Curso de Cálculo Financiero

Curso de Cálculo Financiero

Aída Beatriz Castegnaro

Reconocimiento

Mis agradecimientos en mi tránsito en esta Casa de Estudios:

-Al Dr. Oscar Murioni por haber sido mi profesor en oportunidad de haber cursado esta asignatura en mi rol de alumna .

-Al Dr. Hernán Ariel Steinbrum, con quien graduada como Contadora Pública, inicié un año después en el año 1983 mi carrera docente como Ayudante en esta materia. Un investigador permanente, con una didáctica asombrosa y un poder de síntesis que simplifica lo más complejo. Depositó su confianza y me dio la posibilidad de participar en cursos en instititutos, tales como Mercado de Capitales y Centro de Capacitación del Banco Central.

-Al Dr. Feliciano, Salvia a quien conocí como Jurado en mi primer concurso de la materia en 1983, que me dio la oportunidad de postularme como Profesora Adjunta en el año 1987 hasta la oportuna sustanciación del cargo por concurso, mi más profundo reconocimiento por sus valores humanos, su infatigable presencia y apoyo permanente.

-A todos los concurrentes de las Jornadas de Profesores de Matemática Financiera de todas las Universidades del país, que por más de 25 años se siguen sucediendo y nos seguimos reuniendo con el espíritu de compartir conocimientos y experiencias docentes.

-Al Dr. Angel Trossero, Titular de la Cátedra, autor junto al Dr. Murioni del libro actualmente denominado "Cálculo Financiero" cuando debía haber mantenido su nombre inicial "Tratado de Cálculo financiero" porque no hay tema financiero que no trate. Fue en mi época de estudiante, es y será el libro clásico obligatorio para los estudiantes de la materia.

-A la Dirección del Departamento Matemática Dra. María Teresa Casparri y Dra. Susana Olivera de Marzana quienes brindaron su confianza y me convocaron a participar como contenidista de la materia "Calculo financiero" para la cursada a distancia por internet, en la cual me desempeño actualmente como tutora, colaborando en el Capítulo "Reembolso de Préstamos", entre otros.

-Al Área Pedagógica de esta Facultad, que me acercó a través del "curso de posgrado de docencia universitaria" nuevas herramientas.

-A mis colegas de la cátedra.

-A mis alumnos y a todos los potenciales alumnos como vos, Sofía, que me obligan permanentemente a reconsiderar las estrategias de enseñanza y aprendizaje para salvar la problemática en la comprensión de este fragmento disciplinar.

Prólogo

Con respecto a este libro, es el resultado de una guía de ejercicios realizada hace ya 20 años en el transcurso de 1985 siendo Ayudante, en la que se fueron incorporando experiencias profesionales y como docente a través de los cursos en los que he dictado. Reconozco a mis fuentes inspiradoras, fundamentalmente quienes fueron mis maestros y con quienes seguí mi labor docente. El parecido resulta inevitable respecto de quienes debo lo aprendido. Reitero conceptos en determinados ejercicios, a los fines de aprehenderlos comprensivamente En la interpretación fáctica de las operaciones se pretende acercar los conocimientos disciplinares con esas aplicaciones del mundo real y posibilitar aún más los esquemas de comprensión.

Entiendo como necesaria la integración de los conocimientos teóricos que están tratados en el libro con lo que resulta ser la práctica profesional. Por tal razón, como forma de acotar el desarrollo de los contenidos se van acotando del marco normativo que lo sustenta, desechando otros por no ser de aplicación, salvo en algunos casos que si bien no son aplicables en el mundo real son disparadores que estimulan el razonamiento y la interpretación. Así, traté de entretejer distintos conocimientos interdisciplinares que se conectan entre sí dándole a los contenidos un enfoque profesional en un marco integrador. Me refiero al "Derecho" quien representa el conjunto de normas legales por la que se rige una operación financiera, la que debemos "modelizar matemáticamente" a través del "Cálculo Financiero" de la rama "Matemática". Éste nos aporta las herramientas de valuación. Posteriormente a través de la "Contabilidad" procedemos a su posterior registración contable, valuación y exposición.

Este libro se encuentra especialmente orientado a los alumnos universitarios de un curso de cálculo financiero que también incluye conceptos introductorios de matemática actuarial. Además, puede ser utilizado como elemento de consulta en cursos de administración financiera y en todos aquellos que se trate de valuación de activos y pasivos financieros

Trabajo en gran parte del libro con la construcción y evaluación de modelos financieros en condiciones de certeza dando un enfoque en profundidad e integrador matemático-normativo a temas tales como la capitalización y actualización de Capitales Únicos o Múltiples, tasas de interés, tasas de descuento, relaciones entre tasas, reembolso de préstamos, devengamiento de operaciones pasivas, activas y de inversiones a largo plazo; empréstitos y depreciaciones de activos. También se aborda la Evaluación de Proyectos de inversión y financiación, pues nos ayuda a sentar bases a los fines de interpretar la tasa de interés implícita que resulta de un proyecto, la que comúnmente se denomina en el mercado TIR y según normas del Banco Central CFT para el caso de operaciones activas.

Interpretaremos las distintas tasas expresadas en cualquier contrato: A) la contractual, denominada así por ser la tasa de referencia de cualquier contrato, que puede estar expresada en términos de TEM, TEA o bien TNA, y B) la implícita de la operación, que resulta de los flujos financieros de caja.

Se introduce en la Parte II el escenario de variaciones del poder adquisitivo de la moneda. Se comparan valores nominales y reales, se introducen índices para el cálculo de los factores de indización o corrección monetaria, pudiendo trabajar con los Indicadores Económicos publicados por el INDEC o bien los publicados por B.C.R.A., tales como el CER, el CVS para ajustar operaciones de inversión o financiación. De capital único o de capitales múltiples.

Luego, se trabaja con el coeficiente riesgo como componente de la tasa de interés. Posteriormente, se tratan a las operaciones financieras aleatorias de capitalización y a las operaciones actuariales comprendiendo aquellos seguros sobre la vida en caso de vida, ya sea de capital eventual único o eventuales múltiples en forma de renta vitalicia completa o temporaria y seguros sobre la vida en caso de muerte.

Finalmente se dedica el último capítulo para presentar un compendio de las fórmulas más usuales.

Con las herramientas suficientes como para poder confrontar el "ser" y el "debe ser" en nuestra disciplina se abordarán pequeños estudios de casos en los que se representa una escenificación real a los fines de su aplicación e interpretación matemática-normativa.

Los eruditos en la materia observarán que he vulnerado la nomenclatura de uso universal. A los fines pedagógicos he tratado de expresarla en forma más simple, sencilla y linealmente. He tratado de exponer al lado de la notación utilizada cuál es la nomenclatura aceptada en la literatura a los fines de salvar dicha trasgresión.

Asimismo, en algún caso he desarrollado fórmulas distintas a partir de planteos iniciales diferentes para que el lector, en el caso de confrontar con otros contenidos, pueda observar la variedad de fórmulas de valuación para un mismo problema; tal es el caso de rentas variables en progresión geométrica, o bien el saldo de deuda en préstamos.

Indice Sistemático

Pág.

Parte I - El Modelo Básico

I.1. Operaciones financieras simples - Singulares - De capital único

Capítulo I - Régimen de capitalización a interés simple

CAPÍTULO IX - REEMBOLSO DE PRÉSTAMOS

CAPÍTULO X - EMPRÉSTITOS

CAPÍTULO XI - DEVENGAMIENTO DE CAPITALES

CAPÍTULO XII - DEPRECIACIÓN DE ACTIVOS

CAPÍTULO XV - OPERACIONES INDIZADAS

PARTE III - OPERACIONES ALEATORIAS (NO CIERTAS)

CAPÍTULO XVI - TASA DE INTERÉS CON RIESGO

Pág.

ESQUEMA DE OPERACIONES ALEATORIAS (NO CIERTAS), 465

CAPÍTULO XVII - OPERACIONES ACTUARIALES

Pág.

CAPÍTULO XVIII - OPERACIONES DE CAPITALIZACIÓN

Parte I

El Modelo Básico

El cálculo financiero

El cálculo o la matemática financiera integra la ciencia formal y se ocupa de "valuar". Podríamos decir que se trata de "matematizar el análisis económico-financiero de las operaciones financieras".

Nos lleva a la comprensión de los modelos matemáticos sobre los que se sustentan las operaciones financieras y por otro lado, nos da los conocimientos necesarios para generar otros o comprender otros que se desarrollen en el futuro.

Por tal razón, la matemática financiera nos permite estudiar las operaciones financieras y las leyes a las que están sometidas.

Dada sus características, es una asignatura que dentro de la Facultad de Ciencias Económicas forma parte del "área Matemática" pero se conecta con otros fragmentos disciplinares retroalimentándose de otras asignaturas de las áreas de Derecho y Contabilidad, pues son aplicaciones que hace a la interpretación de las legislaciones , normas, decretos, circulares... sobre las que se sustentan.

Trataremos de enmarcarlas en ese marco real a los fines de una mejor comprensión , aplicando cada conocimiento en un espiral, pues cada herramienta de valuación aplicada en una operación concreta va a ir reforzando los conocimientos y desarrollando habilidades para adquirir un pensamiento práctico que ayuda a la interpretación e intervención sobre la realidad.

Los contenidos irán desarrollándose paulatinamente hasta que su articulación unos con otros, nos obliga a poner en funcionamiento un complejo proceso del pensamiento, que hace a la buena asimilación y acomodación de los mismos sin el cual no llegaremos a la comprensión que va más allá del saber.

Por eso, cada tema de esta pequeña guía deberá inevitablemente ser confrontado, sometido a análisis y debe constituir un disparador para abordar las fuentes bibliográficas y obligarnos para cada contenido a:

- confrontar ideas previas
- reflexionar
- profundizar
- criticar
- comparar

- analizar
- decidir
- interpretar
- resolver
- argumentar
- formular hipótesis
- clasificar
- traducir lingüísticamente el lenguaje matemático de las fórmulas
- ...

El desafío se encuentra en intentarlo y el resultado puede ser exitoso y podemos decir "hemos alcanzado la ilustración". Es mi propósito, y espero sea el suyo.

Objetivo

✔ Modelizar matemáticamente cualquier operación financiera. Ello lleva a la aplicación de todas las operaciones del pensamiento que llevan a armar las estructuras financieras aplicables para la resolución de problemas concretos presentes o futuros.

Aportes del Cálculo Financiero en la Contabilidad

A modo de síntesis, exponemos una parte de los Estados Contables de cualquier ente en donde se volcaron algunas cuentas del Estado de Situación Patrimonial para comprender una vez más el aporte de nuestra asignatura en la Contabilidad.

Rubros contables	*Aportes de nuestro cálculo financiero*	Rubros contables	*Aportes de nuestro cálculo financiero*
Activo		*Pasivo*	
Activo Corriente Caja y Bancos - Dep. en c/c	• Cálculo de los Intereses Devengados en la cuenta a la vista (Com. "A"3052 BCRA que permite su aplicación) Cap.:-Capital Unico: Regímenes de capitalización-Implica manejar tasas pasivas Cap.:-Capital Unico-Tasas de Interés	*Pasivo Corriente* - Deudas Comerciales - Préstamos - Remuneración y Cargas Sociales	• Deudas: Cap. Cap. Múltiples: Reembolso de Préstamos • Las contribuciones definidas como descuento aplicado sobre las remuneraciones del personal son las que integran el Fondo Acumulado de una AFJP. Posteriormente constituyen el Valor Actual Actuarial de lo que se denomina la "Renta Vitalicia Previsional" Cap.- Operaciones Actuariales

Rubros contables	*Aportes de nuestro cálculo financiero*	Rubros contables	*Aportes de nuestro cálculo financiero*
Activo		*Pasivo*	
		- Cargas Fiscales	• Cálculo de moratorias fiscales constituyen aplicaciones de rentas y sistemas de préstamos. Cap. Rentas y Reembolso de Préstamos
Activo Corriente/ No Corriente (si se espera que permanezcan menos o más de 1 año) • **Cuentas Por Cobrar —en $ o ME—**		*Pasivo Corriente / No Corriente* Deudas - Deudas Comerciales - Préstamos	• Deudas: Cap. Cap. Múltiples: Reembolso de Préstamos
- Créditos por ventas - Deudores	• Cálculo de los Precios Contado y Precios Financiados aplicando regimenes de capitalización para la venta de los bienes de cambio u otros. Cap.:-Capital Unico: Regimenes de capitalización y Tasas de Interés.	- Cargas Fiscales	• Cálculo de moratorias fiscales constituyen aplicaciones de rentas y sistemas de préstamos. Cap. Rentas y Reembolso de Préstamos
- Obligaciones a cobrar	• Cálculo de los valores actuales de documentos o facturas, cesión de créditos en general, que se negocien, aplicando modalidades de descuento Cap: Capital Unico-Regímenes de Actualización	- Previsiones	• Reexpresión de demandas, honorarios. Cap.Relaciones entre tasas-Tasa real de interés.
- Deudores Morosos	• Cálculo de Refinanciaciones –Plan de pagos Cap: Capitales Múltiples-Reembolso de Préstamos	- Obligaciones Negociables	• Determinación del Valor de Rescate en cualquier momento, de los cupones que van cancelando la obligacion negociable, de su TIR... Cap.-Empréstitos
- Deudores en Gestión Judicial	* Cálculo de demandas judiciales. Recálculo de deudas de acuerdo a sentencias judiciales sobre tasas de interés		
Otros Créditos			

Rubros contables	*Aportes de nuestro cálculo financiero*	Rubros contables	*Aportes de nuestro cálculo financiero*
Activo		*Pasivo*	
Inversiones - Depósitos a caja de ahorro - Depósitos a Plazo fijo - Intransferibles/ Transferibles: - a tasa de interés fija - con cláusula de interés variable - Depósitos de títulos valores - Con cláusula CER - Préstamos - Inmuebles y Propiedades - Valores Mobiliarios - Títulos Valores	• Cálculo de los Interes de depósitos a plazo; ya sea de caja de ahorro o de un depósito colocado con o sin retiro de intereses Cap: Capital Unico-Regimenes de Capitalización. • Aplicación normativa Cap.:Capital Unico-Regímenes de Capitalización y Tasas. • Cálculo del CER. • Cálculo de Series Estadísticas que pueden ser aplicadas para algún tipo de depósito. Cap. Tasa Real de interés • Cálculo de Valor actual de un préstamo como operación de inversión. Cap: Capitales Múltiples-Reembolso de Préstamos • Evaluar como proyecto de inversión Cap.: Evaluación de Proyectos • Cálculo de Cupones financieros, de amortización de títulos públicos, obligaciones negociables; Paridad, Valor Técnico; TIR ex ante y ex post... Cap: Empréstitos – Proyectos de Inversión • Cálculo de valores contables en función a la TIR. En el caso de encuadrarse como Inversiones en títulos de deuda a ser mantenidos hasta su vencimiento y no afectados por coberturas: Cap. Devengamiento en Capitales Múltiples-Inversiones a Largo Plazo	*Patrimonio Neto* - Distribución de Resultados	• Cálculo de distribución de resultados. Cap: Capital Unico-Regímenes de Capitalización

Rubros contables	*Aportes de nuestro cálculo financiero*	Rubros contables	*Aportes de nuestro cálculo financiero*
Activo		*Pasivo*	
Bienes de Uso - bienes tangibles	• Cálculo de las depreciaciones periódicas, acumuladas y los resultantes valores contables. Cap: Depreciación de Equipos		
Activos Intangibles	• Cálculo de las depreciaciones periódicas, acumuladas y los resultantes valores contables. Cap: Depreciación de Equipos		
Total del Activo	• En cada uno de los rubros que lo conforman se utilizan tasas de interés o de descuento, se relacionan tasas, fijas o variables, nominales o efectivas anuales .... Cap:Tasas de Interés – Tasas de descuento y Relaciones entre las distintas tasas de interés y de descuento. • Se reexpresan por algún factor de ajuste. Cap. de Operaciones Indizadas en Capitales Unicos o Múltiples. • Si se trabajan a valores constantes deberán corregirse por el efecto inflacionario. Se manejan tasas real de interés. Cap. tasa real de interés. • Se pretende incluir el factor riesgo en una operación partiendo de una tasa libre de riesgo. Cap. Tasa de interés con riesgo	Total del Pasivo más Patrimonio Neto	• También se utilizan tasas de interés o de descuento, se relacionan tasas., fijas o variables, nominales o efectivas anuales .... Cap:Tasas de Interés – Tasas de descuento y Relaciones entre las distintas tasas de interés y de descuento
• Medición Contable (Resolución Técnica N° 17- CPCECABA) también prevé casos en que no estuviese disponible el precio de venta o el precio de compra para operaciones de contado, para eliminar el costo financiero incluido en la registración contable la utilización de factores de actualización a una tasa de interés Cap. Tasa de interés – Regimenes de Actualización • Reexpresión de activos y pasivos a un momento dado: Distribución de intereses Cap. Devengamiento de capitales			

- En cálculo financiero nosotros tendremos la función de representar matemáticamente todo fenómeno del mundo real, y por ello debemos encontrar las herramientas de valuación.

- Hemos hecho una apretada síntesis de algunas operaciones financieras que son sometidas a su registración, valuación y exposición a lo largo del presente trabajo y constituye un disparador. No obstante, las valuaciones realizadas en este libro son simples y sientan bases para construir otras.

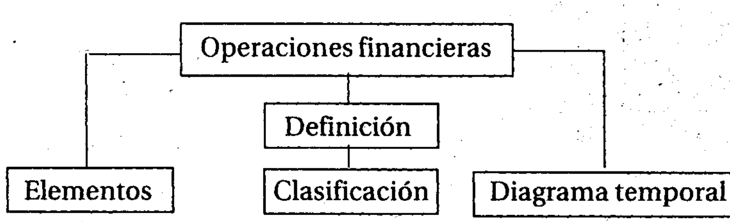
- Si bien, no se encuentran contempladas todas las cuentas, se representó simplificadamente un modelo de Estados Contables y Estado de Resultados al que en forma conjunta se lo enlaza con las aplicaciones en nuestro cálculo financiero, en donde observaremos continuamente la acción interdisciplinaria entre el Derecho —fuente de las leyes, resoluciones...— que permiten la regulación de las operaciones financieras, el modelo matemático de valuación de estas operaciones, (nuestro Cálculo Financiero) y la Contabilidad referida al soporte de las operaciones y su exposición.

- El auditor externo emite un informe de acuerdo al examen realizado sobre los estados contables opinando que presentan razonablmente, en todos sus aspectos significativos, la situación patrimonial y los resultados de sus operaciones.

A nosotros nos compete aplicar los conocimientos matemático-financieros adquiridos con todas las herramientas de valuación.

LA OPERACIÓN FINANCIERA

Red de conceptos



Objetivos:

- Reconocer una operación financiera.
- Describir los elementos de una operación financiera.
- Comprender la importancia del eje de tiempo para visualizar las operaciones financieras y plantear la ecuación de valor en cualquier momento.

Definición:

Son operaciones financieras aquellas que por *transcurso del tiempo* generan una *variación cuantitativa del capital.*

También se la puede definir como un intercambio de dos capitales financieros, o bien de dos cuantías en dos momentos distintos.

Así nace el concepto de capital financiero, que es un concepto con doble dimensión:

1) la cuantía y

2) en qué momento estará disponible.

Entendiendo que la cuantía no solo es una suma de dinero, sino que puede ser un documento, un título, o sea, un instrumento financiero.

Elementos de una operación financiera

- *Co: Capital* ➻ valor al inicio de cierto intervalo de tiempo. El concepto financiero del capital es toda suma de dinero no consumida, sino que ha sido ahorrada y colocada en el mercado de servicios financieros con la esperanza de reunir un mayor valor al cabo de un tiempo determinado.
  Implica el cambio de una satisfacción presente que se renuncia con la esperanza de una recompensa en el futuro, es el ánimo de obtener algo más.
  El capital es un stock que será diferente al inicio y al fin de un período dado y nos interesará analizar en qué régimen financiero está afectado dicho capital, cómo es su dinámica, cómo se generan los flujos. Como todo stock es una foto en un momento dado, como lo son los estados contables de una sociedad física o jurídica.
  El concepto de *Interés* como variación absoluta es la diferencia entre el capital al final, también llamado monto o montante y el capital al inicio. En líneas generales, se puede decir que el interés es la suma pagada por el uso del capital tomado en una operación de financiación ó la suma cobrada como retorno de una operación de inversión.

- *i: tasa de interés* ➻ precio por el alquiler del capital. Puede contener otros elementos tales como: riesgo por la pérdida del capital, la naturaleza de la operación, el plazo de la misma la incidencia de la inflación.
  También se define en términos económicos como la tasa de cambio de consumo presente por consumo futuro.
  Esa tasa de intercambio de unidades monetarias actuales por unidades monetarias futuras tiene una antigüedad que según algunos autores la atribuyen al año 1800 a.C., cuando en Babilonia se determinaba un tipo de interés máximo de los préstamos, en donde los de-

dores de los mismos en garantía de dichos créditos hipotecaban sus propiedades y sus cónyuges.
La teoría del interés está basada sobre un hecho: la productividad del capital, entendiendo como que esa cuantía colocada por un determinado tiempo en una operación financiera es capaz de sufrir una variación cuantitativa. Un colocador de fondos no aceptará ceder a otro el derecho a explotar su capital si no espera recibir a cambio una tasa de interés, ya que la justificación de esa tasa está dada por las siguientes razones:

- posposición del consumo
- coste de oportunidad
- riesgo de no pago
- protección del poder adquisitivo

❒ *n:* Esta unidad de medida es el número de períodos. Entre cada uno de ellos la diferencia es constante.
Surge el concepto de "período de capitalización": diferencia constante entre dos momentos sucesivos de la ley de capitalización. Esos momentos corresponden generalmente al momento en que se diferencian los dos regímenes de capitalización —retiro o reinversión periódica de intereses—. Es el intervalo al final del cual se retiran o se reinvierten los intereses. Permite trasladar un capital presente al futuro luego de *n* períodos de capitalización.
También aparece el concepto de "período de actualización" que permite trasladar un capital futuro hacia el presente *n* períodos de actualización.
Se debe tener presente que tanto *n* como *i* deben ser homogéneos, es decir que el intervalo de tiempo al que se refiere el tanto de interés sea el mismo que el intervalo temporal, eso quiere decir que las operaciones financieras son *sincrónicas*, ejemplo tiempo de colocación mensual y la tasa de interés también mensual. Caso contrario, habrá que adecuar la tasa de interés al intervalo temporal y así la convertimos en operación sincrónica.

Diagrama temporal o eje de tiempo y capitales

Las operaciones financieras se expresan en una escala de tiempos y capitales y nos permite analizar la evolución de un capital a través del tiempo. Algunos denominan a este eje de tiempos y capitales, diagrama temporal, o bien horizonte de la operación o vector de flujos de una operación dada.

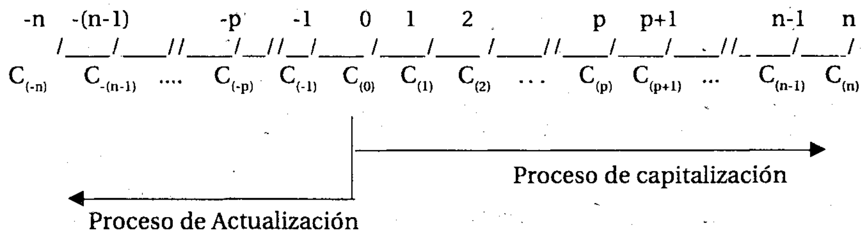
Un diagrama temporal es necesario realizarlo *siempre* pues:

➢ Ayuda a visualizar los valores que van tomando un capital o una sucesión de capitales en distintos momentos pues se va representando la dinámica de los mismos.

➢ Ayuda a encontrar la solución ante un problema determinado pues ubica en el tiempo los capitales y nos permite establecer la equivalencia financiera. La equivalencia financiera significa que en el momento del cálculo o momento de referencia, el capital o los capitales que se sustituyen igualan al valor de los capitales transformados.

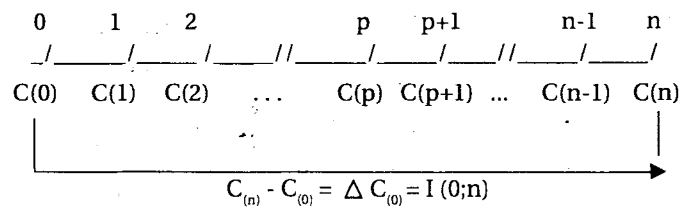
- Ayuda a establecer la equivalencia financiera y plantear la ecuación del valor en un momento dado, trasladando los capitales a un momento de referencia.

A continuación dibujaremos el diagrama temporal con las cuantías considerando la evolución de **un solo capital** —C_0—. Además, resulta de suma utilidad disponer también linealmente las fechas si se las tuviese. En el mundo real, generalmente se trata de fechas y capitales.



El Proceso de capitalización: considera el eje de tiempo y capitales hacia la derecha, permite encontrar el valor final o monto o montante del capital C_0 del momento 0 al momento 1, 2, p, ó al momento n. En el caso de sucesiones de capitales también traslada financieramente los capitales hacia el futuro.

Se expondrá a continuación la simbología utilizada.



El Proceso de actualización: considera el eje de tiempo y capitales hacia la izquierda, permite hallar el valor actual de un capital N con vencimiento futuro 1, 2, p ó n períodos antes de su vencimiento. En el caso de sucesiones de capitales futuros también se trasladan financieramente los capitales futuros hacia el presente.

Se expondrá a continuación la simbología utilizada en las dos formas más usuales.

-n	-(n-1)		-(p+1)	-p		-2	-1	0
C(-n)	C-(n+1)	...	C-(p+1)	C(-p)		C(-2)	C(-1)	C(0)
V_n	V_{n-1}		V_{p+1}	V_p		V_2	V_1	N

$$C_{(0)} - C_{(-n)} = \nabla C_{(0)} = D(0;n)$$

$$N - V_{(n)} = \nabla N = D(0;n)$$

Clasificación de las operaciones

- *Considerando su variación cuantitativa:*

  Simples: se refieren a la variación cuantitativa de un solo capital de inversión o de financiación. También se puede decir que hay una sola prestación y una sola contraprestación asociada a la misma.

  Complejas: se refieren a la variación cuantitativa de una sucesión de capitales o rentas. Por tal razón un conjunto de contraprestaciones estarían asociadas a una prestación única, o viceversa.

- *Considerando sus posibilidades de concreción:*

  Ciertas: dependen del tiempo para su realización. En general son modelos determinísticos o clásicos con sus funciones financieras tradicionales en donde se consideran que por el solo transcurso del tiempo las mismas se van produciendo.

  Aleatorias (No Ciertas): dependen del tiempo y de un suceso aleatorio. Ellas son:

  - operaciones de empréstitos con sorteo;
  - operaciones de capitalización;
  - operaciones de seguros sobre la vida en cuyo caso se encuentra asociada a la función financiera una función biométrica.

- *Considerando la necesidad de colocar u obtener cuantías:*

  Operaciones de inversión para una empresa o persona física que tiene excedentes de dinero que en el caso de ser colocados en una entidad financiera constituyen las "Operaciones Pasivas" de esta entidad.

  Operaciones de financiación para una empresa o persona física que necesita una cuantía determinada. La asistencia que le brinda la entidad financiera constituyen las "Operaciones Activas" de esta entidad cuya capacidad prestable depende de las operaciones pasivas que realice y de los encajes legales y técnicos.

A modo ilustrativo podemos hacer un pequeño esquema de los diferentes entes económico-financieros con los que se concretan operaciones ciertas y no ciertas aleatorias:

- Bancos
- Compañías Financieras, Cajas de Crédito
- Sociedades de Crédito para consumo
- Mercado de Valores
- Seguros
- Sociedades de Capitalización
- Soc. de ahorro y préstamo
- Compañías de fondos Comunes de Inversión

De otro modo, podemos decir que gran parte de las operaciones que analizaremos se generan en los:

- *mercados financiero y cambiario o de divisas*
- *mercados de empréstitos de renta fija*
- *mercados de empréstitos de renta variable*

Las operaciones realizadas en el mercado financiero y por ende, las podemos valuar son entre otras:

✔ **Depósitos en entidades financieras**

Constituyen parte de las Operaciones Pasivas de una entidad financiera. Algunas de ellas son:

Depósitos en moneda nacional o extranjera a la vista: depósitos en los que la entidad financiera receptora de fondos de sus clientes, está obligada a su devolución:

- cuando el depositante lo exija ➻ las cuentas a la vista
- cuando vence el plazo de la operación ➻ cuentas a plazo

- *Cuenta Corriente Bancaria:* Se admite el reconocimiento de intereses. Constituyen movimientos múltiples realizados por el cliente en una entidad financiera relacionados a extracciones y depósitos en cheque o efectivo y todos los servicios adicionales que se vinculen con la cuenta corriente, tales como las acreditaciones y los débitos en concepto de préstamos, compra y venta de moneda extranjera, títulos, comisiones por servicios. Constituye cuenta a la vista.
- *Caja de Ahorro común/ especial.* La disponibilidad del dinero es en el momento que se necesite, no así el Depósito a Plazo fijo.
- *Plazo Fijo Transferible.* Se admite la renovación automática —mediante autorización por escrito de la reinversión del monto— por períodos iguales o distintos hasta un nuevo aviso por escrito o presenta-

ción del certificado para su cobro. Paga más interés que el otro depósito a plazo (caja de ahorro), pues tiene un vencimiento determinado y no se puede disponer antes del mismo, salvo que se pueda negociar el depósito por su carácter de transferible.

A continuación en el cuadro que se expone a continuación detallamos la normativa de ciertas operaciones pasivas que se realizan o se realizaron a través de una entidad financiera, aclarando al respecto que las normas se modifican continuamente y por lo tanto las operaciones financieras respectivas. Podremos ver aspectos que estudiaremos más adelante, ej. modalidades de percepción de los intereses, divisor utilizado...

