

*María Teresa Casparri • Susana C. Olivera de Marzana*

## Introducción

El principio de optimalidad de Bellman dice que “una política óptima tiene la propiedad de que, cualquiera que sea la acción inicial, las posibles elecciones restantes constituyen una política óptima con respecto al subproblema que comienza en el estado determinado por las acciones iniciales”. Toda la teoría del control puede desarrollarse a partir del principio de Bellman en lugar del principio del máximo de Pontryagin.

El primero es intrínsecamente recursivo y su finalidad es encontrar la forma del valor óptimo o función de valor. El de Pontryagin pone el énfasis en encontrar las trayectorias de las variables de control que conducen al óptimo.

En forma continua el problema se presenta como

$$\text{Max } V(x) = \int_0^T f(t, x, u) dt + F[x(T), T]$$

sujeto a  $x' = g(t, x, u)$

$$x(0) = x_0$$

$$x(T) = x_T$$

$$\{u(t)\} \in U$$

<sup>1</sup> Trabajo presentado en las VII Jornadas Actuariales, Buenos Aires, 2006

La ecuación diferencial fundamental en derivadas parciales que se obtiene resulta ser  $-V(t, x) = \underset{u}{\text{Max}}[f(t, x, u) + V_x(t, x) g(t, x, u)]$  denominada ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman.

## Caso discreto

Consideremos únicamente un estado  $x$  y un control  $u$ .

Sean  $D, E \subseteq \mathfrak{R}^2$  dos conjuntos abiertos,

$$F = \{f_t : D \rightarrow \mathfrak{R} \mid t = 0, \dots, T\},$$

$G = \{g_t : E \rightarrow \mathfrak{R} \mid t = 0, \dots, T\}$ , dos familias de funciones de clase  $C^2$  y  $x : \{0, \dots, T+1\} \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $u : \{0, \dots, T\} \rightarrow \mathfrak{R}$ , dos funciones, siendo  $x(t) = x_t$  y  $u(t) = u_t$ ,  $x$  es la variable de estado y  $u$  la de control. Finalmente sea  $V_{T+1}$  una función con dominio e imagen en  $\mathfrak{R}$ , de clase  $C^2$ .

La estructura general del problema de programación dinámica es elegir  $u$  y  $x$  que resuelvan

$$\text{Max} \sum_{k=0}^T f_k(x_k, u_k)$$

$$\text{sujeto a } \begin{cases} x_{k+1} = g_k(x_k, u_k) & k = 0, \dots, T, \\ x_0 \text{ y } x_{T+1} \text{ dados} \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{el equivalente de la función valor es } V_t(x_t) = \text{Max} \sum_{k=t}^T f_k(x_k, u_k), \quad (2)$$

que representa el máximo a partir del periodo  $t \in \{0, \dots, T\}$ . El principio de optimalidad de Bellman se expresa con lo que usualmente se conoce como ecuación de Bellman:  $V_t(x_t) = \underset{u}{\text{Max}} \{f_t(x_t, u_t) + V_{t+1}(x_{t+1})\}$  (3)

Aquí el máximo es con respecto al control  $u_t$  sujeto a  $x_{t+1} = g_t(x_t, u_t)$  y  $x_0$  dado. Con esta ecuación se reduce el problema original de  $T$  periodos a una sucesión de problemas de dos periodos. La ecuación es válida a pesar de que se carezca de soluciones interiores; sin embargo, si éstas existen, se tiene el siguiente resultado:

*Teorema:* Si  $u^*$  y  $x^*$  resuelven el problema (1) y suponemos que es una solución interior, entonces se satisfacen:

$$\frac{\partial f_t}{\partial u_t} + \frac{dV_{t+1}}{dx_{t+1}} \frac{\partial g_t}{\partial u_t} = 0, \quad (4)$$

la ecuación es diferenciable fuera de las esquinas:

$$\frac{dV_t}{dx_t} = \frac{\partial f_t}{\partial x_t} + \frac{dV_{t+1}}{dx_{t+1}} \frac{\partial g_t}{\partial x_t}, \quad (5)$$

$$x_{t+1} = g_t(x_t, u_t) \quad (6)$$

en donde  $t \in \{0, \dots, T-1\}$

En cuanto a las condiciones de suficiencia, en analogía con el caso continuo, la concavidad de la función  $f$  y la convexidad de las funciones  $g$ , garantizan la concavidad de  $V$  y por lo tanto es una condición de suficiencia para un máximo.

## Problemas con descuento temporal

Sea  $\rho$  la tasa de descuento temporal. El problema general (1), con el estado final libre, puede plantearse como

$$\text{Max} \sum_{k=0}^T \left( \frac{1}{1+\rho} \right)^k f_k(x_k, u_k) \quad (7)$$

sujeito a  $x_{k+1} = g_k(x_k, u_k)$   $x_0$  dado,  $x_{T+1}$  libre;

siendo el **factor de descuento temporal**  $\beta = \frac{1}{1+\rho}$

resulta  $V_t(x_t) = \text{Max} \{ \beta^t f_t(x_t, u_t) + V_{t+1}(x_{t+1}) \},$   
 $x_{t+1} = g_t(x_t, u_t), x_t$  dado

La función valor  $V_t(x_t)$  se mide en unidades al tiempo  $t=0$ . Si expresamos a la función valor en unidades del periodo  $t$ , esta ecuación queda como

$$\bar{V}_t(x_t) = \text{Max} \{ f_t(x_t, u_t) + \beta \bar{V}_{t+1}(x_{t+1}) \}$$

La función  $\bar{V}_t$  es la función valor en tiempo corriente  $t$  y se relaciona con la función valor en tiempo presente  $V_t$  (donde  $V_t$  se mide en unidades del tiempo inicial  $t=0$ ) mediante  $\beta^t \bar{V}_t = V_t$ . Siempre que exista el factor de descuento consideraremos la función valor y la ecuación de Bellman en tiempo corriente. La llamaremos simplemente  $V_t$ .

Las condiciones de primer orden resultan ser

$$\frac{\partial f_t}{\partial u_t} + \beta \frac{dV_{t+1}}{dx_{t+1}} \frac{\partial g_t}{\partial u_t} = 0,$$

fuera de las esquinas esta función es diferenciable con:

$$\frac{dV_t}{dx_t} = \frac{\partial f_t}{\partial x_t} + \beta \frac{dV_{t+1}}{dx_{t+1}} \frac{\partial g_t}{\partial x_t}, \quad (8)$$

$$x_{t+1} = g_t(x_t, u_t)$$

Esta condición se conoce como la fórmula de Benveniste y Scheinkman.

Normalmente tendremos que  $\rho$  es la tasa subjetiva de descuento o bien la tasa real  $r$ . En economía, es común que las funciones  $f_k$  y  $g_k$  no dependan explícitamente del tiempo, de manera que el problema (7) es “casi autónomo”, pues el tiempo sólo aparece como potencia en el factor de descuento. Al igual que en el caso continuo, la función valor en tiempo corriente transforma al problema en uno autónomo. Por esta razón, de aquí en adelante omitiremos el subíndice  $t$  en la función valor en tiempo corriente.

Dos métodos son frecuentes para resolver la ecuación funcional:

**1er. método:** constructivo, mediante iteraciones, empezando desde  $V_0$  hasta que  $V_j$  converge.

**2do. Método:** adivinar una solución de  $V$ . Se basa en la unicidad de la solución.

## Problemas con horizonte infinito

Al igual que en el caso de tiempo continuo, cuando el horizonte es infinito se debe poder garantizar la convergencia de la serie  $\sum_{t=0}^{\infty} f_t(x_t, u_t)$ . Si existe un factor de descuento  $\beta \in (0,1)$ , la convergencia se da si  $f_t$  es acotada (misma cota para toda  $t$ ) o creciente, siempre y cuando  $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f_t(x_t, u_t)$  converja.

Como en economía y finanzas casi siempre aparece el factor de descuento, suponemos que el problema general está dado por

$$\text{Max} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f_t(x_t, u_t) \quad (9)$$

suje to a  $x_{t+1} = g_t(x_t, u_t)$ ,  $x_0$  dado

La función valor se define igual que antes, como el máximo a partir del periodo  $t$ , es decir,  $V_t(x_t) = \text{Max} \sum_{k=t}^{\infty} f_k(x_k, u_k)$ .

La ecuación de Bellman está dada por la ecuación (3). Como ésta sólo involucra dos periodos, las condiciones de primer orden son las mismas. De las dos primeras condiciones puede eliminarse  $\frac{dV_t}{dx_t}$  para obtener una expresión análoga a la ecuación de Euler utilizada en el Cálculo de Variaciones. Se despeja  $\frac{dV_{t+1}}{dx_{t+1}}$  de la primera condición y se sustituye en la segunda para obtener

$$\frac{dV_t}{dx_t} = \frac{\partial f_t}{\partial x_t} - \frac{\frac{\partial f_t}{\partial u_t}}{\frac{\partial g_t}{\partial u_t}} \frac{\partial g_t}{\partial x_t}$$

iterando un periodo y sustituyendo  $\frac{dV_{t+1}}{dx_{t+1}}$  una vez más en la primera condición se llega a:

$$\frac{\partial f_t}{\partial u_t} + \left( \frac{\partial f_{t+1}}{\partial x_{t+1}} - \frac{\frac{\partial f_{t+1}}{\partial u_{t+1}}}{\frac{\partial g_{t+1}}{\partial u_{t+1}}} \frac{\partial g_{t+1}}{\partial u_{t+1}} \right) \frac{\partial g_t}{\partial u_t} = 0 \quad (10)$$

Esta última ecuación en diferencias se la conoce como **ecuación de Euler** y junto con la ecuación de transición  $x_{t+1} = g_t(x_t, u_t)$  forma un sistema dinámico discreto en  $x_t$  y  $u_t$ , el cual debemos resolver para encontrar la respuesta al problema original. Dicho sistema es, en general, muy complicado de resolver explícitamente, ya que se trata de un sistema, probablemente no lineal, de ecuaciones en diferencias. No obstante, el análisis cualitativo puede ser útil.

## Problema de control estocástico

Se considera el problema  $Max E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t)$ ,  $0 < \beta < 1$  (11)

sujeto a  $x_{t+1} = g_t(x_t, u_t, \varepsilon_{t+1})$ ,  $x_0$  conocido y dado en  $t = 0$

$\varepsilon_t$  es una sucesión de variables aleatorias independientes y distribuidas idénticamente con función de probabilidad acumulativa:

$$\text{prob} \{ \varepsilon_t \leq e \} = F(e), \forall t$$

$E_t(y)$  denota la esperanza matemática de la variable aleatoria  $y$ , dada la información conocida en  $t$ .

En el tiempo  $t$ ,  $x_t$  se supone conocido, pero  $x_{t+j}$  para  $j \geq 1$  es desconocido en  $t$ . Es decir,  $\varepsilon_{t+1}$  se conoce en  $t+1$  después de la elección  $u_t$  en  $t$ .

En el problema (11) la incertidumbre se introduce suponiendo que  $x_t$  sigue una ecuación en diferencias aleatoria. Este problema sigue teniendo una estructura recursiva que proviene de:

1. la separabilidad aditiva de la función objetivo en pares  $(x_t, u_t)$
2. la caracterización de la ecuación en diferencias de la ley de transición.

En particular, los controles en  $t$  afectan los rendimientos  $r(x_s, u_s)$  para  $s \geq t$ , pero no anteriores y siguen siendo apropiados los métodos de programación dinámica.

**Problema:**  $Max E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t)$ ,  $0 < \beta < 1$  sujeto a  $x_{t+1} = g_t(x_t, u_t, \varepsilon_{t+1})$ ,  $x_0$  conocido y dado en  $t = 0$  mediante la elección de una “política” o “plan de contingencia”  $u_t = h(x_t)$ .

*Ecuación funcional de Bellman::*

$$V(x) = \max_u \{r(x, u) + \beta E[V[g(x, u, \varepsilon)]/x]\} \quad (12) \quad \text{donde}$$

$E\{V[g(x, u, \varepsilon)]/x\} = \int V[g(x, u, \varepsilon)]dF(\varepsilon)$  con  $V(x)$  el valor optimal del problema empezando en  $x$  para  $t=0$ .

La solución de esta ecuación funcional puede obtenerse iterando (12) empezando desde cualquier  $V_0$  inicial, continua y acotada.

Bajo ciertas condiciones de regularidad, se obtienen versiones de las propiedades establecidas en el caso determinista.

*Condición necesaria de primer orden:*

$$\frac{\partial r}{\partial u}(x, u) + \beta E \left[ \frac{\partial g}{\partial u}(x, u, \varepsilon) V'(g(x, u, \varepsilon)/x) \right] = 0 \quad (13)$$

Fuera de las esquinas la función satisface:

$$V'(x) = \frac{\partial r}{\partial x}[x, h(x)] + \beta E \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}[x, h(x), \varepsilon] V'(g[x, h(x), \varepsilon]/x) \right\} = 0$$

*Fórmula de Benveniste-Scheinkman*

En el caso especial  $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$  se tiene  $V'(x) = \frac{\partial r}{\partial x}[x, h(x)]$

Sustituyendo esta expresión en la condición de primer orden (13) se obtiene la *Ecuación de Euler estocástica*

$$\frac{\partial r}{\partial u}(x, u) + \beta E \left[ \frac{\partial g}{\partial u}(x, u, \varepsilon) \frac{\partial r}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{u}) / x \right] = 0$$

**La teoría de la cartera dinámica**

Es una generalización del ejemplo anterior. Un consumidor puede colocar sus activos entre un conjunto de  $n$ , donde el activo  $i$ -ésimo proporciona un tanto de rendimiento bruto  $R_{it}$  en tiempo  $t$ ; variable aleatoria positiva acotada superiormente con probabilidad 1.

El consumidor, eligiendo planes de contingencia para  $S_{it}$   $i = 1, 2, \dots, n$  y  $t \geq 0$

$$\text{maximiza } E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

$$\text{sujeto a: } c_t + \sum_{i=1}^n S_{it} = A_t, \quad t \geq 0,$$

$$A_{t+1} = \sum_{i=1}^n S_{it} R_{it}, \quad t \geq 0, A_0 \text{ dado}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_0 \beta^t A_t = 0 \quad \text{donde:}$$

$S_{it}$ : cantidad de activo  $i$  adquirida en el periodo  $t$ ,

$c_t$ : consumo en  $t$ ,

$A_t$  y  $R_{it-1}$   $i = 1, \dots, n$  se observan, pero  $R_{it}$   $i = 1, \dots, n$

no se observan hasta el principio del periodo  $t+1$ .

$R_{it}$  sigue un proceso de Markov, con probabilidades de transición: prob

$$\{R_t \leq R' / R_{t-1} = R\} = F(R', R) \text{ con}$$

$R_t = (R_{1t}, R_{2t}, \dots, R_{nt})$  y  $R^t$  y  $R$  vectores  $n$ -dimensionales.  
 $(A_t, R_{t-1})$  estados.  
 $(S_{1t}, S_{2t}, \dots, S_{nt})$  controles.

*Ecuación funcional de Bellman:*

$$V(A_t, R_{t-1}) = \max_{S_{1t}, S_{2t}, \dots, S_{nt}} \left\{ u \left( A_t - \sum_{i=1}^n S_{it} \right) + \beta E_t V \left( \sum_{i=1}^n S_{it} R_{it}, R_t \right) \right\}$$

*Condiciones necesarias de primer orden:*

$$u' \left( A_t - \sum_{i=1}^n S_{it} \right) = \beta E_t R_{it} V_1 \left( \sum_{k=1}^n S_{kt} R_{kt}, R_t \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

*Fórmula Benveniste-Scheinkman* implica  $V_1 = u' \left( A_t - \sum_{i=1}^n S_{it} \right)$ .

Sustituyendo en las condiciones de primer orden:

$$u' \left( A_t - \sum_{i=1}^n S_{it} \right) = \beta E_t R_{it} u' \left( \sum_{k=1}^n S_{kt} R_{kt} - \sum_{j=1}^n S_{jt+1} \right)$$

Se buscan funciones políticas óptimas  $S_{it} = S_i(A_t, R_{t-1})$ .

Sustituyendo en la ecuación de Euler proporcionan:

$$\begin{aligned} u' \left[ A_t - \sum S_i(A_t, R_{t-1}) \right] &= \\ &= \beta E_t R_{it} u' \left( \sum_{k=1}^n R_{kt} S_k(A_t, R_{t-1}) - \sum_{j=1}^n S_j \left[ \sum_{k=1}^n R_{kt} S_k(A_t, R_{t-1}), R_t \right] \right) \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, n$  conjunto de  $n$  ecuaciones funcionales de  $n$  funciones desconocidas  $S_i(A_t, R_{t-1})$   $i = 1, 2, \dots, n$ .

En particular, se considera :

$R_{it}$   $i = 1, 2, \dots, n$  distribuida independiente e idénticamente en el tiempo y sobre  $i$ .

$$u(c) = \frac{1}{1-\alpha} c^{1-\alpha}, \text{ con } 0 < \alpha < 1.$$

$S_{it} = K A_t$ , con  $K$  constante a determinar, independiente de  $i$ .

$$K^\alpha = \beta E_t \frac{R_{it}}{\left( \sum_{j=1}^n R_{jt} \right)^\alpha}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

El consumidor coloca la misma fracción constante de la riqueza en cada activo en cada periodo.

Resultado que depende de la independencia de las  $R_{it}$  en el tiempo y de la independencia e identidad de la distribución entre los activos  $i$ .

**Relajación del supuesto de distribuciones idénticas a lo largo de  $i$**  manteniendo la independencia en tiempo y en activos.

Se supone que las políticas óptimas son de la forma  $S_{it} = K_i A_t$ .

*Ecuación de Euler*

$$u' \left[ A_t \left( 1 - \sum_{i=1}^n K_i \right) \right] = \beta E_t R_{it} u' \left[ \sum_{h=1}^n K_h R_{ht} A_t \left( 1 - \sum_{j=1}^n K_j \right) \right]$$

$i = 1, 2, \dots, n$  Eligiendo  $u(c) = \ln c$  se tiene:

$$1 = \beta E_t \frac{R_{it}}{\sum_{j=1}^n K_j R_{jt}} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

es un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas  $K_1, K_2, \dots, K_n$

## Rendimientos de activos (CAPM)

Supongamos que  $w_t$  representa la riqueza del hogar. En cada periodo este hogar consume cierta cantidad  $c_t$  y el resto lo invierte en  $n+1$  activos con rendimientos  $R_t^0, \dots, R_t^n$ . Los rendimientos  $R_t^0$  son deterministas y por lo tanto conocidos en  $t$ , mientras que los rendimientos  $R_t^1, R_t^2, \dots, R_t^n$  son estocásticos y sólo sus valores pasados son conocidos en  $t$ , es decir, el activo 0 es un activo sin riesgo y los activos 1, ...,  $n$  son activos con riesgo.

Sean  $\theta_t^j$ ,  $j = 0, \dots, n$  las proporciones que se invierten en cada activo, siendo  $\sum_{j=0}^n \theta_t^j = 1$ . El problema de optimización es elegir  $\{c_t\}$  t  $\{\theta_t^j\}$  para toda  $j = 0, \dots, n$ , de manera que se resuelva

$$\max E_0 \left( \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right)$$

$$\text{sujeto a } w_{t+1} = (w_t - c_t) \left( \theta_t^0 R_t^0 + \sum_{j=1}^n \theta_t^j R_t^j \right),$$

$$\sum_{j=0}^n \theta_t^j = 1 \text{ y } w_0 \text{ dado.}$$

La ecuación de Bellman asociada (en tiempo corriente) es

$$V(w_t) = \max_{c_t, \theta_t^j} \left\{ u(c_t) + \beta E_t (V(w_{t+1})) \right\}, \text{ con las restricciones correspondientes.}$$

Así, las condiciones de primer orden (tomando en cuenta que  $\theta_t^0 = 1 - \sum_{j=1}^n \theta_t^j$ ) son:

$$u'(c_t) - \beta E_t \left[ V'(w_{t+1}) \left( \theta_t^0 R_t^0 + \sum_{j=1}^n \theta_t^j R_t^j \right) \right] = 0 \quad (14)$$

$$\beta E_t \left[ V'(w_{t+1}) (-R_t^0 + R_t^j) (w_t - c_t) \right] = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (15)$$

$$\beta E_t \left[ V'(w_{t+1}) \left( \theta_t^0 R_t^0 + \sum_{j=1}^n \theta_t^j R_t^j \right) \right] \quad (16)$$

De (14) y (16) tenemos  $u'(c_t) = V'(w_t)$  y, por lo tanto,

$$u'(c_t) = \beta E_t \left[ u'(c_{t+1}) \left( \theta_t^0 R_t^0 + \sum_{j=1}^n \theta_t^j R_t^j \right) \right] \quad (17)$$

Utilizando que  $w_t, c_t$  y  $R_t^0$  son conocidos en el periodo  $t$ , es decir, son parte del conjunto de información  $I_t$ , reescribimos (15) como  $E_t[u'(c_{t+1})R_t^j] = R_t^0 E_t[u'(c_{t+1})]$ ,  $j = 1, \dots, n$  (18)

Finalmente, (17), (18) y que  $\sum_{j=0}^n \theta_t^j = 1$  implican las siguientes igualdades:

$$u'(c_t) = \beta R_t^0 E_t[u'(c_{t+1})] \quad (19)$$

$$u'(c_t) = \beta E_t[u'(c_{t+1})R_t^j] \quad j = 1, \dots, n \quad (20)$$

El optimizador elige su trayectoria de consumo de manera que la utilidad marginal del consumo en  $t$  es igual al valor presente de la utilidad marginal esperada del consumo en  $t+1$ , independientemente del activo en el cual se está invirtiendo. Las ecuaciones (19) y (20) imponen restricciones sobre los procesos que siguen el consumo y los rendimientos. Igualando (19) y (20) tenemos:  $E_t[u'(c_{t+1})(R_t^j - R_t^0)] = 0 \quad j = 1, \dots, n$  (21)

Tomando la esperanza no condicionada de esta ecuación y recordando que  $E(xy) = E(x)E(y) + Cov(xy)$ ,

$$E_t[u'(c_{t+1})E(R_t^j - R_t^0)] + Cov(u'(c_{t+1}), R_t^j) = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

y despejando para  $E(R_t^j)$  se tiene:

$$E(R_t^j) = R_t^0 - \frac{Cov(u'(c_{t+1}), R_t^j)}{E(u'(c_{t+1}))}, \quad j = 1, \dots, n \quad (22)$$

Esta ecuación nos dice que, cuanto más alta sea la covarianza entre los rendimientos del activo y la utilidad marginal del consumo, menores serán los rendimientos esperados.

Si suponemos que  $u'' < 0$ , entonces significa que los individuos están dispuestos a aceptar rendimientos menores de un activo que ofrece cobertura cuando el consumo es bajo (por ejemplo, durante una recesión).

Supongamos ahora que uno de los activos con riesgo, digamos el activo  $k$ , representa al “mercado” (se puede pensar como un conglomerado de activos); lo que se busca con esto es que ese activo esté perfectamente correlacionado con el consumo, o bien negativamente correlacionado con la utilidad marginal del mismo. Así,

Existe  $\lambda > 0$  tal que  $u'(c_{t+1}) = -\gamma R_t^k$  y (22) puede reescribirse para el activo  $k$  como  $E(R_t^k) = R_t^0 + \frac{\gamma \text{Var}(R_t^k)}{E(u'(c_{t+1}))}$ ,

$$\text{de manera que } \frac{1}{E(u'(c_{t+1}))} = \frac{E(R_t^k) - R_t^0}{\gamma \text{Var}(R_t^k)} \quad (23)$$

Adicionalmente, dado cualquier otro activo  $j$ , distinto de los activos  $0$  y  $k$  se tiene  $\text{Cov}(u'(c_{t+1}), R_t^j) = -\gamma \text{Cov}(R_t^j, R_t^k)$ , por lo que utilizando (23), (22) resulta

$$E(R_t^j) - R_t^0 = \left( \frac{\text{Cov}(R_t^j, R_t^k)}{\text{Var}(R_t^k)} \right) (E(R_t^k) - R_t^0), \text{ o bien, definiendo}$$

$$\beta_j = \frac{\text{Cov}(R_t^j, R_t^k)}{\text{Var}(R_t^k)}, \text{ se tiene } E(R_t^j) - R_t^0 = \beta_j (E(R_t^k) - R_t^0) \quad (24)$$

Esta última ecuación es conocida como **línea del mercado de valores**.

Vemos que el valor esperado del rendimiento de un activo, por arriba del que daría un activo sin riesgo (lado izquierdo) es proporcional a la diferencia entre el valor esperado del mercado y el activo sin riesgo. El término  $\beta_j$  es la medida del riesgo sistemático del activo  $j$ . Los coeficientes  $\beta_j$  son los que aparecen al realizar la regresión lineal de los  $R_t^k$ . El modelo econométrico de Sharpe, conocido como  $R_t^k = a_0 + \beta_k R_M +$  La prima de riesgo para el activo  $j$  puede pensarse como la diferencia  $E(R_t^j) - R_t^0$  y vemos que ésta

disminuye si el activo tiene baja correlación con el mercado, pues en ese caso el coeficiente  $\beta_j$  sería pequeño; la razón es que el activo nos ofrecería cobertura contra posibles bajas en el mercado.

El modelo CAPM y sus variantes son la base del negocio de los fondos de inversión. La finalidad del fondo es elegir una cartera de acciones (elegir las proporciones  $\theta_t^j$ ) con distintos grados de riesgo, de tal modo que se maximice la utilidad del cliente inversionista.

**Ejemplo:** Se considera el siguiente problema del hogar representativo:

$$\max E_0 \left( \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right) \quad 0 < \beta < 1$$

$$\text{sujeta a } y_t + (d_t + p_t)s_t = c_t + p_t s_{t+1},$$

$$\{y_t\}, \{d_t\}, \{p_t\} \text{ y } s_0 \text{ dados.}$$

$$\text{donde } \begin{aligned} u'(c) &> 0 \\ u''(c) &< 0 \end{aligned}$$

$s_t$  indica el número de acciones de un activo al principio del periodo  $t$ ,  $d_t$  son los dividendos del activo generados al principio del periodo,  $p_t$  es el precio del activo (en términos reales) una vez producidos los dividendos al principio del periodo.

La restricción es simplemente una restricción presupuestaria en donde  $y_t + (d_t + p_t)s_t$  son los ingresos totales del periodo y  $c_t + p_t s_{t+1}$  los egresos totales.

Luego resulta  $\max E_0 \left( \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right)$  sujeto a la restricción presupuestaria

$$y_t + (d_t + p_t)s_t = c_t + p_t s_{t+1} \quad \text{siendo la ecuación de transición}$$

$$\frac{y_t + (d_t + p_t)s_t - c_t}{p_t} = s_{t+1}$$

donde  $s_t$  es la variable de estado y  $c_t$  la de control.

*Ecuación de Bellman:*

$$V_t(s_t) = \max_{c_t} \{u[c_t] + \beta E_t[V(s_{t+1})]\}$$

sujeta a 
$$s_{t+1} = \frac{y_t + (d_t + p_t)s_t - c_t}{p_t}$$

a) Condición necesaria de primer orden:

$$\frac{\partial f_t}{\partial u_t} + \beta E_t \left[ V'(x_{t+1}) \frac{\partial g_t}{\partial u_t} \right] = 0,$$

$$u'(c_t) + \beta E_t \left[ V'(s_{t+1}) \left( \frac{-1}{p_t} \right) \right] = 0$$

$$u'(c_t) - \beta E_t \left[ V'(s_{t+1}) \frac{1}{p_t} \right] = 0 \quad (25)$$

*Fórmula de Benveniste y Scheinkman:*

$$\frac{dV_t}{dx_t} = \frac{\partial f_t}{\partial x_t} + \beta E_t \left[ V'(x_{t+1}) \frac{\partial g_t}{\partial x_t} \right],$$

$$x_{t+1} = g(x_t, u_t, \varepsilon_t)$$

$$V'(s_t) = \beta E_t \left[ V'(s_{t+1}) \frac{d_t + p_t}{p_t} \right] \quad (26)$$

de (25) y (26) resulta:  $V'(s_t) = u'(c_t)(d_t + p_t)$

Iterando un periodo  $V'(s_{t+1}) = u'(c_{t+1})(d_{t+1} + p_{t+1})$

Reemplazando en (25) obtenemos:

$$u'(c_t) - \beta E_t u'(c_{t+1}) \frac{d_{t+1} + p_{t+1}}{p_t} = 0 \quad (27)$$

Definimos al factor de rendimiento  $R_t = \frac{d_{t+1} + p_{t+1}}{p_t}$

Reemplazando en (27) se obtiene la Ecuación de Euler:

$$u'(c_t) = \beta E_t u'(c_{t+1}) R_t \quad (28)$$

Bajo la hipótesis  $u(c_t) = c_t$  resulta  $u'(c_t) = 1$  y  $u'(c_{t+1}) = 1$  entonces de (28)  $1 = \beta E_t R_t$

Es decir que  $p_t = \beta E_t (d_{t+1} + p_{t+1})$  ecuación en diferencias estocástica cuya solución se obtiene iterando hacia el futuro:

$$\begin{aligned} p_{t+1} &= \beta E_t (E_{t+1} d_{t+2} + E_{t+1} p_{t+2}) \\ &= \beta E_t (d_{t+2} + p_{t+2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_t &= \beta E_t [d_{t+1} + \beta E_t (d_{t+2} + p_{t+2})] \\ &= \beta E_t d_{t+1} + \beta^2 E_t (d_{t+2} + p_{t+2}) \end{aligned}$$

$$p_{t+2} = \beta E_t (d_{t+3} + p_{t+3})$$

$$\begin{aligned} p_t &= \beta E_t d_{t+1} + \beta E_t [d_{t+2} + \beta E_t (d_{t+3} + p_{t+3})] \\ &= \beta E_t d_{t+1} + \beta^2 E_t d_{t+2} + \beta^3 E_t d_{t+3} + \beta^3 E_t p_{t+3} \end{aligned}$$

iterando n periodos resulta:

$$p_t = \beta^n E_t p_{t+n} + \sum_{k=1}^n \beta^k E_t d_{t+k} \quad \text{donde el primer término representa la}$$

burbuja de la solución y el segundo la parte fundamental de la misma.

No hay burbujas especulativas por ser  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta^n E_t p_{t+n} = 0$  ya que

$$0 < \beta < 1 \quad \text{de donde} \quad p_t = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1+r} \right)^k E_t d_{t+k} \quad (29)$$

o sea, el precio de hoy es simplemente el valor presente de los dividendos futuros esperados. Este precio es el denominado precio racional  $p_t^r$ . De existir diferencias entre el precio racional y el precio del mercado, vendrían explicadas por la existencia de burbujas.

Por lo tanto, de existir una burbuja especulativa el precio del mercado se compondría del precio racional y la burbuja especulativa.

Los efectos sobre el precio final son diferentes. El rendimiento que se obtiene a partir del precio racional viene determinado por los flujos que suponen los dividendos y el precio de venta futuro.

El rendimiento que se obtiene de una burbuja especulativa racional sólo depende del precio futuro que se espera del título.

Si ahora agregamos una burbuja especulativa racional  $B_t$  a (29) de manera tal que el precio en el momento  $t$  la incorpore

$$p_t = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1+r} \right)^k E_t d_{t+k} + B_t \quad (30)$$

$$\text{de donde } E_t p_{t+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1+r} \right)^k E_t d_{t+k} + E_t B_{t+1}$$

reemplazando  $E_t p_{t+1}$  en la ecuación de Euler

$$p_t = \beta E_t (d_{t+1} + p_{t+1}) \quad (31)$$

$$\text{resulta } p_t = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1+r} \right)^k E_t d_{t+k} + \beta E_t B_{t+1} \quad (32)$$

de (30) y (32) se obtiene  $B_t = \beta E_t B_{t+1}$

$$\text{de donde } E_t B_{t+1} = \frac{1}{\beta} B_t = (1+r) B_t$$

$$\text{en general } E_t B_{t+m} = (1+r)^m B_t$$

de donde al inversor no le importa pagar por una burbuja especulativa, ya que se remunera a una tasa de rendimiento igual a  $r$ . Con una misma tasa de descuento para ambos componentes, la parte del precio que representa la burbuja especulativa crecerá en forma exponencial al no tener flujos de caja intermedios.

Un título se compra por un precio superior al racional debido a que existe la esperanza de venderlo con una ganancia en el futuro. Esta es la causa de que se hable de burbujas racionales (expectativas racionales).

## Referencias

- Sydsaeter, K., Hammond, P., Seierstad, A. y Strom, A. (2005) *“Further Mathematics for Economic Analysis”*, England, Prentice Hall.
- Limeli, Héctor y Rumbos, Beatriz (2003) *“Modelos dinámicos en Economía”*, México.
- Cerdá, Emilio (2001) *“Optimización Dinámica”*, Madrid, Prentice Hall
- Sargent, Thomas J. (1987) *“Dynamic Macroeconomic Theory”*, Cambridge, Harward University Press.
- Dixit, Avenash K. (1990) *“Optimization in Economic Theory”*, New York, Oxford University Press.
- Dixit, A.k. Y Pindyck, R.s. ( ) *“Investment under uncertainty”*, , Princeton University Press.
- Intriligator, Michael D. (1973) *“Optimización matemática y teoría económica”*, España, Prentice Hall Internacional.

# 1.5

## Aplicaciones actuariales de la transformada de Laplace “El problema de la renovación”<sup>1</sup>

*María Teresa Casparri • Roberto Armando García*

### Introducción

La transformada de Laplace es un operador integral que transforma una función  $f(t)$  definida en  $[0, +\infty)$  en otra función  $F(s)$  según la integral impropia:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^N e^{-st} f(t) dt$$

La función  $F(s)$  queda definida para todos los valores de  $s$  para los cuales la integral impropia resulta convergente.

La transformada de una función  $f(t)$  se simboliza  $L\{f(t)\} = F(s)$

### Condiciones para la existencia de la transformada

Dos son las condiciones que aseguran la existencia de la transformada  $L\{f(t)\}(s) = F(s)$  de una función  $f(t)$

a) Que  $f(t)$  sea continua por partes en  $[0, +\infty)$ .

Una función  $f(t)$  es continua por partes en  $[0, +\infty)$  si lo es en cualquier intervalo  $[0, N]$  para todo número  $N > 0$ , es decir si es continua en  $[0, N]$  excepto en un número finito de puntos donde presenta discontinuidades de salto. Una función tiene una discontinuidad de salto en  $a \in (0, N)$  si es discontinua en  $a$  pero existen y son finitos los

<sup>1</sup> Trabajo presentado en las XXIII Jornadas Nacionales de Docentes de Matemática de Facultades de Ciencias Económicas y Afines, Universidad Nacional de Tucumán. 2008.

límites:  $\lim_{t \rightarrow a^-} f(t)$  y  $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t)$ . En caso que la discontinuidad de salto se presente en los extremos del intervalo  $t = 0$  y/o  $t = N$  deberán existir como números reales el  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$  y/o  $\lim_{t \rightarrow N^-} f(t)$

b) Que  $f(t)$  sea de orden exponencial  $\alpha$ .

Una función  $f(t)$  es de orden exponencial  $\alpha$  si  $|f(t)|$  no crece más rápidamente que una función del tipo  $Ke^{\alpha t}$  para algún valor  $K > 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Es decir que una función es de orden exponencial  $\alpha$  si existen dos número positivos  $K$  y  $T$  tales que  $|f(t)| \leq Ke^{\alpha t}$  para toda  $t \geq T$

Si la función  $f(t)$  cumple las condiciones anteriores entonces la transformada  $F(s)$  existe para  $s > \alpha$

## Propiedades de la transformada

a) Linealidad:  $L\{c_1 f_1 + c_2 f_2\}(s) = c_1 L\{f_1\}(s) + c_2 L\{f_2\}(s)$

b) Traslación en  $s$ :  $L\{e^a f(t)\}(s) = F(s - a)$

c) Límite de una transformada:  $\lim_{s \rightarrow \infty} L\{f(t)\}(s) = 0$

d) Transformada de una derivada

$$L\{f^{(n)}\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

e) Transformada de la función integral:  $L\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\}(s) = \frac{1}{s} F(s)$

f) Traslación en  $t$ :  $L\{f(t-a)u(t-a)\}(s) = e^{-as} F(s)$  para  $a > 0$

La función  $u(t)$  es la función escalón unitario de Heaviside definida por

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 < t \end{cases} \text{ y por lo tanto } u(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & a < t \end{cases} \text{ es decir la función}$$

escalón unitario desplazada. Cualquier función continua por partes puede expresarse en términos de funciones del tipo  $u(t)$ .

g) Transformada de una potencia entera no negativa de  $t$ :  $L\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$

h) Teorema de Convolución:  $L\{f * g\}(s) = F(s)G(s)$ , donde  $f * g$  denota la función convolución definida por:  $(f * g)(t) = \int_0^t f(t-v)g(v)dv$  siendo  $f(t)$  y  $g(t)$  funciones continuas por partes en  $[0, +\infty)$

## Transformada inversa o antitransformada de Laplace

Dada una función  $F(s)$ , se define la transformada inversa  $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}(t)$  a la función continua  $f(t)$  en  $[0, +\infty)$  que satisfaga  $L\{f(t)\}(s) = F(s)$

La transformada inversa tiene las siguientes propiedades, entre otras que se deducen de las propiedades de la transformada de Laplace:

a) Linealidad:

$$L^{-1}\{c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)\}(t) = c_1 L^{-1}\{F_1(s)\}(t) + c_2 L^{-1}\{F_2(s)\}(t)$$

b)  $L^{-1}\{F(s-a)\}(t) = e^{at} f(t)$

c)  $L^{-1}\left\{\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\right\}(t) = e^{at} t^n$

d)  $L^{-1}\{F(s)G(s)\}(t) = (f * g)(t)$

## Método de la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales lineales con valores iniciales

El método consta de las siguientes etapas:

1. Transformar ambos miembros de la ecuación.
2. Utilizar las propiedades de la transformada y considerar los valores iniciales del problema para obtener una ecuación algebraica cuya incógnita es la transformada de la solución de la ecuación diferencial dada.

3. Hallar la solución  $F(s)$  de la ecuación obtenida anteriormente.
4. Determinar la antitransformada  $L^{-1}\{F(s)\}(t)$  que será la solución  $f(t)$  de la ecuación diferencial dada.

En forma genérica, dado un problema con valores iniciales modelizado por una ecuación diferencial  $ay'' + by' + cy = g(t)$ , siendo  $a, b$  y  $c$  coeficientes constantes y la función  $g(t)$  el término de forzamiento, con  $y(0) = y_0$  y  $y'(0) = y_1$ , la aplicación de las etapas del método nos conduce a:

$$1. L\{ay'' + by' + cy\}(s) = L\{g(t)\}(s)$$

$$2. aL\{f''(t)\}(s) + bL\{f'(t)\}(s) + cL\{f(t)\}(s) = G(s)$$

$$a[s^2F(s) - sf(0) - f'(0)] + b[sF(s) - f(0)] + cF(s) = G(s)$$

$$a[s^2F(s) - sy_0 - y_1] + b[sF(s) - y_0] + cF(s) = G(s)$$

$$3. (as^2 + bs + c)F(s) = G(s) + ay_0s + ay_1 + by_0$$

$$F(s) = \frac{G(s)}{as^2 + bs + c} + \frac{ay_0s + ay_1 + by_0}{as^2 + bs + c}$$

$$4. f(t) = L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{as^2 + bs + c}\right\}(t) + L^{-1}\left\{\frac{asy_0 + ay_1 + by_0}{as^2 + bs + c}\right\}$$

Un ejemplo:

Resolver el siguiente problema con valores iniciales mediante el método de la transformada de Laplace

$$y'' + 5y' - 6y = 21e^t \quad \text{con } y(0) = -1, \quad y'(0) = 9$$

transformando ambos miembros de la ecuación diferencial

$$s^2 F(s) + 1s - 9 + 5(sF(s) + 1) - 6F(s) = \frac{21}{s-1}$$

$$(s^2 + 5s - 6) \cdot F(s) + s - 4 = \frac{21}{s-1}$$

$$F(s) = \frac{21}{(s-1) \cdot (s^2 + 5s - 6)} - \frac{s-4}{s^2 + 5s - 6} \Rightarrow F(s) = \frac{21 - (s-1) \cdot (s-4)}{(s-1)^2 (s+6)}$$

Haciendo una descomposición en fracciones simples:

$$\frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+6} = \frac{21 - (s-1) \cdot (s-4)}{(s-1)^2 (s+6)} = \frac{A(s-1)(s+6) + B(s+6) + C(s-1)^2}{(s-1)^2 (s+6)}$$

Determinamos los coeficientes  $A, B, C$ :

$$s = 1 \Rightarrow 7B = 21 \Rightarrow B = 3$$

$$s = -6 \Rightarrow 49C = -49 \Rightarrow C = -1$$

$$s = 2 \Rightarrow 8A + 24 - 1 = 23 \Rightarrow A = 0$$

Antitransformando:

$$y = f(t) = L^{-1}\{F(s)\}(t) = L^{-1}\left\{\frac{3}{(s-1)^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{-1}{s+6}\right\}$$

$$y = 3te^t - e^{-6t}$$

## Solución de ecuaciones diferenciales mediante la función de respuesta al impulso

1. La función de transferencia:

Sea un sistema controlado por la siguiente ecuación diferencial  $ay'' + by' + cy = g(t)$  con  $t > 0$

Se define la función de transferencia del sistema  $H(s)$  como el cociente entre la transformada de Laplace de la función de salida  $y(t)$  por la transformada de la función de entrada  $g(t)$  suponiendo nulas todas las condiciones iniciales.

Para hallar la función de transferencia transformamos ambos miembros de la ecuación diferencial considerando  $y_0 = y_1 = 0$

$$as^2F(s) + bsF(s) + cF(s) = G(s)$$

$$F(s).(as^2 + bs + c) = G(s)$$

$$H(s) = \frac{F(s)}{G(s)} = \frac{1}{as^2 + bs + c}$$

2. La función de respuesta al impulso:

Es la transformada inversa de Laplace de la función de transferencia de un sistema.

$$h(t) = L^{-1} \{H(s)\} (t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{as^2 + bs + c} \right\}$$

La función de respuesta al impulso  $h(t)$  puede también considerarse como la solución de la ecuación diferencial homogénea con los valores iniciales  $h(0) = 0$  y  $h'(0) = \frac{1}{a}$

3. Para obtener la solución de la ecuación con valores iniciales  $y(0) = y_0$  y  $y'(0) = y_1$  aplicamos el principio de superposición.

Consideramos la ecuación con  $y(0) = y'(0) = 0$ . Sabemos que en este caso es  $F(s) = H(s)G(s)$  siendo  $H(s)$  la función de transferencia. Por lo tanto la solución de este problema es  $y = L^{-1} \{H(s)G(s)\} = h(t) * g(t)$

Por otro lado consideremos la ecuación con  $y(0) = y_0$  y  $y'(0) = y_1$ . Llamamos a la solución de este problema  $y_h(t)$

Según el principio de superposición la solución al problema con valores iniciales  $y(0) = y_0$  y  $y'(0) = y_1$  es  $y(t) = h * g + y_h(t)$

Obsérvese que dicha suma cumple con las condiciones iniciales del problema original planteado.

$$(h * g)(0) + y_h(0) = 0 + y_0 = y_0 \quad \text{y} \quad (h * g)'(0) + y_h'(0) = 0 + y_1 = y_1$$

Por lo tanto una fórmula para la solución es

$$y(t) = \int_0^t h(t-v).g(v).dv + y_h(t) \quad \text{Donde } h(t) \text{ es la respuesta al impulso}$$

para el sistema y  $y_h(t)$  es la solución al problema homogéneo asociado con los valores iniciales correspondientes.

## Resolución de ecuaciones integrales e íntegro-diferenciales por el método de la transformada de Laplace

1. Un ejemplo de ecuación integral es  $y(t) + 3 \int_0^t y(v).sen(t-v)dv = t$

2. Un ejemplo de ecuación íntegro-diferencial es:

$$y'(t) + y(t) - \int_0^t y(v)sen(t-v)dv = -sent \quad \text{con } y(0) = 1$$

Desarrollamos la resolución de la ecuación integral dada. El procedimiento para resolver la ecuación íntegro-diferencial es similar.

Calculamos la transformada de Laplace de ambos miembros de la ecuación:

$$Y(s) + 3 \cdot \frac{1}{s^2 + 1} \cdot Y(s) = \frac{1}{s^2} \quad \text{Donde hemos aplicado } L\{senbt\} = \frac{b}{s^2 + b^2}$$

$$Y(s) \left[ 1 + \frac{3}{s^2 + 1} \right] = \frac{1}{s^2} \Rightarrow Y(s) \left[ \frac{s^2 + 4}{s^2 + 1} \right] = \frac{1}{s^2} \Rightarrow Y(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2(s^2 + 4)}$$

$$\frac{s^2 + 1}{s^2(s^2 + 4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 4} = \frac{As(s^2 + 4) + B(s^2 + 4) + s^2(Cs + D)}{s^2(s^2 + 4)}$$

$$s = 0 \Rightarrow 4B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{4}$$

$$s = 1 \Rightarrow 5A + \frac{5}{4} + C + D = 2$$

$$s = -1 \Rightarrow -5A + \frac{5}{4} - C + D = 2$$

Sumando las dos últimas ecuaciones:  $\frac{5}{2} + 2D = 4 \Rightarrow D = \frac{3}{4}$

$$s = 2 \Rightarrow 16A + 2 + 8C + 3 = 5 \Rightarrow 16A + 8C = 0 \Rightarrow C = -2A$$

$$5A + \frac{5}{4} - 2A + \frac{3}{4} = 2 \Rightarrow 3A = 0 \Rightarrow A = 0$$

Antitransformando:

$$y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{4} \frac{1}{s^2} \right\} + L^{-1} \left\{ \frac{3}{4} \frac{1}{s^2 + 4} \right\} = \frac{1}{4} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} + \frac{3}{8} L^{-1} \left\{ \frac{2}{s^2 + 4} \right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{4} t + \frac{3}{8} \text{sen} 2t$$

## Aplicación a la matemática actuarial

Un problema de la Matemática Actuarial, cuyo tratamiento implica el planteo y la resolución de una ecuación integral, es aquel conocido con el nombre de “Problema de renovación”.

Desarrollamos a continuación el caso de “Renovación de un equipo”:

Consideremos una población de piezas que denominamos equipo. Sea  $n(t)$  el número de piezas en uso en el momento  $t$ . Asumimos como hipótesis que dicho número es suficientemente grande como para poder considerarlo una variable continua y no discreta. A medida que transcurre el tiempo  $t$  el número de piezas que se utilizan del equipo disminuye por diversas

causas. Este desgaste del equipo hace que de  $n_0 = n(0)$  piezas iniciales en el instante  $t = 0$ , solo queden en servicio  $n_1(t) = n(0) \cdot \rho(t)$ , siendo  $\rho(t)$  la función de eliminación. Puede observarse que :

1.  $n_1(0) = n_0 = n(0) = n(0) \cdot \rho(0)$  de donde  $\rho(0) = 1$
2.  $\rho(\infty) = 0$  Si el grupo es cerrado, no admite renovación, el número de piezas en servicio tiende a extinguirse con el tiempo.

Si consideramos que el grupo es abierto, es decir puede renovarse el equipo según una ley cualquiera, podemos calcular el número de piezas en uso en cualquier instante  $t$  sumando dos componentes:

$n(t) = n_1(t) + n_2(t)$ , donde  $n_1(t)$  es el número de piezas del equipo inicial que permanecen en servicio después de un tiempo  $t$  y  $n_2(t)$  es el número de piezas ingresadas posteriormente (renovación) y que subsisten en el grupo en el instante  $t$ .

Para calcular  $n_2(t)$  necesitamos la función de renovación. Si designamos con  $\gamma(\tau)$  el número de piezas reemplazadas después de transcurrido el tiempo  $\tau < t$ , el número de reemplazos efectuados en el intervalo comprendido entre  $\tau$  y  $\tau + d\tau$  está dado por  $\Delta\gamma(\tau)$ . Este incremento puede calcularse por diferenciales como  $\Delta\gamma(\tau) \cong \gamma'(\tau) \cdot d\tau$ . El número de piezas sobrevivientes de este grupo después que transcurra el tiempo  $t - \tau$  está dado por:  $\Delta\gamma(\tau) \cdot \rho(t - \tau) \cong \gamma'(\tau) \cdot \rho(t - \tau) \cdot d\tau$ .

Ahora debemos sumar las piezas sobrevivientes de los reemplazos efectuados durante todos los intervalos de tiempo  $d\tau$  desde  $\tau = 0$  hasta  $\tau = t$ . Esta suma vendrá dada por la siguiente integral:

$$n_2(t) = \int_0^t \gamma'(\tau) \cdot \rho(t - \tau) \cdot d\tau$$

Entonces:

$$n(t) = n_0 \cdot \rho(t) + \int_0^t \rho(t - \tau) \cdot \gamma'(\tau) \cdot d\tau$$

La anterior constituye una ecuación integral en  $\gamma(t)$  si se conocen  $n(t)$  y  $\rho(t)$  o bien una ecuación integral en  $\rho(t)$  cuando sean conocidas

las funciones  $n(t)$  y  $\gamma(t)$ , que podemos resolver por el método de la transformada de Laplace.

Agreguemos las siguientes hipótesis:

3. El equipo inicial  $n_0$  es totalmente nuevo, vale decir  $\gamma(0) = 0$
4. El grupo está en estado estacionario, es decir la renovación del equipo se realiza de forma tal que el número de piezas en uso permanezca constante, o sea  $n(t) = n(0) = n_0$

La consideración de estas hipótesis nos conduce a:

$$n_0 = n_0 \cdot \rho(t) + \int_0^t \rho(t - \tau) \cdot \gamma'(\tau) \cdot d\tau$$

Calculamos la transformada de ambos miembros de la ecuación anterior:

$$\frac{n_0}{s} = n_0 \cdot R(s) + R(s) \cdot [sH(s) - \gamma(0)]$$

$$\text{Donde } R(s) = L\{\rho(t)\} \text{ y } H(s) = L\{\gamma(t)\}$$

$$\frac{n_0}{s} = n_0 \cdot R(s) + R(s) \cdot H(s) \cdot s$$

Si  $\gamma(t)$  es la incógnita, y por ejemplo la ley de eliminación es  $\rho(t) = e^{-\lambda t}$  siendo  $\lambda$  una constante positiva:

$$R(s) = L\{\rho(t)\} = L\{e^{-\lambda t}\} = \frac{1}{s + \lambda}$$

$$\frac{n_0}{s} - \frac{n_0}{s + \lambda} = \frac{s}{s + \lambda} \cdot H(s)$$

$$\frac{n_0 \cdot \lambda}{s(s + \lambda)} \cdot \frac{(s + \lambda)}{s} = H(s)$$

$$H(s) = n_0 \cdot \lambda \cdot \frac{1}{s^2}$$

Calculando la transformada inversa de Laplace obtenemos la función  $\gamma(t)$ :

$$\gamma(t) = L^{-1} \left\{ n_0 \cdot \lambda \cdot \frac{1}{s^2} \right\} = n_0 \lambda \cdot t$$

## Conclusiones

Para mantener el efectivo del grupo constante, es decir la población estacionaria, los reemplazos se deben efectuar a razón de  $n_0 \lambda$  piezas por unidad de tiempo.

Es posible obtener una ecuación integral fundamental para resolver el problema general de renovación.

Designando  $n(\tau)$  al número de individuos en el instante  $\tau$  de una población que puede renovarse por nacimiento o por admisión de nuevos miembros y que puede perder sus miembros por fallecimiento o por cualquier otra causa. Sea el incremento total de  $n(\tau)$  en el intervalo de tiempo desde  $\tau$  hasta  $\tau + d\tau$  igual a  $\Delta n(\tau) = n(\tau) \cdot \phi(\tau) \cdot d\tau$ ; el número de sobrevivientes de este último incremento en el instante  $t > \tau$  será:

Llamando  $n(0) = n_0$  a la población inicial, al tiempo  $t$  habrá  $n_0 \cdot \rho(t)$  sobrevivientes de esta cantidad inicial. Por lo tanto la ecuación fundamental que se puede plantear es:

$$n(t) = n_0 \cdot \rho(t) + \int_0^t \rho(t - \tau) \cdot n(\tau) \cdot \phi(\tau) \cdot d\tau$$

Suponiendo que la población es estacionaria:

$$n(t) = n(\tau) = n(0) = n_0$$

Entonces:

$$n_0 = n_0 \cdot \rho(t) + n_0 \int_0^t \rho(t-\tau) \cdot \varphi(\tau) \cdot d\tau$$

Que siendo  $n_0 \neq 0$  se transforma en:

$1 = \rho(t) + \int_0^t \rho(t-\tau) \cdot \varphi(\tau) \cdot d\tau$ , que es una ecuación integral respecto de la función de renovación  $\phi(t)$  o bien respecto de la función de eliminación  $\rho(t)$

Transformando ambos miembros de la ecuación:

$$\frac{1}{s} = R(s) + R(s) \cdot F(s), \text{ siendo } F(s) = L\{\phi(t)\}, \text{ de donde:}$$

$$1. R(s) = \frac{1}{s[1 + F(s)]} \text{ y por lo tanto } \rho(t) = L^{-1}\{R(s)\}$$

es la función de eliminación.

$$2. F(s) = \frac{1 - s \cdot R(s)}{sR(s)} \text{ y por lo tanto } \phi(t) = L^{-1}\{F(s)\}$$

es la función de renovación.

## Referencias

- Allen R.G.D. Economía Matemática. Págs.182-205. Ed. Aguilar, Madrid, España,1965.
- Allen R.G.D. Teoría Macroeconómica. Págs.433-440. Ed. Aguilar, Madrid, 1971.
- James Glyn. Matemáticas avanzadas para Ingeniería. Capítulos 2 y 3. Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 2002.
- Nagle R. Kent, Saff Edward B., Snider Arthur David. Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Págs. 369-442 Tercera edición. Pearson Educación, México, 2001.
- Carlos Fernández Pérez, Francisco José Vázquez Hernández, José Manuel Vegas Montaner. Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sistemas dinámicos. Págs.711-732. Thomson Editores, España, Madrid, 2003.
- Murray R. Spiegel. Serie de compendios Schaum. Teoría y Problemas de Transformada de Laplace. Págs.1-135. Libros Mc Graw-Hill, México, 1974.
- Dennis G. Zill, R. Cullen. Matemáticas avanzadas para Ingeniería I-Ecuaciones diferenciales. Págs.193-238. Mc Graw-Hill Interamericana, México, 2008



## 1.6

# Análisis de la probabilidad conjunta de default utilizando la cópula de supervivencia<sup>1</sup>

María Teresa Casparri • María José Bianco • Andrea Fabiana Lepera

## Introducción

La teoría de cópulas establece una relación funcional entre las funciones de distribución marginales univariadas y la distribución conjunta multivariada (Sklar, 1959), lo cual permite construir modelos que no incluyen la independencia estocástica de las variables involucradas.

Esta idea de relacionar las funciones de distribución marginal y conjunta mediante la función cópula se aplica también para relacionar las funciones de supervivencia marginal y conjunta mediante la *Survival Copula* o Cópula de Supervivencia.

Dada una variable aleatoria  $X$ , la función de supervivencia  $S(x_0)$  proporciona la probabilidad de que la variable supere el valor  $x_0$ , es decir  $S(x_0) = p(X > x_0)$ .

Análogamente la Función de Supervivencia conjunta permite medir la probabilidad de que dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$  conjuntamente superen determinados valores  $x_0, y_0$ . Es decir  $S(x_0, y_0) = p(X > x_0, Y > y_0)$ .

En muchas aplicaciones económicas, financieras y actuariales se utiliza el concepto de la Función de Supervivencia. Como ejemplo puede considerarse el estudio de la probabilidad conjunta de default con shocks exógenos de dos firmas.

En la siguiente sección se define función de supervivencia y se enuncian las principales propiedades cópulas para, finalmente, definir cópula de supervivencia. Luego, siguiendo a Cherubini (2004), se explica una aplicación económica. Por último, se enuncian algunas conclusiones y futuros trabajos.

<sup>1</sup> Trabajo presentado en las XXIV Jornadas Nacionales de Docentes de Matemática de Facultades de Ciencias Económicas y Afines, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de San Juan. 2009

## Definiciones y propiedades

En la presente sección se define función de supervivencia, se recuerda la definición de cópulas y sus propiedades relevantes para, finalmente, definir cópula de supervivencia y dar algunos ejemplos.

### Función de supervivencia

Dada una variable aleatoria  $X$ , la función de supervivencia  $S(x_0)$  proporciona la probabilidad de que la variable supere el valor  $x_0$ , es decir  $S(x_0) = p(X > x_0)$ .

Esta función puede expresarse a partir de la función de distribución  $F(x_0) = p(X \leq x_0)$  como  $S(x_0) = 1 - F(x_0) = \bar{F}(x_0)$

En forma similar la *Función de Supervivencia conjunta* permite medir la probabilidad de que dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$  conjuntamente superen determinados valores  $x_0, y_0$ . Es decir  $S(x_0, y_0) = p(X > x_0, Y > y_0)$ .

Si se denota por  $F(x_0, y_0) = p(X \leq x_0, Y \leq y_0)$  la función de distribución conjunta y por  $\bar{F}(x_0, y_0) = p(X > x_0, Y > y_0)$ , la Función de Supervivencia, al igual que en el caso de una variable, es  $S(x_0, y_0) = \bar{F}(x_0, y_0)$ , pero a diferencia de éste,  $\bar{F}(x_0, y_0) \neq 1 - F(x_0, y_0)$  sino que  $\bar{F}(x_0, y_0) = 1 - F_1(x_0) - F_2(y_0) + F(x_0, y_0)$ , donde  $F_1(x_0) = F(x_0, \infty)$  y  $F_2(y_0) = F(\infty, y_0)$  son las respectivas funciones de distribución marginal.

### Teoría de cópulas

Se define como *cópula* una función  $C : I^2 \rightarrow I$  (donde  $I = [0, 1]$  y  $I^2 = I \times I$ ) que satisface:

i) Para todo  $u, v \in I$  se cumple:

$$\begin{aligned} C(u, 0) &= 0 & C(0, v) &= 0 \\ C(u, 1) &= u & C(1, v) &= v \end{aligned}$$

ii) Para todo  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$  tales que  $u_1 < u_2$  y  $v_1 < v_2$

$$\begin{aligned} \Delta_{v_1}^{v_2} \Delta_{u_1}^{u_2} C(u, v) &= \Delta_{v_1}^{v_2} [C(u_2, v) - C(u_1, v)] = \\ &= [C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2)] - [C(u_2, v_1) - C(u_1, v_1)] = \\ &= C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo: *Cópula producto*.

Sea  $C(u, v) = uv$ ,  $C$  es una cópula llamada *cópula producto* y denotada por  $\Pi(u, v)$

$$\begin{aligned} \Pi(u, 0) &= u \cdot 0 = 0 & \Pi(0, v) &= 0 \cdot v = 0 \\ \Pi(u, 1) &= u \cdot 1 = u & \Pi(1, v) &= 1 \cdot v = v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{v_1}^{v_2} \Delta_{u_1}^{u_2} \Pi(u, v) &= \Pi(u_2, v_2) - \Pi(u_1, v_2) - \Pi(u_2, v_1) + \Pi(u_1, v_1) = \\ &= u_2 \cdot v_2 - u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 + u_1 \cdot v_1 = (u_2 - u_1)(v_2 - v_1) \geq 0 \\ &\quad \forall u_2 > u_1, v_2 > v_1 \quad u_1, u_2, v_1, v_2 \in I \end{aligned}$$

Propiedades: Sea  $C : I^2 \rightarrow I$  una cópula entonces:

1)  $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in I \quad |C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|$ , es decir que  $C$  es uniformemente continua.

2)  $\forall v \in I \quad \exists \frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$  para casi todo  $u \in I$  y  $0 \leq \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} \leq 1$ .

Análogamente  $\forall u \in I \exists \frac{\partial C(u, v)}{\partial v}$  para casi todo  $v \in I$  y  $0 \leq \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} \leq 1$

La relación de la función cópula con las funciones de distribución conjunta y marginales de variables aleatorias surge a partir del teorema de Sklar, que se enuncia a continuación.

**Teorema (Sklar):** Sean  $F$  una función de distribución conjunta y  $F_1$  y  $F_2$  sus respectivas marginales. Entonces existe una cópula  $C$  tal que

$$(1) \quad F(x, y) = C(F_1(x), F_2(y)) \quad \forall x, y \in \bar{\mathfrak{R}}. ^2$$

En el caso en que las funciones marginales sean continuas, dicha cópula es única.

Recíprocamente, si  $C$  es una cópula y  $F_1$  y  $F_2$  son funciones de distribución, la función  $F$  definida en (1) es una función de distribución conjunta con marginales  $F_1$  y  $F_2$ .

Es decir que puede establecerse una relación funcional entre las distribuciones marginales y la distribución conjunta a través de una cópula. En general supondremos que las distribuciones marginales son continuas (es decir  $X$  e  $Y$  son variables aleatorias continuas) y su correspondiente cópula será denotada por  $C_{XY}$

**Corolario:** Si se considera la quasi-inversa de  $F_1$  como  $F_1^{(-1)}(t) = \sup \{x / F_1(x) \leq t\}$  y en forma análoga la quasi-inversa de  $F_2$  la cópula  $C$  puede obtenerse a partir de la distribución conjunta  $F$  como:

$$(2) \quad C(u, v) = F(F_1^{(-1)}(u), F_2^{(-1)}(v))$$

**Propiedad:** Las variables aleatorias  $X$  e  $Y$  continuas son independientes si y sólo si  $C_{XY} = \Pi(X, Y)$ .

Una propiedad de las cópulas es que son invariantes ante transformaciones estrictamente crecientes.

<sup>2</sup> Se considera  $\bar{\mathfrak{R}}$  como el conjunto extendido de los reales, es decir  $\mathfrak{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

**Proposición:** Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias continuas y  $C_{XY}$  su correspondiente cópula. Si se consideran las transformaciones estrictamente crecientes  $\alpha$  y  $\beta$  sobre  $X$  e  $Y$  respectivamente, entonces:

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}$$

### Cópula de supervivencia

Como ya se mencionó la función de supervivencia conjunta para las variables aleatorias  $X$  e  $Y$  está dada por  $\bar{F}(x_0, y_0) = p(X > x_0, Y > y_0)$

Las marginales de esta función son las funciones de supervivencia univariadas de  $X$  e  $Y$  respectivamente:

$$\begin{aligned}\bar{F}(x, -\infty) &= p(X > x, Y \in \bar{\mathfrak{R}}) = p(X > x) = \bar{F}_1(x) \\ \bar{F}(-\infty, y) &= p(X \in \bar{\mathfrak{R}}, Y > y) = p(Y > y) = \bar{F}_2(y)\end{aligned}$$

Asimismo podemos expresar la función de supervivencia conjunta a partir de la cópula de  $X$  e  $Y$ :

$$\begin{aligned}\bar{F}(x, y) &= p(X > x, Y > y) = 1 - p(X \leq x \cup Y \leq y) = \\ &= 1 - [p(X \leq x) + p(Y \leq y) - p(X \leq x, Y \leq y)] = \\ &= 1 - F_1(x) + 1 - F_2(y) - 1 + F(x, y) = \\ &= \bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(y) - 1 + C(F_1(x), F_2(y)) = \\ &= \bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(y) - 1 + C(1 - \bar{F}_1(x), 1 - \bar{F}_2(y))\end{aligned}$$

De donde, si se define  $\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v)$  se tiene que  $\bar{F}(x, y) = \hat{C}(\bar{F}_1(x), \bar{F}_2(y))$

Dicha función resulta ser una cópula, como se demuestra a continuación:

**Propiedad:** La función  $\hat{C}: I^2 \rightarrow I$   $\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v)$  es una cópula.

Demostración:

$$\hat{C}(u, 0) = u + 0 - 1 + C(1 - u, 1 - 0) = u - 1 + 1 - u = 0$$

$$\hat{C}(0, v) = 0 + v - 1 + C(1 - 0, 1 - v) = v - 1 + 1 - v = 0$$

$$\hat{C}(u, 1) = u + 1 - 1 + C(1 - u, 1 - 1) = u + 0 = u$$

$$\hat{C}(1, v) = 1 + v - 1 + C(1 - 1, 1 - v) = v + 0 = v$$

Además

$$\begin{aligned} & \hat{C}(u_2, v_2) - \hat{C}(u_1, v_2) - \hat{C}(u_2, v_1) + \hat{C}(u_1, v_1) = \\ & = u_2 + v_2 - 1 + C(1 - u_2, 1 - v_2) - u_1 - v_2 + 1 - C(1 - u_1, 1 - v_2) - \\ & - u_2 - v_1 + 1 - C(1 - u_2, 1 - v_1) + u_1 + v_1 - 1 + C(1 - u_1, 1 - v_1) = \\ & = C(1 - u_2, 1 - v_2) - C(1 - u_1, 1 - v_2) - C(1 - u_2, 1 - v_1) + C(1 - u_1, 1 - v_1) \geq 0 \\ & \text{puesto que si } u_1 < u_2 \text{ y } v_1 < v_2 \Rightarrow 1 - u_2 < 1 - u_1 \text{ y } 1 - v_2 < 1 - v_1 \end{aligned}$$

Definición: Se denomina **cópula de supervivencia (survival copula)** de las variables aleatorias X e Y a la cópula  $\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v)$  donde C denota la cópula de X e Y. Dicha cópula relaciona la función de supervivencia conjunta de las variables con sus respectivas marginales.

$$\bar{F}(x, y) = \hat{C}(\bar{F}_1(x), \bar{F}_2(y))$$

Ejemplo: Cópula de supervivencia para dos variables aleatorias uniformes (0,1) independientes.

Si X e Y son U(0,1) entonces

$$F_1(x) = x \quad \text{y} \quad F_2(y) = y \quad \text{de donde} \quad F_1^{-1}(x) = x \quad \text{y} \quad F_2^{-1}(y) = y$$

Y como X e Y son independientes  $C(u, v) = \prod(u, v) = uv$

Entonces

$$\begin{aligned}\hat{C}(u, v) &= u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v) = u + v - 1 + (1 - u)(1 - v) = \\ &= u + v - 1 + 1 - u - v + uv = uv = \prod(u, v)\end{aligned}$$

Ejemplo: Cópula de supervivencia para la Distribución bivariada de Pareto.

Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias cuya función de distribución conjunta es para un parámetro  $\theta$

$$\bar{F}_\theta(x, y) = \begin{cases} (1 + x + y)^{-\theta} & x \geq 0, y \geq 0 \\ (1 + x)^{-\theta} & x \geq 0, y < 0 \\ (1 + y)^{-\theta} & x < 0, y \geq 0 \\ 1 & x < 0, y < 0 \end{cases}$$

Entonces las funciones de supervivencia marginales son

$$\begin{aligned}\bar{F}_1(x) = F(x, -\infty) &= \begin{cases} (1 + x)^{-\theta} & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases} \\ \bar{F}_2(y) = F(-\infty, y) &= \begin{cases} (1 + y)^{-\theta} & y \geq 0 \\ 1 & y < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\bar{F}_1^{-1}(u) &= (u^{-1/\theta} - 1) \quad \text{para } u, v \in I \\ \bar{F}_2^{-1}(v) &= (v^{-1/\theta} - 1)\end{aligned}$$

Aplicando (2) se obtiene

$$\begin{aligned}\hat{C}(u, v) &= \bar{F}(\bar{F}_1^{(-1)}(u), \bar{F}_2^{(-1)}(v)) = \bar{F}(u^{-1/\theta} - 1, v^{-1/\theta} - 1) = \\ &= (1 + u^{-1/\theta} - 1 + v^{-1/\theta} - 1)^{-\theta} = (u^{-1/\theta} + v^{-1/\theta} - 1)^{-\theta}\end{aligned}$$

## Aplicación: Probabilidad conjunta de default

La aplicación financiera dada a continuación se encuentra en Cherubini (2004)

Se considera la supervivencia de dos firmas cuyo tiempo de supervivencia se denota por  $X$  e  $Y$  respectivamente.

Se toman tres tipos de shocks: dos de ellos específicos de cada firma y el tercero que afecta a ambas, con el supuesto de que los tres son independientes y siguen un proceso de Poisson con parámetros  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $\lambda_p$  respectivamente.

Luego el tiempo de ocurrencia de cada shock (denotados por  $Z_1$ ,  $Z_2$  y  $Z_{12}$  respectivamente) tendrá una función de distribución:

$$G_1(z_1) = 1 - e^{-\lambda_1 z_1}$$

$$G_2(z_2) = 1 - e^{-\lambda_2 z_2}$$

$$G_{12}(z_{12}) = 1 - e^{-\lambda_{12} z_{12}}$$

Debe observarse que el tiempo de supervivencia  $X$  de la primera firma es  $X = \min(Z_1, Z_{12})$  y el de la segunda es  $Y = \min(Z_2, Z_{12})$ , de donde la función de supervivencia de cada firma es:

$$\begin{aligned}\bar{F}_1(x) &= p(X > x) = p(Z_1 > x, Z_{12} > x) = p(Z_1 > x)p(Z_{12} > x) = \\ &= \bar{G}_1(x)\bar{G}_{12}(x) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x}\end{aligned}$$

$$\bar{F}_2(x) = e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12})x}$$

Luego la probabilidad de supervivencia conjunta de ambas empresas es:

$$\begin{aligned}\bar{F}(x, y) &= p(X > x, Y > y) = p(\min(Z_1, Z_{12}) > x, \min(Z_2, Z_{12}) > y) = \\ &= p(Z_1 > x; Z_2 > y; Z_{12} > \max(x, y)) = \\ &= p(Z_1 > x) \cdot p(Z_2 > y) \cdot p(Z_{12} > \max(x, y)) = \\ &= \bar{F}_1(x) \cdot \bar{F}_2(y) \cdot \bar{F}_{12}(\max(x, y)) = \bar{F}_1(x) \cdot \bar{F}_2(y) \cdot e^{-\lambda_{12} \max(x, y)} = \\ &= \bar{F}_1(x) \cdot \bar{F}_2(y) \cdot e^{\lambda_{12} \min(x, y)} = \bar{F}_1(x) \cdot \bar{F}_2(y) \cdot \min(e^{\lambda_{12} x}, e^{\lambda_{12} y})\end{aligned}$$

Si se definen:

$$m = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_{12}} \quad n = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_2 + \lambda_{12}}$$

Entonces:

$$\left[ \bar{F}_1(x) \right]^{-m} = \left[ e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x} \right]^{-\frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_{12}}} = e^{\lambda_{12}x} \quad y \quad \left[ \bar{F}_2(x) \right]^{-n} = e^{\lambda_{12}y}$$

De donde:

$$\begin{aligned} \bar{F}(x, y) &= \bar{F}_1(x) \cdot \bar{F}_2(y) \cdot \min(e^{\lambda_{12}x}, e^{\lambda_{12}y}) = \\ &= \bar{F}_1(x) \cdot \bar{F}_2(y) \cdot \min\left[ (\bar{F}_1(x))^{-m}, (\bar{F}_2(y))^{-n} \right] = \\ &= \min\left[ (\bar{F}_1(x))^{1-m} \cdot \bar{F}_2(y), \bar{F}_1(x) \cdot (\bar{F}_2(y))^{1-n} \right] \end{aligned}$$

Si se considera la cópula de supervivencia de Marshall y Olkin:

$$\hat{C}^{MO}(u, v) = \min(u^{1-m} \cdot v, u \cdot v^{1-n}) = \begin{cases} u^{1-m} \cdot v & \text{si } u^m \geq v^n \\ u \cdot v^{1-n} & \text{si } u^m < v^n \end{cases}$$

Puede expresarse la probabilidad conjunta de supervivencia a partir del instante t como:

$$\begin{aligned} \bar{F}(t, t) &= \min\left[ (\bar{F}_1(t))^{1-m} \cdot \bar{F}_2(t), \bar{F}_1(t) \cdot (\bar{F}_2(t))^{1-n} \right] = \\ &= \hat{C}^{MO}(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t)) \end{aligned}$$

Considerando que:

$$F(t, t) = 1 - \bar{F}_1(t) - \bar{F}_2(t) + \bar{F}(t, t)$$

Luego la probabilidad de default es:

$$\begin{aligned} p(X \leq t, Y \leq t) &= F(t, t) = 1 - \bar{F}_1(t) - \bar{F}_2(t) + \bar{F}(t, t) = \\ &= 1 - \bar{F}_1(t) - \bar{F}_2(t) + \hat{C}^{MO}(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t)) = \\ &= F_1(t) + F_2(t) - 1 + \hat{C}^{MO}(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t)) \end{aligned}$$

Si, por ejemplo, las dos firmas consideradas fueran una del sector químico y otra del sector alimentario y los shocks tienen, respectivamente, un instante esperado de ocurrencia de 2, 1 y 4 años entonces  $\lambda_1 = 0,5$ ,  $\lambda_2 = 1$  y  $\lambda_3 = 0,25$ . Se tiene que:

$$\bar{F}_1(t) = e^{-(0,5+0,25)t} = e^{-0,75t}$$

$$\bar{F}_2(t) = e^{-(1+0,25)t} = e^{-1,25t}$$

$$m = \frac{0,25}{0,5+0,25} = \frac{1}{3} \quad n = \frac{0,25}{1+0,25} = \frac{1}{5}$$

Con lo cual la probabilidad de supervivencia a partir de los  $t$  años de ambas empresas conjuntamente será:

$$\begin{aligned} \bar{F}(t, t) &= \hat{C}^{MO}(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t)) = \min \left[ \left( e^{-0,75t} \right)^{1-\frac{1}{3}} e^{-1,25t}, e^{-0,75t} \left( e^{-1,25t} \right)^{1-\frac{1}{5}} \right] = \\ &= \min \left[ e^{-1,75t}, e^{-1,75t} \right] = e^{-1,75t} \end{aligned}$$

## Conclusiones

Las cópulas han ganado gran importancia en la última década, especialmente en el campo de las finanzas, ya que el conocimiento del comportamiento conjunto de diferentes factores de riesgo resulta de vital importancia para la correcta asignación, por ejemplo, de riesgos de mercado y de crédito.