Normativa sobre OPERACIONES PASIVAS DE UNA ENTIDAD FINANCIERA

Cuentas Corrientes Bancarias -Com."A"3075- Com "A" 4022 -30/9/2003

- Débitos en cuenta -con autorización expresa del cliente- de conceptos tales como:

Pagos de préstamos, alquiler de cajas de seguridad.

Servicios de cobranza por cuenta de terceros: impuestos, tasas, contribuciones, facturas de servicios, resúmenes de tarjetas de crédito.

- Comisiones pactadas libremente al momento de la apertura de la cuenta o bien luego, en donde se deben consignar importes o porcentajes.
- Intereses: Podrán reconocerse intereses sobre los saldos acreedores de la cuenta corriente, en las condiciones que libremente se convenga con los clientes.
- Liquidación de los intereses: y capitalización por períodos vencidos, no inferiores a 30 días ni superiores a un año.
- Divisor fijo: 365 días.
- Expresión y publicidad de las tasas: en pizarras, publicidades realizadas en distintos medios... se expondrán la TNA y la T.E.A., en % con dos decimales.

Caja de Ahorro -Com. "A"3336 -27/09/2001

- Titulares: Personas Físicas
- Moneda: Pesos - Dólares estadounidenses- Otras monedas
- Retribución: Intereses: libremente entre las partes.

Se liquidan por períodos vencidos no inferiores a 30 días y se acreditan en la cuenta en la fecha que se convenga.

Se informará qué saldo mínimo se requiere para la liquidación de intereses.

- Retribución adicional: podrá ser pactada especificando claramente en el contrato.
- Comisiones: pactadas libremente al momento de la apertura o bien luego, por los servicios que preste la entidad. Deben detallar las comisiones y gastos, mencionando importe y porcentajes, así como la fecha y la periodicidad de los débitos.
- Convenios para formular débitos en cuenta de la misma naturaleza que los descriptos en cuenta corriente.

A Plazo Fijo - Com."A"3043-20/12/99 - Com. "A"3660/2002 - Com. "A"3485/2002 y Com."A"4140/2004

- Titulares: Personas Físicas o Jurídicas.
- Renovación Automática: en caso de un depósito en que el inversor decide dicha cláusula, en el instrumento deberá estar inscripta la leyenda "Renovación Automática". La reinversión podrá comprender los intereses devengados que se capitalizarán o no incluirse y por lo tanto el cliente deberá autorizar en que cuenta se acrediten dichos intereses.
  La autorización regirá hasta nuevo aviso del inversor sea por escrito o por otro medio que haya convenido o hasta la presentación física en el lugar para su cobrar al vencimiento.
- Denominación de los certificados: "Certificado de Depósito a Plazo fijo nominativo Intransferible".
- "Certificado de Depósito a Plazo fijo de títulos valores públicos nacionales" siempre que cuenten con oferta pública autorizada por la C.N.V., "Certificado de Depósito a Plazo fijo con cláusula de interés variable"... "Certificado de Depósito a Plazo fijo nominativo transferible", en este último caso a pedido del tenedor la entidad financiera emisora hará constar en el reverso del certificado la autenticidad del documento y que el depósito se encuentra asentado en los registros de la entidad financiera.
- Moneda: Pesos - Dólares estadounidenses y euros - Otras monedas, respetando la misma moneda para las cancelaciones totales o parciales de esta inversión.
  * Por Com. "A" 4140 del 14/05/2004 se deja sin efecto la captación de "Depósitos e Inversiones a Plazo" relativo a depósitos a plazo fijo en dólares liquidables en pesos.
- Retribución:
- Depósitos a tasa fija: la que libremente se haya convenido
- Depósitos con cláusulas de interés variable (en pesos o dólares estadounidenses): se compone de:
  - retribución básica: equivalente a: 1) la tasa de interés que surja de las encuestas de B.C.R.A. (en pesos y dólares) de :
    a) los depósitos a plazo fijo de 30 días o más promedio;
    b) los préstamos a titulares del sector no financiero o financiera;
    c) las obligaciones contraídas con bancos del exterior;
    d) la ofrecida entre bancos -Buenos Aires.
  2) LIBOR para los segmentos de 30 días o más. Fijada la tasa (2 a 5 días hábiles bancarios inmediatos anteriores a la fecha de inicio de cada período) debe permanecer invariable por un lapso no menor a 30 días.
  - retribución adicional: libremente convenida. Fijada la cantidad de puntos adicionales éstos deberán mantenerse durante el plazo total que haya sido pactado.
- Liquidación: Los intereses se calculan desde la fecha de recepción de la imposición o bien del vencimiento del certificado hasta el día del vencimiento de la imposición.
  En el caso de Depósito de Títulos: se calculan los intereses sobre los valores nominales.
- Pago:
  - imposiciones a plazos inferiores a 180 días; se cancelan al vencimiento final.
  - imposiciones a plazos de 180 días o más: se admite el pago periódico de los intereses devengados con periodicidad no inferior a 30 días.

- Plazo Mínimo de imposición según Comunicación "A" 3485 del 22/02/2002
  - Depósitos a tasa de interés fija: (en pesos o moneda extranjera):
    Intransferible: 7 días
    Transferible: 30 días
  - Depósitos de títulos valores públicos y privados: libre
  - Depósitos con cláusulas de interés variable: 120 días. Los plazos mayores deben ser múltiplos del superíodo de cal cómputo elegido para determinar la tasa aplicada.

  Los depósitos intransferibles no podrán retirarse total o parcialmente antes de su vencimiento.

Resulta interesante comentar que por Resolución General 399 del año 2002 se modificó el artículo 62 del Cap. VI de las Normas NT 2001 disponiendo que ya que el BCRA autorizó el plazo mínimo de 7 días (antes era 30 días) para la realización de operaciones financieras; en consecuencia corresponde adecuar el plazo a las normas NT 2001 de la C.N.V. Ello implica que en todos los casos "los valores negociables deberán emitirse por un plazo de amortización no inferior a 7 días".

- Depósitos con cláusula del CER (Intransferibles o Transferibles) dispuesto por Com."A"3660 del 12/07/2002

  Agregados a los denominados Certificados de Depósito a Plazo Fijo Nominativo Intransferible, los Certificados de Depósitos de Títulos Públicos Nacionales, los Certificados de Depósito a Plazo Fijo Nominativo con cláusula de interés variable.
  - Especifica la norma que el importe del depósito se actualizará mediante la aplicación del valor del CER que surja de comparar los índices del día bancario anterior a la fecha de imposición y el igual antelación al de la fecha de vencimiento.
  - Moneda :Pesos
  - Tasa: libre entre las partes
  - Plazo: mínimo 90 días.

Inversiones A Plazo –Com. "A"3043/20/12/99

- Moneda: Pesos –dólares estadounidenses y euros.
- Instrumentados como certificados nominativos transferibles o intransferibles.
- Liquidación de los intereses y pago:
  - Se cuenta desde la fecha de recepción de la inversión o desde el vencimiento anterior de la misma hasta el día del vencimiento de esta imposición o de cada subperíodo. El pago se realizará al vencimiento final, o si se conviene periódicamente, como mínimo cada 30 días.
- Modalidades:
- *Inversiones a Plazo Constante*:
  - Plazo mínimo: 180 días.
  - Titulares: Inversores calificados: tales como los gobiernos nacional, provincial, municipal, ministerios s, empresas y sociedades del estados entre otros, los fondos comunes de inversión, los fondos de jubilaciones y pensiones y las administradoras, determinadas personas jurídicas y físicas cuyas imposiciones superen un capital de $ 100.000.
  - Tasa de interés: libremente convenida entre las partes. Puede ser fija o variable. Cuando se va repactando, se pueden aplicar margenes preestablecidos (spreads).

- *Con opción de cancelación anticipada:*
  - Plazo mínimo: 180 días con posibilidad de cancelación anticipada. Sólo podrá ejercerse ese derecho una vez que haya pasado el lapso que se haya convenido no inferior a 30 días desde el inicio de la operación.
  - Titulares: Inversores calificados tales como los gobiernos nacional, provincial, municipal, ministerios, empresas y sociedades del estados entre otros, los fondos comunes de inversión, los fondos de jubilaciones y pensiones y las administradoras, determinadas personas jurídicas y físicas cuyas imposiciones superen un capital de $ 100.000
  - Tasa de interés libremente convenida entre las partes.
  - Precio de la opción: deberá estar especificada en el contrato y puede ser una suma fija desembolsable al inicio de la operación o bien el valor de la inversión en el momento del ejercicio del derecho de cancelación anticipada, detallando la manera de determinación.
- *Con opción de renovación por plazo determinado:*
  - Plazo mínimo: 90 días. Puede ser extendido por un plazo predeterminado fijado contractualmente. Dicha renovación podrá ser solicitada por el titular que tiene derecho a ejercer la opción.
  - Titulares: Inversores calificados, ya citados: cuando se convenga que la entidad posea el derecho de renovar la inversión o bien Cualquier Persona física o jurídica en el caso de que solo el inversor posea el derecho de renovación.
  - Tasa de interés: libremente convenida entre las partes.
  - Precio de la opción: estará establecido en el contrato la suma fija que será necesario desembolsar al momento de la inversión, como incremento o disminución del capital colocado. Alternativamente podrá expresarse como disminución o incremento, según corresponda, respecto de la tasa de interés por el período inicial.
- *Inversiones a Plazo Con Retribución Variable:*
  - Plazo mínimo: 180 días. Puede cancelarse anticipadamente.
  - Retribución: Variable. En función de la proporción que se concierte respecto de las variaciones que registren en el precios de los activos o indicadores, tales como títulos públicos nacionales, extranjeros, índices bursátiles de Buenos aires, Nueva York, San Pablo, Londres, productos básicos, oro, petróleo, trigo, maíz, soja, aceite; monedas, tasas libor, las que elabora y publica el Banco Central: BADLAR (por depósitos a Plazo Fijo de más de $ 1.000.000), BAIBAR (aceptada entre bancos privados) y la BAIBOR (ofrecida entre bancos).
  - Deberá como cláusula en el contrato, hacer constar la expresión matemática que será utilizar para la determinación de dicha retribución. Que se calculará sobre esa variación de precios que haya experimentado el activo elegido hasta el vencimiento de la inversión o hasta la fecha por la que el inversor opte, si éste cuenta contractualmente con ese derecho.

Depósitos Especiales – Com. "A" 4022-30/9/2003

- Cuentas a la vista en moneda extranjera

- Titulares: Organismos o entes oficiales a cargo de ejecución de convenios de préstamos o donación suscriptos con organismos multilaterales de crédito para la financiación de Proyectos de Inversión.
- Moneda: Dólares estadounidenses u otras monedas extranjeras.

- Retribución: Intereses: libremente entre las partes.
  Se liquidan por períodos vencidos no inferiores a 30 días y se acreditan en la cuenta en la fecha que se convenga.
  Se informará qué saldo mínimo se requiere para la liquidación de intereses.
- Comisiones: pactadas libremente al momento de la apertura o bien luego.

- Cuentas Especiales para garantías de operaciones de futuros y opciones
- Titulares: Mercados autorregulados sujetos al control de la Comisión Nacional de Valores.
- Moneda: Dólares estadounidenses

- Cuentas a la vista especiales en moneda extranjera
- Titulares: Representaciones diplomáticas o consulares, organismos internacionales, misiones especiales, organismos bilateral, multilateral, organismos o entes oficiales a cargos de ejecución de convenios de préstamos o donación suscriptos con organismos multilaterales de crédito para el financiamiento de proyectos de inversión.
- Moneda: Dólares estadounidenses u otras monedas extranjeras.
- Retribución: Intereses: libremente entre las partes.
  Se liquidan por períodos vencidos no inferiores a 30 días y se acreditan en la cuenta en la fecha que se convenga.
  Se informará qué saldo mínimo se requiere para la liquidación de intereses.
- Comisiones: pactadas libremente al momento de la apertura o bien luego.

Pago de Remuneraciones - Com. "A" 3336 –27/9/2002

- Titulares: Personas Físicas
- Moneda: Dólares
- Comisiones: las entidades no podrán cobrar cargos o comisiones por conceptos algúnos a los titulares ni a los empleadores siempre que la utilización de las cuentas sean de acuerdo a las condiciones establecidas contractualmente.

Depósitos Especiales - Com. "A" 3336 –27/9/2002

- Fondo de Desempleo para los Trabajadores de la Industria de la Construcción
- Titular. El trabajador.
- Moneda: pesos.
- Retribución: los saldos de estas cuentas devengan intereses que se calculan en función a la tasa diaria equivalente a la T.E.M. promedio ponderada de los depósitos en caja de ahorro y depósitos a plazo fijo en pesos, correspondientes al 2° día hábil anterior a cada día, según la encuesta de Banco Central.
- Comisiones: no genera, como tampoco genera gastos de ninguna índole.

- Para Círculos Cerrados
- Titular. Cada suscriptor que forma el grupo del círculo cerrado.
- Plazo: no menor a 14 días.
- Interés: la que contractualmente se haya convenido.
  No puede ser menor a la tasa vigente para depósitos en caja de ahorro ni mayor a la ofrecida el día de la imposición por depósitos a plazo fijo a 30 días.

- Capitalización. Según se haya convenido contractualmente por períodos vencidos no inferiores a 30 días y se acreditan.

Usuras Pupilares

- Titulares: Personas Físicas.
- Moneda: Pesos – Dólares estadounidenses- Otras monedas.
- Retribución: Intereses: libremente entre las partes.
  Se liquidan en la cuenta en la fecha que se convenga.
  Se informará qué saldo mínimo se requiere para la liquidación de intereses.
  Se aplica la tasa de interés sobre el total del depósito sin limitación alguna.
  Adicional a la tasa de interés: podrá pactarse.

Depósitos Corrientes

- Titulares: Personas Jurídicas.
- Moneda: Pesos – Dólares estadounidenses- Otras monedas.
- Retribución: Intereses: libremente entre las partes.
  Se liquidan en la cuenta por periodos vencidos no menores a 30 días y se acreditan en la cuenta en la fecha convenida. Se debe especificar el saldo mínimo requerido para la liquidación de los intereses.
  Se pueden pactar otras formas de retribución adicional a la tasa de interés, pero debe especificarse claramente en el contrato.

Ya dadas las características de ciertas operaciones pasivas seguimos citando otras, para que se tenga una idea del conjunto de operaciones susceptibles de valuación.

- ❒ *Redescuentos Pasivos*: operación de descuento de documentos ya descontados a los clientes. Una entidad financiera para obtener fondos, luego de recibir los DOCUMENTOS de parte de un cliente procede a descontarlos de forma interbancaria.
- ❒ *Emisión de carta de crédito*: Es una carta que recibe una persona denominada "el cliente" de una entidad financiera y la deberá presentar en otra entidad financiera de otra plaza para recibir una cuantía determinada.
- ❒ *Anticipo pasivo*: es una operación activa en donde una entidad financiera pone a disposición del cliente una cuantía contra la caución de valores o títulos.
- ❒ *Venta de Giros*: instrumentos de pago que una entidad financiera utiliza entregándoselo al cliente para hacerlo llegar a otra persona de otra plaza, quien lo cobrará en la entidad contra la cual el giro fue librado.
- ❒ *Venta de transferencia*: la transferencia es una constancia en la cual una entidad financiera se compromete a efectuar un pago a una persona de otra plaza, dando la orden al pago corresponsal.
- ❒ *Aceptaciones:* la entidad financiera actúa de avalista y calza colocador y tomador de fondos, con un margen por intermediación libre.

- *Operaciones de Pase en sus dos formas*
  - Pase Pasivo: Vendiendo al contado y comprando a término (a plazo). Una persona se estaría fondeando y para ello paga una tasa de interés.
    Ej. quien tiene un faltante de caja y no quiere desprenderse de alguna especie, las ofrece en este tipo de operación vendiéndolas al contado y comprándolas a futuro, siempre esa misma especie. Esa diferencia de precios inicial y final genera un interés.
  - Pase Activo: Comprando al contado y vendiendo a término (a plazo)
    Ej. Pase Bursátil: Es un solo contrato instrumentado en una o más liquidaciones que consisten en la compra o venta de contado para un plazo determinado de una especie y la simultánea operación inversa de venta o compra, para un mismo comitente y en un vencimiento posterior. Entonces tenemos: pase bursátil activo y pasivo.

- *Operación de Caución Bursátil:* Es una operación de pase, en donde hay un precio de venta al contado que es menor al precio de cotización y surge de los aforos fijados por el Mercado de Valores. Asimismo, el precio de venta a plazo también resulta superior al precio de venta al contado.
  Ej: Se dejan títulos en garantía que permanecen depositados en el mercado por el plazo del contrato de caución bursátil y se gana un interés o se cobra el interés, dependiendo del tipo de operación.

- *Operación de Opciones:* Se trata de una operación a prima pues el titular paga al contado un premio o prima reservándose el derecho de comprar o vender una cantidad de títulos valores de una misma especie a un precio establecido, con la facultad de ejercerlo hasta una fecha determinada. Hay dos tipos de operaciones de opción.

- *Operación a prima de compra*: derecho otorgado al titular de comprar al lanzador exigiendo que este le venda una cantidad de lotes standard de determinado titulo valor, a un precio y hasta una fecha determinada.

- *Operación a prima de venta*: derecho otorgado al titular de vender al lanzador exigiendo que éste le compre una cantidad de lotes estándar de determinado título valor, a un precio y hasta una fecha determinada.
  Es decir que el LANZADOR ofrece a el TITULAR, también llamado tomador, el derecho y no la obligación, a comprar "call" o a vender "put" una cantidad de especie, a un precio fijado (que es el precio del ejercicio de la opción) en un plazo también fijado (plazo de la opción).
  Con el pago de la prima o premium que hace el titular al lanzador se negocia *sólo el derecho.* En caso de que no se ejerza la opción ésta se transforma en una pérdida.

Solo ejercerá la opción de compra o de venta pagando el precio pactado contra la entrega de la especie, si le conviene.
El precio pactado es independiente del valor del mercado. Las especies más utilizadas son títulos públicos, moneda extranjera, acciones, commodities.
El plazo para el ejercicio de la opción puede ser:

- europeo ➸ vencimiento fijo. Sólo se puede ejercer la opción en ese vencimiento.
- americano ➸ vencimiento dentro de un plazo establecido, pudiendo el titular ejercer la opción de compra o la opción de venta hasta el último día hábil bursátil del plazo.

Este tipo de operaciones por las características definidas denotan que no son ciertas.

En el mercado de empréstitos o de valores de renta fija

Considerando que el ente emisor o tomador de los fondos sea el Estado Nacional, Provincial o Municipal o bien las empresas privadas en el otro caso, tenemos entonces:

- *Títulos Públicos Nacionales, provinciales o municipales.*
- *Obligaciones Negociables:* deuda emitida en serie por una empresa con cotización en Bolsa privada que garantiza la emisión, sin la intervención del Estado. Autorizada por Ley 23.576.

En el mercado cambiario o de divisas

Transacciones de compra o venta sea presente y futura de moneda foránea, es decir conversión de moneda una a otras, ya sea al contado o a plazo.

En el mercado de capitales o mercado de valores de renta variable.

- Compra y venta de acciones
- Fondos Comunes de Inversión: son una alternativa que asegura la diversificación de instrumentos, acciones, bonos y el riesgo.

Si analizamos los rubros tales como "Deudas comerciales" "Deudas Financieras" y "Otras Deudas" de cualquier Estado Contable veremos registradas determinadas operaciones de financiación, tales como:

- ✧ *Crédito en cuenta corriente*
- ✧ *Descuento de Documentos*: en donde una parte que puede ser una entidad financiera le anticipa los fondos con una quita al beneficiario del documento y éste le transfiere a la entidad los derechos del docu-

mento. Se produce cuando el beneficiario del documento no puede esperar al vencimiento del documento y decide negociarlo, siendo la entidad financiera u otra persona quien se lo rescata anticipadamente.

- *Factoring:* es una operación de descuento de las facturas que una persona tiene a cobrar y hace esta operación para hacerse de fondos, tomando la otra parte a su cargo la gestión de cobro y anticipándole el importe de las mismas.

- *Obligaciones a Pagar del Pasivo - Documentos a Cobrar del Activo:* El instrumento financiero puede ser un ***pagaré***. Acá no existe orden contra terceros. Es a la vista o con vencimiento cierto. El librador es quien promete incondicionalmente pagar cierta suma de dinero en un lugar y día determinado a otra persona llamada el beneficiario o tomador. Constituye una promesa de pago. Se lo puede descontar.

- *Letras de cambio:* a la vista, a tiempo vista y a tiempo fecha o a un día fijo. Es un título de crédito que se usa en el comercio internacional y es básico en la operatoria de aceptaciones bancarias. Existe un librador quien da la orden a otra persona —el girador— para que pague incondicionalmente una suma determinada en un lugar y día determinado al beneficiario o tomador. Como en el cheque acá también hay UNA ORDEN contra terceros.

- *Préstamos con diferentes modalidades.*
    - Préstamos Hipotecarios, Prendarios, Puente, Personales... en entidades financieras.
      Al respecto, por Com. "A" 3052 del 23/12/99 establece un divisor fijo para el cálculo de los intereses de préstamos hipotecarios y prendarios de 360 días. Fue innovadora, pues hasta esa entonces el divisor era de 365 días.
    - Financiación de Tarjetas de Crédito.

- *Debentures.* La Ley de Sociedades Comerciales, art. 325, autoriza la emisión de empréstitos en forma pública o privada mediante la emisión de debentures u obligaciones negociables.

Otras operaciones tales como:

- *Leasing*: una persona —el locatario— recibe en locación un bien para su uso y tiene la opción de compra al término del contrato.

- *Underwriting*: Un banco prefinancia la emisión de acciones y obligaciones negociables, y toma a su cargo la colocación en el mercado de las mismas.

- *Warrants*: operación en donde determinados sectores de la producción con el fin de financiarse entrega en garantía mercaderías como aval del préstamo pedido.

De alguna manera hemos citado un número de operaciones que son susceptibles de ser valuadas ya que por su propia naturaleza producirán variaciones y, por ende, son llamadas "Operaciones financieras".

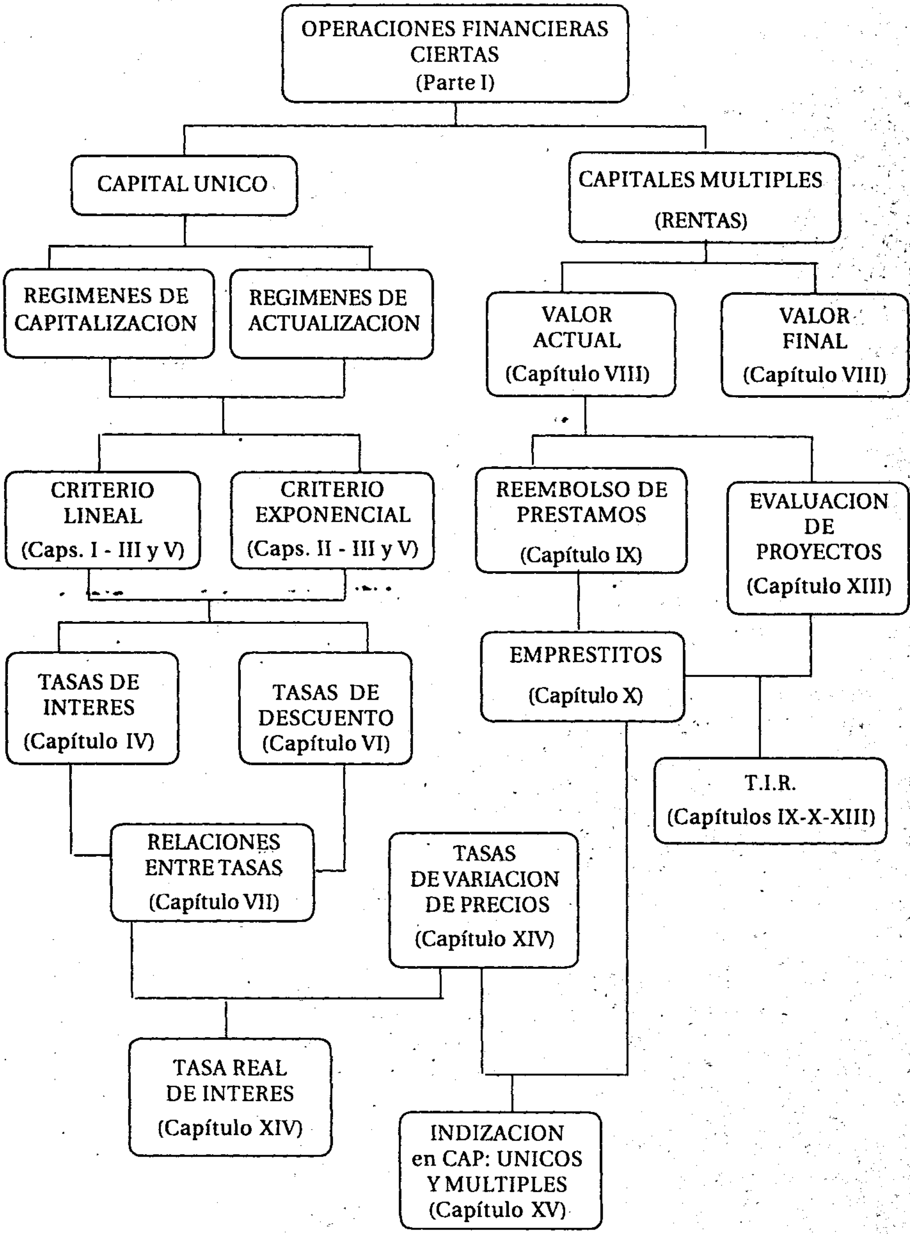
Muchas de ellas no las valuaremos; tal es el caso de los "derivados financieros" (futuros, opciones, forwards o pases o swaps) como así también contratos de fideicomisos, titulización o securitización de activos por no ser tema específico de nuestra materia "El cálculo financiero" y cuyos contenidos deben ser tratados en profundidad para su abordaje.

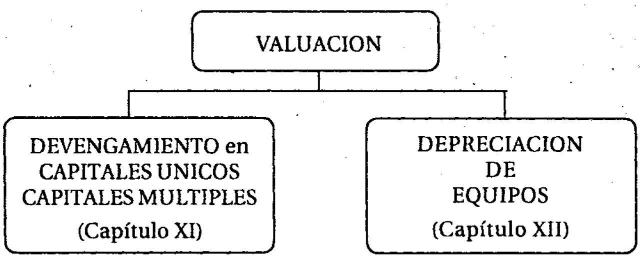
Que resulte viable una operación, sea de inversión o de financiación, surgirá de considerar aspectos tales como:

- el riesgo que está dispuesto a aceptar quien está evaluando la operación;
- la longitud del planeamiento o plazo de la operación;
- costes de mantenimiento, costes de de entrada y de salida;
- rentabilidad resultante o coste financiero resultante, independientemente de la tasa contractual convenida en la operación, como resultado del punto anterior.

De allí la importancia de determinar para cada operación su verdadero rendimiento, si es de inversión; o su coste financiero, si es de financiación; independientemente de la tasa contractual utilizada para fijar el precio de la operación.

Ver esquema de operaciones financieras y su correlación con los respectivos capítulos en página siguiente.


OPERACIONES FINANCIERAS CIERTAS (Parte I)
CAPITAL UNICO
CAPITALES MULTIPLES (RENTAS)
REGIMENES DE CAPITALIZACION
REGIMENES DE ACTUALIZACION
VALOR ACTUAL (Capítulo VIII)
VALOR FINAL (Capítulo VIII)
CRITERIO LINEAL (Caps. I - III y V)
CRITERIO EXPONENCIAL (Caps. II - III y V)
REEMBOLSO DE PRESTAMOS (Capítulo IX)
EVALUACION DE PROYECTOS (Capítulo XIII)
TASAS DE INTERES (Capítulo IV)
TASAS DE DESCUENTO (Capítulo VI)
EMPRESTITOS (Capítulo X)
T.I.R. (Capítulos IX-X-XIII)
RELACIONES ENTRE TASAS (Capítulo VII)
TASAS DE VARIACION DE PRECIOS (Capítulo XIV)
TASA REAL DE INTERES (Capítulo XIV)
INDIZACION en CAP: UNICOS Y MULTIPLES (Capítulo XV)


VALUACION
DEVENGAMIENTO en CAPITALES UNICOS CAPITALES MULTIPLES (Capítulo XI)
DEPRECIACION DE EQUIPOS (Capítulo XII)

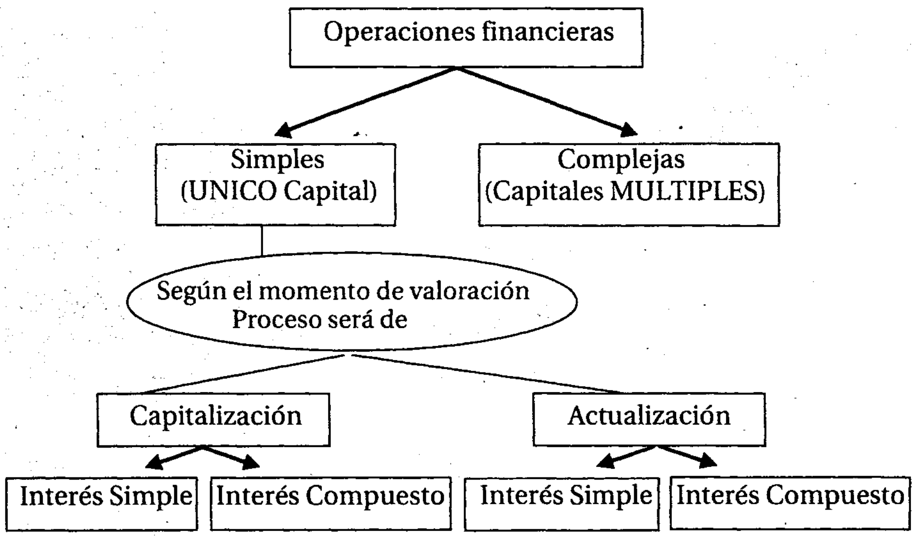
I.1. Operaciones financieras simples - Singulares - De capital único

Son las operaciones simples o singulares aquellas que considera un capital único para valuar, pues se trata de la valoración de un solo capital, a diferencia de una sucesión de capitales.

Objetivos:

- Valorar un capital en cualquier momento.
- Reconocer las leyes financieras a las que dicho capital está sometido.
- Deducir las fórmulas que resulten necesarias para aplicarlas en un caso concreto e
- interpretarlas haciendo explícito el significado de las mismas.
- Jerarquizar operaciones de inversión o de financiación.
- Calcular rendimiento o coste financiero de la operación y
- compararlo con la tasa de interés contractual.

Red de conceptos



Capítulo I

Régimen de capitalización a interés simple

Para la comprensión de los regímenes de capitalización comenzaremos por el más sencillo a través de la confección de un cuadro de marcha de una operación de depósito de \$ 1.000 colocado a una tasa de interés periódica (p.ej. mensual) del 10% con retiro periódico de intereses, considerando por ejemplo que el periodo es de 30 días (mensual).

Para ello ubicaremos dicha operación en el eje de tiempo para una mejor comprensión.

Capital = C_0 =1.000
Tasa de interés mensual = i = 0,1

En el caso que la tasa sea anual lo que se debe adecuar es la tasa para que esté expresada en el mismo intervalo de tiempo al que se refiere el período de capitalización de la operación que se está valuando.

El año será considerado de 365 días o 360 días. Según las leyes y costumbres locales de cada país los intereses serán calculados en forma exacta —tomando 365 días— o en forma ordinaria —tomando 360 días—.

Con respecto a nuestros mercados argentinos, la mayoría de ellos considera el año civil de 365 días, salvo excepciones y por tal razón usaremos 365 días.

Eje de tiempo

10-03 9-04 9-05 ....

0 1 2 p (p+1) (n-1) n

C(0) =1.000 C(1)=1.100 C(2)=1.200 ... C(p) C(p+1) ... C(n-1) C(n)

I_1 I_2 ...... I_{p+1} ...... I_n

$$I(0;n) = I_1 + I_2 + \ldots + I_p + I_{p+1} + \ldots + I_n$$
$$I(0;n) = C_0 \cdot i + C_0 \cdot i + \ldots C_0 \cdot i + C_0 \cdot i + \ldots + C_0 \cdot i$$
$$I(0;n) = C_0 \cdot i \cdot n$$

$$C_n = C_0 + I(0;n)$$
$$C_n = C_0 + C_0 \cdot i \cdot n$$
$$C_n = C_0 \,(1 + i \cdot n)$$

Cuadro de marcha del montante o valor final

Seguiremos el método de inducción completa que dice: "demostrada una propiedad para el término de una sucesión, admitida para el término (n-1) y demostrada para el término n, entonces la propiedad es aplicable a cualquier término de la sucesión".

REGIMEN DE CAPITALIZACION A INTERES SIMPLE				$C_0 = 1.000$	$i = 0,10$
Fecha	*P*	*Concepto*	*Importe*	*Fórmula*	
10-03	*0*	*Capital del mom. 0*	*1.000*	C_0	C_0
9-04	*1*	*Interés del periodo 1*	*100 = 1.000 * 0,10*	$I(0;1) = I_1 = C_0 . i$	
		Montante al mom. 1	*1.100 = 1.000+100*	$C1 = C_0 + I_1 = C_0 + C_0 i = C_0 (1+. i)$	$C_1 = C_0 (1+i)$
9-05	*2*	*Interés del periodo 2*	*100 = 1.000 * 0,10*	$I(1;2) = I_2 = C_0 . i$	
		Montante al mom. 2	*1.200 = 1.000+100+100*	$C_2 = C0 + I_1 + I_2 = C_0 + C_0 i + C_0 i = C_0 (1+. i + i) = C_0 (1+.2. i)$	$C_2 = C_0 (1+2 i)$
..		....	....	....	
....	*p*	*Interés del periodo p*	*100 = 1000 *0,10*	$I(p-1;p) = Ip = C_0 . i$	...
		Montante al mom.. p	*.... = 1.000+...*	$Cp = C0 + I_1 + ... + I_p = C_0 + C_0 i + ... + C_0 i, = C_0 (1+. i . p)$	$C_p = C_0 (1+p i)$
Entonces se induce que: $C_{(n-1)} = C_0 \, [\,1+. \, i . (n-1)\,]$ $I(n-1;n) = C_0 . i$ $C_{(n)} = C_0 \, (1+. \, i . n)$					
	n	*Interés del periodo*	*100 = 1000 *0,10*	$I(n-1;n) = Ip = C_0 . i$	
		Montante	*... = 1.000+...*	$Cn = C0 + I_1 + ... + I_n = C_0 + C_0 i + ... + C_0 i = C_0 (1+. i . n)$	$C_n = C_0 (1+n i)$

Conociendo el montante se puede determinar los intereses totales de la operación: $I(0;n) = C_{(n)} - C_{(0)} = \Delta C_{(0)}$

$I(0;n) = C_0 . i . n$

Esta fórmula es equivalente a la que se utilizaba $I(0;n) = \dfrac{C_o . R . T}{100 . UT}$ en donde $\dfrac{R}{100} = i$ pues "R" es la tasa o el tipo de interés en tanto por ciento. En nuestro ejemplo se interpreta que por cada cien unidades monetarias cobro (si es operación de inversión) o pago (en una operación de financiación) 10 unidades monetarias de interés.

De la forma presentada en la fórmula "i" se conviene que corresponde a la tasa de interés en tanto por uno. Siguiendo nuestro ejemplo: por cada unidad monetaria cobro o pago —según sea operación de inversión o financiación— 0,10 unidades monetarias en concepto de interés.

Observamos que $I(0;n) = f\,(C_0;i;n)$
Y en consecuencia $C_n = f\,(C_0;i;n)$

Observamos una característica muy importante del interés simple:

La Proporcionalidad: Los intereses totales son proporcionales al capital, a la tasa de interés y al tiempo.

Partiendo de la fórmula de Monto, podemos despejar cada uno de sus elementos y llegamos a las siguientes fórmulas.

Régimen de Capitalización a Interés Simple	
Monto	$C_n = C_0 (1 + i\, n)$
Intereses	$I(0;n)=C_0 \cdot i \cdot n$
Capital Inicial	$C_0 = \dfrac{C_n}{(1+i.n)}$ $\quad C_0 = \dfrac{I(0;n)}{i.n}$
Tasa de Interés	$i = \dfrac{\left[\dfrac{C_n}{C_0} - 1\right]}{n} = \dfrac{C_n - C_0}{C_0.n}$
Plazo	$n = \dfrac{\left[\dfrac{C_n}{C_0} - 1\right]}{i} = \dfrac{C_n - C_0}{C_0.i}$

Cuadro de valores de la función, sus variaciones absolutas y relativas

Mom.	Capital al momento p	Interés acumulado hasta p	Interés periódico	*Intensidad Periódica*
p	C(p)	I(0;p)	$I(p-1;p)=I_p$	$\dfrac{I(p-1;p)}{C_{p-1}}$
0	*1000.*	-	-	-
1	*1.100*	*100*	*100*	*0,10*
2	*1.200*	*200*	*100*	*0,091*
3	*1.300*	*300*	*100*	*0,083*

Análisis y Gráfico de la función financiera

La función financiera $(1+ i\, n)$ es una magnitud que representa el valor final o monto o montante generado por un capital inicial de $1 luego de n periodos valuado a la tasa i periódica, considerando la convención lineal en el cálculo de los intereses, es decir el retiro periódico de intereses.

Tiene la característica de generar intereses periódicos constantes (si la tasa de interés es constante), de allí que la función que se grafique deberá reflejar esos incrementos fijos, debiendo estar representada por una recta.

Si analizamos matemáticamente la función financiera, es decir:

a) investigamos su signo a través de la:

- derivada primera para conocer si la función es creciente (si la primera derivada es mayor que cero) o decreciente (si la primera derivada es menor que cero);

- derivada segunda para conocer si la función tiene un crecimiento acelerado (si la segunda derivada es mayor que cero) en cuyo caso sería una curva cóncava (la tangente a la curva está comprendida entre la curva y el eje de la abscisa) o bien la función tiene un crecimiento retardado (si la segunda derivada es menor que cero) en cuyo caso la curva es convexa (la tangente a la curva está comprendida entre la curva y el eje de la ordenada).

b) Calculamos el valor que toma la función para algunos valores particulares del argumento

c) Representamos gráficamente la función.

Podemos conocer su comportamiento a través del tiempo, si consideramos éste como variable. En nuestro caso:

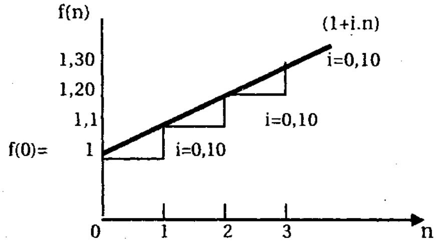
$F(n) = (1 + i \, . \, n)$
$F'(n) = +i > 0 \rightarrow$ función creciente
$F''(n) = 0 \rightarrow$ función líneal

n	F(n)=(1+i.n)
0	1
1	1+i
...	
$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$

Se trata de una función lineal creciente, pues a medida que aumenta "n": el número de veces de colocación de un capital, considerando la tasa de interés "i" constante, aumentará su valor final.

La función lineal es de la forma $y = b + a \, . \, x$. En nuestro ejemplo: $f(n) = 1 + i \, . \, n$; en donde i es la pendiente de esta semirrecta —coeficiente angular— cuya función se origina en 1 cortando entonces al eje de las ordenadas en ese valor. Estamos analizando la capitalización, cómo evoluciona ese capital a través del tiempo y tendrá sentido financiero si i>0, pues se invierte una cuantía determinada para recibir algo más, o se solicita financiación, en cuyo caso también se devolverá algo más que la cuantía recibida, de allí la tasa de interés tiene que ser positiva.

Representación gráfica:



La representación gráfica de la función monto (1+i.n) es una recta cuya ordenada al origen es el capital original de una unidad monetaria, siendo el tiempo nuestra variable independiente, manteniendo constante la tasa y el coeficiente angular es el interés generado en cada período "i".

Características del régimen de capitalización a interés simple:

Se pueden observar características que le son propias en este régimen de capitalización:

- Los intereses se calculan siempre sobre el capital original.
- Los intereses periódicos son constantes.
- El interés acumulado es n veces el interés de un período: crece en progresión aritmética cuya razón es el interés periódico.
- El valor final crece en progresión aritmética cuya razón es el interés periódico.
- La proporcionalidad de los intereses es con respecto a Co ; n ; i.
- La relación entre el interés periódico y el capital generador —que es el monto al inicio de cada período— es variable (decreciente).
- La ley financiera de capitalización (1+i.n) está definida para $n \geq 0$; para un capital de una unidad monetaria, en donde en el momento p el valor [1+ip] > [1+i(p-1)] en el momento (p-1), ya que sería un absurdo considerar intereses negativos.
- Su factor recíproco es: $\frac{1}{(1+i.n)} = (1+i.n)^{-1}$ ya que el producto de ambos factores (1+i.n) y $(1+i.n)^{-1}$ es igual a 1. Este 2º factor lo veremos más adelante, pero estaría expresando la inversa del proceso de capitalización. Y se denominará factor de actualización.

Tasas variables (flotantes) en el régimen de capitalización a interés simple

Debemos plantear la fórmula de monto considerando que las tasas de colocación sean diferentes en cada renovación de la operación y podríamos entonces, hacer algunos agregados en el cuadro de marcha insertando el subíndice en el tanto de interés de cada período de forma tal que resumidamente nos quedaría:

0 — 1 — 2 — // — (n-1) — n

$C_{(0)}$ $\quad C_{(1)} = C_{(0)}(1+i_1)$ $\quad C_{(2)} = C_{(0)}(1+i_1+i_2)$ $\quad C_{(n-1)}$ $\quad C_{(n)} = C_{(0)}(1+i_1+i_2+\ldots i_n)$

$I_1 = C_{(0)}.i_1$ $\quad I_2 = C_{(0)}.i_2$ $\quad I_n = C_{(0)}.i_n$

$$C_n = C_0 \,.\, (1 + \sum_{j=1}^{n} i_j)$$

Ejemplo: Supongamos un capital de $ 1.000 tomado en préstamo con pago mensual de intereses y reembolsable dentro de 4 meses siendo las tasas de aplicación el 1,5% mensual para el primer pago, el 1,8% mensual para el segundo y así sucesivamente el 1,72% y el 1,6%. Se pretende hallar:

a) el valor final pagado por todo concepto

b) la tasa media mensual resultante.

Para resolver el primer punto aplicamos la fórmula de monto:

$$C_4 = 1.000 \,.\, (1 + \sum_{j=1}^{4} i_j) \text{ siendo } i_1 = 0{,}015;\ i_2 = 0{,}018;\ i_3 = 0{,}0172;\ i_4 = 0{,}016$$

C4 = 1.000 (1+ 0.,015+0.018+0.0172+0.016)
C4 = 1.000 (1 +0.0662) = 1.066,20
C4 = 1.066,20

Posteriormente, planteamos entonces la equivalencia financiera en donde podemos expresar que el monto generado por un capital colocado a una tasa i periódica debe ser equivalente al monto generado por el mismo capital colocado a diferentes tasas periódicas i_j. Entonces esa tasa i periódica será una tasa media o promedio

$$C_0 (1 + i\, n) = C_0 \,.\, (1 + \sum_{j=1}^{n} i_j)$$

Si despejamos el valor de "i", nos queda un promedio aritmético simple:

$$i = \frac{\sum_{1}^{n} i_j}{n}$$

$$i = \frac{0{,}015 + 0{,}018 + 0{,}0172 + 0{,}016}{4} = \frac{0{,}0662}{4} = 0{,}01655$$

Podemos comprobar que el monto generado por ese capital de 1.000 colocado a una tasa constante del 1,655% mensual da un valor final de $ 1.066,20.

Otra forma de hallar la tasa media es relacionando el monto y el capital inicial, de allí conseguimos la variación absoluta que es el incremento del capital por todo el plazo; en nuestro ejemplo: 1066,20- 1000 = 66,20. Si el incremento del capital lo relacionamos con el capital original arroja una variación relativa que es el tanto de interés por todo el período —en este caso cuatrimestral—:

$$\frac{66{,}20}{1000} = 0{,}0662$$

Como tenemos que determinar la tasa subperiódica, una tasa mensual y estamos trabajando con el criterio lineal dividimos por la cantidad de períodos.

$$\frac{0{,}0662}{4} = 0{,}01655$$

Como prueba de ello, podríamos haber partido del valor hallado al capitalizar a interés simple por las diferentes tasas de interés periódicas el capital inicial arrojando un monto de 1066,20 = 1000 (1 + i . 4) y despejando i:

$$i = \frac{\frac{1066{,}20}{1.000} - 1}{4} = \frac{\frac{1066{,}20 - 1000}{1000}}{4} = \frac{\frac{66{,}20}{1000}}{4} = \frac{0{,}0662}{4} = 0{,}01655$$

Observemos bien cómo podemos leer cada uno de los pasos en esa fórmula derivada de "i".

El valor de i= 0,01655 se interpreta como la tasa constante mensual que mensualmente hubiera pagado el tomador del préstamo y que le genera el mismo valor final que con las tasas variables mensuales.

$$i = \frac{\frac{C_n - C_o}{C_0}}{n}$$

$C_n - C_o$ ← Incremento del capital original en un período

C_0 ← Capital original

n ← Cantidad de subperíodos

Ejemplos en nuestro contexto financiero

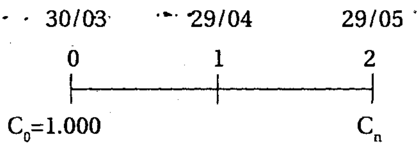
Pensemos en las aplicaciones del régimen de interés simple además de la colocación de un depósito a plazo con retiro periódico de intereses, podemos agregar la operación de préstamo de un capital con pago periódico de intereses y reembolso de capital al vencimiento, el cálculo del devengamiento de intereses de las cuentas a la vista, aunque no sólo se aplica este régimen de capitalización sino también el régimen a interés compuesto. La determinación de los pagos únicos que cancelan deudas con Rentas o simplemente con la A.F.I.P.

Aplicaciones

1) Un inversor dispone de $ 1.000 el día 30.03 por 30 días y decide colocarlo en un plazo fijo por ese plazo en una entidad que ofrece una tasa libre del 62% nominal anual para el plazo de 30 días, renovando la operación a la misma tasa y plazo, con retiro mensual de los intereses.

Calcular:
a) Cuál será el monto.
b) A cuánto asciende el total de intereses de la operación.
c) Cuál es el importe que realmente cobrará el depositante, si estos depósitos sufren una retención del 4,2% calculada sobre la renta.

Rta.: a) 1.101,92.
b) 101,92.
c) 1.097,64.



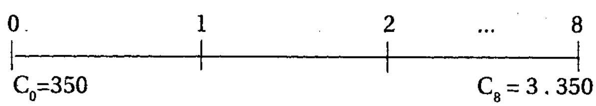
a) $C_2 = 1000 * (1 + 0{,}0509589 * 2)$
$i(30) = \dfrac{0{,}62 * 30}{365}$
$C_2 = 1.101{,}92$

b) $I(0,2) = 1.000 * 0{,}0509589 * 2.$
$I(0,2) = 101{,}92.$
$I(0,2) = C(2) - C(0).$
$I(0,2) = 1.101{,}92 - 1000 = 101{,}92.$

c) $C'(2) = 1000\,[\,1 + (0{,}958 * 0{,}0509589) * 2\,].$
$C'(2) = 1.097{,}64.$

2) Determinar la tasa de interés periódica tal que triplique un capital de $ 350 al cabo de 8 períodos considerando que periódicamente el colocador de fondos retira los intereses.

Rta.: 0,25



$350\,(1 + i \cdot 8) = 3 \cdot 350$

$3 - 1 = 8 * i.$ $\qquad i = \dfrac{3-1}{8} = 0{,}25.$

3) Cuál es el número de períodos mensuales en que un capital de $ 200 colocados a una tasa del 3,2%mensual a interés simple, se duplica.

Rta.: 31,25.

0	1	2		n
C_0=200				C_n= 2 . 200

i =0,032

$$200\,(1+0{,}032\ .\ n) = 2\ .\ 200$$

$$n = \frac{2-1}{0{,}032.} = 31{,}25.$$

La interpretación financiera es que el capital quedaría impuesto por 31 períodos mensuales a esa tasa, y podría haberse renovado en alguno de esos períodos por un plazo fraccionario equivalente a 1/4 de periodo (aproximadamente 7 días). Dicha renovación sucedería en cualquier momento del eje de tiempo pues nos encontramos en interés simple y los resultados finales permanecen inalterados por utilización de la propia convención lineal; en donde el interés se calcula siempre sobre el capital inicial.

4) El ejercicio económico cerrado con fecha 30.11 de la empresa "Progreso S.R.L." arroja ganancias por $ 48.000 y los socios de la misma en la reunión de Asamblea aprobaron la distribución del 75% siguiendo el criterio de asignación en función del tiempo que cada aporte se mantuvo en la organización. Determinar:

- las utilidades generadas la cuantía a asignar a cada socio si la estructura de aportes es la que se expone:

Fecha de aporte	*Socio Alfa*	*Socio Beta*	*Socio Epsilon*	*Total de aportes*
10.01	***2.350***	***3.700***	***4.500***	***10.550***
31.01	***1.500***	***1.500***	***1.500***	***4.500***
30.06	***0***	***1.000***	***2.000***	***3.000***
28.10	***1.200***	***600***	***1.200***	***3.000***

Rta.: Socio Alfa, Beta y Epsilon: $ 8.465, $ 12.311 y $ 15.224.

	10/01	*31/01*	*30/06*	*28/10*	*30/11*
	0	21	171	291	324
Aportes	C_{alfa}= 2.350	C_{alfa}= 1.500		C_{alfa} = 1.200	
	C_{beta}= 3.700	C_{beta}= 1.500	C_{beta}= 1.000	C_{beta} = 600	
	$C_{epsilon}$=4.500	$C_{epsilon}$= 1.500	$C_{epsilon}$= 2.000	$C_{epsilon}$= 1.200	

Utilidad a Distribuir

I = 0,75 . 48.000 = 36.000

Cada uno de los aportes generan intereses por el tiempo en que estuvieron colocados cada uno de ellos. En este caso el tiempo es la cantidad de días que median entre la fecha de aporte y el momento de cálculo —30/11—.

Entonces podemos razonar que los intereses a distribuir a cada uno de los socios cuyo total I=36.000 deben ser proporcionales al aporte y tiempo. La ecuación para su determinación estaría dada por:

Alfa	2350. 324 .i + 1500.(324-21).i +1.200 . (324-291).i
Beta	3.700. 324 .i +1.500.(324-21).i +1.000.(324-171).i +600 . (324-291).i
Epsilon	4.500. 324 .i +1.500.(324-21).i +2.000.(324-171).i +1.200 . (324-291).i
Intereses totales a distribuir	36.000

Resolviendo el cálculo del tiempo de colocación de cada aporte nos queda:

Alfa	2350. 324 .i + 1500.303.i +1.200 . 33.i
Beta	3.700. 324 .i +1.500.303.i +1.000.153.i +600 . 33.i
Epsilon	4.500. 324 .i +1.500.303.i +2.000.153.i +1.200 .33.i
Intereses totales a distribuir	36.000

Vemos que al tener i como factor en todos sus términos podemos plantear la ecuación sacando factor común "i":

Alfa	i (2350. 324 . + 1500.303 +1.200 . 33.)	= i. 1.255.500
Beta	i.(3.700. 324 +1.500.303+1.000.153 +600 . 33)	= i .1.826.100
Epsilon	i.(4.500. 324 +1.500.303 +2.000.153 +1.200 .33)	= i. 2.258.100
Intereses totales a distribuir	36.000	36.000

Vemos que al tener i como factor en todos sus términos podemos plantear la ecuación sacando factor común "i"

i [1.255.000+1.826.100+2.258.100]=36.000
i . 5.339.700 =36.000 Despejando i para ver cuál es la tasa de interés periódica.
i = 0,006741952

reemplazo i en cada una de las ecuaciones correspondientes a cada socio.

Alfa	i. 1.255.500	0,006741952 . 1.255.500 =	8.465
Beta	i .1.826.100	0,006741952 . 1.826.100 =	12.311
Epsilon	i. 2.258.100	0,006741952 . 2.258.100 =	15.224
Intereses totales a distribuir	36.000	36.000	36.000

Observemos que hemos efectuado para simplificar cálculos el producto (aportes por tiempos) de C . n al que denominamos *"Numerales"*.

Otra forma más simplificada es calcular directamente los Numerales para cada socio y determinar la participación en el total, o sea:

Determinación de los Numerales:

Socio Alfa: 2350 * 324 + 1500*303 + 12000 * 33	=	1.255.500	23.51%
Socio Beta:3700*324 + 1500*303+1000*153+600*33	=	1.826.100	34.20%
Socio Epsilon:4500*324 + 1500*303 +2000*153 + 1200*33	=	2.258.100	42.29%
		5.339.700	100.00%

Distribución de utilidades:

Socio Alfa:	36.000	* 0.2351 =	8.465
Socio Beta:	36.000	* 0.3420 =	12.311
Socio Epsilon:	36.000	* 0,4229 =	15.224
		1,0000	36.000

5) Dentro de cuántos días un capital de $ 1.800 colocado al 56,2% nominal anual de interés superará en 2/3 el monto generado por otro capital de $ 1.114,27 colocado al 42% nominal anual capitalizable en igual plazo, considerando el criterio lineal.

Rta.: 90 días

0 ———————————————— n

C_0= 1.800,00 TNA = 0,562 C_n

C'_0= 1.114,27 TNA = 0,42 C'_n

$$C_n > C'_n\text{, pues } C_n = \frac{5}{3}.C'n$$

$$1800.\left(1+\frac{0,562.n}{365}\right)=\frac{5}{3}.1114,27.\left(1+\frac{0,42.n}{365}\right)$$

aplicando propiedad distributiva en cada miembro, despejamos n:

$$n=\frac{\frac{5}{3}.1114,27-1800}{\frac{1800.0,562}{365}-\frac{\frac{5}{3}.1114,27.0,42}{365}}=90$$

$$2.050 = \frac{5}{3}.1230$$

6) Determinar el valor final de un capital de $ 1.800 depositado el 30.03 en las siguientes condiciones:

a) Por un plazo de 30 días renovándose la operación 5 veces más por el mismo plazo.

b) La tasa de interés es del 42% nominal anual para el plazo de 30 días en las dos primeras colocaciones y del 38% nominal anual para el plazo de 30 días en los últimos. En todos los casos se retiran mensualmente los intereses.

Calcular el total de intereses ganados y la tasa promedio mensual a la tasa de colocación variable.

Rta.: 349,15; i= 0,032

0 1 2 3 4 5
/_______/_______/_______/_______/_______/

C_0=1800 $C_n = C_o \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{n} i_j\right)$

i_1 i_1 i_2 i_2 i_2

Cálculo de la tasa de interés mensual

$i_1 = \frac{0,42.30}{365} = 0,0345205$ $i_2 = \frac{0,38.30}{365} = 0,0312328$

$C_{(0)}$ = 1800
I(0,6) = 349,15 = 1800 . (0,0345205 . 2 + 0,0312328 . 4) =
$C_{(6)}$ = 2149,15

i(0,6) = I(0;n) / C(0) = 349,15 / 1800 = 0,1939722
i_{30} = -promedio aritmético simple- = 0,1939722/6 = 0,0323287

Se pudo utilizar la fórmula: $\sum_{1}^{n} \frac{i_j}{n}$

7) Si la AFIP procediese a aplicar multas por el incumplimiento de presentación de declaraciones juradas con el siguiente esquema de multas:

1 –5 días de atraso:	multa diaria de $ 2.-
6 - 10 días	multa diaria de $ 5.-
11 -15 días	multa diaria de $ 8.-
16 – 20 días	multa diaria de $ 11.-

... (así continúa la ley de formación de multas)

Si un contribuyente se atrasa en la presentación del formulario en 48 días. Determinar cuál sería la multa diaria que deber ingresar al fisco.

Rta.: M= 29.

```
0 1  ...  5 6  ...  10 11  ...      15 16...  20                    48
/_/_____/_/________/_/__________ /_ /______/______________//_____/
-2 ...   2 5  ...    5 8   ...      8  11  ...  11      ...         M48
```

siendo M: Multa diaria

Las multas se calculan por tramos, para cada intervalo de atraso se fija una multa de cuantía x, y considerando que el período es de 5 días, la función toma valores diferentes constituyendo una progresión aritmética —característica del interés simple— razón por la cual proyectamos la sucesión para el plazo que nos interesa (48 días). En nuestro caso específico la razón es de $ 3.

multa diaria = m $\frac{5}{2}=1+i$ siendo i = 1,5

$$\frac{8}{2}=1+2.i$$

$$\frac{11}{2}=1+3.i$$

...

$$\frac{M}{2}=1+9.i$$

M = 2 (1 + 9 * 1,5). M = 29

8) Una libreta de caja de ahorro registra durante el mes de junio los movimientos que a continuación se detallan. Considerando que la entidad acredita mensualmente el 1ro. del mes siguiente los intereses y la tasa de interés es del 3,0% mensual.

Se pide determinar: El saldo disponible el 1.07. Los débitos por mantenimiento son $ 3. Cuál debe ser el saldo promedio que deberá mantener en cuenta para neutralizar los gastos de mantenimiento de $3.- mensuales.

Fecha	*Concepto*	*Créditos*	*Débitos*	*Saldo*
31/05	Saldo anterior			150
1/06	Intereses de mayo	3,2		153,2
1/06	Débitos internos		3	150,2
2/06	Depósito efectivo	200		350,2
10/06	Dep. ch. 48 hs.	85		435,2
10/06	Extracción		85	350,2
25/06	Depósito efectivo	50		400,2
30/06	Débitos por serv.vs.		100	300,2

Rta: S= 307,71; S=100

La característica de este tipo de cuenta de caja de ahorro o bien las cuentas corrientes es que se da una multiplicidad tanto de imposiciones como de retiros, lo que lleva a multiplicidad de créditos y débitos en dichas cuentas.

Si aplicamos el régimen de capitalización a interés simple para calcular el devengamiento de los intereses debemos considerar los intereses dentro del período de capitalización. Es decir, internamente en ese período se usa el régimen a interés simple. Los intereses que diariamente se pueden ir devengando hasta el cierre del período no son exigibles, son indisponibles y recién se ponen a disposición del depositante, es decir se acreditan cuando el período se cierra.

Al respecto, en caso de entidades financieras, normativamente se fija un plazo mínimo de liquidación de los intereses y es 30 días, pero nada dice sobre el plazo máximo, el que depende más de la propia competencia con otras entidades.

En el método de cálculo de los intereses devengados en caja de ahorro se admite el interés simple; es decir que para su determinación interna se sigue la convención lineal. *No obstante es práctica financiera utilizar también para el cálculo de los intereses la convención exponencial.*

Una vez cerrado el período nace uno nuevo y así comienza nuevamente el cálculo, considerando que el saldo de capitales más intereses devengados menos los gastos de la cuenta es una cuantía de cierre equivalente a la cuantía con que inicia el nuevo período.

Seguiremos con los diferentes métodos conocidos para el cálculo del devengamiento:

✓ **Método directo**

- **Por saldos**: los intereses devengados en una cuenta es igual a la suma de los intereses que devenga cada uno de los saldos por el tiempo en que estuvo colocado ese saldo. La suma de cada uno de los tiempos que fue devengando cada saldo debe ser igual al plazo del período de capitalización.