Un elemento clave en el control de riesgo de crédito es la llamada Cópula de Supervivencia. La probabilidad de que un individuo sobreviva un tiempo  $t$  está dada por la función de supervivencia definida en la segunda sección. Luego si  $X$  e  $Y$  son dos variables aleatorias que representan, respectivamente, los tiempos de supervivencia de dos riesgos, la cópula de supervivencia permitirá relacionar la función de supervivencia conjunta con las marginales.

La metodología presentada se utilizará en investigaciones futuras en el contexto de nuestro proyecto de evaluación de riesgos financieros vinculados al cambio global.

## Referencias

- Cherubini, U.; Luciano E. ;Vecchiato, W. (2004) *Copula methods in finance*, John Wiley & Sons Hoboken, NJ.
- Nelsen, R. (2006) *An Introduction to Copulas*, Second Edition, Springer, United States of America.
- Sklar, A. (1959) *Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges*. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 8, 229-231.



## 1.7

# Aplicación de control óptimo en un modelo económico de explotación pesquera<sup>1</sup>

*María Teresa Casparri • Verónica García Fronti • Ana Silvia Vilker*

## Introducción

La optimización dinámica es posible abordarla a través de la teoría de control óptimo. La misma permite estudiar procesos económicos en un horizonte temporal finito o infinito y determinar la trayectoria temporal de la variable de control que optimiza la función objetivo. Una vez hallada la trayectoria óptima de la variable de control es posible encontrar la trayectoria óptima de la variable de estado.

En este trabajo se introducen los conceptos básicos de la teoría de control óptimo en tiempo continuo y luego se la aplica en un modelo económico de explotación de un recurso renovable, como lo es el recurso pesquero, con un horizonte de planificación infinito. El análisis de las trayectorias óptimas se realiza mediante un diagrama de fase, ya que las funciones del modelo son dadas en su forma general.

## Teoría de control óptimo en tiempo continuo

En los problemas de optimización dinámica el objetivo es encontrar el mejor curso de acción para un período de planificación determinado, ya sea horizonte temporal finito o infinito. Una forma de abordar los problemas de optimización dinámica es mediante la teoría de control óptimo, esta teoría se focaliza en la variable de control que sirve de instrumento para la optimización, ya que en este tipo de problemas el decisor o planificador se supone que puede decidir sobre esta variable. El objetivo es seleccionar una trayectoria admisible de la variable de control óptima, a la que llamaremos  $u^*(t)$  que tiene asociada una trayectoria admisible óptima de la variable de estado,  $x^*(t)$ , ambas funciones optimizan al funcional objetivo en un intervalo de tiempo dado.

<sup>1</sup> Este trabajo fue publicado en la Revista de Investigación en Modelos Matemáticos Aplicados a la Gestión y la Economía. Año 3 (2016) - Volumen 3.

Como se ha mencionado, la variable de control es aquella sobre la que el decisor puede influir y que determina a la variable de estado.

El problema básico de control óptimo se plantea matemáticamente de la siguiente forma, considerando una única variable de control y de estado:

$$\text{Maximizar} \quad V = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u) dt$$

$$\text{Sujeto a:} \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x, u)$$

con  $x(t_0) = x_0$   $x(t_1) = \text{libre}$  (considerando que  $t_0, t_1, x_0$  son datos)

$$u(t) \in \Omega \text{ para todo } t \in [t_0, t_1]$$

En donde:

$x = x(t)$  se denomina variable de estado con  $t \in [t_0, t_1]$ , es una función continua y con derivada continua por tramos.

$u = u(t)$  se denomina variable de control con  $t \in [t_0, t_1]$ , es una función continua por tramos.

$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u)$  se denomina ecuación de estado, es una ecuación diferencial que describe el comportamiento de la variable de estado.

$$(D \subset \mathbb{R}^3, f : D \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^1(D))$$

La función F del funcional objetivo es continua con derivadas continuas

Antes de enunciar las condiciones necesarias de primer orden, conocidas como el principio del máximo de Pontryagin se debe definir el Hamiltoniano asociado al problema como:

$$H(t, x, u, \lambda) \equiv F(t, x, u) + \lambda f(t, x, u)$$

Donde  $\lambda = \lambda(t)$  con  $t \in [t_0, t_1]$  se denomina variable de coestado.

Para el problema planteado las condiciones necesarias para máximo establecidas por el principio del máximo de Pontryagin son:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) H(t, x, u^*, \lambda) \geq H(t, x, u, \lambda) \quad \forall t \in [t_0, t_1] \\ 2) \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \frac{dx}{dt} \\ 3) \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{d\lambda}{dt} \\ 4) \text{condición de transversalidad: } \lambda(t_1) = 0 \end{array} \right.$$

La primera condición establece que el hamiltoniano debe ser maximizado con respecto a la variable de control. La segunda y tercera ecuación son ecuaciones diferenciales que establecen el movimiento de la variable de estado y de la variable de coestado. La cuarta condición se refiere a la condición de transversalidad que dependerá de las condiciones finales dadas, en este caso se planteó como condición final del problema de optimización que la variable de estado puede tomar cualquier valor, para estos casos la condición de transversalidad establece que la variable de coestado en el tiempo final debe anularse.

Estas ecuaciones permiten establecer las trayectorias óptimas de las variables de control, estado y coestado que maximizan a la función objetivo en un período determinado. Debe destacarse que estas condiciones son necesarias, por lo que más adelante se presentarán las condiciones suficientes que aseguran que las trayectorias encontradas maximizan al funcional objetivo.

En las aplicaciones económicas de la teoría de control óptimo en el integrando se presenta el factor de descuento,  $e^{-rt}$ . Este indica el grado de impaciencia que tiene el consumidor, cuanto más grande es  $r$  mayor importancia tendrá la utilidad presente del consumo comparada con la futura.

El problema de control óptimo con factor de descuento y autónomo es de la siguiente forma:

$$\text{Maximizar } V = \int_{t_0}^{t_1} G(x,u)e^{-rt} dt$$

$$\text{Sujeto a: } \frac{dx}{dt} = f(x,u)$$

$$x(t_0) = x_0 \ ; \ x(t_1) = \text{libre}$$

Se puede simplificar el planteo de las condiciones de primer orden empleando el hamiltoniano a valor presente:  $H_{VP} = He^{rt}$

Por lo tanto, reescribiendo el hamiltoniano:

$$H_{VP} = F(x,u) + \lambda e^{rt} f(x,u)$$

Si se llama  $\mu = \lambda e^{rt}$  (variable de coestado a valor presente)

$$H_{VP} = F(x,u) + \mu f(x,u)$$

Ahora las condiciones necesarias de primer orden para el hamiltoniano a valor presente son:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) H_{VP}(x, u^*, \lambda) \geq H_{VP}(x, u, \lambda) \quad \forall t \in [t_0, t_1] \\ 2) \frac{\partial H_{VP}}{\partial \mu} = \frac{dx}{dt} \\ 3) -\frac{\partial H_{VP}}{\partial x} + r\mu = \frac{d\mu}{dt} \\ 4) \text{condición de transversalidad: } \mu(t_1) = 0 \end{array} \right.$$

En muchos problemas económicos el horizonte de planificación es infinito, en estos casos la integral que se debe maximizar es una integral impropia, de la que se debe asegurar su convergencia. Matemáticamente el problema planteado, que nuevamente se eligió autónomo:

$$\text{Maximizar } V = \int_{t_0}^{\infty} G(x, u) e^{-rt} dt$$

$$\text{Sujeto a: } \frac{dx}{dt} = f(x, u)$$

$$x(t_0) = x_0$$

El hamiltoniano a valor presente asociado en este caso es:

$$H_{VP} = G(x, u) + \mu f(x, u)$$

Las condiciones necesarias de primer orden son:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) H_{VP}(x, u^*, \lambda) \geq H_{VP}(x, u, \lambda) \\ 2) \frac{\partial H_{VP}}{\partial \mu} = \frac{dx}{dt} \\ 3) -\frac{\partial H_{VP}}{\partial x} + r\mu = \frac{d\mu}{dt} \\ 4) \text{condición de transversalidad: } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-rt} \mu = 0 \end{array} \right.$$

El objetivo sigue siendo encontrar las trayectorias a lo largo del tiempo óptimas de las variables de control, estado y coestado ( $u^*(t), x^*(t), \lambda^*(t)$  o  $\mu^*(t)$ ) (que maximizan la función objetivo a lo largo del período de planificación). A lo largo del trabajo solo se han planteado las condiciones necesarias, por lo que ahora se mencionarán las condiciones suficientes (que son válidas para los tres casos de control óptimo estudiados).

$$\left\{ \begin{array}{l} F \text{ cóncava en } (x, u) \\ f \text{ cóncava en } (x, u) \\ \lambda > 0 \text{ } (\mu > 0) \text{ si } f \text{ es no lineal} \end{array} \right.$$

Si se cumplen las condiciones suficientes se puede asegurar que ( $u^*(t), x^*(t), \lambda^*(t)$  o  $\mu^*(t)$ ) maximizan a la función objetivo.

Utilizando los conceptos de control óptimo desarrollados se presentará a continuación el problema de optimización de la utilidad del consumo de un recurso pesquero para un período infinito de planeación que se resuelve empleando el principio del máximo de Pontryagin. El modelo económico de optimización dinámica utilizado se basa en el presentado en el libro de Silberberg (The Structure of Economics. A Mathematical Analysis)

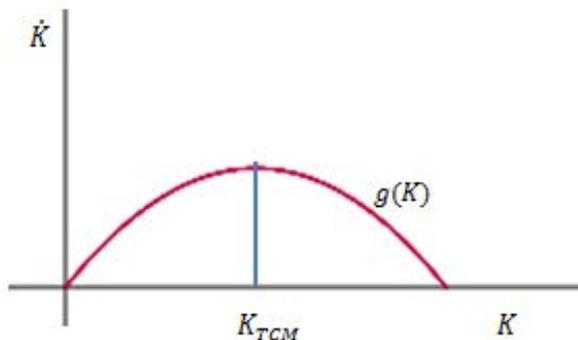
### Maximización de la utilidad del consumo de un recurso pesquero

En este modelo se supone que un planificador desea controlar el consumo de un recurso natural para maximizar el funcional bienestar.

$$\text{Maximizar } V = \int_0^{\infty} U(C)e^{-rt} dt$$

Se asume que la función utilidad  $U(C(t))$ , donde  $C(t)$  es una función corriente de consumo, que  $U'(C) > 0$  y  $U''(C) < 0$ . Se considera también que el consumidor es impaciente, es decir que tiene una tasa de preferencia intertemporal,  $r$ , que es positiva y constante. Se supone que el crecimiento del recurso depende exclusivamente del stock del mismo y que tiene una curva de crecimiento biológico  $\dot{K} = \frac{dK}{dt} = g(K)$  como la que se expone en el Gráfico 1. Como se puede visualizar en el gráfico  $g'(K) > 0$  cuando  $K < K_{TCM}$ ,  $g'(K_{TCM}) = 0$  y  $g'(K) < 0$  cuando  $K > K_{TCM}$ . La función  $g(K)$  es cóncava, es decir  $g''(K) < 0$ .

**Gráfico 1:** Función del crecimiento biológico del recurso pesquero



El modelo de maximización de la utilidad del consumo puede ser representado matemáticamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } V &= \int_0^{\infty} U(C)e^{-rt} dt \\ \text{Sujeto a: } & \frac{dK}{dt} = g(K) - C \\ \text{condición inicial: } & K(0) = K_0 \end{aligned}$$

Donde:

$g(K)$  : Función de crecimiento biológico del recurso

$K$  : Stock de capital

$r$  : tasa de impaciencia intertemporal del consumidor

Se asume que la integral impropia converge

La variable de estado es el stock de capital ( $K$ ), que representa el stock del recurso renovable y la variable de control es el consumo  $C(t)$ . La ecuación de movimiento dada indica que el cambio en el stock del capital es igual a la diferencia entre la tasa de crecimiento  $g(K)$  del recurso pesquero y el consumo del mismo.

Para resolver el problema se construye el Hamiltoniano a valor presente:

$$H_{VP} = U(C) + \mu [g(K) - C]$$

Las condiciones necesarias de primer orden para este problema son:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \frac{\partial H_{VP}}{\partial C} = 0 \rightarrow U'(C) - \mu = 0 \\ \quad \frac{\partial^2 H_{VP}}{\partial C^2} < 0 \rightarrow U''(C) < 0 \\ 2) \frac{\partial H}{\partial \mu} = \frac{dK}{dt} \rightarrow g(k) - C = \frac{dK}{dt} \\ 3) -\frac{\partial H}{\partial K} + r\mu = \frac{d\mu}{dt} \rightarrow -\mu g'(K) + r\mu = \frac{d\mu}{dt} \\ 4) \text{Condición de transversalidad } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-rt} \mu = 0 \end{array} \right.$$

Si el hamiltoniano es diferenciable con respecto a la variable de control, la primera condición necesaria es que:  $\frac{\partial H_{VP}}{\partial C} = 0$  y  $\frac{\partial^2 H_{VP}}{\partial C^2} < 0$ . Por los supuestos del modelo se asegura que la derivada segunda es negativa. Que se anule la primera derivada parcial del hamiltoniano a valor presente con respecto a la variable de control determina la ecuación:

$$U'(C) - \mu = 0$$

Las 2º y 3º condiciones necesarias permiten obtener un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} g(k) - C = \frac{dK}{dt} \\ -\mu g'(K) + r\mu = \frac{d\mu}{dt} \end{cases}$$

Las ecuaciones obtenidas de las condiciones necesarias están compuestas por funciones generales por lo que no es posible encontrar una solución cuantitativa del problema pero como es autónomo se puede realizar un diagrama de fase y efectuar el análisis correspondiente.

La primera condición del máximo establece  $\mu = U'(C)$ , como  $U''(C) < 0$  esta es una función monótona y usando una versión global del teorema de la función implícita  $C = c(\mu)$ , por lo tanto se pueden reescribir a las dos ecuaciones diferenciales de la siguiente forma:

$$\begin{cases} g(k) - c(\mu) = \frac{dK}{dt} \\ -\mu g'(K) + r\mu = \frac{d\mu}{dt} \end{cases}$$

Ahora se presenta un sistema de ecuaciones diferenciales en el que sólo se presentan  $K$  y  $\mu$ . Las dos curvas de demarcación del sistema, es decir  $(\frac{dK}{dt} = 0 ; \frac{d\mu}{dt} = 0)$  son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Curva de demarcación } \frac{dK}{dt} = 0 \\ \quad \quad \quad g(K) - c(\mu) = 0 \\ \\ \text{Curva de demarcación } \frac{d\mu}{dt} = 0 \\ \quad \quad \quad -\mu g'(K) + r\mu = 0 \end{array} \right.$$

Para graficar la curva de demarcación  $\frac{dK}{dt} = 0$  se debe tener en cuenta que:  $\mu = U'(c)$ . Debido al supuesto de que  $U''(C) < 0$ , la función es monótona, por lo que puede ser invertida, y usando el teorema de la función implícita se puede decir que  $C = c(\mu)$  y se cumple que:  $c'(\mu) = \frac{1}{U''(C)}$  por lo tanto la función  $c(\mu)$  es decreciente, es decir cuando  $\mu$  aumenta  $C$  disminuye y viceversa.

Por supuestos que se han expuesto anteriormente  $g'(K) > 0$  cuando  $K < K_{TCM}$  y  $g'(K) < 0$  cuando  $K > K_{TCM}$  por lo cual para mantener la igualdad  $c(\mu)$  debe crecer antes del  $K_{TCM}$  y disminuir después del mismo. Por lo tanto,  $\mu$  debe disminuir antes del  $K_{TCM}$  e incrementarse después del  $K_{TCM}$  como se puede visualizar en el Gráfico 2.

Mientras que para graficar la otra curva de demarcación  $\frac{d\mu}{dt} = 0$  se analiza lo siguiente:

La curva de crecimiento biológico debe ser igual a la tasa de impaciencia  $g'(k) = r$  y esta se supone positiva por lo tanto debe estar a la izquierda del  $K_{TCM}$  donde  $g'(K) > 0$ . De esto se deduce que la curva  $\frac{d\mu}{dt} = 0$  es una línea vertical que corta al eje de abscisas en el valor de la tasa de impaciencia  $r$ , y está a la izquierda de  $K_{TCM}$ .

En el cruce de las dos curvas se presenta el punto de equilibrio estacionario de la variable de estado y de coestado (ver el Gráfico 2) falta determinar qué les sucede a estas variables en cada una de las cuatro zonas que quedaron determinadas en el plano de fase: I, II, III y IV

Si se analiza sólo el movimiento de  $m$  a la izquierda del capital máximo  $(K_{TCM}) \frac{d\mu}{dt} < 0$  pues  $g'(k)$  es mayor que cero, es decir, en las zonas I y IV:  $\frac{d\mu}{dt} < 0$ . Mientras que a la derecha del capital máximo  $(K_{TCM}) \frac{d\mu}{dt} > 0$  pues  $g'(k)$  es menor que cero, es decir en las zonas II y III:  $\frac{d\mu}{dt} > 0$ .

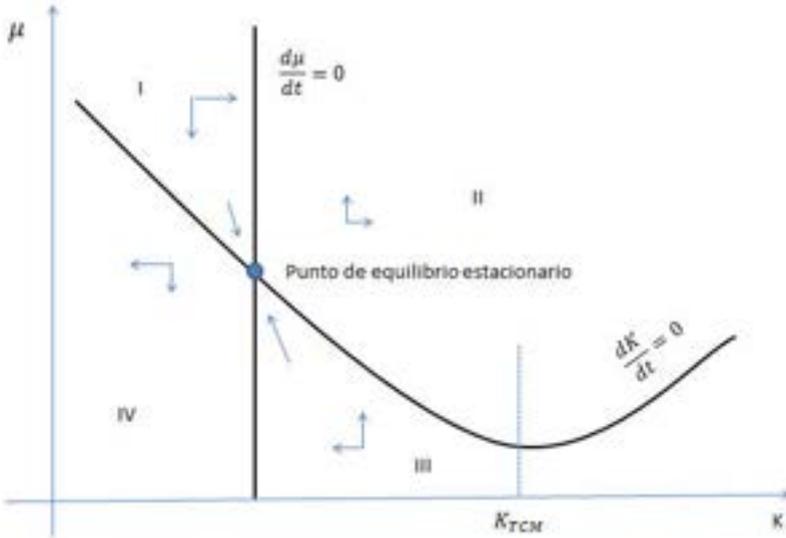
En los sectores I y II, es decir sobre la curva de demarcación  $\frac{dK}{dt} = 0$  como  $c(\mu)$  es una función decreciente  $\frac{dK}{dt} > 0$  y en III y IV como  $c(\mu)$  es una función creciente  $\frac{dK}{dt} < 0$ .<sup>2</sup>

De esta forma se puede construir para cada sector la configuración correspondiente. En este caso se observa que existe un punto de ensilladura. Simplificadamente, los puntos ubicados en los sectores II y IV se alejan del punto de equilibrio, mientras que en los sectores I y III existe una rama estable. Como el punto de equilibrio es un punto de ensilladura se sabe que la ecuación característica que determina la solución del problema de control contiene una raíz positiva y otra negativa.

Falta verificar bajo qué condiciones se cumple la *condición de transversalidad*:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-rt} \mu = 0$ , debido a que la solución presenta un punto de ensilladura, la única forma de que la misma se verifique es que la trayectoria óptima sea la que se dirige al punto de equilibrio.

<sup>2</sup> En el trabajo “Análisis de la Dinámica de la Explotación Pesquera – Recurso Renovable - Utilizando Diagrama de Fase” de nuestra autoría profundizamos en la confección de diagramas de fase cuando la función se plantea en forma general presentado en las XXIX Jornadas Nacionales De Docentes de Matemática de Facultades de Ciencias Económicas Y Afines

**Gráfico 2:** Diagrama de fase



Para asegurar que las trayectorias óptimas encontradas maximizan al funcional objetivo se deben verificar las siguientes condiciones suficientes:

$$\begin{cases} (1) U(C)e^{-rt} \text{ es cóncava en } (K, C) \\ (2) g(K) - C \text{ es cóncava en } (K, C) \\ (3) \mu > 0 \end{cases}$$

Las dos primeras condiciones se cumplen por los supuestos del modelo y la tercera se verifica, ya que de la primera condición del máximo  $\mu = U'(C)$  y por supuesto del modelo  $U'(C) > 0$ .

En síntesis, el diagrama de fase permite conocer la dinámica de la variable de estado (y por lo tanto también de la variable de control) y de la variable de coestado. Por otro lado, la condición de transversalidad permite afirmar que la trayectoria óptima es la rama estable, es decir la que conduce al equilibrio estacionario. En base a las consideraciones hechas se observa que en el equilibrio el stock del recurso es menor que el  $K_{TCM}$  así como el consumo, es decir la optimización dinámica posee un óptimo que es distinto del que se hubiera obtenido con la optimización clásica.

## Conclusiones

La teoría de control óptimo es una herramienta muy utilizada en los modelos económicos para realizar una optimización dinámica en donde la solución óptima es una trayectoria en el tiempo de las variables de control, estado (relacionada con la variable de control mediante la ecuación de movimiento) y la de coestado.

En el problema económico planteado se maximizó dinámicamente mediante la teoría de control óptimo la utilidad del consumo de un recurso renovable en un horizonte de planificación infinita. El problema presenta a las funciones en su forma general por lo que no se puede encontrar explícitamente la trayectoria óptima de cada una de las variables, pero debido a que el problema es autónomo fue posible realizar un diagrama de fase y determinar la trayectoria óptima.

## Referencias

- Balbas de la Corte, A., Gil Fana, J. A. y Gutiérrez Valdeón S. (1991). *Análisis matemático para la Economía I. Cálculo diferencial*. Madrid, España. Editorial AC.
- Casparri, M.T; García Fronti, V. y Vilker, A. (2014) *Análisis de la dinámica de la explotación pesquera – recurso renovable – utilizando diagrama de fase*. Ponencia en la XXIX Jornadas Nacionales de docentes de matemática de Facultades de Ciencias Económicas y Afines en Santa Rosa, La Pampa.
- Chiang, A. y Wainwright, K. (2006). *Métodos fundamentales de economía matemática*. 4º ed. México. Mc Graw-Hill.
- Chiang, A. (2000). *Elements of Dynamic optimization*. Mc Graw-Hill
- Jarne Jarne, G., Minguillón Constante E. y Pérez-Grasa I. (1997). *Matemática para la economía. Álgebra Lineal y Cálculo Diferencial*. Madrid, España. Mc Graw-Hill.

Shone, R (2002). *Economic Dynamic Phase Diagrams and their Economic Application*. Cambridge 2º ed. UK. Cambridge.

Silberberg, E. (1990). *The Structure of Economics. A Mathematical Analysis*. Singapore. Mc Graw-Hill.





# SECCIÓN 2

Temas Financieros





## 2.1

# HuRLOs: Una innovación financiera para la cobertura contra huracanes

*María Teresa Casparri • Javier García Fronti*

## Resumen

Este trabajo presenta en forma breve e introductoria una nueva cobertura contra huracanes que se ha desarrollado en el año 2008 denominada *HuRLOs*. Es un instrumento financiero basado en el sistema *Pari-Mutuel* y es complementario de los seguros tradicionales contra inundaciones.

Primero se detalla su operatoria, luego se plantean algunas consideraciones para la evaluación de su precio en el mercado. Por último, se concluye con un análisis premilitar de sus ventajas y desventajas con respecto a los seguros tradicionales.

**Palabras clave:** Riesgos catástrofe, cobertura contra huracanes

## Introducción

Los huracanes pueden ser devastadores y nadie está totalmente protegido de los daños materiales que pueden causar. Incluso los propietarios de inmuebles asegurados contra inundaciones, a menudo no tienen suficiente cobertura lo que puede provocar importantes pérdidas financieras.

El problema de los huracanes ha sido históricamente de particular importancia para las poblaciones sobre el Golfo de México. Durante años, los propietarios de estas regiones no han tenido instrumentos eficientes para reducir su exposición a un siniestro provocado por ciclones tropicales.

Esto motivó a la empresa Weather Risk Solutions a proponer una innovación financiera para mitigar el efecto de los huracanes: Hurricane Risk Landfall Options (HuRLOs). Son opciones que permiten a los

participantes del mercado cubrirse contra el riesgo de que una cierta zona costera de EEUU reciba el próximo huracán. La primera negociación del nuevo instrumento se hizo en el año 2008 dentro del mercado de Chicago (Chicago Mercantile Exchange 2008).

En la primera sección de la presente comunicación se describe el nuevo instrumento financiero, en la segunda se presenta su operatoria y el proceso de formación del precio. En la tercera sección se detallan ventajas y desventajas en comparación con los seguros tradicionales. Por último, se plantean algunas conclusiones preliminares y se propone una agenda futura de trabajo.

## 1. HuRLOs

Los derivados financieros tradicionales tienen como limitación la necesidad de encontrar una contraparte dispuesta para cubrirse de un determinado riesgo. Como una forma de paliar este problema, los sistemas Pari-Mutuel se aplicaron desde el año 2002 en el comercio de derivados financieros por parte de varios bancos de inversión (Baron & Lange 2007; Ottaviani & Sørensen 2005). Esta innovación permite mutualizar entre un grupo de operadores el riesgo a cubrir.

En octubre de 2008, la empresa Weather Risk Solutions (WRS) introdujo una innovación financiera denominada “HuRLOs” que utiliza el sistema pari-mutuel para permitir la cobertura contra Huracanes (Weather Risk Solutions 2008b). En particular, la nueva herramienta permite mutualizar el riesgo de la aparición de un huracán en una zona determinada formando un fondo común en conjunto con otras regiones. La cobertura geográfica incluye el Golfo de México y las costas orientales de los EEUU, desde México a Canadá.

Los interesados aportan al fondo mutual a través del instrumento mencionado (regulado por la CBE) durante un período prefijado. Al finalizar, la primera región que se vea afectada por el siniestro recibe el fondo acumulado. De esta manera, se plantea un instrumento auto-financiado en su totalidad y que no requiere subsidios del gobierno. Sin embargo, es importante destacar que no sustituye a los seguros contra inundaciones, sino que los complementa.

## 2. Operatoria y precio

Cada HuRLO tiene un precio por la interacción dinámica de las decisiones comerciales de todos los participantes en el mercado y los datos históricos de riesgo de huracanes disponibles en la plataforma de negociación. Se negocian en una plataforma de comercio electrónico operados por WRS a través del Mercado Alternativo CME, Inc. 's ("CME AM"). Se trata de un producto financiero de riesgo limitado e identificable, un comprador no puede perder más de la cantidad pagada como prima.

La operatoria se inicia a principios de primavera, antes de que haya algún riesgo de huracanes y termina a mediados de diciembre. Se trabajan dos series, relacionadas con el primer y el segundo huracán que tocará tierra respectivamente. Cada serie es un mercado integrado con un fondo mutualizado.

Los participantes en el mercado pueden comprar HuRLOs en cualquier momento sin tener que buscar otro participante en el mercado que quiera vender. Estas primas se acumulan en un fondo mutual de riesgo que se repartirá entre los titulares de los HuRLOs donde el huracán toca primeramente la costa. La empresa Weather Risk Solutions determina en virtud de una metodología transparente, si un huracán llegó a tierra utilizando datos del Centro Nacional de Huracanes (Servicio Meteorológico Nacional de EEUU).

Los inversores pagan la prima de una opción que pagará si el primer huracán aparece en la región costera elegida. Estas regiones son mutuamente excluyentes (78 en total) y también se incluye la opción que paga en caso de que no aparezca un huracán. En otras palabras, si durante el período de vida no hay Huracanes, el fondo mutual se reparte entre los que apostaron a la ausencia de huracanes en las 78 regiones.

La transparencia es fundamental en el mercado. Todos los participantes en el mercado tienen acceso a la misma información disponible en pantallas de negociación: El número de HuRLOs adquiridos para cada región, el importe total de todas las opciones de las primas pagadas hasta la fecha en cada serie y el precio de cada una de las opciones.

Los precios de cada HuRLO se definen por la negociación colectiva, expresada en las compras efectuadas en cada región.

Inicialmente en base a la información histórica, se fijan los precios de cada uno de los 79 HuRLOs disponibles para la compra. A continuación, estos precios se modifican dinámicamente por las decisiones de compra de los participantes en el mercado. Estas decisiones impactan en los nuevos precios mediante un algoritmo adaptativo de control que refleja las probabilidades de cada región basado en las decisiones de compra de los participantes del mercado en su conjunto (Weather Risk Solutions 2008a).

### **3. Ventajas y desventajas en comparación con los seguros tradicionales**

En esta sección se presentan en forma preliminar algunos comentarios sobre las ventajas y desventajas de los HuRLOs en comparación con los seguros tradicionales. Esta sección utiliza los resultados del trabajo de Ou-Yang y Doherty (2008).

#### **3.1 Ventajas**

- El asegurador no tiene riesgo en la operatoria  
La compañía aseguradora actúa como recolector de las primas asociadas con cada resultado posible y al finalizar, redistribuye los fondos entre los asegurados. Esto también contribuye a una reducción del riesgo de impago de la compañía de seguros pues su ganancia es transaccional y simplemente debe redistribuir un fondo mutual que está bajo su custodia.
- No es necesario contar con una contraparte directa  
En el mercado tradicional de derivados catastróficos, el interesado en una cobertura tiene que encontrar una entidad dispuesta a asumir el riesgo opuesto al que se pretende cubrir. En el mercado de los HuRLOs, cualquiera puede comprar una prima para una región sin esperar que algún otro participante venda su participación.
- En caso de catástrofe extrema, los HurLos otorgan un pago mayor que los seguros tradicionales.

Cuando un huracán llega precedido de una predicción con alta probabilidad, la prima es mayor y el pago es mayor en comparación con los seguros tradicionales.

### 3.2 Desventajas

- Las compras de los participantes son insuficientes  
Es posible que no exista incentivo para la compra de HuRLOs o esta sea insuficiente. Si eso ocurre, los precios no reflejarán las probabilidades objetivas que suministra el servicio meteorológico.
- Los participantes no conocen con antelación el pago en caso de siniestro.  
Los posibles pagos son determinados por la distribución final del total de primas compradas, que no se revela hasta el final del período. Esto es claramente diferente en el caso de los seguros tradicionales.
- Los eventos deben ser mutuamente exclusivos

En la práctica es de fundamental importancia para definir los eventos asegurados, que éstos se excluyan mutuamente. Esto trae inconvenientes, pues si un huracán golpea dos o más zonas, el pago se realiza solamente a los poseedores de HuRLOs de la primera región que recibe el huracán.

### Conclusiones

Si bien los HuRLOs pueden ser un interesante complemento a los seguros de inundaciones, su alcance es limitado. Asimismo, lo incierto del pago en caso de siniestro hace complicado su compra por parte de particulares.

Por otro lado, creemos que existe una oportunidad para las compañías de seguros de utilizar esta herramienta para reducir la necesidad de reaseguro, aunque esto debe ser convenientemente evaluado por el responsable de la gestión de riesgo de la compañía.

Nuestro plan de trabajo en el marco de nuestro programa de investigación relacionado con el impacto económico y financiero del cambio global es analizar primeramente la convergencia del modelo de precio utilizado a los valores de las probabilidades objetivas medidas por el servicio meteorológico. Asimismo, es de vital importancia analizar si una innovación similar puede ser propuesta para cobertura de catástrofes en nuestro país.

## Referencias

- Baron, K & Lange, J 2007, *Parimutuel applications in finance: new markets for new risks*, Palgrave Macmillan.
- Chicago Mercantile Exchange 2008, *Contract Specifications – CME Rulebook Chapter 438D*, viewed 13 de Abril 2009, <<http://weatherrisksolutions.com/pdf/Chapter%20438D.pdf>>.
- Ottaviani, M & Sørensen, PN 2005, ‘Parimutuel versus fixed-odds markets’, in Unpublished Paper: Bondon Business School, University of Copenhagen.
- Ou-Yang, C & Doherty, N 2008, ‘Pari-mutuel Insurance for Hedging against Catastrophic Risks’, in The Wharton School, University of Pennsylvania, Mimeo.
- Weather Risk Solutions 2008a, *How Are HuRLOs Priced?*, viewed 13 de Abril 2009, <[http://weatherrisksolutions.com/pdf/HuRLO%20Pricing\\_080917.pdf](http://weatherrisksolutions.com/pdf/HuRLO%20Pricing_080917.pdf)>.
- 2008b, *HuRLOs: Definitions & Methodology*, viewed 13 de Abril 2009, <[http://weatherrisksolutions.com/pdf/Definitions%20&%20Methodology\\_080818r.pdf](http://weatherrisksolutions.com/pdf/Definitions%20&%20Methodology_080818r.pdf)>.

## 2.2 Estructura temporal de la tasa de interés en la crisis argentina 2001: un modelo analítico y su calibración

María Teresa Casparri • María José Bianco • Javier García Fronti

### Resumen

Durante el año 2001 en Argentina hubo un fuerte incremento en la tasa de interés de los bonos gubernamentales y en la estructura temporal de los mismos. En el presente trabajo se expone un modelo matemático que busca dar cuenta de estos procesos, introduciendo la tasa de interés de los bonos como función del shock externo, fecha de vencimiento del bono y el momento de devaluación previsto por el mercado. Esta modelización nos lleva a la *ecuación del calor*, logrando una clara aplicación de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales a la economía.

**Palabras clave:** Tasa de interés, crisis financieras.

### Introducción

El primer capítulo describe el modelo a utilizar, el modelo de Ozkan y Sutherland (1998) para modelizar la tasa de interés de un bono cero cupón, como una función del nivel de un shock externo sobre la demanda y del vencimiento del mismo bajo el supuesto de una pequeña economía abierta. Inicialmente se describe como impactan sobre la demanda el shock externo, la tasa de interés y el tipo de cambio, para lo cual se define un índice de presión sobre la demanda “ $y$ ”. Luego se describe el comportamiento de los inversores, que, sabiendo el momento de devaluación, vuelcan esa información haciendo crecer la tasa de interés en la medida que el país se acerca a esa situación. La descripción de este contexto más el supuesto de que la tasa de interés hoy descuenta la esperanza de devaluación futura, permite expresar

una ecuación diferencial parcial que luego de resulta nos lleva a encontrar la fórmula de la tasa de interés en el presente modelo.

El segundo capítulo muestra la calibración del modelo para dos fechas durante la crisis financiera de Argentina.

## 1. El modelo

En este capítulo describiremos el modelo expuesto por Ozkan y Sutherland (1998)

### *Presión sobre la demanda:*

En esta interpretación, la presión sobre la demanda ( $y$ ) depende de la tasa de interés, el tipo de cambio y el shock externo de la demanda, como se indica en la siguiente expresión:

$$y = -\gamma \cdot i_{\tau} + \eta \cdot s - \beta \cdot \varepsilon \quad (1)$$

donde:

$y$  : presión de la demanda

$\gamma$  : impacto de la tasa de interés sobre la demanda

$i_{\tau}$  : tasa de interés de un bono con vencimiento  $\tau$  (medido en años)

$\eta$  : impacto del tipo de cambio sobre la demanda

$s$  : logaritmo del tipo de cambio

$\beta$  : impacto del shock externo sobre la demanda

$\varepsilon$  : shock externo con  $d\varepsilon = \sigma dw$  donde  $w$  es un movimiento Browniano estándar

Esta variable  $\varepsilon$  causa desviaciones en la demanda en dos sentidos. En forma directa por el factor  $\beta$  y en forma indirecta por el valor de la tasa de interés.

## ***El gobierno***

El objetivo del gobierno es mantener el índice de la presión de la demanda en los alrededores de cero, con el objeto de no perjudicar el nivel de actividad en forma excesiva.

El modelo asume que el gobierno sólo tiene dos posibles opciones de cambio: un régimen de cambio fijo o uno de cambio flotante. En este contexto, hay que seleccionar el *punto disparador*, es decir, el momento en el que se va a devaluar.

Para resolver el modelo es crucial distinguir cuál es para el sector privado el *punto de devaluación esperado* y cuál es la elección del gobierno.

## ***Comportamiento de la tasa de interés***

Describiremos ahora el comportamiento de la tasa de interés como función de las otras variables del modelo. En este modelo dos factores son los que afectan a la tasa de interés: la variabilidad en el tipo de cambio que se produce cuando un país deja el régimen de cambio fijo y la probabilidad de alcanzar el punto de devaluación.

Definimos como la tasa de interés  $i_\tau$ , para cada vencimiento  $\tau$ , con la siguiente expresión, donde  $E_t$  es la esperanza condicionada a la información en el tiempo  $t$ ,  $i^*$  es la tasa de interés mundial de referencia y  $t$  es la cantidad de años:

$$i_\tau = \frac{E_t[s(t + \tau) - s(t)]}{\tau} + i^*$$

Si asumimos que la función  $s$  está fijada inicialmente en cero (es decir,  $s(t) = s = 0$ ) y que la tasa de interés extranjera es también cero, la expresión anterior nos queda:

$$i_\tau = \frac{E_t[s(t + \tau)]}{\tau} \quad (2)$$

Como muestra la ecuación (2) la tasa de interés refleja la expectativa de variación en el tipo de cambio.

Para encontrar la tasa de interés bajo el régimen de cambio fijo es necesario encontrar el valor de la tasa del mercado para un régimen de cambio flotante y cómo esto depende del shock externo. De hecho, la estabilidad del índice de la presión de la demanda en cero implica que la tasa de interés debe ser cero. Luego, despejando de la ecuación (1) nos queda:

$$\left. \begin{array}{l} y = -\gamma \cdot i_{\tau} + \eta \cdot s - \beta \cdot \varepsilon \\ y = 0 \quad \wedge \quad i_{\tau} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = \eta \cdot s - \beta \cdot \varepsilon \Rightarrow s = \frac{\beta}{\eta} \varepsilon$$

Por lo tanto, la expectativa de variación en el tipo de cambio dada por la ecuación (2) es una función del shock externo ( $\varepsilon$ ), de la fecha de vencimiento ( $\tau$ ) y del punto de devaluación esperado por los inversores ( $\varepsilon_e$ ). Esto se resume en la siguiente ecuación:

$$i_{\tau} = \frac{E_t[s(t+\tau)]}{\tau} = \frac{h(\varepsilon, \tau, \varepsilon_e)}{\tau} \quad (3)$$

Asumiendo que el punto de devaluación esperado por los inversores ( $\varepsilon_e$ ) es conocido, según Svensson (1991), la tasa de interés bajo el régimen de cambio fijo satisface la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales (*ecuación del calor*):

$$h_{\tau}(\varepsilon, \tau) = \frac{\sigma^2}{2} h_{\varepsilon}(\varepsilon, \tau) \quad (4)$$

Sujeta a las siguientes condiciones de contorno:

- a) Con fecha de vencimiento cero,  $h$  es igual a cero para todo valor de shock externo, es decir:

$$h(\varepsilon, 0) = 0 \quad \varepsilon_e^l \leq \varepsilon \leq \varepsilon_e^u$$

- b) Para cada uno de los puntos de devaluación esperado por los inver-

sores la esperanza de la tasa del mercado debe ser igual al valor de la tasa en el régimen de cambio flotante, es decir:

$$h(\varepsilon_e^l, \tau) = \frac{\beta}{\eta} \varepsilon_e^l \quad 0 \leq \tau \leq \infty$$

$$h(\varepsilon_e^u, \tau) = \frac{\beta}{\eta} \varepsilon_e^u \quad 0 \leq \tau \leq \infty$$

Seguindo a Guenter and Lee (1988), la solución de la ecuación anterior está dada por:

$$h(\varepsilon, \tau) = \frac{\beta}{\eta} \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \exp\left(\frac{\sigma^2 n^2 \pi^2 \tau}{2(\varepsilon_e^u - \varepsilon_e^l)}\right) \sin\left(\frac{n \pi (\varepsilon - \varepsilon_e^l)}{\varepsilon_e^u - \varepsilon_e^l}\right) \quad (5)$$

donde:

$$\varphi_n = -\frac{2\beta}{\eta n \pi} \left( \frac{(\varepsilon_e^u - \varepsilon_e^l)}{n \pi} \sin(n\pi) - \varepsilon_e^u \cos(n\pi) + \varepsilon_e^l \right)$$

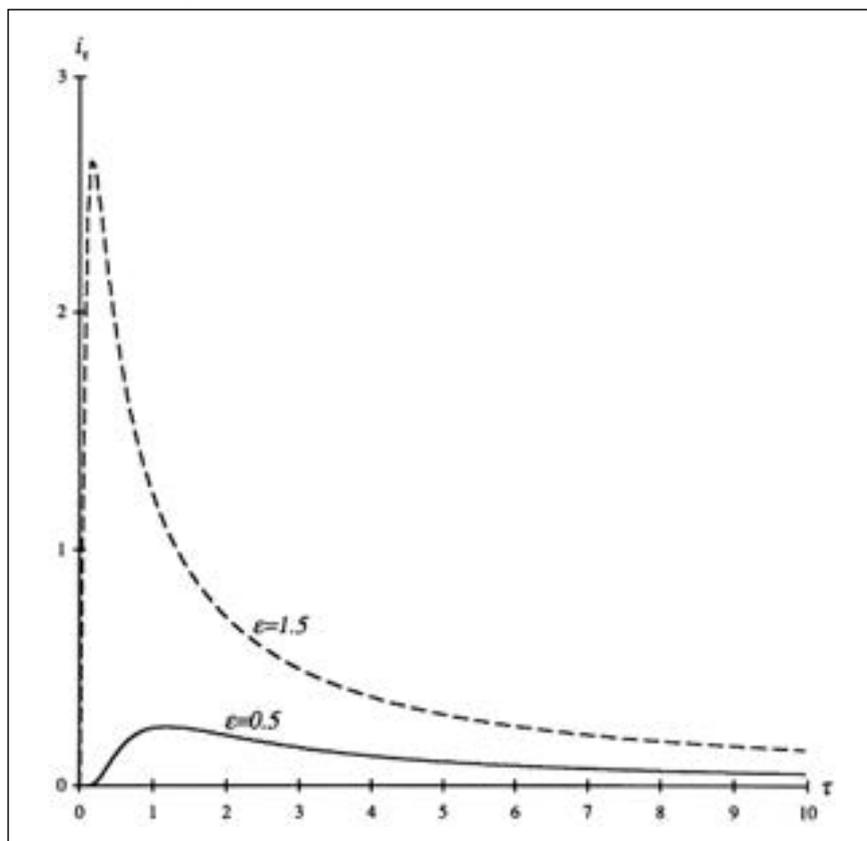
Reemplazando (5) en (3) obtenemos la solución de la tasa de interés para un punto de devaluación esperado por los inversores dado.

## 2. Aplicación del modelo

### *Interpretación gráfica del comportamiento de la tasa de interés*

Como ejemplo en los siguientes gráficos, hechos en Matlab, se muestra el comportamiento de la tasa de interés como función del shock externo y de la fecha de vencimiento.

Figure 1. Estructura de los términos de la tasa de interés



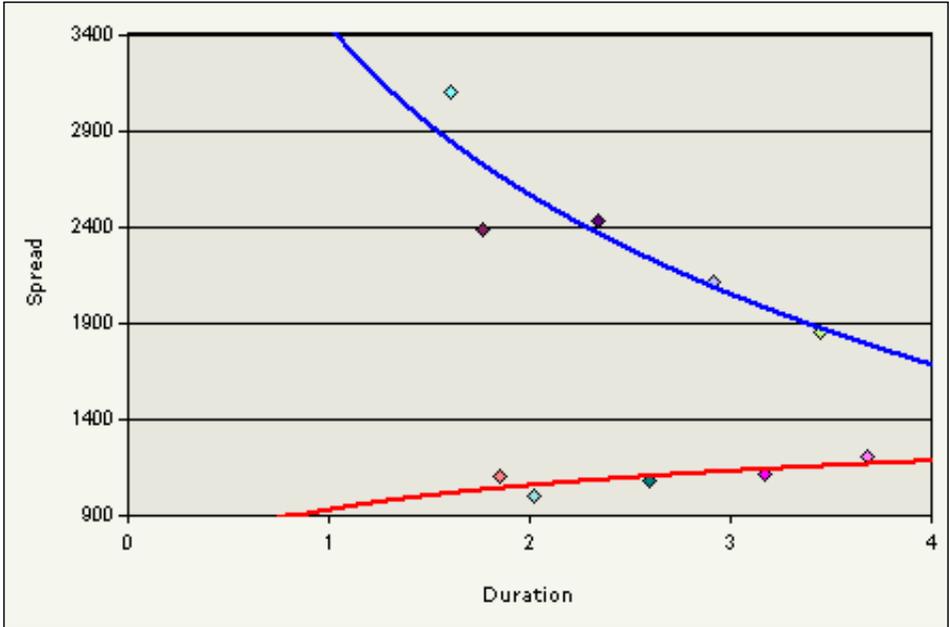
Fuente: Ozkan and Sutherland, 1998.

Observando la Figura 1 se pueden sacar dos conclusiones. En primer lugar, que a medida que el nivel del shock externo crece, la tasa de interés también crece sin importar el valor del vencimiento. En segundo lugar, siguiendo a Sutherland (1997), es un gráfico que corresponde a una crisis debida a las variables fundamentales de la economía.

## Calibración

En la presente sección nos proponemos utilizar el modelo para explicar el cambio de forma en la estructura temporal de tasa de interés en Argentina.

El 31.3.2001 la curva de los Bontes nos mostraba una economía que no había entrado en la fase final de la crisis, mientras que Julio 2001 claramente muestra una curva descendente característica de una economía que esta sufriendo una crisis financiera y se acerca al default.



Título	31/03/2001		31/07/2001	
	Spread	Duration	Spread	Duration
BONTE 03	1.000	2,03	2.391	1,77
BONTE 04	1.082	2,59	2.430	2,34
BONTE 05	1.115	3,17	2.118	2,91
BONTE 03- t. fija	1.106	1,86	3.098	1,60
BONTE 06	1.202	3,68	1.857	3,44

Fuente: [www.portfoliopersonal.com.ar](http://www.portfoliopersonal.com.ar)

Nuestro modelo nos permite deducir la siguiente expresión para el armado de la estructura temporal de tasa de interés (bajo el supuesto de que los límites de devaluación son simétricos):

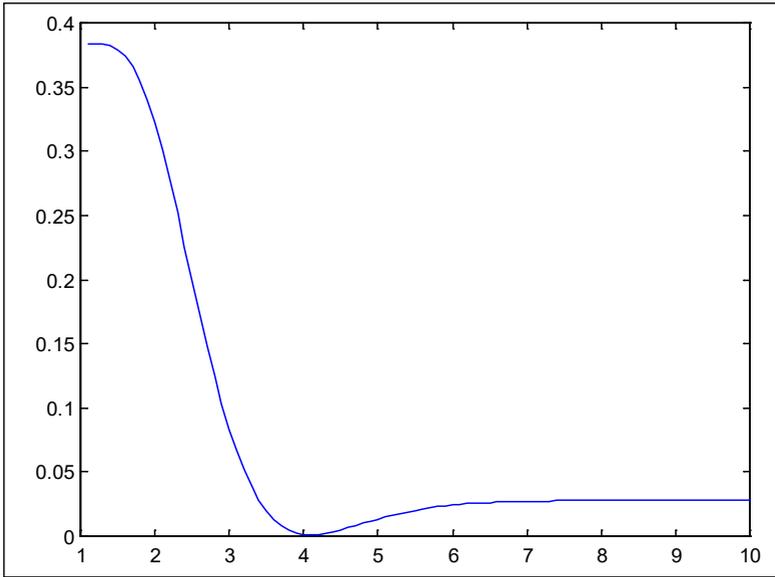
$$i(\tau, \varepsilon, \varepsilon_e^l) = \frac{\beta}{\eta} \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2\beta}{\eta n \pi} \left( \frac{2\varepsilon_e^l}{n\pi} \sin(n\pi) + \varepsilon_e^l \cos(n\pi) + \varepsilon_e^l \right) \exp\left(\frac{\sigma^2 n^2 \pi^2 \tau}{4 \varepsilon_e^l}\right) \sin\left(\frac{n \pi (\varepsilon - \varepsilon_e^l)}{4 \varepsilon_e^l}\right) \quad (6)$$

Considerando que no hubo ningún shock externo entre esas fechas, establecemos el shock externo de la demanda en un valor arbitrario 1 y una volatilidad asociada de 10%. Asimismo, con los datos de Diciembre se calibra para obtener los parámetros  $\varepsilon_e^l$  del modelo para Diciembre 2000. Por último se calibra para Marzo 2001 suponiendo que el único parámetro que puede modificarse es  $\varepsilon_e^l$ , buscando el valor del límite de devaluación que minimiza el error cuadrático.

### Calibración Marzo 2001

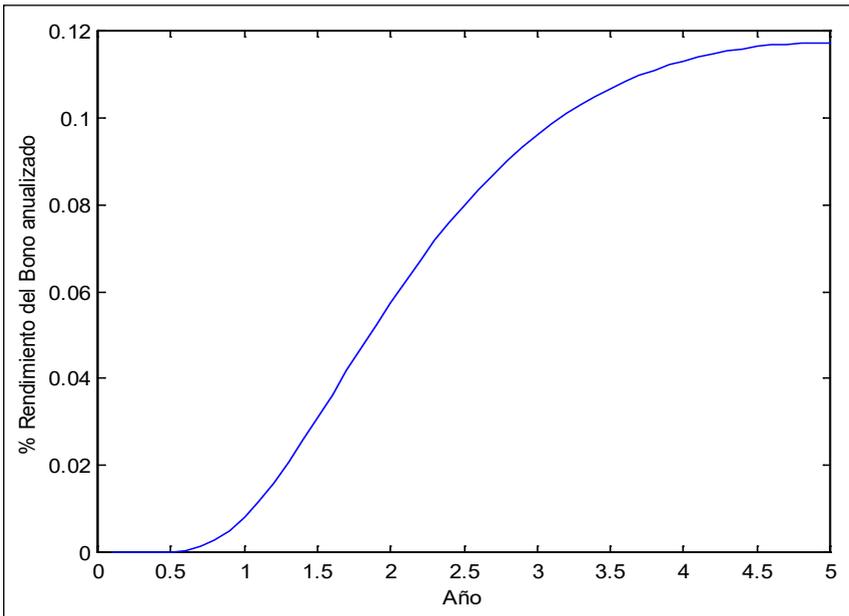
31/03/2001	
Spread	Duration
1.000	2,03
1.082	2,59
1.115	3,17
1.106	1,86
1.202	3,68

El gráfico del error cuadrático medio en función del valor del límite de devaluación es:



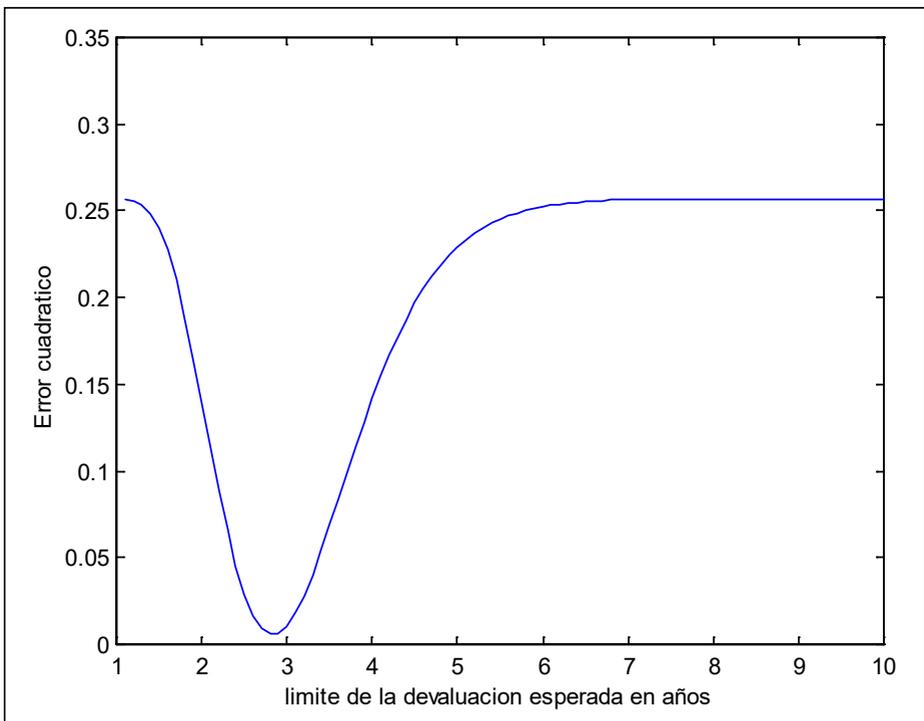
Encontrando un mínimo en  $\varepsilon_e^l = 4.1$  años

Por lo tanto la estructura temporal correspondiente a este limite es:  
(Graficando según ecuación 6)



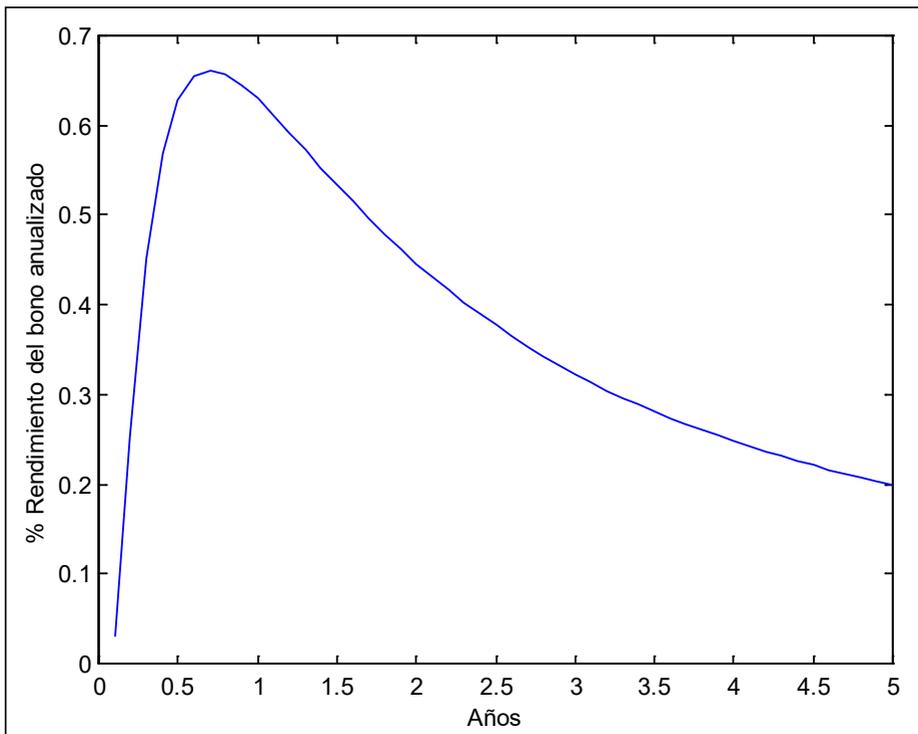
## Calibración Julio 2001

31/07/2001	
Spread	Duration
2.391	1,77
2.430	2,34
2.118	2,91
3.098	1,60
1.857	3,44



Encontrando un mínimo en  $\mathcal{E}_e^l = 2.8$  años

Por lo tanto la estructura temporal correspondiente a este límite es: (Gráfico según ecuación 6)



## Conclusiones

El presente trabajo permite explicar el paso de una situación de economía saludable a una economía en crisis. La desconfianza de los inversores, reflejada en el modelo por los límites de devaluación lleva a la economía del país al colapso.

## Referencias

- Dixit, A. (1993). *The Art of Smooth Pasting*. Chur: Harwood Academic.
- Dixit, A. and Pindyck, R.S. (1994). *Investment Under Uncertainty*. Princeton: Princeton University Press.
- Drazen, A. (1999). *Interest Rate defence against Speculative Attack under Asymmetric Information*, Mimeo, University of Maryland. Available on line <http://www.bsos.umd.edu/econ/Drazen/defense.pdf>
- Guenther, R. and Lee, J. (1988) . *Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations*. New Jersey: Prentice Hall.
- Ministry of economy (2001). *Informacion economica*, Ministerio de economia de Argentina, Available on line: <http://www2.mecon.gov.ar/infoeco/>
- Obstfeld, M. (1994). 'The logic of currency crises'. *Banque de France. Chaiers économiques et monétaires*, N 43, 189-213.
- Obstfeld, M. (1996). 'Models of currency crises with self-fulfilling features' *European economic review* , Vol 40, 1037-1047.
- Ozkan, G. and Sutherland A., (1995) 'Policy measures to avoid a currency crisis' *The Economic Journal*, Vol 105, No 429, 510-519
- Ozkan, G. and Sutherland, A. (1998). 'A currency crisis model with an optimising policymaker' *Journal of International Economics* Vol 44, 339-364.
- Smith, P. (2001). *Function Solve\_ode.m* Texas: Tech University. Available on line: [http://www.math.ttu.edu/~pwsmith/Solve\\_ode.htm](http://www.math.ttu.edu/~pwsmith/Solve_ode.htm)
- Sutherland, A. (1994) 'State and time-contingent switches of exchange rate regime'. *Journal of International Economics*. Vol 38, 361-374.
- Sutherland, A. (1997). 'Currency Crises and the term structure of interest rates' Working paper, York: University of York

## 2.3 Liquidity risk estimation using Fuzzy Measure Theory

*María Teresa Casparri • Sebastián Rey • Javier García Fronti*

### Abstract<sup>1</sup>

This paper develops and applies a Value-at-Risk model regarding prices fluctuations and potential market liquidity problems. Due to uncertainty of market liquidity in the future, the model includes Fuzzy Measure Theory. The first section of the paper presents some fundamental concepts of Fuzzy Measure Theory and Extreme Value Theory. The second section presents a “fuzzified” risk valuation model under the classical assumption of normal distribution for the investment returns; and, taking into consideration the Argentine financial crisis of 2001. The last section, presents the model under an Extreme Value Theory distribution replacing the previous normal assumption. Both alternatives are applied to a portfolio of REPSOL-YPF stocks so as to estimate the risk assumed by the holder.

**Keywords:** Liquidity risk, fuzzy measure, extreme value theory.

### Introduction

One of the most relevant issues in the risk analysis of the financial institutions’ investments is to determine the capital allocation to maintain its solvency and liquidity in adverse situations. The portfolio risk analysis is necessary for assuring the right selection of that capital to be allocated.

Each portfolio has a market risk. This risk is directly related to the losses that can be caused by adverse fluctuations of the portfolio asset prices. In this sense, it is necessary to construct a measure able to quantify the potential losses associated with that exposure.

<sup>1</sup> We are grateful to seminar participants at CMA (Universidad de Buenos Aires) and SIGEF 10TH Meeting (León, Spain). The authors are grateful to UBACyT E012 y E015 for support. Javier García-Fronti is grateful to the ESRC for financial support from The World Economic and Finance Research Programme and RES-165-25-0006. Responsibility for views expressed is our own.

The classical Value-at-Risk<sup>2</sup> measures the pure market risk; therefore, it does not bear some considerations. If a financial institution uses this classical framework to determine the quantity of capital to allocate in order to face its obligations with a certain level of confidence, then the institution does not take into account the partial or total portfolio liquidation consequences at the claim moment. To take into account these consequences is crucial because the number of assets to be sold in the market has an important influence in the price at which the transaction will be made. This influence is determined by the market liquidity at that moment. When these problems take place, the financial institution could have liquidity problems to cancel its obligations.

This paper develops and applies a Value-at-Risk model regarding prices fluctuations and potential market liquidity problems. Due to uncertainty of market liquidity in the future, the model includes Fuzzy Measure Theory<sup>3</sup>.

The first section of the paper presents some fundamental concepts of Fuzzy Measure Theory and Extreme Value Theory<sup>4</sup>. The second section presents a “fuzzified” risk valuation model under the classical assumption of normal distribution for the investment returns; and, taking into consideration the Argentinean financial crisis, also presents the model under an Extreme Value Theory distribution. Both alternatives are applied to a portfolio of *Repsol-YPF* stocks to estimate the risk assumed by the holder.

## 1. “Fuzzy” Measure and Extreme Value theories

This section of the paper presents some fundamental concepts of Fuzzy Measure Theory and Extreme Value Theory.

### *“Fuzzy” Measure Theory*

The Fuzzy Measure Theory is a generalization of the classical Measure Theory. The first one changes the additivity assumption and replaces it by

<sup>2</sup> See Jorion (2001).

<sup>3</sup> See Wang and Klir (1992).

<sup>4</sup> See Embrechts, Kluppelberg, Mikosch (1997).

two weaker ones: monotonicity and semicontinuity.

When the probabilities distribution function is known, risk situations take place. Otherwise, the risk becomes into uncertainty. When uncertainty arises, a fuzzy measures can be constructed:

$$g_{\lambda}(v) = \frac{1 - F_V(v)}{1 + \lambda \cdot F_V(v)} \quad ,$$

where  $\lambda \in [0, \infty)$  is an indicator of uncertainty. Given  $\lambda$ , there exists a one-to-one relationship between a measure and a probability distribution function. Associated to each value of  $\lambda$ , there exists a dual value  $\lambda^* = -1/(1 + \lambda)$  (with  $\lambda^* \in [-1, 0)$ ) such that it defines a set of probability distribution functions:

$$\Gamma(F, \lambda) = \{P : g_{\lambda}(v) \leq F_V(v) \leq g_{\lambda^*}(v)\}$$

This set limits the values of the possible distribution functions in uncertainty cases and propose probability intervals.

In the pure risk situations, the known probability distribution function is the only element of the set mentioned below. In this way, the classical Measure Theory is a particular case of this theory.

### ***Extreme Value Theory***

The Extreme Value Theory studies and models a random variable distribution tail. This theory determines an excess probability distribution beyond a threshold. This distribution can be expressed as:

$$F_u(y) = P(X - u \leq y / X > u) \quad ,$$

where  $u$  is the threshold.

A theorem developed by Extreme Value Theory says that the probability distribution function of the values beyond the threshold is well approximated by a Pareto's function, as the threshold grows to infinity. The Pareto's function is defined as:

$$G_{\xi, \sigma}^{\xi}(x) = 1 - \left( 1 + \frac{\xi \cdot (x - u)}{\sigma} \right)^{-1/\xi},$$

The selection of  $u$  is an important issue. There exists a trade-off between the selection of a high value and a low value. If it is too high, then the sample that will be used to estimate the parameters is too small. Otherwise, if it is too low, then the approximation of the distribution is poor. It is difficult to find the equilibrium and there is not an objective way to find that value. The selection of the threshold value is an Extreme Value Theory field.

## 2. Liquidity risk estimation. Application to a Repsol-YPF's shares portfolio

In this section the methodology applied will be described, starting from a classical analysis and introducing, gradually, some characteristics of the financial market's reality. For practical proposes of the description, every step is presented with an application of an Argentinean financial market case. For this, a portfolio compounded by a financial asset is analyzed. This portfolio, during a period, is exposure to a price fluctuation risk. Moreover, there exists a risk related to the investment asset liquidation. This latter risk can affect the institution's liquidity to carry out its obligations.

In this way, it is analyzed a portfolio compounded by a "Repsol YPF" stock, this asset is trading in the Argentinean financial market. To the application purposes, the portfolio exposure period is one day. This means that once that length of time is achieved, the institution plans to cancel part of its obligations.

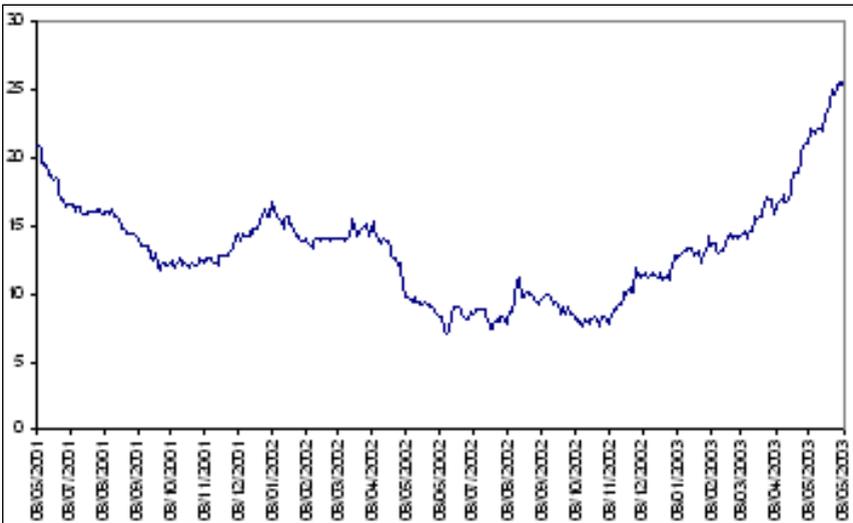
At the beginning, it is considered a portfolio with only one unit of the stock. Later, the consequences of the increment of the units of the stock are taking into consideration. This is not trivial because that increment affects, depending on the circumstances, to the quantity of assets to be liquidated, and this latter has an important influence in the price at which the transaction will be made, and in the market ability to absorb those assets.

### *Description and analysis of the sample*

The initial point of the estimation relates to the sample to be used. This sample is the prices asset series,  $\{S_t\}$  ( $t=1,2,\dots,n$ ), compounded by  $n$  elements. In the example, the “Repsol YPF” sample goes from 8 June of 2001 to 9 June of 2003. In this way, the sample has 497 elements, those can be seen in Graphic 2.1.

Because the aim is to quantify a potential loss, the sample of prices has to be transformed into a sample of relative losses (or negative returns) in each exposure period,  $\{L_t\}$ .

It is important to make two comments about some characteristics of the new generated sample. First, it can be observed that some elements are negative values. Those values must be interpreted as earnings (positive returns). Second, each element of the new sample is representative of partial relative losses. The fact that they are not considered as total relative losses is because they are calculated with the market prices of the original sample and does not consider the real price at which the liquidation would be made in the case of the portfolio liquidation. This is very important and gives information about the kind of errors that can be made if it is considered no more than the asset prices fluctuations caused only by market risk.



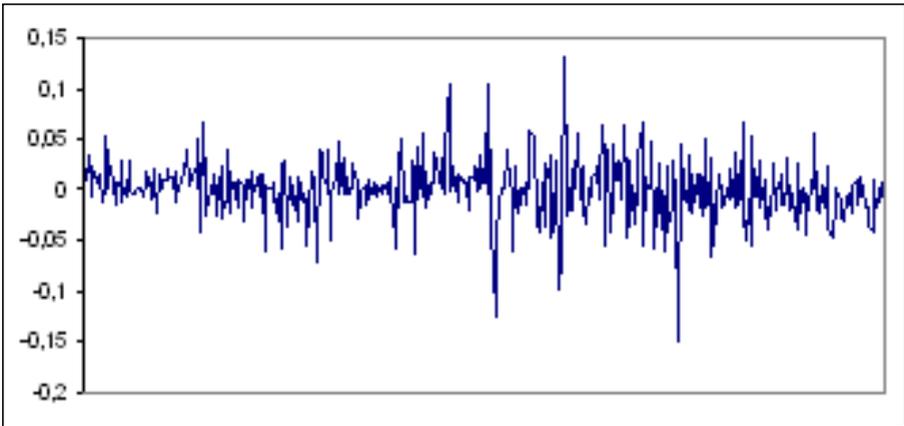
**Graphic 2.1.** Sample of “Repsol-YPF” prices, from 06/08/2001 to 06/09/2003.

The relative loss (or the negative return) variable is defined as:

$$L_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} - \frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t} = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \ln \left( \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right),$$

where  $\Delta t$  is the proportion that represents the exposure period length over a year. Using the limits properties in the relative loss variable, it is assuming that  $\Delta t$  tends to zero. In the “Repsol YPF” case  $\Delta t = \frac{1}{250} = 0,004$ .

As soon as the sample is transformed into an appropriate one, a relative loss probability distribution function has to be obtained. Regarding the transformation, the new sample is compounded by  $n-1$  elements. In the “Repsol YPF” case the sample is compounded by 496 elements. Those relative losses can be observed in the Graphic 2.2.



**Graphic 2.2.** Sample of the losses of “Repsol-YPF” portfolio, from 06/08/2001 to 06/09/2003.

As a first approximation, the empirical distribution function of the variable  $L$  is constructed. For this, the elements of the sample,  $\{L_t\}$ , must be ordered in an ascendant way:  $L^i > L^j \Leftrightarrow i > j$ , with  $j, i = 1, 2, \dots, n-1$  and  $j \neq i$ .

In this sense, it is defined a function that assign a cumulate probability value to each element of the sample. This function is:

$$F_{n-1}(L^i) = \frac{i}{n-1} \quad (i=1, 2, \dots, n-1).$$

Because the sample space of the variable to be analyzed is wider than the empirical variable sample space, it is assumed that the density between each element of the sample is uniform. Considering this, the empirical distribution can be expressed as:

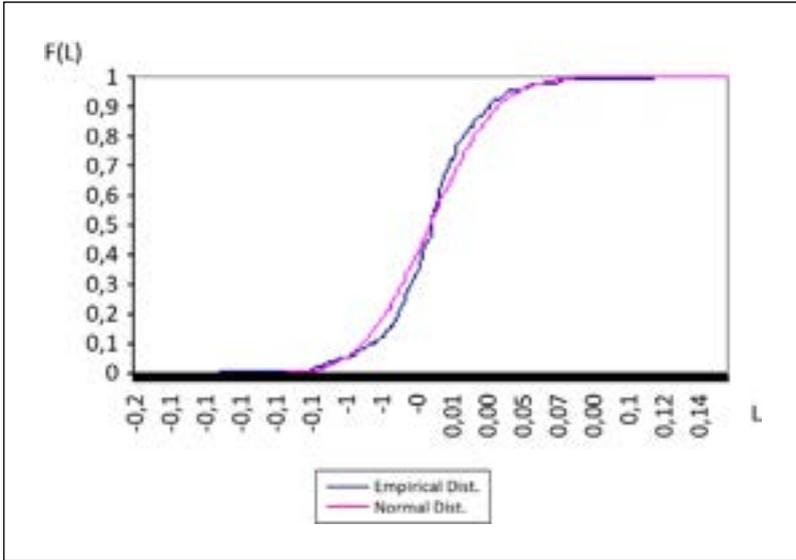
$$F_{n-1}^*(L) = \begin{cases} \frac{(L-L_{MIN})}{(n-1) \cdot (L^1 - L_{MIN})} & \text{if } L_{MIN} \leq L < L^1 \\ \frac{1}{n-1} \cdot \left[ i + \frac{(L-L^i)}{(L^{i+1} - L^i)} \right] & \text{if } L^i \leq L < L^{i+1} \text{ (with } i=1, 2, \dots, n-2) \\ 1 & \text{if } L = L^{n-1} \end{cases}$$

where, respectively,  $L_{MIN}$  and  $L^{n-1}$  are the minimum and the maximum value that the variable can assume.

### ***Parametrical adjustment using Normal distribution***

To get analytical convenience, the next step is to find a parametrical probability distribution function that represents the behavior of the variable  $L$ . It is worth to say that representing these real-world phenomena using parametrical functions is subject to some errors. In this way, it is crucial to be aware of the right selection of the best parametrical function to avoid this kind of errors.

As a classical view, the criterion selection of the distribution function is based on three assumptions about the behavior of the financial markets. The first is that movement prices are stochastically independent in time. The second is that the movement in the prices arises when the information set is modified and there is a constant incorporation of new information in that set. And firth, the process analyzed is stationary.



**Graphic 2.3.** Normal distribution adjustment

Assuming that the movement prices set up a sum of a huge number of independent and identical distributed random variables (the reaction of the traders due to the incorporation of new information) and using the Central Limit Theorem, the probability distribution of  $L$  tends to a Normal distribution defined as:

$$Normal F_L(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} dy,$$

where  $-\infty < x < \infty$ .