- **Por compensación o movimientos**: los intereses devengados en una cuenta es igual a la suma algebraica de los intereses que devenga cada uno de los movimientos u operaciones que registra la cuenta contados desde el momento en que se efectúan hasta el cierre del periódo de capitalización.

  Significa que tendremos intereses positivos derivados por los créditos e intereses negativos derivados de los débitos, de forma tal que se irán compensando intereses positivos con los negativos, de allí la denominación de este método.

La fórmula de intereses es la ya conocida $I(0;n) = C_0 . i . n$ representando C_0 cada uno de los saldos o de los movimientos, según el método utilizado.

✓ Método indirecto

Para el caso en que la tasa de interés es fija dentro del período de capitalización en que se están devengando los intereses, se pueden abreviar los cálculos mediante la utilización de numerales. El numeral es el producto del capital por el plazo.

Numeral = Capital . plazo

Ahora resolvemos el ejercicio planteando en el eje de tiempo tanto los movimientos de cada día, si los hubo, como el saldo resultante a fin de cada día.

	31/5	*1/6*	*2/6*	*10/6*	*25/6*	*30/06*	*1/7*
Acredit.del día	-	3,2	200	85	50		
Débitos del día	(3)	-		(85)		(100)	
Saldos Diarios	150	150,2	350,2	350,20	400,20	300,20	

a) *Método indirecto por saldos* (utilizando los numerales pues no hay mix de tasas dentro del período de capitalización).

Fecha	*Saldo* S_i	*Días en que estuvo vigente cada saldo* n_i	*NUMERALES* $(S_i . n_i)$
1/06	150,2	1	150,20
2/06	350,2	23	8054,60
25/06	400,2	5	2001,00
30/06	300,2	1	300,20
Totales		*30*	*10506,00*

Al saldo al último día del período de capitalización en que estamos devengando los intereses le agregamos los Intereses Devengados del Período y le restamos los Débitos por mantenimiento de cuenta.

$S_{1/7} =$ 300,20 + i_d [150,20*1 +350.2*23 +400.2*5 +300.2*1]-3 .
siendo i_d= 0,03/30=0,001

$S_{1/7} =$ 300,20 + 0,001 . 10506 - 3

$S_{1/7} =$ 300,20 + 10,51 - 3

$S_{1/7} =$ 307,71.

Comprobamos que 1 + 23+5+1 = 30 días –período de capitalización.

La determinación de i(d) resulta sencilla, porque el plazo de capitalización —30 días— coincide con el plazo al que se refiere la tasa. Caso contrario, primero debería adecuarse la tasa de interés al plazo al que se refiere el período de capitalización, por el camino de equivalencia financiera.

b) *Método indirecto por compensación.*

Fecha	*Movimientos del día*	*Días transcurridos desde c/movimiento hasta el cierre del período de capitaliz.*	*NUMERALES* ($S_j \cdot n_j$)
01/06	Saldo anterior 150	30	4500,00
1/06	Intereses 3,20	30	96,00
1/06	Débitos internos (3)	30	(90)
2/06	Depósito 200,00	29	5800,00
10/06	Depósito 85,00	21	1785,00
10/06	Extracción (85,00)	21	(1785,00)
25/06	Depósito 50,00	6	300,00
30/06	Déb. servic. vs. (100)	1	(100)
	Totales		*10506,00*

$S_{1/7}$ =300,20 +$i_{(d)}$ [150*30 +3.2*30 - 3*30 +200*29+85*21-85*21+50*6-100] - 3

$S_{1/7}$ = 300,20 + 0,001 . 10506 - 3

$S_{1/7}$ = 300,20 + 10,51 - 3

$S_{1/7}$ = 307,71.

Ya sea por movimientos o por saldos, el método indirecto implica la utilización de Numerales (producto entre los capitales y los tiempos) e importa la determinación de los intereses considerando un tanto de interés constante —para todo el período— y ello no resulta siempre así; en el caso de un mix de tasas dentro de un período determinado, sería necesario incorporar la tasa de interés dentro de cada uno de los términos que se encuentran dentro del corchete.

c) S" = 3 / 0,03 = 100.

9) Una persona el 16.09 abrió una cuenta de caja de ahorro en dólares con un depósito inicial de U$S 500. Asimismo, el 25.09 deposita U$S 2000 y el 1/10 extrae U$S 800. La tasa de interés que devenga la entidad por esta línea de captación es del 0,5% efectivo mensual. Existen cargos por mantenimiento de cuenta de U$S 3 mensuales, que se debitan de la cuenta simultáneamente con la acreditación de intereses.
Los intereses serán puestos a disposición el día 5.10 y serán calculados por el período comprendido desde el 2.09 al 5.10.
Determinar el saldo disponible al 5.10

Rta.: 1.701,38

	2-09 ...	*16-09*	*25-09*	*1-10*	*5-10*
	0	*14*	*23*	*29*	*33*
Acredit.del día		500	2.000		
Débitos del día				(800)	
Acredit de Ints. y Deb. Manten.					(3)+I
Saldos Diar	- - -	500	2.500	1700	

I - Se procede por equivalencia financiera a adecuar el tanto de interés de referencia al período de capitalización que comprende la cuenta.

- Cantidad de días del período de capitalización = 33
- Tasa de referencia = i(30) = 0,005 -base 30 días-

$$- \, i\,(33) = (1 + 0{,}005)^{33/30} - 1$$

II - Hallada la tasa referida al período de capitalización de la cuenta, se procede por algún método —por saldos o por compensación, directo o indirecto—, al devengamiento de intereses, conociendo que el cálculo interno se efectúa utilizando la ley financiera a interés simple.

$$I\,(0;n) = C(0) * i * n$$

como el devengamiento es diario C(0) es cada uno de los movimientos o saldos, según el método : n son las unidades de tiempo diaria y el tanto i será $i_d = \frac{i(33)}{33}$

III- Determinación de la cuantía de Capital e Intereses

a) *Método indirecto por saldos*

$$S(33) = (500+2000-800) + i_d\,[500*(25-16) + 2500*(29-23) + 1700*(33-29)] - 3$$

$$S(33) = (500+2000-800) + i_d\,[500*9 + 2500*6 + 1700*4] - 3$$

$$S(33) = 1700 + 4{,}38 - 3 = 1701{,}38$$

b) *Método indirecto por compensación*

$$S(33) = (500 + 2000 - 800) + i_d\,[500*(33-14) + 2000*(33-23) - 800*(33-29)]$$

$$S(33) = (500 + 2000 - 800) + i_d\,[500*19 + 2000*10 - 800*4]$$

$$\sum_{j=1}^{n} n_j = 14+9+6+4 = 33$$

$$S(33) = 700 + 4{,}38 - 3 = 1701{,}38$$

De todas formas es necesario aclarar que en el sistema financiero también actualmente se utiliza para el devengamiento de intereses en cuentas a la vista como ésta el interés compuesto., razón por la cual hubiera resultado diferente su cálculo

10) Deposito $ 7.000 en una Institución Bancaria por 45 días, siendo la tasa de interés para ese plazo del 7,6%. Ese mismo día deposito $ 10.000 en otra Institución, siendo la tasa de interés para ese plazo del 7,9%. Por último deposito en una tercera institución por 45 días al 6,5% la suma de $ 5.500.
   a) Cuál sería la tasa de interés media obtenida por el plazo de 45 días.
   b) Suponiendo que en las mismas condiciones descriptas se renueva la operación por otros 45 días, con retiro periódico de intereses. ¿Cuál será la tasa media obtenida por el plazo de 45 días?

Rta.: i(45) = 0,07464.

0	1	n=2
$C_0=7.000$	$i_1=0,076$	
$C_0=10.000$	$i_2=0,079$	
$C_0=5.500$	$i_3=0,065$	

7000 (1+0,076 .2) + 10000 (1+0,079 . 2) + 5500 (1+0,065 . 2) =
= (7000+10000+5500) (1+i.2)

Despejando queda:

$$\frac{\sum C(j) * i(j)}{\sum C(j)} = \frac{7000*0{,}076 + 10000*0{,}079 + 5500*0{,}065}{(7000+10000+5500)} = 0{,}07464$$

Como se observa el plazo no interviene en la ecuación del valor de "i", pues la determinación del tanto de interés es independiente de la variable temporal en el régimen a interés simple. Por lo expuesto, resulta indiferente para el cálculo del tanto de interés medio, considerar uno o más períodos de capitalización.

11) Con fecha 14.01 a un inversor le liquidaron en concepto de compra 48 acciones de PeCoy. al precio unitario de $ 20,50; 295 acciones de Sid a $ 3,08 y 1325 acciones de Alpo a $ 2,29. Los gastos de compra ascienden al 4 ‰en concepto de impuestos y derechos y además un arancel del 10 ‰ sobre cada especie por montos de compra, arancel que no podrá ser inferior a $ 10.

Si el 14.06 se liquida la venta de esta cartera a $ 1,18: Sid ; $8,50 PeCoy. y $ 2,29 Alpo; y los gastos de venta son:1,2% en impuestos y derechos y 9 ‰ en arancel,por montos superiores a $ 1000; caso contrario $ 10

como suma fija. Además: existen gastos administrativos de $ 25 por todo el período. En el transcurso de la tenencia hubo revalúo en acciones del 110% en el caso de PeCoy 50% en el caso de Sid.
Hallar: cuál fue el resultado —como variación relativa— de la inversión en su conjunto.

Rta.: Pérdida 14,17%.

	14-01		14-06	
	0		n=151	
PeCoy	$q_1=48$	$p_1=20{,}50$	$q_1=48.2{,}10$	$p_1=8{,}50$
Sid	$q_2=295$	$p_2=3{,}08$	$q_2=295 . 1{,}50$	$p_2=1{,}18$
Alpo	$q_3=1325$	$p_3=2{,}29$	$q_3=1325$	$p_3=2{,}29$
	Imp. y Der. 0,004q.p		*Imp. y Der. 0,012q.p*	
	Comisión 0,01q.p ó $10 el >		*Comisión 0,009q.p ó $10 el >*	
			Gastos administrativos: 25	

Fecha de compra: 14.01			-Posición-			
			I.Bruto	Imp.	Comisión	Imp.desembols..
PeCo	48	20,50	984	3.94	10	997.94
Sid	295	3.08	908.6	3.63	10	922.23
Alpo	1325	2.29	3034.3	12.14	30.34	3076.78
			4926.9	19.71	50.34	4996.95

Fecha de realización: 14.06			-Posición-			
			I.Bruto	Impuest.	Comisión	Importe a cobrar
PeCo	48*2.1=101	8.50	858.5	-10.3	-10	838.20
Sid	295*1.5=442	1.18	521.56	- 6.26	-10	505.30
Alpo	1325*1=1325	2.29	3034.25	-36.41	-27.31	2970.53
			4414.31	52.97	47.31	4314.03
				Gastos admin.......		- 25.00
						4289.03

Pérdida de la operación (en variac.relativa):
i = (4289.03 - 4996.95)/4996.95 = 0.1417

12) El 20.04 se da una orden de compra a un agente de Bolsa para que adquiera por nuestra cuenta y orden en el Mercado de Valores de Bs. As. acciones de la empresa xx por un monto total a erogar de $ 10.000.
Hallar:
   1) la cantidad de acciones compradas, si el precio unitario es de $ 20,54.
   2) el importe de venta de la acción, si desea realizarla 1 mes después:
      2.1: se desea ganar un interés mensual del 2% de la cuantía invertida.
      2.2: se busca el punto de equilibrio, de forma tal que cubra los costos. Costos de entrada: 1,76 ‰. Costos de salida: 2,01‰.

1) q=486 2) p= 21,03 y 20,62

0 n=1(30 días)

/____/

$q_0 \cdot p_0 + 0{,}00176\, q_0 \cdot p_0 = 10.000$ $(q_1 \cdot p_1 - 0{,}002010 \,.\, q_1 \cdot p_1) 1{,}02 = 10.000$

$p_0 = 20{,}54$

1) 10000 = q . 20,54 . (1+0,00176)

$q = \dfrac{10000}{20.54\ (1{,}00176)}$ ====> q=486 486 * 20.54 = 9982.44.

más Gs.Cpra = 17.56 10000

2.1) Si invertí $10.000 y quiero obtener el 2% mensual de dicha cuantía, entonces debo realizar mi activo si el precio es aquel que genere un monto de $ 10.200.

[(486 * p) (1 - 0.002010] = 10000 (1 + 0.02).

p = 10000 (1+ 0.02)/486(1- 0.00201)= 21.03

486*21.03= 10220.54

Gs.Vta = 20.54 10200

2.2.) $p = \dfrac{10000}{486\ (1\text{-}0.00201)} = 20{,}62$

Capítulo II

Régimen de capitalización a interés compuesto

Realizaremos el cuadro de marcha de una operación de depósito de $ 1.000 colocado a una tasa de interés periódica sin retiro es decir con reinversión periódica de intereses, considerando por ejemplo que el período es de 30 días (mensual) y la tasa de interés mensual es del 10%.

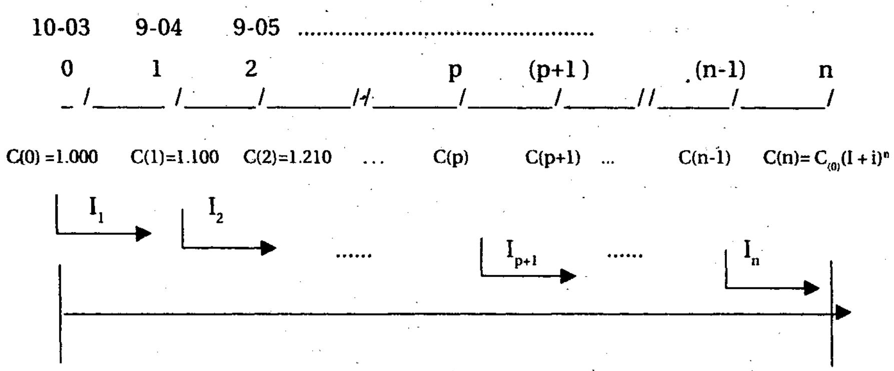
Para ello ubicaremos dicha operación en el eje de tiempo para una mejor comprensión.

Es decir:

Capital $C_0 = 1.000$

Tasa de interés mensual $i_{30} = 0,1$

Eje de tiempo



$$I(0;n) = I_1 + I_2 + \ldots. I_p + I_{p+1} + \ldots .+ I_n$$

$$I(0;n) = C_0 . i + C_1 . i + \ldots C_{p-1} . i + C_p . i + \ldots + C_{n-1} . i$$

Cuadro de marcha del montante o valor final

REGIMEN DE CAPITALIZACION A INTERES COMPUESTO				*CO = 1.000 i = 0,10*	
Fecha	*P*	*Concepto*	*Importe*	*Fórmula*	
10-03	*0*	*Capital de l mom. 0*	*1.000*	*C0*	C_0
9-04	*1*	*Interés del periodo 1*	*100 = 1.000 * 0,10*	$I(0;1) = I_1 = Co\,.\,i$	
		Montante al mom. 1	*1.100 = 1.000 + 100*	$C1 = C_0 + I_1 = C_0 + C_0 i = C_0 (1+.\,i)$	$C_1 = C_0 (1+i)$
9-05	*2*	*Interés del periodo 2*	*110 = 1.100 * 0,10*	$I(1;2) = I_2 = C_1\,.\,i$	
		Montante al mom. 2	*1.210 = 1.100 + 110*	$C_2 = C_1 + C_1\,.\,i = C_1 (1+.\,i) = C_0 (1+i)(1.\,i) = C_0 (1+i)^2$	$C_2 = C_0 (1+i)^2$
...		....	....	....	
....	*P*	*Interés del periodo p*		$I(p-1;p) = Ip = Cp\,.\,i$	...
		Montante al mom.. p		$Cp = C_{p-1} + I_p = C_0 (1+i)^{p-1} + C_0 (1+i)^{p-1}.i = Cp = C_0 (1+i)^{p-1}(1+i) = C_0 (1+i)^p$	$C_p = C_0 (1+i)^p$
Entonces se induce que: $C_{(n-1)} = C_0\ (1+.\,i)^{n-1}$ + $I(n-1;n) = C_{n-1}\,.\,i$ / $C_{(n)} = C_0\ (1+.\,i)^n$					
	n	*Interés del periodo*		$I(n-1;n) = In = C(n-1)\,.\,i$	
		Montante		$Cn = C_0 + I_1 + ... + I_n =$	$C_n = C_0 (1+.\,i)^n$

Proporcionalidad: Los intereses totales son proporcionales sólo al capital, no así a la tasa de interés y al tiempo. De todas formas, en el mundo real podemos decir que no siempre resulta válida, pues depende de las cuantías y de sus posibilidades de inversión, ya que las alternativas de colocación de cuantías importantes generan una rentabilidad mayor que con las pequeñas.

La proporcionalidad con respecto al capital también se entiende como "el monto generado por la suma de capitales es la suma de los montos derivados de cada uno de esos capitales" —propiedad aditiva—.

Conociendo el montante se puede determinar los intereses totales de la operación:

$$I(0;n) = C_{(n)} - C_{(0)} = \Delta C_{(0)}$$

$$I(0;n) = C_0 [(1 + . i)^n -1]$$

Al igual que hicimos en el Régimen de Capitalización anterior, en un pequeño cuadro resumimos las fórmulas que surgen a partir del monto para el cálculo de cada uno de sus componentes.

Régimen de Capitalización a Interés Compuesto	
Monto	$C_n = C_0 [(1 + i)^n$
Intereses	$I(0;n) = C_0 [(1 + i)^n - 1]$
Capital inicial	$C_0 = \dfrac{C_n}{(1+i)^n}$ $\qquad C_0 = \dfrac{I(0;n)}{(1+i)^n - 1}$
Tasa de Interés	$i = \left(\dfrac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$
Plazo	$n = \dfrac{\log C_n - \log C_o}{\log(1+i)}$

Cuadro de valores de la función, sus variaciones absolutas y relativas

Mom.	Capital al momento p	Interés acumulado hasta p	Interés periódico	*Intensidad Periódica*
p	C(p)	I(0;p)	I(p-1;p)	$\frac{I(p-1;p)}{C_{p-1}}$
0	*1000.*	-	-	-
1	*1.100*	*100*	*100*	*0,10*
2	*1.210*	*210*	*110*	*0,10*
3	*1.331*	*331*	*121*	*0,10*

Análisis y Gráfico de la función financiera

La función financiera $(1+i)^n$ es una magnitud que representa el valor final o monto o montante de un capital inicial de una unidad monetaria luego de n periodos valuado a la tasa i periódica, considerando la convención exponencial, es decir la reinversión periódica de intereses.

Tiene la característica de generar intereses periódicos crecientes (aunque la tasa de interés sea constante), pues se calculan sobre los montos, con excepción del primer período en que se calcula sobre el capital, ello hace que produzca intereses no solo el capital sino los intereses acumuados al mismo; de allí que la función que se grafique sea una curva.

$$F(n) = (1+i)^n$$

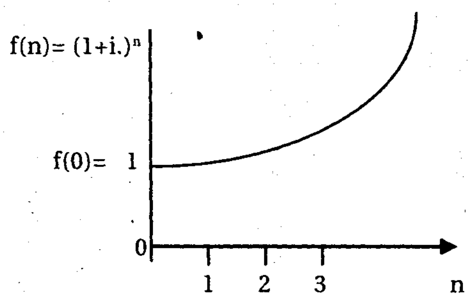
$F'(n) = (1+i)^n . \ln(1+i) > 0$ → función creciente $\forall n \geq 0$

$F''(n) = (1+i)^n . [\ln(1+i)]^2 > 0$ → función cóncava $\forall n \geq 0$

n	F(n)=(1+i.)^n
0	1
1	1+i
...	
∞	∞

Se trata de una función exponencial, pues a medida que aumentan los períodos de capitalización aumentará el valor final.

La función exponencial es de la forma $y = b\,a^x$ y en nuestro caso $f(n) = (1+i)^n$; en donde la función monto se origina en 1 pues corta al eje de las ordenadas en el punto 1 cuando n=0 (origen de la operación). Al igual que en la ley financiera a interés simple acá seguimos analizando la capitalización, cómo evoluciona ese capital a través del tiempo y tendrá sentido financiero sólo si i>0.



Vemos que es la representación de una curva creciente, cóncava al origen, cuya variable dependiente es el monto y la ordenada al origen es el capital original, acá representamos el tiempo como variable independiente, manteniendo constante la tasa.

Podríamos haber analizado la función considerando variable la tasa de interés y constante el tiempo.

Características del régimen de capitalización a interés compuesto

- Los intereses se calculan siempre sobre el monto al inicio de cada período.
- Los intereses periódicos son crecientes.
- El interés acumulado es la suma de los intereses que crecen en progresión geométrica cuya razón es (1+i).
- El valor final crece en progresión geométrica cuya razón es (1+i).
- La proporcionalidad de los intereses se da con respecto a C_o.
- La relación entre el interés periódico y el capital generador —que es el monto al inicio— es una constante y coincide con la tasa contractual periódica.
- La ley financiera de capitalización $(1+i.)^n$ está definida para n^30; para un capital de una unidad monetaria, en donde en el momento p el valor $(1+i)^p > (1+i)^{(p-1)}$ en el momento (p-1), ya que sería un absurdo considerar intereses negativos.
- Tiene como factor recíproco $\frac{1}{(1+i.)^n} = (1+i)^{-n}$ ya que el producto de ambos factores $(1+i)^n$ y $(1+i)^{-n}$ es igual a 1. Este 2° factor lo veremos más adelante, pero estaría expresando la inversa del proceso de capitalización, y ese factor recíproco es el factor de actualización a interés compuesto, la ley conjugada de descuento.
- Tiene una ley prolongada de descuento que es $(1+i)^{-n}$ pues podemos capitalizar y actualizar y llegamos a C_0. Es decir: $C_0\,(1+i)^n\,(1+i)^{-n} = C_o$.

- Es escindible ya que el monto generado por un capital inicial no varía al separarla en varios capitales sucesivos y reinvertirlos cada vez.

  En general es escindible si $f(x) \cdot f(y) = f(x+y)$

  Acá sería $C_0 (1+i)^n (1+i)^p = C_0 (1+i)^{n+p}$

  Sin embargo, en el mundo real a veces las operaciones colocadas con esta ley financiera no son escindibles.

Tasas variables en el régimen de capitalización a interés compuesto

Debemos plantear la fórmula de monto considerando que las tasas de colocación sean diferentes en cada renovación de la operación y podríamos entonces, hacer algunos agregados en el cuadro de marcha insertando el subíndice en el tanto de interés de cada período de forma tal que resumidamente nos quedaría:

0 1 2 (n-1) n

/______/______/______//______/______/

$C_{(0)}$ $\quad C_{(1)} = C_{(0)} (1+i_1)$ $\quad C_{(2)} = C_{(0)} (1+i_1 (1+i_2)$ $\quad C_{(n-1)}$ $\quad C_{(n)} = C_(1+i_1)+(1+i_2)\ldots(1+i_n)$

$I_1 = C_{(0)} . i_1$ $\quad I_2 = C_{(1)} . i_2$ $\quad I_n = C_{(n-1)} . i_n$

$$C_n = C_0 \ . [\prod_{j=1}^{n} (1+i_j)]$$

Supongamos un capital de \$ 1.000 tomado en préstamo a devolver dentro de 4 meses conjuntamente con sus intereses devengados mensualmente, siendo las tasas de aplicación vigentes en cada período de devengamiento del 1,5% mensual para el primer período mensual, el 1,8% mensual para el segundo y así sucesivamente el 1,72% y el 1,6%. Se pretende hallar:

a) el valor final pagado por todo concepto;

b) la tasa media mensual resultante.

Para resolver el primer punto aplicamos la fórmula de monto

$$C_4 = 1.000 \ . [\prod_{j=1}^{n} (1+i_j)] ; \text{siendo } i_1 = 0{,}015 ; i_2 = 0{,}018 ; i_3 = 0{,}0172 ; i_4 = 0{,}016$$

$C_4 = 1.000 \ (1+ 0.{,}015). \ (1+0.018) \ . \ (1+0.0172) \ .(1+0.016)$
$C_4 = 1.000 \ (1+0{,}06786) = 1.067{,}86$
$C_4 = 1.067{,}86$

Posteriormente, planteamos entonces la equivalencia financiera en donde podemos expresar que el monto generado por un capital colocado a una tasa i (representativa de todo el plazo= tasa media o promedio) debe ser equivalente al monto generado por el mismo capital colocado a diferentes tasas periódicas i_j.

$$C_0(1+i)^n = C_o \ .[\prod_{j=1}^{n}(1+i_j)]$$

Si despejamos el valor de "i" encontramos un promedio geométrico:

$$i = \left[\prod_{j=1}^{n}(1+i_j)\right]^{\frac{1}{n}} - 1$$

$$i = [(1+0{,}015),(1+0{,}018).)(1+0{,}0172).(1+0{,}016)]^{\frac{1}{4}} - 1 = (1+0{,}06786)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0{,}016549$$

Podemos comprobar que el monto generado por ese capital de 1.000 colocado a una tasa constante del 1,6549% mensual da un valor final de $ 1.067,86.

Otra forma de hallar la tasa media es relacionando el monto y el capital inicial; de allí conseguimos la variación absoluta que es el incremento del capital por todo el plazo; en nuestro ejemplo: 1067,86- 1000 = 67,86.

Si el incremento del capital lo relacionamos con el capital original arroja una variación relativa que es el tanto de interés por todo el período —en este caso cuatrimestral—:

$$\frac{67{,}86}{1000} = 0{,}06786$$

Como tenemos que determinar la tasa subperiódica, una tasa mensual y estamos trabajando con el criterio exponencial, la fracción de la cantidad de períodos en este caso estará como operación inversa de la potenciación que es la raíz.

$$(1+0{,}06786) = (1+i)^{\frac{1}{4}} - 1$$

Como prueba de ello, podríamos haber partido del valor hallado al capitalizar a interés compuesto por las diferentes tasas de interés periódicas el capital inicial arrojando un monto de 1067,86 = 1000 (1 + i)^4 y despejando i:

$$i = \left(\frac{1066{,}20}{1.000}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = (1{,}06620)^{\frac{1}{4}} = 0{,}016549$$

Observemos bien cómo podemos leer cada uno de los pasos en esa fórmula derivada de "i":

$$i = \left(\frac{C_n}{C_o} \right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

El cociente entre paréntesis representa el valor final de 1 unidad de capital capitalizada a la tasa del plazo total de la operación, en este caso cuatrimestral y al tener el exponente fraccionario estamos hallando el valor final al cabo de un subperíodo —mensual para nuestro ejercicio—. Luego restamos la unidad de capital invertido cuya resta arroja el tanto de interés periódico, que coincide con el interés periódico de una unidad de capital.

Ejemplos en nuestro contexto financiero

Pensemos en las aplicaciones del régimen de interés compuesto además de la colocación de un depósito a plazo con reinversión periódica de intereses, podemos agregar la operación de préstamo de un capital con reembolso de capital e intereses al vencimiento, el cálculo del devengamiento de intereses de las cuentas a la vista, la elaboración de las series estadísticas diarias de Banco Central, la elaboración de coeficientes tales como el C.E.R. y el C.V.S. Los sistemas de préstamos del mercado financiero institucionalizado, cálculos de moratorias impositivas que permiten la cancelación de deudas en cuotas múltiples.

Aplicaciones

1) Una persona ha colocado durante 10 meses en total, la suma de $ 200; primero al 3,5% mensual y luego al 4,5% mensual, hasta la finalización de la operación. Si el monto resultó ser de $ 301,76, calcular el tiempo que dicha inversión estuvo colocada a cada tasa, sabiendo que se reinviertieron los intereses periódicamente.

   Rta.: n' = 3 y n" = 7 meses.

```
0       1                 n.                  n'+n"=10
/_______/_________//_________/_________//_________/
C0=200                                      Cn=301,76
     i1=0,035                      i1=0,045
```

$$301{,}76 = 200 * (1 + 0{,}035)^{n'} * (1 + 0{,}045)^{n''}$$

$$\frac{301{,}76}{200} = (1+0{,}035)^{n'} (1+0{,}045)^{10-n'}$$

$$\lg 301{,}76 - \lg 200 = n' \lg 1{,}035 + (10 - n') \lg 1{,}045$$

$$\lg 301{,}76 - \lg 200 = n'(\lg 1{,}035 - \lg 1{,}045) + 10 \lg 1{,}045$$

$$n' = \frac{\lg 301{,}76 - \lg 200 - 10 \lg 1{,}045}{(\lg 1{,}035 - \lg 1{,}045)} = \frac{-0{,}01253123}{-0{,}00417595} = 3$$

Si n'=3 y n'+n"=10 ==> n"=7

2) El 20.12 un depositante coloca $ 80 por un plazo de 10 dias siendo la tasa efectiva mensual del 7%. El valor obtenido se vuelve a invertir en otra entidad que paga el 7,5% efectivo mensual, por un plazo de 20 días. Determinar el monto reunido y los intereses de toda la operación.

Rta.: C(n)= 85,87 I(0;n) = 5,87.

20/12	30/12	19/01
$C_0=80$	$i_{7=}f(i_{30}=0,07)$	$i_{20=}f(i_{30}=0,075)$

$$C(n) = 80 * (1+0,07)^{(10/30)} * (1+0,075)^{(20/31)} \Longrightarrow$$

C(n) = 85,87
C(0) = 80,00
I(0,n) = 5,87

3) Cuál fue la tasa de colocación de un capital de $ 100, si estuvo colocado durante 30 días, con una capitalización cada 10 días, obteniéndose un interés total de $ 5,50.

Rta.: i = 0,018.

0	1	2	3
$C_0=100$		i	$C_3=105,50$

$5,50 = 100 * [(1 + i)^3 - 1]$.
i = 0,018.