The estimation of the parameters  $\mu$  and  $\sigma$  is made using Maximum Likelihood method, taking the value of the parameters that make maximum the function:

$$Normal l(\mu, \sigma^2 | L) = -\frac{n-1}{2} \cdot \ln(2 \cdot \pi) - \frac{n-1}{2} \cdot \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2 \cdot \sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (L^i - \mu)^2.$$

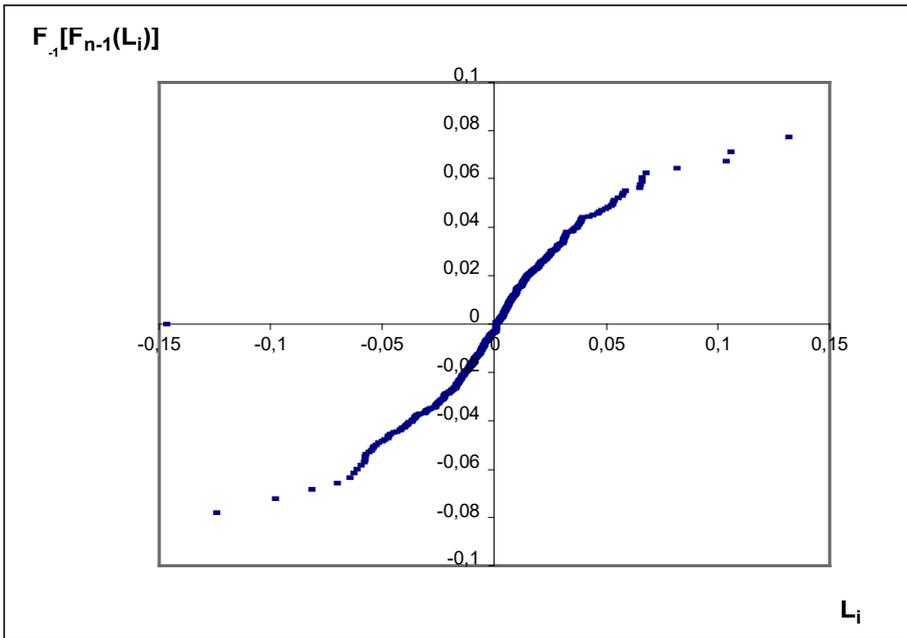
The estimated parameters are observed in Table 2.1 and the adjustment under Normal distribution with respect to the empirical distribution can be seen in Graphic 2.3.

$\mu$	-0,00041368
$\sigma$	0,02704855

**Table 2.1.** Parameters estimated.

### ***Contrasting Normal distribution assumption with the market***

There exists a problem at using the Normal distribution: in the market is observed that the financial relative losses present some characteristics that diverge from the results that are obtained under that hypothesis. The market reality shows that the value of empirical relative losses situated away from the mean occurs with more frequency than the frequency that is assigned by the Normal distribution. This fact is much more likely in the emergent financial markets, in which the extreme risks are larger. This phenomenon can be seen, in the case of “Repsol YPF”, in a graphic such as the QQ-Plot (Graphic 2.4) in which the percentiles of a parametrical adjusted (Normal distribution) and the percentiles of an empirical distribution are contrasted. That graphic is constructed by the ordered pares  $\left\{ L^i ; {}^{Normal} F_L^{-1} \left( F_{n-1} \left( L^i \right) \right) \right\}$  (with  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ). In the case in which an empirical function is well adjusted by a parametrical function, the graphic takes the form of a 45° line. In the graphic, it can be observed the “S” shape. This is a typical characteristic of the financial relative losses. This shows the problems that can be raised if the Normal distribution is used to explain financial facts.



**Graphic 2.4.** QQ-Plot. Contrast between the percentiles of a Normal distribution adjustment and the percentiles of the empirical distribution.

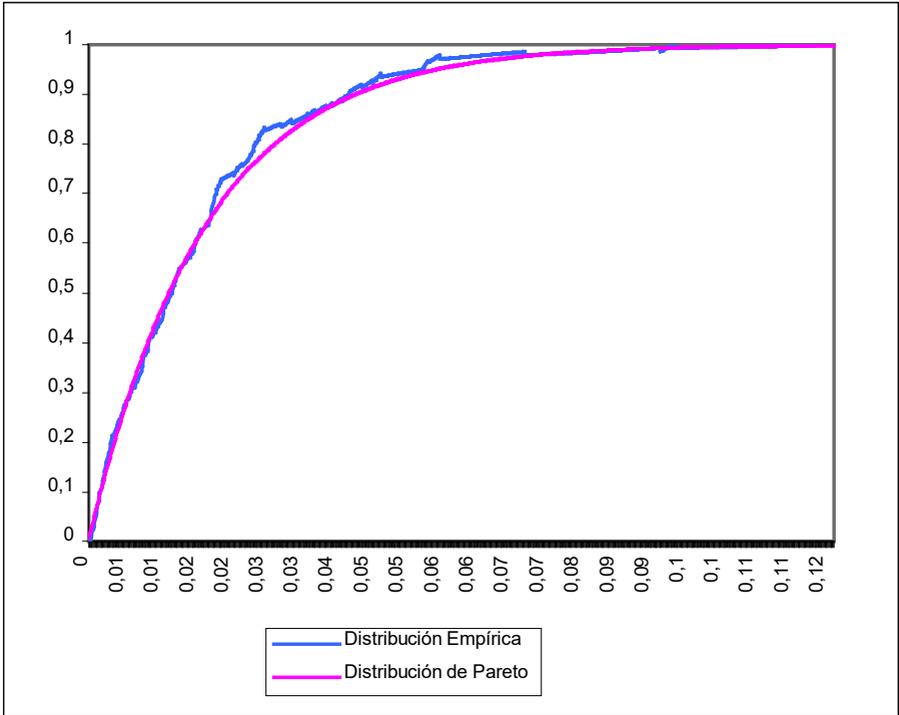
### *Parametrical adjustment using Extreme Value Theory*

Due to the imperfections of the Normal distribution adjustment, it is necessary to use an alternative method that gives better results, minimizing the errors that can be made under the use of a hypothesis far to the reality. For this reason, the alternative is the use of the Extreme Value Theory.

One of the most important results of Extreme Value Theory is an approximation theorem that was enunciated in the first section of this paper. In this way, it is necessary to determine the threshold,  $u$ , where the probability distribution of the excess values beyond it, can be well approximated by a Pareto's distribution. That threshold is determined by techniques that belong to this theory. In the "Repsol YPF" case, the threshold is 0,01.

In this sense, the parameters are obtained by the Maximum Likelihood method. The parameters are such that make maximum the function:

$$E.V.T. l(\xi, \sigma | L) = -(n-1) \cdot \ln(\xi) + (n-1) \cdot \frac{1}{\xi} \cdot \ln\left(\frac{\sigma}{\xi}\right) - \left(\frac{1+\xi}{\xi}\right) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \ln\left(\frac{\xi \cdot L^i - \sigma}{\xi}\right)$$



**Graphic 2.5.** Pareto’s distribution adjustment with respect to the empirical distribution.

The estimated parameters are shown in the Table 2.2 and the adjustment can be seen in Graphic 2.5.

$\sigma$	0,01880347
$\xi$	1,1465E-07

**Table 2.2.** Pareto’s function parameters

### *The classical Value-at-Risk calculation*

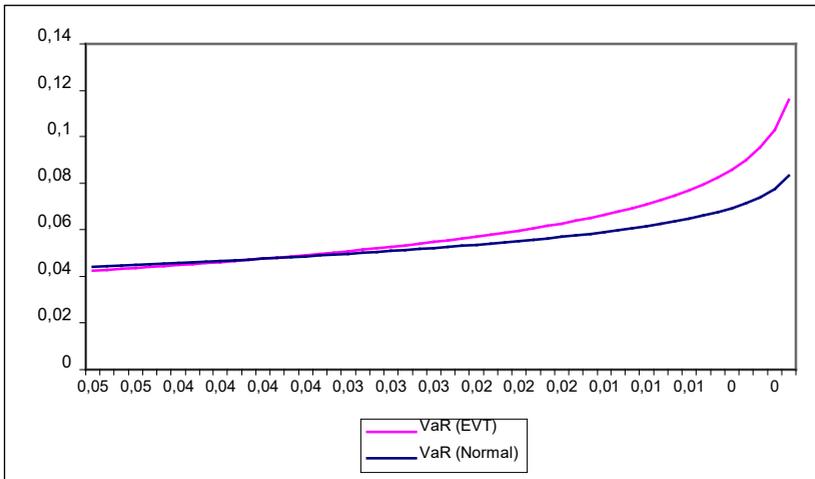
Once the adjustments of the two distributions are made it is necessary to make the Value-at-Risk calculation in order to determine the capital allocation. As it was mentioned, the Value-at-Risk (VaR) measures the maximum probable partial relative loss of the portfolio during an exposure period and under a level of significance:

$$\Pr[L \leq VaR] = \alpha,$$

where  $\alpha$  is the level of significance of the VaR.

$\alpha$	<i>EVT VaR</i>	<i>Normal VaR</i>
0,05	0,042410233	0,044077218
0,04	0,046606107	0,046939823
0,03	0,052015529	0,05045903
0,02	0,059639682	0,055137208
0,01	0,072673258	0,062510628

**Table 2.3.** *Normal VaR* and *EVT VaR* for different  $\alpha$ .



**Graphic 2.6.** *Normal VaR* and *EVT VaR* for different  $\alpha$ .

The Graphic 2.6 shows the differences between  $^{Normal}VaR$  (Normal distribution) and  $^{EVT}VaR$  (Pareto's distribution). Table 2.3 summarized this result.

In the graphic can be seen that both Value-at-Risk are similar for high values of  $\alpha$ . This is explained because the Normal distribution assumption gives a good adjustment for the values of  $L$  near to the mean. In contrast, it can be appreciated the divergence of both Value-at-Risk calculated for lower values of  $\alpha$ . This fact shows the sub estimation of the portfolio market risk under the normal distribution assumption.

### 3. Value-at-Risk calculation considering the liquidity risk

Until here it has been made an analysis of a portfolio risks without taking into account the consequences of the investment liquidation. As mentioned before, the inclusion of these consequences is extremely important because this risk could make the financial institution to have liquidity problems at the time to carry out its obligations. It is worth to say that until this point it was considered the analysis of an investment compounded by one monetary unit of a stock, for this reason the inclusion of the liquidity risk had not much sense. The question now is: how to improve the Value-at-Risk model to include the liquidity risk of the institution when the portfolio number of assets is significant? Due to the uncertainty of the ability of the market to absorb the stocks to be liquidated, to answer the question it has to be considered some techniques that takes into account that uncertainty. For this reason the Fuzzy Measure Theory is used.

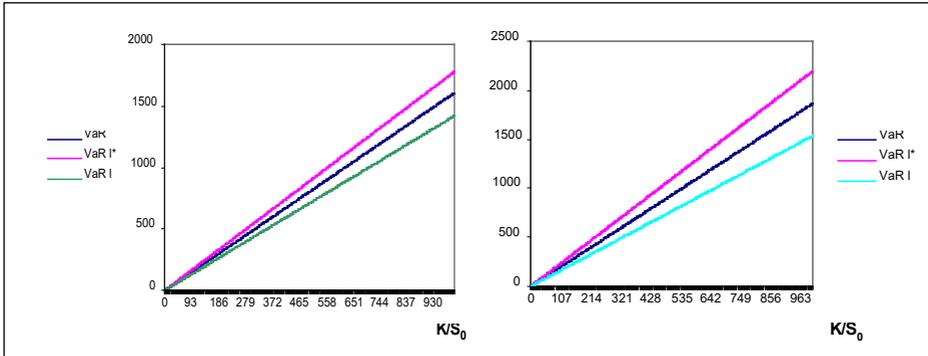
In this way, it is considered that each event is not associated to a unique probability. Each event is associated to a probability interval. So, when the portfolio is liquidated, the realization of each loss,  $x$ , is associated with a set of probability defined in the first section.

For all this, given a level of significance, the Value-at-Risk,  $VaR_{\frac{K}{S_0}}$ , regarding market risk and liquidity risk estimations, for an investment compounded by  $K$  monetary units is contained in the set:

$$V(F_L, \lambda) = \left\{ VaR_{\frac{K}{S_0}}^{\lambda} = \frac{K}{S_0} \cdot VaR^{\lambda} \leq VaR_{\frac{K}{S_0}}^{\lambda=0} = \frac{K}{S_0} \cdot VaR^{\lambda=0} \leq VaR_{\frac{K}{S_0}}^{\lambda^*} = \frac{K}{S_0} \cdot VaR^{\lambda^*} \right\}$$

where  $VaR^{\lambda^*}$ ,  $VaR^{\lambda=0}$  and  $VaR^{\lambda}$  follow the next equations:

$$\alpha = g_{\lambda}(VaR^{\lambda}); \quad \alpha = g_{\lambda^*}(VaR^{\lambda^*}); \quad \alpha = 1 - F_L(VaR^{\lambda=0})$$



**Graphic 2.8.** Value-at-Risk intervals.

Normal distribution on the left, and Pareto's distribution on the right.

These calculations are shown in Graphic 2.8, where it can be seen the Value-at-Risk with respect to the number of assets of the portfolio, assuming both alternatives. For the calculation purposes the parameter  $\lambda$  takes the value of 1. The role of this parameter is crucial in the results of the portfolio Value-at-Risk. In this way, it is necessary to find some method to estimate it.

It is remarkable the increment of the Value-at-Risk amplitude interval as the portfolio number of assets grows. This fact has a reason: the greater number of assets, the more uncertainty of the liquidation price at the end of the exposure period.

Once the Value-at-Risk interval is constructed it must be determined which value included in the interval is the Value-at-Risk figure. Due to the uncertainty mentioned before, this figure is the upper limit of the interval. In this way, the capital to allocate will guarantee in an appropriate way the solvency and the liquidity of the financial institution.

## Conclusions

This paper develops a methodology that considers, in addition of the market risk of an investment, the liquidity risk of a financial institution. These risks can affect the carrying out of a financial institution 's obligations. As it was observed, the Extreme Value Theory is more appropriate than the classical (Normal) assumption to represent a portfolio market risk. Regarding the liquidity risk of the institution, it can be said that the Fuzzy Measure Theory represents a way determine the capital to allocate to reduce the impact of the consequences associated to this risk.

It is important to note that there is one aspect that represents an issue of futures research. This relates to the assumption of  $\lambda=1$ , during the paper. In this way, it is necessary to find some method capable to estimate this parameter, to get with the actual level of uncertainty regarding the liquidity risk.

## References

- Cherubini, U. (1997) «Fuzzy measures and asset prices: accounting for information ambiguity ». *Applied Mathematical Finance*, Vol. 4, No. 3, pp. 135-149.
- Cherubini, U. And Della Lunga, G. (2001) «Fuzzy Value-at-risk: Accounting for Market Liquidity ». *Economic Notes by Banca dei Paschi di Siena*. Vol. 30, No. 2, pp. 293-312.
- Cherubini, U. And Della Lunga, G. (2001) «Liquidity and credit risk» *Applied Mathematical Finance*, Vol. 8, No. 2, pp. 79 – 95.
- Daykin, C.; Pentikäinen, T. and Pesonen, M. (1993) *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman and Hall.
- Embrechts, P.; Kluppelberg, C. and Mikosch, T. (1997) *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance* . Springer, Berlin.

- Hull, J. (2003) *Options, Futures and Other Derivative*, Prentice Hall.
- Jorion, P. (2001) *Value at Risk*, Mc Graw–Hill. New York.
- Kellezi, E And Gilli, M. (2000) «Extreme Value Theory for Tail-Related Risk Measures ». *Computational Finance 2000 conference*. London Business School.
- Landro, A. and Gonzáles, M. (1997) *El problema de la predicción en el mercado financiero*». Impresos Centro. Buenos Aires.
- Wang, Z. and Klir, G. (1992) *Fuzzy Measure Theory*, Plenum Press-New York and London.
- Younes, B. (2000) «Steps in Applying Extreme Value Theory to Finance ». *Working Paper*. Document de travail 2000-20.

## 2.4 | A currency crisis model with a policymaker who is completely committed to a fixed exchange regime

*María Teresa Casparri • Javier García Fronti<sup>1</sup>*

### Abstract

In Argentina, a peg with the dollar -established in 1991- produced good economic results during the first half of that decade. However, from 1997 onwards, the monetary policy (*Convertibilidad*) has been accompanied by a deep economic recession. Despite governmental attempts to keep the fixed exchange regime, external factors and high level of local interest rates forced the resignation of the policymaker in December 2001. Moreover, the new government immediately devalued the currency. This paper uses the Ozkan and Sutherland (1998) model to attempt to understand some aspect of the currency crisis in Argentina 2001.

**Keywords:** fixed exchange regime, monetary policy, policymaker

### Introduction

During the 1990s, the irruption and spread of currency crises have urged economists to develop new models to understand them and attempt their prevention. Particular national and regional cases have been the object of numerous analyses (such as Mexico 1995, Asia 1997, Argentina 1978, 1981 and 1995 – see for example, Sachs, Tornell and Velasco, 1996; Krugman, 1999; Choueiri and Kaminsky, 1999; Choueiri, 1999).

In this context, the Argentinean economic situation in 2001, which combined economic recession and fixed exchange regime, has drawn a particular

<sup>1</sup> Javier I. García Fronti specially thanks Marcus Miller for his permanent support and advice throughout the research process that has configured the central ground of this analysis

scenario that challenges previous models and explanations of currency crises. Moreover, this national case has particular international relevance for two main reasons. On the one hand, during the 1990s, the International Monetary Fund (IMF) has presented Argentina's monetary regime (the '*Convertibilidad*') as an example for other emergent markets. On the other hand, during the year 2000, the Argentinean bond market represented the 25% of the total of worldwide emergent bond markets (JP Morgan, 2000).

During the 1980s, Argentina presented a complex and changing economic situation, suffering from peaks of hyperinflation to lack of investors' confidence. At the beginning of the 1990s, the legal establishment of a new exchange rate regime ('*Convertibilidad*') inaugurated a decade where one peso was equal to one dollar. This regime immediately produced positive macro-economic effects such as the end of the hyperinflation process and the steadily economic growth for a period of 6 years. However, the 'miracle' of the '*Convertibilidad*' was accompanied by negative long term economic and social consequences that were apparent from 1997 onwards.

Following Krugman (2001a), this paper assumes that, in 2001, the Argentinean high local interest rates have produced a deep economic recession and high and increasing levels of unemployment. In addition, Argentina had a completely committed policymaker to a fixed exchange regime who seemed to disregard the economic and social costs of the recession.

This work attempts to understand some aspects of the Argentinean currency crisis in 2001. To do so, the paper is organised into three chapters. The following gives an overview of the currency crises models. The next chapter describes the model proposed by Ozkan and Sutherland (1998). The last chapter offers some applications to the Argentinean context of 2001.

## 1. An overview of the currency crises models

The currency crises models could be classified into three main types: first, second and third generation. Following Agénor (2000a), first generation models focus on certain 'inconsistent fundamentals' as explanation of currency crises, while the second-generation ones concentrate on the behaviour of rational policymakers who decide when to leave the fixed

regime. Recently, the so called ‘third generation’ models have emerged. Their main commonality is the role played by the private sector in the development of currency crises.

The **first-generation** models (Krugman, 1979; Flood and Garber, 1984; Flood, Garber, and Kramer, 1996) describe the currency crisis in a small open economy that ties its local currency to another foreign stable one (Flood and Marion, 1998). These models share some basic assumptions. Firstly, according to Agénor (2000b), they assume that the country has full-employment. Secondly, following Drazen (1999), they define policy makers as passive actors during the currency crisis. The only *a priori* decision that policy makers could make is their commitment to devalue if the level of reserve reaches a minimum level (zero in the basic model). Finally, these models identify the continuous weakness of some country fundamentals as a key factor for understanding the collapse of the exchange regime.

The **second-generation** models (Obstfeld, 1994; Ozkan and Sutherland, 1995; Obstfeld, 1996; Sachs, Tornell and Velasco, 1996; Ozkan and Sutherland, 1998) explicitly model the policymaker’s choices and governmental policy rules. In these models, the policymaker continuously assesses the benefit and cost of the fixed exchange regime. While its benefit is greater than its cost, he/she will maintain the fixed regime. In these models, the collapse of the fixed regime depends on the policymaker’s objective function, which includes the government’s commitment to the fixed regime.

Recently, new currency models – the so-called **third generation** - have been developed. They attempt to explain the Asian currency crisis of 1997. These models identify the role played by the private sector as a key factor. The early models of this generation focus their attention on the banking system aiming to understand currency crisis (Krugman, 1999a). For instance, Radelet and Sachs (1998a/b) give a classic ‘bank panic’ explanation to the Asian crisis. That is, a run out of the bank deposits could produce a currency crisis. Another example, it is the model proposed by Krugman (1999a). He identifies the role of the firm’s balance sheets as key element. Firstly, he describes the importance of the balance sheet problems in reducing the companies’ level of investment and how this situation impacts on the real exchange rate value. Secondly, the author offers an explanation of a self-fulfilling crisis in a country with good fundamentals.

This article will focus on some aspects of the Argentinean currency crisis of 2001 using the model proposed by Ozkan and Sutherland (1998). The reasons for choosing this model of the second generation model are as follow. Firstly, while the first generation models assume full employment, Argentina has high level of structural unemployment. Moreover, the assumption of having a passive policymaker does not seem to correspond with the nature of the policy process in the Argentinean case. During its currency crisis in 2001, there have been several indicators of the active role that its policymakers played in the promotion of certain policies and its defence against the popular discontent and negative market reactions. Secondly, the disregard of the third generation models to explain the Argentinean case is based on the fact that, at the moment of the definition of the research question -first semester of 2001- the Argentinean private sector appeared to be in relative good conditions and its bank system, largely foreign, seemed to be well managed. Finally, the second generation models have particular advantages such as the fact that they include local and global economic recession and how they interact. Among the models of this generation, the Ozkan and Sutherland's model (from now on OS) appears to be the most suitable for the analysis of the Argentinean case. On the one hand, its source of "forward-looking behaviour is the foreign exchange market" (Ozkan and Sutherland, 1998) rather than the labour market. (Sachs, Tornell and Velasco, 1996). On the other hand, the OS model is dynamic.

## **2. The Ozkan and Sutherland (OS) model: "A currency crisis model with an optimising policymaker"**

Ozkan and Sutherland (1998) develop a model where the policymaker aims to maximise a utility function that depends on a 'demand pressure index' as well as on the benefits of the fixed exchange regime. This model is driven by an 'external demand shock' ( $\mathcal{E}$ ) state variable that influences negatively on the demand pressure index. The variable  $\mathcal{E}$  also reduces the value of the utility function (relative to the value which could obtain in the floating exchange regime). Moreover, if the external demand shock is large enough to force the utility function to zero, the policymaker could decide to switch the exchange regime allowing the currency to float. According to the Ozkan and Sutherland (from now on OS) model, the collapse of the

fixed rate and the level of the optimal trigger can be perfectly predicted by the private sector. This situation produces higher domestic interest rates as external demand falls. Hence, the higher interest rates due to the peso problem exacerbate the economic recession.

Following OS, this section presents the central problem that the policymaker has to face, the interest rate behaviour under the fixed exchange rate regime and, finally, how the policymaker behaves in order to obtain a ‘state-consistent equilibrium’.<sup>2</sup>

According to the authors, the policymaker’s main problem is the maximisation of the utility function ( $W$ ), which is represented by the following equation:

$$W(t) = E_t \left[ \int_t^{\infty} (Z - y^2(\tau)) e^{-\delta(\tau-t)} d\tau \right] \quad (1)$$

where  $E_t$  is the expectation conditional on information at time “ $t$ ”, the variable  $\delta$  is the policymaker’s discount factor, “ $y$ ” is the index of demand pressure and “ $Z$ ” is the benefit of having a fixed exchange system.

In this interpretation, the demand pressure index ( $y$ ) depends on the interest rate, the exchange rate and the external demand shock as indicated by the following expression:

$$y = -\gamma \cdot i_{\tau} + \eta \cdot s - \beta \cdot \varepsilon \quad (2)$$

Where  $i_{\tau}$  is the interest rate of a zero coupon bond with maturity  $\tau$ , the variable  $S$  is the log of the nominal exchange rate and the variable  $\varepsilon$  is an external shock with  $d\varepsilon = \sigma \cdot dw$  and  $w$  is a standard Brownian motion. In other words  $\varepsilon$  is a driftless Brownian motion with variance  $\sigma$ .

The external demand shock ( $\varepsilon$ ) causes deviations of the index of demand pressure from its optimal value of zero in two ways. Directly, by factor  $\beta$  and indirectly through the value of the interest rate. The policymaker aims to stabilise the demand pressure around a target level of zero (Ozkan and Sutherland, 1998).

<sup>2</sup> This state-consistent equilibrium follows Kydland and Prescott (1977).

The model assumes that the policymaker has only two possible exchange rate options: a fixed exchange regime or a floating one. In this context, he/she has to select the trigger point to switch.

To solve the model, it is crucial to distinguish between the private sector's expected trigger points and the policymaker's optimal choice. The expected trigger points<sup>3</sup> will be designated by  $\varepsilon_e^u = -\varepsilon_e^l$ , while the policymaker's optimal choice of trigger points will be designated by  $\varepsilon^u = -\varepsilon^l$ . In this way, 'rational expectations equilibrium' requires that the policymaker's optimal triggers coincide with the expected ones by the agents in the foreign exchange market ( $\varepsilon^u = \varepsilon_e^u, \varepsilon^l = \varepsilon_e^l$ ).

## 2.1 Interest rate behaviour

The aim of this section is to describe the interest rate behaviour and how it depends of other variables in the model.

In this model, the interest rate follows the 'uncovered interest rate parity'. However, the authors incorporate different maturities ( $\tau$ ) (considering pure-discount bonds). They define the following expression for the interest rate for each maturity:

$$i_\tau = \frac{E_t[s(t + \tau) - s(t)]}{\tau} + i^* \quad (3)$$

Assuming that the variable 's' is initially fixed, i.e. ( $s(t) = \bar{s} = 0$ ), and the foreign interest rate is zero, then  $i_\tau$  is given by:

$$i_\tau = \frac{E_t[s(t + \tau)]}{\tau} \quad (4)$$

In this model, two main factors affect the interest rate ( $i_\tau$ ): the size of the step change in the exchange rate when the country leaves the fixed regime and the probability of hitting the trigger point.

<sup>3</sup> The model uses a symmetry condition, that is the upper limit is the opposite to the lower limit

As equation (4) shows, the interest rate reflects the expected future spot rate. The expected spot rate is a function of the external shock, the maturity and the trigger points expected by the investors [the higher the value of external shock( $\varepsilon$ ), the longer the maturity or the smaller the trigger points, the higher the probability to hit the trigger]. This is summarized in the following equation:

$$i_\tau = \frac{E_t[s(t+\tau)]}{\tau} = \frac{h(\varepsilon, \tau, \varepsilon_e^l, \varepsilon_e^u)}{\tau} \quad (5)$$

where  $\varepsilon_e^l, \varepsilon_e^u$  are the expected trigger points.

To solve for interest rates under the fixed rate regime is necessary to find the value of the spot rate in the floating exchange rate regime and how it depends on the external shock. In fact, the stabilisation of demand pressure index at zero also involves setting the interest rate ( $i_\tau$ ) at zero. Assuming that agents in the foreign exchange market know that the interest rate can be set so as to achieve  $y=0$ , then:

$$\left. \begin{array}{l} y = -\gamma \cdot i_T + \eta \cdot s - \beta \cdot \varepsilon \\ y = 0 \wedge i_T = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = +\eta \cdot s - \beta \cdot \varepsilon \Rightarrow s = \frac{\beta}{\eta} \varepsilon \quad (6)$$

The expected spot rate depends on four parameters and so it follows that:  $h(\varepsilon, \tau) = h(\varepsilon, \tau, \varepsilon_e^l, \varepsilon_e^u)$

This section assumes  $\varepsilon_e^l, \varepsilon_e^u$  as given. So the expected spot rate depend only on the external shock and the maturity (i.e.  $h(\varepsilon, \tau)$ ).

As for interest rates under the fixed exchange rate, according to [Svensson \(1991\)](#),  $h(\varepsilon, \tau)$  satisfies the subsequent partial differential equation:<sup>4</sup>

$$h_\tau(\varepsilon, \tau) = \frac{\sigma^2}{2} h_\varepsilon(\varepsilon, \tau) \quad (7)$$

<sup>4</sup> For demonstration see Appendix A in the original Ozkan and Sutherland's paper (1998).

Subject to following boundary conditions:

- a. With maturity equal to zero,  $h$  is equal to zero for all the values of the external shock, i.e.

$$h(\varepsilon, 0) = 0 \quad \varepsilon_e^u \leq \varepsilon \leq \varepsilon_e^l \quad (8)$$

- b. at each of the trigger points, the expected spot rate is equal to the value in the floating exchange rate regime.

$$h(\varepsilon_e^l, \tau) = \frac{\beta}{\eta} \varepsilon_e^l \quad 0 \leq \tau \leq \infty \quad (9)$$

$$h(\varepsilon_e^u, \tau) = \frac{\beta}{\eta} \varepsilon_e^u \quad 0 \leq \tau \leq \infty \quad (10)$$

Following Guenther and Lee (1988), the solution of the previous Partial differential equation is:

$$h(\varepsilon, \tau) = \frac{\beta}{\eta} \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cdot \exp\left(\frac{\sigma^2 n^2 \pi^2 \tau}{2 \cdot (\varepsilon_e^u - \varepsilon_e^l)^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi(\varepsilon - \varepsilon_e^l)}{(\varepsilon_e^u - \varepsilon_e^l)}\right)$$

$$\text{where } \varphi_n = -\frac{2\beta}{\eta n \pi} \left( \frac{(\varepsilon_e^u - \varepsilon_e^l)}{n\pi} \sin(n\pi) - \varepsilon_e^u \cdot \cos(n\pi) + \varepsilon_e^l \right) \quad (11)$$

The solution for the interest rate appears when the last result is replaced in the equation (5).

## 2.2 Policymaker's behaviour and equilibrium

While the previous analysis has taken the trigger points as exogenous, this section includes them as part of the solution of the policymaker to find the "time consistent" triggers.

The policymaker must choose the optimal trigger points maximising the utility function  $W(t)$  and taking private sector expected trigger points as given. For each expected trigger, the policymaker chooses an optimal trigger and a consistent solution that requires a chosen trigger to be equal to that expected by the investors.

To maximise  $W(t)$ , the authors make a transformation to a function  $V(\varepsilon)$  that is only function of the shock.<sup>5</sup> This allows us to solve the model as a function of a state variable.

In mathematical terms:

$$\text{MAX } W(t) = V(\varepsilon) \quad (12)$$

Now the problem is to solve the ordinary differential equation:

$$\frac{\sigma^2}{2} V''(\varepsilon) = \delta V(\varepsilon) + y^2(\varepsilon) - Z \quad (13)$$

Because the value of the utility function is zero in the float regime, there are two boundary conditions for guarantee the “Value matching condition” at trigger points.i.e.

$$V(\varepsilon^l) = 0 \quad V(\varepsilon^u) = 0 \quad (14)$$

And a “smooth pasting condition” as an analogy of the “one time investment” (Dixit, 1993).

$$V'(\varepsilon^l) = 0 \quad V'(\varepsilon^u) = 0 \quad (15)$$

<sup>5</sup> For demonstration see appendix B in original OS paper.

### 3. Using the Ozkan and Sutherland (OS) model to Argentina 2001 case

To explain the Argentina 2001 currency crisis, it is necessary to incorporate certain particularities to the OS model: the presence of a policymaker who is completely committed to the fixed exchange rate regime and a key assumption: the simultaneous occurrence of a devaluation and de-dollarisation of the external debt.

#### 3.1 Completely committed policymaker

In this case, the policymaker assigns high benefits to the fixed exchange regime. Hence, it will be necessary to use a high level of  $Z$  to simulate the strong commitment to the fixed regime. In principle, considering an extreme pathological commitment, this value will be infinite, the interest rate will be zero and the index of demand pressure will only depend on the external demand shock. Since the great benefits that the policymaker gives to the fixed exchange rate regime, it is not necessary to consider the level of demand pressure. So, the optimal trigger point should be in infinite.

For simulating the previous behaviour, using the OS model, it is sufficient to assign a value of  $Z=10$  (10 times the previous level of  $Z=1$  for the case of the standard policymaker)<sup>6</sup>.

#### 3.2 Key assumption: simultaneous devaluation and de-dollarisation

The application of the proposed variations of the OS model to the Argentinean currency crisis needs as a key assumption the simultaneous occurrence of a devaluation and de-dollarisation of the external debt.

While the OS model variations assume that the external debt is in local currency, the Argentinean external debt is mainly foreign currency denominated. The proposed models need to assume that the agents of the foreign exchange market expect that the government, in the case of devaluation, will pay its debts in local currency. Following Miller (2001),

<sup>6</sup> See García Fronti (2002) for a justification of this value.

Hausman (2001) and Krugman (2001b), the simultaneity of the devaluation and de-dollarisation processes is the only way that the foreign currency debt does not strangle the whole economy.<sup>7</sup>

### 3.3 Calibration for different scenarios in Argentina 2001

This section presents different calibrations of some hypothetical scenarios for Argentina 2001 using the framework described. It is important to notice that this work is not an econometric work. Hence, the used values in the calibrations were only selected with the purpose of explaining aspects of the crisis.<sup>8</sup>

The next sub-section displays a calibration of the original OS model assuming that the 'standard policymaker' ( $z=1$ ) is in office in Argentina. The second sub-section presents a calibration assuming that a 'completely committed' policymaker to the fixed exchange regime (i.e. Mr Cavallo) is in power ( $Z=10$ ).

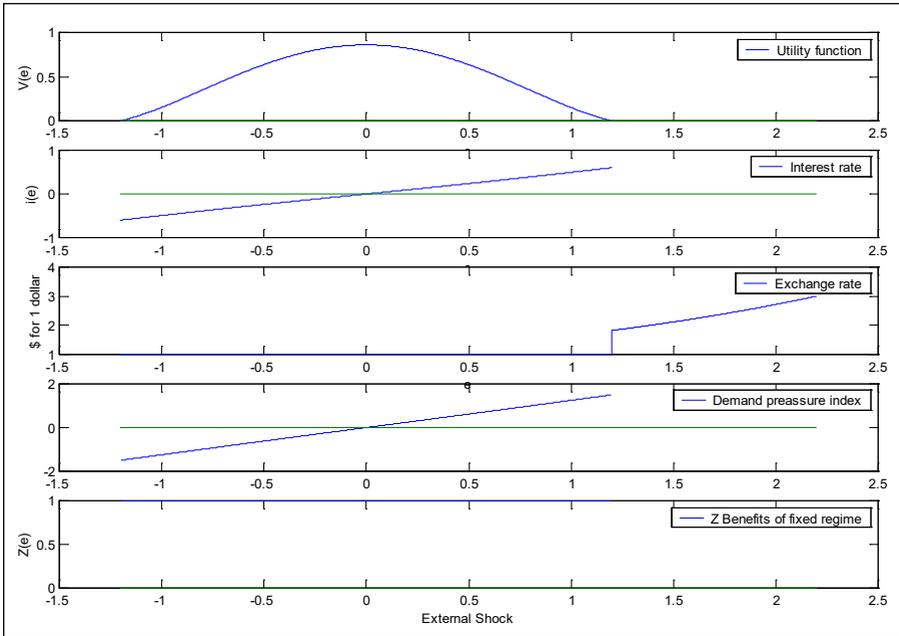
Both calibrations share some common parameters. While the values of the variance, maturity bond and discount factor are the ones used by OS ( $\sigma=1.0$ ,  $\tau=1$ ,  $\delta=0.05$ ), those related to the demand pressure index ( $\gamma=0.5$ ,  $\eta=2$ ,  $\beta=1$ ) were specially selected to reflect the greater influence of the external shock than the local interest rate.

#### Standard policymaker ( $Z=1$ ) in office

In this case, the policymaker maximises a social utility function assigning  $Z=1$  to the benefits of the fixed exchange regime ('*Convertibilidad*'). Using the parameters described above, the figure 1 presents the behaviour of the five main variables of the model (the utility function, interest rate, exchange rate, demand pressure index and benefits of the fixed regime) alongside the variability of the external demand shock.

<sup>7</sup> These processes were triggered by Duhalde's government. He promoted the devaluation and the immediate de-dollarisation ('pesificación') of the economy without symmetry.

<sup>8</sup> For making all the calculations, software was developed under MatLab 5.3. For details, see García Fronti (2002).

**Figure 1.** Argentina. Standard policymaker ( $Z=1$ ).

The first graph shows that when the external shock is zero, the utility function reaches its maximum value. This behaviour is exclusively explained by the null value of the demand pressure.<sup>9</sup> When the shock increases, it induces a rise in the interest rate, which also depends on the investors' expected trigger point. Higher local interest rates deepen the recession of the country and produce, together with the external shock, a deviance of the level of the demand pressure index (Figure 1. Graph 4) from its equilibrium. This demand pressure produces a fall of the utility function, which, at the upper trigger point ( $\varepsilon^u = 1.2$ ), reaches zero. Hence, the interest rate (Figure 1. graph 2) reaches 51%, the demand pressure index

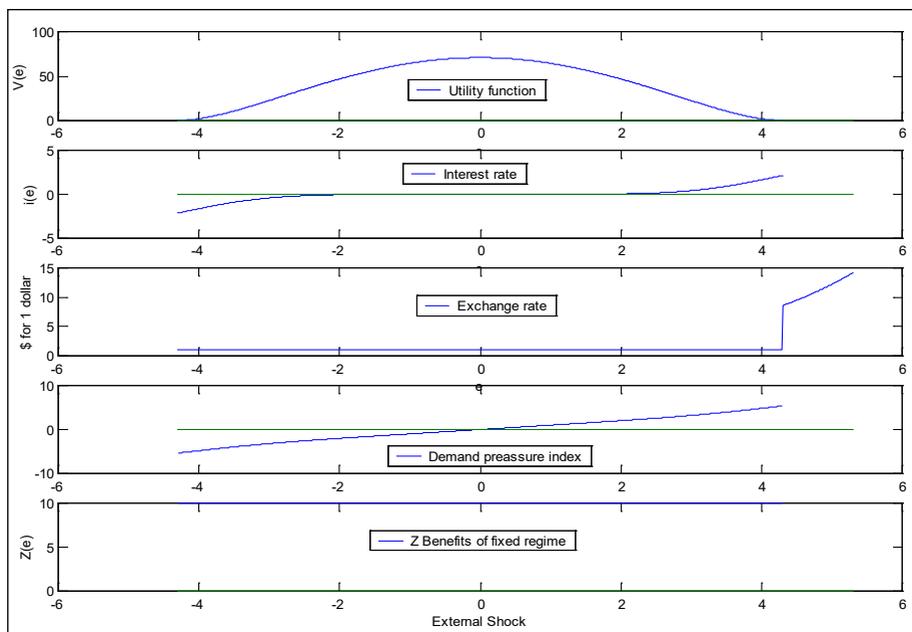
<sup>9</sup> In the Argentinean context, this situation corresponds to the year 1997 that was the last year of economic growth.

reaches a maximum of 1.45 (i.e.  $y_{\max} = \frac{1}{2} \cdot i_{\max} + 1 \cdot \varepsilon^u$ ) and the price of the dollar in the floating exchange regime is \$1.65 ( $s = \frac{\beta}{\eta} \varepsilon$ ). This interest rate corresponds to the situation of November 2001 in Argentina. So, according to these results, if a standard policymaker was in office, he/she must have devalued in November 2001.

During March 2001, Argentina had a level of interest rates around 10%. The figure 1., graph 2 displays the corresponding external shock ( $\varepsilon = 0.25$ ). For this level of external shock, the standard policymaker prefers to keep a fixed exchange regime. However, some economists have argued that March 2001 was the last opportunity for the Argentinean government to abandon the peg with low cost of the switching process. At that time, despite the deep recession and high unemployment, Argentina had an apparent strong bank system and good level of reserves. From the results, the standard policymaker ( $Z=1$ ) chooses a trigger point of 1.2. Hence, predicting devaluation in March requires having another policymaker in office who has lower commitment to the fixed exchange regime ( $Z < 1$ ).

### **Mr Cavallo in office ( $Z=10$ )**

This section presents an application of the proposed model ‘completely committed to the fixed exchange regime’ to the Argentinean currency crisis in 2001. It will attempt to model the behaviour of the Minister of Economy, Mr Cavallo. He assigns a value of  $Z=10$  to the benefits of the fixed exchange regime membership. With this parameter, the behaviour of the main variables is represented by following figure.

**Figure 2.** Argentina. Mr Cavallo in office forever ( $Z=10$ )

It is important to notice that, in this calibration, the interest rate is negligible below the ‘standard policymaker’ upper trigger point (i.e.  $\varepsilon^u = 1.2$ ) and starts to steadily increase after reaching a level of external shock of 2.

There was a saying in Buenos Aires: ‘the good thing about Domingo Cavallo is that he never gives up. The bad thing about Domingo Cavallo is that he never gives up’ (Catán and Lapper, 2001). According to the results of this calibration, Cavallo’s strong commitment with the fixed exchange regime configured a dual scenario. On the one hand, if the level of external shock is low, Cavallo’s strong commitment will contribute to the continuity of low local interest rates. On the other hand, if the level of the global recession is close to the trigger point, Cavallo’s behaviour will promote a high level of recession<sup>10</sup> and a dramatic collapse of the exchange

<sup>10</sup> The model uses the variable ‘ $y$ ’ as proxy of the level of country recession.

regime. That is, according to this calibration, the optimal trigger point that Mr Cavallo must choose is 4.2. Consequently, the interest rate before the collapse is 250%, pushing the price of the dollar up to \$9.1. This never has happened. Mr Cavallo was forced to resign in December 2001, when the local interest rate reached 55%. He left the government supporting the '*Convertibilidad*'. One possible explanation for Mr Cavallo's complete commitment to the fixed regime could be 'the double standard' described by Krugman (1999b). Following this author, the markets react to the Argentinean government's threats of devaluation with lack of confidence. For this reason, Mr Cavallo assigned a high level to the benefits of the '*Convertibilidad*' and refused to devalue.

## Conclusions

Summing up, this article explained some aspects of the Argentinean 2001 currency crisis using the Ozkan and Sutherland (1998) model. This article made two calibrations. The first one assumed an optimising policymaker in office ( $Z=1$ ) and the second one attempted to model Mr Cavallo's behaviour. While both calibrations predicted that the interest rate after the collapse will be zero, at least until the middle of February 2002, the interest rates in Argentina remained high (Ambito Financiero, 2002).

The question is: will this level of interest rate reach negligible values in a short time or was Cavallo right when he attempted to defend the '*Convertibilidad*'? In this sense, the Argentinean economy 2001 had the possibility of multiple equilibria and, hence, Mr Cavallo asked the agents in the foreign exchange market to move towards a 'good' equilibrium to get lower local interest rates. To identify the validity of Mr Cavallo's possible position, it will be necessary to assess the measures taken by the last new government of Mr Duhalde. The success or failure of his financial and economic policies in reducing the interest rates and the level of economic recession will serve to accept or reject the multiple equilibria hypothesis.

## References

- Agenor, P. (2000a). 'Lecture notes on the economics of adjustment and growth', *Course Presentations*, Washington: World Bank. Available on line: [http://www1.worldbank.org/wbiep/macro-program/agenor/PowerPoint/EAG\\_book/Chap07.ppt](http://www1.worldbank.org/wbiep/macro-program/agenor/PowerPoint/EAG_book/Chap07.ppt).
- Agenor, P. (2000b). *The Economics of adjustment and growth*, [Harcourt College](#).
- Ambito financiero (2001). 'Riesgo País', *Ambito Financiero*, December 20, Buenos Aires, Argentina. Available on line: <http://www.ambitoweb.com>
- Ambito financiero (2002). 'Riesgo País', *Ambito Financiero*, February 15, Buenos Aires, Argentina. Available on line: <http://www.ambitoweb.com>
- Calvo, G. and Mendoza, D. (1996). 'Mexico's balance-of-payments crisis: a chronicle of a death foretold', *Journal of International Economics*, Volume 41, 235-264.
- Catan and Lapper (2001) 'The fallen would-be saviour of Argentina'. *Financial Times*. December 20. Available on line: <http://www.ft.com>
- Choueiri, N. (1999). 'A Model of Contagious Currency Crises with application to Argentina', wp/00/29, *IMF Working paper*, International Monetary Fund. Available on line: <http://www.imf.org>
- Choueiri, N. and Kaminsky, G. (1999). 'Has the nature of crises changed? A quarter century of currency crises in Argentina', wp/00/152, *IMF Working paper*, International Monetary Fund. Available on line: <http://www.imf.org>
- Dixit, A. (1993). *The Art of Smooth Pasting*. Chur: Harwood Academic.
- Dixit, A. and Pindyck, R.S. (1994). *Investment Under Uncertainty*. Princeton: Princeton University Press.
- Drazen, A. (1999). *Interest Rate defence against Speculative Attack under Asymmetric Information*, Mimeo, University of Maryland. Available on line <http://www.bsos.umd.edu/econ/Drazen/defense.pdf>
- Fenix Plan (2001) *Hacia el Plan Fenix: Diagnóstico y propuestas. Una estrategia de reconstrucción de la economía argentina para el desarrollo*

*con equidad*. Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires. Available on line : <http://www.econ.uba.ar/www/destacados/deuda.htm>

Flood, R. and Garber, P. (1984), 'Collapsing Exchange-Rate Regimes: Some Linear Examples', *Journal of International Economics*, Vol 17, 1-13.

Flood, R., Garber P. and Kramer C. (1996). 'Economic Models of Speculative attacks and the drachma crisis of may 1994', *Open Economies review*, No 7, 583-92.

Flood, R. P. and Marion, N. (1998). 'Perspectives on the recent currency crisis literature'. Working Paper Series. *Working Paper 6380*. USA: National Bureau of Economic Research.

García Fronti, J (2002). 'Could a country with a completely committed policymaker to a fixed exchange regime devalue? '. Msc Dissertation. Warwick University. UK.

Guenther, R. and Lee, J. (1988). *Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations*. New Jersey: Prentice Hall.

Hausman, R. (2001) 'A way out for Argentina'. *Financial Times*. October 29. Available on line: <http://www.ft.com>

Kydland, F. and Prescott, E. (1977). 'Rules rather than discretion: The inconsistency of optimal plans'. *Journal of Political Economy*, Vol 75, 253-279.

Krugman, P (1979). 'A model of Balance of payments crises'. *Journal of Money, Credit and Banking*, vol 11, 311-25.

Krugman, P. (1998). '*Whatever Happened in Asia?*' mimeo, MIT. Available on line: <http://web.mit.edu/krugman/www/DISINTER.html>

Krugman, P. (1999a). 'Balance Sheets, the Transfer Problem and Financial Crises', in P.Isard, A. Razin and A. Rose (eds). *International Finance and Financial Crises: Essays in Honor of Robert P. Flood, Jr.*, Norwell: Kluwer Academic Publishers.

Krugman, P. (1999b). *The return of depression economics*. New York; London: W.W. Norton.

- Krugman, P. (2001a) 'Argentina's money monomania' Mimeo. Princeton: University of Princeton. Available on line: <http://www.wws.princeton.edu/~pkrugman/mania.html>
- Krugman, P. (2001b) 'A Cross of Dollars', *New York Times*, November 7, New York
- Miller, M. (2001) Reader's letter. *Financial times*. September 6, London.
- Ministry of economy (2001). *Informacion economica*, Ministerio de economia de Argentina, Available on line: <http://www2.mecon.gov.ar/infoeco/>
- Obstfeld, M. (1994). 'The logic of currency crises'. *Banque de France. Chaiers éconmiques et monétaires*, N 43, 189-213.
- Obstfeld, M. (1996). 'Models of currency crises with self-fulfilling features' *European economic review* , Vol 40, 1037-1047.
- Ozkan, G. and Sutherland A., (1995) 'Policy measures to avoid a currency crisis' *The Economic Journal*, Vol 105, No 429, 510-519
- Ozkan, G. and Sutherland, A. (1998). 'A currency crisis model with an optimising policymaker' *Journal of International Economics* Vol 44, 339-364.
- Radelet, S. and Sachs, J. (1998a) 'The Onset of the East Asian Financial Crisis', *paper presented at a seminar at USAID, January 29, 1998, and at the National Bureau of Economic Research (NBER) Currency Crises Conference*, February 6-7, 1998.
- Radelet, S. and Sachs, J. (1998b) 'The East Asian Financial Crisis: Diagnosis, Remedies, Prospects', *paper presented at the Brookings Panel*, Washington D.C., March 26-27.
- Sachs, J, Tornell, A. and Velasco, A. (1996). 'The Mexican Peso crisis: sudden death or death foretold?' *Journal of International Economics*, Vol 41, Nos 3-4, 265-283
- Sutherland, A. (1994) 'State and time-contingent switches of exchange rate regime'. *Journal of International Economics*. Vo

## 2.5 Nota sobre el cálculo numérico del precio de una opción de venta americana

*María Teresa Casparri • Javier I. García Fronti*

### Resumen

Recientemente, varios autores introdujeron métodos numéricos basados en técnicas de MonteCarlo para el cálculo de diferentes instrumentos financieros. El punto de partida de estos métodos consiste en sustituir el intervalo de tiempo de las fechas de ejercicio, por un subconjunto finito. En el caso de la opción americana, equivale a aproximarla a una opción Bermuda (en lugar de permitir el ejercicio en todo momento se permite el ejercicio en ciertos intervalos discretos).

La presente comunicación presenta un algoritmo de cálculo numérico para valuar una opción de venta americana utilizando el método de regresión de mínimos cuadrados propuesto por (Longstaff and Schwartz 2001). Asimismo, se calculan los precios para diferentes parámetros con un código desarrollado en VBA para Microsoft Excel.

Palabras claves: Opciones americanas, Montecarlo, regresión mínimos cuadrados

### Introducción

Un contrato de opción americana de venta sobre un activo (por ejemplo una acción que cotiza en bolsa), autoriza al titular del contrato a vender el activo durante un plazo de tiempo predeterminado hasta la fecha de vencimiento. Durante ese periodo, el titular de la opción puede vender el activo por una cantidad acordada, al precio de ejercicio<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Mientras que las opciones americanas pueden ejercerse en cualquier momento hasta la fecha de vencimiento, las denominadas europeas sólo pueden ejercerse en la fecha de vencimiento.

Para la valuación de derivados simples, como la opción de venta europea, habitualmente existe una fórmula analítica de cálculo. El modelo Black-Scholes (1973) fue desarrollado a principios de los setenta- por Fischer Black, Myron Scholes y Robert Merton y ha jugado un papel fundamental en la fijación de precios y en la cobertura mediante opciones. Asimismo, ha sido imprescindible para el crecimiento y el éxito de la ingeniería financiera en los años 1980<sup>2</sup>.

La flexibilidad que tiene la opción americana de poder ejercerse en cualquier momento previo al vencimiento agrega complejidad a la valuación. Asimismo, el cálculo de los precios de las opciones americanas realizado en forma numérica también es un desafío, pues formalmente existen infinitos puntos de decisión donde se puede ejercer o no.

Desde el punto de vista de la teoría matemática, este problema es equivalente al de parada óptima, donde se evalúa en qué momento es más rentable detener un proceso. Estos problemas se resuelven por programación dinámica, partiendo de la certeza de los valores al vencimiento y retrocediendo hasta llegar al punto inicial de forma de describir el camino óptimo. En nuestro problema particular debemos también incorporar la incertidumbre del activo, por lo que no es un problema matemático de programación dinámica determinística, sino que es estocástica. Desde los setenta se ha utilizado un enfoque probabilístico para la valuación de los contratos financieros (Harrison and Kreps 1979).

El propósito de esta comunicación es mostrar algunos ejemplos de cálculo del precio de una opción de venta americana utilizando el método de regresión de mínimos cuadrados propuesto por (Longstaff and Schwartz 2001).

## **1. Valuación utilizando regresión de mínimos cuadrados**

Recientemente, varios autores introdujeron métodos numéricos basados en técnicas de MonteCarlo (véase, entre otros, (Broadie and Glasserman 2004) (Carriere 1996) (Glasserman 2004) (Tsitsiklis and Van Roy 1999)).

<sup>2</sup> En 1997, Myron Scholes y Robert Merton recibieron el premio Nobel de Economía por desarrollar el modelo Black-Scholes. Por desgracia, Fischer Black había muerto en 1995, de lo contrario, habría sido también uno de los destinatarios.

El punto de partida de estos métodos consiste en sustituir el intervalo de tiempo de las fechas de ejercicio, por un subconjunto finito. Esto equivale a aproximar la opción americana por una opción llamada Bermuda, en lugar de permitir el ejercicio en todo momento se permite el ejercicio en ciertos intervalos discretos.

Como se mencionó anteriormente, la solución de los problemas de optimización discreta se reduce a una aplicación efectiva del principio de programación dinámica. Ahora bien, las expectativas condicionales involucradas en el proceso de iteración de programación dinámica son la principal dificultad para el desarrollo de las técnicas de Montecarlo. Una forma de tomar en cuenta este problema es realizar cada período una regresión cuadrática sobre un conjunto finito de funciones como sustituto de la esperanza condicional. Esta idea es la novedad introducida por Longstaff y Schwartz (2001) (algoritmo LSM). Asimismo, la convergencia del método cuando los caminos de simulación tienden a infinito ha sido probado por (Clément, Lamberton et al. 2002).

El algoritmo LSM primeramente simula  $N$  caminos de trayectorias de precios del activo subyacente desde el momento de valuación hasta llegar al vencimiento ( $T$ ). Luego se realizan iteraciones retrospectivas, estimando (por mínimos cuadrados) en cada nodo la función de la continuación en función del valor del activo. Éste es comparado con el valor de ejercer y se elige el mayor como valor de la opción en el nodo. Para finalizar se suman los valores actuales de los valores de ejercicio en cada camino y se divide por la cantidad de simulaciones. A continuación detallaremos el algoritmo.

## 1.1 Simulación del proceso de precios

El precio del activo subyacente sigue un proceso browniano geométrico que viene dado diferencialmente por:

$$dS = S\alpha dt + S\sigma dz$$

Donde  $S$  es el precio del activo subyacente,  $dz = \varepsilon\sqrt{dt}$  es el incremento infinitesimal de un proceso browniano,  $\varepsilon$  es la distribución normal estándar,  $\alpha$  es la tasa de ganancia y  $\sigma$  es la volatilidad del proceso.

Siguiendo a la literatura de valuación de opciones y asumiendo una inversora neutral al riesgo el proceso queda definido por:

$$dS = S\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + S\sigma dz,$$

donde  $r$  es la tasa libre de riesgo del mercado.

A los fines del problema, discretizamos esta ecuación diferencial estocástica, obteniendo la siguiente ecuación en diferencias:

$$\Delta S = S_i\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + S_i\sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t} \text{ con } S_{(t+\Delta t)} = S_i + \Delta S \text{ y } S_0 \text{ es dato}$$

A partir de esta ecuación y su condición inicial, se arma una matriz del proceso de precios del activo subyacente con  $N$  filas (caminos de simulación) y  $M+1$  columnas (pasos temporales donde  $M = \frac{T}{\Delta t}$ )

## 1.2 Inducción retrospectiva

Ahora bien, en base a los valores simulados de los precios al momento  $T$  (para cada uno de los caminos) se puede valorar la opción al momento del vencimiento  $T$  que viene dada por la siguiente expresión:

$$C_T = \max(X - S_T, 0).$$

Con la última columna completa, se comienza a retroceder en el tiempo por cada camino de simulación. Nótese que en cada nodo se debe decidir si es conveniente ejercer o esperar otro paso más. Formalmente la regla de parada para este algoritmo de programación dinámica es comparar en cada nodo el valor de ejercer

$$\max(X - S_T, 0)$$

contra el valor de continuar un paso más descontado un período:

$$E \left[ \frac{C_{t+1}}{F_t} \right] e^{-r\Delta t}$$

Mientras que el valor de ejercer surge directamente de la matriz de precios, el valor descontado de continuar es complejo pues involucra una esperanza matemática condicional a la información disponible<sup>3</sup>. En otras palabras, debemos contar con la expresión de la esperanza en función de  $S_t$  para su cálculo. La solución propuesta por LSM es estimar esa relación recurriendo a una regresión matemática que es posible pues se cuenta con la información de varios caminos al mismo tiempo. En concreto, se estima realizando una regresión entre el valor de continuación descontado y los valores de  $S_t$  (para los diferentes caminos de simulación).

El algoritmo LSM propone elegir una colección de funciones independientes para realizar la regresión. Para el presente ejercicio elegimos  $1, S, S^2$  que actúan como variables independientes de la regresión y la variable dependiente es el valor de continuación del paso siguiente descontado un período. De forma que se obtienen los parámetros  $h_1, h_2, h_3$  para definir la función estimada:

$$f(S) = h_1 + h_2 S + h_3 S^2$$

Con esta función estamos en condiciones de decidir. Se ejerce en el nodo si:

$$\max(X - S_T, 0) > f(S_T),$$

caso contrario se espera un período más para evaluar nuevamente y se toma como valor de continuación el del próximo período descontado.

Para finalizar se suman los valores actuales de los valores de ejercicio en cada camino y se divide por la cantidad de simulaciones.

El algoritmo inicialmente genera cuatro matrices de  $N$  (Número de caminos) x  $M$  (números de intervalos desde  $t = 0$  a  $T$ ). “ $S$ ” Matriz con los precios del activo simulado, “ $C$ ” Valor de continuar sin ejercer, “ $E$ ” Valor de ejercicio y “ $D$ ” matriz que tiene 1 donde es óptimo ejercer. Luego se calculan

<sup>3</sup> Siendo más precisos, es una esperanza condicionada a una filtración

los valores de la última columna de C y E utilizando la fórmula del pago de la opción de compra  $\max(S-X, 0)$ .

A continuación, comienza el proceso iterativo hacia atrás. Para cada período se calcula el valor de continuar y se arma una matriz con las variables independientes utilizando las funciones 1,  $x$  y  $x^2$ , donde  $x$  es el valor del activo en el nodo correspondiente. Se arma el vector del término independiente Y con los valores del ejercicio inmediato de la opción. Se realiza una regresión entre X e Y para obtener los parámetros que serán utilizados para obtener el valor de continuación a comparar con los ejercicios inmediatos. En cada nodo, si el ejercicio inmediato es mayor que el valor de la regresión, se elige el valor de ejercicio y se pone un 1 en el correspondiente nodo de la matriz D. Se realiza esto hasta llegar a  $t=2$ .

## 2. Ejemplo: Proceso básico iterativo

Para ejemplificar el algoritmo detallado, se recorren los pasos para un caso elemental (10 caminos de simulación y 6 intervalos) donde se asume un horizonte de 1 año, precio actual del activo 5, tasa libre de riesgo 5%, volatilidad 20% y Strike 5. El objetivo es mostrar cómo funciona la metodología hasta la regresión, desde ya el usar 4 caminos de simulación y sólo 6 intervalos nos llevará a valuaciones con un alto margen de error. No obstante lo cual consideramos didácticamente importante esta sección para el entendimiento de la lógica del algoritmo por parte de nuestros estudiantes.

Como se ha mencionado en la sección anterior, se construyen 4 matrices: precio (P), Continuación (C), ejercicio (E), decisión (D); todas ellas de 7 columnas (valores al final de los intervalos y el valor inicial) por 10 filas (caminos de simulación).

### 2.1 Simulación de precios

Utilizando los parámetros y un generador de números aleatorios, se simulan los precios para diferentes momentos en los 10 caminos<sup>4</sup>:

<sup>4</sup> Evidentemente cada vez que se corra el proceso estos números cambiarán. A los fines didácticos, detallamos una corrida.

5	5.221121	5.865774	6.13495	6.06334	6.128265	5.783699
5	5.738509	5.270482	5.575184	5.682264	5.531487	5.170264
5	4.980662	4.461477	4.422157	4.422043	4.471313	4.769566
5	5.398071	4.542077	4.673338	4.801353	5.173765	5.688835
5	4.966651	4.08579	4.279457	4.011041	3.386108	3.748063
5	5.555685	5.653374	4.611113	4.753075	4.31967	4.532185
5	4.978698	5.821564	6.237713	6.13009	5.694878	5.270498
5	4.591028	4.64612	4.19287	4.350686	4.264142	4.579794
5	4.984421	4.510408	4.823058	5.269955	5.508015	6.106092
5	4.856526	5.027888	5.549516	5.361387	5.34436	4.964528

## 2.2 Valores al vencimiento T=12 meses

Utilizando la fórmula de la opción de compra al vencimiento, se calculan las últimas columnas de las matrices C y E:

						0.783699
						0.170264
						0
						0.688835
						0
						0
						0.270498
						0
						1.106092
						0

Se calcula el valor de ejercer en  $t=10$  meses en base al proceso de precios

					1.128265	0.783699
					0.531487	0.170264
					0	0
					0.173765	0.688835
					0	0
					0	0
					0.694878	0.270498
					0	0
					0.508015	1.106092
					0.34436	0

Regresión (solamente los valores no nulos=6) en base al valor del proceso de precios en  $t=10$  meses y se calculan los 3 parámetros de la regresión para obtener la función estimada.

Matriz  $x$  , Vector  $y$  :

1	6.128265	37.55563	0.778121
1	5.531487	30.59735	0.169053
1	5.173765	26.76785	0.683932
1	5.694878	32.43163	0.268572
1	5.508015	30.33823	1.098219
1	5.34436	28.56218	0

## Conclusiones

Se ha presentado un método numérico basado en técnicas de MonteCarlo para el cálculo de una opción americana. Se ha detallado el algoritmo del método de regresión de mínimos cuadrados propuesto por Longstaff and Schwartz (2001). Asimismo, se han calculado los precios para diferentes parámetros con un código desarrollado en VBA para Microsoft® Excel.

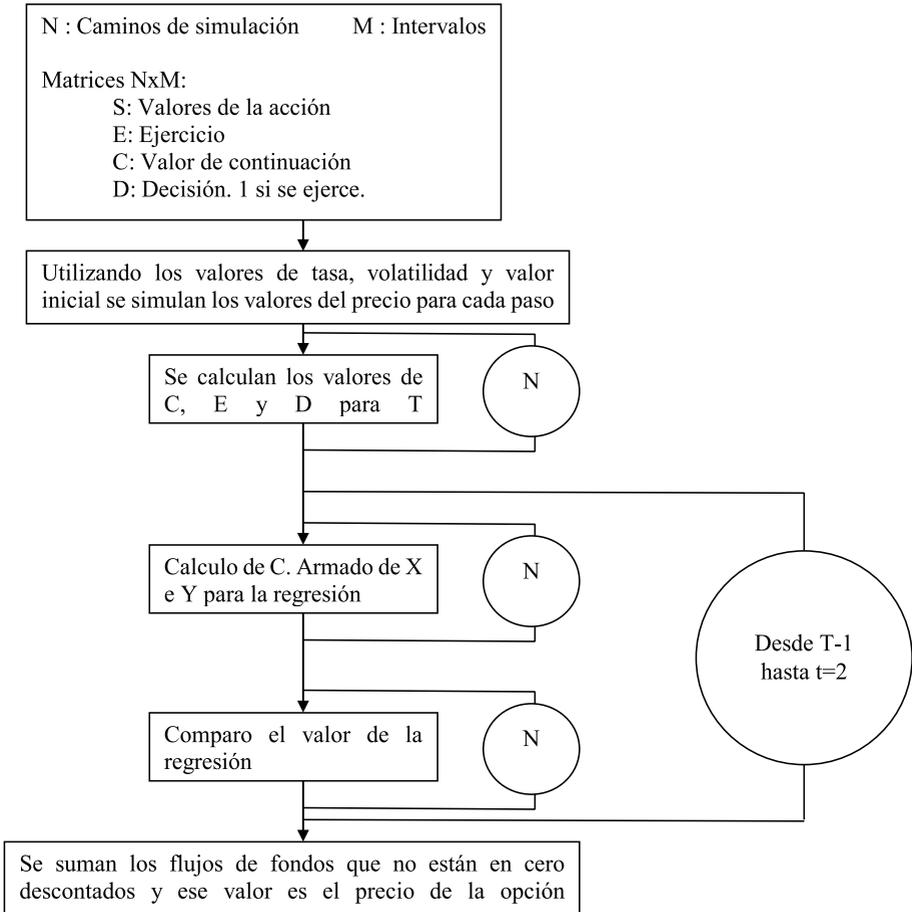
Creemos que este ejercicio permite que los alumnos puedan calcular opciones americanas utilizando una herramienta de uso cotidiano en su ambiente de trabajo y de uso común en el contexto académico.

## Referencias

- Black, F. and M. Scholes (1973). “*The pricing of options and corporate liabilities.*” Journal of political economy **81**(3).
- Broadie, M. and P. Glasserman (2004). “*A stochastic mesh method for pricing high-dimensional American options.*” Journal of Computational Finance **7**: 35-72.
- Carriere, J. (1996). “*Valuation of the early-exercise price for options using simulations and nonparametric regression.*” Insurance: mathematics and Economics **19**(1): 19-30.
- Clément, E., D. Lamberton, et al. (2002). “*An analysis of the Longstaff-Schwartz algorithm for American option pricing.*” Finance and Stochastics **6**(4): 449—471.
- Glasserman, P. (2004). Monte Carlo methods in financial engineering, Springer Verlag.
- Harrison, J. and D. Kreps (1979). “*Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets.*” Journal of economic theory **20**(3): 381-408.
- Longstaff, F. and E. Schwartz (2001). “*Valuing American options by simulation: A simple least-squares approach.*” Review of Financial Studies **14**(1): 113.
- Tsitsiklis, J. and B. Van Roy (1999). “*Optimal stopping of Markov processes: Hilbert space theory, approximation algorithms, and an application to pricing high-dimensional financial derivatives.*” IEEE Transactions on Automatic Control **44**(10).

# Apéndice

## Algoritmo de cálculo



El algoritmo propuesto ha sido codificado en VBA para poder ser utilizado. Las próximas secciones calculan el valor de la opción americana para diferentes valores de los parámetros

## 2.6

# Gobernanza de innovaciones en contexto incierto: Un modelo estocástico del principio precautorio

María Teresa Casparri • Javier García Fronti

### Resumen

Este trabajo formaliza matemáticamente el principio precautorio utilizado para la gobernanza de innovaciones, permitiendo cuantificar el valor de retrasar una inversión determinada que conlleva riesgos sociales. Se propone un modelo estocástico de parada óptima que articula técnicas de evaluación de riesgos, análisis costo-beneficio y modelos de valuación de inversiones irreversibles bajo incertidumbre. De esta forma se presenta un modelo que cuantifica el valor social de la “precaución”.

**Palabras clave:** Principio precautorio, gobernanza de innovaciones, parada óptima, valuación bajo incertidumbre

### Introducción

El programa europeo *Converging Technologies for the European knowledge society* (CTEKS) pone el énfasis de la política de estado tecnológica en la creación de una sociedad del conocimiento, guiándose por un principio precautorio (Echeverría, 2005, Klinke et al., 2006). Si bien existe mucha literatura sobre el principio precautorio, resulta difícil operacionalizarlo para tomar decisiones gubernamentales.

Este trabajo lo formaliza matemáticamente, siguiendo a Scott Farrow (2004), para permitir evaluar proyectos de inversión como parte de la toma de decisiones gubernamentales. El modelo articula técnicas de evaluación de riesgos, análisis costo-beneficio de proyectos en contextos inciertos. De esta

forma presenta un modelo que cuantifica, frente a la posibilidad de llevar adelante un proyecto de I+D, el valor social de la “precaución”.

La propuesta es evaluar socialmente si realizar un proyecto determinado ahora es óptimo o es preferible esperar, llevando a la práctica gubernamental lo que la literatura de riesgos denomina “principio precautorio”. El desafío es utilizar un método cuantitativo de decisión que incorpore la incertidumbre y la irreversibilidad en los criterios gubernamentales de gestión de riesgos, superando la metodología estándar de costo-beneficio que simplemente propone llevar adelante una acción cuando los beneficios netos esperados son positivos. Este trabajo demuestra que, cuando se contempla la incertidumbre y la irreversibilidad del proyecto, este umbral es superior a cero.

Para lograr el objetivo propuesto, este trabajo se estructura en tres secciones. La primera desarrolla el modelo estocástico propuesto, donde se explicita como cuantificar el valor de esperar. En la segunda, se desarrolla el procedimiento gubernamental para la toma de decisiones a la hora de permitir una nueva inversión que conlleva riesgos sociales. En la última sección se discute como se puede incluir en el proceso decisorio gubernamental la incertidumbre del modelo probabilístico y las observaciones subjetivas de expertos.

## 1. El modelo

Siguiendo la propuesta de (Farrow, 2004), se asimila el valor que tiene para un gobierno retrasar el comienzo de un proyecto de inversión propuesto, al de una opción de esperar (Dixit and Pindyck, 1994).

En particular, cualquier proyecto comercial conlleva un costo social irreversible ( $C$ ), y seguramente, beneficios sociales ( $B$ ); los cuales se modelizan mediante su valor presente neto de costos reversibles. El costo social irreversible es un valor determinado por los especialistas, mientras que los beneficios sociales se modelizan como un proceso browniano geométrico:

$$dB(t) = \alpha B(t)dt + \sigma B(t)dz \quad (6.1)$$

Formalmente, si la tasa de descuento es  $\rho$ , la ecuación recursiva de Bellman correspondiente al valor de la opción de esperar ( $F$ ) al momento “ $t$ ” es:

$$F(B(t)) = \text{Max}(B(t) - C, e^{-\rho dt} E(F(B(t+dt)))) \quad (6.2)$$

Donde  $F(B(t))$  es la cuantificación del principio precautorio desde el punto de vista del gobierno encargado de regular la actividad en cuestión.

A continuación, se analiza la regla de decisión que permite decidir en qué momento es óptimo invertir. Para ello, al momento “ $t$ ”, se compara el valor del proyecto si se ejecuta hoy:  $[B(t) - C]$ , con el valor de esperar:  $e^{-\rho dt} E(F(B(t+dt)))$ . Matemáticamente, la resolución del problema consiste en convertir el problema en uno de parada óptima, para encontrar el valor crítico del beneficio social ( $B^*$ ) que separa la región donde es óptimo esperar ( $B < B^*$ ), de la cual en donde conviene comenzar el proyecto en forma inmediata. De forma que la regla de decisión viene dada por:

$$\text{Si } B < B^* \Rightarrow F_E(B(t)) = e^{-\rho dt} E(F_E(B(t+dt)))$$

$$\text{Si } B > B^* \Rightarrow F_D(B(t)) = B(t) - C$$

$$\text{Si } B = B^* \Rightarrow F_E(B^*) = F_D(B^*) \text{ (Continuidad de la función)}$$

$$F) \frac{dF_E}{dV}(B^*) = \frac{dF_D}{dV}(B^*) \text{ (Continuidad de la primera derivada).}$$

Asimismo, se requiere que se cumpla la condición de monotonía para

$$F_D \text{ y } F_E \text{ para } B(t+dt) \text{ dado } B(t)$$

Por lo que, en la región donde es óptimo esperar se cumple que:

$$F_E(B(t)) = e^{-\rho dt} E(F_E(B(t+dt)))$$

Multiplicando ambos miembros por  $e^{\rho dt}$ ,

$$e^{\rho dt} F_E(B(t)) = E(F_E(B(t+dt)))$$

Restando  $F_E(B(t))$

$$(e^{\rho dt} - 1) F_E(B(t)) = E(F_E(B(t+dt)) - F_E(B(t)))$$

Dividiendo por  $\Delta t$

$$\frac{(e^{pdt} - 1)}{\Delta t} F_E(B(t)) = \frac{E(F_E(B(t+dt)) - F_E(B(t)))}{\Delta t}$$

Si  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\rho F_E(B) = \frac{E(dF_E(B))}{dt}$$

Por otro lado como sabemos que  $B$  sigue un movimiento browniano geométrico, podemos escribir (utilizando el lema de Ito) el proceso de  $dF_E(B)$  de la siguiente forma:

$$dF_E(B) = (F'_E(B)\alpha B + \frac{1}{2} F''_E(B)\sigma^2 B^2)dt + F'_E(B)\sigma B dz$$

y la esperanza es:

$$E(dF_E(B)) = (F'_E(B)\alpha B + \frac{1}{2} F''_E(B)\sigma^2 B^2)dt$$

por lo que

$$\rho F_E(B) = \frac{E(dF_E(B))}{dt} = F'_E(B)\alpha V + \frac{1}{2} F''_E(B)\sigma^2 B^2$$

Convirtiendo el problema original en una ecuación diferencial ordinaria sujeta a restricciones:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 B^2 F''_E(B) + \alpha B F'_E(B) - \rho F_E(B) = 0 \quad (6.3)$$

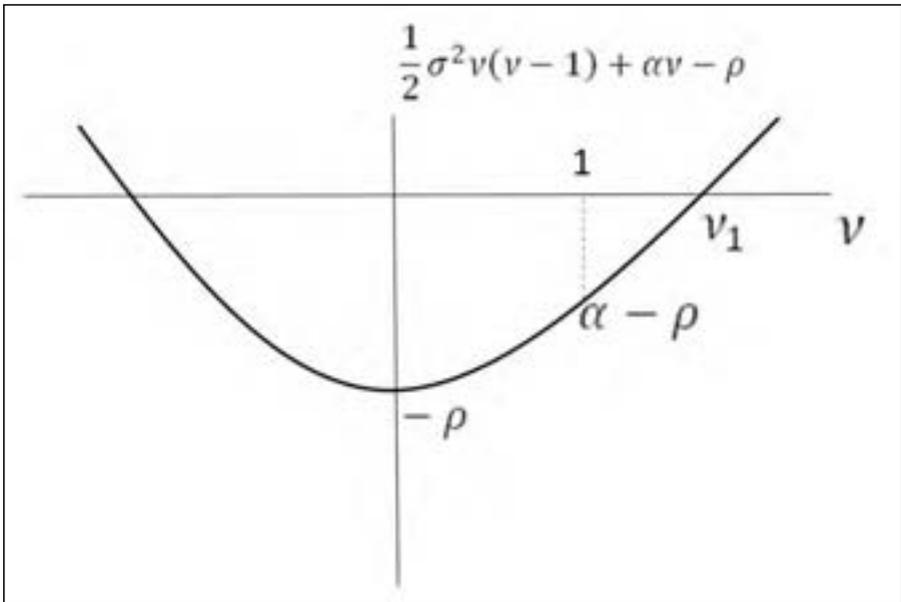
$$\text{s.a. } F_E(0) = 0, F_E(B^*) = B^* - C, F'_E(B^*) = 1$$

Se propone la forma de la solución:  $F_E(B) = C B^v$ , por lo que la ecuación característica es:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 v(v-1) + \alpha v - \rho = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$v_1 = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\sigma^2} + \sqrt{\left[\frac{\alpha}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{2\rho}{\sigma^2}} > 1; v_2 = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\sigma^2} - \sqrt{\left[\frac{\alpha}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{2\rho}{\sigma^2}} < 0$$



**Figura 1.** Solución de la cuadrática. Fuente: (Dixit and Pindyck, 1994)

Resumiendo, la forma general de la solución es  $F_E(B) = D_1 B^{v_1} + D_2 B^{v_2}$ . Ahora bien, la restricción  $F_E(0) = 0$  nos impone que el término con el exponente negativo no puede existir, por lo que  $D_2 = 0$ .