4) Si se depositó hace 14 meses $ 1000 al 5% mensual de interés y al cumplir 5 meses la operación, se efectué un cierto retiro. Posteriormente al cumplirse los 11 meses de iniciada la operación se colocan $ 1139,08 con lo cual actualmente se posee un monto igual al que originariamente se esperaba reunir sólo con el capital inicial. Se pide determinar el importe del retiro efectuado, sabiendo que existe en toda la operación reinversión periódica mensual de intereses.

Rta.: R = 850.

0	1	...	5	6		11	n=14
C_0= 1.000	i_1=0,05		R		...	1.139,08	C_{14}

$$\{ [1000 .(1+0,05)^5 - R(5)] . (1+0,05)^6 + 1139,08 \}. (1,05)^3 = 1000 .(1+0,05)^{14}$$

Si el valor despejado de R(5) lo reemplazamos en la ecuación anterior el valor final obtenido será de 1.980.

5) Si deseamos hacer un depósito que arroje un valor final de $ 3389,88 y teniendo en cuenta un descuento del 2% aplicado sobre los intereses a cargo del depositante. Calcular cuál será el importe a depositar si estar colocado 11 meses estimando que la tasa para los primeros 5 meses sea del 5,5% mensual y para el resto la tasa mensual es la anterior adicionada en un punto mensual. Considerar que se reinvierten periódicamente (mensual) los intereses.

Rta.: C(0)= 1800.

0 1 5 11

/______/______//______/__________________/

C_0 $i_1 = 0{,}055$ $i_2 = 0{,}065$ $C_n = 3.389{,}88$

$\alpha = 0{,}02$

$3389{,}88 = C_{(0)} \cdot (1 + 0{,}98 * 0{,}055)^5 \, (1 + 0{,}98 * 0{,}065)^6$

6) Determinar el tiempo en que un capital de $ 2.100 colocado a un tanto de interés del 5,9% mensual y otro de $ 2400 invertido al 4,5% mensual produce en el mismo valor final. Considerar que todos los meses se reinvierten los intereses.

Rta.: n= 10 meses.

0 1

/______________________/

$C_0 = 2.100$ $C_n = 2.100\,(1+0{,}059)^n$

$C_0 = 2.400$ $C_n = 2.400\,(1+0{,}045)^n$

$2100 * (1 + 0{,}059)^n = 2400 * (1 + 0{,}045)^n$

$\log 2.100 + n.\log 1{,}059 = \log 2400 + n \log 1{,}045$

$$n = \frac{\log 2.100 - \log 2.400}{\log 1{,}045 - \log 1{,}059} = \frac{-0{,}05799195}{-0{,}0057797} = 10$$

7) Calcular el tiempo en que una cierta suma de dinero estuvo colocada a las tasas de interés pactadas, sabiendo que se depositó en una entidad financiera que capitaliza los intereses cada 40 días y paga por los

depósitos el 8,5% efectivo mensual y posteriormente modifica la tasa al 192% efectiva anual, si el valor final reunido fue de $ 1661,38 y los intereses ganados en toda la operación fue de $ 1.311,38 al cabo de 560 días.

Rta.: n(1) = 10 n(2) = 4.

0	*40*	*80*	....	*560*	*días*
0	*1*	*2*	...	*14*	*períodos*

/__________/__________/_______//_______/

C_0=(1.661,38-1.311,38) C_{14}=1.661,38

$i'_{40}=f(i_{30}=0{,}085)$ $i''_{40}=f(i_{365}=1{,}92)$

$$(1661{,}38 - 1311{,}38)*(1+0{,}1149)^{(n1)} * (1+0{,}1246)^{(n2)} = 1661{,}38$$

8) Calcular el tiempo que debe transcurrir para que un capital de $ 200 colocado a interés compuesto a la tasa del 9,2% trimestral se triplique.

Rta.: n= 12,48 trimestres.

0 1 n

/__________/__________//__________/

$C_{0=200}$ $i_{90}=0{,}092$ C_n= 3. 200

$$200 \,.\, (1+0{,}092)^n = 3 \,.\, 200$$

$$n = \frac{\log 3}{\log(1+0{,}092)}$$

La interpretación fraccionaria es que se necesitan más de 12 trimestres, pudiéndose colocar el capital por ese plazo entero y luego por 42 días a un tanto de interés equivalente al 9,2% trimestral.

9) Determinar el tiempo que debe transcurrir para que una colocación de $ 160 sufra una variación relativa del 30%, suponiendo una tasa de interés del 5% mensual acumulativa.

Rta.: 5,38 meses.

0 1 n

/__________/__________//__________/

$C_{0=160}$ $i_{30}=0{,}05$ C_n=160+0,30. 160=208

$$208 = 160 * (1+0{,}05)^n$$

(Considerar la interpretación financiera del plazo)

10) Determinar cuál es la tasa de interés bimestral, tal que triplique un capital de $350 al cabo de 8 bimestres, considerando la reinversión periódica de intereses.

Rta.: i(60) = 0,1472.

```
0                1              n=8
/________________/_____//_____/
C0= 350         i60            Cn= 3. 350
```

$$350 = 3.\ 350\ (1+i)^{8}$$

11) Cuál es el número de períodos en que un capital de $ 200 colocado a una tasa del 3,2% mensual a interés compuesto se duplica.

Rta.: n = 22.

```
0                   1                        n
/___________________/___________//____________/
C0=200   i30=0,032                       Cn=2. 200
```

$$200 = 2.\ 200 * (1 + 0{,}032)^{n}$$
$$n = \log 2\ /\ \log 1{,}032$$

12) Cuál es el capital que al 5% mensual en 3 meses ha producido a interés compuesto un monto que supera en $ 200 al que se hubiera obtenido a esa tasa a interés simple.

Rta.: (Co) = 26229,5.

```
0              1              2              n=3
/______________/______________/______________/
C0   i30=0,05                    Cn=C0.(1+0,05)³.
C0   i30=0,05                    Cn=C0.(1+0,05.3)+ 200.
```

$$C_{(0)}\ .\ (1 + 0{,}05)^{3} = C_{(0)}.\ (1 + 0{,}05\ .\ 3) + 200.$$

13) Dentro de cuántos días un capital de $ 5000 colocado al 0,3% equivalente diario produce un interés de $ 503.

Rta.: 32 días.

```
0              1              2                 n
/______________/______________/______//________/
C0= 5.000   i1= 0,003                      Cn= 5.503
```

$$I(0;n) = 503$$

Capítulo III

Capitalización a interés simple y compuesta

A través del desarrollo de la potencia n de un binomio de la función financiera -Binomio de Newton o bien mediante el desarrollo por Mac Laurin de $F(i)=(1+i)^n$ podemos analizar el comportamiento de la función.

En donde $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 ...$

O bien;

$F(x) = f(o) + f'(0).x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!}$ ... en nuestro caso:

$$(1+i)^n = 1 + i \cdot n + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2!} i + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} i^2}_{\alpha}$$

$(1+i)^n = 1 + i \cdot n + \alpha \quad \rightarrow (1+i)^n > (1 + i \cdot n) \quad \forall\ n>1$

$(1+i)^n = 1 + i \cdot n + 0 \quad \rightarrow (1+i)^n = 1 + i \cdot n \quad \forall\ n=0=1$

$(1+i)^n = 1 + i \cdot n - \alpha \quad \rightarrow (1+i)^n < (1 + i \cdot n) \quad \forall\ 0 < n < 1$

Acá estaríamos considerando un período fraccionario en donde podemos observar que el monto a interés simple es mayor al monto a interés compuesto cuando se trata de un período "f" menor que la unidad de tiempo.

Tiene ciertas aplicaciones, tales como el pago de cuotas o cancelaciones en un período fraccionario de tiempo. A continuación lo trataremos.

Convención lineal y exponencial en caso de un período fraccionario

La fórmula de monto ha sido planteada considerando "n" entero. Pero: ¿cómo procedemos si queremos buscar el monto al cabo de un tiempo= (n+f) representando a "f" como el período fraccionario?

a) $C_{n+f} = C_0 (1+i)^n (1+i.f)$ → Convención lineal

b) $C_{n+f} = C_0 (1+i)^n (1+i.)^f$ → Convención exponencial

Como vimos en el punto anterior en fracciones de período el monto a interés compuesto es menor al monto a interés simple.

Veamos el caso de una deuda de $ 128.000 contraída el 10/03 con intereses que se capitalizan mensualmente al 6% mensual.

a) Calculemos el monto adeudado al 8/07.

b) Si deseamos cancelar el 31/07 en un intervalo que media entre un vencimiento y el próximo. Hallemos cuál es el importe de intereses adicionales que se deben cargar al cálculo del punto anterior.

10-03	9-04	9-05	8-06	8-07	31-07
0	1	2	3	4 ...	n+f
/	/	/	/	/	/

C_0=128.000 $C_4=128.000.(1+0{,}06)^4=161.597{,}05$

Tratamiento del período fraccionario

- Convención lineal: $161597{,}05\,.\dfrac{23}{30}.0{,}06 = 7.433{,}46$

-Convención exponencial: $161597{,}05\,.\left[(1+0{,}06)^{\frac{23}{30}}-1\right]=7.382{,}67$

El monto a interés compuesto es mayor que el monto a interés simple cuando n>1. Pero en el caso que 0<n<1 se produce la relación inversa.

Si seguimos la convención exponencial también para la capitalización del período fraccionario dada la propiedad de escindibilidad: $(1+i)^n\,(1+i)^f=(1+i)^{(n+f)}$.

Empezamos a encontrar una coherencia financiera en el régimen a interés compuesto ya que se trata de una ley financiera completa, es prolongo-conjugada, se puede transformar financieramente un capital original avanzando en el eje de tiempo por la coordenada temporal positiva utilizando el primer cuadrante del grafico de la función y se puede retroceder en el eje negativo del tiempo utilizando el segundo cuadrante. Sin embargo no se utiliza este cuadrante que se corresponde con el eje de tiempo negativo y el análisis de la ley financiera sea de capitalización o sea de actualización se realiza utilizando siempre el mismo cuadrante 1.

Magnitudes

Podríamos definir las magnitudes principales que son propias de cada operación financiera y sin las cuales no existe operación financiera: son la cuantía y el vencimiento de cada cuantía.

Las magnitudes derivadas son aquellas que derivan de las anteriores y son las que nos permiten encontrar características básicas de cada ley financiera. Nos ayudan a expresar la dinámica de un capital considerando un determinado periodo que podrá ser:

- a partir del momento 0 (momento inicial), o
- entre dos momentos cualesquiera.

Expresaremos las magnitudes que son características para cada una de las funciones financieras singulares o de capital único vistas:

Magnitudes		**Interés Simple**	**Interés Compuesto**
• **Factor de capitalización**	Expresa el monto de una unidad de capital luego de n períodos colocada a una tasa de interés "i" periódica considerando el criterio: • Lineal –interés simple • Exponencial –interés compuesto El producto del factor de capitalización y la cuantía del capital inicial –C_0- lo transforma en el capital equivalente –C_n.	$f(n)= (1+i \,.\, n)$	$f(n)=(1+i)^n$
• **Interés unitario**	Es el incremento de un capital unitario durante el plazo total de la operación –n- Es una variación absoluta	$I'(0;n) = (1+i\,n) - 1$ $I(0;n) = i\,n$	$I'(0;n) =(1+i)^n - 1$
• **Interés acumulado**	Es el incremento de un capital de cuantía C_o durante el plazo total de la operación –n- Es una variación absoluta	$I(0;n) = C_0 I'(0;n)$ $I(0;n)=C_0 [(1+i\,n)-1]$ $I(0;n)=C_0\, i.\, n$	$I(0;n) = C_0 I'(0;n)$ $I(0;n)=C_0[(1+i)^n -1]$
• **Interés periódico**	Es la diferencia de intereses en dos momentos sucesivos: p y p+1	$I(p;p+1) = [1+i(p+1)] - (1+ip)$ $I(p;p+1) =i \rightarrow$ constante	$I(p;p+1) = (1+i)^{p+1} - (1+i)^p$ $I(p;p+1) = i\,(1+i)^p \rightarrow$ creciente
• **Intensidad unitaria**	Es la relación entre el interés unitario y la amplitud del intervalo –el plazo de la operación.	$I'(0;n) = \dfrac{(1+i\,n) - 1}{n}$	$I'(0;n) = \dfrac{(1+i)^n - 1}{n}$
• **Intensidad periódica**	Es la relación entre el interés periódico y el monto al inicio del periodo	$I(p;p+1) = \dfrac{i}{(1+ip)}$ $\rightarrow$ *decreciente*	$I(p;p+1) = \dfrac{i\,(1+i)^p}{(1+i)^p}$ $i \rightarrow$ *constante*

Vamos a identificar las magnitudes en las fórmulas de capitalización utilizando:

- Ley financiera a interés simple en fórmulas y aplicadas para un capital de $1.

Magnitud "Interés Acumulado"

Capital	Interés	Monto
C_o	$I(0;n)$	C_n
1	in	(1+in)

Magnitud "Interés Unitario" Magnitud "factor de capitalización"

Aplicamos la regla de las proporciones; tenemos:

$$\frac{1}{C_0} = \frac{i.n}{I(0;n)} = \frac{(1+in)}{C_n}$$

Entonces surge:

$I(0;n) \quad = C_o \,.\, i \,.\, n$
$C_0 \,.\, (1+ i \,.\, n) = C_n$
$C_n \,.\, i \,.\, n \quad = I(0;n) \,.\, (1+ i.\, n)$

- Ley financiera a interés compuesto

Magnitud "Interés Acumulado"

Capital	Interés	Monto
C_o	$I(0;n)$	C_n
1	$(1+i)^n{}_{-1}$	$(1+i)^n$

Magnitud "Interés Unitario" Magnitud "factor de capitalización"

Aplicamos la regla de las proporciones; tenemos:

$$\frac{1}{C_0} = \frac{(1+i)^n - 1}{I(0;n)} = \frac{(1+i)^n}{C_n}$$

Entonces surge:

$I(0;n) \quad = C_o \,.\, [(1+i)^n - 1]$
$C_n \quad = C_0 \,.\, (1+ i)^n$
$C_n [(1+i)^n -1] = I(0;n) \,.\, (1+ i)^n$
$C_n \quad = I(0;n) \,.\, \dfrac{(1+ i)^n}{[(1+i)^n -1]}$
$I(0;n) = \dfrac{C_n [(1 + i)^n - 1]}{(1 + i)^n} = C_n [1 - (1 + i)^{-n}]$

Aplicaciones

1) Dados dos capitales C(j) expresados en el momento j; en donde C(0)= 12000 y C(4)= 18000; se sabe que ambos resultan equivalentes financieramente en base a la Ley de Capitalización: $L = (1 + i \,.\, t)$ y, $L = (1 + i)^t$.
Determinar: a) El valor del parámetro "i"; b) El interés periódico; c) La intensidad periódica.

Rta.:

	$L = (1 + i \,.\, t)$	$L = (1 + i)^t$
i -valor relativo-	"0,125"	"0,1067"
Interés. Periód. -unid. monet.-	"0,125"	"0,1067; 0,1181; 0,13007 y 0,1445"
Intensidad Periód .-valor relat.-	"0,125; 0,111; 0,10 y 0,09"	"0,1067"

Si: $L = (1 + i \cdot t)$

a) $12000 \cdot (1 + 4 \cdot i) = 18000.$

$$i = \left[\frac{18000}{12000} - 1\right] / 4 = 0.125.$$

b) $I(t;t+1) = C(t+1) - C(t)$ « $C(0) = 1.$

$I(t;t+1) = \{[1 + i(t+1)] - (1 + i\,t)\}$

$I(t;t+1) = i$ —constante—.

$i = 0.125.$

c) $I'(t;t+1) = \dfrac{I(t;t+1)}{C(t)} = \dfrac{i}{1+i\,.t.}$ —decreciente—.

$I'(0;1) = 0.125.$

$I'(1;2) = 0.125 / (1+0.125) = 0.111.$

$I'(2;3) = 0.125 / (1+0.25) = 0.10.$

$I'(3,4) = 0.125 / (1+0.375) = 0.09.$

Si: $L = (1 + i)^t$

a) Como los capitales son financieramente equivalentes, se cumple que:

$12000 \cdot (1 + i)^4 = 18000.$

$$i = \left(\frac{18000}{12000}\right)^{1/4} - 1.$$

$i = 0.1067.$

b) $I(t;t+1) = C(t+1) - C(t).$

$\forall\, C(0) = 1$, tenemos:.

$I(t;t+1) = [(1+i)^{t+1} - (1+i)^{t}].$

$I(t;t+1) = i \cdot (1+i)^{t}.$ ➔ Es creciente, a medida que incrementa t.

Para C(0) = 1 y C(0)=12000, tenemos:

I(0;1) =	1 * 0.1067	= 0.1067	* 12000	= 1280
I(1;2) =	1.1067 * 0.1067	= 0.1181	* 12000	= 1417
I(2;3) =	1.2247 * 0.1067	= 0.1307	* 12000	= 1568
I(3;4) =	1.3554 * 0.1067	= 0.1445	* 12000	= 1735
		0.5000		6000

c) $I'(t;t+1) = \dfrac{I(t;t+1)}{C(t)} = \dfrac{i\,(1+i)^{t}}{(1+i)^{t}} = i$ —constante—.

$i = 0.1067.$

2) Un inversor realizó una serie de colocaciones financieras de acuerdo al siguiente esquema:

1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10	1/11	1/12	1/01
-	$ 50	-	-	$ 150	-	$ 80	-	-	-	-

Sabiendo que los réditos mensuales de capitalización son: 1.03 al 1.06...= 0.02; 1.06 al 1.09..=. 0.017; 1.09 al 1.01 = 0.032.
Determinar la suma financiera obtenida al 1.01, a) si se produce la reinversión periódica de los intereses y b)si se retiran periódicamente los intereses. Considerar período mensual.

Rta.: a) 328,79 ; b) 325,49

a) Reinversión mensual de los intereses

$$C(n)=50(1+0.02)^2(1+0.017)^3(1+0.032)^4+150\ (1+0.017)^2\ (1+0{,}032)^4+80\ (1+0.032)^4$$

$$C(n) = 50 * 1.241315 + 150 * 1.1731692 + 80 * 1.1342761$$

$$C(n) = 62.07 + 175.98 + 90.74$$

$$C(n) = 328.79$$

b) Retiro periódico de los intereses

$$C(n) = 50[1 +0,.02 *2 + 0.017 *3 + 0.032* 4] +150\ [1\ 0.017*2 + 0.032 * 4] + 80\ [1+0.032 * 4]$$

$$C(n) = 50 * [1 + 0.219] + 150\ [1+0.162] + 80\ [1+0.128]$$

$$C(n) = 60.95 + 174.3 + 90.24$$

$$C(n) = 325.49$$

3) La cuantía de dos capitales iniciales es de $ 20.000 y resultan ser invertidos al 2,5% mensual, generando $ 2.400 de intereses cada uno. Sabiendo que el segundo de ellos estuvo colocado 4 meses más que el primero, determinar cuál fue el tiempo de colocación de cada uno de ellos y su cuantía. Considerar retiro periódico de intereses.

Rta.: n(l) = 8 ; C(1) 12.000 y C(2) 8.000.

$C(1) + C(2) = 20.000$; $n(2) = [n(l) + 4]$; $I(1) = I(2) = 2400$ e $i=0.025$.
$2400 = C(l) * n(l) * 0.025 \quad 2400 = C(2) * [n(l)+4] * 0.025$.

$$C(l) = \frac{2400}{n(l) * 0.025} \qquad C(2) = \frac{2400}{[n(l) +4] * 0.025}$$

$$20000 = \frac{2400}{n(l) * 0.025} + \frac{2400}{[n(l) + 4] * 0.025}$$

$n(1) = 8 \rightarrow n(2) = 12$

Entonces:.

$2400 = C(1) * 8 * 0.025.$

$C(1) = 12000 \rightarrow C(2) = 20000 - 12000 = 8000$

4) Dada una unidad de capital colocada durante 3 períodos trimestrales, con retiro periódico de intereses, siendo la T.N.A. para el plazo de 90 días del 42%. Expresar el montante como un sistema de capitalización con tasa periódica variable decreciente.

$$i(90) = \frac{0{,}42 * 90}{365} = 0{,}1035616 \qquad (1 + i_{90} * 3) = \prod_{j=1}^{3} (1 + r_j)$$

$r_1 = i = 0{,}10356$; denotando a r_j: rendimiento o intensidad periódica.

$$r_2 = \frac{i}{(1 + i)} = 0{,}093843$$

$$r_3 = \frac{i}{(1 + 2.i)} = 0{,}0857921$$

Comprobación:

$(1 + 0{,}1035616 *3) = (1+0{,}1035616) * (1+0{,}093843) * (1+0{,}0857921) = 1{,}3106849$

Capítulo IV

Tasas de interés

Objetivo

- Comprender diferentes tasas utilizadas en el mercado y poder manejarlas aplicándolas en cualquier situación.

Capitalización Discreta

Si buscamos información financiera en cualquier periódico nos encontramos con las siguientes notaciones:

T.N.A.
T.E.A.
T.E.M.

T.I.R.
T.I.R.E.A.
T.I.R.E.AM.

<se analizará más adelante>

Diferentes nombres de T.N.A.

- *Tasa nominal anual de interés para el plazo de "m" días*
- *Tasa nominal anual de int. capitalizable cada "m" días*
- *Tasa nominal anual de interés convertible cada "m" días*
- *Tasa anual vencida capitalizable cada "m" días*

$$\left.\right\} \ T.N.A._{(365/m)} = j_{(365/m)}$$

Tasa convenida o contractual de la operación. Es una tasa de trabajo expresada anualmente y capitaliza $\frac{365}{m}$ veces en el año, según el plazo "m" al que está referida.

a) *Caso 1*: Decido inmovilizarme por 1 año, mediante la colocación de una unidad de capital por ese plazo.
Dato: TNA del 36,5% para una operación a un año de plazo, en donde la capitalización de intereses se hace una vez al año. No hay duda de que el monto de una unidad de capital será (1 + 0,365).

b) *Caso 2*: Decido inmovilizarme por 1 año, mediante la colocación de una unidad de capital por un semestre, renovándolo por otro segmento igual de tiempo.

Dato: TNA es del 36,5% para una operación a 180 días de plazo. Significa que debo *hallar el monto al cabo de una fracción de período* que es un semestre con una tasa para ese subeperíodo —semestre— y nos queda: Año de 360 días.

$$1 \longrightarrow \left(1+\frac{\frac{0,365}{360}}{180}\right)$$

$$1 \longrightarrow (1+0,1825)$$

Ahora bien, si consideramos el año de 365 días tenemos:

$$1 \longrightarrow \left(1+\frac{0,365.180}{365}\right)$$

$$1 \longrightarrow (1+0,18)$$

De esa forma la operación resulta sincrónica: pudimos adecuar la tasa de interés para el plazo de la operación.

La pregunta que nos debemos hacer es cómo sigue la capitalización renovando la operación por otro período semestral. Se responde por sí sola por la propia definición de la TNA, pues el "plazo al que está referida" es el intervalo de tiempo al final del cual se reinvierte la operación.

Respecto al año podemos usar 360 ó 365 días. Nuestro mercado usa generalmente 365 días y por eso así seguimos.

Consideraremos el año de *365 días* pues el año civil es el generalmente utilizado en nuestros mercados financieros, establecida por la ya derogada Circular R.F. 12 de Banco Central de la República Argentina. Sin embargo lo dispuesto en tema de tasas se mantuvo en el ordenamiento normativo de 1981: Comunicaciones OPASI-1 (Operaciones PASIvas) en su punto 6.3.3 titulado "Divisor fijo" del Capítulo 1 de Depósitos consignaba "Se utilizará el de 365 días", también en la OPRAC-1 (Operaciones Activas) y reforzado a través de la CONAU (CONtabilidad y Auditoría) —normativa que regula el funcionamiento de las entidades financieras—. Aclaramos que, si bien esas Comunicaciones han sido reemplazadas por otras, mantienen lo aquí referido, hasta la Comunicación "A" 3052 que dispone para casos como los préstamos hipotecarios y prendarios un divisor de 360 días. Más adelante comentaremos las normas de B.C.R.A. que regulan las operaciones tanto de depósito como de préstamos en materia de tasas de intereses y base sobre las que se aplican.

0 180 365

$$1 \longrightarrow \left(1+\frac{0{,}365.180}{365}\right) \longrightarrow \left(1+\frac{0{,}365.180}{365}\right)$$

$$1 \longrightarrow (1+0{,}18) \longrightarrow (1+0{,}18)^{365/180}$$

$$1 \longrightarrow 1{,}18 \longrightarrow 1{,}3988$$

A partir de la T.N.A. que es una "Tasa Periódica" aparece el concepto de "Tasa proporcional" que es una tasa subperiódica utilizada para ir armando la evolución de la operación y observamos que no produce el monto de 1,365 sino mucho más.

Antes de continuar repasemos:

Tasa proporcional de m días denotada como i_m

T.N.A. para el plazo de "m" días		*TASA PROPORCIONAL DE "m" días*
$j_{(365/m)}$ ⇒	"m" días ⇒	i_m
TASA <u>PERIODICA</u>	período de capitalización	*TASA <u>SUBPERIODICA</u>*

Vimos que en nuestro ejemplo:

Que capitaliza cada

$j_{(365/180)}=0{,}365$ ⇒ "180"días ⇒ Tasa proporcional $i_{180}=\dfrac{0{,}365}{\dfrac{365}{180}}=0{,}18$

Supongamos que la operación queda definida para un plazo de 30 días a igual T.N.A. para ese plazo, es decir:

$J_{(365/30)} = 0{,}365$ → buscamos i_m

Que capitaliza cada.

$j_{(365/30)}=0{,}365$ $\Longrightarrow$ "30" días $\Longrightarrow$ Tasa proporcional $i_{30}= \dfrac{0{,}365}{\frac{365}{30}} = \mathbf{0{,}03}$

Y así sucesivamente... En un cuadro de valores volcamos los resultados que surgen, según sea el intervalo de tiempo al que se refiere la tasa nominal anual que suponemos, y nos queda:

m	*T.N.A*	i_m
365	*0,365*	*0,365*
180	*0,365*	*0,18*
90	*0,365*	*0,09*
30	*0,365*	*0,03*
15	*0,365*	*0,015*
1	*0,365*	*0,001*

Podemos concluir que: estas tasas subperiódicas i_m denominadas "tasas proporcionales de m días" guardan una relación directa con la tasa nominal anual —la tasa periódica— sólo que corresponden a diferentes períodos o intervalos de tiempo. Se denominan así, porque tienen entre sí la misma relación que entre los períodos. Pues $i_{30}= 0{,}03$ e $i_{180}= 0{,}18$ son tasas proporcionales de 30 días y de 180 días respectivamente, la segunda 6 veces mayor a la primera, pues está referida a un intervalo de tiempo 6 veces mayor que el de 30 días. Dicho de otro modo, el tanto de interés correspondiente a diferentes períodos tiene la misma relación que entre sus períodos y por eso son proporcionales (ej. 0,18/0,03=180/30=6).

$$i_m \xleftrightarrow{\text{proporcional}} j_{(365/m)}$$

pues:

$$i_m = \frac{j_{\left(\frac{365}{m}\right)} . m}{365} \qquad j_{\left(\frac{365}{m}\right)} = \frac{i_m . 365}{m}$$

Vemos que j es un coeficiente anual nominal. Nominal porque no toma en cuenta los intereses de los intereses. Es como aplicar el interés simple.

En el ejemplo de la capitalización de una unidad de capital a una tasa semestral al cabo de un año cuyo monto es (1+0,3988) surge de tomar en cuenta:

- Que la T.N.A está referida a un plazo de m días, pues ya expresamos que es el tanto que capitaliza cada "m" días, eso significa que cada m días los intereses se incorporan al capital y para calcular el monto debimos considerar esta convención exponencial capitalizando con la tasa i_m a interés compuesto (365/m) veces en el año.

Así, se desprenden dos importantísimos conceptos que son troncales para recordar cómo calculamos los tantos de interés:

> **<u>Período de capitalización —m—</u>:**
> Intervalo al final del cual se capitalizan los intereses. Por eso también puede definirse como el tiempo que media entre dos fechas sucesivas en las cuales los intereses se incorporan al capital.

> **<u>Frecuencia de capitalización</u> o de conversión —365/m—:**
> Cantidad de veces que en el año los intereses se incorporan al capital generando más intereses. Se aplica entonces, la convención exponencial.

Determinamos cuál es el tanto de interés anual que resulta, al que denominaremos T.E.A. (considerando el ejercicio ya planteado).

a) $T.N.A._{\left(\frac{365}{180}\right)} = 0{,}365$

0	180	365 días
1	$\left(1+\dfrac{0{,}365.180}{365}\right)^1$	$\left(1+\dfrac{0{,}365.180}{365}\right)^{\frac{365}{180}}$
1	(1+0,18)	$(1+0{,}18)^{365/180}$
1	(1,18)	**1,3988**

T.E.A. = **1,3988** – 1 = 0,3988

¿Qué pasaría si el capital se coloca por 30 días, en vez de 180 días, al mismo tanto nominal anual de interés del 36,5% y renovamos la operación la cantidad de veces que el año de 365 días lo permite?

b) $T.N.A._{\left(\frac{365}{30}\right)} = 0{,}365$

0	30	60	90	//	360	//365 días
1	$\left(1+\dfrac{0{,}365.30}{365}\right)$	$\left(1+\dfrac{0{,}365.30}{365}\right)^2$	$\left(1+\dfrac{0{,}365.30}{365}\right)^3$	...	$\left(1+\dfrac{0{,}365.30}{365}\right)^{12}$	$\left(1+\dfrac{0{,}365.30}{365}\right)^{(365/30)}$
1	(1+0,03)	$(1+0{,}03)^2$	$(1+0{,}03)^3$	...	$(1+0{,}03)^{12}$	$(1+0{,}03)^{(365/30)}$
1	1,03	1,0609	1,0927	...	1,42576	**1,4328**

T.E.A. = **1,4328** – 1 = 0,4328

Entonces: si al monto al cabo de 1 año le restamos la unidad de capital colocada nos genera el incremento de capital por todo ese período que relacionado con esa unidad de capital nos da una tasa de interés anual que para diferenciarla de la nominal la llamamos efectiva. También podríamos haberla denominado exponencial o a interés compuesto, pero se denomina T.E.A.