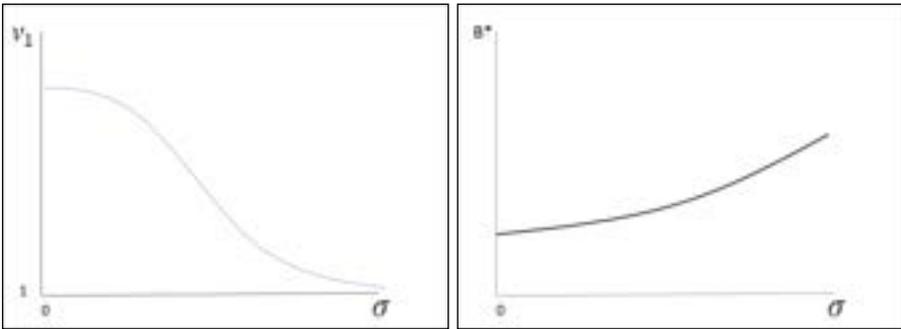
Asimismo, las otras restricciones nos imponen que  $B^* = \frac{v_1}{(v_1 - 1)}C$  y  $D_1 = \left(\frac{v_1 - 1}{C}\right)^{v_1 - 1} v_1^{-v_1}$ .

Lo anterior implica que la opción de esperar (si  $B < B^*$ ) está dada por:

$$F_E(B) = D_1 B^{v_1}$$

A mayor volatilidad, menor  $v_1$ , por lo que es mayor el umbral crítico

$$\frac{\partial v_1}{\partial \sigma} = 2 \frac{\alpha}{\sigma^3} + \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{\alpha}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right]^2 + \frac{2\rho}{\sigma^2} \right)^{-1/2} \left( -4 \frac{\alpha^2}{\sigma^5} + 2 \frac{\alpha}{\sigma^3} - 2 \frac{2\rho}{\sigma^3} \right) < 0 \Rightarrow \frac{v_1}{(v_1 - 1)} \uparrow \Rightarrow B^* \uparrow$$



**Figura 2.** La raíz y el beneficio crítico ( $B^*$ ) en función de la volatilidad del proceso.

## 2. La decisión gubernamental

En primer lugar, el umbral de decisión planteado es más prudente que el tradicional donde se requiere solamente que el valor presente de los beneficios netos sea igual al costo social irreversible del proyecto ( $B=C$ ). Utilizando el principio precautorio, se demora el proyecto hasta que los beneficios superen significativamente los costos, de forma de contemplar el aspecto irreversible de los costos y la posibilidad de que el beneficio neto observado hoy sea optimista (Farrow, 2004).

Ahora bien, el gobierno evalúa los beneficios netos analizando los beneficios sociales esperados pero contemplando los riesgos para la sociedad que conlleva permitir la innovación. Si al momento de la evaluación, el

beneficio esperado no es suficientemente mayor que el costo irreversible, el gobierno prefiere mantener su opción precautoria y no autorizar el proyecto.

El procedimiento propuesto para lograr una decisión gubernamental se detalla a continuación. Primeramente, al gobierno se le presenta un proyecto que debe autorizar y acuerda el sector privado los siguientes valores:

- El costo social irreversible que el proyecto causará:  $C$
- El valor presente del beneficio neto de costos reversibles futuros al momento inicial  $B(0)$
- Se estiman los parámetros del proceso que seguirá ese beneficio neto  $B$  ( $\alpha$  y  $\sigma$ )
- Tasa de descuento:  $\rho$

Se procede entonces al cálculo del valor crítico anteriormente mencionado de  $B^*$ :

- Cálculo de  $v_1$  en base los parámetros:
- $$B^* = \frac{v_1}{(v_1 - 1)} C$$

Por lo que la regla de decisión gubernamental es: Si  $B(0) \leq B^*$  se debe esperar y no debe autorizarse el comienzo del proyecto de inversión.

### 3. Decisión en contexto borroso

La regla propuesta en la sección anterior incorpora probabilísticamente (mediante la volatilidad de los beneficios futuros) la incertidumbre futura. La regla de decisión del gobierno es comparar el costo social irreversible del proyecto (corregido por un factor que depende de la volatilidad) con el beneficio actual esperado, ambos valores ciertos. Esto conlleva implícito asumir que el futuro es repetición del pasado, no contempla aspectos subjetivos ni incertidumbres en el modelo probabilístico.

Una forma de superar esto es incorporar la incertidumbre futura mediante números borrosos (Dubois and Prade, 1978), tanto el costo social irreversible

como el valor esperado del beneficio pueden ser modelados de esta forma. Carlsson y Fullér (2003) introducen una regla (heurística) para opciones reales en contexto borroso, donde los valores actuales esperados y los costos se estiman mediante números borrosos trapezoidales (Grzegorzewski and Mrówka, 2005, Grzegorzewski and Mrówka, 2007).

Ahora la regla de decisión necesaria debe comparar dos números borrosos para decidir si se autoriza el proyecto de inversión o no. Una metodología disponible para realizar la comparación es el concepto de distancia entre números borrosos (Cheng, 1998), revisado en un trabajo reciente por Asady (2011). En un trabajo de hace unos años Abbasbandy (2009) presenta diversas metodologías alternativas para realizar esta comparación: *D-distance*, mínima distancia, *sign-distance*, *H-distance* y Magnitud.

## Conclusiones

Vivimos en una sociedad de conocimiento donde permanentemente se impulsan innovaciones que, si bien muchas veces son beneficiosas para la sociedad, conllevan riesgos inciertos. Este trabajo ha desarrollado un modelo estocástico que cuantifica el valor de esperar y luego se describe el procedimiento gubernamental sugerido para la toma de decisiones a la hora de permitir una nueva inversión que conlleva riesgos sociales.

Este trabajo lo formaliza matemáticamente, siguiendo a Scott Farrow (2004), para permitir evaluar proyectos de inversión como parte de la toma de decisiones gubernamentales. El modelo articula técnicas de evaluación de riesgos, análisis costo-beneficio de proyectos en contextos inciertos. De esta forma presenta un modelo que cuantifica, frente a la posibilidad de llevar adelante un proyecto de I+D, el valor social de la “precaución”.

El trabajo claramente demuestra que si se evalúa socialmente un proyecto de I+D, se debe utilizar un método cuantitativo de decisión que incorpore la incertidumbre y la irreversibilidad en los criterios gubernamentales de gestión de riesgos, superando la metodología estándar de costo-beneficio. Asimismo, se demuestra que en contextos inciertos, la diferencia (beneficio esperado – costo) que el gobierno debe exigir debe ser superior a cero.

## Referencias

- Abbasbandy, S. (2009) Ranking of fuzzy numbers, some recent and new formulas. *IFSA-EUSFLAT 2009*, 642-646.
- Asady, B. (2011) Revision of distance minimization method for ranking of fuzzy numbers. *Applied Mathematical Modelling*, 35, 1306-1313.
- Carlsson, C. & Fullér, R. (2003) On optimal investment timing with fuzzy real options. *Fuzzy Sets and Systems*, 139, 297-312.
- Cheng, C. H. (1998) A new approach for ranking fuzzy numbers by distance method. *Fuzzy sets and systems*, 95, 307-317.
- Dixit, A. K. & Pindyck, R. S. (1994) *Investment under uncertainty*, Princeton University Press Princeton, NJ.
- Dubois, D. & Prade, H. (1978) Operations on fuzzy numbers. *International Journal of Systems Science*, 9, 613-626.
- Echeverría, J. (2005) Gobernanza de las nanotecnologías. *Documento de Ciencia, Tecnología y Sociedad, Instituto de Filosofía, CSIC*.
- Farrow, S. (2004) Using Risk Assessment, Benefit Cost Analysis, and Real Options to Implement a Precautionary Principle. *Risk Analysis*, 24, 727-735.
- Grzegorzewski, P. & Mrówka, E. (2005) Trapezoidal approximations of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 153, 115-135.
- Grzegorzewski, P. & Mrówka, E. (2007) Trapezoidal approximations of fuzzy numbers--revisited. *Fuzzy Sets and Systems*, 158, 757-768.
- Klinke, A., Dreyer, M., Renn, O., Stirling, A. & Van Zwanenberg, P. (2006) Precautionary Risk Regulation in European Governance. *Journal of Risk Research*, 9, 373-392.





# SECCIÓN 3

Área actuarial





## 3.1 | Análisis de la teoría de credibilidad y su aplicación en la tarificación

*María Teresa Casparri • María Alejandra Metelli*

### Resumen

Este trabajo formaliza matemáticamente el principio precautorio utilizado para la gobernanza de innovaciones, permitiendo cuantificar el valor de retrasar una inversión determinada que conlleva riesgos sociales. Se propone un modelo estocástico de parada óptima que articula técnicas de evaluación de riesgos, análisis costo-beneficio y modelos de valuación de inversiones irreversibles bajo incertidumbre. De esta forma se presenta un modelo que cuantifica el valor social de la “precaución”.

Muchas veces, en la actividad aseguradora, el Actuario se encuentra en dificultades al momento de realizar el cálculo de las tarifas. Ello se debe a que no siempre se cuenta con los suficientes datos estadísticos para efectuar una buena estimación de los siniestros esperados.

Al no poseer entonces, la suficiente experiencia propia, surge la necesidad de recurrir a estadísticas correspondientes a otras empresas aseguradoras que operen en el mismo ramo que se intenta tarifar. Es en este punto entonces, donde debe recurrirse a la teoría de la credibilidad.

Mediante este procedimiento que no es otra cosa que una aplicación de la estimación estadística, se intenta determinar la ponderación que debe ser asignada a la experiencia propia.

El objetivo del presente trabajo es el análisis de uno de los métodos que se aplican dentro de la mencionada teoría, para calcular las ponderaciones citadas y su aplicación a la tarificación en los seguros patrimoniales.

**Palabras clave:** estimación estadística, tarificación, teoría de la credibilidad.

## Introducción

En muchos terrenos de la actividad humana, se presenta la necesidad de proteger el patrimonio personal o institucional contra los efectos de fenómenos imprevisibles que, de realizarse, pueden causar perjuicios económicos de monto considerable a quienes los padecen.

El propósito del seguro es proteger a personas y bienes contra los efectos económicos de la realización del riesgo, al sustituir la posibilidad incierta de un perjuicio de gran monto por el pago, único o periódico, de una prima a una institución aseguradora que garantiza que, en caso de producirse el siniestro, resarcirá al asegurado de los daños económicos que resulten de esa eventualidad.

Es posible, entonces, establecer, de manera probabilística, el monto total que la compañía ha de desembolsar en concepto de siniestros en un período dado y, en base a ello determinar las tarifas que ha de cobrar para poder cumplir con los compromisos asumidos.

En términos generales, las tarifas – en lo que a la faz técnica se refieren - deben garantizar que el total de primas cobradas resulte suficiente para pagar el costo de dichos reclamos, incluidos los gastos asociados a los mismos.

Una característica de los riesgos asegurables es que ocurren de manera imprevisible o aleatoria.

Es imposible, en consecuencia, prever con exactitud el instante en que ocurrirán y el monto de las pérdidas económicas que tendrán como consecuencia.

Para enfrentar esta incertidumbre, se recurre al cálculo de probabilidades que tiene por objeto establecer las reglas para estudiar situaciones de incertidumbre. Para poder aplicarlo, es necesario que las compañías cuenten con un gran número de asegurados.

La aplicación del cálculo de probabilidades requiere esencialmente que los mecanismos subyacentes a una situación de incertidumbre permanezcan inalterados durante el período en el que van a aplicarse.

Para que las estadísticas tengan un valor significativo deben presentarse las siguientes condiciones: homogeneidad de los datos, suficiente magnitud

de la masa estudiada, invariabilidad de las circunstancias o estabilidad de las condiciones del entorno.

En el caso de seguros patrimoniales, es esencial que se trabaje con grupos de objetos que tengan un riesgo homogéneo.

## Bases técnicas para el cálculo de primas

A fin de proceder a la tarificación de un ramo determinado de seguros patrimoniales, resulta necesario contar con información relativa a:

- Frecuencia siniestral
- Intensidad o costo medio de siniestro
- Prima pura

Se entiende por frecuencia siniestral -  $f$  - a la proporción de siniestros existentes en el ramo a tarificar; es decir, resulta del cociente entre el número de siniestros observados en un período determinado y el total de expuestos a riesgo en el mismo período:

$$f = \text{número de siniestros} / \text{expuestos a riesgos}$$

Se entiende por intensidad o costo medio del siniestro -  $\mu$  - al importe que, en promedio, se abona por siniestro, y resulta del cociente entre el monto total desembolsado en concepto de siniestros y número de siniestros en el período analizado:

$$\mu = \text{Monto total desembolsado en concepto de siniestros} / \text{número de siniestros}$$

Se entiende por prima pura -  $PP$  - al importe que, en promedio, debe abonar cada asegurado, y resulta del cociente entre el monto total desembolsado en concepto de siniestros y número de expuestos a riesgo en el período bajo análisis:

$$PP = \text{Monto total desembolsado en concepto de siniestros} / \text{número de expuestos a riesgo.}$$

En consecuencia, puede observarse que la prima pura es el producto entre la frecuencia siniestral y la intensidad.

$$PP = f * \mu$$

No siempre la Compañía Aseguradora cuenta con demasiada información para poder efectuar el cálculo de sus tarifas. La cantidad de información de la cual dispone dependerá de la antigüedad que posee la misma operando en el ramo a tarifar. Puede tratarse de compañías aseguradoras que recién comienzan a operar o que tengan pocos años de experiencia en el ramo analizado.

En estos casos, en consecuencia, debe recurrirse a información de otras compañías aseguradoras que operen en el mismo ramo. Surge así la necesidad de establecer qué ponderación aplicar a la experiencia de la propia compañía y cuál a los datos correspondientes a otras compañías – externos -. El concepto recibe el nombre de teoría de la credibilidad.

La teoría de la credibilidad trata esencialmente de determinar qué grado de ponderación se debe dar a la evidencia observada; es decir, a la propia experiencia. La mayoría de los autores que tratan estas cuestiones definen la prima de credibilidad como la aproximación de la prima del riesgo por medio de una función dependiente de la siniestralidad real sufrida por ese determinado riesgo.

El problema de la teoría de la credibilidad consiste en determinar las ponderaciones que afectan a la experiencia de siniestralidad de una compañía respecto a la experiencia de un colectivo al que pertenece dicha compañía.

En consecuencia, la teoría de la credibilidad es el mecanismo que permite el ajuste sistemático de las primas de seguros a medida que se obtiene mayor experiencia de siniestralidad.

Se supone que se dispone para una compañía aseguradora de la experiencia de siniestralidad  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de modo que pueden calcularse su valor medio y varianza. El objetivo de la aseguradora es decidir qué prima cobrar a sus asegurados.

Existen tres alternativas posibles.

- Ignorar su experiencia de siniestralidad y cobrar la prima promedio correspondiente a otras compañías que operen en el ramo a tarifar.

- Cobrar el promedio de su experiencia, dar credibilidad total a la experiencia de la compañía aseguradora.
- Cobrar una prima que venga dada como un punto medio o combinación lineal convexa entre la experiencia de la compañía y la prima promedio de otras compañías aseguradoras.

## Credibilidad total

La confiabilidad en la estimación depende de la variabilidad de los siniestros.

Si las observaciones son lo suficientemente extensas y no existe variabilidad entre los datos observados, entonces es aceptable y lógico pensar en credibilidad total.

El problema consiste entonces en determinar qué cantidad de información es necesaria para poder asignar credibilidad total a la experiencia propia de la compañía aseguradora.

A fin de poder determinar la cantidad de información necesaria, se parte de la siguiente ecuación:

$$P [IX - E(X) I \leq r * E(X)] = p$$

Es decir, se establece un nivel de probabilidad  $P$ , resultando así que la probabilidad de que el valor muestral difiera del valor medio en menos de un porcentaje  $r$  – establecido del valor medio correspondiente, está dado por ese valor de probabilidad  $P$ . La variable  $X$  puede referirse tanto a frecuencia siniestral, intensidad o prima pura. Asignando una distribución de probabilidad a las variables consideradas, se determina el número esperado de siniestros que son necesarios para trabajar con el mencionado nivel de probabilidad; con lo cual, para determinar el número de expuestos necesarios deberá dividirse el mencionado resultado por la frecuencia siniestral esperada.

Para el método de las fluctuaciones limitadas, el problema que se plantea es hallar un valor adecuado de  $r$ , teniendo en cuenta la necesidad de eliminar las fluctuaciones aleatorias excesivas en la prima.

Algunos autores fijan esa proporción en un 5 %, estableciendo una alta probabilidad de que ello ocurra.

A fin de ejemplificar lo expuesto, se supone una muestra de  $n$  siniestros de monto  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , respectivamente, independientes entre sí. Se supone que los montos de siniestros se distribuyen normalmente con valor medio  $E(S)$  y varianza  $V(S)$ . De este modo, la intensidad media de siniestros – IMS – puede calcularse como el promedio de los mencionados montos de siniestros; es decir:

$$\text{IMS} = (\sum X_i) / n$$

IMS será entonces una variable aleatoria con distribución normal con valor medio equivalente a  $E(S)$  y varianza  $V(\text{IMS}) = V(S)/n$ .<sup>1</sup>

Se aplica entonces la expresión  $P [IX - E(X) I \leq r * E(X)]$  previamente desarrollada al concepto de intensidad para determinar el número de siniestros necesarios para obtener credibilidad total, obteniéndose:

$$P [I\text{IMS} - E(S) I \leq r * E(S)] = p$$

Es decir, la probabilidad de que la intensidad promedio muestral difiera del verdadero valor poblacional en menos de un porcentaje  $r$  del mismo es  $p$ .

Dado que la distribución de IMS es normal, debe estandarizarse la variable para poder resolver el problema. A partir de la estandarización mencionada, se obtiene el siguiente resultado:

$$n = (a / r)^2 * \left\{ V(S) / [E(S)]^2 \right\}$$

donde  $a$  es el valor de abscisa correspondiente al nivel  $p$  de probabilidad asignado, bajo el supuesto de distribución normal.

$r$  es el porcentaje de variación respecto al valor medio.

$E(S)$  es el valor medio del monto de siniestros.

$V(S)$  es la varianza del monto de siniestros.

<sup>1</sup> Puede observarse que la intensidad media de siniestros es la aplicación del concepto de media muestral y su distribución se deriva de la correspondiente a la distribución de la media muestral en el caso en que la muestra se seleccione de una población normal con varianza conocida.

Para ilustrar el cálculo, se supone que el costo promedio de siniestros sigue una ley normal con valor medio \$ 1.500.- y desvío \$ 700.-, cuál debe ser el número de siniestros requeridos para obtener credibilidad total si se desea que el valor estimado difiera del verdadero costo medio en menos de un 1 % de éste con una probabilidad del 95 %.

$$n = (1,96 / 0,01)^2 * \{490.000 / [1500]^2\}$$

Es decir, el número de siniestros necesarios para obtener credibilidad total es 8.367

Vale la pena mencionar que cuando se estima la prima pura, la cantidad de siniestros necesarios – información necesaria – para obtener credibilidad total es mayor dado que la variación de la misma puede provenir tanto de la frecuencia siniestral como a partir de la intensidad o costo promedio.

A fin de ilustrar lo expuesto, debe recordarse que la varianza de la prima pura es:

$$E(f) * V(S) + [E(S)]^2 * V(f)$$

Donde  $E(f)$  es el valor medio de la frecuencia

$V(S)$  es la varianza del monto del siniestro

$E(S)$  es el valor medio del monto del siniestro

$V(f)$  es la varianza de la frecuencia.

## Credibilidad parcial

Dado que no siempre se dispone de la información necesaria para trabajar con credibilidad total, es necesario determinar cuál es la ponderación que debe asignarse a la propia experiencia.

La fórmula que se aplica es la siguiente:

$$C = (n_{pe} / n_{ct})^{1/2}$$

Donde  $C$  es el factor de credibilidad, la ponderación asignada a la experiencia propia.

$n_{pe}$  es el número observado de siniestros correspondiente a la experiencia propia.  
 $n_{ct}$  es el número de siniestros necesarios para obtener credibilidad total.

Es decir, si para obtener credibilidad total fueran necesarios 700 siniestros y la compañía cuenta sólo con la información relativa a 400 siniestros, el factor de credibilidad a aplicar será del 75,60 %.

Si se deseara estimar la prima pura a cobrar se procederá entonces del siguiente modo:

- Se calculará la prima pura correspondiente a la compañía que está realizando la tarificación.
- Se calculará la prima pura promedio de las otras compañías aseguradoras.
- Se determinará el valor promedio de ambas asignando una ponderación del 75,60 % a la correspondiente a la compañía y un 24,40 % a la correspondiente al promedio de las compañías.

## **Algunos métodos aplicables para la determinación de la credibilidad parcial**

Existen diversos métodos para la determinación del factor de credibilidad. En el presente trabajo se analizarán:

- Método de las fluctuaciones limitadas.
- Método de Buhlmann.

### **Método de las fluctuaciones limitadas**

Si existiera credibilidad total el valor promedio obtenido a partir de la experiencia propia sería directamente el valor de la estimación a utilizar; ya sea, de la frecuencia siniestral, intensidad o prima pura. Los principales objetivos del método son:

- Determinación del número de observaciones para otorgar credibilidad total y la determinación de la credibilidad a asignar a muestras menores.

- Limitar el efecto que tendrán sobre la estimación final de la prima pura, por ejemplo, las fluctuaciones en la muestra observada.

Recordemos que para el método de las fluctuaciones limitadas, el problema que se plantea es hallar un valor adecuado de  $r$ , teniendo en cuenta la necesidad de eliminar las fluctuaciones aleatorias excesivas en la prima.

Se simboliza con ECT a la estimación mencionada: con lo cual, en este caso se tiene que:

$$P [ | E_{ct} - E(X) | \leq r * E(X) ] = p \quad ^2$$

Donde  $E_{CT}$  es el valor estimado para credibilidad total.

Dado que, conforme lo señalado en los párrafos anteriores, no contamos con la suficiente información para trabajar con credibilidad total, deberá aplicarse la siguiente fórmula para determinar el valor de nuestra estimación:

$$C * E_{cp} + (1 - C) * E_{DE}$$

El valor  $E_{CP}$  es la estimación efectuada a partir de las observaciones con que cuenta la compañía aseguradora – experiencia propia - mientras que el complemento de credibilidad se aplica a la estimación obtenida a partir de la experiencia correspondiente a las otras compañías aseguradoras -  $E_{DE}$  -.

La variación esperada en  $C * E_{CP}$  debe limitarse – ser análoga – a la variación permitida con credibilidad total. Es decir, el objetivo del método es limitar la fluctuación de  $C * E_{CP}$  a la permitida para  $E_{CT}$ .<sup>3</sup>

Se plantea entonces que.

$$P [ | E_{CT} - E(X) | \leq r * E(X) ] = P [ | C * E_{cp} - C * E(X) | \leq r * E(X) ]$$

Estandarizando ambas ecuaciones, se obtiene que:

$$C = \sigma_{CT} / \sigma_{CP}$$

<sup>2</sup> La variable X expuesta en los párrafos anteriores es considerada como ECT

<sup>3</sup> Dado que la diferencia entre  $E_{CP}$  y  $E_{CT}$  está dada por el tamaño de la muestra con que se trabaja, el valor esperado de ambas es el mismo mientras que  $E_{CP}$  tendrá un desvío standard superior que  $E_{CT}$  en virtud de que la muestra de la que se obtiene es de menor tamaño.

Donde

$\sigma_{CT}$  es el desvío standard correspondiente a los datos con credibilidad total.

$\sigma_{CP}$  es el desvío standard correspondiente a los datos con credibilidad parcial.

El factor de credibilidad, entonces, es inversamente proporcional a la desviación standard de las observaciones con credibilidad parcial.

Si se analiza la expresión obtenida, se observa que cuando la información propia disponible es escasa, el desvío standard correspondiente a credibilidad parcial es muy grande en relación al obtenido con credibilidad total; con lo cual, la credibilidad a asignar a la experiencia propia debe ser muy pequeña.

La mayor variabilidad de las observaciones propias hace que se dé menor ponderación a la experiencia propia.

## Método de Buhlmann

Pertenece al conjunto de métodos que se basan en la búsqueda de máxima precisión, minimizando los errores de la estimación.<sup>4</sup>

El enfoque de Buhlmann sobre el problema de la asignación de credibilidad tiene un mismo punto de partida:

$C$  \* Estimación obtenida a partir de los datos correspondientes a la experiencia propia +  $(1-C)$  \* estimación obtenida a partir de los datos externos

El factor de credibilidad propuesto por Buhlmann está dado por la siguiente expresión:

$$C = n / (n+k)$$

Donde  $k$  se conoce con el nombre de parámetro de Buhlmann.

Mientras que el valor  $n$  se refiere, según lo que se esté estimando, a número de siniestros – al estimar costo medio - o número de expuestos – al estimar frecuencia-.

<sup>4</sup>En el modelo no es necesario establecer hipótesis alguna ni sobre la distribución que gobierna a los riesgos individuales ni sobre la distribución a priori de los parámetros de riesgo.

A fin de determinarlo, es necesario descomponer la varianza total de la variable sujeta a análisis<sup>5</sup> en sus dos componentes: valor esperado de la varianza del proceso y varianza de las medias hipotéticas. Para ello debe recopilarse la información correspondiente a la variable analizada, definiendo previamente una característica o atributo del riesgo a evaluar a fin de poder realizar la clasificación.

Supongamos que se analizará la prima pura cobrada a conductores en distintas localidades. Se reúne la información correspondiente a las distintas localidades y distintas compañías aseguradoras. Se muestra el esquema en el siguiente cuadro:

LOCALIDAD COMPAÑÍA	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	...	A <sub>i</sub>	...	A <sub>r</sub>
C <sub>1</sub>	X <sub>11</sub>	X <sub>21</sub>	X <sub>31</sub>	...	X <sub>i1</sub>	...	X <sub>r1</sub>
C <sub>2</sub>	X <sub>12</sub>	X <sub>22</sub>	X <sub>32</sub>	...	X <sub>i2</sub>	...	X <sub>r2</sub>
C <sub>3</sub>	X <sub>13</sub>	X <sub>23</sub>	X <sub>33</sub>	...	X <sub>i3</sub>	...	X <sub>r3</sub>
...	...	...	...	...	..	...	...
C <sub>j</sub>	X <sub>1j</sub>	X <sub>2j</sub>	X <sub>3j</sub>	...	X <sub>ij</sub>	...	X <sub>rj</sub>
...	...	...	...	...	..	...	...
C <sub>s</sub>	X <sub>1s</sub>	X <sub>2s</sub>	X <sub>3s</sub>	...	X <sub>is</sub>	...	X <sub>rs</sub>

Donde: X<sub>ij</sub> es la prima pura cobrada por la compañía j en la localidad i.

A partir de este cuadro, se definen los siguientes conceptos.

### ***Media hipotética***

Se define como media hipotética al promedio correspondiente a un tipo de riesgo que reúne ciertas características en particular. En el ejemplo, el promedio se refiere a la prima pura y la característica analizada es la localidad. Es decir, es la esperanza condicional dado que se observaron las características mencionadas.

<sup>5</sup> Puede analizarse la frecuencia esperada, el costo medio o intensidad esperada o la prima pura esperada.

<sup>6</sup> No todas las compañías aseguradoras operan en todas las localidades; con lo cual, la cantidad de datos por localidad puede ser variable.

Se simbolizará la media hipotética como:  $E(X / A_i)$ , es decir: es la prima pura promedio correspondiente a la localidad  $i$ .

### ***Valor esperado de las medias hipotéticas***

Es el promedio de las medias hipotéticas consideradas. Se lo simbolizará como  $E(X)$ , representando en el ejemplo la prima pura promedio de todas las localidades.

### ***Varianza de las medias hipotéticas***

Se define como:

$$VMH = \Sigma \{ [E(X/A_i) - E(X)]^2 \} * n_i / n$$

Donde

$n$  es el total de observaciones <sup>7</sup>

$n_i$  es el total de observaciones correspondientes a la localidad  $i$ . <sup>8</sup>

En consecuencia, esta varianza mide las variaciones existentes entre el promedio de la localidad en particular respecto al promedio de todas las localidades.

De este modo, cuanto más parecidas sean las primas puras cobradas en las distintas localidades, menor será el valor de la varianza.

La mayor dispersión entre los valores cobrados se reflejará en un mayor valor de varianza de las medias hipotéticas.

### ***Varianza del proceso***

Se entiende por proceso al proceso aleatorio de generación de la variable sujeta a estudio- en el ejemplo prima pura-. Se define la varianza del proceso como la varianza de un tipo de riesgo en particular – en el ejemplo localidad -.

<sup>7</sup> Resulta equivalente a  $r*s$  si se posee información de todas las compañías en todas las localidades.

<sup>8</sup> Dependerá de la cantidad de compañías que operen en la localidad  $i$ .

Cada una de las localidades tendrá un valor esperado y una varianza. El valor esperado por localidad es la media hipotética calculada previamente.

La varianza por localidad estará dada por la siguiente expresión:

$$V(A_i) = \{ \sum [X_{ij} - E(X / A_i)]^2 \} / n_i$$

Mide las variaciones de la prima pura cobrada por cada compañía aseguradora en la localidad  $i$  respecto a la prima pura promedio cobrada en la mencionada localidad correspondiente a la totalidad de las compañías aseguradoras que operan en la misma. En consecuencia, de no existir diferencias entre lo que cobran las distintas compañías en la localidad, la varianza tenderá a cero.

### ***Valor esperado de la varianza del proceso***

El valor esperado de la varianza del proceso es entonces el promedio ponderado de las varianzas del proceso de cada una de las posibles combinaciones de factores que determinan el riesgo – en nuestro ejemplo la localidad-.

$$VEVP = \sum V(A_i) / r$$

El menor valor de este valor esperado implica que las variaciones entre las primas cobradas por las distintas compañías son pequeñas.

### ***Descomposición de la varianza total***

De este modo, puede demostrarse que la varianza total se descompone en el valor esperado de la varianza del proceso y la varianza de las medias hipotéticas.

$$\text{Varianza total} = \text{Valor esperado de la varianza del proceso} \\ + \text{Varianza de las medias hipotéticas.}^9$$

<sup>9</sup> Es el concepto estadístico de análisis de varianza de clasificación simple.

La constante  $k$  que utiliza Buhlmann es entonces el cociente entre el valor esperado de la varianza del proceso y la varianza de las medias hipotéticas.

$$K = \text{VEVP} / \text{VMH}$$

De modo que  $k$  será mayor cuanto mayor sea el valor esperado de la varianza del proceso. Cuanto menor sea el mencionado valor, más podremos explicar de la varianza total a partir de las variaciones observadas entre las medias hipotéticas y, en consecuencia, menor será el factor  $k$  y mayor credibilidad  $C$  daremos al valor o valores observados, provenientes de nuestra propia experiencia.

Ello es así porque no existe diferencia entre el promedio correspondiente a nuestra compañía – experiencia propia – respecto al promedio correspondiente al resto de las compañías.

Es claro que a mayor valor de  $k$ , menor será la credibilidad otorgada a la experiencia propia del asegurado. Resulta absolutamente lógico entonces que el factor  $K$  surja como el cociente mencionado ya que a mayor diferencia entre los valores esperados o medias de las distintas hipótesis, le demos mayor peso a la experiencia propia, a menor varianza explicada, menor credibilidad.

## Conclusiones

El método de fluctuaciones limitadas para credibilidad parcial compara la variabilidad de los datos de los que dispone la compañía con la que existiría si se contara con la totalidad de la información necesaria para obtener credibilidad total. El problema reside en obtener datos adicionales que permitan reunir la totalidad de los datos necesarios para credibilidad total.

Buhlmann analiza también la variabilidad de los valores a estimar comparando los datos correspondientes a la experiencia propia con los datos correspondientes a otras compañías – externos – pero, en este caso, no existe como condición un límite máximo de datos; es decir, los necesarios para credibilidad total.

## Referencias

- Nieto de Alba, Ubaldo y Vegas Asensio, Jesús, 1993, “*Matemática Actuarial*”, Fundación Mapfre Estudios, Madrid
- Thomas N.Herzog, 1994, “*Introduction to Credibility theory*”, Actex Publications.
- Sarabia Alegría, José María, Gómez Déniz, Emilio y Vázquez Polo, Francisco José, 2007, “*Estadística Actuarial – Teoría y aplicaciones*”, Pearson Educación, Madrid.
- “*Foundations of Casualty Actuarial Science*” , 2001, Casualty Actuarial Society



## 3.2 | La Estadística en la Ciencia Actuarial

*María Teresa Casparri • María Alejandra Metelli*

### Resumen

El presente trabajo intenta mostrar cuáles son las áreas de la estadística que resultan de aplicación en la carrera de Actuario, en qué campos son aplicadas en relación a la misma y cómo son utilizadas las herramientas mencionadas en los distintos campos.

Es necesario tener en cuenta que un graduado actuario debe contar con conocimientos suficientes a fin de poder valorar los hechos económico-sociales sometidos a leyes probabilísticas, valorar todo tipo de acontecimientos en los cuales existan riesgos implícitos, determinar lo que se denomina “valor económico de la vida humana”.

Debe también poder construir tablas relativas a los eventos de muerte, invalidez, accidente, enfermedad y determinar, de este modo, las respectivas probabilidades a partir de las mismas, en el caso de seguros de personas, así como también calcular las probabilidades relacionadas con eventos que pueden afectar la integridad del patrimonio de las personas -incendio, robo, desastres naturales-, en el caso de seguros patrimoniales; entre otras actividades.

En consecuencia, el mencionado profesional debe estar capacitado con las herramientas necesarias que le permitan, de este modo, establecer las bases para el cálculo de las primas correspondientes a los planes de seguros, a la determinación de cuotas en planes de capitalización con sorteos, al monitoreo permanente de las empresas que operan con este tipo de planes con el objetivo de establecer los mecanismos que garanticen la viabilidad y la estabilidad de las operaciones a fin de poder administrar científicamente el riesgo económico-financiero implícito.

Se deduce, entonces, que la Estadística es una ciencia fundamental que permite lograr los objetivos deseados a lo largo de la carrera.

**Palabras clave:** probabilidades, variable aleatoria, distribuciones de frecuencia, tablas de mortalidad.

## Introducción

La ciencia actuarial se dedica al estudio de fenómenos imprevisibles. Es así que el estudiante de la carrera de Actuario debe estar capacitado para poder predecir de algún modo la ocurrencia de estos fenómenos y encontrar alguna medida del riesgo implícito en los mismos.

La medición del riesgo, implícito en los fenómenos analizados por los Actuarios, se halla incorporado en el plan de estudios de la carrera dentro de las asignaturas específicas: Estadística Actuarial, Biometría Actuarial, Teoría Actuarial de los Seguros Personales, Teoría Actuarial de los Seguros Patrimoniales, Teoría del Equilibrio Actuarial, Bases Actuariales de las inversiones y financiaciones.

A lo largo de este trabajo, se realizará un detalle de algunos de los mencionados fenómenos, indicando qué herramientas estadísticas pueden en cada caso emplearse para su medición.

## Desarrollo

### *Contenido curricular*

Ya en las primeras materias del ciclo profesional el actuario comienza a familiarizarse con el riesgo si bien la asignatura Estadística I, correspondiente al segundo tramo de la carrera, es uno de sus pilares básicos, brindando las primeras herramientas necesarias de medición: probabilidades, variables aleatorias, series de frecuencias, entre otros conceptos.

En la asignatura Cálculo Financiero, uno de los temas incorporados en el programa se refiere a sistemas de capitalización con sorteos, lo cual implica introducir el concepto de probabilidades dado que asociada al sorteo se encuentra la probabilidad de resultar favorecido en el mismo. Asimismo, dado que en algunos de los sistemas mencionados, los suscriptores pueden resultar favorecidos en más de una oportunidad, se utiliza la distribución binomial para el cálculo de estas probabilidades.

Asimismo, en Estadística II, las distintas distribuciones que se estudian permiten luego analizar el comportamiento de fenómenos, las pruebas de bondad del ajuste permiten medir la precisión de los modelos que aplica el Actuario a los datos con los que debe trabajar para la determinación de las distintas tarifas, los modelos de regresión permiten que se realicen proyecciones a largo plazo necesarias en la práctica actuarial.

Luego, en materias específicas de la carrera, la asignatura Estadística Actuarial introduce los conceptos de procesos estocásticos. Muestra cómo pueden determinarse las probabilidades de absorción para lograr la aplicación de las mismas en la construcción de modelos financieros. Los procesos de nacimiento y muerte desarrollados por Poisson brindan otro enfoque para la construcción de modelos financieros y avanzan hacia la construcción de modelos de población<sup>1</sup> y de teoría del riesgo<sup>2</sup>. Los conceptos de promedios móviles y de modelos autorregresivos permitirán al Actuario el análisis de las series de tiempo y poder predecir valores futuros en fenómenos dinámicos.

Dentro de los temas incluidos en la asignatura Biometría Actuarial, el cálculo de probabilidades aparece como herramienta fundamental para entender el mecanismo de la tabla de mortalidad, primer elemento del análisis demográfico con el que se enfrenta el alumno de esta carrera.

A partir de este concepto, calculará las distintas probabilidades de supervivencia y fallecimiento de individuos en forma individual o en forma conjunta. Luego, la aplicación de los procesos de Markov le permitirán entender los distintos modelos de invalidez y enfermedad ya que un individuo, por ejemplo, puede invalidarse y por medio de la rehabilitación volver al estado original o, invalidarse y permanecer como inválido, derivando en la muerte en algún momento.

La materia Teoría Actuarial de los Seguros Patrimoniales introduce al alumno en el ámbito del seguro en relación con los ramos patrimoniales. En consecuencia, uno de los objetivos dentro de esta asignatura es que el alumno comience a calcular las tarifas con que las empresas saldrán al mercado. A tal fin, es necesario que el

<sup>1</sup> Estos modelos serán luego aplicados en el análisis demográfico que se estudia en la asignatura Biometría Actuarial.

<sup>2</sup> Este concepto se aplicará luego en el análisis de la misma que se desarrollará en la asignatura Teoría del Equilibrio Actuarial

Actuario pueda analizar la base de datos con la cual va a trabajar. Para lograr ser preciso en el mencionado análisis, debe calcular medidas de posición y dispersión a fin de evaluar el riesgo promedio y cuán disperso se encuentra el mismo. También debe poder analizar si los siniestros que se producen en la cartera de pólizas que estudia pueden ser ajustados a través de determinada función de probabilidad o de densidad según se encuentre analizando la cantidad de siniestros o la cuantía de los mismos. Si no cuenta con demasiada información para realizar el análisis, debe utilizar información exógena a cuyo fin, debe valerse de lo que recibe el nombre de teoría de la credibilidad. Esta teoría utiliza conceptos estadísticos relacionados con el análisis de la varianza, teorema de Bayer e intervalos de confianza en los distintos métodos de cálculo de lo que recibe el nombre de factor de credibilidad.

La asignatura Teoría Actuarial de los Seguros Personales refuerza los conceptos estadísticos introducidos en Biometría Actuarial, introduciendo el factor financiero para lograr determinar las tarifas correspondientes a los seguros personales. Utiliza los conceptos de promedios ponderados para la determinación de las mencionadas tarifas como asimismo el de desvío standard para indicar cuán dispersa podría resultar la tarifa a aplicar por la Empresa Aseguradora.

Al tratarse de productos a largo plazo y debiendo este tipo de empresas generar reservas que deben ser invertidas, no sólo resulta imprescindible la proyección de tasas de interés sino también evaluar la posibilidad de determinación de riesgo implícito en las mencionadas operaciones – riesgo de crédito, riesgo de mercado –

La asignatura Teoría del Equilibrio Actuarial muestra que la estructura patrimonial y de resultados de una Empresa Aseguradora se encuentra expuesta a riesgo en forma permanente. Resulta imperioso entonces, identificar el riesgo para lograr determinada solvencia, debiendo así en determinadas circunstancias recurrir al reaseguro.

Es así que, para esta medición las herramientas estadísticas que se utilizan son las relacionadas con variables aleatorias, estimadores, intervalos de confianza,

También, en el análisis del riesgo individual incluido en la temática de esta asignatura resultan necesarios los conocimientos acerca de teoremas aplicables cuando se desconocen las distribuciones de donde se obtienen los datos, entre otros, el teorema de Tchebycheff.

La asignatura Bases Actuariales de las inversiones y de la financiación apunta a conceptos financieros y analiza en primer término distintos criterios de decisión para la toma de decisiones, necesitando en consecuencia también contar con conocimientos de promedios y desvíos. La teoría de la cartera, desarrollada en la asignatura, no sólo necesita de los conceptos previamente mencionados sino que además requiere de herramientas de estimación. En los modelos de equilibrio desarrollados para el mercado de capitales se requiere el conocimiento de técnicas de regresión.

Puede observarse entonces, cuán necesaria resulta la Estadística en el estudio de la carrera de Actuario.

A continuación, se mostrarán algunos de los conceptos básicos que se utilizan en dos de las asignaturas que sirven como pilares para la carrera.

### ***Detalle y descripción de los fenómenos:***

Tal como se ha mencionado en la introducción, los cálculos actuariales se refieren fundamentalmente a mediciones del riesgo implícito dentro de los fenómenos que se analizan.

El riesgo está inmerso en un sinfín de actividades cotidianas, de allí que los individuos deban recurrir a la contratación de un seguro para poder disipar sus consecuencias.

A título de ejemplo, en el ámbito del seguro, se pueden mencionar las siguientes situaciones:

- La muerte de un jefe de familia.
- El incendio de una fábrica,
- El robo de un auto.

De su análisis, se observa que se trata de fenómenos imprevisibles, dado que no se conoce el momento en el cual ha de producirse el siniestro, ni siquiera, en algunos casos, si el mismo ha de producirse.

Además, las situaciones enumeradas traen aparejado un desembolso que, en la mayoría de los casos, implica erogaciones cuya cuantía también resulta incierta.

En el caso de la muerte del jefe de familia, sus herederos quedarán sin el ingreso que él generaba para la manutención.

Si se incendia una fábrica no sólo existe un daño patrimonial proveniente del deterioro del edificio e instalaciones, sino que además deja sin empleo a los operarios.

El auto puede servir como herramienta de trabajo y, en consecuencia, ocasionar una pérdida de ingresos.

En consecuencia, es aquí donde en base a herramientas estadísticas, el Actuario debe proceder a la medición del riesgo para la obtención de las tarifas con las cuales comercializarán sus productos las empresas aseguradoras.

### ***Medición***

Los fenómenos descriptos previamente -denominados riesgos asegurables- se caracterizan entonces por presentarse en forma imprevisible o aleatoria.

De acuerdo con lo expuesto, resulta imposible prever con exactitud el momento en que se presentarán, como asimismo el establecimiento de la pérdida económica en que derivarán.

Por las razones expuestas, resulta necesario recurrir al cálculo de probabilidades. Resultará necesaria la estimación de la ocurrencia del siniestro como asimismo la determinación del daño que produce el mismo.

Las empresas aseguradoras cuentan con una base de datos obtenida a través de la experiencia, a partir de la cual pueden determinarse la cantidad de casos siniestrados y el importe abonado en cada caso.

Sabido es, asimismo, que para que las proyecciones tengan validez, es necesario que se verifiquen, entre otras, las siguientes condiciones: homogeneidad de los datos, suficiente magnitud de la masa de datos analizada, invariabilidad de las circunstancias en el período proyectado respecto al período de análisis.

El Actuario debe entonces proceder a la medición del riesgo señalado a través de medidas estadísticas para poder así establecer las tarifas con que las empresas aseguradoras han de comercializar sus productos.

Con el fin de especificar cuáles son las herramientas necesarias, se analizarán cada uno de los fenómenos enunciados.

## ***Herramientas***

En todas las situaciones que se analizarán, podrá observarse que existen dos elementos básicos para el cálculo del costo del seguro<sup>3</sup>: la frecuencia y la intensidad.

El primer fenómeno descrito en el desarrollo, enmarca dentro del campo de seguros de personas. Los individuos, a partir de determinada edad<sup>4</sup>, toman conciencia de la necesidad de contratación de un seguro de vida.

Se trata entonces de un seguro de personas en el cual resulta, por un lado, necesario establecer una suma asegurada y, por el otro, medir el riesgo de ocurrencia del siniestro.<sup>5</sup>

Para la determinación de la suma asegurada debiera proyectarse la evolución de los ingresos de la persona que contratará el seguro a lo largo de su vida activa; es decir, el análisis que técnicamente debiera efectuarse se encuadra dentro de un análisis de regresión – más precisamente series de tiempo en la medida en que la variable explicativa es el tiempo a través de la evolución previamente mencionada -, en términos estadísticos.

La suma asegurada resultará entonces constante, siendo en este tipo de seguros lo que se asemejaría al concepto de intensidad.

Por otro lado, resulta también necesaria la determinación de la probabilidad de pago de la suma asegurada. Ello depende del momento en que tenga lugar el fallecimiento de la cabeza asegurada. Es decir, la herramienta necesaria para su cálculo está dada por las sucesivas probabilidades de fallecimiento a lo largo de los años de cobertura. Esas probabilidades se calculan a partir de la tabla de mortalidad con que opera la empresa aseguradora. Este componente probabilístico es el que se asemejaría al concepto de frecuencia.

De acuerdo con lo expuesto, para un peso de suma asegurada, la fórmula que debe aplicarse está dada por la siguiente expresión:

<sup>3</sup> El costo técnico del seguro recibe el nombre de prima pura.

<sup>4</sup> En general cuando forman una familia.

<sup>5</sup> En este caso, al tratarse de coberturas de largo plazo, también resulta necesario incluir el factor financiero.

$$A(x;0;n) = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} * q(x;t;1)^6$$

Donde:

- $A(x;0;n)$  es la prima pura única que debe abonar el asegurado de edad  $x$  para estar cubierto por muerte por un plazo de  $n$  años.
- $v^{t+1}$  es el factor financiero.
- $q(x;t;1)$  es la probabilidad de que el asegurado de edad  $x$  fallezca en el transcurso del  $t$ -ésimo año. Estas probabilidades se calculan a partir de las tablas de moralidad empleadas.

Cabe mencionar que las probabilidades de fallecimiento descriptas -  $q(x;t;1)$  - se calculan como cociente entre el número de fallecidos a la edad  $x+t$  y los expuestos a riesgos, sobrevivientes a la edad  $x$ . Ambos valores pueden calcularse a partir de las probabilidades anuales de muerte obrantes en la tabla de mortalidad utilizada.

Si el pago de las primas fuera anual, la prima pura anual se calcula dividiendo la expresión anterior por:

$$a(x;0;n) = \sum_{t=0}^{n-1} v^t * p(x;t)$$

Donde:

- $a(x;0;n)$  es la prima pura única de una serie de  $n$  pesos probables pagaderos al asegurado de edad  $x$  en forma anual mientras viva.
- $v^t$  es el factor financiero.
- $p(x;t)$  es la probabilidad de que el asegurado de edad  $x$  sobreviva  $t$  años. Estas probabilidades se calculan a partir de las tablas de mortalidad empleadas.

Cabe mencionar que las probabilidades de supervivencia descriptas -  $p(x;t)$  - se calculan como cociente entre el número de sobrevivientes a la edad  $x+t$  y los expuestos a riesgos, sobrevivientes a la edad  $x$ . Ambos valores

<sup>6</sup> La cobertura también puede ser por toda la vida -seguro de vida entera-.

pueden calcularse a partir de las probabilidades anuales de muerte obrantes en la tabla de mortalidad utilizada, las cuales a su vez permiten determinar las probabilidades de supervivencia.

Por otro lado, para la determinación de la suma asegurada, tal como fuere expuesto deben ser aplicadas técnicas de regresión.

La forma general del modelo lineal es:

$$Y_t = a_0 + a_1 * x_{1t} + a_2 * x_{2t} + \dots + a_k * x_{kt} + u_t$$

Donde,

$Y_t$ : es la variable que se desea explicar - regresando - , función del parámetro t que, generalmente es el tiempo.

$x_{it}$ : son las variables explicativas o regresores, que se suponen matemáticas, no estocásticas, es decir, medidas sin errores aleatorios (  $i = 1, 2, \dots, k$  ).

$u_t$ : es la variable aleatoria residual que puede provenir de tres causas: a) errores muestrales; b) errores provenientes de otras variables de menor importancia que las  $x_i$ , que no han sido consideradas explícitamente y, en consecuencia, no incluidas en el modelo de regresión; c) errores que se generan cuando el modelo no es lineal; es decir, la forma que vincula a las variables no es lineal.

En el caso analizado, se considerará una sola variable explicativa – el tiempo –.

El segundo y tercer fenómenos descriptos en el desarrollo, enmarcan dentro del campo de seguros patrimoniales.

En este caso, por un lado, deben estimarse probabilidades de ocurrencia que se determinarán a partir de la experiencia, para lo cual, debe contarse con un total de casos observados y un total de casos siniestrados; es decir, aquéllos en los que se ha verificado la ocurrencia del siniestro. Son las llamadas frecuencias siniestras.

En segundo término debe calcularse la intensidad. A tal fin resulta necesario contar con el importe abonado al producirse el siniestro en cada caso. Se

trata entonces de variables aleatorias dado que no siempre se abona el mismo importe – un importe constante – en caso en que el siniestro tenga lugar.

Se entiende por frecuencia siniestral -  $f$  - a la proporción de siniestros existentes en el ramo a tarifar; es decir, resulta del cociente entre el número de siniestros observados en un período determinado y el total de expuestos a riesgo en el mismo período:

$$f = \text{número de siniestros} / \text{expuestos a riesgos}$$

Se entiende por intensidad o costo medio del siniestro -  $\mu$  - al importe que, en promedio, se abona por siniestro, y resulta del cociente entre el monto total desembolsado en concepto de siniestros y número de siniestros en el período analizado:

$$\mu = \text{Monto total desembolsado en concepto de siniestros} / \text{número de siniestros}$$

Se entiende por prima pura – PP – al importe que, en promedio, debe abonar cada asegurado<sup>7</sup>, y resulta del cociente entre el monto total desembolsado en concepto de siniestros y número de expuestos a riesgo en el período bajo análisis:

$$\text{PP} = \text{Monto total desembolsado en concepto de siniestros} / \text{número de expuestos a riesgo.}$$

Es decir, la prima pura es el importe promedio que abona cada asegurado:

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i * p_i$$

En consecuencia, puede observarse que la prima pura resulta entonces del producto entre la frecuencia siniestral y la intensidad.

$$\text{PP} = f * \mu$$

<sup>7</sup> Resulta de la aplicación del concepto estadístico de esperanza matemática.

## Ejemplos

En el caso de seguros personales, debe contarse con información acerca de la evolución de los sueldos de la persona que contratará el seguro con el fin de proyectar el valor correspondiente a la suma asegurada.

La evolución expuesta se muestra en el siguiente cuadro:

**Cuadro I**

AÑO	SUELDO ANUAL
1	\$ 54.600,00
2	\$ 70.200,00
3	\$ 78.000,00
4	\$ 92.300,00
5	\$ 106.600,00
6	\$ 118.300,00
7	\$ 132.600,00
8	\$ 159.900,00
9	\$ 200.200,00
10	\$ 208.000,00
11	\$ 214.500,00
12	\$ 234.000,00
13	\$ 253.500,00
14	\$ 279.500,00
15	\$ 324.000,00

Cabe mencionar que se trata de cifras expresadas a valores constantes; es decir, la variación de las mismas no se debe al efecto inflacionario sino “al progreso del individuo”. Matemáticamente, entonces, en primer término, las cifras correspondientes a los ingresos deben ser deflacionadas previo al análisis de regresión.

En base a esta serie de valores constantes de ingresos, se realiza un análisis de regresión en el cual se toma como variable explicativa al tiempo -  $t$  - .

Aplicando las técnicas de regresión al modelo exponencial<sup>8</sup>, se obtiene entonces la siguiente función de ajuste:

$$Y_{\text{ajustada}} = e^{10.9326} * e^{0.1215*t}$$

Se observa que el crecimiento anual proyectado de los sueldos es 12,15 %.

Teniendo en cuenta la proyección realizada y, considerando entonces, una suma asegurada promedio de \$ 1.500.000.-<sup>9</sup>, se muestran a continuación los valores correspondientes a las primas puras únicas y anuales correspondientes a un seguro de muerte, para un asegurado del sexo masculino de 30 años para distintos plazos de cobertura, donde:

- Primera columna: indica los distintos plazos de cobertura.
- Segunda columna: indica el importe a abonar al momento de contratación para comprar la cobertura de muerte mencionada.
- Tercera columna: indica el importe a abonar anualmente por un plazo de cinco años mientras viva el asegurado para comprar la cobertura mencionada.
- Cuarta columna: indica el importe a abonar anualmente por un plazo de diez años mientras viva el asegurado para comprar la cobertura mencionada.
- Quinta columna: indica el importe a abonar anualmente por un plazo de treinta años mientras viva el asegurado para comprar la cobertura mencionada.

<sup>8</sup> Para aplicar MCC, previamente se procedió a linealizar la función.

<sup>9</sup> En base a las proyecciones, se consideró el promedio de los próximos veinte años.

**Cuadro II: Parte I**

Plazo cobertura Años	PPU CSO 80'	PPA plazo pago 5 años	PPA plazo pago 10 años	PPA plazo pago 30 años
0	\$ -			
1	\$ 2.545			
2	\$ 5.058			
3	\$ 7.538			
4	\$ 10.022			
5	\$ 12.519	\$ 2.713		
6	\$ 15.047	\$ 3.261		
7	\$ 17.621	\$ 3.819		
8	\$ 20.268	\$ 4.393		
9	\$ 22.997	\$ 4.984		
10	\$ 25.827	\$ 5.597	\$ 3.086	
11	\$ 28.764	\$ 6.234	\$ 3.437	
12	\$ 31.832	\$ 6.899	\$ 3.804	
13	\$ 35.014	\$ 7.588	\$ 4.184	
14	\$ 38.327	\$ 8.307	\$ 4.580	
15	\$ 41.763	\$ 9.051	\$ 4.991	
16	\$ 45.336	\$ 9.826	\$ 5.418	
17	\$ 49.034	\$ 10.627	\$ 5.860	
18	\$ 52.860	\$ 11.456	\$ 6.317	
19	\$ 56.808	\$ 12.312	\$ 6.789	
20	\$ 60.892	\$ 13.197	\$ 7.277	
21	\$ 65.108	\$ 14.111	\$ 7.780	
22	\$ 69.489	\$ 15.060	\$ 8.304	
23	\$ 74.049	\$ 16.048	\$ 8.849	
24	\$ 78.808	\$ 17.080	\$ 9.418	
25	\$ 83.787	\$ 18.159	\$ 10.013	
26	\$ 88.980	\$ 19.284	\$ 10.633	
27	\$ 94.388	\$ 20.457	\$ 11.279	
28	\$ 99.991	\$ 21.671	\$ 11.949	
29	\$ 105.780	\$ 22.925	\$ 12.641	
30	\$ 111.747	\$ 24.219	\$ 13.354	\$ 6.445,90
31	\$ 117.901	\$ 25.552	\$ 14.089	\$ 6.800,88
32	\$ 124.252	\$ 26.929	\$ 14.848	\$ 7.167,22
33	\$ 130.815	\$ 28.351	\$ 15.633	\$ 7.545,85
34	\$ 137.609	\$ 29.824	\$ 16.444	\$ 7.937,72
35	\$ 144.635	\$ 31.347	\$ 17.284	\$ 8.343,01

## Cuadro II: Parte II

Plazo cobertura Años	PPU CSO 80'	PPA plazo pago 5 años	PPA plazo pago 10 años	PPA plazo pago 30 años
36	\$ 151.885	\$ 32.918	\$ 18.150	\$ 8.761,21
37	\$ 159.329	\$ 34.531	\$ 19.040	\$ 9.190,57
38	\$ 166.933	\$ 36.179	\$ 19.949	\$ 9.629,24
39	\$ 174.664	\$ 37.855	\$ 20.872	\$ 10.075,14
40	\$ 182.495	\$ 39.552	\$ 21.808	\$ 10.526,88
41	\$ 190.423	\$ 41.270	\$ 22.756	\$ 10.984,19
42	\$ 198.447	\$ 43.009	\$ 23.715	\$ 11.447,06
43	\$ 206.570	\$ 44.770	\$ 24.685	\$ 11.915,63
44	\$ 214.788	\$ 46.551	\$ 25.667	\$ 12.389,64
45	\$ 223.063	\$ 48.344	\$ 26.656	\$ 12.866,95
46	\$ 231.329	\$ 50.136	\$ 27.644	\$ 13.343,77
47	\$ 239.502	\$ 51.907	\$ 28.621	\$ 13.815,19
48	\$ 247.488	\$ 53.638	\$ 29.575	\$ 14.275,88
49	\$ 255.198	\$ 55.309	\$ 30.496	\$ 14.720,63
50	\$ 262.569	\$ 56.906	\$ 31.377	\$ 15.145,78
51	\$ 269.562	\$ 58.422	\$ 32.213	\$ 15.549,15
52	\$ 276.151	\$ 59.850	\$ 33.000	\$ 15.929,22
53	\$ 282.319	\$ 61.187	\$ 33.737	\$ 16.285,05
54	\$ 288.047	\$ 62.428	\$ 34.422	\$ 16.615,43
55	\$ 293.296	\$ 63.566	\$ 35.049	\$ 16.918,25
56	\$ 298.029	\$ 64.591	\$ 35.615	\$ 17.191,25
57	\$ 302.215	\$ 65.499	\$ 36.115	\$ 17.432,71
58	\$ 305.844	\$ 66.285	\$ 36.548	\$ 17.642,01
59	\$ 308.925	\$ 66.953	\$ 36.917	\$ 17.819,74
60	\$ 311.488	\$ 67.508	\$ 37.223	\$ 17.967,61
61	\$ 313.579	\$ 67.961	\$ 37.473	\$ 18.088,19
62	\$ 315.250	\$ 68.324	\$ 37.673	\$ 18.184,61
63	\$ 316.562	\$ 68.608	\$ 37.829	\$ 18.260,26
64	\$ 317.572	\$ 68.827	\$ 37.950	\$ 18.318,57
65	\$ 318.342	\$ 68.994	\$ 38.042	\$ 18.362,95
66	\$ 318.923	\$ 69.120	\$ 38.111	\$ 18.396,45
67	\$ 319.359	\$ 69.214	\$ 38.164	\$ 18.421,60
68	\$ 319.681	\$ 69.284	\$ 38.202	\$ 18.440,19
69	\$ 319.902	\$ 69.332	\$ 38.228	\$ 18.452,92

Es decir, una persona de treinta años que contrata una cobertura de muerte por cuarenta años por un capital asegurado de 1.500.000.-, deberá abonar \$ 182.495.- si abona al contado – prima única -, \$ 39.552.- si abona cinco primas anuales, \$ 21.808 de abonar diez primas anuales o \$ 10.526.88 en el caso de treinta primas anuales.

La cobertura de muerte analizada implica que, de producirse el fallecimiento en el curso de los 40 años contratados, se abonará la suma de \$ 1.500.000.- a los derechohabientes al fin del año de fallecimiento del asegurado.

En el caso de abonarse primas anuales, las mismas son con efecto liberatorio; es decir, en caso de producirse el fallecimiento del asegurado, cesa la obligación del pago de primas.

A continuación, se ejemplifican los fenómenos correspondientes a coberturas de daños o patrimoniales.

El siguiente cuadro muestra, sobre un conjunto de 2000 pólizas observadas, cómo se distribuyen los siniestros.

Rango de los Siniestros		Valor Central	Casos	Total \$
0,00		0,00	1.800	0,00
0,00	600,00	300,00	8	2.400,00
600,00	1.000,00	800,00	45	36.000,00
1.000,00	1.400,00	1.200,00	54	64.800,00
1.400,00	1.800,00	1.600,00	41	65.600,00
1.800,00	2.200,00	2.000,00	16	32.000,00
2.200,00	2.600,00	2.400,00	23	55.200,00
2.600,00	3.000,00	2.800,00	7	19.600,00
3.000,00	3.400,00	3.200,00	4	12.800,00
3.400,00	3.800,00	3.600,00	2	7.200,00
3.800,00	y más	0,00	0	0,00
<b>Total</b>			<b>2.000</b>	<b>\$ 295.600,00</b>
<b>Casos sin siniestros:</b>			<b>1.800</b>	<b>0,00</b>
<b>Casos con siniestros:</b>			<b>200</b>	<b>\$ 295.600,00</b>
<b>Costo Promedio por Póliza:</b>				<b>\$ 147,80</b>
<b>Frecuencia:</b>			<b>10,00%</b>	
<b>Intensidad Media:</b>			<b>\$ 1.478,00</b>	

En este caso, se observa que el costo promedio por póliza es de \$ 147.80 y surge de calcular el valor esperado correspondiente a las 2000 pólizas observadas.

Es decir, es lo que en promedio debe abonar cada asegurado para resultar cubierto; es decir, es la suma que aporta cada uno de los asegurados para contribuir al pago de los siniestros.

A partir del mencionado cuadro pueden también calcularse los valores correspondientes a la varianza, desvío standard y coeficiente de variación, tal como surge del siguiente cuadro:

$E(X)=$	147,8
$Var(X)=$	243.445
$Disp(X)=$	493,40
$Rrel(X)=$	333,83%

El coeficiente de variación, en consecuencia, resulta en este ejemplo equivalente a 333.83 %, lo cual está mostrando un alto grado de dispersión respecto al valor medio.

Lo expuesto implicaría que el asegurador debería recargar el costo promedio obtenido para estar cubierto de los posibles desvíos que pudieran producirse.

El siguiente cuadro muestra la frecuencia siniestral

<b>f</b>	<b>P(F=f)</b>
0	0,9
1	0,1
<b>sumas</b>	1

La variable aleatoria  $f$  representa la frecuencia siniestral, es una variable aleatoria con distribución binomial puntual. La probabilidad de éxito – probabilidad de ocurrencia del siniestro – es del 10 %.

A partir de estos datos puede calcularse el valor esperado y la varianza de la mencionada variable aleatoria. Se transcriben a continuación los valores:

$E(f)=$	0,10
$Var(f)=$	0,9

El siguiente cuadro representa la variable aleatoria cuantía del siniestro; es decir, sólo se limita al análisis de las pólizas siniestradas:

<b>z</b>	<b>P(Z=x)</b>
300,00	0,04
800,00	0,225
1.200,00	0,27
1.600,00	0,205
2.000,00	0,08
2.400,00	0,115
2.800,00	0,035
3.200,00	0,02
3.600,00	0,01
<b>Sumas:</b>	<b>1,0000</b>

A partir de estos datos, puede también calcularse su valor medio y varianza cuyos valores se muestran a continuación:

E(Z)=	1.478,00
Var(Z)=	467.916,00

Ese costo promedio puede también obtenerse, tal como fuere expuesto, como producto entre la frecuencia e intensidad.

Del mismo modo la varianza puede obtenerse a partir de la aplicación de la siguiente relación:

$$\sigma^2 = \sigma_F^2 * (\mu_I)^2 + \sigma_I^2 * \mu_F$$

Donde,

- ✓  $\sigma^2$ : Varianza siniestral.
- ✓  $\sigma_F^2$ : Varianza de la frecuencia siniestral.
- ✓  $\mu_I$ : Media de la cuantía de siniestros.
- ✓  $\sigma_I^2$ : Varianza de la cuantía de siniestros.
- ✓  $\mu_F$ : Media de la frecuencia siniestral.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, se procede a la verificación de las relaciones presentadas:

### *Costo medio*

$$PP = \mu * f$$

$$PP = 1.478 * 0.10$$

$$PP = 147.80$$

### *Varianza*

$$\sigma^2 = \sigma_F^2 * (\mu_I)^2 + \sigma_I^2 * \mu_F$$

$$243.445 = 0.09 * 1.478^2 + 467.916 * 0.10$$

## **Resultados y Conclusiones**

Del análisis presentado surge que uno de los pilares de la ciencia actuarial se encuentra en esta disciplina: la Estadística.

Resulta entonces indispensable que el estudiante de la carrera de Actuario maneje en forma fluida los conceptos básicos de esta disciplina como los que se mencionaran brevemente en esta presentación.

Se ha mostrado aquí la necesidad de que los mismos cuenten con conocimientos relacionados con probabilidad, variables aleatorias, promedios, medidas de variabilidad, análisis de regresión, entre otros.

Se recalca que esto es sólo una breve enunciación de las necesidades básicas del Actuario en relación a la materia. Dentro de los contenidos expuestos en el desarrollo, se ha hecho mención a otras herramientas de la estadística que resultan fundamentales para un buen entendimiento de las asignaturas incluidas en el plan de estudios de la carrera.

## Referencias

- Levi, Eugenio; (1973), “Matemática Financiera y Actuarial”, Editorial Bosch, Barcelona.
- Nieto de Alba, Ubaldo y Vegas Asensio, Jesús, (1993), “*Matemática Actuarial*”, Fundación Mapfre Estudios, Madrid
- Novales, Alfonso; (1998), “Estadística y Econometría”, Editorial McGraw – Hill.
- Yasukawa, Alberto Motoyuki; (2001), “Matemática Actuarial: Valuaciones actuariales”, Ediciones Eudecor.
- “*Foundations of Casualty Actuarial Science*”, (2001), Casualty Actuarial Society
- Sarabia Alegría, José María, Gómez Déniz, Emilio y Vázquez Polo, Francisco José,(2007) , “*Estadística Actuarial – Teoría y aplicaciones*”, Pearson Educación, Madrid.
- Casparri, María Teresa, Metelli, María Alejandra y Mutchinick, Paula (2012), “*Aplicaciones de los seguros de personas a la gestión actuarial*”, Eudeba.



## 3.3 Una aplicación actuarial al modelo de Azbel

*María Teresa Casparri • María Alejandra Metelli • Carolina Artuso*

### Resumen

En diversas circunstancias los actuarios y otros profesionales se encuentran con la necesidad de conocer, no sólo cuál es la fuerza de mortalidad a la que está sometida una población determinada en un momento dado del tiempo, sino también conocer su evolución futura. Por dicho motivo, en el presente trabajo nos propusimos proyectar en el tiempo las tablas de mortalidad de Argentina para ambos sexos. Dado que la información disponible en nuestro país es escasa, fue necesario recurrir a fuentes externas. Desde principios del siglo XX, año tras año, muchos países han venido construyendo sus propias tablas de mortalidad. Haciendo uso de dicha información, buscamos vincular la última tabla de mortalidad local disponible con alguna de las tablas norteamericanas que se han publicado desde el año 1933 al presente. El objetivo fue encontrar entre todas ellas y para cada sexo, una a la cual, la nuestra podría ser equivalente. Para ello, hemos recurrido al uso de tests estadísticos, y una vez completados los mismos hemos podido decidir por cuál podría ser reemplazada. Por otro lado, con el objetivo de analizar la mortalidad de la población de Estados Unidos, hemos utilizado al modelo de Azbel. Para cada una de las tablas mencionadas discriminadas por sexo, y mediante el método de mínimos cuadrados, hemos realizado una regresión lineal entre el logaritmo natural de la tasa anual de mortalidad y la edad. Una vez obtenida la estimación de los parámetros para cada uno de los años involucrados, y mediante la utilización de series de tiempo, éstos fueron proyectados de manera tal de conocer sus valores futuros. Completado dicho proceso, hemos podido construir las tablas de mortalidad venideras para dicho país. Por último, haciendo uso de dicha predicción, y suponiendo que el desarrollo temporal de ambas tablas es similar, logramos obtener las tablas de mortalidad futuras para Argentina.

**Palabras clave:** Mortalidad, tablas, ajustamiento, proyecciones

## Introducción

Cuando un actuario decide calcular el valor de la prima correspondiente a un seguro de vida o de muerte, necesita conocer la mortalidad a la cual estará sometida la población en el futuro. Pero al momento de realizar los cálculos dicha información no es conocida, por lo tanto debe basarse en las tablas de mortalidad disponibles en ese instante, las cuales, incluso, en muchos casos no están actualizadas, y por ende no representan no sólo la mortalidad futura del colectivo; sino ni siquiera la presente. Por dicho motivo, es necesario realizar predicciones. En países como Argentina, donde la información disponible es escasa, es necesario recurrir a fuentes externas para cumplir dicho objetivo.

El primer paso a seguir es encontrar una tabla de mortalidad externa a la cual la tabla local podría ser equivalente. Para ello, hemos recurrido a la Human Mortality Data Base, donde diversos países publican año tras año la evolución de la mortalidad de su población. En este trabajo hemos decidido para ser comparada con la tabla local publicada en el año 1991, discriminada por sexo. Para poder medir la similitud entre la tabla argentina y cada una de las norteamericanas hemos recurrido al uso de dos estadísticos. El primer estadístico utilizado es el llamado A/E, el cual se define como:

$$\frac{A}{E} = 100 \cdot \frac{\sum_{i=K}^N l_{i0} \cdot q_{i1}}{\sum_{i=K}^N l_{i0} \cdot q_{i0}} \quad (1)$$

Donde  $l_{i0}$  es la probabilidad de encontrarse con vida a la edad  $i$  según la tabla de base con  $l_{k0}=1$ ,  $q_{i0}$  es la probabilidad anual de fallecimiento para una persona de edad  $i$  acorde a la tabla de base y  $q_{i1}$  es la correspondiente a la tabla local a analizar. Los límites  $K$  y  $N$  son elegidos según el propósito deseado. En la ecuación (1) el numerador es proporcional al número de muertes esperadas en la tabla base si la mortalidad fuese la correspondiente a la población local; mientras que el denominador es proporcional al número de muertes esperadas en la población base.

Utilizando la aproximación normal para el estadístico representado en la ecuación (1) se obtiene un intervalo de confianza para el mismo con un nivel

de confianza  $(1-\alpha)$  será:

$$\left( 100 - 100 \cdot \frac{Z_{\alpha}}{2} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=K}^N l_{i0}^2 \cdot q_{i0} \cdot \frac{1-q_{i0}}{T_i}}{(\sum_{i=K}^N l_{i0} \cdot q_{i0})^2}}, 100 + 100 \cdot \frac{Z_{\alpha}}{2} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=K}^N l_{i0}^2 \cdot q_{i0} \cdot \frac{1-q_{i0}}{T_i}}{(\sum_{i=K}^N l_{i0} \cdot q_{i0})^2}} \right) \quad (2)$$

El segundo estadístico utilizado se vincula con el tiempo de vida restante, el cual se define como:

$$ERL = 100 \cdot \frac{\sum_{i=K}^N l_{i0} - 0.5}{\sum_{i=K}^N l_{i0} - 0.5} \quad (3)$$

Donde  $l_{K0}=l_{K1}$ . La última expresión da la proporción de tiempo de vida remanente entre ambas tablas, expresada como porcentaje.

Una vez encontrada la tabla externa que mejor se asimile a la local en base al uso de los estadísticos anteriormente mencionados, se procederá a su proyección futura. Para ello, hemos recurrido al modelo de Azbel, el cual suele arrojar buenos resultados y se caracteriza por su simplicidad. Dicho modelo viene dado por la siguiente expresión:

$$q_x = e^{b(x-T)} \quad (4)$$

Siendo  $q_x$  la tasa anual de mortalidad para una persona de edad  $x$  y  $T$  la edad máxima que podría alcanzar con vida un individuo de la población en cuestión; es decir, la edad para la cual  $q_T$  es igual a la unidad.

Mediante la aplicación de logaritmo natural a ambos lados de la expresión (3), se obtiene una relación lineal entre el logaritmo de la tasa anual de mortalidad y la edad  $x$ . Para obtener el valor óptimo de los parámetros usamos el método de mínimos cuadrados. Este procedimiento fue realizado para cada una de las tablas de mortalidad correspondientes a Estados Unidos desde el año 1946 hasta la última disponible. En la próxima sección se pueden observar los resultados obtenidos para los parámetros y se podrá asumir el crecimiento lineal de los mismos en el tiempo. Por lo tanto, haciendo uso de dicha tendencia se pueden obtener sus valores futuros y así construir las tablas de mortalidad venideras.