En general:

0	1	2	3	12 //	365 días
1	$\left(1+\frac{j_{(365/m)}.m}{365}\right)$	$\left(1+\frac{j_{(365/m)}.m}{365}\right)^2$	$\left(1+\frac{j_{(365/m)}.m}{365}\right)^3$	$\left(1+\frac{j_{(365/m)}.m}{365}\right)^{12}$	$\left(1+\frac{j_{(365/m)}.m}{365}\right)^{365/30}$
1	$(1+i_m)$	$(1+i_m)^2$	$(1+i_m)^3$	$(1+i_m)^{12}$	$(1+i_m)^{(365/m)}$
1					$(1+i_{365})$

$$TEA = i_{365} = (1+i_{365})-1 = (1+i_m)^{\frac{365}{m}} - 1 = \left(1+\frac{j_{\frac{365}{m}}\cdot m}{365}\right)^{\frac{365}{m}} - 1$$

La tasa subperiódica i_m no produce iguales montos al cabo de un año. Vimos que al capitalizar con la tasa i_{30}= 0,03 365/30 veces en el año el valor final de 1,4328 resultó mayor al valor final de 1,3988 resultante de capitalizar con la tasa i_{180}= 0,18, 365/180 veces en el año.

Observamos que no da el mismo valor final capitalizando 1 vez al año que cada semestre, que cada mes,... y podríamos seguir así:

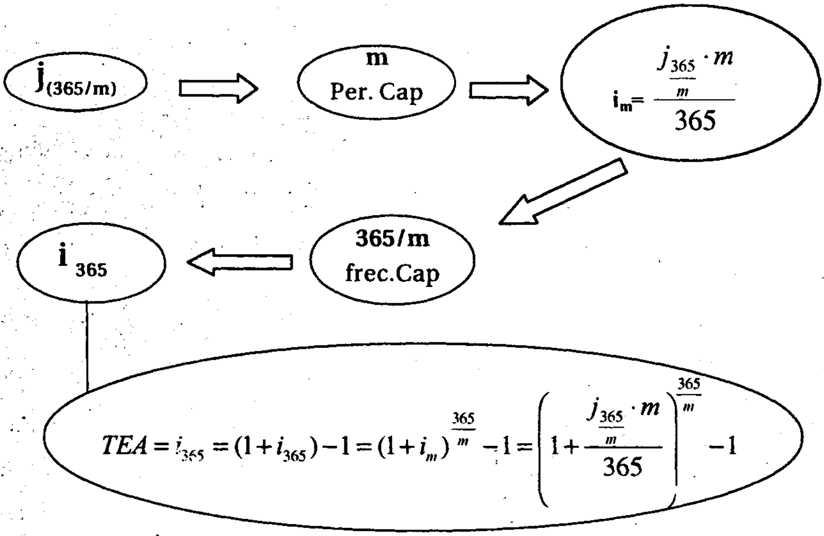
- *disminuyendo el período de capitalización, o*
- *incrementando la frecuencia de capitalización*

Para que la tasa subperiódica i_m produzca iguales montos al cabo de un año, es decir dada la misma TNA referida a períodos "m" distintos pero que produzca iguales valores finales, deberíamos capitalizar a interés simple con la tasa proporcional; de esta forma los intereses del capital no estarían generando intereses, ya que la tasa proporcional de m días considera que los intereses del capital no genera intereses —régimen a interés simple—.

Pero por definición , ello no es así.

El concepto de T.E.A. es el rendimiento efectivo de una unidad de capital al cabo de 1 año.

El esquema a partir de una TNA es el siguiente:



A continuación volcamos algunos valores hallados, considerando la misma T.N.A. pero con diferentes frecuencias de capitalización (365/m); o bien con diferentes períodos de capitalización (m).

m	*T.N.A de interés*	*T.E.A. de interés*	*Monto de una unidad de capital al cabo de 1 año*
365	*0,365*	*0,365*	*(1+0,365)= 1,365*
180	*0,365*	*0,3988*	$(1+0{,}18)^{365/180}$ *= 1,3988*
90	*0,365*	*0,4184*	$(1+0{,}09)^{365/90}$ *= 1,4184*
30	*0,365*	*0,4328*	$(1+0{,}03)^{365/30}$ *= 1,4328*
15	*0,365*	*0,4366*	$(1+0{,}015)^{365/15}$ *=1,4366*
1	*0,365*	*0,4403*	$(1+0{,}001)^{365}$ *= 1,4403*

Observamos el cuadro de valores en donde llegamos a montos diferentes a partir de una misma T.N.A. pero que capitaliza cada "m" días distintos.

Por eso vemos a continuación los factores de capitalización:

$$\left(1+\frac{0{,}365.1}{365}\right)^{\frac{365}{1}} \rangle \left(1+\frac{0{,}365.15}{365}\right)^{\frac{365}{15}} \rangle \left(1+\frac{0{,}365.30}{365}\right)^{\frac{365}{30}} \rangle \ldots \left(1+\frac{0{,}365.180}{365}\right)^{\frac{365}{180}} \rangle \ldots$$

1,4403 > *1,4366* > *1,4328* >... *13988* >....

Dada la misma T.N.A. para m $\neq$ $\rightarrow$ a medida que $\uparrow$ m $\downarrow$ T.E.A.

Por eso es NECESARIO que la **T.N.A. esté referida a un plazo determinado, pues produce rendimientos efectivos diferentes,** y esta TNA no sirve para toma de decisiones. Es una tasa de trabajo y debemos utilizar la tasa efectiva.

Recordemos considerar siempre el período de capitalización al que se refiere la T.N.A., pues es el que me señala la cantidad de veces que se acumulan los intereses para generar más intereses.

La T.E.A. es la tasa que está actuando sobre la operación, es aquella a la que efectivamente se coloca un capital. Si el verdadero rendimiento lo está dando la TASA EFECTIVA, entonces partiendo de ésta: ¿Cómo calculamos la T.N.A. para los distintos "m" en función de la T.E.A.? Ejemplo: queremos obtener un rendimiento del 43,28% efectivo anual.

Planteamos la equivalencia financiera entre el monto de una unidad de capital en función de la tasa nominal anual para el plazo de m días —incógnita— y el monto en función de la TEA que es dato y despejamos:

$$(1+i_{365}) = \left(1+\frac{j_{\frac{365}{m}} \cdot m}{365}\right)^{\frac{365}{m}}$$

$$j_{\left(\frac{365}{m}\right)} = \left[(1+i_{365})^{\frac{m}{365}} - 1\right] \cdot \frac{365}{m}$$

m	*T.E.A.*	*T.N.A*	***Forma de cálculo de la TEA en función de la T.N.A. para el plazo de "m" días***
365	*0,4328*	*0,4328*	
180	*0,4328*	*0,3935*	$\left[(1+0{,}4328)^{\frac{180}{365}} - 1\right]\frac{365}{180} = 0.1941.\frac{365}{180}$
90	*0,4328*	*0,3761*	$\left[(1+0{,}4328)^{\frac{90}{365}} - 1\right]\frac{365}{90} = 0{,}0927.\frac{365}{90}$
60	*0,4328*	*0,3704*	$\left[(1+0{,}4328)^{\frac{60}{365}} - 1\right]\frac{365}{60} = 0{,}0609.\frac{365}{60}$
30	*0,4328*	*0,3650*	$\left[(1+0{,}4328)^{\frac{30}{365}} - 1\right]\frac{365}{30} = 0{,}03.\frac{365}{30}$
15	*0,4328*	*0,3623*	$\left[(1+0{,}4328)^{\frac{15}{365}} - 1\right]\frac{365}{15} = 0{,}0149.\frac{365}{15}$
1	*0,4328*	*0,3598*	$\left[(1+0{,}4328)^{\frac{1}{365}} - 1\right].365 = 0{,}001.365$

En el cuadro —última columna— aparecen, antes de determinar la TNA, los siguientes tantos: 0,1941; 0,0927; 0,0609; 0,03; 0,0149 y 0,001. Son las tasas subperiódicas para cada uno de los "m" (intervalo de tiempo al que se refiere la operación). Muchos de ellos están reflejados en el diagrama anterior.

$$i_m \xleftrightarrow{\text{equivalente o efectiva}} i_{(365/m)}$$

pues:

$$i_m = (1+i_{365})^{\frac{m}{365}} - 1 \qquad i_{365} = (1+i_m)^{\frac{365}{m}} - 1$$

Si nos preguntamos ¿qué nos conviene más: colocar un capital por 15 días a la tasa subperiódica del 1,49%, o por 30 días a la tasa para ese subperíodo del 3% o por 90 días a la tasa subperiódica trimestral del 9,27%,ó... Determinamos los montos al cabo de un plazo dado, que puede ser un año; y vemos que todas producen el mismo valor final de 1,4328. Produciendo una indiferencia financiera.

Estas tasas subperiódicas que capitalizan 365/m veces en el año —un período— generan igual monto que capitalizando la tasa periódica i_{365} una sola vez; pues son entre sí tasas equivalentes.

Debemos recordar el supuesto con el que se elaboran las tasas y es considerar que en cada renovación se mantiene constante ese tanto.

Si tenemos que analizar la conveniencia de una inversión y el dato es la T.N.A. ya pudimos ver que no es un tanto que sirve para tomar decisiones ya que no es una verdadera tasa es una intensidad, una tasa de trabajo, hay que trabajarla para descubrir cuál es el rendimiento efectivo que podrá ser para cualquier intervalo de tiempo que nos propongamos: 1 día, 1 mes...

Podemos observar que estamos trabajando con "tasas discretas" pues este período de capitalización también es discreto al tratarse de m=1; 2; 10; 30...

¿Qué pasaría si la tasa de interés ya no es discreta sino que el período de capitalización es tan chico como resulte posible? Entonces estaríamos trabajando con "tasas continuas" y constituyen:

Un caso particular:

- Capitalización Continua

Si la T.NA. se refiere a una frecuencia de capitalización $\rightarrow \infty$, lo que significa que el período de capitalización es un intervalo de tiempo tan pero tan pequeño que $\rightarrow 0$, se trata de una capitalización continua y la tasa que actúa generalmente es conocida como la tasa instantánea.

Siendo $j(\infty)$ = la tasa nominal instantánea δ

Si a la frecuencia de capitalización ? 365/m la denominamos n, y a la TEA = i, entonces:

$(1+i)=\left(1+\frac{j}{n}\right)^{n}$ despejamos j y nos queda $j=n.\left[(1+i)^{\frac{1}{n}}-1\right]$ o bien $j=\frac{\left[(1+i)^{n^{-1}}-1\right]}{n^{-1}}$

Así expuesto, nos sirve para poder resolver un cociente indeterminado en el límite y lo solucionamos matemáticamente derivando en forma independiente el numerador y el denominador de la expresión, hasta que no quede más la indeterminación (Regla de L' Hopital).

$$\lim_{n\to\infty} j_{(n)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1+i)^{n^{-1}}-1}{n^{-1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(-1).(1+i)^{\frac{1}{n}}.\ln(1+i).n^{-2}}{(-1)..n^{-2}}=1\right]=\ln(1+i)$$

Entonces: $\boxed{\lim_{n\to\infty} j(n)=\ln(1+i)}$

Es importante el análisis de la función, pues me permite conocer que, por más que incremente la frecuencia de capitalización, no se reduce en igual medida la T.N.A., ya que tiene un límite.

Entonces si tuviésemos que graficar la función de la T.N.A. deberíamos analizar las derivadas para saber que se trata de una función decreciente y cóncava al origen.

$$\boxed{j_{(n)}=n.\left[(1+i)^{\frac{1}{n}}-1\right]}$$

Vemos que para derivar y=u.v

y' = u'.v + u . v'

u= n   v= $(1+i)^{1/n}-1$

u'=1   v'= $(1+i)^{1/n}.\ln(1+i)\,(1).n^{-2}$

$$\frac{dj(n)}{dn}=\left[(1+i)^{\frac{1}{n}}-1\right]+n.(1+i)^{\frac{1}{n}}.\ln(1+i)(-1).n^{-2}$$

$$\frac{dj(n)}{dn}=(1+i)^{\frac{1}{n}}.\left[1-\ln(1+i).n^{-1}\right]-1<0$$ Función decreciente

$$\frac{d^2j(n)}{dn}=(-1)(1+i)^{\frac{1}{n}}.\ln(1+i).n^{-2}\left[1-\ln(1+i)n^{-1}\right]+(1+i)^{\frac{1}{n}}.\left[-\ln(1+i).(-1).n^{-2}\right]$$

$$\frac{d^2j(n)}{dn}=-(1+i)^{\frac{1}{n}}.\ln(1+i).n^{-2}\left[1-\ln(1+i)n^{-1}\right]+(1+i)^{\frac{1}{n}}.\ln(1+i).n^{-2}$$

$$\frac{d^2j(n)}{dn}=(1+i)^{\frac{1}{n}}.\ln(1+i).n^{-2}\left[-1+\ln(1+i)n^{-1}+1\right]$$

$$\frac{d^2 j(n)}{dn} = (1+i)^{\frac{1}{n}} . [\ln(1+i)]^2 n^{-3} = \frac{(1+i)^{\frac{1}{n}} . \ln^2(1+i)}{n^3} > 0$$ Función cóncava al origen.

Para saber los valores particulares de dicha función y proceder a su gráfica, ya tenemos n tendiendo a infinito y nos falta $n \to 0$.

$$\lim_{n \to 0} \left(\frac{(1+i)^{\frac{1}{n}} - 1}{n^{-1}} \right) = \frac{(-1).(1+i)^{\frac{1}{n}} . \ln(1+i).n^{-2}}{(-1).n^{-2}} = +\infty$$

Para graficar la función necesitamos:

n	j(n)
0	$\to\infty$
∞	$j(\infty) = (\ln(1+i) = \delta$

δ = ***tasa nominal instantánea*** es una intensidad, es el tanto en el campo continuo como j es el tanto en el campo discreto y nos permite llegar a resultados iguales al cabo de un período de tiempo. Es la fuerza del interés y es el tanto continuo de crecimiento de una unidad de capital, o el tanto nominal instantáneo.

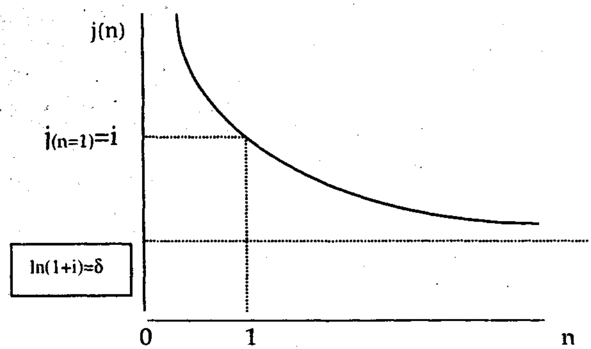
Si $\ln(1+i) = \delta$
$(1+i) = e^{\delta}$
$i = e^{\delta} - 1$ Si nuevamente queremos volver a despejar δ

$$\delta = \frac{\ln(1+i)}{\ln e} = \ln(1+i)$$ El tanto instantáneo es el logaritmo natural o neperiano de (1+i)

Del gráfico se observa que para conseguir el mismo rendimiento efectivo la tasa nominal anual debe disminuir si aumenta n (frecuencia de capitalización) pues permite más veces incorporar los intereses al capital. Pero tiene un límite, que es el ln (1+i). La función es asintótica.

Tiene como asíntotas

ln (1+i) $\forall n \to \infty$ n=0 $\forall n \to 0$



Vemos que:

$$i = j(1) > j(2) > j(3) > j(4) \ \ldots > j(\infty)$$

Ejemplo: Si quiero obtener una tasa efectiva anual de interés del 10%, ¿cuál será el valor de la T.N.A. considerando diferentes frecuencias de capitalización —n—? Determine también para los casos singulares en que la frecuencia de capitalización tome valores particulares como 0 e ∞.

n	$j(n) = n.\left[(1+i)^{\frac{1}{n}} - 1\right]$
0	$+\infty$
1	j(1)=i=0,10
2	$j(2) = 2.\left[(1+i)^{\frac{1}{2}} - 1\right] = 0,09761$
3	$j(3) = 3.\left[(1+i)^{\frac{1}{3}} - 1\right] = 0,09684$
4	$j(4) = 4.\left[(1+i)^{\frac{1}{4}} - 1\right] = 0,09646$
365	$j(365) = 365.\left[(1+i)^{\frac{1}{365}} - 1\right] = 0,09532$
∞	$j(\infty) = \ln(1+0,1) = 0,09531$

Equivalencias entre los distintos factores de capitalización

$$\boxed{(1+i_{365}) = \left(1 + \frac{j_{\left(\frac{365}{m}\right)} \cdot m}{365}\right)^{\frac{365}{m}} = (1+i_m)^{\frac{365}{m}} = e^{\delta}}$$

En donde:

i_{365} = T.E.A. Tasa Efectiva Anual de Interés

$j_{(3657m)}$ = T.N.A. Tasa Nominal Anual de Interés para el plazo de m días, o bien que capitaliza cada m días.

i_m = Tasa Equivalente de m días.

δ = Tasa instantánea de interés anual

Aplicaciones

1) Si el día 24.07 deposité $ 850 obteniendo el 18.08 un valor final de $ 892,50. ¿Cuál es la tasa de interés correspondiente a ese plazo? A continuación, determinar la T.E.M.

Rta.: 0,05 y 0.0603

$i_{25} = 42{,}5 / 850 = 0{,}05$

$i_{30} = (1 + 0{,}05)^{30/25} - 1 = 0{,}0603$

2) Hallar las tasas efectivas anuales y efectivas mensuales al 56% nominal anual para 30, 60 y 120 días.

Rta: TEA= 0,7289; 0.7087; 0.6720.
TEM = 0.046; 0.045; 0.043.

Cálculo de la T.E.A.

$$\left(1 + \frac{0{,}56 * 30}{365}\right)^{365/30} - 1 = 0{,}7289.$$

$$\left(1 + \frac{0{,}56 * 60}{365}\right)^{365/60} - 1 = 0{,}708652$$

$$\left(1 + \frac{0{,}56 * 120}{365}\right)^{365/120} - 1 = 0.6719901$$

Cálculo de la T.E.M.

$$(1 + 0{,}7289)^{30/365} - 1 = 0{,}046$$

$$(1 + 0{,}708652)^{30/365} - 1 = 0.045$$

$$(1 + 0{,}6719901)^{30/365} - 1 = 0.043$$

3) Hallar la tasa diaria equivalente a un rendimiento anual del 72,85%.
Rta.: i(d)= 0,0015.

$$i(d) = (1 + 0{,}7285)^{1/365} - 1 = 0{,}0015$$

4) Una persona dispone de \$ 600 por el plazo de 90 días y puede invertirlos de la siguiente manera:
   a) Un depósito por 30 días al 48% de interés contractual anual para ese plazo, renovándolo por 2 períodos más de igual plazo.
   b) Un depósito por 90 días al 48% de interés contractual anual para ese plazo.

Determinar:
   a) La alternativa de inversión más conveniente.
   b) Cuál debe ser la tasa de interés nominal anual para el plazo de 90 días para que ésta sea equivalente a la alternativa a).

Rta: a) alternativa. a).
b) $j_{(365/(90)} = 0{,}4992$

a) $C(n) = 600 \left(1+\frac{0{,}48.30}{365}\right)^3$

$C(n) = 600 \quad (1 + i_{30})^3$

$C(n) = 673.85$

$C(n) = 600 \left(1+\frac{0{,}48.90}{365}\right) = 671.01$

b) $(1 + i_{30})^3 = (1 + \frac{j_{(365/90)} \cdot 90}{365})$; despejo $j_{(365/90)}$

$(1+0{,}03945205)^3 = (1+0{,}123087)$ Las tasas de interés que se encuentran entre paréntesis en los dos miembros son equivalentes entre sí. Partimos de 0,123087 que es de 90 días y sabiendo que debe resultar a otra tasa proporcional de 1 año. Hacemos el cálculo.
Podemos comprobar que si el capital de \$600 lo colocamos a la tasa $j_{(365/90)}=$ 0,4992 que capitaliza cada 90 días, genera un valor final de 673,85 equivalente al que arroja la tasa i_{30} =0,03945.

5) ¿Cuál será la tasa anual instantánea que corresponde al 72,28% anual efectiva?

Rta.: d=0,5439.

$(1+0{,}7228) = e^{\delta}$

$\delta = \ln(1+0{,}7228) / \ln e.$

6) Si la tasa instantánea anual de interés es del 78,2%. Cuál es la correspondiente tasa nominal anual de interés para el plazo de 90 días.

Rta.: $j_{(365/90)}$=0,8625.

$$\left(1+\frac{j_{\frac{365}{90}} \bullet 90}{365}\right)^{\frac{365}{90}} = e^{\delta} \quad \text{siendo } \delta = 0{,}782$$

$$j_{(365/90)} = \left(e^{\frac{0{,}782 * 90}{365}} - 1\right) * \frac{365}{90}$$

7) Si la tasa efectiva mensual es del 4,6%, cuál es la tasa anual instantánea que corresponde a la tasa anual efectiva.

Rta.: $\sigma = 0{,}5472.$

$(1+0{,}046)^{365/30} = e^{\delta}$

$\sigma = \ln\ [(1+0{,}046)^{365/30}]$.

$\sigma = 0{,}5472$

8) ¿Qué me conviene más: invertir una cuantía de capital al 65% nominal anual vencido para el plazo de 170 días, siendo éste el plazo de la operación, o al 65% efectivo anual vencido?

Rta.: a).

Se sabe que a iguales tasas, por el proceso de capitalización, cuando existen 2 ó más períodos de conversión, siempre $i_{365/170} > j_{365/170}$. Si se quiere comprobar: lo más sencillo resulta determinar la tasa equivalente de 170 días.

$$i(170) = \frac{0{,}65 * 170}{365} = 0{,}3027.$$

$$i''(170) = (1+0{,}65)^{170/365} - 1 = 0{,}2627.$$

9) Si la entidad xx debió constituir en el Banco Central del país XX un depósito especial de \$ 10.000 y sólo ingresó \$ 8.500. Cuál será el cargo que deberá abonar en concepto de defecto en la integración, si las tasas de redescuento mensuales —vencidas— que se aplican son del 10,075%; 10,085% y 10,085% para los meses de octubre, noviembre y diciembre, respectivamente.
El vencimiento de la integración operó el 20 de octubre y el cálculo del cargo se efectúa con fecha 1 de enero del año siguiente.

Rta: 395.021

a) Cálculo de la tasa de cargo -i(c)- por 73 días.
$i(c) = [\ (1+0{,}10075)^{12/30} * (1+0{,}10085) * (1+0{,}10085)^{31/30}]$
$i(c) = 0{,}263347163$

b) Cálculo del cargo —C—
$C = 1.500.000 * i(c) = 395.021$
Recordemos que para B.C.R.A. la T.E.M. tiene base=30 días.

10) Una entidad registró la siguiente posición de cartera de depósitos a plazo —capitales—:

Tipo de línea de la cartera	*Promedio de saldos de capitales —en miles de \$—*	
	Mes de octubre	*Mes de noviembre*
Plazo fijo a 7 días	*258.700.-*	*308.000.-*
Plazo fijo a 14 días	*135.000.-*	*112.000.-*
Plazo fijo a 30 días	*350.000.-*	*412.000.-*

Si las tasas de interés nominales anuales de estos depósitos fueron:

Plazo	*Octubre*	*Noviembre*
7 días	***24,20%***	***24,65 %***
14 días	***18,76%***	***20,20 %***
30 días	***20,8 %***	***23,00 %***

Determinar la tasa promedio ponderada mensual de la cartera de capitales, considerando el período comprendido entre octubre y noviembre.

Rta.: 0,018

1) Cálculo de la tasa equivalente a la correspondiente a los distintos períodos al que está referida cada línea de depósitos.

Mes de octubre				
Capital	TNA(m)	Plazo	T.E.M.	Interés
258.700	0.2420	7	0.02	5.174
135.000	0.1876	14	0.01548	20.898
350.000	0.208	30	0.0171	5.985
743.700				13.248.8

Mes de noviembre				
Capital	TNA(m)	Plazo	T.E.M.	Interés
308.000	0.2465	7	0.0204182	6288.81
112.000	0.2020	14	0.0166763	1867.75
412.000	0.23	30	0.0189041	7788.49
832.000				15.945.05

$$i(oct) = \frac{13248.8}{74370} \qquad i(nov) = \frac{15945.05}{832000}$$

$$i(oct) = 0{,}0178147 \qquad i(nov) = 0{,}0191647$$

$$i\ media = \frac{0.0178147 * 743700 + 0.01916747 * 832000}{(743700 + 832000)} = 0{,}018$$

Se consideró que los depósitos del primer mes no eran renovados con sus intereses, caso contrario debía haberse trasladado al mes siguiente los mismos a los fines de calcular la tasa media.

11) Usted es el responsable del armado de las tasas nominales anuales. Para ello se le solicita integre un cuadro de valores suponiendo plazos de colocación desde 30 días hasta 55 días con variación diaria. Se conoce la T.E.A. que será del 26,48% por operaciones hasta 45 días de plazo inclusive y posteriores del 27,26%.
Deberá para ello, utilizar alguna planilla de cálculo tipo Excel.

	A	B	C		
1					
2	PLAZO	TEA	TNA	FORMATOS REALIZADOS	
3	30	0,2648	0,2372	Celda A3	Escribir el plazo inicial. En este caso es 30
4	31	0,2648	0,2373	Celda B3	Escribir el dato . Acá TEA ES 0.2648
5	32	0,2648	0,2373	Celda C3	Plantear la fórmula de TNA=f(TEA)
6	33	0,2648	0,2374		**=[(1+B3)^(A3/365)-1)]*(365/A3)**
7	34	0,2648	0,2375		
8	35	0,2648	0,2376	Celda A4	Como aumentan en 1. El formato es
9	36	0,2648	0,2377		=+A3+1
10	37	0,2648	0,2377	Celdas Col. B	Copiamos B3 y Pegamos el valor constante
11	38	0,2648	0,2378	Celda C4	Copiamos C3 y la pegamos en C4
12	39	0,2648	0,2379		
13	40	0,2648	0,2380	Demás celdas	Es un copiado y pegado
14	41	0,2648	0,2380		
15	42	0,2648	0,2381		
16	43	0,2648	0,2382		
17	44	0,2648	0,2383		
18	45	0,2648	0,2383		
19	46	0,2726	0,2448		
20	47	0,2726	0,2448		
21	48	0,2726	0,2449		
22	49	0,2726	0,2450		
23	50	0,2726	0,2451		
24	51	0,2726	0,2452		
25	52	0,2726	0,2452		
26	53	0,2726	0,2453		
27	54	0,2726	0,2454		
28	55	0,2726	0,2455		

Podemos ver la rapidez con que se trabaja conociendo la fórmula de aplicación y así podemos probar con otras tasas.

CAPÍTULO V

REGÍMENES DE ACTUALIZACIÓN A INTERÉS SIMPLE Y COMPUESTO

Objetivo

- ➢ Reconocer y encuadrar la operación dentro del "régimen de actualización".
- ➢ Valorar hoy vencimientos futuros utilizando las distintas modalidades.
- ➢ Confrontar los modelos teóricos con la práctica financiera y comercial.
- ➢ Reconocer las diferentes tasas que se aplican en cada operación, pudiendo diferenciar la tasa contractual utilizada para el cálculo de los valores presentes y la tasas de interés implícita que resulta del flujo de fondos.

Nociones de Descuento

Quien cuenta con un crédito de cuantía N, exigible en un determinado vencimiento, puede cobrarlo anticipadamente:

- ✔ poniéndose de acuerdo con el deudor sobre una extinción anticipada: RESCATE.
- ✔ cediendo el crédito a un tercero.

Si el sentido financiero nos lleva a decir que 1 peso hoy vale más que 1 peso futuro, entonces ese peso futuro que vence más allá de hoy tendrá un valor presente menor, mucho menos cuanto más esté alejado en el tiempo su exigibilidad.

Quien anticipa los fondos tomará sus recaudos en el análisis de la cobrabilidad potencial sobre el crédito que recibe, y el cedente del crédito se debería hacer responsable en caso de falta en el cumplimiento.

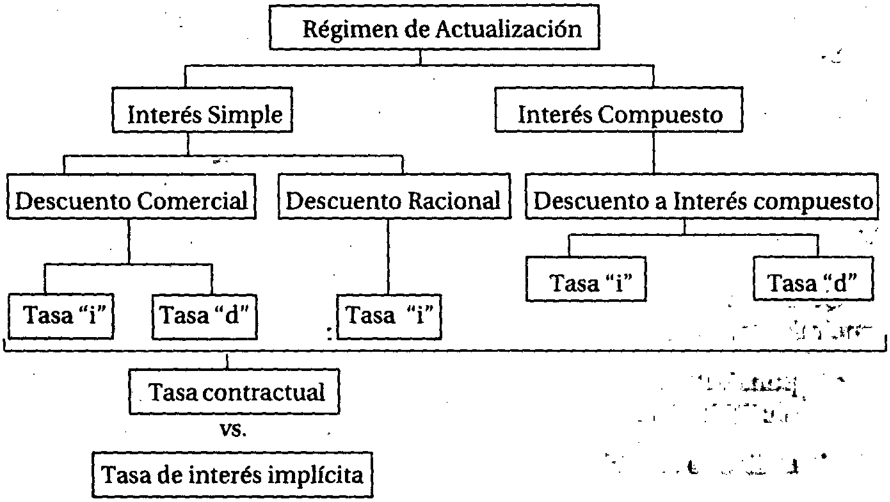
En la práctica financiera y comercial hay un tanto contractual que se aplica —será una tasa de interés o de descuento— y adicionalmente pueden aplicarse comisiones y otros gastos calculados sobre algunos de los elementos de la operación o ser fijas por operación o por tramos. Por tal razón, nos interesa conocer el verdadero coste financiero para aquel agente que recibe los fondos y el rendimiento financiero que le genera a aquel que le está anticipando dichos fondos a la otra parte. Ambos tantos: coste y rendimiento pueden no coincidir y surgen de relacionar el valor efectivamente recibido y el valor a recibir dentro de un tiempo —n—.