Por último, suponiendo que el desarrollo futuro de la mortalidad local será similar al experimentado y a experimentar por la población de base, se podrán obtener las tasas anuales de mortalidad actuales y futuras para nuestro país.

## Resultados

### a) Elección de la tabla base

Hemos vinculado la tabla de mortalidad de Argentina del año 1991 con diversas tablas de Estados Unidos, discriminadas por sexo; y para cada una de ellas hemos calculado los estadísticos de las expresiones (1) y (3).

En la tabla 1 se pueden observar los resultados obtenidos para cada uno de ellos para las tablas correspondientes al sexo femenino al comparar la tabla local con la correspondiente a Estados Unidos del año 1973. También se ha incluido en la misma los límites del intervalo de confianza para el estadístico A/E.

**Tabla 1.** Estadísticos para mujeres

Estadístico A/E			Estadístico ERL
Valor	Límite inferior ( $\alpha=0.05$ )	Límite superior ( $\alpha=0.05$ )	
99,93149	99,40965	100,5904	100,3421

En la Figura 1 se compara la tasa anual de mortalidad para cada una de las edades correspondiente a cada una de las tablas

**Figura 1:** Comparación de la mortalidad de Argentina 1991 con E.E.U.U 1973, mujeres.



Se puede observar de los resultados obtenidos con los estadísticos que ambas tablas pueden ser consideradas equivalentes a un nivel de confianza del 95%. En la figura 1 podemos ver como ambas curvas se superponen excepto quizá para edades mayores a los 85 años.

En el caso de los hombres se observó que la tabla que mejor ajusta a la local depende del rango etario analizado. Para edades menores a los 60 años la que mejor ajustó fue la de Estados Unidos del año 1975, mientras que para edades superiores fue la del año 1974. En la próxima tabla se exhiben los mismos estadísticos para el caso de los individuos masculinos.

**Tabla 2.** Estadísticos para hombres

	Estadístico A/E (0;60)			Estadístico ERL (0;60)	Estadístico A/E (60;99)			Estadístico ERL (60;99)
	Valor	Límite inferior ( $\alpha=0.05$ )	Límite superior ( $\alpha=0.05$ )		Valor	Límite inferior ( $\alpha=0.05$ )	Límite superior ( $\alpha=0.05$ )	
1974	95,746	98,788	101,212	99,8094	99,716	99,329	100,671	101,561
1975	99,517	98,764	101,236	99,5093	103,405	99,317	100,683	99,773

En la Figura 2 se exponen las tasas de mortalidad correspondientes a las tres tablas.

**Figura 2**



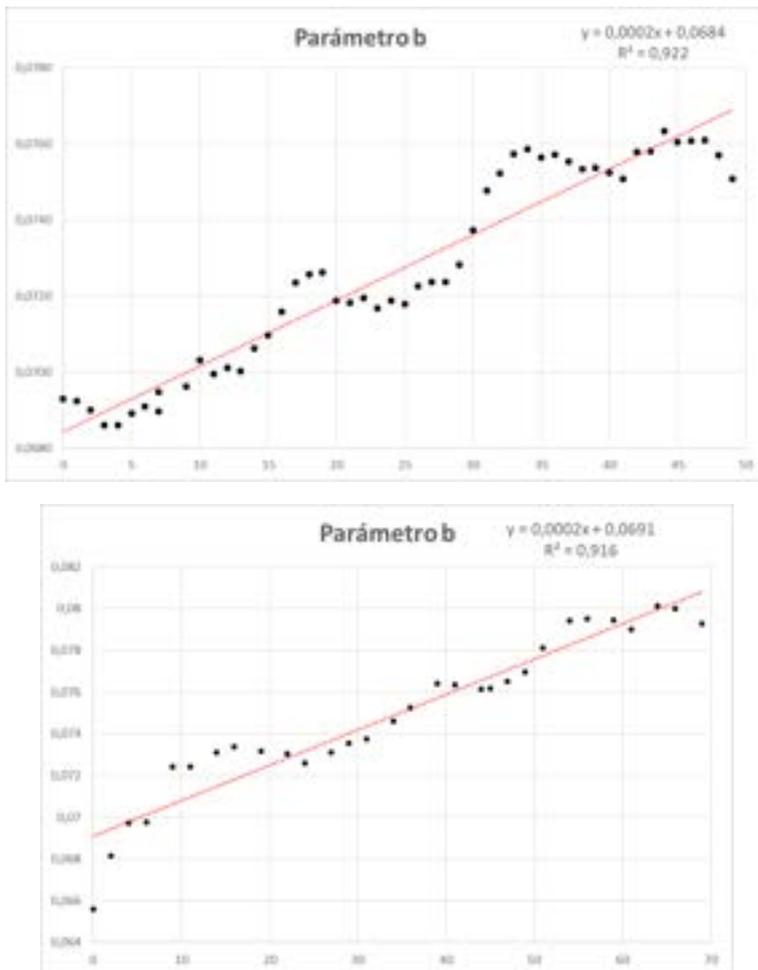
En base a los resultados volcados en la tabla 2 se puede observar que en el caso de la población masculina, la tabla por la cual la nuestra podría ser reemplazada depende del rango etario; conviniendo una para ser usada en el caso de la población activa y otra para la pasiva.

**b) Proyección de las tablas externas en el tiempo**

Como se ha mencionado en el apartado anterior se utilizó el modelo de Azbel para modelar las tablas de mortalidad externas, en este caso de Estados Unidos, para luego, mediante la proyección de sus parámetros poder estimar la mortalidad de dicho país a futuro. Luego, suponiendo que el desarrollo de las tablas de mortalidad del mencionado país y la local se comportan de forma similar, poder proyectar la propia.

En la próxima figura se muestra la evolución del parámetro b del mencionado modelo.

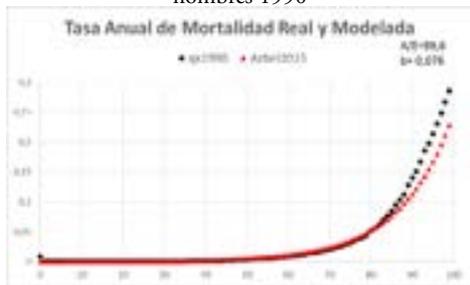
**Figura 3**



Se puede observar una tendencia lineal creciente de este parámetro en el tiempo. Por lo tanto, haciendo uso de la misma se pueden proyectar sus valores a futuro.

A modo ilustrativo se exponen las curvas de mortalidad reales y las estimadas mediante el modelo para el año 1990.

**Figura 4.a:** Mortalidad real y modelada, hombres 1990



**Figura 4.b:** Mortalidad real y modelada, mujeres 1990



Podemos observar en las últimas figuras que la mortalidad estimada es consistente con la real.

## Conclusiones

Conocer la mortalidad futura es de gran importancia en muchas disciplinas; motivo por el cual es necesario realizar proyecciones. En países como el nuestro, las estadísticas disponibles son escasas, por ende es necesario recurrir a fuentes externas para poder cumplir con el mencionado objetivo.

Mediante el uso de dos simples estadísticos pudimos encontrar tablas de mortalidad norteamericanas a las cuales la nuestra podría ser equivalente. Luego, conociendo el desarrollo futuro de la tabla externa, poder proyectar la propia. También observamos que, si bien el modelo de Azbel es simple, nos puede brindar una buena estimación respecto de la mortalidad actual y futura, siempre y cuando los datos utilizados sean suficientes.

## Referencias

Azbel, M.Y. Empirical laws of mortality and evolution

Andreeski, C. Analysis of mortality in Republic of Macedonia. *Procedia-Social and behavioral sciences* 44 (2012) 169-176

Andreeski, C., Vasant P. Simplified Azbel model for fitting mortality tables. 17<sup>th</sup> IFAC World Congress, Seoul Korea, 2008

Arató, M.; Bozsó, D, Elek, P., Zempléni, A. Forecasting and simulating mortality tables. *Mathematical and Computer Modelling* 49 (2009) 805-813



## 3.4 | Planes de Ahorro: Análisis de la Resolución IGJ N° 14/2020

*María Teresa Casparri • Aída Castegnaró • María Alejandra Metelli*

### Resumen

La Inspección General de Justicia de la Nación, a través del Departamento Control Federal de Ahorro, es el Organismo que tiene a su cargo la fiscalización de las sociedades que comercializan planes de ahorro previo en todo el país.

Dicha fiscalización contempla la aprobación de bases técnicas y el control de los cumplimientos periódicos exigidos a este tipo de sociedades.

El trabajo se centrará en el análisis de la resolución IGJ N° 14/2020 dictada en abril del corriente año, cuya finalidad es palear el fuerte incremento de los precios de los automóviles en el grupo de suscriptores.

Se expondrá entonces una descripción de los planes de ahorro en la que se mostrarán los elementos técnicos intervinientes para cerrar con el análisis de dos resoluciones dictadas por el Organismo en los momentos en que se producen estas situaciones correspondientes, respectivamente, a los años 2002 y 2020.

El presente trabajo forma parte de la investigación sobre gestión responsable y sustentable de riesgos agropecuarios en Argentina que se desarrolla en el Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos aplicados a la Economía y a la Gestión (C.M.A.)

**Palabras clave:** alícuota, diferimiento, recupero

## Introducción

La historia de los planes de ahorro previo para la adjudicación directa de bienes muebles tiene su origen en el dictado de la Res.I.G.J.N° 2337/68: que aprueba la variante denominada de ciclo cerrado.

La venta de bienes muebles – actualmente básicamente automotores – ha ido desarrollándose mediante financiación por planes de ahorro desde 1960.

Los sistemas cerrados de ahorro previo incluidos en la resolución previamente citada tienen como objeto la adjudicación directa de bienes muebles.

El mecanismo con que operan este tipo de sistemas consiste en la formación de grupos con un número de suscriptores equivalente al duplo de la duración del plan. De este modo, mensualmente, se recaudan cuotas y se adjudican dos bienes, uno por sorteo y otro por licitación. El mecanismo de licitación consiste en adjudicar el bien a aquel suscriptor que ha ofertado el mayor número de cuotas puras.

Se trata de los círculos cerrados sin reposición donde las características principales son las siguientes:

- Cada individuo – suscriptor – se integra a un grupo.
- Cada grupo está compuesto por un número de suscriptores equivalente al duplo de la duración del plan seleccionado.
- Todos los suscriptores de un mismo grupo deben haber suscripto el mismo bien tipo.
- Al suscribir la solicitud, el suscriptor debe abonar un porcentaje del valor del bien en concepto de derecho de suscripción.
- Mensualmente, el suscriptor abonará una cuota compuesta de:
  - Cuota pura: equivalente al precio del bien vigente al momento de pago dividido por la cantidad de meses de duración del plan seleccionado.
  - Cargas administrativas: importe para cubrir los gastos de la sociedad administradora que puede ser expresado como porcentaje sobre la cuota pura o sobre el precio del bien tipo.

- Cuota de seguro de vida
  - Cuota de seguro del bien: a partir del momento en que resulta adjudicado.
- Al salir adjudicado, deberá abonar un porcentaje del precio del bien en concepto de derecho de adjudicación.

## Elementos técnicos

Conforme lo previamente expuesto, los elementos técnicos utilizados en los planes de ahorro son los siguientes:

**Valor suscripto o básico:** es el precio del bien por el cual se suscribió el contrato de ahorro previo.

**Valor móvil:** es el precio del bien suscripto en los sucesivos meses.

**Plazo:** es la cantidad de meses de duración del plan de ahorro.

**Adherentes:** es el conjunto de suscriptores que forman un grupo en un plan de ahorro previo, en general, resulta equivalente al doble de la duración del plan seleccionado.

Dentro de un mismo grupo el valor suscripto es siempre el mismo.

**Período de ahorro:** es el lapso que transcurre desde el inicio de la vigencia del plan hasta el momento en que el suscriptor resulta adjudicado.

**Período de amortización:** es el lapso que transcurre desde el momento en que el suscriptor resulta adjudicado hasta la finalización de vigencia del plan.

**Derecho de suscripción:** es un importe equivalente a un porcentaje del valor suscripto, en general, el 3 %. Se abona cuando se suscribe el contrato.

**Cuota pura:** Es la porción del valor suscripto que mensualmente es abonada por cada uno de los suscriptores. En los planes de círculo

cerrado es equivalente a la  $n$ -ésima parte de dicho valor. Es la misma para los períodos de ahorro y de amortización.

**Cargas administrativas:** es un porcentaje de la cuota pura que el suscriptor abona mensualmente a fin de que la sociedad administradora pueda hacer frente a sus gastos mensuales.

**Cuota de seguro de vida:** es la prima correspondiente a un seguro de vida que cubre el riesgo de muerte del suscriptor, debiendo cancelar la compañía aseguradora el saldo de deuda del suscriptor al momento de fallecimiento. Si se tratara de un suscripto no adjudicado, la compañía cancelará la deuda y se le entregará el bien suscripto a los derechohabientes.

**Cuota de seguro del bien:** esta cuota cubre el siniestro del bien, de producirse el mismo la compañía aseguradora abona el valor asegurado a la Administradora, procediendo ésta a la cancelación de la deuda y restituyendo la diferencia al suscriptor. Se cobra a partir del momento en que el suscriptor recibió el bien suscripto.

**Cuota comercial:** resulta de la suma de los componentes previamente mencionados.

**Derecho de adjudicación:** es un porcentaje del valor móvil, en general, el 1 % y se abona cuando el suscriptor resulta adjudicado.

**Fondo de adjudicación y reintegros:** Está formado por las cuotas puras de ahorro y amortización, los excedentes de meses anteriores los cuales deben ser girados a la fábrica a efectos de congelar precios, no reeditando, en consecuencia, interés alguno.

**Adjudicaciones:** la cantidad de adjudicaciones mensuales depende de las disponibilidades del fondo en el mes considerado.

**Modalidades de adjudicación:** las mismas se realizan por sorteo o licitación.

**Sorteo:** Mensualmente, se adjudica uno de los bienes por esta modalidad. A tal fin se realiza un acto de sorteo, con presencia de escribano, donde mediante la utilización de un bolillero u otro sistema aprobado por el Organismo se determina el número ganador dentro de los correspondientes a los distintos órdenes de cada grupo.

**Licitación:** cada suscriptor, previo a cada acto de adjudicación, presenta su oferta de licitación, que consiste en ofrecer determinada cantidad de cuotas. Resulta ganador aquel suscriptor que haya ofrecido el mayor número de cuotas y que no haya sido beneficiado por sorteo.

**Cancelaciones anticipadas:** en cualquier momento, el suscriptor puede adelantar parte o la totalidad de las cuotas adeudadas.

**Fondo de ahorro o Haber del suscriptor:** es el total ahorrado por el suscriptor en un momento dado. resulta equivalente al número de cuotas abonadas por el valor de la cuota pura de ahorro al momento del cálculo.

**Saldo de deuda:** es el total adeudado por el suscriptor en un momento dado. Resulta equivalente al número de cuotas adeudadas por el valor de la cuota pura de amortización al momento del cálculo.

**Renuncia:** en cualquier momento, antes de resultar adjudicado, un suscriptor puede renunciar a su plan, debiendo notificar a la sociedad de su decisión. En tal caso, el mismo se hará acreedor de sus ahorros a la finalización de la vigencia del plan suscripto, teniendo una quita equivalente al 2 % de éste.

**Rescisión:** si un suscriptor antes de resultar adjudicado, dejase de abonar tres cuotas, su contrato es rescindido. En tal caso, el mismo se hará acreedor de sus ahorros a la finalización de la vigencia del plan suscripto, teniendo una quita equivalente al 4 % de éste.

## Nomenclatura

Se presenta a continuación la nomenclatura utilizada para representar cada uno de los elementos técnicos incluidos en los planes comercializados por las empresas de ahorro previo para la adjudicación directa de bienes.

**V(0)** valor suscripto o básico. Es el precio del bien tipo.

**V(t)** valor móvil correspondiente al t-ésimo mes

**n** duración del plan

**r** porcentaje de cargas administrativas que se aplica sobre la cuota pura.

**nca** cantidad de cuotas anticipadas

**nl** cantidad de cuotas licitadas

**DS** derecho de suscripción

**Cp(t)** cuota pura correspondiente al t-ésimo mes

**Ca(t)** cargas administrativas correspondientes al t-ésimo mes.

**Csv(t)** cuota de seguro de vida correspondiente al t-ésimo mes

**Csb(t)** cuota de seguro del bien correspondiente al t-ésimo mes

**Cc(t)** cuota comercial correspondiente al t-ésimo mes

**DA** derecho de adjudicación

**FA(t)** fondo de ahorro alcanzado por el suscriptor ahorrista en un momento t determinado

**HS(t)** haber del suscriptor alcanzado por el suscriptor ahorrista en un momento t determinado

## Fórmulas

Las fórmulas que permiten el cálculo de los distintos elementos técnicos son las siguientes:

$$DS = 0.03 * V(0)$$

$$Cp(t) = V(t) / n$$

$$Ca(t) = r * Cp(t)$$

$$Cc(t) = Cp(t) + Ca(t) + Csv(t) \text{ si es ahorrista}$$

$$Cc(t) = Cpam(t) + Ca(t) + Csv(t) + Csb(t) \text{ si es adjudicatario}$$

$$DA = 0.01 * V(t)$$

$$FA(t) = (t + nca) * cpa(t)$$

$$SD(t) = (n - t - nca - ncl) * cpa(t)$$

$$HS(n) = (1 - 0.02) * FA(t;n) \text{ en el caso de renuncia}$$

$$HS(n) = (1 - 0.04) * FA(t;n) \text{ en el caso de rescisión}$$

Debe tenerse en cuenta que a la finalización de la vigencia del plan existirán excedentes provenientes de multas aplicadas a aquellos suscriptores que hayan renunciado o rescindido sus contratos, los que deberán ser distribuidos entre los suscriptores adjudicados.

## **Sobre la viabilidad y equidad del plan – Medidas adoptadas por el organismo de control**

Conforme lo expuesto, el objeto de las sociedades que administran planes de ahorro para la adquisición directa de bienes por ciclo cerrado, es la adjudicación mensual del bien para el cual el conjunto de suscriptores adhirió.

A tal fin la sociedad procede a la recaudación mensual de las cuotas que aplica a la adquisición de los bienes con idéntica periodicidad.

Estos planes resultan equitativos en la medida en que todos los suscriptores se lleven un bien de características similares al suscripto (debe tenerse en cuenta que en planes de larga duración la fabricación del bien originalmente suscripto puede discontinuarse).

Además, los planes resultan viables en la medida en que puedan cumplirse en forma mensual y durante toda la vigencia del contrato los compromisos asumidos; es decir, que puedan comprarse las unidades a adjudicar mensualmente y pueda satisfacerse el pago de los haberes correspondientes a renunciados y rescindidos a la finalización de la vigencia del plan.

Esto significa que los aumentos de precio deben ser soportados proporcionalmente por todos y cada uno de los adherentes; es decir, la cuota

a abonar mensualmente por el suscriptor dependerá del precio del bien y variará en la misma proporción en que lo haga el precio de éste.

En el año 2002 el cese de la convertibilidad que tuvo lugar el 7 de enero, produjo un significativo aumento en el precio de los autos que, de acuerdo con lo prescrito en las bases técnicas, debía ser trasladado a los suscriptores ni bien producido para garantizar la viabilidad y equidad del plan.

Sin embargo, el traslado de este abrupto incremento en la cuota hubiera producido las siguientes consecuencias:

- No pago de las cuotas por parte de los adjudicados, sin posibilidad en aquel momento de proceder a la ejecución prendaria.
- No pago de las cuotas por parte de los no adjudicados, no teniendo éstos posibilidad de recuperar sus ahorros en lo inmediato, ya que no se produciría afluencia de cuotas futuras ni ejecuciones prendarias posibles.
- Imposibilidad de devolución de sus ahorros a renunciantes y rescindidos por las razones previamente expuestas.

Ante estas circunstancias y teniendo en cuenta lo previsto en la ley 25561 que otorga a los deudores el pago de sus deudas sin incremento alguno por seis meses, siendo ello en consecuencia aplicable a suscriptores adjudicados, es que el Organismo de Control entendió necesario el dictado de una resolución (Res.I.G.J. N° 01/2002) que, teniendo como base las premisas expuestas, establezca un procedimiento que amortiguara el abrupto incremento de las alícuotas por 90 días para resolver en la forma menos dañosa posible para el futuro sin vulnerar la esencia del plan de ahorro - equitatividad y viabilidad del sistema-.Al no poder aplicarse ajustes, los planes cuyo objeto es la adjudicación de bienes muebles resultan inviables dado que, si la cuota no sigue el ritmo de variación de los bienes no podrán adquirirse mensualmente los bienes a adjudicar y, en consecuencia, aquellos suscriptores que no habían sido adjudicados previo a la sanción de la ley mencionada no podrían tener acceso al bien seleccionado.

De acuerdo con lo expuesto el Organismo de Control dicta, entonces, la Res.I.G.J N° 09/2002, a través de la cual permite el ajuste de las cuotas mediante la aplicación de la variación mensual de los precios de los bienes, estableciendo asimismo normas de diferimiento para los incrementos ocurridos entre enero y julio del año 2002 no trasladados a los suscriptores.

Lo expuesto previamente ha tenido lugar nuevamente en el curso del año 2019 y ha hecho que el Organismo de Control dicte la resolución IGJ N° 14/2020.

## **Análisis de la resolución IGJ 142/2020**

A raíz de los sucesivos aumentos de precios y de la imposibilidad de que los suscriptores pudieran efectuar el pago regular de sus cuotas, el Organismo de Contralor dicta la resolución IGJ N° 142/2020 con entrada en vigencia el 11 de abril del corriente año.

El análisis ha de focalizarse en los aspectos técnicos de la mencionada resolución.

La resolución mencionada permite que tanto suscriptores ahorristas como adjudicados integrados a grupos cerrados con anterioridad al 30 de septiembre de 2019 puedan ejercer una opción de diferimiento.

Se les ofrece entonces la posibilidad de diferir la alícuota – cuota pura – y cargas administrativas en base a un esquema explícitamente pautado por el Organismo, en hasta doce cuotas consecutivas a vencer a partir del momento en que se ejerce la opción por parte del suscriptor.

La opción mencionada puede ofrecerse a partir de la entrada en vigencia de la resolución bajo análisis y hasta el 30 de agosto del corriente año. Deja asimismo abierta la posibilidad de poder ser ofrecida a quienes hubieren renunciado o rescindido sus contratos desde el 1ro. de abril de 2018 hasta la entrada en vigencia de esta resolución, haciendo la salvedad de que, al resultar adjudicados, los suscriptores deben cancelar las cuotas en mora previo a la entrega de la unidad.

¿Qué importe puede diferirse? El artículo 3 de la mencionada resolución establece que de las 12 o menor cantidad de cuotas por vencer sobre las que podrá ejercerse la opción, se diferirán los siguientes porcentajes:

- a) De las últimas cuatro cuotas o menor cantidad un 10 %.
- b) De las cuatro anteriores o menor cantidad un 20 %.
- c) De las cuatro anteriores o menor cantidad un 30 %.

En el artículo 5 establece que el recupero de los mencionados porcentajes tendrá lugar luego de finalizado el plan de ahorro en hasta un máximo de 12 cuotas. El monto de cada una de ellas no podrá exceder al de una alícuota más su carga.

En función de lo expuesto y, teniendo en cuenta que la resolución se refiere a las últimas cuotas que se difieren, se distinguen tres grupos de suscriptores:

1. Aquellos que adeuden cuatro o menos cuotas: en este caso, cada una de las cuotas comerciales se reducirá en un 10 %
2. Aquellos que adeuden más de cuatro cuotas, pero no más de ocho: en este caso, las cuatro últimas cuotas comerciales adeudadas se verán reducidas en un 10 % mientras que las anteriores – hasta un máximo de cuatro – se verán reducidas en un 20 %.
3. Aquellos que adeuden más de ocho cuotas, pero no más de doce: en este caso, las cuatro últimas cuotas comerciales adeudadas se verán reducidas en un 10 % mientras que las cuatro anteriores se verán reducidas en un 20 % y las anteriores siguientes – hasta un máximo de cuatro se reducirán en un 30 %.

En consecuencia, a aquellos suscriptores que adeuden más de doce cuotas se les aplicará el esquema de diferimiento indicado en el punto 3.

A título de ejemplo, el siguiente cuadro muestra la evolución de los porcentajes de cuotas ingresados mensualmente por un suscriptor, aplicables a la cuota pura y a la carga administrativa. Se trabaja en el ejemplo con un plan de 60 meses que ha sido suscripto en marzo 2019, el vencimiento correspondiente a la primera cuota ha tenido lugar al mes siguiente y, en junio 2020 se ha computado su opción por el diferimiento ofrecido en la presente resolución.

MES	CUOTA	PORC. CUOTA	PORCENTAJE CANCELADO	
			MENSUAL	CUMULADO
abr-19	1	100%	1,667%	1,667%
may-19	2	100%	1,667%	3,333%
jun-19	3	100%	1,667%	5,000%
jul-19	4	100%	1,667%	6,667%
ago-19	5	100%	1,667%	8,333%
sep-19	6	100%	1,667%	10,000%
oct-19	7	100%	1,667%	11,667%
nov-19	8	100%	1,667%	13,333%
dic-19	9	100%	1,667%	15,000%
ene-20	10	100%	1,667%	16,667%
feb-20	11	100%	1,667%	18,333%
mar-20	12	100%	1,667%	20,000%
abr-20	13	100%	1,667%	21,667%
may-20	14	100%	1,667%	23,333%
jun-20	15	70%	1,167%	24,500%
jul-20	16	70%	1,167%	25,667%
ago-20	17	70%	1,167%	26,833%
sep-20	18	70%	1,167%	28,000%
oct-20	19	80%	1,333%	29,333%
nov-20	20	80%	1,333%	30,667%
dic-20	21	80%	1,333%	32,000%
ene-21	22	80%	1,333%	33,333%
feb-21	23	90%	1,500%	34,833%

## MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LAS CIENCIAS ECONÓMICAS

mar-21	24	90%	1,500%	36,333%
abr-21	25	90%	1,500%	37,833%
may-21	26	90%	1,500%	39,333%
jun-21	27	100%	1,667%	41,000%
jul-21	28	100%	1,667%	42,667%
ago-21	29	100%	1,667%	44,333%
sep-21	30	100%	1,667%	46,000%
oct-21	31	100%	1,667%	47,667%
nov-21	32	100%	1,667%	49,333%
dic-21	33	100%	1,667%	51,000%
ene-22	34	100%	1,667%	52,667%
feb-22	35	100%	1,667%	54,333%
mar-22	36	100%	1,667%	56,000%
abr-22	37	100%	1,667%	57,667%
may-22	38	100%	1,667%	59,333%
jun-22	39	100%	1,667%	61,000%
jul-22	40	100%	1,667%	62,667%
ago-22	41	100%	1,667%	64,333%
sep-22	42	100%	1,667%	66,000%
oct-22	43	100%	1,667%	67,667%
nov-22	44	100%	1,667%	69,333%
dic-22	45	100%	1,667%	71,000%
ene-23	46	100%	1,667%	72,667%
feb-23	47	100%	1,667%	74,333%
mar-23	48	100%	1,667%	76,000%
abr-23	49	100%	1,667%	77,667%
may-23	50	100%	1,667%	79,333%
jun-23	51	100%	1,667%	81,000%
jul-23	52	100%	1,667%	82,667%
ago-23	53	100%	1,667%	84,333%
sep-23	54	100%	1,667%	86,000%
oct-23	55	100%	1,667%	87,667%
nov-23	56	100%	1,667%	89,333%

dic-23	57	100%	1,667%	91,000%
ene-24	58	100%	1,667%	92,667%
feb-24	59	100%	1,667%	94,333%
mar-24	60	100%	1,667%	96,000%

Es decir, una vez completada la vigencia, el suscriptor ha cancelado el 96 % del valor móvil.

Se muestran a continuación los porcentajes diferimiento para planes de distintos plazos que se encuentran en la situación límite de cada una de las tres situaciones contempladas por la resolución.

<b>DIFERIMIENTO DURACION DEL PLAN</b>	<b>12 CUOTAS</b>	<b>8 CUOTAS</b>	<b>4 CUOTAS</b>
20	12,00%	6,00%	2,00%
40	6,00%	3,00%	1,00%
50	4,80%	2,40%	0,80%
60	4,00%	2,00%	0,67%
72	3,33%	1,67%	0,56%
84	2,86%	1,43%	0,48%
96	2,50%	1,25%	0,42%
108	2,22%	1,11%	0,37%
120	2,00%	1,00%	0,33%

Se observa por ejemplo que el porcentaje máximo diferido se presenta en el plan de menor duración que se encuentra abonando las primeras cuotas.

De la lectura de la resolución surge asimismo que, los porcentajes diferidos han de recuperarse a la finalización de la vigencia del plan contratado en hasta un máximo de doce cuotas, no pudiendo el importe correspondiente a recupero ser inferior al valor de una cuota más su carga.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Debe recordarse que lo que se difiere es la alícuota pura más la carga administrativa.

El siguiente cuadro muestra para los planes de distinta duración y los porcentajes de diferimiento indicados – para el caso de 12 cuotas – la cantidad máxima de cuotas en que podría devolverse el importe adeudado.

PLAN	20	40	50	60	72	84	96	108	120
PORCENTAJE	12,00%	6,00%	4,80%	4,00%	3,33%	2,86%	2,50%	2,22%	2,00%
CANT. CUOTAS									
1	2,40	2,40	2,40	2,40	2,40	2,40	2,40	2,40	2,40
2	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20
3	0,80	0,80	0,80	0,80	0,80	0,80	0,80	0,80	0,80
4	0,60	0,60	0,60	0,60	0,60	0,60	0,60	0,60	0,60
5	0,48	0,48	0,48	0,48	0,48	0,48	0,48	0,48	0,48
6	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40
7	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34
8	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30
9	0,27	0,27	0,27	0,27	0,27	0,27	0,27	0,27	0,27
10	0,24	0,24	0,24	0,24	0,24	0,24	0,24	0,24	0,24
11	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22
12	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20

Es decir, sólo se podrán devolver en hasta un máximo de tres cuotas de admitirse el ingreso de una tercera cuota equivalente al 20 % de la cuota normal.

Se observa que el porcentaje de valor móvil que se difiere es distinto para cada uno de los planes. Al ser también distinto para cada uno de ellos el porcentaje correspondiente a la cuota pura pero siempre manteniendo la proporcionalidad entre planes, la cantidad de cuotas que deben recuperarse es la misma para todos los planes. A título de ejemplo, el porcentaje de alícuota correspondiente a un plan de 50 meses es del 2 %, lo cual hace que el 4.8% de valor móvil diferido equivalga a 2.40 cuotas.

El siguiente cuadro muestra los resultados señalados para un plan de 60 meses de duración en cada una de las tres situaciones propuestas.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Debe recordarse que se ejemplifican sólo las situaciones correspondientes a la cantidad máxima de cuotas adeudadas en cada una de las situaciones.

PLAN	60	60	60
PORCENTAJE	4,00%	2,00%	0,66666%
CANT. CUOTAS			
1	2,40	1,20	0,400
2	1,20	0,60	0,200
3	0,80	0,40	0,133
4	0,60	0,30	0,100
5	0,48	0,24	0,080
6	0,40	0,20	0,067
7	0,34	0,17	0,057
8	0,30	0,15	0,050
9	0,27	0,13	0,044
10	0,24	0,12	0,040
11	0,22	0,11	0,036
12	0,20	0,10	0,033

Las conclusiones son las mismas a las que se arribó en el caso anterior en relación a la cantidad máxima de cuotas. En este caso si un suscriptor adeudaba 8 cuotas – 2 % del valor móvil – entonces puede devolverlo en sólo una cuota.

Cabe mencionar asimismo que la resolución citada establece una bonificación equivalente al 58,33% del diferimiento, importe que no puede superar 1,4 cuotas, para el caso en que el suscriptor cumpla con determinados requisitos – para determinadas marcas enumeradas en el anexo 1 de la resolución, que el suscriptor haya cumplido con todos los compromisos asumidos previo y durante el diferimiento, que haya retirado el bien tipo y que no haya efectuado cancelaciones anticipadas. En este caso, el suscriptor debe cancelar su deuda en un solo pago que no ha de exceder al valor de una cuota – y sus cargas administrativas -

A partir del análisis desarrollado, puede observarse que la bonificación es aplicable a todos aquellos, cualquiera sea su duración, que han diferido las 12 cuotas máximas permitidas.

Puede observarse que, a partir de los desarrollos previamente presentados, las 2,4 cuotas a que hace referencia la resolución no son otra cosa que la cantidad de cuotas que deben ser recuperadas en los planes de cualquier duración en los casos en que el suscriptor hubiera seleccionado la aplicación de la opción de diferimiento en la cantidad de cuotas máxima.

## Conclusiones

A partir del análisis realizado pueden extraerse las siguientes conclusiones:

- El porcentaje de diferimiento máximo se presenta en el plan de menor duración con mayor cantidad de cuotas adeudadas; es decir, el recientemente suscripto.
- Los porcentajes de diferimiento son proporcionales en las tres situaciones contempladas.
- La cantidad de cuotas en que puede ser devuelta la porción diferida es independiente de la duración del plan seleccionado.

## Referencias

Levi, Eugenio (1973), *“Curso de matemática financiera y actuarial”*, Volumen 1, Barcelona, Bosch Casa Editorial.

Metelli, María Alejandra y Rodríguez, Laura Marisa (2008), *“Sistemas de capitalización y Ahorro Previo”*, Buenos Aires, Edición.

Resoluciones IGJ N° 09/2002 Y 142/2020

## 3.5 Rentas financieras versus seguros de vida de capitales múltiples

*María Teresa Casparri • M. Alejandra Metelli • Eduardo Á. Tarullo*

### Resumen

El presente trabajo intenta mostrar las diferencias existentes entre las sucesiones financieras de distintos tipos y los seguros de vida de capitales múltiples afines a las mismas.

Con ese fin, se procede a desarrollar y analizar el comportamiento de las rentas financieras y de los seguros de vida de capitales múltiples para:

- Capitales constantes
- Capitales variables en progresión geométrica

En el caso de los seguros de vida de capitales múltiples, se eligió trabajar con la ley de mortalidad de Dormoy con el objetivo de encontrar las similitudes entre ambos tipos de rentas.

Si bien, a fin de facilitar los desarrollos, se utilizará esta ley de mortalidad, las conclusiones pueden extrapolarse a cualquier otra ley.

**Palabras clave:** Renta financiera, certeza, seguros de vida de capitales múltiples, aleatoriedad, crecimiento geométrico

### Introducción

Se intentarán mostrar las relaciones, analogías y diferencias existentes entre distintos tipos de valores actuales. A tal fin, se tendrá en cuenta la factibilidad de pago: pagos ciertos o aleatorios para lo cual, en este último caso, se trabajará con una ley de mortalidad determinada. Por el otro, se

estudiará la variación del capital donde se analizarán los pagos constantes y las variables en progresión geométrica.

En función de ello, han de presentarse las relaciones existentes entre las denominadas rentas financieras y las actuariales<sup>1</sup>. Se estudiarán las distintas alternativas y se derivarán las fórmulas correspondientes a cada una de ellas. A partir de allí se ejemplificará el cálculo de las mismas en distintas situaciones a los fines comparativos. Con el fin de mostrar que el valor actual fue correctamente calculado, se determinarán los saldos en las marchas progresivas correspondientes, haciendo hincapié en aquellos conceptos que sólo se verifican en las rentas actuariales.

El camino recorrido a lo largo del trabajo permitirá mostrar las analogías y diferencias existentes entre ambos tipos de rentas.

## Elementos técnicos y nomenclatura

$i$  : tasa de interés periódica expresada en tanto por uno.

$r$  : tasa de variación periódica de los capitales expresada en tanto por uno.

$\theta = 1 + r$  razón de variación periódica.

$\mathcal{V}$  : factor de actualización financiero del capital unitario calculado a la tasa periódica  $i$ .

$\mathcal{V}^t$  : valor actual financiero del capital unitario exigible al cabo de  $t$  años.

$a$  : razón anual de permanencia por supervivencia.

$x$  : edad del asegurado al momento de contratar el seguro.

$p(x;t)$  : probabilidad de que una persona de edad  $x$  alcance con vida la edad  $x+t$ .

$E(x;t)$  : valor actual actuarial a la edad  $x$  del capital unitario exigible en el momento  $t$  si la persona de edad  $x$  se encuentra con vida.

<sup>1</sup> Denominadas seguros de vida de capitales múltiples.

$af(m;n;i)$ : valor actual financiero de una sucesión de  $n$  capitales unitarios pagaderos periódicamente, el primero de ellos exigible  $m$  períodos con posterioridad al momento de valuación.

$afv_g(m;n;i;r)$ : valor actual financiero de una sucesión de  $n$  capitales variables en una razón constante  $\theta = 1 + r$  aplicada sobre el capital vigente el período inmediato anterior pagaderos periódicamente, el primero de ellos exigible  $m$  períodos con posterioridad al momento de valuación.

$a(x;m;n)$  valor actual actuarial a la edad  $x$  de una serie de  $n$  capitales unitarios pagaderos anualmente a la persona de edad  $x$  en cada cumpleaños si la misma se encuentra con vida, el primero de ellos exigible en el momento  $m$ , posterior al momento de valuación.

$av_g(x;m;n)$  : valor actual actuarial a la edad  $x$  de una serie de  $n$  capitales variables en una razón constante  $\theta = 1 + r$  aplicada sobre el capital vigente el año inmediato anterior, pagaderos anualmente a la persona de edad  $x$  en cada cumpleaños si la misma se encuentra con vida, el primero de ellos exigible en el momento  $m$ , posterior al momento de valuación.

Nótese que en el caso de las rentas financieras se habla de períodos mientras que en el caso de los seguros de vida de capitales múltiples se hace mención sólo a la periodicidad anual. Ello es así porque en las primeras las fórmulas resultan equivalentes para cualquier periodicidad en la medida en que la tasa de interés y el plazo estén expresados en la misma unidad de medida. En cambio, en el caso de los seguros de vida de capitales múltiples, no puede aplicarse la misma fórmula a todas las periodicidades, dado que en su cálculo intervienen las probabilidades de supervivencia para cuya determinación deben emplearse supuestos específicos que afectan, en consecuencia, las fórmulas de cálculo.

A fin de efectuar entonces el análisis comparativo, se trabajará en ambos casos con periodicidad anual.

## Diferencias entre las sucesiones financieras y los seguros de vida de capitales múltiples

En ambas situaciones se trata de valorar una sucesión de capitales equidistantes entre sí que pueden ser constantes o variables. Cuando se habla de rentas se hace referencia a que la valuación mencionada se realiza en el momento actual; es decir, lo que se calcula son valores actuales mientras que, en el caso en que la valuación sea realizada a la finalización del plazo, suele hablarse de imposiciones.

A partir del mencionado objetivo resulta entonces necesario definir la tasa de interés de valuación para el caso de trabajar con rentas financieras, a la que debe agregarse una tabla de mortalidad o ley de mortalidad si se trata de una renta actuarial.

Es decir, en el caso de rentas financieras, el pago de los capitales exigibles en los distintos momentos es de carácter cierto mientras que en el caso de las actuariales su pago resulta aleatorio, La condición de pago en esta segunda alternativa es que la persona que contrata se encuentre con vida al momento de cobro.

De acuerdo con lo previamente expuesto, entonces, resulta necesario indicar cómo han de ser calculadas esas probabilidades de supervivencia. Pueden emplearse a tal fin:

- Leyes de mortalidad: las que más se utilizan son las de De Moivre – decrecimiento lineal – y de Dormoy– decrecimiento exponencial.<sup>2</sup>
- Tablas de mortalidad: son las que emplean las empresas aseguradoras cuando calculan las primas correspondientes a este tipo de seguros.

En el presente trabajo, el desarrollo será realizado aplicando la ley de Dormoy.

### Valor actual de rentas financieras

Las rentas financieras se caracterizan por ser una sucesión de  $n$  capitales pagaderos periódicamente. A continuación se analizan:

<sup>2</sup> Este esquema considerando capitales constantes, es el utilizado en los planes de capitalización con sorteos.

1. Las rentas financieras de capitales unitarios constantes.
2. Las rentas financieras de capital inicial unitario, variables en una razón  $\theta = 1 + r$  constante aplicada sobre el capital vigente el período inmediato anterior, conocidas como rentas financieras de capital inicial unitario variables en progresión geométrica.

## Capitales unitarios constantes

El valor actual de una sucesión de  $n$  capitales unitarios pagaderos periódicamente, el primero de ellos exigible  $m$  períodos con posterioridad al momento de valuación, resulta:

$$af(m; n; i) = \sum_{t=1}^n v^{m+t-1} = v^m \cdot \left( \frac{1 - v^n}{1 - v} \right) = v^m \cdot \left( \frac{1 - v^n}{d} \right)$$

donde:  $v = 1/(1+i)$  y  $d = i/(1+i)$ .

Por simplicidad se supone que  $m, n \in \mathbb{N}^*$  y se asume que  $i > 0$

Dos casos particulares que se obtienen asignando  $m = 0$  y  $m = 1$  en la expresión anterior son:

$$m = 0: \quad af(0; n; i) = \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{d} \quad \text{Renta inmediata de pagos adelantados}$$

$$m = 1: \quad af(1; n; i) = v \cdot \left( \frac{1 - v^n}{1 - v} \right) = \frac{1 - v^n}{i} \quad \text{Renta inmediata de pagos vencidos}$$

Si  $n$  crece indefinidamente ( $n \rightarrow \infty$ ), la renta resulta ser una sucesión de infinitos capitales unitarios pagaderos periódicamente, el primero de ellos exigible  $m$  períodos con posterioridad al momento de valuación. Estas rentas se denominan rentas perpetuas o perpetuidades. Conforme a lo expuesto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} af(m; n; i) = af(m; \infty; i) = \frac{v^{m-1}}{i}$$

Casos particulares de interés que se obtienen de la expresión anterior son:

$$m = 0: \quad \lim_{n \rightarrow \infty} af(0; n; i) = af(0; \infty; i) = \frac{1}{1 - v} = \frac{1}{d} \quad \text{Perpetuidad de pagos adelantados}$$

$$m = 1: \quad \lim_{n \rightarrow \infty} af(1; n; i) = af(1; \infty; i) = \frac{v}{1 - v} = \frac{1}{i} \quad \text{Perpetuidad de pagos vencidos}$$

A continuación se analiza el comportamiento de la función  $af(m; n; i)$  ante variaciones de sus variables teniendo en cuenta que el plazo de diferimiento ( $m$ ) y el plazo de pago ( $n$ ) se asumen en este trabajo como variables discretas, en tanto la tasa de interés ( $i$ ) se considera una variable continua.

Con respecto al plazo de diferimiento, se observa que cuanto mayor sea dicho plazo, menor será el valor actual de la sucesión.

$$\Delta_m af(m; n; i) = af(m + 1; n; i) - af(m; n; i) = v^m \cdot (v^n - 1) < 0$$

En tanto, si el número de pagos de la renta crece, su valor actual también lo hace.

$$\Delta_n af(m; n; i) = af(m; n + 1; i) - af(m; n; i) = v^m \cdot v^n > 0$$

Finalmente, si la tasa de interés se incrementa marginalmente, el valor actual de la renta se reduce.

$$\frac{\partial af(m; n; i)}{\partial i} = -v^m \cdot \sum_{t=1}^n (m + t - 1) \cdot v^t < 0$$

## Capital inicial unitario variables en progresión geométrica

El valor actual de una sucesión de  $n$  pagos de capital inicial unitario y los siguientes, variables en una razón  $\theta = 1 + r$  con  $r > -1$  constante, aplicada sobre el capital vigente el período inmediato anterior, resulta:

$$afv_{\theta}(m; n; i; r) = \sum_{t=1}^n v^{m+t-1} \cdot \theta^{t-1} = v^m \cdot \left[ \frac{1 - (\theta \cdot v)^n}{1 - \theta \cdot v} \right] = v^{m-1} \cdot \left[ \frac{1 - (\theta \cdot v)^n}{i - r} \right]; \text{ si } r \neq i$$

$$afv_{\theta}(m; n; i; i) = n \cdot v^m; \text{ si } r = i$$

$$\text{donde: } v = 1/(1 + i) \quad \text{y} \quad \theta = 1 + r.$$

Como se estableció previamente, se supone que  $m, n \in \mathbb{N}^*$  y se asume que  $i > 0$

Estas rentas son conocidas como rentas financieras de capital inicial unitario variables en progresión geométrica,

Dos casos particulares se obtienen asignando  $m = 0$  y  $m = 1$  en la expresión anterior:

Si  $r \neq i$ :

$$m = 0: \quad afv_g(0; n; i; r) = \frac{1 - (\theta \cdot v)^n}{1 - \theta \cdot v}$$

$$m = 1: \quad afv_g(1; n; i; r) = v \cdot \left[ \frac{1 - (\theta \cdot v)^n}{1 - \theta \cdot v} \right] = \frac{1 - (\theta \cdot v)^n}{i - r}$$

Si  $r = i$ :

$$m = 0: \quad afv_g(0; n; i; i) = n$$

$$m = 1: \quad afv_g(1; n; i; i) = n \cdot v$$

Cuando  $n$  crece indefinidamente ( $n \rightarrow \infty$ ), la renta resulta ser una

$$\lim_{n \rightarrow \infty} afv_g(m; n; i; r) = afv_g(m; \infty; i; r) = v^{m-1} \cdot \left[ \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} (\theta \cdot v)^n}{i - r} \right]; \quad \text{si } r \neq i$$

$$\text{Si } \left| \frac{1+r}{1+i} \right| < 1 \Rightarrow afv_g(m; \infty; i; r) = v^{m-1} \cdot \frac{1}{i - r}$$

$$\text{Si } \left| \frac{1+r}{1+i} \right| > 1 \Rightarrow afv_g(m; \infty; i; r) = \infty$$

$$\text{Si } r = i \Rightarrow afv_g(m; \infty; i; i) = \infty$$

Dos casos particulares de interés que se obtienen de la expresión anterior cuando  $|(1+r)/(1+i)| < 1$ , resultan:

$$m = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} afv_g(0; n; i; r) = afv_g(0; \infty; i; r) = \frac{1+i}{i-r} \quad \begin{array}{l} \text{Perpetuidad} \\ \text{geométrica de pagos} \\ \text{adelantados} \end{array}$$

$$m = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} afv_g(1; n; i; r) = afv_g(1; \infty; i; r) = \frac{1}{i-r} \quad \begin{array}{l} \text{Perpetuidad} \\ \text{geométrica de pagos} \\ \text{vencidos} \end{array}$$

Analizando el comportamiento de la función  $afv_g(m;n;i;r)$  ante variaciones de sus variables, considerando que el plazo de diferimiento ( $m$ ) y el plazo de pago ( $n$ ) se tratan como variables discretas y la tasa de interés ( $i$ ) y la tasa de variación periódica de los capitales ( $r$ ) como variables continuas, se obtiene que:

Conforme aumenta el plazo de diferimiento se reduce el valor actual de la renta.

$$\Delta_m afv_g(m;n;i;r) = afv_g(m+1;n;i;r) - afv_g(m;n;i;r)$$

$$\text{Si } r \neq i: \Delta_m afv_g(m;n;i;r) = v^{m-1} \cdot \left[ \frac{1 - (\theta \cdot v)^n}{i - r} \right] \cdot (v - 1) < 0$$

$$\text{Si } r = i: \Delta_m afv_g(m;n;i;r) = n \cdot v^m \cdot (v - 1) < 0$$

Si se incrementa el número de pagos, el valor actual de la renta aumenta.

$$\Delta_n afv_g(m;n;i;r) = afv_g(m;n+1;i;r) - afv_g(m;n;i;r)$$

$$\text{Si } r \neq i: \Delta_n afv_g(m;n;i;r) = \theta^n \cdot v^{m+n} > 0$$

$$\text{Si } r = i: \Delta_n afv_g(m;n;i;r) = (n+1) \cdot v^m - n \cdot v^m = v^m > 0$$

Ante un aumento marginal de la tasa de interés, se reduce el valor actual de la sucesión.

$$\text{Si } r \neq i: \frac{\partial afv_g(m;n;i;r)}{\partial i} = -v^m \cdot \sum_{t=1}^n (m+t-1) \cdot \theta^{t-1} \cdot v^t < 0$$

Cuando se incrementa marginalmente la tasa de variación periódica de los capitales, se incrementa el valor actual de la renta.

$$\text{Si } r \neq i: \frac{\partial afv_g(m;n;i;r)}{\partial r} = v^m \cdot \sum_{t=1}^n (t-1) \cdot v^{t-1} \cdot \theta^{t-2} > 0$$

## Valor actual de los seguros de vida de capitales múltiples: Rentas actuariales

Los seguros de vida de capitales múltiples son una sucesión de un conjunto de capitales que han de ser abonados siempre y cuando el asegurado se encuentre con vida. A continuación se analizan:

1. Los seguros de vida de capitales múltiples de capitales unitarios constantes.
2. Los seguros de vida de capitales múltiples de capital inicial unitario, variables en una razón  $\theta = 1 + r$  constante aplicada sobre el capital vigente el período inmediato anterior, conocidas como rentas actuariales de capital inicial unitario variables en progresión geométrica.

### Capitales unitarios constantes

El asegurado mediante el pago de la/s prima/s, transfiere al asegurador el riesgo del plan; y éste le acuerda cobertura de vida de riesgo diferido y plazo limitado, consistente en el pago del capital unitario al comienzo de cada año mientras viva, a partir de un plazo  $m$  definido posterior al de contratación y durante un plazo  $n$  establecido.

El valor actual indicado se calcula como suma de los valores actuales actuariales de los sucesivos capitales unitarios; es decir:

$$a(x; m; n) = \sum_{t=m}^{m+n-1} E(x; t)$$

cuya expresión final al trabajar con la ley de mortalidad de Dormoy está dada por la siguiente expresión:

$$a(x; m; n) = \frac{(a.v)^m - (a.v)^{m+n}}{1 - a.v}$$

Obsérvese que al aplicar esta ley de mortalidad, el valor actual calculado no depende de la edad del asegurado.

Dos casos particulares que se obtienen asignando  $m = 0$  y  $m = 1$  en la expresión anterior son:

$$m = 0: \quad a(x; 0; n) = \frac{1 - (a.v)^n}{1 - a.v} \quad \text{Seguro de vida de capitales múltiples de riesgo inmediato y plazo limitado.}$$

$$m = 1: \quad a(x; 1; n) = \frac{a.v - (a.v)^{n+1}}{1 - a.v} \quad \text{Seguro de vida de capitales múltiples de riesgo diferido por un año y plazo limitado}$$

Si  $n$  crece indefinidamente ( $n \rightarrow w - x - m$ ) -donde  $w$  es la edad a la cual ya no hay sobrevivientes-, la renta resulta ser una sucesión de  $w - x - m$ <sup>3</sup> capitales unitarios pagaderos periódicamente, el primero de ellos exigible  $m$  años después del momento de valuación.

Al aplicar límite entonces, se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow w-x-m} a(x; m; n) = a(x; m; w - x - m) = \frac{(a.v)^m}{1 - a.v}$$

Se analiza el comportamiento de la función respecto al plazo de diferimiento y al de cobertura, respectivamente:

$$\Delta_m a(x; m; n) = -(a.v)^m [1 - (a.v)^n] < 0$$

Se observa que el aumento en la distancia entre el momento de valuación y la exigibilidad del primer pago provoca una disminución en el valor actual.

$$\Delta_n a(x; m; n) = (a.v)^{m+n} > 0$$

El aumento de la cantidad de capitales provoca un aumento en el valor actual.

Se tiene además que:

$$\frac{\partial}{\partial i} a(x; m; n) = -v [m a(x; m; n) + a l(x; m + 1; n - 1)] < 0$$

Una variación en la tasa de interés induce a una variación de sentido opuesto en el valor actual de este tipo de seguro.

<sup>3</sup> El plazo expuesto  $w-x-m$  es considerado matemáticamente como infinito.

## Capital unitario inicial, variable en progresión geométrica

Se puede definir esta renta del siguiente modo: “El asegurado mediante el pago de la/s prima/s, transfiere al asegurador el riesgo del plan; y éste le acuerda cobertura de vida de riesgo diferido y plazo limitado, consistente en el pago del capital unitario variable en una razón  $\theta$  sobre el capital alcanzado en el año anterior, al comienzo de cada año mientras viva, a partir de un plazo  $m$  determinado y por el plazo  $n$  establecido”

El valor actual mencionado se obtiene como suma de los valores actuales actuariales de los sucesivos capitales; es decir:

$$av_g(x; m; n) = \sum_{t=0}^{n-1} \theta^t \cdot E(x; m+t)$$

Para el cálculo de las expresiones previamente expuestas se trabajará con la ley exponencial conocida como ley de Dormoy.

Tal como se ha mencionado previamente, se expresa el factor de actualización actuarial como:

$$E(x; t) = (a \cdot v)^t$$

Con lo cual, el valor actual de la sucesión de capitales variables en progresión geométrica puede escribirse, para el caso en que  $a = (1+i)/(1+r)$ , como:

$$av_g(x; m; n) = n \cdot (a \cdot v)^m$$

Como en el caso de capitales constantes, es válido lo expuesto en relación a la edad del asegurado.

En el caso en que  $a = (1+i)/(1+r)$ , la expresión resultante es:

$$av_g(x; m; n) = n \cdot (a \cdot v)^m$$

Dos casos particulares se obtienen asignando  $m = 0$  y  $m = 1$  en la expresión anterior.

Si  $a \neq (1+i)/(1+r)$ :

$$m = 0: \quad av_g(x; 0; n) = \frac{1 - [\theta \cdot a \cdot v]^n}{1 - [\theta \cdot v \cdot a]}$$

$$m = 1: \quad av_g(x; 1; n) = (a \cdot v) \cdot \frac{1 - [\theta \cdot a \cdot v]^n}{1 - [\theta \cdot a \cdot v]}$$

Si  $a = (1+i)/(1+r)$ :

$$m = 0: \quad av_g(x; 0; n) = n$$

$$m = 1: \quad av_g(x; 1; n) = n \cdot a \cdot v$$

Se analiza el comportamiento de la función respecto al plazo de diferimiento y al de cobertura, respectivamente;

$$\Delta_m av_g(x; m; n) = -(1 - av)(av)^m \cdot \frac{1 - (a \cdot v \cdot \theta)^n}{1 - [a \cdot v \cdot \theta]} < 0$$

En este caso también se observa que el aumento en la distancia entre el momento de valuación y la exigibilidad del primer pago provoca una disminución en el valor actual.

$$\Delta_n av_g(x; m; n) = (a \cdot v)^m \cdot (a \cdot v \cdot \theta)^n > 0$$

El aumento de la cantidad de capitales provoca un aumento en el valor actual.

Además, como en el caso de capitales constantes, una variación en la tasa de interés induce a una variación de sentido opuesto en el valor actual de este tipo de seguro. Por otro lado, una variación en la tasa de crecimiento de capitales produce una variación en el mismo sentido en el valor actual de los mismos.

## Marchas progresivas

Se muestran a continuación ejemplos de evolución de saldos – marchas progresivas – para las rentas financieras y actuariales, considerando los siguientes supuestos:

- Tasa de interés: 4 % efectivo anual
- Tasa de variación de los capitales: 2 % anual
- Tasa de permanencia por supervivencia: 98 %
- Cantidad máxima de capitales probables: 20<sup>4</sup>

En todos los casos se trabaja con un capital inicial unitario.

Estas marchas permiten demostrar lo que recibe el nombre de suficiencia del capital invertido o prima, según el caso. Ello es así porque invirtiendo el dinero recibido a la tasa de interés pactada y verificándose la ley de mortalidad establecida en el caso de los seguros de vida de capitales múltiples, se alcanza a cumplir con los compromisos asumidos.

## Rentas financieras

### Capitales constantes

PERIODO	SALDO AL INICIO	PAGO	SALDO	INTERESES FINANCIEROS	SALDO FINAL
0	14,1339	1,0000	13,1339	0,5254	13,6593
1	13,6593	1,0000	12,6593	0,5064	13,1657
2	13,1657	1,0000	12,1657	0,4866	12,6523
3	12,6523	1,0000	11,6523	0,4661	12,1184
4	12,1184	1,0000	11,1184	0,4447	11,5631
5	11,5631	1,0000	10,5631	0,4225	10,9856
6	10,9856	1,0000	9,9856	0,3994	10,3851
7	10,3851	1,0000	9,3851	0,3754	9,7605
8	9,7605	1,0000	8,7605	0,3504	9,1109
9	9,1109	1,0000	8,1109	0,3244	8,4353
10	8,4353	1,0000	7,4353	0,2974	7,7327
11	7,7327	1,0000	6,7327	0,2693	7,0021
12	7,0021	1,0000	6,0021	0,2401	6,2421
13	6,2421	1,0000	5,2421	0,2097	5,4518
14	5,4518	1,0000	4,4518	0,1781	4,6299
15	4,6299	1,0000	3,6299	0,1452	3,7751
16	3,7751	1,0000	2,7751	0,1110	2,8861
17	2,8861	1,0000	1,8861	0,0754	1,9615
18	1,9615	1,0000	0,9615	0,0385	1,0000
19	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000

<sup>4</sup> La aclaración de probables es válida sólo para el caso de las rentas actuariales en el cual el pago del capital está condicionado a la supervivencia de la persona.

## Capitales variables en progresión geométrica

PERIODO	SALDO AL INICIO	PAGO	SALDO	INTERESES FINANCIEROS	SALDO FINAL
0	16,7353	1,0000	15,7353	0,6294	16,3647
1	16,3647	1,0200	15,3447	0,6138	15,9585
2	15,9585	1,0404	14,9181	0,5967	15,5148
3	15,5148	1,0612	14,4536	0,5781	15,0318
4	15,0318	1,0824	13,9493	0,5580	14,5073
5	14,5073	1,1041	13,4032	0,5361	13,9394
6	13,9394	1,1262	12,8132	0,5125	13,3257
7	13,3257	1,1487	12,1771	0,4871	12,6641
8	12,6641	1,1717	11,4925	0,4597	11,9522
9	11,9522	1,1951	10,7571	0,4303	11,1874
10	11,1874	1,2190	9,9684	0,3987	10,3671
11	10,3671	1,2434	9,1237	0,3649	9,4887
12	9,4887	1,2682	8,2204	0,3288	8,5493
13	8,5493	1,2936	7,2556	0,2902	7,5459
14	7,5459	1,3195	6,2264	0,2491	6,4755
15	6,4755	1,3459	5,1296	0,2052	5,3348
16	5,3348	1,3728	3,9620	0,1585	4,1205
17	4,1205	1,4002	2,7202	0,1088	2,8290
18	2,8290	1,4282	1,4008	0,0560	1,4568
19	1,4568	1,4568	0,0000	0,0000	0,0000

## Rentas Actuariales

### Capitales constantes

PERIODO	SALDO AL INICIO	PAGO	SALDO	INTERESES FINANCIEROS	INTERESES BIOMÉTRICOS	SALDO FINAL
0	12,0521	1,0000	11,0521	0,4421	0,2346	11,7287
1	11,7287	1,0000	10,7287	0,4291	0,2277	11,3856
2	11,3856	1,0000	10,3856	0,4154	0,2204	11,0215
3	11,0215	1,0000	10,0215	0,4009	0,2127	10,6350
4	10,6350	1,0000	9,6350	0,3854	0,2045	10,2249
5	10,2249	1,0000	9,2249	0,3690	0,1958	9,7897
6	9,7897	1,0000	8,7897	0,3516	0,1866	9,3278
7	9,3278	1,0000	8,3278	0,3331	0,1768	8,8377
8	8,8377	1,0000	7,8377	0,3135	0,1664	8,3176
9	8,3176	1,0000	7,3176	0,2927	0,1553	7,7656
10	7,7656	1,0000	6,7656	0,2706	0,1436	7,1798
11	7,1798	1,0000	6,1798	0,2472	0,1312	6,5582
12	6,5582	1,0000	5,5582	0,2223	0,1180	5,8985
13	5,8985	1,0000	4,8985	0,1959	0,1040	5,1984
14	5,1984	1,0000	4,1984	0,1679	0,0891	4,4554
15	4,4554	1,0000	3,4554	0,1382	0,0733	3,6670
16	3,6670	1,0000	2,6670	0,1067	0,0566	2,8303
17	2,8303	1,0000	1,8303	0,0732	0,0388	1,9423
18	1,9423	1,0000	0,9423	0,0377	0,0200	1,0000
19	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

## Capitales variables en progresión geométrica bajo la ley de Dormoy

PERIODO	SALDO AL INICIO	PAGO	SALDO	INTERESES FINANCIEROS	INTERESES BIOMÉTRICOS	SALDO FINAL
0	14,0876	1,0000	13,0876	0,5235	0,2778	13,8889
1	13,8889	1,0200	12,8689	0,5148	0,2731	13,6568
2	13,6568	1,0404	12,6164	0,5047	0,2678	13,3888
3	13,3888	1,0612	12,3276	0,4931	0,2616	13,0824
4	13,0824	1,0824	12,0000	0,4800	0,2547	12,7346
5	12,7346	1,1041	11,6306	0,4652	0,2469	12,3426
6	12,3426	1,1262	11,2165	0,4487	0,2381	11,9032
7	11,9032	1,1487	10,7545	0,4302	0,2283	11,4130
8	11,4130	1,1717	10,2413	0,4097	0,2174	10,8683
9	10,8683	1,1951	9,6732	0,3869	0,2053	10,2655
10	10,2655	1,2190	9,0465	0,3619	0,1920	9,6003
11	9,6003	1,2434	8,3570	0,3343	0,1774	8,8686
12	8,8686	1,2682	7,6004	0,3040	0,1613	8,0657
13	8,0657	1,2936	6,7721	0,2709	0,1437	7,1867
14	7,1867	1,3195	5,8672	0,2347	0,1245	6,2264
15	6,2264	1,3459	4,8806	0,1952	0,1036	5,1794
16	5,1794	1,3728	3,8066	0,1523	0,0808	4,0397
17	4,0397	1,4002	2,6394	0,1056	0,0560	2,8010
18	2,8010	1,4282	1,3728	0,0549	0,0291	1,4568
19	1,4568	1,4568	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

El valor actual para las rentas financieras es de \$ 14.1339 en el caso de que se trate de capitales constantes y de \$ 16.7353 en el caso de variación en progresión geométrica.

El valor actual para las rentas actuariales es de \$ 12.0521 en el caso de que se trate de capitales constantes y de \$ 14.0876 en el caso de variación en progresión geométrica.

Se observa que, en ambos casos, los valores actuales de las sucesiones financieras son superiores a los de las actuariales. Ello se debe a que en el primer caso el pago es cierto mientras que en el segundo el pago ha de depender de la supervivencia del asegurado.

En el caso de rentas actuariales aparece el concepto de intereses biométricos, el cual surge al repartir el dinero invertido entre los sobrevivientes. Si bien matemáticamente resulta indistinto el orden en que se calculan los intereses financieros y biométricos, en los ejemplos que se presentan se realiza primero el cálculo correspondiente a los intereses financieros y luego el de los biométricos. Ello es así porque el dinero es en primer término invertido y luego se reparte.

## Variaciones de las funciones

A continuación, se muestran resultados de los valores actuales mencionados para distintos plazos, distintas tasas de interés y distintas tasas de crecimiento de los capitales:

### Rentas financieras de capitales constantes

Comparaciones de rentas inmediatas adelantadas de pagos y tasa de interés efectiva periódica  $i$ ; esto es,  $af(0;n;i)$ .

PLAZOS (n)	20	40	60	80	100	120	$n \rightarrow \infty$
Tasa de interés (i)							
2%	16,6785	27,9026	35,4561	40,5394	43,9603	46,2625	51,0000
4%	14,1339	20,5845	23,5284	24,8720	25,4852	25,7651	26,0000
6%	12,1581	15,9491	17,1311	17,4997	17,6146	17,6504	17,6667
8%	10,6036	12,8786	13,3667	13,4714	13,4939	13,4987	13,5000
10%	9,3649	10,7570	10,9639	10,9946	10,9992	10,9999	11,0000
12%	8,3658	9,2330	9,3229	9,3323	9,3332	9,3333	9,3333
15%	7,1982	7,6380	7,6649	7,6666	7,6667	7,6667	7,6667
25%	4,9424	4,9993	5,0000	5,0000	5,0000	5,0000	5,0000
50%	2,9991	3,0000	3,0000	3,0000	3,0000	3,0000	3,0000

### Rentas financieras de capitales variables en progresión geométrica

Comparaciones de rentas inmediatas adelantadas de capital inicial unitario variables en progresión geométrica de  $n$  pagos, tasa de interés efectiva periódica  $i$  y con tasa de variación periódica de los capitales:

- $r = 2\%$ ; esto es,  $afv_g(0;n;i;0,02)$

PLAZOS (n)	20	40	60	80	100	120	$n \rightarrow \infty$
Tasa de interés (i)							
2%	20,0000	40,0000	60,0000	80,0000	100,0000	120,0000	$\rightarrow \infty$
4%	16,7353	28,0847	35,7814	41,0011	44,5409	46,9415	52,0000
6%	14,2219	20,8112	23,8642	25,2788	25,9342	26,2378	26,5000
8%	12,2615	16,1705	17,4167	17,8141	17,9407	17,9811	18,0000
10%	10,7129	13,0792	13,6018	13,7173	13,7428	13,7484	13,7500
12%	9,4747	10,9342	11,1591	11,1937	11,1990	11,1999	11,2000
15%	8,0430	8,7732	8,8395	8,8456	8,8461	8,8461	8,8462
25%	5,3417	5,4332	5,4348	5,4348	5,4348	5,4348	5,4348
50%	3,1235	3,1250	3,1250	3,1250	3,1250	3,1250	3,1250

- $r = 4\%$ ; esto es,  $afv_g(0;n;i;0,04)$

PLAZOS (n) Tasa de interés (i)	20	40	60	80	100	120	n → ∞
2%	24,2027	59,8911	112,5160	190,1146	304,5387	473,2643	→ ∞
4%	20,0000	40,0000	60,0000	80,0000	100,0000	120,0000	→ ∞
6%	16,7903	28,2614	36,0985	41,4529	45,1110	47,6102	53,0000
8%	14,3073	21,0331	24,1950	25,6813	26,3801	26,7086	27,0000
10%	12,3622	16,3886	17,6999	18,1270	18,2661	18,3114	18,3333
12%	10,8199	13,2777	13,8359	13,9627	13,9915	13,9981	14,0000
15%	9,0549	10,2672	10,4295	10,4512	10,4541	10,4545	10,4545
25%	5,8020	5,9486	5,9523	5,9524	5,9524	5,9524	5,9524
50%	3,2587	3,2609	3,2609	3,2609	3,2609	3,2609	3,2609

- $r = 10\%$ ; esto es,  $afv_g(0;n;i;0,10)$

PLAZOS (n) Tasa de interés (i)	20	40	60	80	100	120	n → ∞
2%	44,9745	248,5929	1.170,4577	5.344,1218	24.240,0298	109.789,6398	→ ∞
4%	35,8859	146,0681	484,3652	1.523,0534	4.712,1824	14.503,9029	→ ∞
6%	29,0882	90,1054	218,0992	486,5875	1.049,7864	2.231,1897	→ ∞
8%	23,9421	58,4996	108,3789	180,3733	284,2881	434,2759	→ ∞
10%	20,0000	40,0000	60,0000	80,0000	100,0000	120,0000	→ ∞
12%	16,9446	28,7620	37,0038	42,7517	46,7604	49,5561	56,0000
15%	13,5458	19,1138	21,4026	22,3434	22,7301	22,8891	23,0000
25%	7,6870	8,2832	8,3294	8,3330	8,3333	8,3333	8,3333
50%	3,7424	3,7500	3,7500	3,7500	3,7500	3,7500	3,7500

- $r = -2\%$ ; esto es,  $afv_g(0;n;i;-0,02)$

PLAZOS (n) Tasa de interés (i)	20	40	60	80	100	120	n → ∞
2%	14,0433	20,3527	23,1874	24,4610	25,0332	25,2903	25,5000
4%	12,0521	15,7242	16,8431	17,1840	17,2878	17,3195	17,3333
6%	10,4918	12,6759	13,1305	13,2251	13,2448	13,2489	13,2500
8%	9,2531	10,5784	10,7683	10,7955	10,7993	10,7999	10,8000
10%	8,2570	9,0764	9,1577	9,1658	9,1666	9,1667	9,1667
12%	7,4463	7,9617	7,9973	7,9998	8,0000	8,0000	8,0000
15%	6,4888	6,7535	6,7642	6,7647	6,7647	6,7647	6,7647
25%	4,5940	4,6294	4,6296	4,6296	4,6296	4,6296	4,6296
50%	2,8840	2,8846	2,8846	2,8846	2,8846	2,8846	2,8846

Comparaciones de rentas inmediatas adelantadas de capital inicial unitario variables en progresión geométrica de  $n$  pagos, tasa de interés efectiva periódica  $i = 4\%$  y tasa de variación periódica de los capitales  $r$ ; esto es,  $afv_g(0;n; 0,04,r)$ .

PLAZOS (n) Tasa de variación del capital (r)	20	40	60	80	100	120	n → ∞
2%	16,7353	28,0847	35,7814	41,0011	44,5409	46,9415	52,0000
4%	20,0000	40,0000	60,0000	80,0000	100,0000	120,0000	→ ∞
6%	24,1121	59,4049	111,0628	186,6742	297,3461	459,3361	→ ∞
8%	29,3072	91,6495	224,2640	506,3615	1.106,4394	2.382,9251	→ ∞
10%	35,8859	146,0681	484,3652	1.523,0534	4.712,1824	14.503,9029	→ ∞
12%	44,2317	238,9595	1.096,2370	4.870,3519	21.485,6748	94.633,6740	→ ∞
-2%	12,0521	15,7242	16,8431	17,1840	17,2878	17,3195	17,3333
-4%	10,3776	12,4710	12,8933	12,9785	12,9957	12,9991	13,0000
-6%	9,0230	10,2177	10,3759	10,3968	10,3996	10,3999	10,4000

## Rentas actuariales de capitales constantes

Comparaciones de rentas de riesgo inmediato plazo limitado:  $a(x;0;n)^5$

PLAZOS (n) Tasa de interés (i)	20	40	60	80	100	120	n → ∞
2%	14,043	20,353	23,187	24,461	25,033	25,290	25,500
4%	12,052	15,724	16,843	17,184	17,288	17,319	17,333
6%	10,492	12,676	13,130	13,225	13,245	13,249	13,250
8%	9,253	10,578	10,768	10,795	10,799	10,800	10,800
10%	8,257	9,076	9,158	9,166	9,167	9,167	9,167
12%	7,446	7,962	7,997	8,000	8,000	8,000	8,000
15%	6,489	6,753	6,764	6,765	6,765	6,765	6,765
25%	4,594	4,629	4,630	4,630	4,630	4,630	4,630
50%	2,884	2,885	2,885	2,885	2,885	2,885	2,885

## Rentas actuariales de capitales variables en progresión geométrica

Comparaciones de rentas de riesgo inmediato, temporarias, de capital inicial unitario variable en progresión geométrica:  $av_g(x;0;n)$

•  $r = 2\%$

PLAZOS (n) Tasa de interés (i)	20	40	60	80	100	120	n → ∞
2%	16,620	27,715	35,122	40,068	43,369	45,573	50,000
4%	14,088	20,466	23,354	24,661	25,253	25,521	25,743
6%	12,121	15,871	17,030	17,389	17,500	17,534	17,550
8%	10,574	12,824	13,303	13,405	13,427	13,432	13,433
10%	9,341	10,718	10,921	10,951	10,955	10,956	10,956
12%	8,346	9,204	9,292	9,301	9,302	9,302	9,302
15%	7,183	7,618	7,645	7,646	7,646	7,646	7,646
25%	4,935	4,991	4,992	4,992	4,992	4,992	4,992
50%	2,997	2,998	2,998	2,998	2,998	2,998	2,998

<sup>5</sup> La edad de contratación, bajo la ley de mortalidad que se analiza, puede ser cualquiera dado que los resultados obtenidos no dependen de la misma.