Cuando esta operación se realiza entre dos entidades financieras o entre una entidad financiera y el propio B.C.R.A. recibe el nombre de "redescuento".

Entonces: *V = f (N; tiempo faltante: n; tasa de la operación: i o d, comisiones, gastos; seguros, impuestos y otros conceptos).*

Sin embargo para el desarrollo de las fórmulas fundamentales, trabajaremos con los elementos de la operación en forma pura. De allí podremos reconocer si la tasa aplicada en los cálculos para valuar los capitales presentes o efectivos coincide o no con la tasa de interés mensual implícita resultante del flujo de fondos que generaría cada operación.

Red de conceptos



Definiciones de Descuento

"El descuento" surge de la valoración de vencimientos futuros y resulta de considerar el tiempo en sentido contrario y significa compensación que recibe quien anticipa el pago, por eso se hace la disminución al valor nominal de una deuda para poder cobrarla inmediatamente. En conclusión:

> *DESCUENTO*
>
> *Es la compensación o precio que debe pagarse por la disponibilidad inmediata de un capital antes de su vencimiento dentro de n unidades de tiempo.*

-n	0
V	N

$$\underbrace{V \qquad\qquad\qquad N}_{D = N - V}$$

- **Elementos en la Operación de Descuento:**

* V ó VA	Valor efectivo o actual o Valor presente de un capital N disponible dentro de n unidades de tiempo También es el Capital Descontado, Valor Descontado o Valor actual.
* n:	días faltantes al vencimiento
* **N.ó VN**	Valor Nominal o Valor Futuro.
* i	tasa de interés

Modalidades en el Descuento

- *Actualización a Interés Simple*

- *Descuento comercial*: es "el interés simple del valor nominal". Usado para el descuento de documentos comerciales. Prohibido para entidades financieras pues en la comunicación OPRAC, punto "Tasas de interés" fija que los intereses se aplicarán sobre los capitales efectivamente prestado y por el tiempo en que estuvieron a disposición de los clientes".

  El capital efectivamente prestado es V y no el valor nominal N. En un convenio entre particulares, nada obsta a que se utilice. Es más, resulta ser la modalidad más utilizada.

  Pensemos en una operación de descuento, las partes exponen sus instrumentos objeto de cesión, ejemplo cheques, documentos, otros valores que tienen expresados su valor nominal o importe exigible al vencimiento y esta cuantía es la que resulta ser base para el cálculo del descuento, computando los días que corren desde el momento de descuento hasta su exigibilidad y aplicando una tasa que pueden extraer de cualquier medio informativo, un diario financiero, sitios por internet que exponen tasas de interés y muy raramente de descuento. Esa es la práctica.

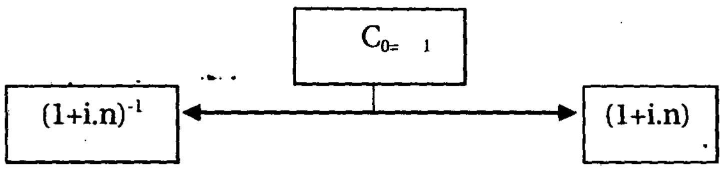
  Veamos un ejemplo: un capital de $ 1 al que le falta 30 días para su vencimiento se procede a descontarlo. Tenemos la información del día en que la tasa activa para operaciones de descuento es del 3% mensual y esos son los datos para proceder al proceso de actualización.

  Es descuento irracional, pues teóricamente el descuento comercial puede ser mayor o igual al valor del documento descontado. Es descuento abusivo, pues los intereses se calculan sobre el VN y el prestamista adelanta el valor futuro. En algunos textos se lo llama "descuento bancario". Es en consecuencia, inaplicable en operaciones a muy largo plazo y con elevadas tasas, porque puede pasar que el valor actual se anule o incluso sea negativo. Por eso hay que calcular "el tiempo en que tarda el descuento en anular el capital". Debe darse que $0 \leq n < 1/d$. En la práctica se usa pues es de más fácil cálculo, porque lo impone el capitalista ya que le conviene y porque los plazos son pequeños y entonces la diferencia es muy elevada. Generalmente se utiliza para transacciones de 30 a 180 días de plazo.

En principio expresemos $D = N \cdot i \cdot n$

$$V = N - D = N - N \cdot i \cdot n = N\,(1 - i.n)$$

- *Descuento racional o matemático o a interés simple*: es "el interés simple del valor actual" $D = V \cdot i \cdot n$

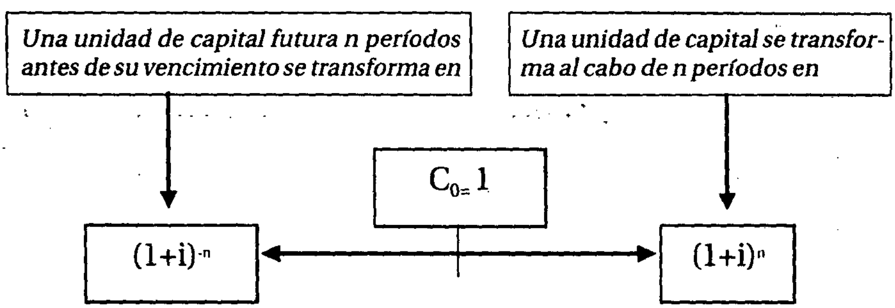


Tenemos que ambas leyes del interés simple: la de capitalización y la de actualización son conjugadas.

$$V = \frac{N}{1+i.n}$$

$$D = N - V = N - \frac{N}{1+i.n} = N\left(1 - \frac{1}{1+i.n}\right) = N\frac{(1+i.n)-1}{1+in} = \frac{N.i.n}{1+i.n} = V.i.n$$

- *Actualización a Interés Compuesto*



Tenemos que ambas leyes del interés compuesto: la de capitalización y la de actualización son conjugadas, además de ser prolongada una de la otra.

Ejercicio integrador–Caso Base

Con fecha 1 de septiembre se recibe como parte de pago de ventas realizadas tres documentos de \$ V.N.1.000 con igual vencimiento —14 de octubre—. Si por razones de liquidez se van negociando los días 9, 14 y 19 de septiembre. Tasa del 6% de interés mensual. Considerando que Ud. puede elegir las modalidades de descuento, para cada una de ellas:

a) Halle el valor efectivamente recibido.

b) Efectúe un cuadro de evolución del valor actual en función a n.

c) Grafique la función de valor actual.

d) Calcule el coste financiero mensual resultante para cada plazo y modalidad y saque las conclusiones.

Rta.: a) $V_{25\text{-Dcom-}=950}$; $V_{25\text{-Drac-}=952,38}$; $V_{25\text{-DIcomp-}=952,60}$; $V_{30\text{-Dcom-}=940}$; $V_{30\text{-Drac-}=943,40}$; $V_{30\text{-DIcomp-}=943,40}$ $V_{35\text{-Dcom-}=930}$; $V_{35\text{-Drac-}=934,58}$; $V_{35\text{-DIcomp-}=934,28}$

Eje de tiempos y capitales

9/9 14/9 19/9 14/10

n=25 *N=1.000*

n=30 *N=1.000*

n = 35 *N=1.000*

- Valor Actual en la Modalidad Descuento Comercial

$$V_1 = 1000 \cdot \left(1 - \frac{0,06 \cdot 1}{30}\right) = 998$$

$$V_2 = 1000 \cdot \left(1 - \frac{0,06 \cdot 2}{30}\right) = 996$$

...

$$V_{25} = 1000 \cdot \left(1 - \frac{0,06 \cdot 25}{30}\right) = 950$$

$$V_{30} = 1000 \cdot \left(1 - \frac{0,06 \cdot 30}{30}\right) = 940$$

$$V_{35} = 1000 \cdot \left(1 - \frac{0,06 \cdot 35}{30}\right) = 930$$

- Valor Actual en la Modalidad Descuento Racional

$$V_1 = \frac{1000}{\left(1+\frac{0,06\cdot 1}{30}\right)} = 998$$

$$V_2 = \frac{1000}{\left(1+\frac{0,06\cdot 2}{30}\right)} = 996,02$$

...

$$V_{25} = \frac{1000}{\left(1+\frac{0,06\cdot 25}{30}\right)} = 952,38$$

$$V_{30} = \frac{1000}{\left(1+\frac{0,06\cdot 30}{30}\right)} = 943,40$$

$$V_{35} = \frac{1000}{\left(1+\frac{0,06\cdot 35}{30}\right)} = 934,58$$

- Valor Actual en la Modalidad Descuento a Interés Compuesto

$$V_1 = \frac{1000}{(1+0,06)^{\frac{1}{30}}} = 998,06$$

$$V_2 = \frac{1000}{(1+0,06)^{\frac{2}{30}}} = 996,12$$

...

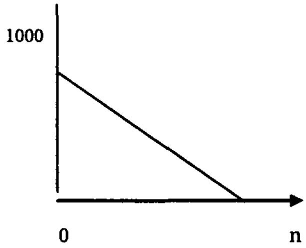
$$V_{25} = \frac{1000}{(1+0,06)^{\frac{25}{30}}} = 952,60$$

$$V_{30} = \frac{1000}{(1+0,06)^{\frac{30}{30}}} = 943,40$$

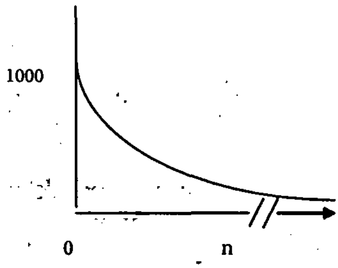
$$V_{35} = \frac{1000}{(1+0,06)^{\frac{35}{30}}} = 934,28$$

Ver en página siguiente *Cuadro de valores* para interpretar los valores actuales, descuentos acumulados, periódicos y las intensidades periódicas.

Descuento comercial				
p	V_p	$D_{(0;p)}$	$D_{[p;(p+1)]}$	$I'_{[p;(p+1)]}$
0	1.000	0	0	0
1	998	2	2	0,002000
2	996	4	2	0,002004
3	994	6	2	0,002008
4	992	8	2	0,002012
5	990	10	2	0,002016
25	950	50	2	0,002110
30	940	60	2	0,002123
35	930	70	2	0,0021505



Descuento Racional				
p	V_p	$D_{(0;p)}$	$D_{[p;(p+1)]}$	$I'_{[p;(p+1)]}$
0	1.000	0	0	0
1	998,00	2,00	2,00	0,001996
2	996,02	3,98	1,99	0,001992
3	994,04	5,96	1,98	0,001988
4	992,06	7,94	1,97	0,001984
5	990,10	9,90	1,96	0,001980
25	952,38	47,62	1,82	0,001905
30	943,40	56,60	1,78	0,001887
35	934,58	65,42	1,75	0,001869



Descuento a interés compuesto				
p	V_p	$D_{(0;p)}$	$D_{[p;(p+1)]}$	$I'_{[p;(p+1)]}$
0	1.000	0	0	0
1	998,06	1,94	1,9404	0,001940
2	996,12	3,88	1,9366	0,001940
3	994,19	5,81	1,9329	0,001940
4	992,26	7,74	1,9291	0,001940
5	990,34	9,66	1,92...	0,001940
25	952,60	47,40	1,8620	0,001940
30	943,40	56,60	1,8341	0,001940
35	934,28	65,72	1,8264	0,001940

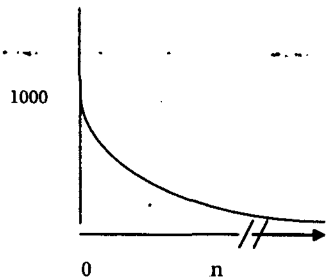


TABLA DE VALORES

Coste fin. Mensual	n=25 n<1	N=30 n=1	n=35 n>1
D.comerc	0,06349	0,06383	0,06418
D.Racion.	0,0603	0,06	0,05971
D.Int. Comp	0,06	0,06	0,06

Valores Actuales	n=25 n<1	n=30 n=1	n=35 n>1
D.comerc	950	940	930
D.Racion.	952,38	**943,40**	934,58
D.Int. Comp	952,60	**943,40**	934,28

- *Podemos jerarquizar cuál conviene o resulta más perjudicial, sea utilizando la tabla de valores presentes o bien la tabla de C.F.M. resultante en cada modalidad.*

- *Cualquiera sea el valor de n, vemos que el descuento comercial es el más caro para quien recibe el valor efectivo, pues arroja menor valor presente y representa mayor CFM.*

- *En cambio, en las dos modalidades siguientes la conveniencia entre el Descuento Racional o el Descuento a Interés Compuesto como alternativa para calcular los valores efectivos o el propio descuento depende del valor de n. Pues según sea n>1 o n<1 produce jerarquizaciones distintas.*

- El CFM coincide con la tasa contractual o tasa que rige en esa modalidad sólo en el interés compuesto por su propia transparencia. Recordar las características de la ley financiera a interés compuesto que es una ley prolongo-conjugada y escindible.

- La particularidad de que CFM y tasa contractual coincidan en el descuento racional obedece a que $(1+in)^{-1} = (1+i)^{-n}$ cuando n=1.

- Hay una modalidad de descuento en que se produce un "límite de aplicabilidad" pues determinados valores de *n* generan no solo un valor presente nulo sino también negativo. Se deberá aceptar la actualización en la modalidad de descuento comercial si: $n < \frac{1}{i}$.

  De allí que habrá que analizar la viabilidad de la operación de acuerdo a la tasa y plazo que actúa en ella.

Para calcular el C.F.M. deberemos considerar que existe un valor actual asociado a un valor nominal en un período de *m* días, generando una variación absoluta la diferencia entre N y V. Si dicha variación absoluta la medimos con respecto a V estamos encontrando una variación relativa, un tanto de interés correspondiente a *m* días. Es decir: $\frac{N-V}{V} = i_m$ (1)

Ahora nos queda determinar el C.F.M., esa tasa efectiva mensual resultante equivalente a la tasa del subperiódico i_m

$$i_{30} = (1+i_m)^{\frac{30}{m}} - 1 \quad (2)$$

Si tuviésemos que calcular el CFA la fórmula sería: $i_{365} = (1+i_m)^{\frac{365}{m}} - 1$ (3)

Un método directo de calcular el CFM o CFA es integrando (1) y (2) o bien (1) y (3).

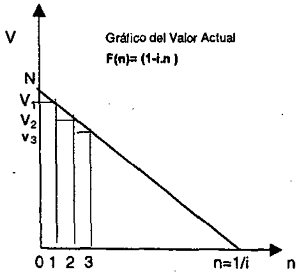
$$CFM = \left(1+\frac{N-V}{V}\right)^{\frac{30}{m}} - 1 \qquad CFA = \left(1+\frac{N-V}{V}\right)^{\frac{365}{m}} - 1$$

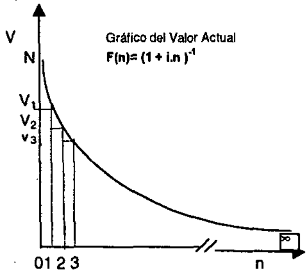
Magnitudes resultantes en las distintas modalidades

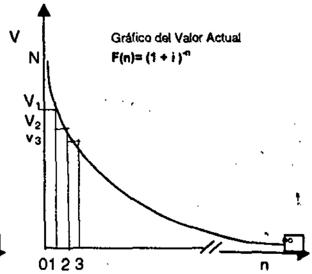
Denominación	Descuento comercial	Descuento racional	Descuento a interés compuesto
Factor de actualización F(-n)	(1-in)	$(1+i.n)^{-1}$	$(1+i.)^{-n}$
Descuento Unitario D'(0;-n) = 1-f(-n)	1- (1-n.i)=n.i	$1-(1+i.n)^{-1}= \frac{i\ .\ n}{1+i.n}$	$1-(1+i.)^{-n}$ $1-v^n$
Descuento periódico D[-p;-(p+1)]= =f(-p)-f[-(p+1)]	(1-pi)-[1-(p+1)i]= =1-p.i-1+p.i+i=i **Constante**	$\frac{1}{(1+i.p)} - \frac{1}{[1+i(p+1)]}$ $\frac{1+i(p+1)-(1+i.p)}{(1+i.p)[1+i.(p+1)]}$ $\frac{i}{(1+i.p)[1+i.(p+1)]}$ **Decreciente**	$(1+i.)^{-p}-(1+i)^{-(p+1)}$ $(1+i.)^{-p}[1-(1+i)^{-1}]$ $v^p(1-v)$ **Decreciente**
Intensidad unitaria $D'(0;-n)=\frac{1-f(-n)}{n}$	$\frac{n.i}{i}$ = i	$\frac{i}{(1+i.n)}$	$\frac{1-v^n}{n}$
Intensidad periódica D'[-p;-(p+1)]/F(-p)	$\frac{i}{1-p.i}$ **Creciente**	$\frac{i \quad (1+i.p)}{(1+i.p)[1+i.(p+1)]}$ $\frac{i}{[1+i.(p+1)]}$ **Decreciente**	$\frac{v^p(1-v)}{v^p} = 1-v$ $1-(1+i)^{-1}=\frac{i}{1+i}=d$ **Constante**

Análisis y Gráfico de las funciones financieras

Descuento Comercial (Int. Simple)	**Descuento Racional (Int. Simple)**	**Descuento a Interés Compuesto**
Función Financiera Valor Actual $F(n) = (1-i.n)$	Función Financiera Valor Actual $F(n) = (1+i.n)^{-1}$	Función Financiera Valor Actual $F(n) = (1+i)^{-n}$
Es una magnitud que representa el valor actual de una unidad de capital futura descontada n periodos antes de su vencimiento a la tasa de interés periódica considerando la modalidad de descuento correspondiente		
- El descuento es el Interés Simple del Valor Nominal. Se calcula siempre sobre el valor nominal y es proporcional tanto al valor nominal como al tiempo	El descuento es el Interés Simple del Valor Actual. Se calcula siempre sobre el valor actual.	El descuento se calcula sobre los valores actuales, salvo el primer período en que se calcula sobre el valor nominal
-No es conjugada de la capitalización simple -Es prolongada de la capitalizac. simple a la tasa "d" -No es escindible	-Es la ley de descuento conjugada de la capitalización simple. -No es escindible	-Es la ley de descuento conjugada de la capitalización a interés compuesto. -Es prolongada de la capitalización a interés compuesto -Es escindible
Análisis matemático de la función de valor actual de una unidad futura de capital		
$F'(n) = (-i) \quad <0$ ➔ función decreciente $F''(n) = 0$ ➔ función lineal Valores particulares: n=0 ➔ F(n)=1 n=1 ➔ F(n)=1-i n=1/i ➔F(n)=0 Entonces, F(n) es una función representada por una recta de la forma y= b – a.x	$F'(n) = (-1)(1+in)^{-2}.i \quad <0$ ➔ función decreciente $F''(n) = (-1)(-2)(1+in)^{-3}.i^2 > 0$ ➔ función cóncava Valores particulares: n=0 ➔ F(n)=1 n=1 ➔ $F(n)=(1+i)^{-1}$ n=∞ ➔F(n) ➔0	$F'(n) = (-1)(1+i)^{-n}.\ln(1+i) \quad <0$ ➔ función decreciente $F''(n)=-(-1)(1+i)^{-n}.[\ln(1+i)]^2>0$ ➔ función cóncava Valores particulares: n=0 ➔ F(n)=1 n=1 ➔ $F(n)=(1+i)^{-1}=v$ n=∞ ➔F(n) ➔0 Entonces, F(n) es una función exponencial de la forma $y=b\ .\ a^{-x}$







Acerca del Descuento comercial

Hasta aquí hemos presentado los factores de actualización en función de la tasa de interés. Es importante destacar que también se utiliza la tasa de descuento para actualizar valores futuros. Resulta que, en general, las tasas informadas en el mercado son "i" y por lo tanto se aplica directamente en las fórmulas de valor actual y por tal razón hemos analizado esta modalidad de descuento considerando i.

Quien procede a utilizar esta actualización tiene en sus manos el instrumento financiero que contiene los datos del Valor Nominal asociado a la fecha de exigibilidad del mismo y si necesita una tasa de referencia acude a cualquier información financiera que contiene dicha tasa expresada en términos de tasa de interés "i".

Sin embargo, debiera aclararse que la verdadera fórmula de "Valor Actual con Descuento comercial" es la siguiente: $\boxed{V = N.(1 - d.n)}$ que surge de la diferencia entre el Valor Nominal —N— y el Descuento calculado como D= N.d.n. A partir de estas fórmulas se puede establecer una relación de equivalencia a interés simple entre la tasa de descuento y la tasa de interés a través de la siguiente expresión: $(1 - d.n).(1 + i.n) = 1$

$$(1-d.n)=\frac{1}{(1+i.n)} \qquad (1+i.n)=\frac{1}{(1-d.n)}$$

$$1-\frac{1}{(1+i.n)}=d.n \qquad i.n=\frac{1}{(1-d.n)}-1$$

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{(1+i.n).n}=d \qquad i=\frac{1}{n(1-d.n)}-\frac{1}{n}$$

$$\frac{1+in-1}{(1+i.n).n}=d \qquad i=\frac{1-(1-d.n)}{n(1-d.n)}$$

$$d=\frac{i}{(1+i.n)} \qquad i=\frac{d}{(1-d.n)}$$

Aplicación

Un comerciante recibe el día 2 de marzo un documento de VN $ 5.000 como parte de pago con vencimiento el 18/05 y por necesidades de caja el día 3/05 lo negocia. Determinar: cuál es el valor líquido resultante y el descuento practicado si la tasa de descuento aplicada fue del 6% mensual. Qué tasa de interés resulta.

Rta: V= 4.850; D= 150: i= 0,06186

$$V = 5.000.(1 - \frac{0,06}{30}.15) = 5000.(1 - 0,03) = 4.850$$

D= 5.000 - 4.850 = 150

$$i = \frac{d}{1-dn} = \frac{0,06}{1-0,06.\frac{15}{30}} = \frac{0,06}{1-0,03} = 0,06185567$$

Si el valor recibido de $ 4.850 lo colocó por 15 días en el mercado a interés simple a la tasa i del 6,185567% mensual, determinar el valor final.

Rta.: $C_n = 5.000$

$$C_n = 4.850\left(1 + \frac{0,0618567}{30}.15\right) = 4.850.1,030927835 = 5.000$$

Así vemos que la tasa i es equivalente a la tasa d a interés simple. Pues si actualizamos con tasa d y luego capitalizamos con la respectiva i —equivalente a la tasa "d" respectiva— obtenemos nuevamente el valor nominal.

Aplicaciones de regímenes de actualización a interés simple y compuesto

1) Determinar el descuento de un documento cuyo valor nominal es de $1.800 que vence dentro de 3 meses, siendo la tasa de interés mensual del 4%, considerando que el descuento se aplica sobre: a) el valor nominal y b) sobre el valor efectivo. Régimen a interés simple con tasa "i"
¿Cuál es la diferencia entre ambas cuantías?

Rta.: Dc = 216; Dr=192,86 y Dc-Dr= 23,14

$$Dc = 1800 * 0,04 * 3 = 216$$

$$Dr = \frac{1800 * 0,04 * 3}{(1 + 0,04 * 3)} = 192,86$$

$$Dc - Dr = 23,14$$

La diferencia resulta ser el interés simple aplicado sobre el descuento racional.

$Dc - Dr = Dr * i * n = 192{,}86 * 0{,}04 * 3 = 23{,}14$

2) Calcular el valor efectivo de un documento de \$ 2.000 descontado al 5% mensual, 2 meses antes de su vencimiento, para las dos modalidades en el régimen de actualización simple.

Rta.: Vc = 1.800 y Vr= 1818,18

-2 *-1* *0*

/________________/________________/

V_2 *N=2.000*

$\longleftarrow$

V_2 comercial = 2.000 (1 - 0,05 * 2) = 1800

V_2 racional = 2.000 / (1 + 0,05 * 2) = 1818,18

3) ¿A qué tasa se descontó un documento de \$ 10.800, 3 meses antes de su expiración, sabiendo que la masa de descuento ascendió a \$ 1.944, desconociéndose cuál de ambas modalidades a interés simple se utilizó? Analizar la razonabilidad de los valores relativos encontrados.

Rta.: Dc i= 0,06 y Dr i= 0,073

-3 *-2* *-1* *0*

/____________/____________/____________/

V_3 *N=10.800*

$\longleftarrow$

D= 1.944

Despejamos i de las fórmulas principales de valor actual correspondiente a cada modalidad:

a) D. Comercial → $i = \dfrac{1944}{10800 * 3}$ i= 0,06 Pues D= N. i .n

b) D. Racional → $i = \dfrac{1944}{(10800 - 1944) * 3}$ i= 0,073 Pues D= V.i.n

Es razonable que en el segundo caso el tanto hallado sea mayor, pues para un mismo valor absoluto de Descuento, debe necesariamente aplicarse una tasa mayor sobre una base —V— cuyo valor es inferior a la base —N— utilizada en el Descuento Comercial.

4) En cuánto tiempo el descuento de un documento firmado por \$ 20.000 al 5,2% mensual representa \$ 1.490,67, en ambas modalidades de descuento a interés simple.

Rta.: Dc ➔ 43 días y Dr ➔ 46 días.

$$D = N.\,i.\,n$$

$$n = \frac{1490{,}67}{\left(20.000 * \frac{0{,}052}{30}\right)} = 43$$

$$n = \frac{1490{,}67}{(20000 - 1490{,}67) * \frac{0{,}052}{30}} = 46$$

5) Un documento de \$ 5.000 es descontado 75 días antes de su vencimiento siendo la tasa del 4,72% mensual. Determinar el valor efectivo, considerando ambas modalidades de descuento a interés simple.

Rta.: 4.410 y 4472,27.

$$Vc = 5.000\left(1 - \frac{0{,}0472}{30} * 75\right) = 4410$$

$$Vr = \frac{5000}{1 + \frac{0{,}0472}{30} * 75} = 4472{,}27$$

6) Un vendedor ofrece un cierto artículo a \$ 180 valor contado. Se presenta un adquirente y propone pagar \$ 30 a la entrega del producto y por el resto firmar dos documentos de igual valor efectivo con vencimientos a los 20 y 40 días respectivamente. Para ello la tasa de interés aplicada es del 7% de interés mensual, y la capitalización a interés simple. Ese mismo día, habiendo aceptado la propuesta, el vendedor por necesidad de fondos descuenta ambos documentos al 5% de interés mensual aplicándole la modalidad de descuento comercial.
Determinar si en dicha operación el vendedor obtuvo ganancia o pérdida.

Rta. : Ganancia 2,41.

0 20 40

180

30 N_1 N_2 ➔ Reg. Capit a Int Simple – $i_{30}=0{,}07$

➔ Reg. Actual. D.Comercial – $i_{30}=0{,}05$

Primero hallamos el valor nominal de cada documento conociendo que tienen igual valor presente.

$$N_1 = \frac{(180 - 30)}{2} \cdot \left[1 + \frac{0{,}07}{30} \cdot 20\right] \qquad N_2 = \frac{(180 - 30)}{2} \cdot \left[1 + \frac{0{,}07}{30} \cdot 40\right]$$

$N_1 = 78{,}50$ $\qquad$ $N_2 = 82$

Ahora, procedemos a efectuar el cálculo de los valores efectivos que recibiré en la operación de descuento.

$$V_1 = 78{,}5 \cdot \left[1 - \frac{0{,}05}{30} \cdot 20\right] \qquad V_2 = 82 \cdot \left[1 - \frac{0{,}05}{30} \cdot 40\right]$$

$V_{(1)} = 75{,}88$ $\qquad$ $V_{(2)} = 76{,}53$

$V_1 + V_2 = 152{,}41$

Como se puede apreciar, en el mismo día de la operación el ingreso de fondos alcanza $ 182,41. La diferencia positiva se encuentra en la variación en las tasas y también en la modalidad de cálculo del descuento. Supongamos que la tasa de descuento hubiera sido igual a la de financiación de la operación, es decir 7%, entonces los resultados hubieran sido los siguientes:

V(1) = 74,84
V(2) = 74,35
149,19

Es decir que, a igualdad de tasas en la aplicación de los intereses devengados del documento como en el descuento del mismo, el vendedor hubiera perdido, dado fundamentalmente en la determinación del Descuento el que se efectúa sobre un capital que no resulta ser el efectivamente prestado.

Además, recordamos que la ley de actualización simple con esta modalidad no resulta ser conjugada con la ley de capitalización simple.

7) El 1.09, de acuerdo con nuestro estado de cuenta, contamos con las siguientes obligaciones:

A los 30 días............ $ 1.500
A los 90 días............ $ 2.000
A los 180 días........... $ 3.800

Si deseamos realizar un solo pago de $ 7.500 y la tasa pactada es del 72% nominal anual. ¿En qué fecha debemos abonar ese capital equivalente a la suma de los valores actuales de los tres anteriores? Modalidad descuento comercial.

Rta.: 14 de enero del año siguiente.

```
1/9       30                  90                  180
/_________/___________________/________//_________/
          1.500               2.000               3.800
```

Determinación del valor efectivo (suma de los tres), sabiendo que la tasa diaria será.: i(d) = 0,72 / 365.