•  $r = 4\%$

PLAZOS (n)	20	40	60	80	100	120	n → ∞
Tasa de interés (i)							
2%	19,852	39,394	58,633	77,571	96,215	114,569	1.275,000
4%	16,620	27,715	35,122	40,068	43,369	45,573	50,000
6%	14,130	20,575	23,515	24,856	25,468	25,746	25,980
8%	12,188	16,014	17,214	17,591	17,709	17,746	17,763
10%	10,654	12,970	13,474	13,583	13,607	13,612	13,614
12%	9,426	10,856	11,072	11,105	11,110	11,111	11,111
15%	8,006	8,722	8,786	8,791	8,792	8,792	8,792
25%	5,325	5,414	5,416	5,416	5,416	5,416	5,416
50%	3,118	3,120	3,120	3,120	3,120	3,120	3,120

•  $r = 10\%$

PLAZOS (n)	20	40	60	80	100	120	n → ∞
Tasa de interés (i)							
2%	35,569	143,077	468,024	1.450,188	4.418,818	13.391,614	→ ∞
4%	28,731	87,623	208,340	455,783	962,989	2.002,652	→ ∞
6%	23,580	56,602	102,847	167,609	258,304	385,313	→ ∞
8%	19,652	38,589	56,837	74,420	91,364	107,691	540,000
10%	16,620	27,715	35,122	40,068	43,369	45,573	50,000
12%	14,251	20,886	23,975	25,413	26,083	26,395	26,667
15%	11,589	14,769	15,642	15,882	15,947	15,965	15,972
25%	6,891	7,248	7,266	7,267	7,267	7,267	7,267
50%	3,550	3,554	3,555	3,555	3,555	3,555	3,555

•  $r = -2\%$

PLAZOS (n)	20	40	60	80	100	120	n → ∞
Tasa de interés (i)							
2%	11,981	15,574	16,652	16,976	17,073	17,102	17,114
4%	10,408	12,525	12,955	13,043	13,061	13,064	13,065
6%	9,164	10,437	10,614	10,639	10,642	10,642	10,643
8%	8,167	8,948	9,022	9,029	9,030	9,030	9,030
10%	7,358	7,845	7,877	7,880	7,880	7,880	7,880
12%	6,693	7,003	7,017	7,018	7,018	7,018	7,018
15%	5,900	6,061	6,065	6,065	6,065	6,065	6,065
25%	4,294	4,316	4,316	4,316	4,316	4,316	4,316
50%	2,779	2,780	2,780	2,780	2,780	2,780	2,780

Comparaciones de rentas de riesgo inmediato, temporarias, de capital inicial unitario variable en progresión geométrica para tasa de interés efectiva anual  $i = 4\%$   $av_g(x; 0; n)$

PLAZOS (n)	20	40	60	80	100	120	$n \rightarrow \infty$
Tasa de variación del capital (r)							
2%	14,088	20,466	23,354	24,661	25,253	25,521	25,743
4%	16,620	27,715	35,122	40,068	43,369	45,573	50,000
6%	19,782	39,113	58,003	76,461	94,498	112,123	866,667
8%	23,747	57,470	105,363	173,376	269,964	407,133	$\rightarrow \infty$
10%	28,731	87,623	208,340	455,783	962,989	2.002,652	$\rightarrow \infty$
12%	35,012	137,914	440,357	1.329,267	3.941,868	11.620,577	$\rightarrow \infty$
-2%	10,408	12,525	12,955	13,043	13,061	13,064	13,065
-4%	9,072	10,294	10,458	10,480	10,483	10,484	10,484
-6%	7,980	8,686	8,748	8,754	8,754	8,754	8,754

## Conclusiones

El siguiente cuadro muestra las distintas expresiones de los valores actuales de las sucesiones de capitales +en cada uno de los casos que se han analizado.

### Rentas de capitales unitarios constantes

Actuariales

Financieras

$$a(x; m; n) = (a.v)^m \cdot \left[ \frac{1 - (a.v)^n}{1 - a.v} \right]$$

$$af(m; n; i) = v^m \cdot \left( \frac{1 - v^n}{1 - v} \right)$$

$$m = 0 \quad a(x; 0; n) = \frac{1 - (a.v)^n}{1 - a.v}$$

$$af(0; n; i) = \frac{1 - v^n}{1 - v}$$

$$m = 1 \quad a(x; 1; n) = (a.v) \cdot \left[ \frac{1 - (a.v)^n}{1 - a.v} \right]$$

$$af(1; n; i) = v \cdot \left( \frac{1 - v^n}{1 - v} \right)$$

Rentas de capital inicial unitario variables en progresión geométrica		
	Actuariales	Financieras
$Si$	$\bar{a} \neq (1+i)/(1+r)$	$r \neq i$
	$av_g(x; m; n) = (a, v)^m \cdot \left[ \frac{1 - (\theta \cdot a \cdot v)^n}{1 - \theta \cdot a \cdot v} \right]$	$afv_g(m; n; i; r) = v^m \cdot \left[ \frac{1 - (\theta \cdot v)^n}{1 - \theta \cdot v} \right]$
$m = 0$	$av_g(x; 0; n) = \frac{1 - (\theta \cdot a \cdot v)^n}{1 - \theta \cdot a \cdot v}$	$afv_g(0; n; i; r) = \frac{1 - (\theta \cdot v)^n}{1 - \theta \cdot v}$
$m = 1$	$av_g(x; 1; n) = (a \cdot v) \cdot \left[ \frac{1 - (\theta \cdot a \cdot v)^n}{1 - \theta \cdot a \cdot v} \right]$	$afv_g(1; n; i; r) = v \cdot \left[ \frac{1 - (\theta \cdot v)^n}{1 - \theta \cdot v} \right]$
$Si$	$\bar{a} = (1+i)/(1+r)$	$r = i$
	$av_g(x; m; n) = n \cdot (a \cdot v)^m$	$afv_g(m; n; i; i) = n \cdot v^m$
$m = 0$	$av_g(x; 0; n) = n$	$afv_g(0; n; i; i) = n$
$m = 1$	$av_g(x; 1; n) = n \cdot (a \cdot v)$	$afv_g(1; n; i; i) = n \cdot v$

A partir de su análisis surge que:

- Tanto en las rentas financieras como en las actuariales desarrolladas, si se comparan los valores obtenidos para capitales constantes con los que se obtienen para capitales variables en progresión geométrica, se observa que la diferencia se encuentra en la introducción de la razón de variación de los capitales.
- Resulta interesante señalar que cuando  $r < i$  las rentas financieras adelantadas de capitales variables en progresión geométrica resultan equivalentes a rentas de capitales constantes calculadas a una tasa de interés  $i^* = [(1+i) / (1+r)] - 1$
- Análogamente, la relación previamente expuesta se verifica también para el caso de los seguros de vida de riesgo inmediato con capitales variables en progresión geométrica en comparación con los de capitales constantes.

- En el caso de los seguros de vida de capitales múltiples de riesgo inmediato con capitales variables en progresión geométrica, en comparación con las rentas financieras adelantadas, a la mencionada relación se le agrega la tasa de permanencia por supervivencia resultando entonces, en este caso, la tasa equivalente a  $i^{**} = (1+i)/a \cdot (1+r) - 1$  siempre que se verifique que:  $a \neq (1+i)/(1+r)$ .
- En el caso en que  $r > i$  el valor actual obtenido en el caso de rentas financieras adelantadas de capitales variables en progresión geométrica es mayor a la cantidad de pagos mientras que en el caso de las rentas actuariales va a depender del valor de la tasa de permanencia por supervivencia  $a$ ; es decir, las rentas actuariales variables en progresión geométrica serán mayores al número de pagos si  $(1+r) \cdot a > 1+i$

Puede concluirse entonces que;

- Las rentas financieras podrían definirse como un caso particular de los seguros de vida de capitales múltiples bajo la ley de Dormoy. Si se observan los resultados obtenidos puede verse que en las actuariales aparece  $a \cdot v$  cuando se trata de capitales constantes y  $a \cdot v \cdot \theta$  en el caso de capitales variables en progresión geométrica. De este modo, si se asume que  $a = 1$ , se llega a las expresiones obtenidas en el caso de las rentas financieras. Debe hacerse hincapié en que asumir  $a = 1$  significa certeza que justamente es lo que distingue a las rentas financieras de las actuariales.

Las rentas actuariales aplicando la ley de Dormoy son equivalentes a rentas financieras calculadas a una tasa  $i^{***} = [(1+i)/a] - 1$ . Lo expuesto se verifica tanto para las rentas de capitales constantes como para el caso de capitales variables

# ANEXO

## Rentas Financieras

### De capitales unitarios constantes

El valor actual de una sucesión de  $n$  capitales unitarios pagaderos periódicamente, el primero de ellos exigible  $m$  períodos con posterioridad al momento de valuación, se calcula como:

$$af(m; n; i) = \sum_{t=1}^n v^{m+t-1} = v^m \cdot \sum_{t=0}^{n-1} v^t = v^m \cdot \left( \frac{1 - v^n}{1 - v} \right) = v^m \cdot \left( \frac{1 - v^n}{d} \right)$$

donde:  $v = 1/(1+i)$  y  $d = i/(1+i)$ .

En el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  la renta resulta ser una sucesión de infinitos capitales unitarios pagaderos periódicamente, el primero de ellos exigible  $m$  períodos con posterioridad al momento de valuación y su expresión de cálculo resulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} af(m; n; i) = af(m; \infty; i) = \sum_{t=1}^{\infty} v^{m+t-1} = v^m \cdot \sum_{t=0}^{\infty} v^t = v^m \cdot \left( \frac{1}{1 - v} \right) = \frac{v^{m-1}}{i}$$

Para analizar la sensibilidad del valor actual de la sucesión utilizamos la diferencia o la derivada con respecto a la variable a considerar, según ésta se asuma como discreta o continua. Esto es, con relación al:

### Plazo de diferimiento ( $m$ ):

$$\begin{aligned} \Delta_m af(m; n; i) &= af(m+1; n; i) - af(m; n; i) = \\ &= \sum_{t=1}^n v^{m+1+t-1} - \sum_{t=1}^n v^{m+t-1} = v^m \cdot \left( \sum_{t=1}^n v^t - \sum_{t=0}^{n-1} v^t \right) = \\ &= v^m \cdot (v^n - 1) = \left( \frac{1}{1+i} \right)^m \cdot \left[ \left( \frac{1}{1+i} \right)^n - 1 \right] < 0 \end{aligned}$$

**Plazo de pago ( $n$ ):**

$$\begin{aligned}\Delta_n af(m; n; i) &= af(m; n+1; i) - af(m; n; i) = \\ &= \sum_{t=1}^{n+1} v^{m+t-1} - \sum_{t=1}^n v^{m+t-1} = v^m \cdot \left( \sum_{t=0}^n v^t - \sum_{t=0}^{n-1} v^t \right) = \\ &= v^m \cdot v^n = \left( \frac{1}{1+i} \right)^m \cdot \left( \frac{1}{1+i} \right)^n = \left( \frac{1}{1+i} \right)^{m+n} > 0\end{aligned}$$

**Tasa de interés ( $i$ ):**

$$\begin{aligned}\frac{\partial af(m; n; i)}{\partial i} &= \frac{\partial}{\partial i} \sum_{t=1}^n v^{m+t-1} = \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial i} v^{m+t-1} = \sum_{t=1}^n (m+t-1) \cdot v^{m+t-2} \frac{dv}{di} = \\ &= \sum_{t=1}^n (m+t-1) \cdot v^{m+t-2} \cdot \frac{d}{di} \left( \frac{1}{1+i} \right) = \\ &= \sum_{t=1}^n (m+t-1) \cdot v^{m+t-2} \cdot \left[ -\frac{1}{(1+i)^2} \right] = \\ &= \sum_{t=1}^n (m+t-1) \cdot v^{m+t-2} \cdot (-v^2) = -v^m \cdot \sum_{t=1}^n (m+t-1) \cdot v^t < 0\end{aligned}$$

**De capitales variables en progresión geométrica**

El valor actual de una sucesión de  $n$  pagos de capital inicial unitario y los siguientes, variables en una razón  $\theta=1+r$  con  $r > -1$  constante, aplicada sobre el capital vigente el período inmediato anterior, se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}afv_y(m; n; i; r) &= \sum_{t=1}^n v^{m+t-1} \cdot \theta^{t-1} = v^m \cdot \sum_{t=0}^{n-1} \theta^t \cdot v^t = v^m \cdot \sum_{t=0}^{n-1} (\theta \cdot v)^t = \\ &= v^m \cdot \left[ \frac{1 - (\theta \cdot v)^n}{1 - \theta \cdot v} \right] = v^{m-1} \cdot \left[ \frac{1 - (\theta \cdot v)^n}{i - r} \right] ; \text{ si } r \neq i \\ afv_y(m; n; i; i) &= \sum_{t=1}^n v^{m+t-1} \cdot (1+i)^{t-1} = v^m \cdot \sum_{t=1}^n 1 = n \cdot v^m ; \text{ si } r = i\end{aligned}$$

En el límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , la renta resulta ser una sucesión de infinitos capitales pagaderos periódicamente, el primero de ellos exigible  $m$  períodos con posterioridad al momento de valuación. Esta renta tiene un capital inicial unitario y los siguientes variables en una razón  $\theta$  constante aplicada sobre el capital vigente el período inmediato anterior y se calcula como:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} afv_{\theta}(m; n; i; r) &= afv_{\theta}(m; \infty; i; r) = \sum_{t=1}^{\infty} v^{m+t-1} \cdot \theta^{t-1} = \\ &= v^m \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \theta^{t-1} \cdot v^{t-1} = v^m \cdot \left[ \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} (\theta \cdot v)^n}{1 - \theta \cdot v} \right] = \\ &= v^{m-1} \cdot \left[ \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} (\theta \cdot v)^n}{i - r} \right] ; \text{ si } r \neq i \end{aligned}$$

Nótese que el valor de  $afv_{\theta}(m; \infty; i; r)$  depende de:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [(1+r) \cdot v]^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1+r}{1+i} \right)^n \\ \text{Si } \left| \frac{1+r}{1+i} \right| < 1 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1+r}{1+i} \right)^n = 0 \Rightarrow \\ afv_{\theta}(m; \infty; i; r) &= v^m \cdot \frac{1}{1 - \theta \cdot v} = v^{m-1} \cdot \frac{1}{i - r} \\ \text{Si } \left| \frac{1+r}{1+i} \right| > 1 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1+r}{1+i} \right)^n = \infty \Rightarrow afv_{\theta}(m; \infty; i; r) = \infty \end{aligned}$$

Si  $r = i$  se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} afv_{\theta}(m; n; i; i) = afv_{\theta}(m; \infty; i; i) = \sum_{t=1}^{\infty} v^{m+t-1} \cdot (1+i)^{t-1} = v^m \cdot \sum_{t=1}^{\infty} 1 = \infty$$

Se analiza la sensibilidad del valor actual de la sucesión utilizando diferencia o derivada con respecto a la variable a considerar, según ésta se asuma como discreta o continua.

**Plazo de diferimiento ( $m$ ):**

Con

$$\Delta_m afv_g(m; n; i; r) = afv_g(m+1; n; i; r) - afv_g(m; n; i; r)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } r \neq i: \Delta_m afv_g(m; n; i; r) &= v^{m+1} \cdot \left[ \frac{1 - (\theta \cdot v)^n}{1 - \theta \cdot v} \right] - v^m \cdot \left[ \frac{1 - (\theta \cdot v)^n}{1 - \theta \cdot v} \right] = \\ &= v^m \cdot \left[ \frac{1 - (\theta \cdot v)^n}{1 - \frac{1+r}{1+i}} \right] \cdot (v - 1) = \\ &= v^{m-1} \cdot \left[ \frac{1 - (\theta \cdot v)^n}{i - r} \right] \cdot (v - 1) < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } r = i: \Delta_m afv_g(m; n; i; r) &= afv_g(m+1; n; i; r) - afv_g(m; n; i; r) = \\ &= n \cdot v^{m+1} - n \cdot v^m = n \cdot v^m \cdot (v - 1) < 0 \end{aligned}$$

**Plazo de pago ( $n$ ):**

$$\Delta_n afv_g(m; n; i; r) = afv_g(m; n+1; i; r) - afv_g(m; n; i; r) =$$

$$\begin{aligned} \text{Si } r \neq i: \Delta_n afv_g(m; n; i; r) &= v^m \cdot \left[ \frac{1 - (\theta \cdot v)^{n+1}}{1 - \theta \cdot v} \right] - v^m \cdot \left[ \frac{1 - (\theta \cdot v)^n}{1 - \theta \cdot v} \right] = \\ &= v^m \cdot \left[ \frac{-(\theta \cdot v)^{n+1} + (\theta \cdot v)^n}{1 - \theta \cdot v} \right] = \\ &= v^m \cdot (\theta \cdot v)^n \cdot \left[ \frac{1 - \theta \cdot v}{1 - \theta \cdot v} \right] = \theta^n \cdot v^{m+n} > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } r = i: \Delta_n afv_g(m; n; i; r) &= afv_g(m; n+1; i; r) - afv_g(m; n; i; r) = \\ &= (n+1) \cdot v^m - n \cdot v^m = v^m > 0 \end{aligned}$$

**Tasa de interés ( $i$ ):**

$$\begin{aligned} \text{Si } r \neq i: \frac{\partial afv_g(m; n; i; r)}{\partial i} &= \frac{\partial}{\partial i} \sum_{t=1}^n v^{m+t-1} \cdot \theta^{t-1} = \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial i} v^{m+t-1} \cdot \theta^{t-1} = \\ &= \sum_{t=1}^n \theta^{t-1} \cdot (m+t-1) \cdot v^{m+t-2} \frac{dv}{di} = \\ &= \sum_{t=1}^n \theta^{t-1} \cdot (m+t-1) \cdot v^{m+t-2} \cdot \frac{d}{di} \left( \frac{1}{1+i} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{t=1}^n \theta^{t-1} \cdot (m+t-1) \cdot v^{m+t-2} \cdot \left[ -\frac{1}{(1+i)^2} \right] \\
 &= \sum_{t=1}^n \theta^{t-1} \cdot (m+t-1) \cdot v^{m+t-2} \cdot (-v^2) = \\
 &= -v^m \cdot \sum_{t=1}^n (m+t-1) \cdot \theta^{t-1} \cdot v^t < 0
 \end{aligned}$$

**Tasa de variación periódica de los capitales ( $r$ ):**

$$\begin{aligned}
 \text{Si } r \neq i: \quad \frac{\partial a f v_g(m; n; i; r)}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \sum_{t=1}^n v^{m+t-1} \cdot \theta^{t-1} = \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial r} v^{m+t-1} \cdot \theta^{t-1} = \\
 &= \sum_{t=1}^n v^{m+t-1} \cdot (t-1) \cdot \theta^{t-2} \frac{d\theta}{dr} = \\
 &= \sum_{t=1}^n v^{m+t-1} \cdot (t-1) \cdot \theta^{t-2} \cdot \frac{d(1+r)}{dr} = \\
 &= \sum_{t=1}^n v^{m+t-1} \cdot (t-1) \cdot \theta^{t-2} \cdot 1 = \\
 &= v^m \cdot \sum_{t=1}^n (t-1) \cdot v^{t-1} \cdot \theta^{t-2} > 0
 \end{aligned}$$

## Seguros de vida de capitales múltiples

De capitales unitarios constantes

$$a(x; o; n) = \sum_{t=0}^{n-1} E(x; t)$$

Se reemplaza el valor actual actuarial por su expresión equivalente:

$$a(x; o; n) = \sum_{t=0}^{n-1} p(x; t) v^t$$

Se reemplaza la probabilidad de vida por la expresión equivalente correspondiente a la ley de mortalidad analizada:

$$a(x; o; n) = \sum_{t=0}^{n-1} a^t v^t$$

Se trata de una suma de términos variables en progresión geométrica con primer término igual a uno, razón igual a  $a \cdot v$  y  $n$  términos. En consecuencia, al aplicar la fórmula de la suma se llega a:

$$a(x; o; n) = \frac{1 - (a \cdot v)^n}{1 - a \cdot v}$$

Se analizarán las variaciones de la función con relación a:

### Plazo de diferimiento

$$\Delta_m a(x; m; n) = a(x; m + 1; n) - a(x; m; n)$$

$$\Delta_m a(x; m; n) = \sum_{t=m+1}^{m+n} E(x; t) - \sum_{t=m}^{m+n-1} E(x; t)$$

$$\Delta_m a(x; m; n) = E(x; m + n) - E(x; m)$$

Al sacar factor común el sustraendo, se llega a:

$$\Delta_m a(x; m; n) = -E(x; m)[1 - E(x + m; n)]$$

que puede escribirse como:

$$\Delta_m a(x; m; n) = -E(x; m)[1 - E(x + m; n)]$$

y que, bajo la ley de mortalidad analizada, resulta:

$$\Delta_m a(x; m; n) = -(a.v)^m [1 - (a.v)^n] < 0$$

### Plazo de cobertura

$$\Delta_n a(x; m; n) = a(x; m; n + 1) - a(x; m; n)$$

$$\Delta_n a(x; m; n) = \sum_{t=m}^{m+n} E(x; t) - \sum_{t=m}^{m+n-1} E(x; t)$$

$$\Delta_n a(x; m; n) = E(x; m + n)$$

que, bajo la ley de mortalidad analizada, resulta:

$$\Delta_n a(x; m; n) = (a.v)^{m+n} > 0$$

### Con respecto a la tasa de interés

$$\frac{\partial}{\partial i} a(x; m; n) = \frac{\partial}{\partial i} \sum_{t=m}^{m+n-1} E(x; t)$$

Se reemplaza el capital diferido de vida por su expresión equivalente:

$$\frac{\partial}{\partial i} a(x; m; n) = \frac{\partial}{\partial i} \sum_{t=m}^{m+n-1} v^t \cdot p(x; t)$$

Se aplican las propiedades de la derivada:

$$\frac{\partial}{\partial i} a(x; m; n) = \sum_{t=m}^{m+n-1} p(x; t) \cdot \frac{\partial}{\partial i} v^t$$

con lo cual:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial i} a(x; m; n) &= \sum_{t=m}^{m+n-1} p(x; t) \cdot (-t) \cdot v^{t+1} \\ \frac{\partial}{\partial i} a(x; m; n) &= -v \sum_{t=m}^{m+n-1} t E(x; t) < 0 \end{aligned}$$

que puede ser escrito como:

$$\frac{\partial}{\partial i} a(x; m; n) = -v [m a(x; m; n) + a I(x; m+1; n-1)]$$

## De capitales variables en progresión geométrica

El valor actual se define como:

$$av_g(x; m; n) = \sum_{t=0}^{n-1} \theta^t E(x; m+t)$$

Al aplicar recurrencia en el capital diferido de vida, se tiene que:

$$av_g(x; m; n) = \sum_{t=0}^{n-1} \theta^t E(x; m) E(x + m; t)$$

$$av_g(x; m; n) = E(x; m) \sum_{t=0}^{n-1} \theta^t E(x + m; t)$$

Se reemplaza el capital diferido de vida por su expresión equivalente en función de la ley de mortalidad de Dormoy:

$$av_g(x; m; n) = (a.v)^m \sum_{t=0}^{n-1} \theta^t \cdot (a.v)^t$$

Al reordenar la expresión se llega a:

$$av_g(x; m; n) = (a.v)^m \frac{1 - [\theta \cdot a.v]^n}{1 - [\theta \cdot a.v]}$$

Se trata de una suma de términos variables en progresión geométrica con primer término igual a  $(a.v)^m$ , razón igual a  $(\theta \cdot a.v)$  y  $n$  términos. En consecuencia, al aplicar la fórmula de la suma se llega a:

$$av_g(x; m; n) = \frac{[\theta \cdot a.v]^m - [\theta \cdot a.v]^{m+n}}{1 - \theta \cdot a.v}$$

Se analizarán las variaciones de la función con relación a:

### Plazo de diferimiento

$$\Delta_m av_g(x; m; n) = av_g(x; m + 1; n) - av_g(x; m; n)$$

$$\Delta_m av_g(x; m; n) = \sum_{t=0}^{n-1} \theta^t E(x; m + 1 + t) - \sum_{t=0}^{n-1} \theta^t E(x; m + t)$$

Aplicando recurrencia en el factor de actualización y, sacando factor común, se tiene que:

$$\Delta_m av_g(x; m; n) = \sum_{t=0}^{n-1} \theta^t E(x; m+t) [E(x+m+t; 1) - 1]$$

Al reemplazar por la ley de Dormoy, se llega a:

$$\Delta_m av_g(x; m; n) = \sum_{t=0}^{n-1} \theta^t (a.v)^{m+t} [a.v - 1]$$

$$\Delta_m av_g(x; m; n) = -(1 - av)(av)^m \sum_{t=0}^{n-1} [a.v.\theta]^t$$

$$\Delta_m av_g(x; m; n) = -(1 - av)(av)^m \cdot \frac{1 - (a.v.\theta)^n}{1 - [a.v.\theta]} < 0$$

### Plazo de cobertura

$$\Delta_n av_g(x; m; n) = av_g(x; m; n+1) - av_g(x; m; n)$$

$$\Delta_n av_g(x; m; n) = \sum_{t=0}^n \theta^t \cdot E(x; m+t) - \sum_{t=0}^{n-1} \theta^t E(x; m+t)$$

$$\Delta_n av_g(x; m; n) = (1+r)^n E(x; m+n)$$

Reemplazando por la ley de Dormoy, se tiene que:

$$\Delta_n av_g(x; m; n) = \theta^n \cdot (a.v)^{m+n}$$

$$\Delta_n av_g(x; m; n) = (a.v)^m \cdot (a.v.\theta)^n > 0$$

## Referencias

- Bowers, Gerber, Hickman, Jones & Nesbitt (1997). *Actuarial Mathematics*. U.S.A.: The society of Actuaries.
- Casparri, María Teresa, Metelli, María Alejandra y Mutchinick, Paula (2012). *Aplicación de los seguros de personas a la gestión actuarial*. Buenos Aires, Argentina: Eudeba.
- Castegnaro, Aída Beatriz (2009). *Curso de Cálculo Financiero*. Editorial La Ley, Buenos Aires.
- Garnica Hervas, Juan Ramón; Thomasz, Esteban Otto y Garofalo, Romina. *Calculo financiero: Teoría, ejercicios y aplicaciones*. EC, Buenos Aires.
- Jordan, C. W. (1975). *Life Contingencies*. U.S.A.: The society of Actuaries.
- Murioni, Oscar y Trossero, Ángel A. (2005). *Manual de Cálculo Financiero*. Fondo Editorial Consejo Profesional de Ciencias Económicas de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Buenos Aires.
- Gonzalez Galé, José. (1979). *Matemáticas financieras: intereses y anualidades ciertas*. Macchi, Buenos Aires.
- Levi, Eugenio. (1964). *Curso de Matemática Financiera y Actuarial*. Volúmenes I y II. Editorial Bosch, Barcelona.
- Nieto De Alba, U. – Asencio, J. V. (1983). *Matemática Actuarial*. España: Fundación Mapfre Estudios.





# SECCIÓN 4

Riesgo agropecuario  
y cambio climático





## 4.1 El riesgo agrícola, un enfoque que contemple al productor y el desarrollo sustentable<sup>1</sup>

María Teresa Casparri • Miguel Fusco • Verónica García Fronti

### Resumen

Las políticas públicas agrícolas para la gestión de los riesgos son, o bien políticas enfocadas hacia la diversificación mediante los mercados tanto de seguros o de futuros, o bien de emergencia agropecuaria. El problema es que los productores pequeños muchas veces no son sujetos que puedan acceder a los mercados y muchas veces los beneficios de la emergencia no les solucionan la situación de desastre en la cual están inmersos. Esto implica que muchas de las medidas tomadas para mejorar la situación de los productores no son percibidas por los mismos como beneficiosas.

En este contexto es fundamental previo a la definición de políticas públicas conocer la opinión de todos los actores involucrados. Una herramienta que permite conocer los intereses de los distintos sectores es el proceso jerárquico de análisis (AHP por sus siglas en inglés: *Analytic Hierarchy Process*) que es una metodología de decisión multicriterio que permite priorizar diferentes alternativas en función de una serie de criterios, es decir, teniendo en cuenta a los distintos actores involucrados en el problema.

En la primera parte del trabajo describiremos los diferentes riesgos asociados al riesgo agrícola y su percepción por parte del pequeño productor agropecuario. Focalizamos en los pequeños productores porque consideramos que es este el sector más vulnerable y el que posee menor posibilidad de gestionar los riesgos asociados con la actividad agropecuaria. Luego describiremos la metodología

<sup>1</sup> Este trabajo fue presentado en el año 2012: III CONGRESO INTERNACIONAL -X SIMPOSIO- DE AMÉRICA LATINA Y EL CARIBE “La región frente a los desafíos que generan las crisis y paradigmas emergentes en el sistema internacional y regional. Análisis históricos, económicos y sociopolíticos”.

AHP y como la misma fue implementada por parte de la FAO (Organización de las Naciones Unidas para la Alimentación y la Agricultura) en una micro Cuenca en el estado de Santa Catarina en Brasil, para priorizar el manejo sustentable de tierras para uso agrícola. Esta metodología permite plantear en forma sencilla un problema complejo en el cual los objetivos que tienen los sectores involucrados están contrapuestos. Por último, analizaremos las ventajas y desventajas de utilizar la metodología de decisión multicriterio (AHP) como una herramienta de decisión para la gestión de los riesgos agropecuarios.

**Palabras clave:** riesgo agrícola, AHP, desarrollo sustentable

## Riesgos Agropecuarios

El riesgo que enfrentan los pequeños productores agropecuarios al producir sus cultivos no puede eliminarse completamente pero sí es posible reducirlo o transferirlo a través de diversas estrategias.

Cuando hablamos de riesgo nos referimos al riesgo desde una concepción económica actuarial como la probabilidad esperada de pérdida. Para gestionar adecuadamente el riesgo es necesario acceder a la información acerca de los sucesos, las probabilidades, los impactos y la sistematicidad de dichos eventos.

Es importante analizar en lo que se refiere a los riesgos agropecuarios la naturaleza de los mismos, de esta forma los podemos clasificar como:

*Riesgo productivo:* es cuando se ve afectado el rendimiento de la producción, por ejemplo ante la sequía (riesgo climático) el productor ve una merma en su producción.

*Riesgo comercial o de precios:* se refiere a los riesgos asociados a la variabilidad de precios que afectan directamente a los ingresos.

*Riesgo financiero:* es cuando el productor no tiene capacidad de endeudamiento.

*Riesgo legal y político:* se refiere a cambios en las condiciones económicas y políticas que afecten al negocio agropecuario, ya sea un cambio en el precio de divisas o de la tasa de interés.

*Riesgo humano:* escenarios producidos por una falla humana que ocasionan pérdidas en la productividad y por lo tanto afectan el resultado económico.

Asimismo se debe conocer de los riesgos su intensidad, correlación y frecuencia, siendo la interacción de ellas lo que nos definirá la estrategia de gestión de riesgo a usar (estrategia dentro del campo, de diversificación o de innovación y políticas públicas). La *correlación* de los eventos la definimos como la relación existente entre un suceso y los demás sucesos del mismo tipo. Debemos tener en cuenta que una condición indispensable para la asegurable y la teoría de la cartera es la no correlación, ya que si los sucesos se encuentran correlacionados la disminución de los riesgos globales por la agregación de riesgos individuales se torna imposible. A la variable correlación si es positiva y cercana a uno le daremos el nombre de “riesgo sistémico” y en el caso de independencia “riesgo no sistémico”.

Con respecto a la *intensidad*, nos referimos a la fuerza con que impacta un riesgo, ocasionando una merma en los ingresos del productor. La *frecuencia* nos indica la periodicidad de ocurrencia de un suceso.

Las tres variables, correlación, intensidad y frecuencia, se relacionan dinámicamente, esta caracterización es teórica y le permite al productor, mercado o estado definir qué gestión realizar.

Una vez analizados los riesgos, sus impactos y la forma en que afectarán podremos gestionarlos de acuerdo a las estrategias de gestión dentro del campo, las estrategias de diversificación o bien innovaciones y políticas públicas para los eventos extremos.

Para poder analizar los riesgos asociados a la actividad agropecuaria es necesario conocer las etapas involucradas en el negocio agrícola que analizaremos a continuación.

## Etapas del proceso productivo y los riesgos

Las etapas del proceso productivo que consideramos están referidas a los cultivos de ciclo corto, cereales y oleaginosas. A continuación describimos cada una de las etapas.

### *1. Presiembra*

Es la etapa más importante en términos decisorios del proceso productivo, debido a que en ella el productor deberá realizar los estudios de factibilidad económico-financiero, técnicos y de riesgos a los efectos de tomar decisiones sobre la inversión que llevará a cabo. El análisis económico-financiero del proyecto debe empezar con una evaluación de los flujos de fondos agrícolas comparados con los cultivos alternativos. De esta manera se deberá evaluar los precios, los costos directos, los costos indirectos de todas las etapas que consideramos en el proceso productivo. En el análisis de costos se deberá incluir el arrendamiento, que si bien en esta etapa de análisis puede no estar definido el campo a arrendar, se incluyen los valores de referencia del lugar en el cual se encuentre el productor. Como ya mencionamos, como el productor no posee tenencia de tierra ni capital, se deberá incorporar el financiamiento con el cual afrontará la campaña.

Con respecto al análisis de riesgos en la etapa de presiembra, lo primero que debe hacer el productor es cuantificarlos para luego poder gestionarlos con diferentes estrategias a los efectos de suavizar el impacto de los riesgos en sus balances. Como primera medida debe analizar los riesgos que afectan a su producción considerando: estadísticas climáticas, pronósticos de lluvias, heladas y sequías. En nuestro país deberá recopilar información sobre las corrientes marinas “El Niño” y “La Niña” que determinarán el patrón de lluvias esperadas dependiendo de la ubicación geográfica del campo. A partir de este análisis el productor deducirá las pérdidas esperadas, definida como el valor de pérdida estimada debido a una catástrofe, por lo cual debemos conocer no sólo las probabilidades de los siniestros sino también el impacto que tendrán los mismos. De esta manera debemos diferenciar aquellos en base a la frecuencia y la intensidad con la que impactan y dentro de ellos analizar cuidadosamente los sistémicos de alta intensidad.

Una vez analizados los riesgos el productor deberá utilizar estrategias de diversificación para minimizar los efectos producidos por aquellos eventos de una frecuencia moderada y sobre todo de una media o alta intensidad. Diversificará con los instrumentos de gestión de riesgos existentes en los mercados, como son los seguros con sus adicionales o bien los seguros multiriesgo para los riesgos climáticos y los contratos de derivados y futuros para la cobertura de riesgo de precios. Para aquellos riesgos de alta frecuencia y baja intensidad el productor deberá minimizarlos mediante estrategias dentro del campo como diversificación de cultivos, modificación de la fecha de siembra que permiten absorber los riesgos no diversificables en los mercados.

Luego del análisis de riesgos el productor sabrá cómo lo afectan los riesgos y de acuerdo a esto definirá qué estrategias adoptar dentro de su explotación, o que deberá diversificar al mercado y cuáles son los riesgos sistémicos que si no puede cubrirse deberá definir no llevar adelante la campaña. El productor deberá gestionar los riesgos a los que se haya expuesto con las herramientas existentes en los mercados para los de mayor impacto y con estrategias dentro del campo para los de menor impacto.

En el análisis técnico se refiere a estudiar las condiciones del campo y que tipo de cultivo y paquete tecnológico se usará, que de acuerdo a esas condiciones son viables para esa campaña.

Al finalizar la etapa de presiembra el productor debe conocer los valores esperados de los flujos de fondos, el financiamiento requerido, los riesgos a los cuales está expuesta la producción, las estrategias que utilizará para cubrirse de estos riesgos y el tipo de tecnología y cultivo que utilizará en la campaña ya que conoce las características del suelo y del clima de la zona elegida para cultivar.

## **2. Siembra:**

En la etapa de siembra el productor analizará los ciclos y etapas de desarrollo del cultivo y los relacionará con los datos climáticos de la región en donde va a cultivar, de forma de definir la fecha exacta de siembra y si es posible realizar una siembra escalonada, a los efectos de diversificar los riesgos hídricos en los momentos más críticos de los cultivos.

De esta forma, en la etapa de siembra el productor analiza los momentos claves del cultivo, busca efectuar un manejo del cultivo sano con la menor cantidad de patógenos y plagas posibles, analizando e incorporando la información de manera de valorar el proyecto en todo momento.

### **3. Cosecha**

La etapa de cosecha es crítica para el productor, ya que las pérdidas por mala gestión de cosecha en nuestro país es muy grande, tanto es así que el INTA creó un plan denominado: “Proyecto nacional de eficiencia en cosecha y postcosecha de granos y oleaginosas” con el objeto de formar a los productores en una gestión adecuada del cultivo al momento de la cosecha y así minimizar pérdidas.

El grano dependiendo del cultivo posee un nivel de humedad óptimo para la perdurabilidad de la cosecha. La clave en esta etapa está en que los granos no se pueden almacenar con cualquier humedad, por lo tanto lo ideal es esperar en el campo a que el grano alcance naturalmente la humedad óptima para almacenar con menor riesgo, pero muchas veces las condiciones climáticas no permiten esperar y el productor deberá decidir cuándo almacenar y correr mayor o menor riesgo de pérdida de cultivo. Además de la humedad del grano para almacenar, las cosechadoras necesitan determinadas condiciones de baja humedad para su ingreso a los campos.

### **4. Acondicionamiento y almacenamiento**

El acondicionamiento es la etapa previa al almacenamiento que podrá ser realizado por el productor o terciarizado. En esta etapa, se limpia y seca la cosecha para que el cultivo sea almacenado sin riesgos. El pequeño productor en general entrega el producto sin acondicionar al acopiador, el cual le debita del pago los conceptos de acondicionamiento (secado y limpieza del producto).

En cuanto al almacenamiento además del tradicional en silos, existe la modalidad de silos en bolsa que exige que los granos estén secos.

Los pequeños productores poseen menores opciones de acondicionamiento y almacenamiento, debido a los costos y volúmenes operados. Por esta razón la Comisión Europea incentiva fuertemente el cooperativismo como una forma de acceder a mejores condiciones de acondicionamiento y almacenaje para reducir los costos.

## **5. Comercialización**

El mercado en donde se comercializan tanto los productos agrícolas como los ganaderos son mercados con alto grado de atomización, con precios definidos por el mismo, razón por la cual los productores no pueden influenciar en el precio de venta. Pero si podrán minimizar los costos de comercialización utilizando economías de escala que pueden otorgarles los eslabonamientos y las cooperativas de productores.

En Argentina los pequeños productores que no poseen agrupación en cooperativismo, entregan sus productos directamente a los acopiadores, en la mayoría de los casos sin entregarla en las condiciones de limpieza y humedad óptimas.

Como pudimos observar, las estrategias de gestión de riesgo y minimización de costos se acotan con la escala del productor, siendo los pequeños productores los más expuestos ante los riesgos globales de la producción. Por esta razón deben ser coordinadas políticas públicas a los efectos de desarrollar eficientemente la gestión de riesgo y la minimización de los costos.

Debido a la cantidad de actores involucrados en el negocio agropecuario que poseen intereses muchas veces encontrados, para encontrar o priorizar acciones gubernamentales que minimicen el riesgo agropecuario de forma de asegurar una producción sostenible es necesario establecer prioridades que faciliten la toma de decisiones en lo que se refiere a gestión de riesgos. Una metodología sistemática y clara para establecer prioridades de acuerdo a criterios establecidos es el proceso analítico jerárquico que explicaremos a continuación y mostraremos como el mismo fue utilizado en Brasil para definir el mejor uso sustentable de tierra en una región.

## Metodología AHP2

El proceso analítico jerárquico (AHP, por sus siglas en inglés Analytic Hierarchy Process), es una metodología de trabajo que se basa en la descomposición de un problema en una estructura jerárquica.

Esta metodología fue propuesta por el matemático Thomas Saaty para resolver el tratado de reducción de armamento entre USA y la URSS y su uso se fue extendiendo a los más variados campos como la economía, la política y la gestión ambiental entre otros.

El AHP es un método de selección de alternativas en función de una serie de criterios, los cuales, en general, suelen estar en conflicto.

El proceso AHP se realiza en varias etapas: la formulación del problema, la valoración de los elementos y la priorización. A continuación describimos, brevemente, cada una de las etapas:

- 1) **Formulación del problema:** El primer paso en esta metodología es el más complicado de realizar y el que permite conocer mejor el tema que se está analizando. En esta etapa se debe desglosar el problema en sus componentes más importantes. En primer lugar se define el objetivo que se desea alcanzar al realizar la metodología AHP, luego se identifica que criterios son relevantes a la hora de conseguir el objetivo propuesto y por último se listan las distintas alternativas con las que se cuenta para alcanzar los objetivos deseados. Todo esto nos permite confeccionar la estructura jerárquica del problema.
  
- 2) **Valoración de los elementos:** Una vez construida la estructura jerárquica del problema se da paso a la segunda etapa del proceso AHP que es la de cuantificar a cada uno de los elementos con respecto a otro. El decisor debe emitir sus juicios de valor o preferencias en cada uno de los niveles jerárquicos establecidos. Para realizar esta asignación se utiliza una escala, previamente establecida. Saaty propone una escala que va del 1 al 9, tal como se expone en la siguiente tabla:

<sup>2</sup> Basado en Saaty (2002)

Escala numérica	Escala Verbal
1	Igual importancia de los criterios
3	Importancia moderada de un criterio sobre otro
5	Importancia fuerte de un criterio sobre otro
7	Importancia muy fuerte de un criterio sobre otro
9	Extrema importancia de un criterio sobre otro

Como resultado de estas comparaciones binarias vamos a ir confeccionando matrices. Por ejemplo, si comparamos tres criterios: ambiental, económico y social, la matriz de comparaciones binarias será:

	Ambiental	Económico	Social
Ambiental	1	5	3
Económico	1/5	1	9
Social	1/3	1/9	1

**3) Priorización de los criterios y las alternativas:** Por último una vez que ya se construyeron las matrices de comparación de pares se calcula la prioridad de cada criterio y de cada alternativa. El procedimiento propuesto por Saaty para su obtención es el método del autovector principal por la derecha.

**4) Priorización de las alternativas con respecto al objetivo planteado:** Una vez que se realizó la priorización de las alternativas con respecto a cada criterio, se confecciona una matriz cuyas columnas serán los autovectores obtenidos en cada una de las priorizaciones y se multiplica esta matriz por el vector de priorizaciones de los criterios, para obtener así la priorización de las alternativas con respecto al objetivo planteado. Este vector, nos indicará, para el modelo planteado cuál es la alternativa más conveniente.

## Caso de aplicación para el uso de tierras en Brasil

El proyecto elaborado por la FAO “Información sobre tierras y aguas para un desarrollo agrícola sostenible” (GCP/RLA/126/JPN) aplicó la metodología AHP para conocer las preferencias de actores involucrados en la toma de decisión frente a los usos de tierras en el caso específico de una Microcuenca en Brasil (Estado de Santa Catarina).

Previo al uso de la herramienta AHP se realizó con la comunidad el análisis de la situación actual y se estableció que la principal problemática es la *baja rentabilidad y alta erosión de sus actuales actividades agropecuarias*. Para esta etapa del proceso se definió que los actores involucrados fueran organismos agrarios, extensionistas y productores (representados por investigadores en esta prueba piloto). El problema se estructuró de la siguiente manera:

1. Identificación del problema: El problema identificado por la comunidad fue la *baja rentabilidad y la alta erosión de las actividades agropecuarias* en la microcuenca.
2. Definición del objetivo: El objetivo propuesto por los participantes fue: *Priorizar escenarios de usos de las tierras tendientes a minimizar la erosión y aumentar la rentabilidad* para la microcuenca.
3. Identificación de criterios y su priorización: Criterio ambiental, criterio económico, criterio de comercialización, criterio de infraestructura,
4. Identificación de alternativas: Se seleccionaron dos escenarios de usos de las tierras optimizadas, teniendo en cuenta mínima erosión y alta rentabilidad. Se definió usar estos dos escenarios porque se consideraron los más compatibles con el perfil de los agricultores de la región que se caracterizan por tener limitados recursos de capital, de tierra y por el alto riesgo de sus actividades agropecuarias.
5. Emisión de juicios y las evaluaciones: Si bien al utilizar la metodología AHP se logró priorizar entre dos alternativas posibles para el uso de la tierra, el principal potencial de la herramienta fue que permitió mostrar en forma sistemática que opinaban los distintos actores involucrados en el uso de la tierra. Esto permite que de la metodología se realicen varias lecturas y se conozca el problema en mayor profundidad. En este ejemplo, los criterios que se definieron para evaluar las

alternativas fueron: ambiental, económico, comercial, infraestructura y social (ser humano). El modelo jerárquico construido por consenso fue (extraído del Anexo 3 del documento de la FAO):

Anexo 3. Modelo Jerárquico Construido por Consenso			
<b>AMBIENTE</b>	:	Criterio Ambiental	
		Subcriterios:	
		Solos:	Aprovechamiento de Suelos
		Degr_Amb.:	Degradación Ambiental
<b>ECONOM</b>	:	Criterio Económico	
		Subcriterios:	
		Capital:	Disponibilidad de Capital
		Freq_Rec:	Flujo de Renta
		Retorno:	Retorno del Capital
		Investim.:	Necesidades de Inversión
		Risco. Ecom.:	Riesgo Económico
		Renda:	Rentabilidad de las actividades
<b>COMERC</b>	:	Criterio de Comercialización	
		Subcriterios:	
		Mercado:	Demanda de Mercado
		Agro. Com.:	Existencia de Canales de Comercialización
		Comprov.:	Estabilidad Comercial
		Agroind.:	Necesidades de Agroindustria
<b>INFRAEST</b>	:	Criterio de Infraestructura	
		Subcriterio:	
		Infra. Ex.:	Necesidades de Infraestructura
<b>SER H.</b>	:	Criterio Ser Humano	
		Subcriterios:	
		Org. Prod.:	Organización del Productor
		Satisf.:	Satisfacción del Productor
		MO:	Disponibilidad de Mano de Obra
		Con_Tec.:	Conocimiento Tecnológico

**Fuente:** FAO (2000) Informe técnico N°2 El AHP (proceso analítico jerárquico) y su aplicación para determinar los usos de las tierras. El caso de Brasil. (Proyecto GCP/RLA/126/JPN).

Una vez que se definió el modelo por consenso, es decir, se definió el problema, el objetivo, los criterios y subcriterios (incluida su priorización) se inició la evaluación de las dos alternativas mediante los criterios establecidos.

Sin entrar en detalle de los valores obtenidos lo que podemos ver es que los tres grupos involucrados en evaluar los dos escenarios, productores, extensionistas y los investigadores presentan diferencias en las preferencias, si bien para todos los grupos el escenario elegido es el segundo. Si bien este ejemplo se hizo para analizar dos posibles usos de la tierra, la metodología

sirvió para conocer también las opiniones de los tres grupos involucrados en el trabajo y de esa forma trabajar en políticas acorde a esas necesidades.

Esta metodología nos permite, además de tomar decisiones sobre qué escenario elegir, conocer las opiniones de los actores involucrados en el problema, lo cual consideramos indispensable en la gestión de riesgos agropecuarios.

El principal problema que encontramos en esta metodología es que la etapa de armado de las matrices va a depender de las opiniones subjetivas de los actores involucrados en el armado, por lo tanto es fundamental elegir adecuadamente a los mismos, de forma que representen a todas las voces afectadas por el problema, si no, la solución planteada será a favor de un solo grupo de interés.

## Conclusiones

El sector agropecuario se encuentra expuesto a riesgos que poseen naturaleza y orígenes distintos. Por ello, la toma de decisiones en el sector agropecuario debe tener en cuenta los riesgos asociados a la actividad, analizándolos de acuerdo a su intensidad, correlación y frecuencia para poder gestionarlos con la herramienta adecuada. Las políticas públicas para disminuir o mitigar los riesgos agropecuarios se encuentran ante un panorama complejo, ya que la gestión de los riesgos agropecuarios es de por sí compleja y porque se tiene muchos actores involucrados con diferentes intereses. Una forma de realizar un análisis de esta situación es mediante la metodología AHP, que permite priorizar entre diferentes alternativas en función de una serie de criterios que en general están contrapuestos, esta metodología utiliza el concepto matemático de autovector para priorizar entre un conjunto de criterios y alternativas. La simpleza con la que se puede plantear un problema complejo y resolverlo en forma sencilla es la mayor virtud de esta metodología, no obstante la sola aplicación de la misma no nos garantiza que se tome la mejor decisión.

En este trabajo vimos la utilidad de la herramienta para definir el mejor uso sustentable de la tierra en una zona de Brasil, en futuros trabajos analizaremos como se utiliza esta herramienta en Argentina.

## Referencias

- Casparri, M.T, Fusco, M. y García Fronti, V. (2009): Impacto del cambio global sobre los seguros agrícolas en la región pampeana, VI Jornadas Interdisciplinarias de Estudios Agrarios y Agroindustriales, FCE, UBA, Buenos Aires
- Gutman, G. (2006): Obstáculos y desafíos para la integración competitiva de Pequeños Productores Agropecuarios en tramas regionales. Reflexiones a partir de estudios de caso. Ponencia presentada en el *IX Seminario Internacional de la Red Iberoamericana de Investigadores sobre Globalización y Territorio* (RII); Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 16 al 19 de mayo del 2006.
- Lattuada, M. y Renold, J. (2004): El cooperativismo agrario ante la globalización: un análisis sociológico de los cambios en su composición, morfología y discurso institucional. Buenos Aires, Siglo veintiuno editores Argentina.
- Obschatko, E., Foti, M. y Román, M. (2007): Los pequeños productores en la República Argentina. Importancia en la producción agropecuaria y en el empleo en base al Censo Nacional Agropecuarios 2002, 2° edición – Argentina – Secretaría de Agricultura, Ganadería, Pesca y Alimentos. Dirección de Desarrollo Agropecuario: Instituto Interamericano de Cooperación para la Agricultura.
- Panel Intergubernamental de Cambio Climático (IPCC) (2007): Cambio Climático 2007 Informe de síntesis. Geneva, Editado por Rajendra Pachauri, IPCC Chairman Disponible en: [http://www.ipcc.ch/pdf/assessment-report/ar4/syr/ar4\\_syr\\_sp.pdf](http://www.ipcc.ch/pdf/assessment-report/ar4/syr/ar4_syr_sp.pdf) (consulta 22 de septiembre del 2009).
- Rodríguez, Javier (2008): Consecuencias económicas de la soja transgénica: Argentina, 1996-2006.-1° ed. – Buenos Aires, Ediciones Cooperativas.
- Saaty, T. (2002): Decision-making with the AHP: Why is the principal eigenvector necessary. *European Journal of Operational Research*.



## 4.2 Ley de Emergencia Agropecuaria y su impacto sobre los pequeños productores

*María Teresa Casparri • Miguel Fusco • Verónica García Fronti*

### Resumen

Los pequeños productores agropecuarios encuentran serias dificultades para acceder a los instrumentos de gestión de riesgo. Por otra parte tienen acceso restringido a los créditos y por lo tanto deben enfrentar por si solos los shocks que impactan en sus balances. Asimismo poseen escasa flexibilidad con respecto a las estrategias on farm y risk sharing debido principalmente a su falta de escala. Si las políticas de gestión de desastres poseen bajo impacto real podemos postular que los pequeños productores se encuentran altamente expuestos a las catástrofes y sin opciones para gestionar los riesgos asociados.

Por lo mencionado anteriormente, el presente trabajo tiene como objetivo desarrollar y analizar las emergencias agropecuarias declaradas en Argentina desde el inicio de la ley 26509, con el fin de indagar sobre el impacto de las políticas públicas de gestión de catástrofe sobre los pequeños productores.

**Palabras clave:** pequeños productores, gestión de riesgo, desastres agropecuarios.

### 1. Introducción

La sustentabilidad de los pequeños productores agropecuarios juega un rol clave en el desarrollo de las economías regionales. Un factor importante para asegurar la sustentabilidad del productor es el acceso a los instrumentos de gestión de riesgos.

En general se observa que los productores pequeños en Argentina poseen acceso restringido a estos instrumentos. Ya que los mismos se encuentran imposibilitados para acceder a los instrumentos de diversificación, poseen restricciones para el acceso a los mercados de crédito y por lo tanto deben hacer frente por si solos a los shocks que impactan en sus balances. Sumado a estas limitaciones, los pequeños productores poseen acotado margen de acción dado que no poseen escala.

En este escenario los pequeños productores son muy vulnerables ante manifestaciones climáticas extremas que afectan seriamente los rendimientos esperados.

La Ley de Emergencia Agropecuaria (LEA) que está vigente en Argentina es la Ley n° 26509 cuyo principal objetivo es regular la intervención del estado cuando se presentan fenómenos naturales que impactan fuertemente en la actividad agropecuaria.

En este trabajo se analizan las catástrofes o emergencias agropecuarias declaradas en nuestro país desde el año 2009 cuando entra en vigencia la ley n° 26509 hasta el año 2012 y se indaga sobre el impacto de las políticas de gestión de catástrofes sobre los pequeños productores.

## **2. Las catástrofes que impactan en la agricultura en base a la LEA N° 26509**

Las catástrofes agrícolas son por lo general fenómenos climáticos que repercuten en la producción esperada y reducen los ingresos por la actividad.

El marco legal para prevenir y mitigar los impactos producidos por estos fenómenos climáticos está dado por la Ley 26509. Esta ley determina que un evento climático será catástrofe o emergencia de acuerdo al porcentaje de pérdida generado en el campo productivo. Si la pérdida del siniestro es mayor al 50% la misma se considera emergencia y si la pérdida del siniestro se encuentra por encima del 80% se considera catástrofe agrícola.

Del relevamiento de todas las emergencias agropecuarias declaradas desde el inicio de la ley hasta fines de mayo de 2012 las catástrofes que afectaron a los productores primarios de Argentina fueron: sequía, inundaciones, vientos fuertes o huracanados, heladas, granizo y la erupción del volcán Peyehue.

La sequía es definida como la variación negativa temporal de los patrones de lluvia registrados en una región, originada por déficit de precipitaciones en periodos prolongados de tiempo que repercuten en los sistemas económicos, sociales y productivos de una región determinada (Velasco, 2004; Trivelli et al.,2005).

Las inundaciones pueden deberse a excesos de lluvias, definidas estas como precipitaciones que provoquen pérdidas o disminuciones en el rendimiento, que produzcan asfixia en el sentido de impedimento de respiración de las células de los cultivos en forma verificable y ocurran durante el ciclo de vida del cultivo. La inundación puede darse no solo por los excesos de lluvias, sino también por el desborde de ríos, riachuelos y cauces acuíferos. Estos son los casos presentados en Santiago del Estero por el desborde del río Salado y Dulce, en Salta por el desborde del río Bermejo, en la provincia del Chaco por crecidas de los ríos Paraná y Paraguay y en Entre Ríos por crecidas de los ríos Paraná y Uruguay.

Vientos fuertes o huracanados se denomina a los vientos que con o sin lluvias generan daños a las plantaciones. Tal es el caso de lo sucedido en la provincia de Corrientes con la horticultura de la región de la cuenca del Río Santa Lucía. Dicha emergencia fue decretada mediante la resolución del MINAGRI 1290/2011 en donde los productores de los departamentos de Goya, Bella Vista y Lavalle sufrieron fuertes pérdidas debido a las ráfagas de vientos estimadas entre 90 y 110 Km/h sumado a tormentas de granizo que produjo la destrucción de las producciones así como también de los plásticos y estructuras de los productores. El daño estimado ronda en 65% de la producción de la zona de emergencia con una valuación económica en producción y estructuras en \$ 21.000.000.

Las heladas<sup>1</sup> se definen como los daños materiales causados al área foliar o a los frutos debido al descenso de la temperatura a niveles que producen la muerte celular de las plantas, es decir muerte de los tejidos vegetales (Burgos, 2011). Debemos aclarar que las pérdidas por heladas en la producción dependerán del proceso o estadio en el que se encuentre la planta, así como las condiciones atmosféricas de humedad y presión del ambiente. Como caso de emergencia agropecuaria por helada se puede mencionar al ocurrido en la provincia de Corrientes en el año 2011. Allí se declaró la emergencia en el noreste de la provincia en los departamentos de Berón de Astrada, General Paz, Ituzaingó, San Miguel y Santo Tomé. Dicha emergencia fue declarada el 14/11/11 en la resolución 1291/2011 del Ministerio de Agricultura, Ganadería y Pesca de la Nación, siendo el motivo de ésta las heladas y sequías en la zona antes mencionada. En los meses de junio, julio, agosto y mediados de septiembre se han producido en la región 9 heladas agronómicas, estas fueron medidas sobre la superficie del suelo o del césped. Esta situación se vio agravada por precipitaciones menores a las medias históricas en la región, que llevó a una pérdida promedio de la superficie producida de aproximadamente 52%. Los cultivos predominantes en la región son: arroz, yerba mate, té, horticultura a campo y bajo cubierta, maíz, cítrico y mandioca.

En todos los departamentos en los cuales se decretó el estado de emergencia la pérdida estimada por la Comisión Provincial de Emergencia Agropecuaria es de \$79.000.000, siendo la producción de la yerba mate y el té los sectores productivos con mayores pérdidas, cerca de \$73.012.500. Debido a esto la provincia en primera medida decreta la emergencia prorrogando los vencimientos de los créditos provinciales y otorga asistencia técnica y financiera a los damnificados, aunque en la declaración no explicita la forma en la que implementará y ejecutará las acciones tendientes a minimizar el impacto en los productores.

Otro caso de helada tuvo lugar en las provincias de Corrientes y Entre Ríos, la misma se produjo en los días 6, 7 y 8 de junio de 2012 e impactó muy fuertemente en los cultivos hortícolas y citrícolas de ambas provincias. Dicha helada ha provocado pérdidas en 100.000 hectáreas de citricultura en alguna de las cuales se registraron pérdidas superiores al 80% de la producción de los departamentos en donde se declaró la emergencia. La mencionada

<sup>1</sup> Para el análisis detallado de las heladas en Argentina Ver Burgos, J. J. (2011). Las Heladas en Argentina. Buenos Aires.

emergencia o desastre agropecuario se formalizó en los departamentos de Monte Caseros, Paso de los Libres, Curuzú Cuatiá, Bella Vista, Saladas, Concepción, Mburucuyá, Lavalle, Esquina y Goya mediante el decreto de la provincia de Corrientes N° 1362 para los sectores citrícolas y horticultura a campo por el lapso de un año para la citricultura y seis meses para la horticultura a campo.

La erupción del complejo volcánico Peyehue se inició el día 4 de Junio de 2011. Las cenizas que al momento de la erupción alcanzaron una dimensión de 5 km de ancho por 10 km de alto, llegaron a nuestro país afectando fuertemente a las provincias Patagónicas y de Cuyo. Las principales actividades productivas se vieron afectadas provocando fuertes desbalances financieros en toda sociedad del área. En la región la producción ovina se vio fuertemente perjudicada debido a que por la catástrofe se afectaron los rendimientos de carnes, lanas e índices reproductivos. Por el impacto en las actividades cárnicas, sumado a la producción de frutas finas, el monto estimado de pérdida, solo para Río Negro asciende a 100 millones de pesos (Gaitán, Ayesa et al. 2011; Giraud and Villagra 2011). Debido a esto se han decretado estados de emergencia agropecuaria en cuatro provincias: Mendoza, Chubut, Río Negro y Neuquén, muchas de las cuales continuaron en estado de emergencia por largo tiempo.

Se ha podido apreciar que todos los fenómenos antes mencionados son de alto impacto en el balance, no solo de los productores agropecuarios, sino también de la sociedad en su conjunto. En todos los casos la asistencia a los productores se ejecuta luego de meses de espera debiendo afrontar en general la nueva campaña, posterior a la impactada por el desastre sin ayuda.

También se debe tener en cuenta que ante un mismo siniestro éste puede afectar de diferente forma de acuerdo a las condiciones del campo (por ejemplo estadios o tipos de cultivos) y aún en las mismas condiciones del campo las respuestas de los productores dependerán de sus condiciones sociales, económicas y productivas.

En el siguiente punto se analizarán los instrumentos de ejecución ex post que se aplican en Argentina y en el mundo para morigerar el efecto de los eventos climáticos extremos en las explotaciones agropecuarias.

### 3. Gestión del riesgo

Si se analizan las políticas aplicadas en los países desarrollados, en casi todos ellos existen instrumentos de gestión de riesgo como ser subsidios de prima de seguros o instrumentos de minimización de la exposición a los mercados. En los países menos desarrollados las estrategias no están claras. Existen algunos casos puntuales de políticas públicas de gestión de riesgo de mercado, pero en su mayoría las políticas son ex post, es decir, de gestión de catástrofe. En ninguno de los países se considera una visión integral o sistémica del problema.

En nuestro país, no se considera una gestión integral de los riesgos hacia los pequeños productores. Por lo tanto se encuentran altamente expuestos y vulnerables, debiendo estos en muchos casos, llevar adelante el proceso productivo sin ningún tipo de coberturas y con escasa o nula información de las variables relevantes. Por supuesto, la ley de emergencia agropecuaria prevé una serie de pasos para su cumplimiento y ejecución de los fondos que por tiempos propios de la gestión pública, pueden pasar meses o hasta inclusive años hasta que el productor puede obtener los beneficios. El problema es mayor aún si ese fondo posee una cuantía fija destinada a las emergencias y no posee independencia económica financiera para el caso de tener varias emergencias simultáneamente, como pasó en los últimos años en donde se declararon 111 emergencias agropecuarias en el plazo de 3 años.

A continuación se analizarán algunas herramientas utilizadas para la gestión de catástrofes.

#### 3.1 Exenciones Impositivas y prórroga de los vencimientos crediticios

La herramienta más utilizada sin duda es la prórroga o exención impositiva, la razón de su utilización es la simplicidad. Esta herramienta es una de las que se denominan ex post, dado que la misma tiene validez solo cuando el siniestro ocurre. En términos impositivos, las herramientas pueden ser de dos tipos: la suavización cíclica del impuesto y la flexibilidad impositiva. La suavización cíclica del impuesto consiste en que los productores puedan generar una reserva, pagando un exceso en los años de bonanza; el cálculo se realiza considerando un promedio histórico de los montos impositivos del

productor. Dicho productor generará un fondo que le permitirá suavizar la tasa impositiva, permitiéndole generar crédito impositivo que lo descontará en periodo de crisis.

Actualmente este mecanismo se encuentra en funcionamiento en los países de Australia, Canadá, Nueva Zelanda, Estados Unidos (Binswanger, 1980 / European Commission, 2001 / Rural and Environment Analytical Services, 2010). Las especificaciones varían de acuerdo a los países, pero todos permiten un depósito de dinero, algunos países con límites máximos de depósitos y otros realizan el cálculo de la media histórica de impuesto de una cantidad determinada de años<sup>2</sup>. En la Unión Europea existen diferentes mecanismos de suavización impositiva, por ejemplo el “Swedish System” permite el depósito anticipado de hasta un 20% de la media histórica de los cinco últimos años (European Commission, 2001).

Otra de las formas más utilizadas es la denominada flexibilidad impositiva, definida como la eximición o prórroga de los vencimientos impositivos. Este mecanismo es el más aplicado en los países menos desarrollados en sistemas de contención. Empíricamente se puede apreciar que los Estados realizan estas políticas cuando los productores se encuentran frente a una situación tal que difícilmente realicen el pago del impuesto. El punto aquí es que pequeños productores en zona de emergencia o desastre difícilmente pagarían los impuestos. Esto se debe a que los pequeños productores con alta exposición, ante una catástrofe, priorizan su subsistencia financiera intertemporal al pago de los impuestos.

Otra de las herramientas de política pública de gestión de la catástrofe es la prórroga de los vencimientos de los créditos por parte de los productores. Esto implica que el productor no pagará durante el periodo de emergencia los créditos o cuotas que posean vencimiento en el plazo estipulado en la declaración de emergencia. Pero los pequeños productores de nuestro país, más aún de los cultivos regionales en casi su totalidad no son sujetos de crédito<sup>3</sup>. Debido a esto la prórroga de vencimientos financieros, si bien es útil a los productores en emergencia, el impacto a los pequeños es casi nulo,

<sup>2</sup> Esta herramienta técnicamente no sería una política pública de ayuda ex post, dado que el estado solo actúa como articulador de fondos que los productores aportan con anterioridad. Además si no es contemplado el costo del dinero, los productores estarán financiando al estado.

<sup>3</sup> Los autores, exponen la relación existente entre los pequeños productores y el acceso a los mercados de créditos. Para más detalle ver: Trivelli, C. and S. Boucher (2005). Vulnerabilidad y shocks climáticos: El Costo de la Sequía para los Productores Agropecuarios de Piura y el Valle del Mantaro, IEP and UC Davis, Lima and Davis.

impidiendo a estos realizar pasajes intertemporales de fondos debiendo por lo tanto asumir los shocks económicos y financieros derivados de las catástrofes (Alderman and Paxson, 1992).

Los países subdesarrollados en políticas de gestión de catástrofes<sup>4</sup> tienen un escaso o nulo desarrollo en la planificación de las políticas de Estado, llevando a que las asistencias a los productores en emergencia no sean expeditivas. Esto se debe a que al no existir como eje estratégico de política la gestión de catástrofe, los mecanismos, recursos humanos y económicos y las instituciones técnicas no se encuentran exclusivamente avocadas a esta problemática.

### 3.2 Fondos mutuales

Los fondos mutuales tienen el objetivo de compartir y diversificar los riesgos entre los productores, minimizando el riesgo global por agregación de riesgos individuales. El funcionamiento de la herramienta antes mencionada se basa en aportes de los productores, pudiendo o no haber una intervención del Estado en la organización, estructura y generación de leyes marco o fomento de estos fondos. En las recomendaciones acerca de los instrumentos a desarrollar realizada por la Comisión Europea<sup>5</sup> uno de los lineamientos recomendados para fomentar el desarrollo de los países miembros es el incentivo, promoción y creación de Fondos Mutuales para la contención de desastres naturales.

Estos fondos mutuales tienen la particularidad de ser flexibles en cuanto al origen de los fondos recibidos y el funcionamiento del sistema prevé que ante un evento catastrófico el fondo mutual se encuentre disponible para la asistencia a los damnificados.

Existen instrumentos privados como los HuRLOs (por su significado en inglés *Hurricane Risk Landfall Option*) que ofrecen una cobertura contra huracanes en la costa del golfo de México y el Caribe, el precio de las acciones

<sup>4</sup> Los autores expuestos a continuación, afirman que países subdesarrollados no han incorporado la gestión de desastres naturales como política de planificación en cada uno de sus países. Para ver más detalles de las políticas financieras de mitigación de desastres Freeman, P. K., L. A. Martin, et al. (2003). "Gestión de riesgo de desastres naturales." Sistemas Nacionales para la Gestión Integral del Riesgo de Desastres. Estrategias financieras para la Reconstrucción en Caso de Desastres Naturales. Banco Interamericano de Desarrollo.

<sup>5</sup> Para ver informe completo ver European Commission (2001). Risk management tools for EU agriculture, with a special focus on insurance. D.-G. f. A. W. Document.

se negocia en los mercados y los fondos irán al rescate del territorio en el cual el huracán impacte primero en la temporada de huracanes. Una herramienta similar es propuesta teóricamente para el algodón en la provincia del Chaco. En la misma los productores aportan una determinada prima representativa de la pérdida esperada por el monto asegurado. Esta prima formaría parte de un fondo mutual para la caída de los rendimientos del cultivo algodón por sequía. (Lomónaco and Pilar, 2001).

Este tipo de fondos, generalmente, son muy vulnerables en los primeros años de implementación, puesto que con el pasar de los años, la liquidez de estos fondos irá aumentando, tornándose económica y financieramente más sólidos para afrontar catástrofes. Por esta razón, el Estado puede realizar un apoyo de los fondos mutuales en los primeros años hasta que los mismos puedan hacer frente a los fenómenos sistémicos. Luego, una vez implementados y en funcionamiento, estos fondos mutuales pueden usarse para bajar el riesgo de los productores con respecto al manejo de los cultivos y la gestión de riesgos dentro y fuera del campo. Esto permite observar que la intervención desde el Estado es necesaria, mucho más aún para los pequeños productores que no son sujetos con fácil acceso a herramientas como los fondos mutuales.

### **3.3 Ayudas directas y pagos ad hoc**

Este tipo de ayudas son las más comúnmente utilizadas en Argentina. La ayuda directa y los pagos ad hoc, son fondos generalmente públicos, destinados a aliviar los efectos de las catástrofes. En algunos países la partida de dinero está determinada ex ante. En otros los fondos se destinan a la emergencia, una vez sucedida, definida y declarada la misma.

En Argentina la ley 26509 determina un fondo de 500 millones de pesos para la ayuda a los damnificados en la forma y términos que la Comisión Nacional de Emergencia y Desastres agropecuarios disponga.

Países de la Unión Europea y Estados Unidos poseen fondos contra catástrofes. Los mismos consisten en aportes del Estado y en algunos casos aportes de los productores que serán beneficiados con los fondos (European Commission 2001). También hay países como España, Italia o Francia

que generan un fondo de naturaleza mixta con asignación específica, para fenómenos de naturaleza sistémica.

De esta manera, los productores estarán menos expuestos ante este tipo de eventos climáticos, difícilmente asegurables por su correlación entre asegurados (European Commission 2005). Australia posee un fondo de asignación específica contra la sequía (Rural and Environment Analytical Services 2010). También Nueva Zelanda posee un fondo para catástrofes, pero el mismo no especifica eventos, sino más bien se aplica para eventos climáticos con alto impacto.

El gran inconveniente de los fondos de asignaciones específicas o los pagos directos, es el del riesgo moral que se puede generar en los productores. Estos últimos al percibir que el Estado acudirá al rescate de los mismos, se expondrán más de lo óptimo o sub gestionarán sus riesgos.

Otro problema existente con las ayudas directas y los pagos Ad Hoc es que la distribución de los fondos no se realice bajo estrictos parámetros de necesidades ante las catástrofes.

Para reducir el problema del riesgo moral, los estados pueden exigir aportes de los productores ex ante, para que de esta manera, los fondos sólo sean efectivos para aquellos productores que hayan realizado aportes al fondo. También el Estado puede solicitar que los productores que accedan al fondo de asistencia hayan contratado algún tipo de cobertura, como es el caso de Francia.

Estados Unidos realiza fondos de compensación contra catástrofes, tomando como referencia para el pago de la compensación, la media histórica de producción de la región en los últimos cinco años. Este cálculo minimiza los costos de intervención del Estado, siempre y cuando existan estadísticas ajustadas a cada una de las regiones.

La Dirección Nacional de Emergencia Agropecuaria es la responsable, en Argentina, del sistema nacional para la prevención y mitigación de emergencias creada por la ley 26509 en agosto del 2009. Este sistema es principalmente de contención ex post, organizando y articulando las tareas de reconstrucción en las zonas de emergencia con ayudas directas.

En el siguiente punto se analizarán las declaraciones de emergencias y catástrofes en el marco de la Ley 26509.

#### **4. Emergencias agropecuarias en la Argentina 2009-2012**

Como se mencionó anteriormente, en Argentina la ley que legisla sobre las emergencias y desastres agropecuarios es la llamada ley 26509 denominada “Sistema Nacional de Mitigación y prevención de emergencias y desastres agropecuarios” cuyo objetivo es el de *“prevenir y/o mitigar los daños causados por factores climáticos, meteorológicos, telúricos, biológicos o físicos, que afecten significativamente la producción y/o la capacidad de producción agropecuaria, poniendo en riesgo de continuidad a las explotaciones familiares o empresariales, afectando directa o indirectamente a las comunidades rurales.”* sancionada el 20 de agosto del año 2009.

La ley propone la constitución de un consejo consultivo el cual tendrá a su cargo llevar adelante propuestas de monitoreo del sistema para la prevención de las emergencias y desastres agropecuarios. Además constituye una Comisión Nacional de Emergencia Agropecuaria compuesta por las partes intervinientes en las emergencias y desastres agropecuarios a saber: un representante del Ministerio de Economía, del Interior, de Agricultura, Ganadería y Pesca, Servicio Meteorológico Nacional, Instituto Nacional de Tecnología Agropecuaria, Banco Nación, Banco Central, Administración Federal de Ingresos Públicos, representante del sector agropecuario nacional y representantes de las provincias afectadas.

Según la Ley 26509 la provincia, por medio de su comisión Provincial de Emergencia agropecuaria, deberá presentar ante la comisión Nacional un pedido de emergencia o desastre agropecuaria, mediante una resolución provincial que contenga *“el factor adverso, la delimitación de las áreas afectadas, las fechas de inicio y finalización de la respectiva declaración o prórroga de emergencia y/o desastre y expresar los beneficios que se le dará a nivel provincial”*. La comisión Nacional de Emergencia Agropecuaria propondrá al Poder Ejecutivo Nacional por medio del Ministerio de Agricultura la declaración de la zona de emergencia agropecuaria definiendo el lapso por el cual rige la emergencia.

La presente ley propone diferenciar a la emergencia del desastre agropecuario. La emergencia se declara cuando la afectación de la producción

o de la capacidad de generarla es mayor al 50% y el desastre está definido por una destrucción de más del 80%. Es decir si la destrucción es mayor a 50% es emergencia y si el impacto es mayor al 80% de la producción se declara la catástrofe.

Una vez que la Comisión Nacional de Emergencia declare el estado de emergencia/catástrofe en una zona definida por un lapso también definido, las provincias afectadas recolectarán las declaraciones juradas de los productores que quieran o puedan acogerse a los beneficios de la ley. Luego los técnicos provinciales verificarán en cada campo el impacto y si amerita extenderán a cada uno de los productores una constancia que le permite certificar el estado de emergencia o desastre.

La ley prevé un Fondo Nacional de Mitigación de Emergencias y desastres agropecuarios de quinientos millones de pesos anuales los cuales pueden ser destinados a la reconstrucción del aparato productivo, asistencia financiera, técnica y todo lo necesario para el desarrollo de las zonas de emergencia. El fondo permite otros aportes como donaciones o préstamos del Estado Nacional a ser entregados a los productores mediante los bancos provinciales. Pero la ley no dice nada acerca de la distribución de esos fondos, plazos y programa de asistencia a los productores.

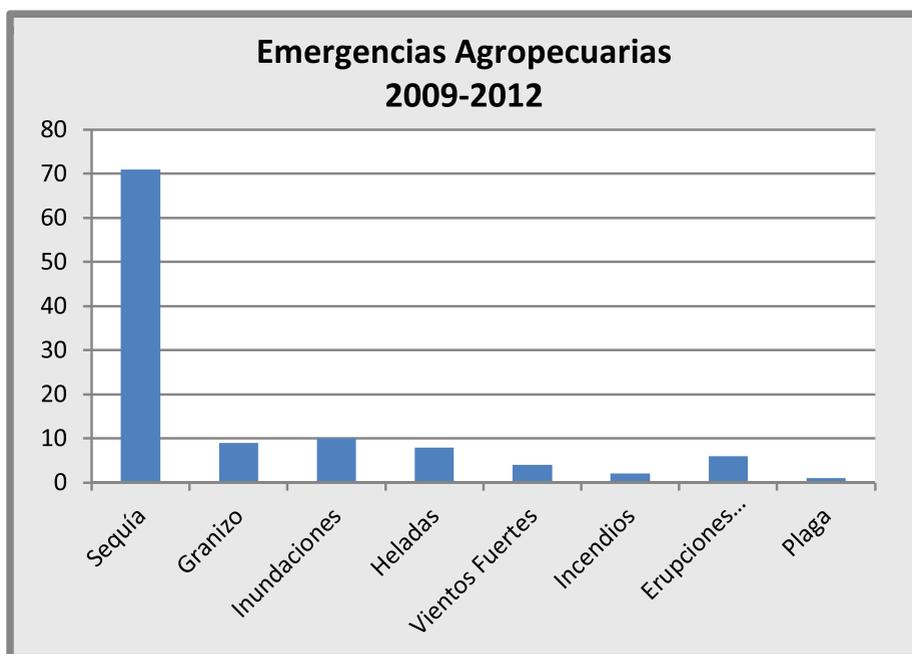
Con respecto a los beneficios, estos serán especificados en el decreto provincial. Los beneficios pueden ser:

- Espera y renovación de las obligaciones pendientes.
- Unificación de las deudas con los bancos, suspensión de 90 días de los juicios y procedimientos administrativos para la cobranza de vencimiento con anterioridad a la emergencia.
- Otorgamiento de créditos con tasas de interés bonificada en un 25% para el caso de emergencia y 50% para las zonas de desastre.
- Prórroga del pago, durante el lapso de emergencia, de los impuestos que graven al capital o a las ganancias.
- Suspensión del arancel para el Mercado Nacional de Hacienda y la Administración Federal de Ingresos Públicos suspende los juicios hasta la finalización del periodo de emergencia.

## Las emergencias y desastres agropecuarios declarados en

Argentina desde la sanción de la ley de emergencia agropecuaria en agosto de 2009 hasta el mes de mayo de 2012 fueron 111 (publicadas por resoluciones del Ministerio de Agricultura, Ganadería y Pesca en el boletín oficial). Se puede apreciar en el gráfico expuesto a continuación la distribución de las declaraciones de emergencia y desastres según el evento causante de la emergencia.

**Gráfico 1.** Cantidad de emergencias agropecuarias 2009-2012



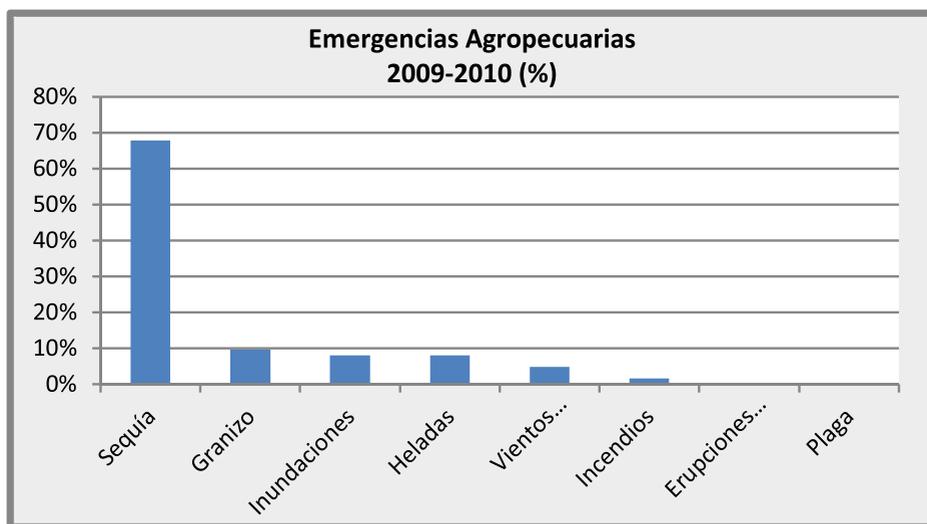
Fuente: Elaboración propia en base a publicaciones del Boletín Oficial.

En la siniestralidad existente podemos observar un marcado impacto de los eventos climáticos, en especial aquellos que son covariados o sistémicos, como son las precipitaciones en exceso o en defecto, ambas sumadas representan más de las 2/3 partes del total de emergencia agropecuaria.

El primer factor climático por mayor frecuencia de apariciones es la sequía seguido por las inundaciones y luego granizo.

Como se mencionó recién, de las emergencias agropecuarias el principal riesgo que se observa es el derivado de impactos generados por las sequías. Esto se debe a la ocurrencia de dos eventos Niña que se sucedieron consecutivamente, uno en la campaña 2008-2009 y el segundo en la campaña 2011-2012. Lo dicho se puede observar gráficamente mediante la distribución porcentual de los siniestros declarados en la emergencia o desastre agropecuario por el Ministerio de Agricultura de la Nación en el periodo 2009-2010.

**Gráfico 2.** Porcentaje de emergencias agropecuarias 2009-2010



Fuente: Elaboración propia en base a publicaciones del Boletín Oficial.

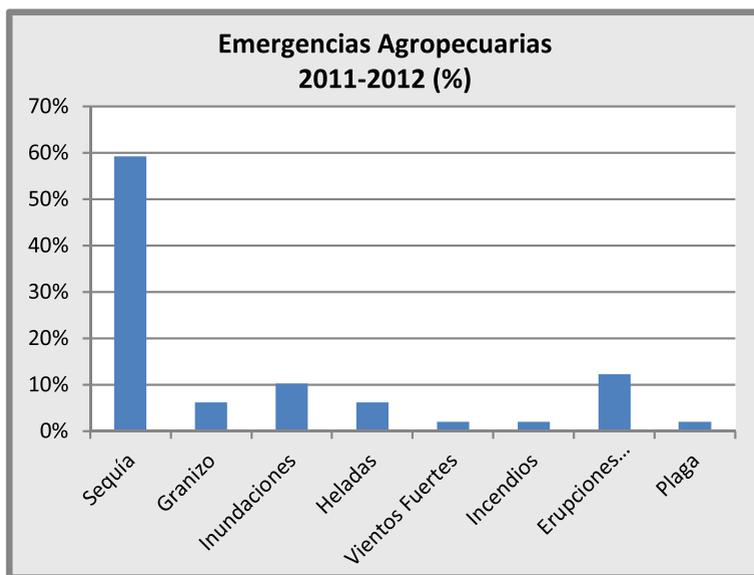
Luego de la primera de ellas el balance hídrico de los suelos no logró recuperarse, razón por el cual los inicios de la campaña 2011 fueron realmente desalentadores para los cultivos tempranos ([United Stated Department of Agriculture, 2012](#)). Las últimas estimaciones mencionan una pérdida del maíz de un 11 % de la producción arribando a una cosecha de 19 millones de toneladas, siendo ésta 11% menor que la campaña anterior de 21.4 millones de toneladas. Sin embargo para la soja el panorama es más desalentador en cuanto a las cantidades, dado que la producción esperada para la campaña

2011-2012 es de 40,9 millones de toneladas, comparada con un 50,3 de la campaña 2010-2011 (Bolsa de Cereales de Rosario 2012) . Dado que la sequía también afectó a Estados Unidos, las cantidades mundiales de soja decrecieron, debido a esto en el mercado internacional se alcanzaron precios records logrando un efecto sustitución en el balance agrgado.

Si bien en ambos casos la Niña marcó un escenario de sequía general, las precipitaciones presentaron una volatilidad muy marcada en términos de intensidad y área geográfica (INTA 2009). Por esto pudimos apreciar en localidades como Carlos Casares en la Provincia de Buenos Aires, que hasta diciembre de 2011 han tenido fuertes sequías y en mayo de 2012 se ha declarado la emergencia agropecuaria por excesos de lluvias.

A los efectos de analizar las emergencias agropecuarias podemos observar que en los años 2011-2012, además de la sequía el segundo problema en importancia fue la erupción del volcán Puyehue. El gráfico a continuación muestra las declaraciones de emergencia realizadas en el lapso considerado, entre el período 2011- hasta mayo del 2012, medidas en porcentajes.

**Gráfico 3.** Porcentaje de emergencias agropecuarias 2011-2012



Fuente: Elaboración propia en base a publicaciones del Boletín Oficial.

Como ya se ha mencionado, el total de emergencias agropecuarias declaradas entre agosto del 2009 y mayo del 2012 fueron 111, observándose que para el Estado fue difícil asistir a los productores en tal cantidad de emergencias tomando sólo medidas ex post.

Sumado a esto las herramientas que propone la LEA no logran llegar al productor para que pueda enfrentar la siguiente campaña, ya que se tiene un estado con baja capacidad de gestión de catástrofes.

En lo que respecta a los pequeños productores agropecuarios el impacto de los eventos climáticos extremos es más delicado, ya que poseen mayor vulnerabilidad.

A continuación se analizarán los problemas que enfrenta el pequeño productor agropecuario ante este tipo de eventos.

#### **4.1 Los pequeños productores y las catástrofes agropecuarias**

El productor agropecuario se encuentra altamente expuesto a los riesgos, más aún si consideramos a los pequeños productores, quienes poseen escasa capacidad de absorción y baja respuesta cuando la catástrofe impacta.

Cuando se analizan las herramientas para gestión de riesgos climáticos, los seguros agrícolas más utilizados son aquellos contra granizo, pero los riesgos emergentes del cambio climático, sequías e inundaciones no son cubiertos por los seguros contra granizo sino que son cubiertos mediante los seguros multirriesgo. Las coberturas de seguros multirriesgo poseen primas muy costosas a las cuales los productores de pequeña escala no pueden acceder.

El alto costo de la prima de los seguros multirriesgo se debe a que las empresas aseguradoras necesitarán para el ofrecimiento de la cobertura un gran número de estudios que realizarán los técnicos en el campo, con el objeto de que el mismo cumpla con los requisitos especificados en la póliza para cada cobertura ([World Bank, 2006](#)) razón por la cual para pequeñas explotaciones los costos de peritación son elevados.

Además en las carteras de las aseguradoras existe un alto riesgo, puesto que en este tipo de siniestros existen altas correlaciones entre eventos, esto se puede observar claramente en caso de sequías o inundaciones. Dado que los eventos son sistémicos provocarán pérdidas catastróficas en los balances de las empresas aseguradoras, debido a que no pueden minimizar los riesgos individuales por agregación de riesgos no correlacionados, llevando a inconvenientes con la oferta de coberturas contra estos siniestros en el caso de eventos sistémicos (Casparri et al., 2009 a).

Las aseguradoras no sólo deben lidiar con la correlación de los siniestros agrícolas en sus carteras, también deben considerar que puede existir un comportamiento llamado moral hazard o riesgo moral, en el cual los esfuerzos de los productores podrán ser inferiores comparados con los que hubieran manifestado en el caso de ser responsables absolutos de sus acciones (Hardaker, 1997 / European Commission, 2001 / FAO, 2001 / Moschini, 2001 / Garrido, 2002).

También debemos considerar el problema de la información asimétrica y la selección adversa o anti-selección muy presentes en las coberturas agrícolas (OCDE, 2000 / World Bank, 2006 / Clarke & Asociados, 2009).

En la sequía de Argentina del 2011-2012<sup>6</sup>, muchos de los pequeños productores debieron abandonar la actividad que realizaron toda su vida. El seguro multirriesgo hubiera sido de mucha utilidad, pero la mayoría de los pequeños productores no lo pueden contratar.

Podemos observar que los efectos del cambio climático se ven cubiertos por el seguro multirriesgo, es por esto que este tipo de seguro es tan importante en la gestión del riesgo agropecuario. Es decir, en la actualidad el seguro multirriesgo sería el más indicado en el contexto del cambio climático, sin embargo este no se encuentra al alcance de los pequeños productores de nuestro país.

En el punto anterior se analizó la LEA que es una de las herramientas con las que cuenta el productor para enfrentar las catástrofes agropecuarias y se ha observado que los productores en situación de emergencia poseen tiempos distintos de los que poseen los gobiernos. Además dada la cantidad

<sup>6</sup> La mencionada sequía se produjo luego de otra gran sequía 2008-2009. Dos sequías en tres campañas llevaron a fuertes inconvenientes en la subsistencia intertemporal de los pequeños productores.

de emergencias y desastres es imposible para un gobierno con fondos de 500 millones de pesos asistir a los productores, independientemente de que se puedan asignar fondos con fines específicos.

En lo referido a las ayudas a los pequeños y medianos productores, ellos luego de una emergencia necesitan una fuerte asistencia técnico-financiera y no una prórroga de los impuestos, que probablemente no puedan cumplir de todas maneras, independientemente de que se hayan acogido a los beneficios de la emergencia. Además de acuerdo a las características de la emergencia o catástrofe el beneficio podría ser exención de impuestos o prórroga de los vencimientos, lo cual implica que estos se acumularán para el pago una vez que se haya finalizado la emergencia.

Otro beneficio expresado en la ley es el otorgamiento de créditos a los productores, pero en el caso de los pequeños y medianos productores, ellos poseen per se un problema de restricción a los mercados de crédito. Mucho más aún en condiciones de emergencia en donde el riesgo de crédito de los productores es mucho más elevado.

En el caso de acceso a los mercados, el subsidio de la tasa es 25% en el caso de emergencia y 50% en el caso de desastre, porcentaje escaso para la ayuda a los productores en situación de emergencia.

Por lo mencionado anteriormente se concluye que las estrategias y políticas de gestión de catástrofes deben existir para situaciones de incertidumbre difícilmente analizables ex ante, dado que ellas son acciones para mitigar los impactos de dichos eventos.

La LEA no puede ser la única herramienta con la que cuente el Estado para gestionar la catástrofe, asimismo se ha observado que los seguros multirriesgo son una herramienta efectiva para mitigar los efectos de sequía o inundaciones pero para su implementación es necesario que intervenga el Estado para que el seguro sea accesible para los productores pequeños y medianos.

## Conclusiones

Las principales catástrofes agrícolas que afectaron a la Argentina desde la sanción de la LEA hasta mayo del 2012 fueron: sequías, inundaciones, heladas, granizos, vientos fuertes o huracanados y erupción volcánica, siendo las de mayor impacto las sequías, inundaciones y granizo.

Las políticas de gestión de catástrofes, es decir políticas paliativas para los productores en situación de emergencia o catástrofe son: la prórroga o exención de los vencimientos impositivos, que no solucionan el problema del pequeño productor que después de una emergencia necesita una fuerte asistencia técnica – financiera, más que una prórroga de los impuestos, que probablemente incumplan de todas maneras, independientemente de que se hayan acogido a los beneficios de la emergencia.

Otro beneficio expresado en la ley es el otorgamiento de créditos a los productores con tasas subsidiadas, pero en el caso de los pequeños productores, ellos poseen restricciones a los mercados de créditos debido al alto riesgo de incobrabilidad que poseen por sus características económicas y financieras.

Por lo tanto las políticas públicas de exenciones y prórrogas de los vencimientos crediticios no tienen un impacto paliativo en los productores. Esto da indicios de que las políticas públicas de gestión de catástrofes no consideran a los productores y sus contextos y por lo tanto en el caso de los pequeños productores las políticas poseen bajo impacto. Se debe aclarar que las estrategias y políticas de gestión de catástrofes deben existir, pero ellas deberán estar limitadas a los eventos inciertos que difícilmente puedan ser gestionados ex ante.

Asimismo el seguro multirriesgo es una herramienta para gestionar eficazmente los riesgos climáticos como sequías, inundaciones y granizo, pero son de difícil acceso a los pequeños y medianos productores, siendo necesaria una intervención del Estado para que sean accesibles.

## Referencias

- Albala Bertrand, J. M. (1994). “The Political Economy of Large Natural Disasters: With Special Reference to Developing Countries”. Oxford: Clarendon Press.
- Alderman, H. and C. H. Paxson (1992). “Do the poor insure?: a synthesis of the literature on risk and consumption in developing countries”. World Bank Publications.
- Binswanger, H. P. (1980). “Attitudes towards risk: experimental measurement in rural India.” American Journal of Agricultural Economics.
- Bolsa de Cereales de Rosario (2012). “Informe especial sobre cultivos. Rosario Argentina”. Disponible: <http://www.bcr.com.ar/Pages/geal/estimaProd.aspx>.
- Burgos, J. J. (2011). “Las Heladas en Argentina”. Buenos Aires.
- Casparri, M.T.; Fusco, M. y García Fronti, V. (2009). “Impacto del cambio global sobre los seguros agrícolas en la región pampeana”. Presentado en las VI jornadas interdisciplinarias de estudios agrarios y agroindustriales. Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires - Argentina.
- Casparri, M.T y Fusco, M. (2010). “Sistematización de la Exposición al Riesgo en las Explotaciones Agrícolas”. Caso Argentina. I Congreso Nacional de Gestión y Percepción del Riesgo. Buenos Aires. Argentina.
- Clarke & Asociados (2009). “Estudio de Situación Actual de la Administración de Riesgos en la pequeña Agricultura en Chile”.
- European Commission (2001). “Risk management tools for EU agriculture, with a special focus on insurance.” Working Document, Directorate General Agriculture. Disponible en: [http://europa.eu.int/comm/agriculture/publi/insurance/sum\\_en.pdf](http://europa.eu.int/comm/agriculture/publi/insurance/sum_en.pdf)

- Freeman, P. K., L. A. Martin, et al. (2003). “Gestión de riesgo de desastres naturales.” Sistemas Nacionales para la Gestión Integral del Riesgo de Desastres. Estrategias financieras para la Reconstrucción en Caso de Desastres Naturales. Banco Interamericano de Desarrollo.
- Gaitán, Ayesa, et al. (2011). “Informe de distribución de Cenizas.” INTA. Estación experimental Bariloche.
- Giraudó, C. and S. Villagra (2011). “La producción ganadera después de la ceniza.” INTA. Estación experimental Bariloche.
- INTA (2009). “Informe impacto sequía en norte de Santa Fe” Estación Experimental Reconquista.
- Hardaker, J. B., Huirne, R.B.M. and Anderson, J.R, (1997). Coping with Risk in Agriculture, CAB International, Wallingford.
- Instituto Interamericano de Cooperación para la Agricultura (2010). Políticas Publicas de Gestión de Riesgo Agropecuario en los Países del CAS. Disponible en: [www.iica.int](http://www.iica.int).
- Lavell, A. (2000). “Desastres y Desarrollo: Hacia un entendimiento de las formas de construcción social de un desastre: El caso del Huracán Mitch en Centroamérica”. Riesgos y desastres naturales y el Caribe: 11.
- Ley nº 26509 (2009). Sistema Nacional del Mitigación y prevención de emergencias y desastres agropecuarios.
- Lomónaco, C. R. and J. V. Pilar (2001). “Evaluación de la factibilidad de aplicación de un seguro agrícola diferente al cultivo del algodón en secano en la Provincia del Chaco para la minimización de riesgos hídricos.” III Encuentro de las Aguas, Santiago de Chile, 24-26 oct. 2001.
- Moschini, G. H., David A. (2001). “Uncertainty, Risk Aversion, and Risk Management for Agricultural Producers.” Handbook of Agricultural Economics 1: 67.

- Natenzon, C. (1995). "Catástrofes naturales, riesgo e incertidumbre." Serie de Documentos e Informes de Investigación (197).
- Natenzon, C. (2003). Inundaciones catastróficas, vulnerabilidad social y adaptaciones en un caso argentino actual. Cambio climático, elevación del nivel medio del mar y sus implicancias. Climate Change Impact and integrated Assessment Workshop IX. Snowmass Colorado.
- OCDE (2000). Income Risk Management in Agriculture. France, OCDE.
- United States Department of Agriculture (2012). "World Agricultural Production." Circular Series 1.
- Velasco, I. V. (2004). "Mitigación del impacto de la sequía en la agricultura." México: Instituto Mexicano de Tecnología del Agua: 8.
- World Bank (2006). "Managing Climate Risk: Integrating Adaptation into World Bank Group Operations Global Environment Facility Program" World Bank.

## 4.3 | Planeamiento energético y valuación de mitigación de GEI: Modelo LEAP

*María Teresa Casparri • Carla Squillace*

### Resumen

La fuerte dependencia de los hidrocarburos en la matriz energética, un crecimiento del consumo de energía superior al incremento demográfico y del PBI, ineficiencia energética, reducción sostenida de las reservas de petróleo y de gas natural, actividad exploratoria insuficiente y desigualdad regional son los aspectos cruciales del área energética en Argentina.

Por otro lado es en este sector donde la acción del Estado resulta fundamental. Existe la necesidad de construir una visión de largo plazo sustentable y es el Estado el único agente dentro del sistema económico capaz de asumir este rol. Para esto es inminente fortalecer el conocimiento sobre los recursos energéticos presentes y futuros, contar con información certera y confiable en materia energética, aportar elementos para fortalecer los marcos regulatorios en el sector y diseñar e implementar un sistema permanente de planeamiento estratégico de energía (LEAP). El objetivo de este trabajo es analizar los múltiples objetivos del planeamiento energético: clima, desarrollo, seguridad; y a su vez tratar de identificar las políticas de planeamiento robustas que no necesariamente serán las óptimas.

**Palabras clave:** Cambio climático, planeamiento energético, sustentabilidad

## Introducción

### **La importancia del planeamiento energético y cuestionamientos del análisis económico del cambio climático**

El objetivo general del planeamiento energético es equilibrar oferta y demanda a un costo razonable. El sector energético es un área donde una perspectiva de largo plazo y un planeamiento de políticas son vitales, ya que es un disparador de emisiones y cambio climático, la causa principal de otros impactos ambientales, es una necesidad básica, un área vulnerable en cuanto a la provisión de servicios donde priman los monopolios naturales, donde el poder de mercado es importante.

En Argentina los efectos de las reformas de los 90 y el abandono del sistema de gestión pública condujeron a cambios estructurales en el mercado energético argentino: una mayor participación de actores privados, mayor protagonismo de los mecanismos de mercado y descentralización de los procesos de toma de decisión.

Los aspectos críticos del sistema actual son: la fuerte dependencia de los hidrocarburos en la matriz energética, un crecimiento del consumo de energía superior al incremento demográfico y del PBI: ineficiencia energética, reducción sostenida de las reservas de petróleo y de gas natural, la actividad exploratoria es insuficiente y hay desigualdad regional.

El sector energético es uno donde la acción del Estado resulta fundamental. Existe la necesidad de construir una visión de largo plazo sustentable y es el Estado el único agente dentro del sistema económico capaz de asumir este rol. Para esto es inminente fortalecer el conocimiento sobre los recursos energéticos presentes y futuros, contar con información certera y confiable en materia energética, aportar elementos para fortalecer los marcos regulatorios en el sector y diseñar e implementar un sistema permanente de planeamiento estratégico de energía (LEAP).

A nivel mundial son tres los dilemas claves sobre la economía de cambio climático: la importancia que se le da a futuras generaciones y consecuentemente la tasa de descuento a utilizar, resulta imposible escapar a

la incertidumbre y al llevar a cabo el análisis vemos que algunos costos son “mejores” que otros.

La tasa de descuento es muy importante. Una tasa de descuento alta no permite “ver” costos futuros. Por ejemplo, si calculamos cuánto debo pagar para prevenir \$1000 de daños dentro de 100 años vemos que el valor presente de \$1000 en 2107 es al 1.5% \$226, al 3% \$52 y al 6% tan sólo \$3. Por lo tanto, el análisis económico apoya acciones de mitigación climática a una tasa de descuento del 1.5% pero no al 3% al 6%.

Asimismo, la incertidumbre resulta ser un factor inevitable, por lo que se cuestiona qué es mejor: un análisis de promedio o de peor escenario posible. El análisis económico tradicional se basa en predicciones promedio. Por ejemplo, el aumento del nivel del mar sin deshielos catastróficos se aproxima en menos de 1 metro para este siglo (IPCC 2007). Sin embargo, los riesgos más importantes del cambio climático se basan en el peor escenario posible: la pérdida completa de las capas de hielo de Greenlad (or West Antarctic) causarían un aumento de 7 metros del nivel del mar. Entonces reflexionamos... ¿Es posible que se derrita Greenland? Completamente, no en este siglo. Pero parece que cada vez aumenta aún más esta probabilidad al aumentar la temperatura. En el esquema de peor escenario se incrementa la probabilidad de eventos catastróficos mientras que en el de escenario promedio sólo algunos problemas ocurrirán en este siglo.

A su vez, hay algunos costos que son “mejores” que otros. Existen problemas con el análisis convencional de costo-beneficio. Los modelos económicos de cambio climático (CC) se basan en este análisis tradicional: los beneficios deben exceder a los costos para apoyar una política. Sin embargo, hay muchos beneficios que no pueden ser medidos significativamente en una unidad monetaria: ¿cuánto vale la vida de una persona, la extinción de una especie, la pérdida de un ecosistema...?

En consecuencia, es de vital importancia enfocarse en los múltiples objetivos del planeamiento energético: clima, desarrollo, seguridad; y es necesario identificar políticas de planeamiento robustas que no necesariamente serán las óptimas.

## 1- Long-Range Energy Alternatives Planning System (LEAP): descripción básica del modelo

LEAP es una herramienta de modelización de energía y medioambiente basada en distintos escenarios. Estos se centran en cómo la energía es consumida, transformada y producida en una determinada región o economía, bajo supuestos alternativos sobre población, desarrollo económico, tecnología, precios y demás. El sistema de planificación de gran alcance de alternativas energéticas permite representar la matriz energética.

Gracias a este sistema se puede hacer desde un simple balance energético hasta crear una simulación sofisticada de estructura de datos. Permite realizar una variedad de análisis de sistemas energéticos: análisis de demanda, de transformación, de recursos, y ambiental. Todos estos pueden ser combinados para llevar adelante un PEI y análisis de mitigación de gases del efecto invernadero (GEI). Frente a un determinado escenario de demanda final de energía, LEAP asignará los flujos energéticos entre las distintas tecnologías de abastecimiento energético, calcula el uso de los recursos, impactos ambientales y detecta necesidades de ampliación de los procesos de producción de energía, así como los costos asociados

A diferencia de los modelos macroeconómicos, LEAP no intenta estimar el impacto de políticas energéticas en el empleo o el PBI, no obstante estos sí pueden utilizarse conjuntamente con LEAP. De forma similar, LEAP no genera escenarios óptimos o de equilibrio de mercado, aunque si puede identificar aquellos escenarios menos costosos.

Su objetivo es brindar una herramienta a los policy makers. Las ventajas más importantes de esta herramienta son su flexibilidad y facilidad de uso, esto permite a los responsables de política plasmar sus ideas en análisis más rápidamente sin la necesidad de recurrir a modelos más complejos.

Asimismo, LEAP cumple distintos propósitos y funciones: como base de datos, provee un sistema exhaustivo de mantenimiento de información energética; como herramienta de pronóstico permite al usuario hacer proyecciones de oferta y demanda energética bajo un horizonte de planeamiento a largo plazo; como herramienta de análisis de políticas, éste simula y evalúa los efectos físicos, económicos y ambientales de programas

energéticos, inversiones y acciones alternativas. Se puede usar LEAP para proyectar la situación de oferta y demanda energética con el objeto de alcanzar determinados patrones futuros, identificar problemas potenciales y evaluar el impacto probable de políticas energéticas. LEAP permite examinar una amplia variedad de proyectos, programas, tecnologías y otras iniciativas de energía, para arribar a las estrategias que mejor traten problemas energéticos y ambientales.

## 2- Long-Range Energy Alternatives Planning System (LEAP): un poco de historia

Este sistema fue desarrollado por el Stockholm Environment Institute – Boston (SEI-B). Su primera versión data de 1975. A fines de los '90 el modelo fue actualizado (DOS a Windows) incorporando una serie de herramientas de planificación energética. Asimismo éste es renovado constantemente por el SEI-B y una serie de instituciones académicas internacionales, entre ellas Fundación Bariloche.

El modelo posee más de 2000 usuarios en todo el mundo, distribuidos en más de 120 países. En 2003 se crea la iniciativa COMMEND, (comunidad mundial de expertos energéticos), coordinada por el SEI-B. Ésta ofrece



acceder a las novedades del modelo, oportunidad de capacitación y compartir experiencias de aplicaciones así como sugerencias de mejoras vía WEB. Fundación Bariloche, es el punto focal de esta iniciativa para América Latina y el Caribe, quien ya ha desarrollado más de cinco talleres regionales.

## Algunos estudios que utilizaron el LEAP

- **APEC Energy Demand and Supply Outlook (2006)**
- **China's Sustainable Energy Future (2003)**
- **America's Energy Choices (1991)**
- **Toward a Fossil Free Energy Future: The Next Energy Transition (1992)**



### 3- Long-Range Energy Alternatives Planning System (LEAP): descripción técnica

LEAP se enmarca dentro del conjunto de modelos denominados de Simulación con Coeficientes Técnicos. En lugar de simular decisiones que supondría representar la racionalidad de los consumidores y productores o buscar una solución óptima, usa explícitamente cálculos de salidas de dichas decisiones y examina las implicancias de un escenario.

La lógica global del LEAP es clara, lo que hace que el modelo sea transparente. Esto le posibilita al decidor representar fácilmente el sistema

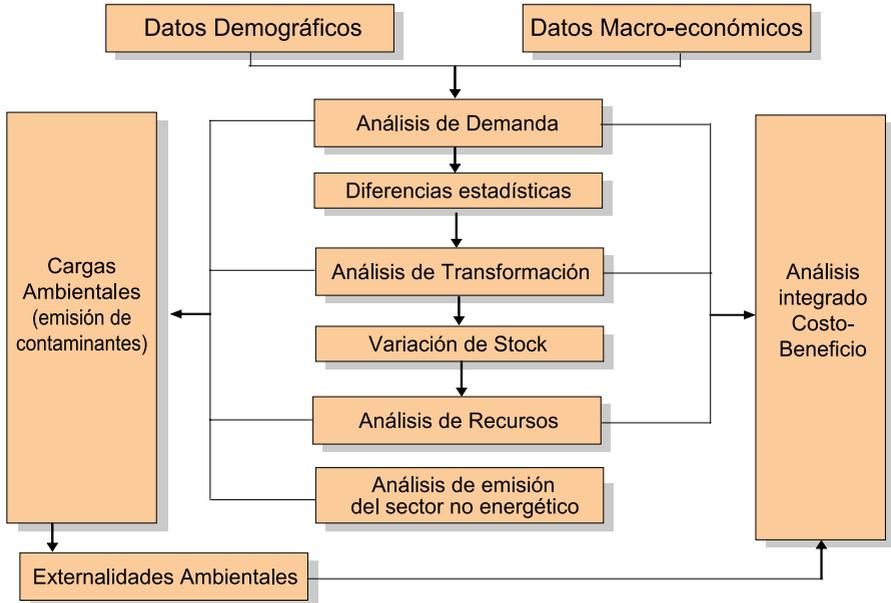
energético a analizar, y de ese modo visualizar claramente su funcionamiento e identificar las implicancias de los escenarios planteados, del tipo qué pasaría si (“What if”), así como los impactos de cambios estructurales. Los escenarios están basados en la presentación detallada de la forma en que la energía es consumida, convertida y producida en una región, bajo el control de un rango de supuestos alternativos sobre población, desarrollo económico, tecnologías disponibles y precios (variables explicativas).



El sistema posee una flexible estructura de manejo de datos y definición de procesos, esto permite un análisis amplio en cuanto a especificaciones tecnológicas y detalles de demandas de uso final. Permite representar desde el simple recuento sobre una estructura de balance energético hasta el desarrollo de sofisticados sistemas de simulación del sector. Veremos ejemplos.

LEAP, aunque puede ser usado para identificar escenarios de mínimo costo, en conjunto con otros modelos, no genera automáticamente escenarios de equilibrio de mercado. Las ventajas más importantes de LEAP son su flexibilidad y facilidad de uso, le permite al usuario pasar rápidamente del planteo de políticas al análisis de sus efectos, sin tener que utilizar modelaciones complejas y analizar los impactos de cambios estructurales.

## LEAP: flujo de cálculos



Este sistema permite realizar una representación del Sistema Energético Total:

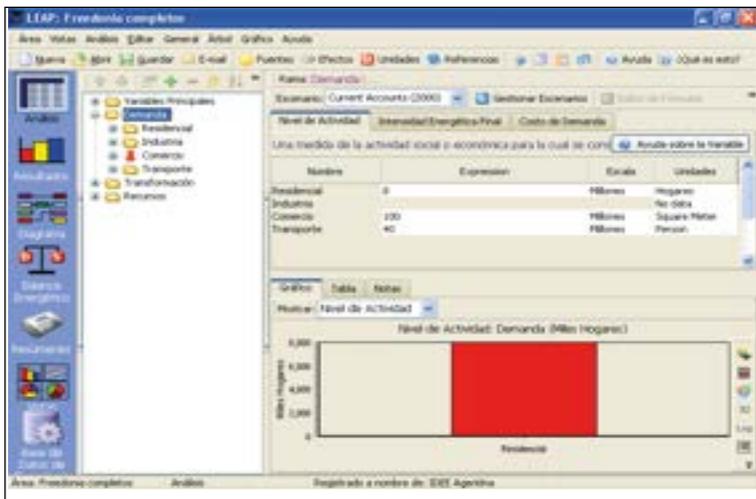
- **Demanda:** evaluación detallada de la composición de la demanda por sector, subsector, usos finales y equipamientos. Crecimiento de la demanda determinado por las relaciones de competencia entre combustibles, intensidades energéticas, equipamientos de transformación y cambios estructurales definidas por el usuario.
- **Transformación:** evaluación detallada de la configuración del sistema de oferta actual y futura. Definición de detalle de las estructuras de transformación definidas por el usuario. Disponibilidad de algoritmos flexibles que permitan definir múltiples entradas y salidas tales como en los casos de cogeneración de calor y electricidad.
- **Recursos:** representación simple de recursos renovables y no renovables.
- **Balance oferta/demanda:** presentación completa del balance energético proyectado.

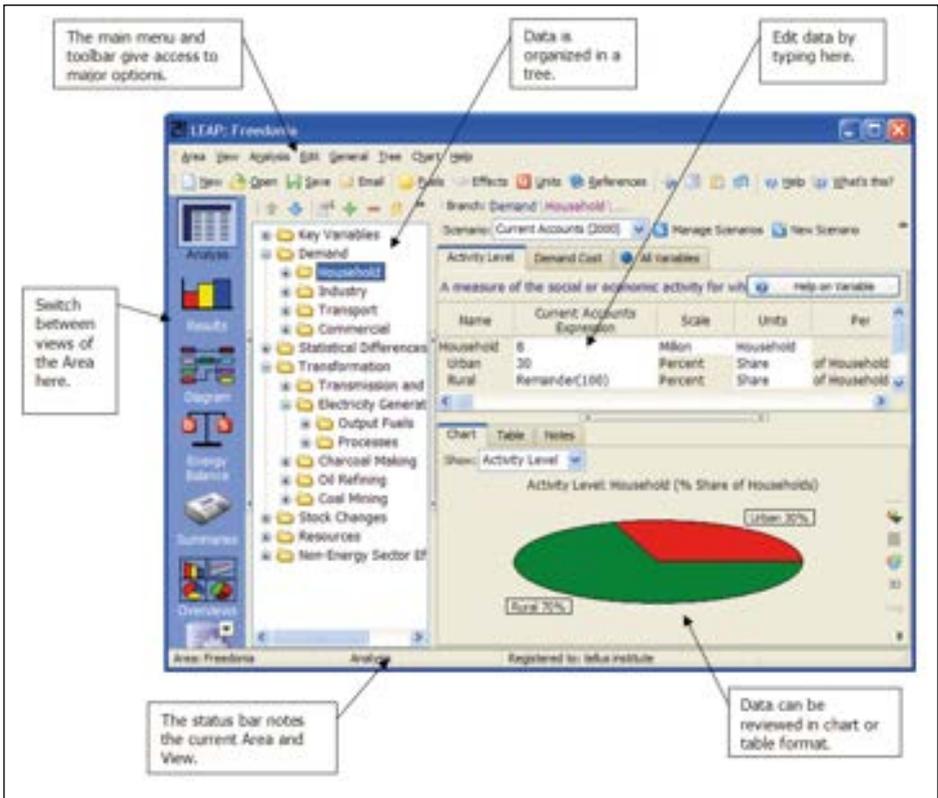
## El árbol de información



- Es la principal estructura de datos para organizar la información y el modelo, y visualizar resultados.
- Los Iconos indican el tipo de datos (ej.: categorías, usos, tecnologías, combustibles y efectos).
- El usuario puede editar la estructura de datos y armarla en función de la información disponible.

## Vista principal del modelo





#### 4- Long-Range Energy Alternatives Planning System: datos requeridos para su aplicación

Información Requerida:

##### ◆ Histórica:

- Balance energético del año base (Neta/Util)
- Parámetros tecnológicos
- Intensidades energéticas para procesos de uso final y transformación energética
- Información sobre usos de la biomasa

- Costos por tecnología (Opcional)
- Costos de los distintos productos energéticos (Opcional)
- Coeficientes ambientales locales (Opcional)

◆ **Prospectiva:**

- Información de escenarios socio-económicos y energéticos cubriendo los aspectos planteados en la información histórica (año base)
- Información sobre los cambios estructurales que se pretende simular hacia el futuro, tales como procesos de sustitución entre energéticos, inclusión de nuevas tecnologías de oferta; elementos también incluidos en los escenarios

## **5- Long-Range Energy Alternatives Planning System (LEAP): resultados a obtener del modelo**

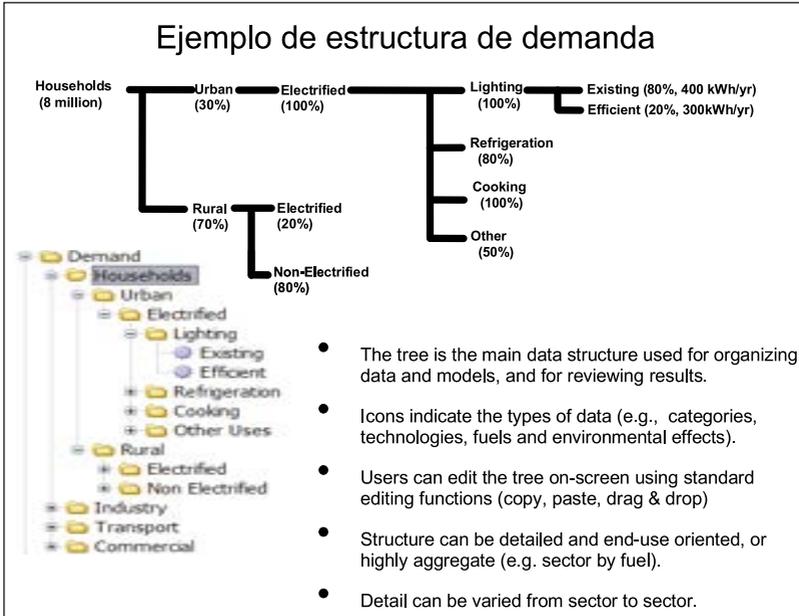
- ◆ Prospectiva de la Demanda Energética
- ◆ Prospectiva de la Oferta Energética
- ◆ Impacto sobre los Recursos
- ◆ Costos del Plan
- ◆ Impacto Ambiental
- ◆ Proyección de los Balances Energéticos
- ◆ Horizonte de modelización: mediano a largo plazo con paso anual

## **6- Long-Range Energy Alternatives Planning System (LEAP): análisis de demanda energética**

Para hacer el estudio de demanda se analiza el consumo, costos y emisiones de cada área. La demanda se organiza en una estructura flexible. Típicamente se organiza por sector, subsector y uso final.

Soporta varias metodologías:

- ◆ Análisis de uso final:  
energía = nivel de actividad \* intensidad de energía
- ◆ Predicciones econométricas
- ◆ Otras



## 7- Long-Range Energy Alternatives Planning System: recientes aplicaciones realizadas por la Fundación Bariloche

- I. Estudio Integral energético de Perú. OTERG-Ministerio de Energía. 2001
- II. Prospectiva de la Demanda energética en República Dominicana. Consejo Nacional de Energía. 2003
- III. Prospectiva energética del CONO SUR. OLADE. 2005
- IV. Argentina 2008 - 2025

# I. Estudio Integral energético de Perú

## *Información de Base*

- Balance en energía útil
- Información detallada de la tecnología de la Oferta energética
- Información de Reservas y Potencial de recursos renovables
- Inventario de Gases de Efecto Invernadero
- Escenarios socio-económicos y energéticos a 15 años

## *Resultados del Estudio*

- Evolución de la Demanda y la Oferta bajo dos escenarios (Tendencial y Alternativo)
- Impacto sobre los Recursos
- Costos del Plan (calculado exógenamente)
- Impacto Ambiental
- Proyección de los Balances Energéticos



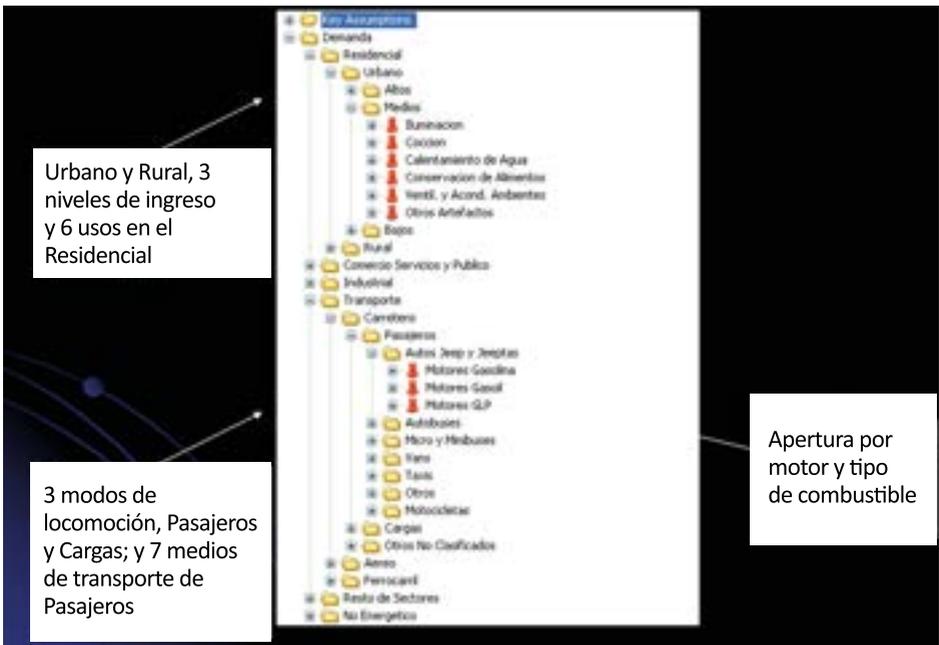
## II. Prospectiva de la Demanda en República Dominicana

### *Información de Base*

- Balance en energía útil
- Escenarios socio-económicos y energéticos a 15 años

### *Resultados del Estudio*

- Evolución de la Demanda y bajo dos escenarios (Tendencial y Alternativo, identificando el efecto de medidas de sustitución y URE)



## III. Prospectiva energética del CONO SUR

### *Información de Base*

- Balance en energía Neta
- Información de la tecnología de Oferta energética

- Información de Reservas y Potencial de recursos renovables
- Importación y Exportación de energía
- Escenarios socio-económicos y energéticos a 15 años

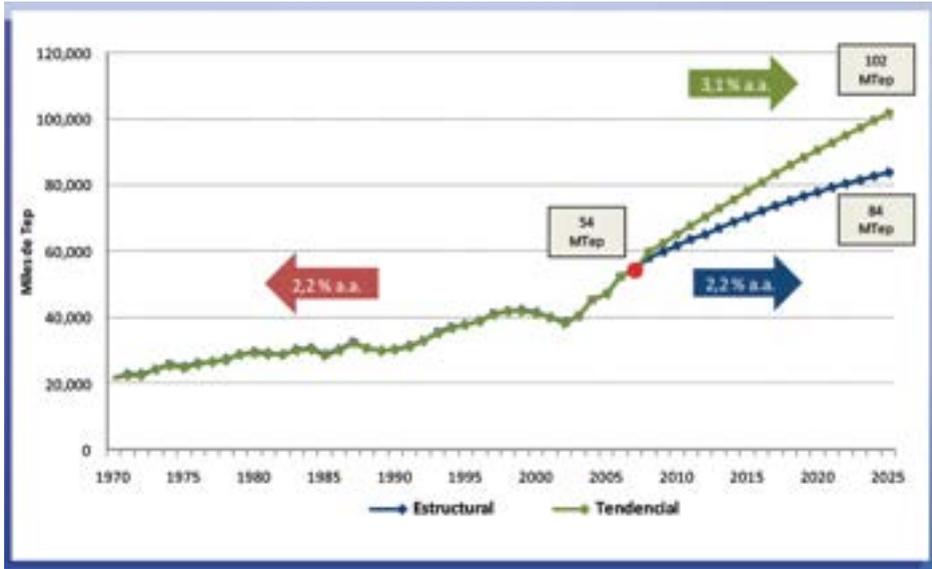


### ***Resultados del Estudio***

- Evolución de la Demanda y la Oferta bajo dos escenarios (Tendencial y Alternativo, analizando el impacto de medidas de URE)
- Impacto sobre los Recursos
- Evolución de la matriz de exportaciones e importaciones
- Proyección de los Balances Energéticos

## IV. Argentina 2008 – 2025

### LEAP: prospectiva de demanda energética. Consumo Energía Total 2008 -25.



Objetivos de largo plazo para nuestro país:

- Universalización de los servicios energéticos modernos en condiciones de equidad e inclusión social.
- Favorecer un desarrollo sustentable.
- Impulsar la investigación y el desarrollo tecnológico.
- Atender a la preservación del ambiente.
- Avanzar en la integración con otros mercados energéticos nacionales y regionales.
- Procurar un consumo eficiente de los recursos energéticos presentes y futuros.
- Asegurar un suministro creciente, seguro y competitivo.

## Conclusiones

**Long-Range Energy Alternatives Planning System** (LEAP) responde a un enfoque de modelización flexible, las relaciones básicas están todas basadas en términos físicos cuantitativos no sofisticados. En función de la información de base disponible, el modelo permite simular y analizar los impactos de política con mayor o menor grado de detalle.

Este sistema permite interactuar con otros modelos, introduciendo en LEAP sus resultados. Por ejemplo, incorporar en LEAP los resultados de un análisis de expansión del sector eléctrico basado en modelos de optimización. Asimismo, analiza los flujos de energía dentro de una región o entre la región y el resto del mundo.

Por lo tanto es un software altamente recomendable para el análisis en detalle de la demanda del uso final de energía por tipo de usuario y para analizar el impacto de cambios estructurales.

## Referencias

Instituto de Economía Energética asociado a la Fundación Bariloche <http://www.fundacionbariloche.org.ar>

Secretaría de Energía de la Nación [www.energia.gov.ar](http://www.energia.gov.ar)

Stockholm Environment Institute [www.sei.se](http://www.sei.se)



## 4.4 Medición económica de eventos climáticos extremos en el sector agrícola: El caso de la soja en Argentina<sup>1</sup>

*Esteban Otto Thomasz • María Teresa Casparri • Ana Silvia Vilker  
• Gonzalo Rondinone • Miguel Fusco*

### Resumen

La variabilidad climática impacta en todas las actividades económicas, pero especialmente en el sector agropecuario. En el caso de Argentina, dicho sector primario, conjuntamente con el complejo agro-industrial, tienen una alta relevancia económica en términos de generación de divisas, producto bruto geográfico y generación de empleo.

Actualmente se han desarrollado estudios que estiman los efectos del cambio y variabilidad climática sobre los rindes de los principales cultivos de la Región Pampeana y de otras regiones del país. No obstante, esos estudios carecen de valuaciones de índole económica. Por ello, en este trabajo se realizará una síntesis de los distintos enfoques utilizados para medir el impacto del cambio climático, y de aquellos que abordan el fenómeno de variabilidad climática. A su vez se brindará una primera estimación económica de la pérdida de producción de soja generada por la ocurrencia de eventos climáticos extremos, particularmente eventos de sequía. Las estimaciones son de carácter agregado y son realizadas a los fines de establecer órdenes de magnitud para dimensionar la problemática. Como línea derivada, se plantea la calibración de modelos puntuales para la estimación de pérdidas económicas específicas y focalizadas que sirvan de base para la construcción de instrumentos financieros de cobertura o bien fondos fiscales de adaptación y mitigación de eventos climáticos extremos.

**Palabras clave:** Variabilidad climática, eventos climáticos extremos, valuación económica

<sup>1</sup> Este artículo fue publicado en el volumen 2 del año 2015 de la Revista de Investigación en Modelos Financieros.

## Introducción

El cambio climático impacta en todas las actividades económicas, pero especialmente en el sector agropecuario. En el caso de Argentina el sector primario y el complejo agro-industrial tienen una importante relevancia económica con altos riesgos de producción, entre ellos, el climático. No obstante, no se cuenta con mediciones agregadas del impacto económico y fiscal de los eventos de variabilidad climática.

Si bien se han desarrollado estudios que estiman los efectos del cambio y de los eventos de variabilidad climática sobre los rindes de los principales cultivos de la Región Pampeana y de otras regiones del país, los mismos carecen de valuaciones de índole económica.

El objetivo general de este estudio es iniciar la discusión acerca de los modelos existentes para la valuación económica del riesgo climático, e intentar asimismo estimar un modelo preliminar que brinde valores que puedan ser tomados como órdenes de magnitud para dimensionar la problemática. Particularmente, se realizarán estimaciones de pérdida de ingresos producidos por la ocurrencia de eventos climáticos extremos, específicamente casos de sequías. Por su significancia económica, se abordará en primera instancia el caso de la soja.

Respecto a la estructura del trabajo, en la primera sección se realiza una síntesis de los distintos enfoques utilizados a lo largo de la literatura, distinguiendo entre el macroeconómico, el sectoriales y el de variabilidad climática. En la segunda sección, se fundamenta el enfoque seleccionado en vistas del objetivo del estudio, y se desarrolla la metodología aplicada. Por último, en la tercera sección se presenta una síntesis de resultados para el caso de la soja producida en el país.

### 1. Primera Sección: Estado del Arte

En períodos recientes se ha producido un gran interés por medir y estudiar los efectos del cambio climático en la economía y especialmente en el sector agrícola. El fenómeno incide en forma directa en la mayoría de los cultivos,

alterando las frecuencias e intensidad de las cosechas y consecuentemente afectando los niveles de producción. El impacto económico del cambio climático no es sencillo de estimar, ya que intervienen un considerable número de variables y además los agentes tienden a variar su comportamiento ante los cambios percibidos y esperados (CEPAL, 2010). De acuerdo a la literatura, pueden resumirse tres grandes enfoques de medición del impacto económico del clima: enfoque macroeconómico, enfoque sectorial en el agro y enfoque variabilidad climática, los cuales se describen a continuación.

### 1.1 Enfoque macroeconómico

El enfoque macroeconómico, desarrollado en un trabajo de la Dirección Nacional de Planeamiento de Colombia y el Banco Internacional de Desarrollo (2014) toma como base la información que surge de las cuentas nacionales, y estima el impacto del clima en cada sector de actividad en términos de PIB. Se utiliza un modelo de equilibrio general estocástico que modeliza el sistema económico incorporado al clima como un insumo más dentro de la función de producción, afectando por tanto la productividad del sector. Los impactos del cambio climático se simulan como *shocks* (negativos) de producción a los distintos sectores modificando el coeficiente técnico asociado a una función de producción Leontief. Vale destacar que las estimaciones no contemplan el posible daño producido en la infraestructura y el capital requeridos para la producción. El impacto en el bienestar de los hogares se asocia al incremento de precio que el cambio climático puede generar en los bienes consumidos.

Las estimaciones calculadas son de tipo agregado, y el modelo permite cierta flexibilidad en el tratamiento metodológico de cada sector en particular. No obstante, en general no incorpora variabilidad, sino que estima impactos en el largo plazo, motivo por el cual es generalmente utilizado para realizar valuaciones económicas del fenómeno del cambio climático, realizando proyecciones de largo plazo: períodos de 50 ó 100 años.

## 1.2 Enfoque sectorial en el agro

En líneas generales, las metodologías utilizadas para estimar el impacto del cambio climático sobre el sector agropecuario pueden clasificarse en estructurales y espaciales.

En el enfoque estructural se estiman las respuestas de los productos estudiados a variaciones de temperatura y precipitaciones con series que pueden ser anuales o diarias. En tanto, en el enfoque espacial se estiman los efectos del cambio climático en el valor de la tierra, o bien en el beneficio de los agricultores. Ambos enfoques se describen a continuación.

### 1.2.1 Enfoque estructural

El enfoque estructural, de acuerdo a CEPAL (2010), utiliza modelos interdisciplinarios para simular cambios en determinados cultivos. Mediante series de distinta frecuencia temporal se estiman las respuestas de los productos en estudio ante variaciones de temperatura y precipitación. Estimados los impactos en la producción, se los incorpora a modelos económicos que permiten estimar cambios en la oferta y/o en los precios de los cultivos.

Para citar un ejemplo, el estudio realizado para Costa Rica por Ordaz *et al.* (2010), se basa en una función de producción estimada a partir del método de mínimos cuadrados (MCO). Las variables dependientes que utilizan son datos anuales (1961 a 2005) de índices de producción agropecuaria, de producción de cultivos y de producción pecuaria de tipo Laspeyre, construidos por la FAO y los rendimientos en toneladas por hectárea del maíz, frijol y café. Como variables independientes en ambos casos se usaron las precipitaciones acumuladas en los meses de mayo a octubre, la temperatura máxima y el promedio anual, con sus respectivos términos al cuadrado. Las variables de control consideradas fueron la proporción de la población económicamente activa (PEA) rural en la PEA total y población, que se toman en cuenta para filtrar el efecto del factor trabajo en la variación de los rindes o índices de producción.

La forma general elegida para la estimación de la función de producción es cuadrática, pues permite visualizar los efectos positivos y negativos sobre el rendimiento del cultivo. Los resultados se resumen en gráficos de funciones cóncavas que representan los impactos de las variaciones de temperatura y precipitación sobre las distintas variables dependientes.

Una vez estimada la función de producción se pueden variar los valores de variables como temperatura y precipitaciones, y evaluar su impacto sobre la variable dependiente (rendimiento de un cultivo o índice de producción).

Una crítica recurrente a este método de estimación es que el mismo tiende a sobreestimar los efectos negativos del clima, ya que no toma en cuenta las medidas de adaptación llevadas a cabo por los productores (*on farm strategies*). No obstante, tiene la ventaja de proporcionar buenos resultados de los rendimientos estimados en función de las diferentes situaciones climáticas.

Respecto al mencionado cambio del comportamiento, Smit, McNabb y Smithers (1996) incorporaron en sus estudios una variable que representaba la adaptabilidad humana al cambio climático. La incorporación de esta variable disminuyó la sobreestimación de los aspectos negativos del cambio climático y la subestimación de los efectos positivos. Trabajos posteriores incluyeron un número superior de adaptaciones a nivel de granja, sustituciones de insumos y productos, impactos en los precios de las *commodities* y el bienestar.

### ***1.2.2 Enfoque espacial***

En cuanto a los modelos espaciales, los mismos estiman los efectos del cambio climático en función de los cambios en el valor de la tierra, tomando en general datos de panel de diferentes áreas geográficas. Para esto se utilizan a) modelos ricardianos, b) modelos de equilibrio general y c) modelos de sistemas de información geográficos.

Una de las ventajas de este enfoque es que permite cuantificar el impacto del cambio climático en unidades con un alto grado de desagregación y la posibilidad de poder considerar otras variables importantes como la calidad de la tierra. Entre las desventajas se encuentra que los resultados obtenidos por

estos modelos dependen de los datos disponibles de las regiones geográficas analizadas y de la eficiencia del análisis estadístico en eliminar factores que generan ruido en las estimaciones.

Entre los modelos utilizados dentro de este enfoque, el ricardiano es uno de los más utilizados. El supuesto fundamental es que el mercado es competitivo y por lo tanto el valor de la tierra representa el valor presente de los ingresos netos provenientes del uso eficiente de la misma. Por medio de regresiones se estiman los cambios en el valor de la tierra utilizada para la agricultura ante variaciones en el clima y otros factores económicos y no económicos.

Entre los ensayos empíricos realizados, se destaca el trabajo de Deschenes y Greenstone (2007), quienes estudian el impacto económico del cambio climático sobre los principales cultivos de Estados Unidos. El estudio utiliza el enfoque ricardiano partiendo de la metodología del trabajo de Schlenker *et al.* (2006) pero realizando algunos ajustes en el modelo, de manera tal que la variable dependiente pasa a ser el beneficio de los agricultores en lugar del valor de la tierra. Las variables independientes que utilizaron fueron la cantidad de productores y la extensión de la explotación, el total de la producción, el valor promedio del campo y de la maquinaria, y medidas de productividad del suelo. También consideraron los beneficios totales y por hectárea, los ingresos/remuneración y los gastos de los productores así como los pagos al gobierno. Las variables climáticas utilizadas fueron: temperatura y las precipitaciones de enero, abril, julio y octubre, desagregadas por condado y año.

El modelo utilizado por los autores para salvar las posibles incorrectas especificaciones del modelo hedónico/ricardiano es el siguiente:

$$Y_{ct} = \alpha_c + \gamma_t + X_{ct}\beta + \sum \theta f_i (W_{ict})$$

Donde:

- $Y_{ct}$ : ingreso de la actividad agrícola por condado y año t.
- $\alpha_c$ : efectos fijos por condado (municipio) que absorben todos los efectos específicos no observados por condado de la variable dependiente.

- $\mathcal{Y}_t$ : indicadores anuales que controlan las diferencias anuales en la variable dependiente.
- $X_{ct}$ : vector de determinantes del valor de la tierra, por condado y año
- $W_{ict}$ : vector de variables climáticas, por condado y año.

Los datos con los que realizaron las estimaciones, provinieron de los censos de agricultura de los años 1987, 1992, 1997 y 2002. Los referidos a calidad de suelos y estimaciones climáticas corresponden a un modelo que genera estimaciones de temperatura y precipitación en celdas de 4x4 kilómetros para la totalidad del territorio de los Estados Unidos.

El principal resultado del análisis, en base a proyecciones de largo plazo, es que el cambio climático tendría efectos positivos sobre las ganancias de los agricultores, estimadas en un aumento anual de los beneficios del orden del 4%. Tal incremento estaría explicado por el efecto positivo que *ceteris paribus* genera las mayores concentraciones de dióxido de carbono sobre el rendimiento de los cultivos analizados (Miglietta *et al.*, 1998). Además, el análisis indica que los aumentos previstos en la temperatura y las precipitaciones no tienen prácticamente ningún efecto en los rendimientos entre los cultivos más importantes (maíz y soja).

Entre las limitaciones del estudio, Deschenes y Greenstone (2007) señalan que los cambios en el clima interrumpirán ecosistemas locales y alterarán la calidad del suelo. Ambos factores pueden afectar la productividad agrícola. Además el cambio climático afectará la producción agrícola mundial, siendo razonable suponer que esto alterará los costos a largo plazo de la producción, y podría causar cambios en los precios relativos. Dado que las estimaciones se basan en fluctuaciones anuales y se ajustan para condados es poco probable que representen plenamente esta posibilidad. Por último, vale destacar que en EE.UU. existe un complejo sistema de programas del gobierno que tienen impacto en los beneficios de la actividad agrícola y por lo tanto sobre los valores de la tierra al afectar las decisiones de los productores sobre qué cultivos sembrar, la cantidad de tierra a usar, y el nivel de producción (Kirwan 2005). Las estimaciones del trabajo serían diferentes si se realizaran con un conjunto de indicadores de las políticas de subsidios vigentes.

Otro caso de estudio es el desarrollado por Ordaz *et al.*, (2010) donde también se aplica el enfoque ricardiano para evaluar el impacto del cambio climático sobre el valor de la tierra en Costa Rica. Consideraron los datos sociodemográficos y económicos de la Encuesta de Hogares de Propósitos Múltiples llevada a cabo por el Instituto Nacional de Estadística y Censos -INEC- de Costa Rica en el mes de julio de 2006.

El estudio utilizó como variable dependiente el ingreso por alquiler de la propiedad recibido por los hogares rurales y como independientes a la temperatura media anual, las precipitaciones acumuladas anuales, los miembros mayores de 15 años en el hogar, el género, la edad y los años de escolaridad del jefe del hogar, el número de habitaciones en la vivienda y el tipo de suelo. Con todos estos datos estimaron modelos por el método de mínimos cuadrados ordinarios. Los resultados muestran impactos considerables a un nivel de confianza elevado. En este sentido, se observa que el incremento de 1° C en la temperatura media implica una disminución de 0,5; 1,9 y 1,3 dólares bajo los modelos I, II y III, respectivamente<sup>2</sup>. Es decir, existe evidencia para señalar un impacto negativo en el ingreso recibido por concepto de alquiler que va de medio dólar a cerca de los dos dólares ante el incremento de una unidad en la temperatura media anual. Si se considera el promedio de los efectos marginales, el impacto sería de 1,3 dólares, lo que equivale a una disminución del 1,2% en los ingresos que provienen del alquiler de la propiedad. Este decremento se agudiza si se observan los hogares rurales en los distintos deciles. En particular, para los hogares rurales que se encuentran en los primeros ocho deciles del ingreso por alquiler de la propiedad se estima una caída cercana al 2%. (Ordaz *et al.*, 2010, p. 47). A su vez, se contabilizaron los impactos económicos del cambio climático sobre la producción agropecuaria en diferentes momentos del tiempo hasta el año 2100 en relación al Producto Bruto Interno (PIB) de 2007. Los resultados sugieren que de no tomarse medidas, hacia el año 2050 las pérdidas serían entre el 1% y 2% del PIB con una tasa de descuento de 4%.

Por último, para citar un estudio desarrollado para el caso de Argentina, Losanoff y Cap (2006) utilizaron el enfoque espacial a partir de los datos

<sup>2</sup> El modelo I, considera, además de las variables sociodemográficas, dos variables climáticas: temperatura media anual y precipitación acumulada anual. En el modelo II, se incorporan variables dummy de suelos, señalando el tipo de suelo que predomina en cada uno de los municipios de la muestra empleada. Por su parte, la especificación del modelo III, además de considerar las variables dummy de suelos, agrega términos cuadráticos para la temperatura media anual y la precipitación acumulada anual, así como una variable de interacción entre la precipitación acumulada y la temperatura media anual. (Ordaz *et al.*, 2001, p. 47).

de una encuesta que se realizó entre octubre de 2004 y junio de 2005 a 402 productores de distintas regiones agroclimáticas del país, con diferentes tamaños y priorizando en los pequeños productores familiares. Los datos del suelo fueron extraídos de bases regionales de la FAO y los climáticos de información satelital, aunque los valores de las precipitaciones utilizadas fue de estaciones meteorológicas cercanas al área en estudio. La variable dependiente del modelo es el ingreso neto por hectárea, que los autores consideraron como un buen reflejo (función) del valor de la hectárea incluyendo mejoras. Las variables independientes seleccionadas fueron climáticas, edáficas y ambientales, diferenciando la incidencia de estas variables para los productores pequeños y los comerciales. También analizaron la adopción del riego como mecanismo de adaptación al cambio climático.

En los resultados se observa la diferente influencia de las variables climáticas sobre cada estrato -productores pequeños y comerciales-<sup>3</sup>. La curva del valor de la tierra en función de las temperaturas presenta un óptimo a 15°C para los productores mayores, en tanto que el mismo es a 17,5°C para los menores, lo cual parece indicar una mayor capacidad de los productores grandes a adaptarse al cambio climático, dado que su óptimo prácticamente refleja la temperatura media de la muestra. Se plantean tres escenarios de cambio climático. En el primero, de condiciones leves, prácticamente no marca una tendencia de cambio en el valor de la tierra. El segundo escenario, de condiciones moderadamente severas para el cambio climático, presenta una tendencia decreciente para ambas submuestras (producciones pequeñas y comerciales). A finales del siglo XXI habría una reducción del valor del suelo del orden del 20%. El tercer escenario, de condiciones severas de cambio climático, es el que muestra mayores tendencias de cambio, al final del siglo XXI, la reducción en el valor de la tierra sería del orden del 50%.

Respecto del riego como mecanismo de adaptación al cambio climático, Losanoff *et al.* (2006) observaron que el incremento de la temperatura o una disminución de las precipitaciones conllevan a una rápida adaptación al riego.

Los autores concluyeron que existe una fuerte correlación entre el ingreso neto y las variables climáticas, en especial con la temperatura invernal y las precipitaciones de verano. Sin embargo afirman que el problema fundamental del modelo es que solo permite variar una variable exógena manteniendo el

<sup>3</sup> Esta clasificación es realizada por los autores de acuerdo a la información obtenida en la encuesta.

supuesto de que el resto de las variables se mantienen constantes. Además no incluye variables explícitas que muestren los procesos de adaptación de los productores ni tampoco las modificaciones de los precios de los bienes producidos. No obstante, Lozanoff et al., (2006) afirman que la técnica ricardiana (de corte transversal) examina no sólo los efectos directos de los diferentes ambientes sobre las explotaciones sino también los indirectos provenientes de la adaptación del productor en el caso que el valor de la tierra incorpore en su valuación esa capacidad de adaptación.

En síntesis, el enfoque sectorial explora modelos agronómicos, calibrando modelos donde un conjunto de variables climáticas afectan los rindes de los cultivos, el valor de la tierra o el beneficio de los agricultores. Este enfoque permite traducir tal impacto climático en mediciones económicas a través del cambio en el valor de la tierra o el beneficio neto, pero siempre sobre la estimación de comportamientos tendenciales y en general de largo plazo. Asimismo, todos los estudios citados relevan un considerable número de variables, tanto temporales como de sección transversal. Como denominador común, todos abordan el fenómeno del cambio climático. Por ello, en el apartado siguiente se resume el enfoque de la variabilidad climática y eventos extremos.

### **1.3 Enfoque de la variabilidad climática**

En primer lugar resulta necesario distinguir entre los conceptos de cambio y variabilidad climática. El cambio climático refiere a un fenómeno de largo plazo (entre 50 y 100 años), donde se estudian los cambios en los niveles promedio de determinadas variables climáticas. En cambio la variabilidad climática está vinculada a las desviaciones respecto a la tendencia, y generalmente se refiere a períodos de análisis más cortos (20 años). Estos eventos son justamente los que más han afectado la producción agrícola de la región pampeana, generalmente vinculados con el aumento de la frecuencia e intensidad del fenómeno ENSO (Barros, 2015).

Sintéticamente, el enfoque de la variabilidad climática:

- Se basa en modelos de ajuste econométrico de series históricas, analizando desvíos respecto a la tendencia de la serie.

- En virtud que el filtrado de tendencia es complejo metodológicamente, el enfoque resulta más robusto para la identificación de casos extremos
- Los eventos extremos están representados por fuertes sequías o inundaciones,
- Para el caso de Argentina, generalmente generados por el fenómeno NIÑO y NIÑA

Entre algunos estudios empíricos, Heinzenknecht (2011) aborda propuestas de metodologías para evaluar el impacto económico de eventos climáticos extremos sobre la actividad agrícola. Analiza la probabilidad de obtener rendimientos bajos, normales y altos durante la ocurrencia de eventos *El Niño* y *La Niña* a escala estacional (primavera, verano, otoño e invierno) para localidades con datos de precipitaciones en Argentina.

Las series históricas de rendimientos a nivel departamental estudiadas fueron de los cultivos de maíz, soja, girasol, trigo, sorgo y algodón. Dado que los cultivos y técnicas de manejo variaron considerablemente en los últimos años el autor tomó como periodo de análisis las campañas 1980-1981 (campaña 1981) a 2009-2010 (campaña 2010). Si bien las tecnologías se han modificado en el lapso estudiado, tomar un periodo más corto significaría no contar con suficientes casos de *El Niño* y sobre todo de *La Niña* para que el estudio sea consistente.

Con los valores de rendimientos por hectárea se ajustó una función de tendencia por el método de MCO obteniendo los rendimientos esperados o los rendimientos tendencia (RT). Con ellos se calculó la diferencia entre los verdaderos valores obtenidos (R) en las distintas cosechas y los estimados (DIF:  $R - RT$ ) y el porcentaje de rendimiento tendencia como  $AP = \frac{DIF}{RT}$ .

Cada uno de los cultivos analizados fue clasificado en rendimientos altos, bajos y normales a partir de los valores medios de los apartamientos positivos y negativos. Por ejemplo, para la soja se consideró rendimientos bajos a los inferiores al -20% y altos a los mayores al +20%, el resto eran normales. Con los resultados obtenidos hicieron mapas por departamento y a nivel provincial de los distintos cultivos estudiados.

Otro estudio abordado desde el enfoque de la variabilidad climática es el Berterretche *et al.* (2013). El objetivo del mismo fue realizar una evaluación del impacto de los eventos climáticos extremos en la producción agropecuaria del Mercosur. Para lograr este cometido se identificaron los eventos climáticos extremos que más afectan la producción agraria de los países del Mercosur, sintetizando los métodos existentes para medir el impacto de un evento climático extremo sobre la producción. Realizaron un ejemplo con el método elegido para un cultivo, en un área geográfica determinada en la que se contaba con disponibilidad de registros climáticos históricos.

Las variables consideradas en el estudio son evapotranspiración potencial y precipitaciones (datos diarios) de tres estaciones meteorológicas (Junín, Venado Tuerto y Pergamino) con las que se calcularon las deficiencias hídricas y los rendimientos promedios por departamento del cultivo de soja entre los años 1970 y 2012.

Con los rendimientos de la soja en kilogramo por hectárea (*kg/ha*) del país se construyeron por medio del método MCO los rendimientos esperados *kg/ha* de soja a nivel nacional. Luego se calculó el desvío medio del rendimiento esperado.

Posteriormente se le eliminó la tendencia a los valores correspondientes a los rendimientos de la soja, cálculo que también fue realizado a nivel departamental. Entre los resultados para el partido de Pergamino, se puede mencionar que en los años 1983, 1997 y 2009 obtienen las mayores diferencias negativas del desvío del rendimiento observado respecto al esperado: 33%, 43% y 37%, respectivamente. Además durante las décadas del 70 y 80 encuentran más desvíos negativos de rendimientos que en los otros períodos analizados (menores rendimientos que lo esperados).

Con los datos sin tendencia, se calcularon la media y los valores con uno y dos desvíos estándar. Luego los porcentajes de rendimientos anuales para cada uno de estos nuevos valores. Los años 1997 y 2009 resultaron negativos nuevamente con -35% y -39% respectivamente. De acuerdo a los autores, con estos cálculos (desvíos respecto a la media sin tendencia) se pueden clasificar los eventos por su magnitud de una forma objetiva y comparable a lo largo del tiempo. Además las frecuencias acumuladas de las

deficiencias hídricas relativas durante el período crítico permiten establecer las probabilidades de ocurrencia de eventos extremos y relacionarlos con las magnitudes de pérdida del rendimiento (Berterretche, et al., 2013, p. 42).

Otro trabajo que se enfoque en el análisis de variabilidad es el de Beathgen (2008), que tiene como objetivo brindar información para los instrumentos de mercado como los seguros agrícolas. Desarrollan el concepto de rendimientos catástrofe o de emergencia, en base a los cuales se calcularán los recursos necesarios para cubrir las pérdidas en situaciones extremas.

Por medio de una regresión lineal simple, que según la opinión de los autores es la mejor forma de eliminar la tendencia cuando las muestras son pequeñas, estiman los rendimientos esperados de una muestra que contiene los rendimientos por hectárea de los distintos cultivos estudiados entre los años 1992/93 al 2004/05. Definen el desvío de los rendimientos con respecto a los estimados como:

$$\text{Desvío de Rendimientos} = \left( \frac{\text{Rend real} - \text{Rend est.}}{\text{Rend est.}} \right) * 100 .$$

A partir del desvío estándar del rendimiento por hectárea de cada cultivo, se calcula el desvío del rendimiento esperado (DRE), definido del siguiente modo:

$$\text{Desvío del rendimiento esperado} = \text{Rend est.} - 2\sigma$$

Ese valor actúa como límite para identificar las desviaciones extremas en los rendimientos observados. Asimismo expresan el DRE como porcentaje del rendimiento estimado de la siguiente manera:

$$\text{Desvío del rendimiento esperado en \% (DRE \%)} = \frac{\text{DRE}}{\text{Rend est.}} * 100$$

Realizan entonces el promedio de estos porcentajes con el que llegan denominado “rendimiento de emergencia”:

$$\text{Rendimiento de emergencia} = \text{Rend. est.} * \text{DRE\%}$$

Con esa información, los autores hacen una estimación del monto en dólares por hectárea que hubiera sido necesario para cubrir las diferencias de producción por debajo de los rendimientos de emergencia, así como también la forma en la que se puede implementar a través de los indicadores estimados un seguro agrícola.

## 1.4 Síntesis

En la presente sección se ha presentado una síntesis de los diversos enfoques utilizados a lo largo de la literatura para realizar mediciones del cambio y la variabilidad climática en el sector agropecuario.

Se ha mencionado el enfoque macroeconómico y se han desarrollado con mayor profundidad las metodologías aplicadas al sector agropecuario, desde el enfoque estructural y espacial hasta el enfoque de la variabilidad climática.

Respecto al enfoque macroeconómico, se destaca que dicha metodología genera estimaciones en términos de PIB sectorial, y en general en base a cambios climáticos de largo plazo, captados a través del coeficiente técnico del sector. La estimación de dicho coeficiente amerita una metodología en sí misma. En tanto, como fue mencionado, el enfoque requiere la especificación de un modelo económico teórico que permita la especificación de una restricción presupuestaria y esquema de optimización de los agentes. Se entiende que el método puede ser útil a los fines de medición del impacto del cambio climático, pero no tanto para eventos de riesgo climático dado que, *per se*, no incorpora el fenómeno de la variabilidad.

En tanto el análisis estructural, el mismo es de índole agronómico y no estima en forma directa el impacto económico, sino que el modelo calibra la incidencia de variables climatológicas sobre el rendimiento de los cultivos. Realizar una valuación económica en base a este enfoque resulta viable, pero también corresponde a impactos del cambio climático (largo plazo) y, en general, sobre una región geográfica bien especificada.

En cuanto la óptica espacial, incorpora información respecto al valor de la tierra y mide el impacto en términos de la apreciación o depreciación de la misma frente al cambio climático, o bien en el beneficio de los agricultores

(en alguna variante del modelo, como en el trabajo de Deschenes y Greenstone, 2007). No obstante, si bien también el horizonte es de largo plazo y tendencial, el modelo incorpora el supuesto de competencia perfecta y requiere un gran número de variables para su correcta especificación.

Por último, la perspectiva de la variabilidad permite captar los efectos de los cambios bruscos en los rendimientos por efectos climáticos, en general extremos. No analiza solamente la tendencia sino también la variabilidad, y el modelo resulta relativamente simple dado el nivel de información requerida para su estimación. Vale destacar que en ninguno de los estudios citados se presentan valuaciones económicas, centrándose el estudio en el análisis de los desvíos respecto a la tendencia.

## **2. Segunda Sección: Metodología**

Dado que el objetivo de este estudio es iniciar el abordaje de la valuación económica del riesgo climático en el sector agropecuario, se aplicará una metodología que toma de referencia el enfoque de la variabilidad climática. Este enfoque es el que más se ajusta al concepto del riesgo, en virtud que incorpora variabilidad (y por lo tanto eventos extremos) además de tendencia. Además, se corresponde con el objetivo del trabajo que es brindar una primera aproximación a la valuación de pérdidas económicas en vistas del diseño de instrumentos de cobertura, mitigación y/o adaptación. A continuación se presentan los datos y la metodología aplicada.

### **2.1 Estimación de los rendimientos**

Se toman los rendimientos históricos desde la campaña 1969/70 hasta la actualidad (2014/15). De existir una tendencia creciente en la serie, se asume que la misma es producto del avance tecnológico. Para el filtro de la tendencia se aplicará el modelo que genere el mejor ajuste estadístico de la serie temporal, a los fines de aislar a los rendimientos del efecto producido por el avance tecnológico. Se trabajará en principio con dos especificaciones:

$$\text{Modelo lineal: } y_t = b_0 + b_1 x_t + e_t$$

$$\text{Modelo logarítmico: } y_t = b_0 + b_1 \ln(x_t) + e_t$$

Siendo,

- $y_t$  : variable dependiente
- $b_0$  : ordenada al origen de la curva de regresión
- $b_1$  : pendiente de la curva de regresión
- $x_t$  : variable independiente
- $e_t$  : término de error (componente estocástica)

La serie estimada en base al modelo lineal o logarítmico será denominado rinde tendencial ( $R_t^T$ ) y se construye del siguiente modo:

$$R_t^T = b_0 + b_1 x_t$$

$$R_t^T = b_0 + b_1 \ln(x_t)$$

Una vez filtrada la tendencia, se espera que la mayor parte de la variabilidad de la serie resultante se explique que por factores climáticos.

El rinde simulado con filtro tendencial se obtiene del siguiente modo:

$$R_t^S = R_t - R_t^T$$

Siendo:

- $R_t^S$  : rinde simulado, neto del efecto tecnológico, del período  $t$ .
- $R_t^T$  : rinde tendencial del período  $t$ ,
- $R_t$  : rinde observado en el período  $t$ .
- $R_t^S$  : representan los desvíos respecto a la tendencia, y pueden ser valores negativos o positivos.

Para testear que el efecto de la variabilidad neta de tendencia sea debido a cuestiones climáticas (y no otros factores exógenos), se evalúan las caídas extremas de la serie de rendimientos identificadas con el modelo con el índice de sequía de palmer, cuyos valores se presentan en el Anexo 1 de este trabajo.

## 2.2 Estimación de cantidades

En base a la tendencia de la serie, se procede a la reconstrucción de los volúmenes de producción generando una serie simulada que representa la producción en ausencia de efectos de variabilidad climática, del siguiente modo:

$$Q_t^S = \frac{R_t^T}{R_t} * P_t$$

Siendo,

- $Q_t^S$ : producción simulada en base a la tendencia del período  $t$ .
- $R_t^T$ : rinde tendencial del período  $t$ ,
- $R_t$ : rinde observado en el período  $t$ .
- $Q_t$ : producción observada en el período  $t$ .

## 2.3 Tratamiento de extremos

En virtud de que la variabilidad de la serie puede estar incidida por otros efectos no climáticos, este primer ensayo exclusivamente se focalizará en los eventos extremos. Dada la distribución de los rendimientos, se define como límite a una desviación estándar:

$$R_t^E : R_t^S < \sigma_M^S$$

Siendo,

- $R_t^E$ : caso definido como de rendimiento extremo.
- $R_t^S$ : rinde simulado, neto de efecto climático, del período  $t$ ,
- $\sigma_M^S$ : desviación estándar muestral de la serie de rendimiento simulados netos de efecto climático.

La pérdida del rinde por evento climático extremo se define del siguiente modo:

$$RL_{E_j}^R = R_t^E + \sigma_M^S$$

Siendo,

- $RL_{E_j}^R$ : pérdida del rendimiento por efecto de evento climático extremo
- $R_t^E$ : caso definido como de rendimiento extremo.
- $\sigma_M^S$ : desviación estándar muestral de la serie de rendimientos simulados netos de efecto climático

## 2.4 Valuación económica

Para realizar la valuación económica, se construye una serie de variables que estiman el nivel de producción que se hubiese alcanzado en ausencia de un evento climático extremo. Se calcula la diferencia respecto a la pérdida observada, y se toma como referencia el precio internacional vigente a ese momento para realizar la valuación en dólares. El conjunto de variables se detalla a continuación:

Rendimiento teórico sin clima extremo:

$$R_j^{NE} = R_t - RL_{E_j}^R$$

Producción teórica sin clima extremo:

$$Q_j^{NE} = R_j^{NE} Q_t / R_t$$

Pérdida de producción por clima extremo:

$$QL_j^E = Q_j^{NE} - Q_t$$

Pérdida económica por clima extremo:

$$VL_j^E = QL_j^E P_t^*$$

Siendo,

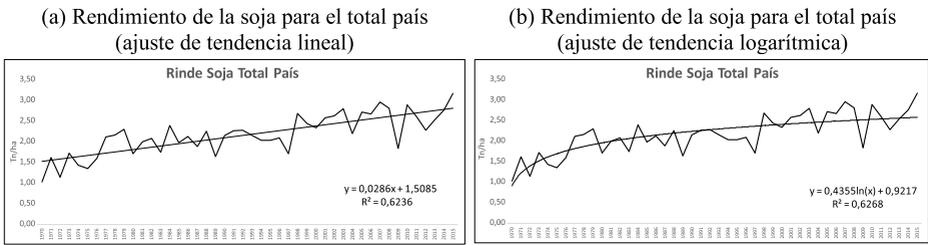
- $Q_t$ : producción observada del período  $t$ .
- $P_t^*$ : precio internacional del poroto de soja en el período  $t$ .

En la siguiente sección se aplica la metodología expuesta al caso particular de la producción de soja en Argentina. En este primer ensayo se trabajará a nivel agregado, sobre el volumen total de producción y área total sembrada.

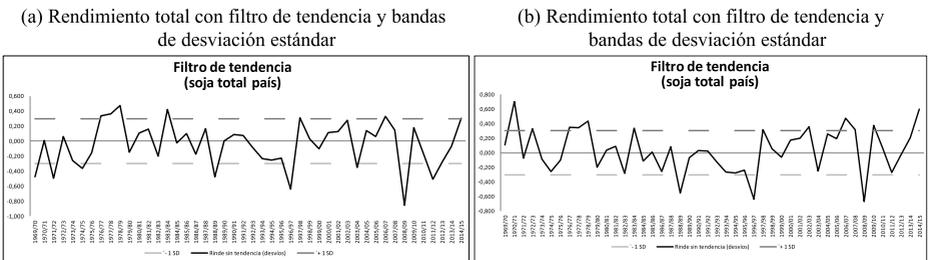
### 3. Tercera Sección: Resultados

El caso de estudio analizado es la producción de poroto de soja en Argentina. Representa el principal producto agrícola sembrado y exportado del país, concentrando el 75% del valor de la producción de granos y el 22% de las exportaciones totales de Argentina. El área bajo estudio representó en la campaña 2014/15 19,33 millones de hectáreas implantadas, mayormente de las provincias de Buenos Aires, Santa Fe y Córdoba. El valor bruto de producción de dicha campaña ascendió a u\$s 21.327 millones.

Para el análisis se relevó información de superficie cosechada, producción y precio internacional desde la campaña 1969/70 hasta la campaña 2014/2015. En base a dicha información se construyeron los rindes anuales por hectárea, serie sobre la cual se realizaron los análisis correspondientes. A continuación se presentan los resultados preliminares de los modelos estimados en base al ajuste lineal y logarítmico.

**Figura 1:** Rinde histórico y tendencia

En la Figura 1-a se presenta el ajuste tendencial del modelo lineal, mientras que en la figura 2-b muestra la tendencia logarítmica.

**Figura 2:** Identificación de eventos extremos

En primera instancia, si bien ambos modelos generan una serie de desvíos semejante, el modelo lineal es el que mejor identifica los casos de sequía de acuerdo a la metodología planteada, captando los eventos de 1989, 1997, 2003, 2008 y 2011. Vale destacar que tales años son coincidentes con eventos de sequía, de acuerdo a lo considerado en Ravelo *et al.*, 2014, Ravelo y Pascale, 1997, Scarpati y Capriolo, 2013, Minetti *et al.*, 2007, y los valores relevados mediante el índice de palmer. Por su parte, el modelo logarítmico omite los eventos de 1989 y 2011, motivo por el cual se opta por realizar las valuaciones con el modelo lineal<sup>4</sup>.

<sup>4</sup> En Tanura *et al.* (2008) puede encontrarse una fundamentación del uso del modelo lineal en detrimento del logarítmico para proyectar la evolución de los rendimientos de la soja.

La correspondencia de los eventos indetificados con situaciones de sequías puede corroborarse en el anexo donde se presenta el índice de palmer para los eventos de 2004, 2009 y 2012. En tanto, en 1989 y 1997 se registraron precipitaciones mensuales y anuales muy inferiores a los valores medios, al menos en la Provincia de Buenos Aires, siendo el evento de 1997 catalogado como sequía grave en dicha provincia (Scarpatti y Capriolo, 2013). En el caso de la campaña 1988/89, la sequía afectó mayormente a la provincia de Córdoba (Ravelo y Pascale, 1997). En tanto, Minetti et al. (2007) también identifican a la campaña 1988/89 como de sequía importante en la pampa húmeda.

En síntesis, se verifica que todos los casos identificados por el modelo se condicen con eventos de sequías de moderada a alta intensidad, siendo los eventos de 1996/97 y 2008/09 los más relevantes. En la tabla siguiente se presenta la desviación relativa del evento (la distancia en términos porcentuales entre el rendimiento observado y la cota de desviación estándar establecida como límite) y la clasificación del evento en base a fuentes secundarias y el índice de palmer.

**Tabla 1:** Estimación de pérdidas de cultivo de soja por eventos de sequía -Diferencia respecto a la desviación estándar en millones de dólares-

Campaña	Desviación relativa	Clasificación de la sequía
1988/89	60,9%	s/d
1996/97	115,3%	Grave (Scarpatti y Capriolo, 2013)
2003/04	18,6%	Incipiente/moderada (Indice de Palmer)
2008/09	188,5%	Extrema (Indice de Palmer)
2011/12	71,0%	Severa (Indice de Palmer)

Fuente: Elaboración propia.

Habiendo confirmado que los casos de caídas extremas en los rindes se condicen con situaciones de sequía, se procede a valuar el impacto de dicha caída en términos de pérdida económica de producción. Sobre la base de

la serie simulada que resulta de la aplicación del filtro lineal, el volumen de producción tendencial en ausencia de extremos, la cota de desviación estándar y el precio internacional promedio de cada campaña, las pérdidas totales en la producción de soja por eventos de sequía, bajo la metodología de eventos extremos, ascienden a un total de u\$s 6.521 millones desde 1989 a valores corrientes, monto que asciende a u\$s 9.404,45 millones si se actualizan los valores a 2016 aplicando un interés técnico del 4% efectivo anual. El evento de mayor significancia es la campaña del 2008/09 con una pérdida estimada en u\$s 3.535,4 millones en ese año, que equivalen financieramente a u\$s 4.838,44 millones de 2016.

**Tabla 1:** Estimación de pérdidas de cultivo de soja por eventos de sequía -Diferencia respecto a la desviación estándar en millones de dólares-

Campana	Valor (en millones de dólares corrientes)	Valor (en millones de dólares de 2016)
1989/1990	u\$s 174,7	u\$s 503,72
1997/1998	u\$s 611,3	u\$s 1.287,92
2003/2004	u\$s 217,4	u\$s 3.61,99
2008/2009	u\$s 3.535,4	u\$s 4.838,44
2011/2012	u\$s 1.982,8	u\$s 2.412,38

Fuente: elaboración propia.

Vale destacar que esta valuación está midiendo la magnitud del evento extremo medido respecto a la variabilidad promedio, de acuerdo a lo establecido en la metodología. Es decir, se valúa la caída de rinde respecto a la cota de desviación estándar. Si las valuaciones se realizan respecto al rinde tendencial, el valor de la pérdida representa la variabilidad total. Esta estimación se presenta en la tabla 2.

**Tabla 2:** Estimación de pérdidas de cultivo de soja por eventos de sequía  
Diferencia respecto a la media en millones de dólares

Año	Valor (en dólares corrientes)	Valor (en dólares actualizados de 2016)
1989/90	u\$s 461,7	u\$s 503,72
1997/98	u\$s 1.141,5	u\$s 2.404,97
2003/04	u\$s 1.387,1	u\$s 2.309,62
2008/09	u\$s 5.410,9	u\$s 7.405,19
2011/12	u\$s 4.776,1	u\$s 5.810,86

Fuente: Elaboración propia.

Como puede observarse, la valuación de la pérdida por los eventos de sequía medida respecto al rendimiento tendencial asciende, en las campañas identificadas por el modelo, a un total de u\$s 11.790,3 millones a valores corrientes, que equivalen a u\$s 19.261,89 millones de 2016.

En la tabla 3 se contrastan los resultados de ambos enfoques, que pueden ser tomados como referencias mínimas y máximas para estimar la valuación económica correspondiente, diferenciando entre eventos extremos y la variabilidad natural de los rendimientos (generado en ambos casos por eventos climáticos).

**Tabla 3:** Resumen de resultados en dólares corrientes

Año	Extremo	Desviación total
1989/90	u\$s 174,7	u\$s 461,7
1997/98	u\$s 611,3	u\$s 1.141,5
2003/04	u\$s 217,4	u\$s 1.387,1
2008/09	u\$s 3.535,4	u\$s 5.410,9
2011/12	u\$s 1.982,8	u\$s 4.776,1

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla siguiente se presenta el mismo resumen de resultados en moneda homogénea (dólares equivalente de 2016).

**Tabla 4:** Resumen de resultados en dólares de 2016

Año	Extremo	Desviación total
1989/90	u\$s 503,72	u\$s 1.331,25
1997/98	u\$s 1.287,92	u\$s 2.404,97
2003/04	u\$s 361,99	u\$s 2.309,62
2008/09	u\$s 4.838,44	u\$s 7.405,19
2011/12	u\$s 2.412,38	u\$s 5.810,86

Fuente: Elaboración propia.

Es importante resaltar que los valores estimados deben tomarse a los fines de establecer órdenes de magnitud, y no como valores puntuales. El modelo presentado brinda un lineamiento general, pero aún dista de ser preciso. Por ello, a continuación se listan las limitaciones del estudio, las cuales serán objeto de corrección y profundización en futuras investigaciones:

- Se ha realizado un enfoque agregado, sin tener en cuenta los diferentes impactos a nivel de provincia o localidad. El modelo agregado no contempla la disparidad de rendimientos diferenciados a nivel de provincia y/o localidad, no solamente acaecidos por las diferencias en la productividad de la tierra sino también por el diferente nivel de tecnología aplicado en cada región
- El modelo no explica la variabilidad climática sino que la toma como supuesto. Se supone que filtrada la tendencia, la variabilidad de los rindes (promedio o casos extremos) responde a cuestiones climáticas.

No obstante, en el caso de los extremos en la muestra agregada la relación fue corroborada en base a fuentes secundarias para los eventos 1989/90 y 1997/98 y mediante el índice de sequía de palmer para 2003/04, 2008/09 y 2011/12.

- El modelo identifica en forma aceptable eventos extremos de sequía. No obstante, no han sido explorados aún los efectos de otros eventos como ser los excesos hídricos.
- En este estudio preliminar se ha focalizado en la correspondencia entre baja de rindes extremos identificados por el modelo y episodios de sequía, pero no se han analizado potenciales casos omitidos.
- A nivel técnico, resta profundizar en el testeo de significatividad de los coeficientes del modelo de tendencia y justificar sobre bases empíricas el uso de una desviación estándar como cota de eventos extremos.
- Resulta necesario avanzar en la calibración teniendo en cuenta la fenología del cultivo, correlacionando el nivel de precipitaciones con las etapas críticas de siembra y floración.

### 3. Síntesis

El objetivo de este trabajo es dar un primer paso en la realización de estimaciones económicas de las pérdidas producidas por la variabilidad climática y eventos extremos (específicamente sequías) en el sector agrícola argentino. El enfoque aplicado corresponde a la generación de información que sirva de base para el diseño de instrumentos financieros de cobertura e instrumentos fiscales de mitigación y adaptación. En esta oportunidad se seleccionó el caso de la soja por su incidencia económica en los últimos años.

En la estimación presentada se privilegió la parsimonia del modelo y un enfoque agregado, que no tiene en cuenta las diferencias territoriales en cuanto a rindes y dinámica climática. No obstante, para el caso estudiado, el modelo identificó situaciones de bajas extremas de los rindes con casos

que se condicen con eventos de sequías. Aplicando el enfoque de pérdida de producción, y sobre los valores actualizados a 2016, se estimó una pérdida total de u\$s 9.404 millones en 5 campañas desde 1989, y de u\$s 7.612 millones en tres campañas desde 2003. En este último caso representa una pérdida promedio equivalente anual de u\$s 585,6 millones.

La continuación de la línea de investigación se basará en la configuración del modelo pero a nivel de localidad, ampliando no solamente la variedad de cultivos, sino también correlacionando los eventos con variables climáticas, comenzando con el nivel de precipitaciones y temperatura. Particularmente, se tendrán en cuenta los siguientes puntos:

- Replicar el modelo empleado en este trabajo a nivel de localidad, incorporando en primer lugar el nivel de precipitaciones para verificar que la caída de los rendimientos se correlacione con déficit de precipitaciones o bien con las variables climáticas que incidan sobre los principales cultivos.
- Respecto a esto último, al correlacionar rendimientos con variables climáticas, se deberá analizar la fenología de los diferentes cultivos.
- Expandir el análisis a otros cultivos, tales como maíz y trigo.
- Calibrar el modelo para la identificación de situaciones no solamente de sequía sino también de excesos hídricos y de temperatura que afecten negativamente los rendimientos.
- Complementar la metodología con el enfoque aplicado para la calibración de seguros indexados, construyendo los indicadores de *backtesting* de error de tipo I y error de tipo II.

## Referencias

- Barros V. R., Boninsegna J. A., Camilloni I. A., Chidiak M., Magrín G. O. y Rusticucci M. (2015). Climate change in Argentina: trends, projections, impacts and adaptation. *WTREs Clim Change* 2015, 6: 151-169. doi: 10.1002/wcc.316.
- Barros V.; Vera C., Agosta E., Araneo D.; Camilloni I., Carril A. F., Doyle M.E., Frumento O., Nuñez M., Ortiz de Zárate M.I., Penalba O., Rusticucci M., Saulo C., Solman S. (2014). Tercera Comunicación Nacional Sobre Cambio Climático. Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Buenos Aires, Argentina.
- Baethgen, W.E. (2008). Climate Risk Management and Adaptation to Climate Change. In: Uruguay, Climate Change Here and Now. Supplementary document for the UNDP Report on Human Development. UNDP Uruguay, Montevideo
- Berterretche M.; Chiara J. P. y Isoldi, A. (2013). Revisión, análisis y propuestas de metodologías para evaluar el impacto económico de eventos climáticos extremos sobre la actividad agrícola. Presentación en el taller: Sistematización de la información climática para su uso en el proceso de toma de decisiones, 6 y 7 de junio de 2013. Montevideo.
- Cafiero C. (2006). Risk and Crisis Management in the Reformed European Agricultural Policy. Workshop on: Crises in Agriculture and Resource Sectors: Analysis of policy Responses. Calgary, Canadá.
- CEPAL. (2010). Istmo Centroamericano: efectos del cambio climático sobre la agricultura. Sede Subregional en México. Recuperado de: <http://www.cepal.org/es/sedes-y-oficinas/cepal-mexico>
- CEPAL. (2014). *La economía del cambio climático en la Argentina. Primera aproximación*. Impreso en Naciones Unidas. Santiago de Chile.
- Recuperado de: <http://www.cepal.org/es/publicaciones/35901-la-economia-del-cambio-climatico-en-la-argentina-primera-aproximacion>

Dirección Nacional de Planeamiento de Colombia y Banco Internacional de Desarrollo (2014). Impactos económicos del cambio climático en Colombia. Síntesis. Bogotá, Colombia. Recuperado de:

[https://colaboracion.dnp.gov.co/CDT/Prensa/Impactos%20Econ%C3%B3micos%20del%20Cambio%20Climatico\\_Sintesis\\_Resumen%20Ejecutivo.pdf](https://colaboracion.dnp.gov.co/CDT/Prensa/Impactos%20Econ%C3%B3micos%20del%20Cambio%20Climatico_Sintesis_Resumen%20Ejecutivo.pdf)

Darwin, R., Tsigas, M., Lewandrowski, J. y Ranases, A. (1995), *World Agriculture and Climate Change. Economic Adaptations. Agricultural Economic Report 703*, US Department of Agriculture. Washington, D.C., United State.

Deschenes O. and Greenstone M. (2007). The Economic Impacts of Climate Change: Evidence from Agricultural Output and Random Fluctuations in Weather. *The American Economic Review*, Vol. 97 No. 1 (Mar., 2007). p.p. 354-385.

Easterling, W. E., Crosson, P. R., Rosenberg, N. J., McKenney, M. S., Katz L. A. y Lemon K. M. (1993). Towards an integrated impact assessment of climate change: The MINK study, Rosenberg N. J. (Ed). *Agricultural impacts of and responses to climate change in the Missouri-Iowa-Nebraska-Kansas (MINK) region*. p.p. 23-62. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hernández Ramírez, C., Ortiz Paniagua, C. F. y Valencia, J. B. (2014). Modelos de vulnerabilidad agrícola ante los efectos del Cambio Climático. *Revista CIMEXUS*, Vol. IX, No. 2 (Julio-Diciembre, 2014). p.p. 31-48.

Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC). (2014). *Climate Change 2014 Synthesis Report*. Recuperado de:

[http://www.ipcc.ch/pdf/assessment-report/ar5/syr/SYR\\_AR5\\_FINAL\\_full.pdf](http://www.ipcc.ch/pdf/assessment-report/ar5/syr/SYR_AR5_FINAL_full.pdf)

Jones J.W., Hoogenboom G., Porter C.H., Boote K.J., Batchelor W.D., Hunt L.A., Wilkens P.W., Singh U., Gijsman A.J., Ritchie J.T. (2003). The

DSSAT cropping system model. *European Journal of Agronomy* No. 18. p.p. 235-265.

Lozanoff, J. y Cap E. (2006). El impacto del cambio climático sobre la agricultura Argentina: Un estudio económico. Buenos Aires. Argentina. INTA.

Maddison D., Manley M., and Kurukulasuriya P. (2007). The impact of climate change on African agriculture: A Ricardian approach. *Policy Reserch Working Paper 4306*. The World Bank, Washington D.C.

Miglietta F., Magliago B., Bindi M. Cerio L., Vacari F.P., Loduca V., and Peresotti A. (1998). Free air CO<sub>2</sub> enrichment of potato (*Solanum tuberosum* L.): Development, growth and yield. *Global Change Biol.* 4:163–172.

Magrin, G., C. Gay García, D. Cruz Choque, J.C. Giménez, A.R. Moreno, G.J. Nagy, C. Nobre and A. Villamizar, (2007) Latin America. Climate Change 2007: Impacts, Adaptation and Vulnerability. Contribution of Working Group II to the Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change, M.L.Parry, O.F. Canziani, J.P. Palutikof, P.J. van der Linden and C.E. Hanson. Cambridge, UK. Eds., Cambridge University Press, 581-615.

Medina, F. e Iglesias, A. (2009). Agricultural practices with greenhouse mitigation potential in Mediterranean countries: Evaluation and policy implications. IAAE Congress. Beijing (China).

Mendelsohn, R., Nordhaus W. y Shaw D. (1994). The impact of global warming on agriculture: A Ricardian analysis. *American Economic Review*, 84:753-771.

Mendelsohn, R., Dinar A.y Sanghi A. (2001), The Effect of Development on the Climate Sensitivity of Agriculture, *Environment and Development Economics*, 6:85-101.

Murgida A. M., Travasso M. I., González S. y Rodríguez G. R. (2014). Evaluación de impactos del cambio climático sobre la producción

agrícola en la Argentina. Serie medio ambiente y desarrollo. No. 155. Naciones Unidas. Santiago de Chile, Chile.

NRC (2011). *America's Climate Choices: Final Report*. National Research Council. The National Academies Press, Washington, DC, USA.

OCDE (2000). *Income Risk Management in Agriculture*. France, OCDE.

Oficina de Riesgo Agropecuario (2011). *Proyecto riesgo y seguro agropecuario II. Informe del consultor Heinzenknecht, G.* Recuperado de:

<http://www.ora.gov.ar/informes/enso.pdf>

Ortiz de Zarate, M. J., Ramayon, J. J. y Rolla, A. L. (2014). *Agricultura y Ganadería impacto y vulnerabilidad al cambio climático. Posibles medidas de adaptación. 3era comunicación nacional de la República Argentina a la Convención Marco de las Naciones Unidas sobre cambio climático.*

Ramírez D., Ordaz L., Mora J. y Acosta A. (2010). *La economía del cambio climático en Centroamérica*. Comisión Económica para América Latina (CEPAL), sede subregional en México.

Schlenker Wolfram, Hanemann W. Michael, and Fisher Anthony C. (2006). *The Impact of Global Warming on U.S. Agriculture: An Econometric Analysis of Optimal Growing Conditions*. *Review of Economics and Statistics*, 88(1): 113-25.

Seo, S. N. y Mendelsohn R. (2008a) .*A Ricardian analysis of the impact of climate change on Latin American farms*. *Policy Research Series Working Paper*, N° 4163, Washington, D. C., Banco Mundial.

\_\_\_\_\_ (2008b), *A Ricardian analysis of the impact of climate change on South American farms*", *Chilean Journal of Agricultural Research*, 68(1). p.p. 69-79.

\_\_\_\_\_ (2008c), *An analysis of crop choice: Adapting to climate change in Latin American Farms*. *Ecological Economics*, 67. p.p. 109-116.

- \_\_\_\_\_ (2008d), Measuring impacts and adaptations to climate change: A structural Ricardian model of African Livestock Management, *Agricultural Economics*, 38. p.p. 151-165.
- Smit, B., McNabb D. y Smithers J. (1996), Agricultural adaptation to climatic variation. *Climatic Change*, 33. p.p.7-29.
- Terjung, W. H., Liverm D. M. y Hayes J. T. (1984). “Climate change and water requirements for grain corn in the North American plains”, *Climatic Change*, 6: p.p. 193-220.
- Thomasz, E. y Garnica Hervas, J. R. (2012). Gestión del cambio climático en Ciencias Económicas. Casparri, M. T. García Fronti J. (Ed.) *Impacto Económico-Financiero y Actuarial del Riesgo Climático en Argentina*. p.p. 197-220. Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Editorial: Facultad de Ciencias Económicas, UBA.
- Warrick, R.A. (1984). The possible impacts on wheat production of a recurrence of the 1930’s drought in the great plains. *Climatic Change*, 6: 5-26.
- Tannura, M.A., S.H. Irwin, and D.L. Good. “Weather, Technology, and Corn and Soybean Yields in the U.S. Corn Belt.” Marketing and Outlook Research Report 2008-01, Department of Agricultural and Consumer Economics, University of Illinois at Urbana-Champaign, February 2008.
- Ravelo, C. y Pascale, A. Identificación de ocurrencia de sequías mediante imágenes del satélite NOAA e información terrestre (1997). Rev. Facultad de Agronomía. 17 (1): 101-105.
- Minetti, J., Vargas, W., Vega B., y Costa M. (1997). Las sequías en la pampa húmeda: impacto en la productividad del maíz. Revista brasileira de meteorología, v.22, n.2, 218-232.
- Scarpati, O., Capriolo, A. (2013). Sequías e inundaciones en la provincia de Buenos Aires (Argentina) y su distribución espacio-temporal. Investigaciones Geográficas, Boletín del Instituto de Geografía, UNAM, Núm. 82, 2013, pp. 38-51



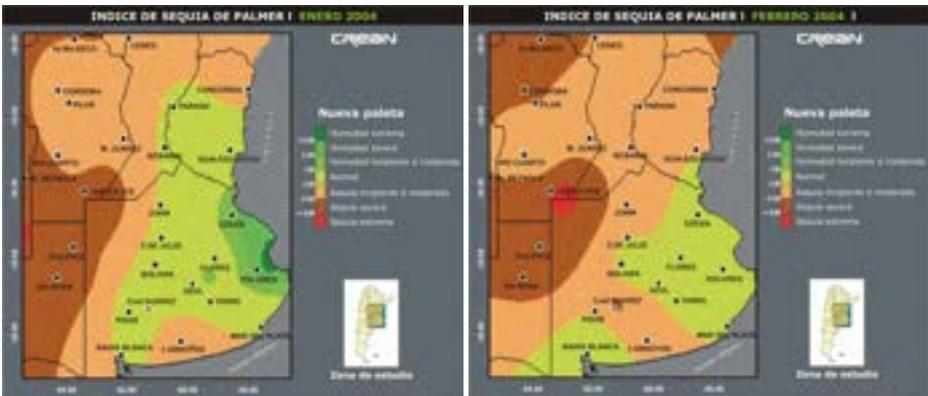
# ANEXO 1

## Índice de Sequía de Palmer

El Índice de Sequía de Palmer (PDI) (1965) fue desarrollado como un índice “para medir la deficiencia de humedad”. Se basa en el concepto de demanda-suministro de agua, teniendo en cuenta el déficit entre la precipitación real y la precipitación necesaria para mantener las condiciones de humedad climática o normal. El procedimiento de cálculo requiere como datos de entrada, la Evapotranspiración Potencial, la precipitación mensual y el contenido de agua útil del suelo.

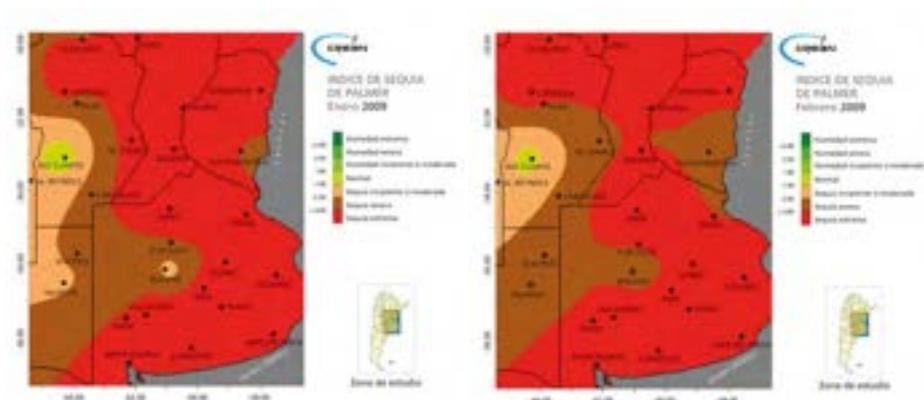
Centro de Relevamiento y Evaluación de Recursos Agrícolas y Naturales (CREAN) de la Universidad Nacional de Córdoba.

**Figura 1:** Índice de Sequía de Palmer. Enero y Febrero de 2004



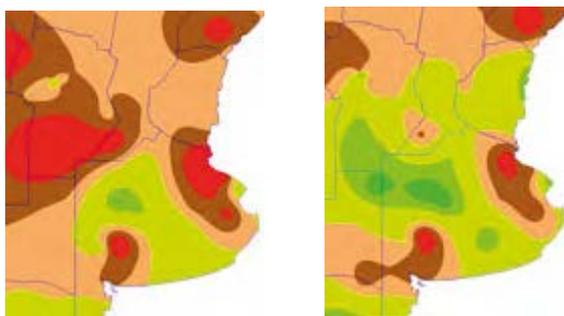
Fuente: CREAN

En enero de 2004 se registra sequía incipiente en Córdoba, Santa Fe y este de Buenos Aires. Se registra sequía severa en el Sur de Córdoba y Noroeste de Buenos Aires. En tanto, durante febrero se extiende el área de sequía severa de Buenos Aires y Córdoba, y se extiende la sequía incipiente hacia el centro de la provincia de Buenos Aires.

**Figura 2:** Índice de Sequía de Palmer. Enero y Febrero de 2009

Fuente: CREAN

En enero y febrero de 2009 se registran índices de sequía severa y extrema en las tres provincias núcleo productoras de soja, prevaleciendo la situación extrema durante ambos meses.

**Figura 3:** Índice de Sequía de Palmer. Enero y Febrero de 2012

Fuente: CREAN

Durante enero de 2012 se registra sequía severa en Córdoba, siendo de carácter extremo en el sur de dicha provincia. En toda la provincia de Santa Fe se registra sequía incipiente y severa en la zona sur. Durante febrero no se registran sequías considerables.

## 4.5 Índice sintético de precipitaciones ponderado por valor agrícola<sup>1</sup>

*María Teresa Casparri • Esteban Otto Thomasz • Kevin Corfield  
• Ana Silvia Vilker*

### Resumen

La soja es el cultivo más importante producido y exportado en Argentina, con una relevancia económica que tiene incidencia en variables macroeconómicas como la balanza comercial, la acumulación de reservas internacionales y los ingresos públicos.

La evaluación del impacto climático a nivel agregado es importante para la planificación macroeconómica y fiscal. Conocer en qué medida el déficit hídrico afecta al producto proporciona información para ajustar el gasto público y las divisas.

Actualmente existen 30 estaciones meteorológicas para una superficie de 17 millones de hectáreas. Estudios anteriores han demostrado que, a escala local, la variabilidad de las precipitaciones explica entre el 30% y el 70% de la variabilidad de los rendimientos. Sin embargo, estos casos sólo representan el 7% del rendimiento total.

Por lo tanto, este trabajo comienza a tratar el problema de cómo realizar una evaluación del impacto de la zona núcleo de producción sojera con la información disponible. Para ello, este trabajo presenta el diseño de un índice de precipitación ponderado que utiliza todos los datos pluviométricos disponibles.

**Palabras clave:** precipitaciones, eventos climáticos extremos, impacto económico

<sup>1</sup> Este trabajo forma parte de la serie documentos de trabajo del Programa en Vulnerabilidad al Riesgo Climático (ProVul).

## Introducción

Los eventos de riesgo climático, particularmente sequías, han tenido un fuerte impacto en la economía argentina (Thomasz et al, 2018). Si bien se han realizado estudios de impacto, su transmisión a escala macroeconómica continúa siendo un estudio pendiente.

En este sentido, resulta necesario contar con medidas cuantitativas de las pérdidas por eventos climáticos extremos en la producción agrícola y en particular de soja debido a que tiene un importante impacto microeconómico en la industria, y en la macroeconomía, a través de distintos mecanismos de transmisión: los shocks climáticos se propagan a todo el sistema económico causando importantes fluctuaciones en las variables económicas fundamentales (Gallic & Vermandel, 2017). Esto permite también comprender algunos hechos estilizados del ciclo económico y analizar los rezagos en términos de desarrollo y crecimiento en países cuya canasta exportadora está compuesta mayormente por *commodities* (Scheingart & Coatz, 2015).

No obstante, actualmente no se cuenta con índices climáticos sintéticos que permitan analizar el impacto sobre los grandes agregados macroeconómicos, o bien sobre grandes rubros del sector agrícola.

Con este fin se elaboró un indicador de precipitaciones ponderadas por la producción de poroto de soja de los departamentos que integran la zona núcleo de producción agrícola. El número índice se construyó a partir de la metodología del índice de Paasche. En esta fase preliminar tiene como finalidad su utilización dentro de modelos económicos específicos de impulso y respuesta.

## 1. Índice de precipitaciones ponderado por producción de soja –IPPS-

### 1.1 Descripción del índice

Existen diversos tipos de índices, los simples consideran sólo una variable mientras que los compuestos consideran dos o más. Se debe fijar un año

o valor base para la construcción de un índice, que tiene que cumplir con ciertos requerimientos, uno de ellos es que ese año sea normal o la variable exhiba un comportamiento regular.

La distinción entre índices también puede realizarse en términos de ponderado o no ponderado, esto significa que puede incluirse algún valor que permita otorgar importancia relativa a los distintos valores tomados por el índice.

El índice presentado en este trabajo está construido a partir de la metodología del índice de Paasche, que es compuesto ponderado y toma la siguiente forma.

$$I_t = \frac{\sum_{i=1}^n p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{it}}$$

Donde  $I_t$  es el valor del índice en el período  $t$ ,  $p_{it}$  es el valor de la variable para la variedad  $i$  en el periodo  $t$ ,  $q_{it}$  es el ponderador para la variedad  $i$  en el periodo  $t$ .

Este índice cuenta con la ventaja de cumplir con la propiedad de agregación, es decir que toma la forma de índice global y también puede considerarse como un índice de grupo y de subgrupo (Vilker, 2008).

En base a este marco metodológico se construyó el índice de precipitaciones ponderado por la producción de soja que toma la siguiente forma

$$IPPS_t = \frac{\sum_{i=1}^n R_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^n R_{i0} q_{it}}$$

Donde:

$IPPS_t$  es el valor del índice en el período  $t$

$R_{it}$  son las precipitaciones acumuladas (en  $\text{mm}^3$ ) del departamento  $i$  en el período  $t$

$q_{it}$  es la producción de soja en millones de toneladas del departamento  $i$  en el período  $t$

De esta forma se pueden analizar las precipitaciones acumuladas de la región núcleo de la producción de soja cediendo más importancia a los departamentos con mayor producción. El valor del índice muestra como las precipitaciones se comportaron en el área agrícola económicamente relevante. Si las precipitaciones tuvieron un desempeño pobre en un conjunto de departamentos donde la producción no es tan importante y un comportamiento bueno en aquellos donde la producción es relativamente pertinente, el índice será más elevado y en los casos contrarios su valor disminuirá.

Una de las ventajas de presentar la información de esta forma es que las comparaciones de los distintos períodos pueden realizarse contra el año base y permite discernir si las precipitaciones fueron buenas o malas. Otro aspecto positivo es la ponderación, a diferencia de un índice simple permite tener mayor precisión al momento de hacer lectura de la evolución de las precipitaciones, ya que contempla información económica que ayuda a revelar las fluctuaciones de la variable que es conveniente. Por otro lado, al ser móviles las cantidades tanto en el numerador como en el denominador, su cambio no altera el índice en tanto que cuando aumentan las cantidades producidas en el momento  $t$ , aumenta  $Q_{it}$  en la misma cuantía y el valor del índice dependerá del cambio en la magnitud de las precipitaciones.

Es importante notar que el índice puede calcularse para diferentes ventanas temporales para las precipitaciones, es decir, puede analizarse el período de floración (enero y febrero) y cosecha (abril y mayo). Así mismo puede tomarse subgrupos (provincias) o presentarse a nivel agregado (país) o conjuntos de provincias o departamentos.

## 1.2 Información utilizada para la construcción del IPPS

Para la construcción del IPPS se tomaron las precipitaciones que informa el Servicio Meteorológico Nacional con frecuencia diaria, procesando la base de datos de tal forma que las precipitaciones fueron acumuladas por períodos y departamentos seleccionados. Se tomaron las precipitaciones relevadas por 45 estaciones meteorológicas de 5 provincias -Buenos Aires, Córdoba, Santa Fe, Entre Ríos y La Pampa-. (Anexo 1).

La producción de soja en miles de millones de toneladas proviene de la información pública brindada por el Ministerio de Agroindustria de la Nación<sup>2</sup>. Se consideró el período comprendido entre los años 1999 a 2018, evitando así las distorsiones que pudieran surgir producto del cambio tecnológico que tuvo el sector en la década de 1990.

No se incluyeron otras provincias que comenzaron a incursionar en la producción de soja en los primeros años de la década del 2000 debido a que la producción del cultivo es aún marginal y no agrega información a los fines del presente trabajo.

El índice IPPS fue construido para cuatro intervalos de tiempo, octubre a diciembre, diciembre a febrero, enero febrero y abril mayo, dado que de acuerdo a la fenología del cultivo desde diciembre a febrero se produce en diciembre la primera flor y en febrero la primera semilla; entre fines de febrero y principios de marzo el inicio de llenado de granos para finalmente en abril comenzar la cosecha del cultivo<sup>3</sup>. Además, este análisis permite entender por que una caída en las precipitaciones por ejemplo en enero-febrero no produce una baja en la producción como es el caso de la campaña 2012/13, dado que hubo abundantes precipitaciones en octubre-diciembre 2012, que determinó la acumulación de reservas hídricas del suelo suficientes para el correspondiente desarrollo del cultivo.

## 1.3 Resultados obtenidos

### 1.3.1 Enero - febrero

A continuación, se presentan los valores del índice IPPS elaborado para las campañas de producción de soja comprendidas entre 1999/2000 y 2017/2018 para distintos marcos temporales (enero y febrero, octubre, noviembre y diciembre). Como año base se eligió la campaña 2007/2008 ya que la información muestra un comportamiento “normal” dentro del período estudiado.

<sup>2</sup> Información provista por el Ministerio de Agroindustria. Obtenida en la siguiente dirección:

<https://datos.agroindustria.gob.ar/dataset?organization=subse-agricultura&groups=produccion-agroindustrial>

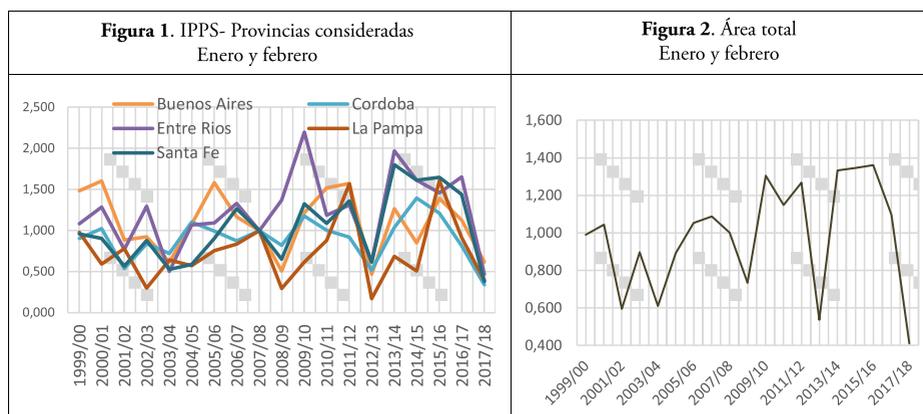
<sup>3</sup> Fuente Oficina de Riesgo agropecuario. Secretaría de Agricultura, Ganadería y Pesca. Ministerio de Agroindustria.

De la observación de los resultados obtenidos y que se muestran en la figura 1, surge que para los meses de enero y febrero desde la campaña 1999/2000 hasta 2017/2018, se perciben los principales resultados obtenidos por el modelo desarrollado por Thomasz et al (2018), las sequías de 2003/2004, 2008/2009 y 2017/2018 están perfectamente documentadas y el índice es coincidente con esos resultados (ver Cuadro 1).

**Cuadro 1.** Sequías detectadas

Campaña	Clasificación de la sequía
2003/04	Moderada
2008/09	Extrema
2011/12	Extrema
2017/18	Extrema

Fuente: Elaboración propia en base a información del Índice de Palmer



Fuente: Elaboración propia en base a datos del Servicio Meteorológico Nacional y Ministerio de Agroindustria.

A partir de los resultados obtenidos con el índice se observa una baja en las precipitaciones ponderadas por la producción de soja en la campaña 2012/13. Ni el índice de Palmer ni la metodología desarrollada por Thomasz 2018 identificaron este período como afectado por una sequía, evento extremo que si se produjo en la campaña 2011/12.

Para explicar esta situación se debe tener en cuenta que las precipitaciones de octubre diciembre de 2011/12 si bien crecieron con respecto a la campaña anterior, estuvieron por debajo de su promedio histórico. En tanto en enero y febrero del mismo período la variable estudiada cayó con respecto a octubre diciembre (Cuadro 2).

En cambio, en el año 2013 disminuyeron las precipitaciones de todas las ventanas temporales consideradas, pero no hubo sequía pues las precipitaciones de octubre a diciembre de 2012, estuvieron por encima de su media histórica, permitiendo reservas hídricas suficientes para los siguientes meses correspondientes al período de floración del cultivo. (Ver Cuadro 3)

**Cuadro 2.** Precipitaciones en mm<sup>3</sup>: Octubre–Diciembre, Enero–Febrero, Abril-Mayo

Período	Media histórica	2011/12
Octubre a - Diciembre	10.784,76	10.070,37
Enero - Febrero	7.680,90	9.886,47
Abril - Mayo	4.881,08	5.431,60

Fuente: elaboración propia en base a datos de SMN

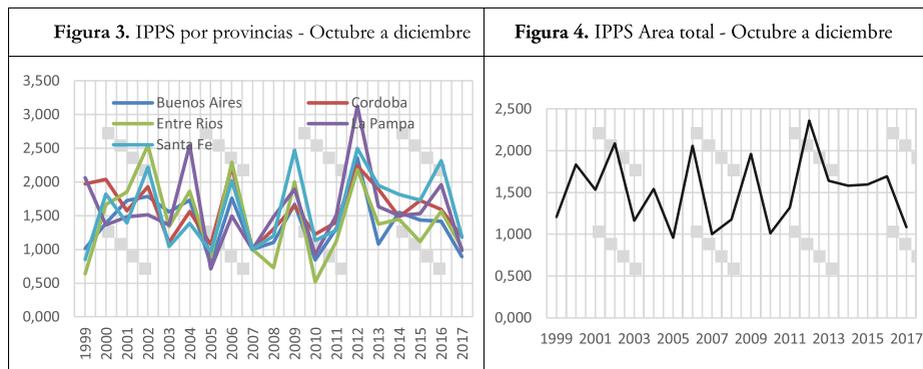
**Cuadro 3.** Precipitaciones acumuladas en mm<sup>3</sup>. Octubre a Diciembre

Período	2011	2012	2013
Octubre a Diciembre	10.070,4	17.965,9	10.585,1

Fuente: elaboración propia en base a datos de SMN

### 1.3.2 Octubre a diciembre

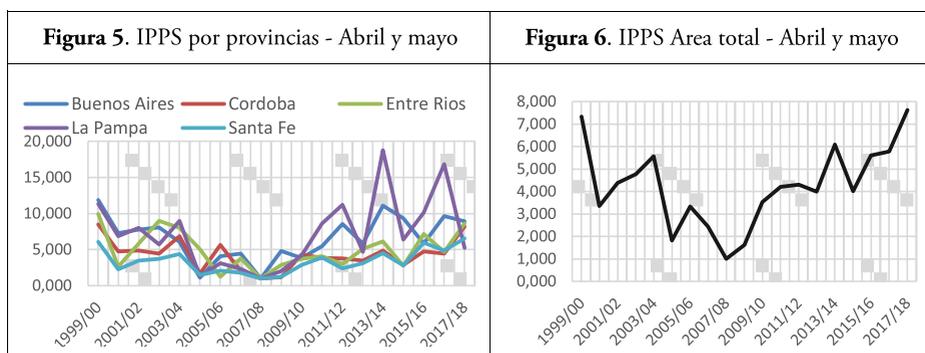
Entre octubre y diciembre se produce la siembra y la fase del primer desarrollo de la soja, de ahí la importancia relativa del comportamiento de las precipitaciones en este período. Del análisis de los resultados del indicador desarrollado en este trabajo se observan en general disminuciones en las precipitaciones en las campañas identificadas como sequías. Figura 3 y 4.



Fuente: Elaboración propia en base a datos de SMN

### 1.3.3 Abril – Mayo

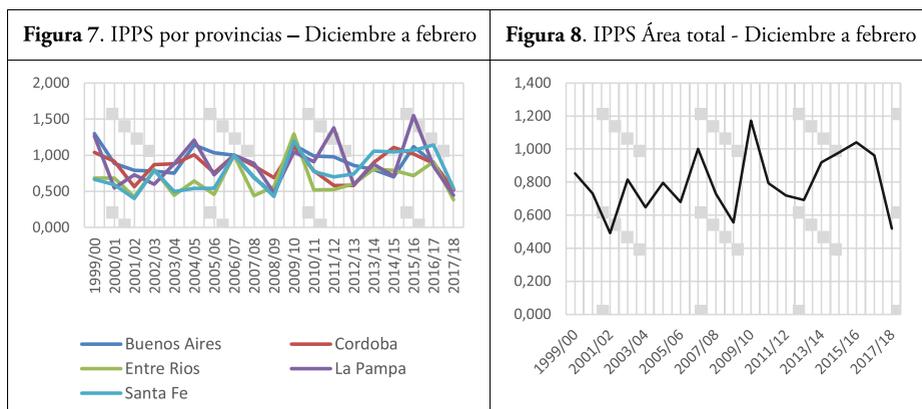
Los resultados del índice para el bimestre abril-mayo, correspondiente al momento de la cosecha, muestran a partir del año 2008 una tendencia creciente de las precipitaciones. Esta información es relevante dado que un exceso hídrico en el momento de la cosecha puede ser un problema ya que dificulta la recolección del cultivo. (Figura 5 y 6)



Fuente: Elaboración propia en base a datos de SMN

### 1.3.4 Diciembre a febrero

El IPPS elaborado para el trimestre diciembre-febrero muestra un mejor desempeño que los demás rangos temporales, se detectan los mínimos que coinciden con las sequías del modelo (Thomasz, 2018). La campaña 2003/04 Buenos Aires, Santa Fe y Entre Ríos tuvieron baja acumulación de precipitaciones, en cuanto a la campaña 2008/09 todas las provincias muestran una caída en las lluvias al igual que en la campaña 2017/18. (Figura 7)

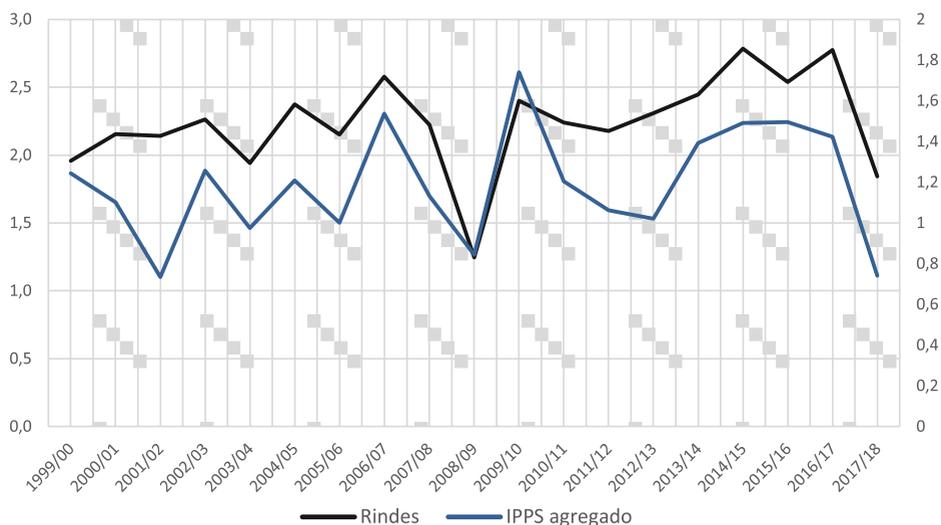


Fuente: Elaboración propia en base a datos de SMN

## 2. Testeo del IPPS

### 2.2 Relación entre el IPPS Diciembre-Febrero y rendimientos del total de la zona núcleo agrícola

A partir de la relación mostrada en la figura 9 entre el IPPS diciembre a febrero y los rendimientos por área sembrada del total de la zona núcleo agrícola se estima la correlación entre IPPS agregado para la zona núcleo y los rendimientos calculados a partir de la producción y el área sembrada del total del país, cuyo resultado es 0,73. Este último muestra la existencia de una relación directa entre ambas magnitudes (Cuadro 4).

**Figura 9.** IPPS Área total (Dic., ene. y Feb): eje derecho y rendimientos: eje izquierdo

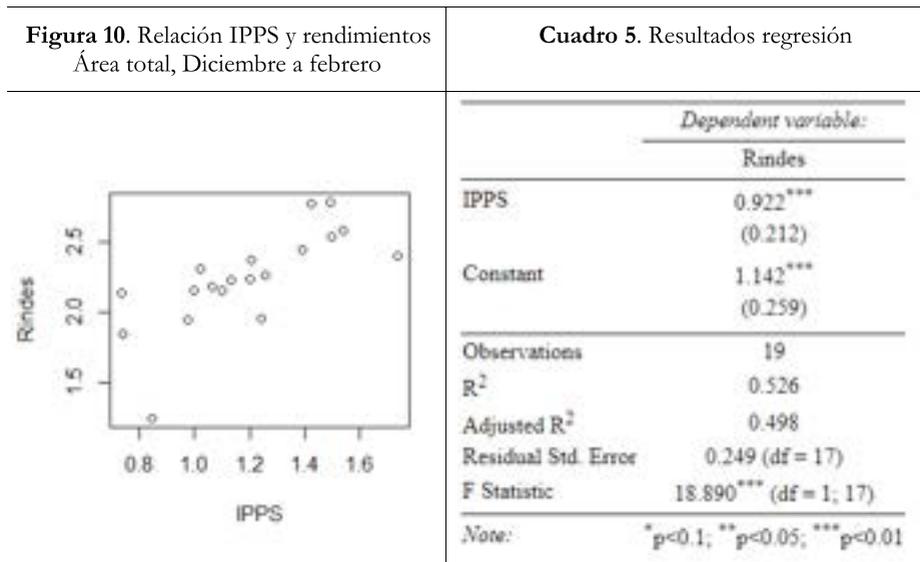
Fuente: Elaboración propia en base a datos de SMN y de la Ministerio de Agroindustria

**Cuadro 4.** Correlación de IPPS (agregado) con rendimientos de los departamentos con información de precipitaciones

	IPPS	Rindes
IPPS	1	0,73
Rindes	0,73	1

Fuente: Elaboración propia

Por otro lado, se estimó una regresión simple para ver los efectos de un cambio en el IPPS sobre los rindes a nivel agregado para la zona núcleo. El resultado revela un comportamiento directo entre tales magnitudes y casi proporcional es decir 1 a 1. En otras palabras, una caída de una unidad en el índice se corresponde con una caída de 0.92 toneladas por área sembrada. El impacto es significativo a un nivel del 1%. Ver Figura 9 y Cuadro 5.



Fuente: Elaboración propia

Estos resultados permiten afirmar que los valores del IPPS a nivel agregado de la zona núcleo agrícola podrían utilizarse como indicador para detectar situaciones de escasez de precipitaciones en la zona agrícola económicamente relevante, en particular de la soja y luego estimar las pérdidas por sequías con el modelo desarrollado por Thomasz *et al* (2018).

## 2.1 Correlaciones entre el IPPS y el rendimiento del poroto de soja por área sembrada

Con el fin de testear el índice IPPS se calcularon los coeficientes de correlación entre la media de los rendimientos por área sembrada de los departamentos con el IPPS (Cuadro 6). Se debe tener en cuenta que no hay disponibilidad de información de precipitaciones para todos los departamentos con datos de producción y área sembrada, por lo tanto, se calcularon los rindes medios por provincias para los departamentos con los que se contaba con los valores de ambas variables –precipitaciones y rendimientos- con el fin de calcular las correlaciones correctamente.

**Cuadro 6.** Resultados de las correlaciones entre IPPS y rendimiento por área sembrada

	Enero y febrero	Octubre a diciembre	Diciembre a febrero
Buenos Aires	0,425	0,263	0,670
Córdoba	0,321	0,243	0,408
Entre Ríos	0,424	0,612	0,498
La Pampa	0,583	0,164	0,601
Santa Fe	0,490	0,647	0,678

Fuente: elaboración propia en base a datos de SMN

A partir de la observación de los resultados los rangos temporales que mejor se ajustan al comportamiento de los valores del índice son los correspondientes a enero y febrero y el trimestre diciembre-febrero donde el cultivo está en su período de floración y de acuerdo a la fenología de la soja en su momento crítico de déficit hídrico<sup>4</sup>.

Es importante recalcar que el IPPS debe leerse en distintas ventanas temporales para obtener información suficiente sobre una situación de déficit hídrico. Esto se debe a que existen otros factores que influyen en el desempeño de la producción agrícola como la cantidad de reservas hídricas del suelo y que este índice no contempla.

Dados los resultados de las correlaciones y el análisis efectuado anteriormente se infieren limitaciones del estudio por provincia. No obstante, como fue presentado en el apartado anterior, el estudio de los valores del índice del agregado de la zona núcleo agrícola ostenta un mejor desempeño, aportando al objetivo planteado de disponer de un índice sintético para vincularlo a modelos de impacto y de ciclo económico a nivel agregado.

<sup>4</sup> Fuente: Oficina de Riesgo Agropecuario. Secretaría de Agricultura, Ganadería y Pesca. Ministerio de Agroindustria

## Conclusiones

En este trabajo se elaboró un índice en base a la metodología de Paasche con el objetivo de tener un indicador sintético y reproducible de forma sencilla que permitiera evaluar el impacto macroeconómico de un evento extremo de sequía en la zona núcleo agrícola de Argentina.

Con vistas a realizar ejercicios de predicción, podría tomarse el índice como un adelanto del comportamiento de la producción agrícola y sus consecuentes efectos sobre las fluctuaciones de las variables macroeconómicas. También puede ser utilizado para proyectar flujos de fondos futuros para contrastar con las posibles inversiones en obras de infraestructura y analizar su factibilidad.

Por otro lado y teniendo en cuenta la simplificación del problema, dado el gran número de variables intervinientes, el análisis de las precipitaciones a nivel agregado a través del índice presentado en este trabajo arroja una relación estadísticamente significativa en los meses enero y febrero y diciembre a febrero dando cuenta de la importancia de la presencia de las precipitaciones en el período de floración del cultivo y de acuerdo a la fenología de la soja en su momento crítico de déficit hídrico.

Específicamente el IPPS mostró tener un buen desempeño cuando se contrasta con las principales sequías acaecidas en los años analizados que van desde la campaña 1999/00 a la de 2017/18. No obstante, debe considerarse más de un intervalo temporal para detectar correctamente el evento climático extremo.

Para optimizar el indicador y lograr una mayor síntesis del índice podría ampliarse el rango temporal ponderándose los meses incluidos de acuerdo a la importancia que las precipitaciones acaecidas en cada uno de ellos tengan en el desarrollo del cultivo.

También se podrían estimar modelos de vectores autorregresivos con los valores del índice –IPPS- a nivel agregado, las exportaciones y los valores del producto bruto interno con el fin de estudiar los mecanismos de transmisión de una sequía a la economía en su conjunto. Como fue dicho, la presente investigación de índole macroeconómica tiene como último el estudio del impacto y propagación de shocks climáticos en el frente macro-fiscal.

## Referencias

Gallic E., and Vermandel G. (2017). Weather Shocks, Climate Change and Business Cycles, MPRA Paper No. 81230. Disponible en: <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/81230/>

Thomasz, E. O.; Vilker A. & Rondinone G. (2018). The economic cost of extreme and severe droughts in soybean production in Argentina. Disponible en:

<http://www.cya.unam.mx/index.php/cya/article/viewFile/1422/1343>

Thomasz, Esteban; Rondinone, Gonzalo; Vilker Ana & Eriz Mariano (2017). El impacto económico de los eventos climáticos extremos en Argentina El caso de la soja en la zona núcleo ¿Riesgo climático o déficit de infraestructura? Disponible en:

[http://bibliotecadigital.econ.uba.ar/econ/collection/libros/document/Thomasz-Rondinone-Vilker-Eriz\\_El-impacto-economico-de-los-eventos-climaticos-extremos-en-Argentina-017?p.s=TextQuery](http://bibliotecadigital.econ.uba.ar/econ/collection/libros/document/Thomasz-Rondinone-Vilker-Eriz_El-impacto-economico-de-los-eventos-climaticos-extremos-en-Argentina-017?p.s=TextQuery)

Schteingart D.; Coatz D. (2015). ¿Qué modelo de desarrollo para la Argentina? Centro de estudios de Unión Industrial Argentina. Disponible en:

<https://uia.org.ar/centro-de-estudios/1905/que-modelo-de-desarrollo-para-la-argentina/>

Vilker, A. S. (2008). Números índices, documento de trabajo No. 7. Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires. Ciudad Autónoma de Buenos Aires- Argentina.

---

## ACERCA DE LOS AUTORES

---

### Carolina **Artuso**

---

Actuaria en Economía de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires (FCE-UBA). Profesora adjunta de cálculo financiero y ayudante de primera en teoría actuarial de los seguros personales en la FCE de la UBA.

### Alicia Blanca **Bernardello**

---

Fue profesora titular de Matemática para Economistas y asesora de Posgrado de la Facultad de Ciencias Económicas (FCE) de la Universidad de Buenos Aires (UBA). Secretaria Técnica del Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos aplicados a la Economía y la Gestión (CMA) FCE-UBA. Subdirectora del Departamento Pedagógico de Matemática de la FCE-UBA. Directora e investigadora formada de proyectos de investigación UBACyT – Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad de Buenos Aires.

### María José **Bianco**

---

Doctora de la Universidad de Buenos Aires (Área Administración). Licenciada en Ciencias Matemáticas (Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-Universidad de Buenos Aires (UBA). Subdirectora del Departamento Pedagógico de Matemática de la Facultad de Ciencias Económicas (FCE) - UBA. Profesora Titular regular de Análisis Matemático II. Docente en la Maestría en Métodos Cuantitativos para la Gestión y Análisis de Datos en Organizaciones, FCE - UBA.

## Aida Beatriz **Castegnaro**

---

Contadora Pública de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires (FCE-UBA) y Magistrando en Docencia Universitaria. Profesora adjunta regular de Estadística y de Cálculo Financiero en la FCE de la UBA. Profesora de la Escuela de Posgrado en cursos de Docencia y de Métodos cuantitativos de utilización en marketing y negocios de la Especialización en Dirección Estratégica de Marketing.

## María Teresa **Casparri**

---

Doctora en Ciencias Económicas, Actuarial, Licenciada en Economía, Contadora Pública (UBA). Profesora Emérita de la Universidad de Buenos Aires. Profesora de Grado, Posgrado y Doctorado UBA. Secretaria de Doctorado y Posdoctorado de la Facultad de Ciencias Económicas. Directora del Instituto de Investigaciones en Administración, Contabilidad y Métodos Cuantitativos para la Gestión – UBA. Directora del Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión. Directora de la Maestría en Gestión Económica y Financiera de Riesgos. Directora de la maestría y especialización para la gestión y análisis de datos de las organizaciones Profesora de posgrados de varias universidades en el país y en el exterior.

## Kevin **Corfield**

---

Es Licenciado en Economía y auxiliar docente de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires (FCE-UBA). Actualmente es becario UBACyT y está realizando la maestría en Economía en la Escuela de Posgrado de la FCE de la U

## María Elizabeth **Cristófoli**

---

Doctora de la Universidad de Buenos Aires en Ciencias Económicas, área Actuarial. Actuario (Economía) de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires (FCE-UBA). Investigadora en el Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos aplicados a la Economía y la Gestión (CMA – IADCOM). Experiencia en el análisis, cálculo y gestión de riesgos (crédito y operacional) en

diversas instituciones financieras en el Banco Central Europeo y el Fondo Monetario Internacional. Actualmente es la responsable de la Unidad de Continuidad de Negocio en el Banco de España.

### Miguel Fusco

---

Licenciado en economía. Doctor de la Universidad de Buenos Aires (Área Administración). Lideró el equipo de Economía en AACREA y actualmente, se encuentra trabajando como Agribusiness Senior Account Manager en AON Reinsurance. Director Programa de Gestión Integral del Riesgo Agropecuario (Pro-GIRA, FCE – UBA).

### Roberto Armando García

---

Ingeniero Químico de la Universidad de Buenos Aires. Profesor titular regular del Grupo de Asignaturas del Área Matemática y de Métodos Cuantitativos en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires (FCE-UBA). Docente de posgrado de la Escuela de Negocios y Administración Pública y del seminario doctoral Modelos de Decisión aplicables a la Gestión en la FCE de la UBA

### Javier García Fronti

---

Profesor Titular de Matemática para Economistas y del Grupo de Asignaturas del Área Actuarial. Subdirector de la Maestría en Gestión y Análisis de Datos. Director del Centro de Investigación en Metodologías Básicas y Aplicadas a la Gestión (CIMBAGE-IADCOM) Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires.

### Verónica García Fronti

---

Doctora de la Universidad de Buenos Aires en Ciencias Económicas (UBA), subárea Administración. Ingeniera Química de la (UBA). Investigadora en el Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos aplicados a la Economía y la Gestión (CMA) perteneciente al instituto de la UBA IADCOM. Profesora adjunta regular del grupo de asignaturas: Análisis Matemático I, Análisis Matemático II y Álgebra en la Facultad de Ciencias Económicas de la UBA.

## Gustavo Krimker

---

Master of Science in Mathematics. Universidad de Regina, Canadá. Profesor Asociado Regular del Grupo de Asignaturas del Área Matemática de la Facultad de Ciencias Económicas de la UBA. Profesor Titular Ordinario de Análisis Matemático y de Álgebra y Geometría Analítica de la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional.

## Andrea Fabiana Lepera

---

Magister en Generación y Análisis de Información Estadística de la Universidad Nacional de Tres de Febrero. Doctoranda de la Universidad de Buenos Aires (UBA) área Ciencias Económicas (FCE) subárea Sistemas. Licenciada en Ciencias Matemáticas de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires. Profesora adjunta regular de Estadística de la FCE y Jefa de Trabajos Prácticos del Ciclo Básico Común de la UBA.

## Elba Font de Malugani

---

Contadora Pública. Posgrado en Capacitación Pedagógica Universitaria. Investigadora en el Centro de Métodos Cuantitativos aplicados a la Economía y la Gestión (CMA-IADCOM) y en el Instituto de Investigaciones Contables de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires (FCE-UBA). Coordinadora del Centro de Estudios de Ética Aplicada y Jefa del Departamento Educación a Distancia (IESE). Directora de la Escuela de Ciencias Económicas y del Gabinete de Informática (UMSA). Prof. Titular AH y Asociada Regular del Grupo de Asignaturas Área Matemática y Prof. Métodos Cuantitativos (FCE-UBA). Profesora Titular de Grado y Posgrado en Universidades Públicas y Privadas. Autora/Co-autora de libros/capítulos y expositora de ponencias en Congresos Nacionales e Internacionales.

## María Alejandra Metelli

---

Actuaria. Coordinadora Académica de la Maestría en Gestión económica y financiera de riesgos. Profesora Titular regular del Grupo de

Asignaturas del Área Actuarial y de Cálculo Financiero de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires (FCE– UBA). Profesora en Maestrías de la FCE de la UBA. Profesora de asignaturas de grado y posgrado en UCEMA, Investigadora categorizada y codirectora de Proyectos UBACYT. Autora de libros y publicaciones. Expositora en Congresos, Seminarios, Jornadas. Asesora de empresas de seguros. Consejera Titular del CPCECABA. Directora y Jurado de tesis de Maestría.

### Susana Clara **Olivera de Marzana** \_\_\_\_\_

Licenciada en Economía y Contadora Pública de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires (FCE-UBA). Profesora adjunta regular en el Grupo de Asignaturas del Área Actuarial. Profesora adjunta regular en el Grupo de Asignaturas del Área Matemática. Profesora asociada consulta en el Área Matemática. Profesora contratada para el Módulo Métodos Cuantitativos de la Carrera de Posgrado de Especialización en Administración Financiera.

Investigadora asociada en el Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos aplicados a la Economía y la Gestión (CMA) perteneciente al instituto de la UBA IADCOM. Ex Directora del Departamento de Matemática y ex Asesora de la Secretaría Académica de la FCE de la UBA.

### Sebastián A. **Rey** \_\_\_\_\_

Actuario con orientación en Economía de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires (FCE-UBA) y Master en Finanzas Aplicadas del ESE Business School. Investigador del Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos aplicados a la Economía y la Gestión (CMA-IADCOM) y ha desarrollado actividades de docencia en la FCE - UBA y la Universidad de los Andes de Chile. Ha publicado artículos de investigación en revistas internacionales especializadas.

### Gonzalo **Rondinone** \_\_\_\_\_

Doctor de la Universidad de Buenos Aires en Ciencias Económicas, subárea Administración. Licenciado en Economía y Master en Gestión Económica y Financiera del Riesgo de la Universidad de Buenos Aires.

Actualmente es especialista en Desarrollo Rural de la División de Desarrollo Rural, Recursos Naturales y Gestión de Riesgos por Desastres del Banco Interamericano de Desarrollo (BID) como parte de la iniciativa Agrimonitor cuyo objetivo es monitorear las políticas de apoyo a la agricultura en Latinoamérica y el Caribe.

### Carla Squillace

---

Licenciada en Economía de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires (FCE-UBA). Consultora Ministerio de Desarrollo Productivo. Becaria alumna estímulo del Proyecto: (UBACyT E008) “Evaluación de Riesgos Económico– Financieros del Cambio Climático en la Argentina”. Programación científica 2008-2010. Dirigido por María Teresa Casparri.

### Eduardo Tarullo

---

Licenciado en Economía y Actuario de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires (FCE-UBA). Docente en la FCE-UBA desde el año 1987 y Subdirector del Departamento Pedagógico de Matemática (FCE-UBA). Más de 25 años de experiencia en áreas técnico-actuariales y financieras, desarrollando, implementando y monitoreando planes estratégicos de negocios, M&A y nuevos productos. Ex CFO del grupo MetLife para Argentina y Uruguay y Latin America Chief Regional Actuary del grupo Zurich.

### Esteban Otto Thomasz

---

Es licenciado en Economía, Master en Administración y Phd. de la Universidad de Buenos Aires. Tiene una especialización en Planeamiento Urbano y Regional en el Massachusetts Institute of Technology, y ha realizado cursos de posgrado en adaptación al cambio climático y manejo de los recursos hídricos en la Universidad de Harvard. Actualmente es director del Programa de Investigación en Valuación de la Vulnerabilidad Socioeconómica al Riesgo Climático de la Universidad de Buenos Aires.

Ana Silvia **Vilker**

---

Doctora de la Universidad de Buenos Aires, área Ciencias Económicas, Licenciada en Economía, investigadora y profesora consulta adjunta de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires. Investigadora del Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos aplicados a la Economía y la Gestión (CMA-IADCOM) y del programa de Investigación en Valuación de la Vulnerabilidad Socioeconómica al Riesgo Climático de la Universidad de Buenos Aires.



ISBN 978-950-23-1960-7



9 789502 919607

**.UBA40**<sup>∞</sup>  
AÑOS DE  
DEMOCRACIA

**.UBA** *económicas*  
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS  
• 1913 - 2023 • 110 Años de  
Historia