$V_{(1)} = 1500\ [1 - i(d) * 30] = 1411{,}23$
$V_{(2)} = 2000\ [1 - i(d) * 90] = 1644{,}93$
$V_{(3)} = 3800\ [1 - i(d) * 180] = \underline{2450{,}74}$
$\underline{\underline{5506{,}90}}$

Cálculo del plazo del nuevo documento:.

5506,90 = 7500 [1 - i(d) * n].
n = 135 días posteriores al 1.09→ 14 de enero del año siguiente.

8) Un agente financiero recibió un cierto capital, producto de haber descontado un documento (Desc. Comercial) 60 días antes de su vencimiento a una tasa de interés del 62% nominal anual para ese plazo. La suma recibida resultó ser colocada a la tasa del 75% nominal anual para el plazo de 140 días, obteniendo un monto de $ 14.338,01. Determinar el importe del documento.

Rta.: N = 12.398.

```
-60             0                              140 días
/_______________/______________________________/
V               N                              Cn = 14.338,01
```

Si C(n) = 14.338,01.
i(140) = (0,75/365)*140 C(o)= 14.338,01 / (1+0,28767123).
C(o)= 11.134,84 y C(o) = V (Valor actual del documento).

Entonces: El valor suscripto en el documento será:
N = 11.134,84 / [1 - i(d) * 60] para i(d) =0,62/365.
N = 12.398.

9) Un cliente por su deuda de $ 70.100 nos firma un documento a 90 días. Reconoce un interés del 92% nominal anual para el plazo men-

cionado. Por razones de iliquidez, deseamos descontar este crédito en una entidad que nos aplica tanto del 9% de interés mensual.

Calcular:

1) La cantidad que reembolsa la entidad descontante en cada modalidad de descuento.

2) La resultante T.E.M. de la operación de descuento que resulta de cada modalidad.

3) Hallar cuál hubiera sido la tasa de interés mensual en cada operación de descuento de forma tal que anule los resultados, es decir que no se generen pérdidas o ganancias por este arbitraje.

Rta.: 1) V_{dc}=62.780 ; V_{drac}=67.716 ; $V_{D.IComp}$=66.408 2) TEM_{dc}=11,06%; TEM_{drac}=8,29%;TEM_{DIComp}=9% 3) i_{dc}=6,16%; i_{drac}=7,56%;i_{DIComp}=7,05%.

$$70.100 \left(1 + \frac{0.92 * 90}{365}\right) = 86000.$$

$$i(90) = 0.2268$$

Desc. Comercial	*Desc.Racional*	*Desc. a Int. Comp.*

1) Cálculo del valor presente o valor actual

$V = 86000 \left(1-\frac{0.09}{30}*90\right)$	$V = \frac{86000}{\left(1+\frac{0.09}{30}*90\right)}$	$V = \frac{86000}{(1+0,09)^{90/30}}$
$\boxed{V = 62780}$	$\boxed{V = 67716}$	$\boxed{V = 66408}$

2) Cálculo de la TEM
Se pasa primero, a buscar la tasa de la operación para el plazo de la misma, en nuestro caso i_{90}.

$i(90) = \frac{86000-62780}{62780}$	$i(90) = \frac{86000-67716}{67716}$	$i(90) = \frac{86000-66408}{66408}$
$i(90) = 0.369863$	$i(90) = 0.27$	$i(90) = 0.2950247$

Para buscar la tasa de la operación i(m)

Hacemos $i(m) = \frac{N-V}{V}$

Luego hallamos la TEM que es la tasa equivalente mensual a la i(m)

$$TEM = (1 + i(m))^{30/m}$$

$i(30) = 0.1106035$	$i(30) = 0.08293$	$i(30) = 0.09$

3) Cálculo de la tasa mensual a aplicar en cada modalidad de descuento

$$86000\left(1-\frac{x.90}{30}\right)=70100 \qquad \frac{86000}{\left(1+\frac{x.90}{30}\right)}=70100 \qquad \frac{86000}{(1+x)^{90/30}}=70100.$$

Despejando x, en cada modalidad se arriba a:

$x = 0.0616279$ $\qquad$ $x = 0.0756062$ $\qquad$ $x = 0.0705168.$

10) El 1.04 un deudor posee los siguientes compromisos, cuyos vencimientos se detallan:

$ 3.800 vencimiento el 26.04.
$ 5.200 vencimiento el 15.05.
$11.000 vencimiento el 30.06.

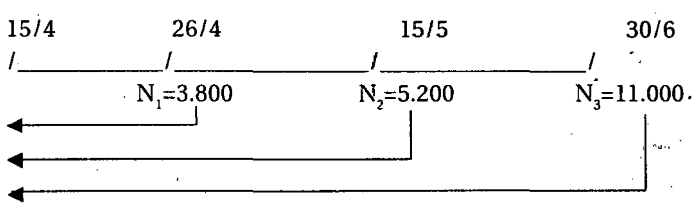
Con fecha 15.04 se presenta a su acreedor para sustituir las obligaciones por un único documento de $ 20.000 —valor nominal—. Modalidad descuento comercial. Tasa de interés a utilizar 6% mensual.

Determinar:

a) el importe adeudado al 15/04.
b) el vencimiento medio.
c) Si la sustitución se hubiera realizado con un documento de $ 19.000. Calcular el vencimiento común.
d) Se desea reemplazar por un documento de $ 17.000. Calcular el vencimiento.

Rta. : a) $17932.4; b) 52ds. c) 13.05; d) inaplicable.

Es un caso de "Equivalencia de Capitales", es decir tenemos que conseguir que el valor actual del nuevo documento sea equivalente a la suma de los valores actuales de los documentos que se sustituyen. Observamos que la suma de los VN de los documentos que se sustituyen es el VN del nuevo documento.



$$20000\left(1-\frac{0.06}{30}*n\right)=3800\left(1-\frac{0.06}{30}*11\right)+5200\left(1-\frac{0.06}{30}*30\right)+11000\left(1-\frac{0.06}{30}*76\right)$$

$$20000\left(1-\frac{0.06}{30}*n\right)=3.716,40 \quad + \quad 4.888 \quad + \quad 9.328$$

$$20000\left(1-\frac{0.06}{30}*n\right)=17932,4.$$

b) Podemos utilizar la fórmula de vencimiento medio partiendo del planteo de equivalencia financiera inicial en donde:

$$N(1 - i\,n) = N_1(1 - i.\,n_1) + N_2(1 - i.\,n_2) + \ldots + N_t(1 - i.\,n_t)$$

Debemos despejar n

$$(N_1 + N_2 + \ldots N_t)(1 - i\,n) = N_1(1 - i.\,n_1) + N_2(1 - i.\,n_2) + \ldots + N_t(1 - i.\,n_3).$$

$$(N_1 + N_2 + \ldots N_t)(1 - i\,n) = (N_1 + N_2 + \ldots N_t) - i(N_1.n_1 + N_2.n_2 + \ldots + N_t.\,n_t)$$

$$(1 - i\,n) = \frac{(N_1 + N_2 + \ldots N_t)}{(N_1 + N_2 + \ldots N_t)} - i\frac{(N_1.n_1 + N_2.n_2 + \ldots + N_t.\,n_t)}{(N_1 + N_2 + \ldots N_t)}$$

$$(1 - i\,n) = 1 - i\frac{(N_1.n_1 + N_2.n_2 + \ldots + N_t.\,n_t)}{(N_1 + N_2 + \ldots N_t)}$$

$$n = \frac{(N_1.n_1 + N_2.n_2 + \ldots + N_t.\,n_t)}{(N_1 + N_2 + \ldots N_t)} = \frac{\sum_{j=1}^{t} N_j.n_j}{\sum_{j=1}^{t} N_j}$$

$$n = \left(1 - \frac{17932.4}{20000}\right) * \frac{30}{0.06}$$

O bien utilizando la fórmula arribada: $n = \dfrac{\sum_{j=1}^{t} N_j.n_j}{\sum_{j=1}^{t} N_j}$.

$$n = \frac{3800 * 11 + 5200 * 30 + 11000 * 76}{20000} = 52$$

Por lo tanto el día de vencimiento del nuevo documento será el 6.06.

c) $19000\left(1 - \dfrac{0.06}{30} * n\right) \doteq 17932.4$; n= 28

d) No tiene sentido financiero. Pues el valor nominal del documento a sustituir debe ser mayor al valor actual de los documentos sustituidos.

11) Con fecha 16.09 deseamos refundir dos documentos en uno solo, cuyos vencimientos operan el 4.11 y 14.11. Dichos documentos fueron suscriptos el 10.09. Los valores nominales ascienden a $ 6.000 y $ 9.000 respectivamente, siendo la tasa de interés mensual aplicada en el descuento del 12,5% para el primer documento y 14,5% para el segundo. Determinar: a) El valor nominal del nuevo documento, suponiendo para el mismo: tasa mensual de interés del 15,5%, con vencimiento el 21.11; b) El tiempo, suponiendo tasa del 15,5% mensual en el nuevo

documento y con valor nominal de $ 17.008 —desc. comercial— $ 16.073 —desc. a interés simple— y $ 16.265 —desc. a int. comp.—;
c) La tasa de interés del nuevo documento, suponiendo que vence el 21.11 y será suscripto por $ 17.008 —desc.comercial— $ 16.073 —desc. a interés simple— y $ 16.265 —desc. compuesto—. En cada respuesta considerar las tres modalidades de descuento.

Rta.: a) N=17.008; 16.073 y 16.265; b) n= 66 c) i = 0,155.

a) *Cálculo del valor nominal*

Planteada la equivalencia financiera, se despeja el valor de N en cada modalidad de descuento.

- Descuento Comercial

$$N = \frac{6000\left(1-\frac{0.125}{30}*49\right)+9000\left(1-\frac{0.145}{30}*59\right)}{1-\frac{0.155}{30}*66}$$

$$N = \frac{11.208,50}{1-\frac{0.155}{30}*66}$$

N = 17.008.

- Descuento Racional

$$N = \left[\frac{6000}{1+\frac{0.125}{30}*49}+\frac{9000}{1+\frac{0.145}{30}*59}\right].\left(1+\frac{0.155}{30}*66\right)$$

$$N = 11985,69\left(1+\frac{0,1566*66}{30}\right)$$

N = 16.073.

- Descuento a Interés Compuesto

$$N = \left[\frac{6000}{(1+0.125)^{49/30}}+\frac{9000}{(1+0.145)^{59/30}}\right](1+0.155)^{66/30}$$

$$N = 11.845,88\ (1+0,1566)^{66/30}$$

N = 16.265.

b) *Cálculo del tiempo*

Partimos de la equivalencia financiera de valores actuales para las tres modalidades de descuento comercial, racional y a interés compuesto:

$N(1-i.n)=\sum_{j=1}^{t} V_j$; $\frac{N}{(1+i.n)}=\sum_{j=1}^{t} V_j$; $\frac{N}{(1+i)^n}=\sum_{j=1}^{t} V_j$; respectivamente y despejamos el valor de n del primer miembro de la ecuación. Entonces nos queda:

- Descuento Comercial

$$n=\frac{1-\frac{\sum_{j=1}^{t} V_j}{N}}{i}$$

$$n = \frac{\underline{1 - 11208.5 / 17008}}{0.155/30} = 66$$

- Descuento Racional

$$n=\frac{\left(\frac{N}{\sum_{j=1}^{t} V_j}\right)-1}{i}$$

$$n = \frac{\underline{16073 / 11985.69 - 1}}{0.155/30} = 66$$

- Descuento a Interés Compuesto

$$\frac{N}{(1+i)^n}=\sum_{j=1}^{t} V_j$$

$$\log\left(\frac{N}{\sum_{j=1}^{t} V_j}\right)=n.\log(1+i)$$

$$n=\frac{\log N-\log\left(\sum_{j=1}^{t} V_j\right)}{\log(1+i)}$$

$$n = \frac{\underline{\log 16264 - \log 11845.88}}{\log(1+0.0048149)} = 66$$

c) *Cálculo de la tasa de interés*

Partimos de la misma equivalencia financiera del punto anterior, pero despejamos i en lugar de n.

- Descuento Comercial

$$i=\frac{1-\frac{\sum_{j=1}^{t} V_j}{N}}{n}$$

$$i = \frac{1 - 11208.5/17008}{66} = 0.00516646.$$

$$i(30) = i(d) * 30.$$
$$i(30) = 0.155.$$

- Descuento Racional

$$i = \frac{\left(\dfrac{N}{\sum_{j=1}^{t} V_j}\right) - 1}{n}$$

$$i = \frac{16073 / 11985.69 - 1}{66} = 0.00516692.$$

$$i(30) = i(d) * 30.$$
$$i(30) = 0.155.$$

- Descuento a Interés Compuesto

$$i = \left(\frac{N}{\sum_{j=1}^{t} V_j}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

$$i = (16265 / 11845.88)^{1/66} - 1 = 0.0048151.$$

$$i(30) = [1+i(d)]^{30} - 1.$$
$$i(30) = 0.155.$$

Capítulo VI

Tasas de descuento

Objetivo

- Comprender y manejar las diferentes tasas de descuento

Actualización Discreta

- Si buscamos información financiera en cualquier periódico o página de internet nos encontramos con diferentes tasas de descuento. En general, podemos mencionar:

T.N.A T.E.A. T.E.M

Recorreremos el mismo camino efectuado en el tema "Tasas de interés".

Diferentes nombres

- *Tasa nominal anual de descuento para el plazo de "m" días*
- *Tasa nominal anual de descuento actualizable cada "m" días*
- *Tasa nominal anual de descuento convertible cada "m" días*
- *Tasa anual adelantada actualizable cada "m" días*

$$T.A.N_{(365/m)} = f_{(365/m)}$$

Tasa convenida o contractual de la operación. Es una tasa de trabajo y es la tasa que expresada anualmente actualiza (365/m) veces en un año, según el plazo al que está referida.

Dato: TNA=36,5% para una operación que actualiza cada 180 días de plazo.

Significa que debo hallar el valor actual de un peso futuro una fracción de período antes: que es un semestre —en nuestro caso— con una tasa para ese subperíodo —semestre— considerando el año de 365 días:

-180 días		0
$\left(1-\frac{0,365.180}{365}\right)$	$\longleftarrow$	1
(1-0,18)	$\longleftarrow$	1
0,82	$\longleftarrow$	1

De esa forma la operación resulta sincrónica: pudimos adecuar la tasa de interés para el plazo de la operación que es 180 días.

Si la TNA está referida a un "plazo", este es el intervalo de tiempo al final del cual se actualiza la operación, quedando graficado para un año el siguiente eje de tiempo:

-365		-180		0
$\left(1-\frac{0,365.180}{365}\right)^{\frac{365}{180}}$	$\longleftarrow$	$\left(1-\frac{0,365.180}{365}\right)$	$\longleftarrow$	1
$(1-0,18)^{365/180}$	$\longleftarrow$	(1-0,18)	$\longleftarrow$	1
0,6687	$\longleftarrow$	0,82	$\longleftarrow$	1

Tasa proporcional de m días denotada como d_m.

T.N.A. para el plazo de "m" días — *TASA PROPORCIONAL DE "m" días*

$f_{(365/m)}$ $\Longrightarrow$ "m" días $\Longrightarrow$ d_m

TASA PERIODICA — *TASA SUBPERIODICA*

Vimos que en nuestro ejemplo:

actualiza cada

$f_{(365/180)}=0,36$ $\Longrightarrow$ "180" días $\Longrightarrow$ Tasa proporcional $d_{180}=\frac{0,365}{\frac{365}{180}}=0,18$

Supongamos que la operación queda definida para un plazo de **30 días a** igual T.N.A. para ese plazo, es decir: $f_{(365/30)} = 0{,}365$ ➔ buscamos la i_m

Que actualiza cada

$f_{(365/30)}=0{,}365$ ⟹ "30"días ⟹ Tasa proporcional **$d_{30}= \frac{0{,}365}{\frac{365}{30}} =0{,}03$**

Y así sucesivamente... En un cuadro de valores volcamos los resultados que surgen según sea el intervalo de tiempo al que se refiere la tasa nominal anual y nos queda:

m	*T.N.A*	*d_m*
365	*0,365*	*0,365*
180	*0,365*	*0,18*
90	*0,365*	*0,09*
30	*0,365*	*0,03*
15	*0,365*	*0,015*
1	*0,365*	*0,001*

Podemos concluir que: estas tasas subperiódicas d_m denominadas "tasa proporcionales de m días" corresponden a diferentes períodos o intervalos de tiempo, pero tienen entre sí la misma relación que entre los períodos. Pues $d_{30}= 0{,}03$ y $d_{180}= 0{,}18$ son tasas proporcionales de 30 días y 180 días, respectivamente. La segunda es 6 veces mayor pues está referida a un intervalo de tiempo 6 veces mayor que el de 30 días, Dicho de otro modo, el tanto de descuento correspondiente a diferentes períodos tiene la misma relación que entre sus períodos y por eso son proporcionales (ej. 0,18/0,03=180/30=6).

$$d_m \xleftrightarrow{\text{proporcional}} f_{(365/m)}$$

pues:

$$d_m = \frac{f_{\left(\frac{365}{m}\right)}.m}{365} \qquad\qquad f_{\left(\frac{365}{m}\right)} = \frac{d_m.365}{m}$$

Vemos "$f_{(365/m)}$" es un coeficiente Anual Nominal porque no toma en cuenta el descuento del descuento, al igual que "$j_{(365/m)}$ que no toma en cuenta el interés del interés.

En el ejemplo de la actualización de una unidad de capital a una tasa semestral un año antes, arroja un valor actual de 0,6687 y surge de tomar en cuenta:

- Que la T.N.A. está referida a un plazo de m días, pues ya expresamos que es el tanto que actualiza cada "m" días, eso significa que cada m días los intereses se descuentan del capital y para calcular el valor actual debimos considerar esta convención exponencial actualizando con la tasa d_m a interés compuesto (365/m) veces en el año.

En este caso "m" se denomina **período de actualización** y $\frac{365}{m}$ es la **frecuencia de actualización.**

¿Qué pasaría si deseamos determinar el valor actual de un capital futuro de $1 que se vaya actualizando mensualmente? Por tal razón utilizamos una TNA referida a ese plazo. Suponiendo que sea del 36,5% con actualización mensual. Luego, ¿cuál es la tasa efectiva anual de descuento resultante?

Por otro lado, primero: determinamos cuál es el tanto de descuento efectivo anual que resulta del caso anterior en donde la actualización era cada semestre.

a) $T.N.A._{\left(\frac{365}{180}\right)} = 0{,}365$

-365	-180	0
$\left(1-\frac{0{,}365.180}{365}\right)^{\frac{365}{180}}$	$\left(1-\frac{0{,}365.180}{365}\right)$	1
$(1-0{,}18)^{365/180}$	$(1-0{,}18)$	1
0,6687	0,82	1

T.E.A. = 1-0,6687 = 0,3313

b) $T.N.A._{\left(\frac{365}{30}\right)} = 0{,}365$

días	365	360		90	60	30	
	-(365/30) //	-12 //		-3	-2	-1	0
	$(1-\frac{0{,}365.30}{365})^{(365/30)}$	$(1-\frac{0{,}365.30}{365})^{12}$	....	$(1-\frac{0{,}365.30}{365})^{3}$	$(1-\frac{0{,}365.30}{365})^{2}$	$(1-\frac{0{,}365.30}{365})$	1
	$(1-0{,}03)^{(365/30)}$	$(1-0{,}03)^{12}$	....	$(1-0{,}03)^{3}$	$(1-0{,}03)^{2}$	$(1-0{,}03)^{1}$	1
	0,6903	0,6938	...	0,9127	0,9409	0,97	1

T.E.A. = 1-0,6903=0,3097

Entonces: si al capital futuro de una unidad le restamos su valor actual un año antes de su vencimiento, nos genera una variación absoluta entendida como la disminución que debe hacerse de ese capital futuro, es decir el Descuento. Dicha variación relacionada con ese valor futuro de una unidad nos da un tanto efectivo anual de descuento.

En general:

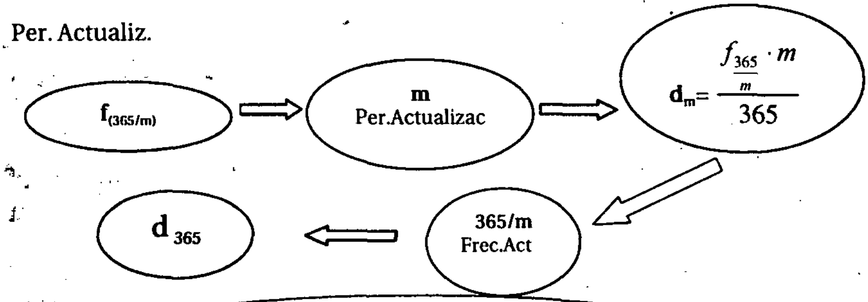
-(365/30)	//	-12	//	-3	-2	-1	0
$\left(1-\frac{f_{(365/m)}.m}{365}\right)^{365/m}$		$\left(1-\frac{f_{(365/m)}.m}{365}\right)^{12}$		$\left(1-\frac{f_{(365/m)}.m}{365}\right)^{3}$	$\left(1-\frac{f_{(365/m)}.m}{365}\right)^{2}$	$\left(1-\frac{f_{(365/m)}.m}{365}\right)$	1
$(1-d_m)^{(365/30)}$		$(1-d_m)^{12}$	....	$(1-d_m)^3$	$(1-d_m)^2$	$(1-d_m)$	1

$$TEA = d_{365} = 1-(1-d_{365}) = 1-(1-d_m)^{\frac{365}{m}} = 1-\left(1-\frac{f_{365}\cdot\frac{m}{m}}{365}\right)^{\frac{365}{m}}$$

La tasa subperiódica d_m no produce iguales valores actuales. Vimos que al actualizar la tasa d_{30}= 0,03 (365/30) veces en el año el valor actual de 0,6903 resultó mayor al valor actual de 0,6687 resultante de actualizar la tasa d_{180}= 0,18 , (365/180) veces en el año.

> *Observamos que no da el mismo valor actual actualizando 1 vez al año, que actualizando cada semestre, que cada mes,... y podríamos seguir así:*
> - *disminuyendo el período de actualización, ó*
> - *incrementando la frecuencia de actualización*
>
> *La T.E.A. es menor, pues se descuentan más intereses sobre los intereses.*

El esquema para calcular la T.E.A. a partir de una TNA es el siguiente:



$$TEA = d_{365} = 1-(1-d_{365}) = 1-(1-d_m)^{\frac{365}{m}} = 1-\left(1-\frac{f_{365}\cdot\frac{m}{m}}{365}\right)^{\frac{365}{m}}$$

A continuación volcamos algunos valores hallados, considerando la misma T.N.A. pero con diferentes frecuencias de actualización (365/m); o bien con diferentes períodos de actualización (m).

m	T.N.A de descuento	T.E.A. de descuento	Valor actual de una unidad de capital futuro 1 año antes
365	*0,365*	*0,365*	*(1-0,365)= 0,635*
180	*0,365*	*0,3313*	$(1-0,18)^{365/180}= 0,6687$
90	*0,365*	*0,3178*	$(1-0,09)^{365/90}= 0,6822$
30	*0,365*	*0,3097*	$(1-0,03)^{365/30}= 0,6903$
15	*0,365*	*0,3077*	$(1-0,015)^{365/15}=0,6923$
1	*0,365*	*0,3059*	$(1-0,001)^{365}= 0,6941$

Observamos el cuadro de valores en donde llegamos a valores actuales diferentes a partir de una misma T.N.A. que actualiza cada "m" días distintos.

Por eso:

$$\left(1-\frac{0,365.1}{365}\right)^{\frac{365}{1}} > \left(1-\frac{0,365.15}{365}\right)^{\frac{365}{15}} > \left(1-\frac{0,365.30}{365}\right)^{\frac{365}{30}} > \ldots \left(1-\frac{0,365.180}{365.}\right)^{\frac{365}{180}} >$$

0,6941 > 0,6923 > 0,6903 > 0,6687 >...VALORES ACTUALES

0,3059 < 0,3077 < 0,3097 < 0,3313 T.E.A. DE DESCUENTO

Dada la misma T.N.A. de descuento para m ≠ → a medida que ↑ m ↑ T.E.A.

Es decir que si aumenta el m (período de actualización) la frecuencia de actualización disminuye y por lo tanto su TEA aumenta.

Por eso es NECESARIO que la ***T.N.A. esté referida a un plazo determinado pues produce diferentes tantos efectivos,*** *y esta TNA no sirve para toma de decisiones.*

Debemos considerar siempre el período de actualización al que se refiere la T.N.A, pues es el que me señala la cantidad de veces que se actualizan los intereses.

¿Cómo calculamos la T.N.A. para los distintos "m" en función de la T.E.A.? Ejemplo: queremos obtener un 43,28% efectivo anual.

Planteamos la equivalencia financiera que contiene el valor actual de una unidad futura de capital en función de la tasa nominal anual para el plazo de m días que será nuestra incógnita y el valor actual en función de la TEA que es el dato y

$$(1-d_{365}) = \left(1 - \frac{f_{\frac{365}{m}} \cdot m}{365}\right)^{\frac{365}{m}}$$

$$f_{\left(\frac{365}{m}\right)} = \left[1-(1-d_{365})^{\frac{m}{365}}\right].\frac{365}{m}$$

despejamos:

m	*T.E.A.*	*T.N.A*	*Forma de cálculo de la TEA en función de la T.N.A. para el plazo de "m" días*
365	*0,3097*	*0,3097*	$\left[1-(1-0{,}3097)^{\frac{365}{365}}\right]\frac{365}{365} = 0.3097$
180	*0,3097*	*0,3387*	$\left[1-(1-0{,}3097)^{\frac{180}{365}}\right]\frac{365}{180} = 0.16705.\frac{365}{180}$
90	*0,3097*	*0,3542*	$\left[1-(1-0{,}3097)^{\frac{90}{365}}\right]\frac{365}{90} = 0{,}08734.\frac{365}{90}$
60	*0,3097*	*0,3596*	$\left[1-(1-0{,}3097)^{\frac{60}{365}}\right]\frac{365}{60} = 0{,}0591.\frac{365}{60}$
30	*0,3097*	*0,3650*	$\left[1-(1-0{,}3097)^{\frac{30}{365}}\right]\frac{365}{30} = 0{,}03.\frac{365}{30}$
15	*0,3097*	*0,3678*	$\left[1-(1-0{,}3097)^{\frac{15}{365}}\right]\frac{365}{15} = 0{,}0151.\frac{365}{15}$
1	*0,3097*	*0,3704*	$\left[1-(1-0{,}3097)^{\frac{1}{365}}\right].365 = 0{,}001.365$

En el cuadro —última columna— para la determinación de la T.N.A. aparecen los siguientes tantos: 0,16705; 0,08734; 0,0591; 0,03; 0,0151 y 0,001: son las tasas subperiódicas para cada uno de los "m días": período de actualización (intervalo de tiempo al que se refiere la operación).

$$d_m \xleftrightarrow{\text{equivalente o efectiva}} d_{(365/m)}$$

pues $\quad d_m = 1-(1-d_{365})^{\frac{m}{365}} \qquad d_{365} = 1-(1-d_m)^{\frac{365}{m}}$

Esas tasas mencionadas producen el mismo valor actual (1-0,3097) un año antes; dada esta indiferencia financiera, ambas tasas son equivalentes. Entonces:

Estas tasas subperiódicas d_m que actualizan (365/m) veces en el año generan igual valor actual que actualizando la tasa periódica d_{365} una sola vez. Se denominan tasas equivalentes.
Al ser equivalentes entre sí producen una relación de indiferencia; todas medidas en un momento común generan el mismo valor actual.

Tasas Continuas

En lugar de utilizar tasas discretas. Veremos como caso particular para el análisis:

Actualización Continua

Si la T.NA. se refiere a una frecuencia de actualización $\rightarrow \infty$, lo que significa que el período de actualización es un intervalo de tiempo tan pero tan pequeño que $\rightarrow 0$ se trata de una actualización continua y la tasa que actúa generalmente es conocida como tasa instantánea de descuento.

Siendo f (∞) = la tasa nominal instantánea δ.

Si tan solo denominamos a la frecuencia de actualización n y a la T.E.A. = d, entonces:

$$(1-d)=\left(1-\frac{f}{n}\right)^{n} \text{despejamos f y nos queda: } f=n.\left[1-(1-d)^{\frac{1}{n}}\right]=\frac{1-(1-d)^{n^{-1}}}{n^{-1}}$$

Para poder hallar un cociente indeterminado en el límite lo resolvemos matemáticamente derivando en forma independiente el numerador y el denominador hasta que no quede más la indeterminación (Regla de L' Hopital).

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-(1-d)^{\frac{1}{n}}}{n^{-1}}\right)=\frac{(-1).(1-d)^{\frac{1}{n}}.\ln(1-d)(-1).n^{-2}}{(-1).n^{-2}}=-\ln(1-d)$$

Entonces: $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=-\ln(1-d)$

Con el análisis de la función observamos que por más que incremente la frecuencia de actualización no aumenta en igual medida la T.N.A., pues tiene un límite.

Entonces si tuviésemos que graficar la función de la T.N.A. deberíamos analizar las derivadas para saber que se trata de una función creciente y cóncava al origen.

$$F(n)=\left[1-(1-d)^{\frac{1}{n}}\right]n$$

Si derivamos esta función y = u.v en donde:

y'=u'.v + u . v'   u= 1-(1-d)$^{1/n}$ v=n

u'= -(1-d)$^{1/n}$. ln(1-d) (-1) n^{-2} v'=1

$$\frac{df(n)}{dn}=\left[-(1-d)^{\frac{1}{n}}.\ln(1-d)(-1).n^{-2}\right].n+\left[1-(1-d)^{\frac{1}{n}}\right]$$

$$\frac{df(n)}{dn}=(1-d)^{\frac{1}{n}}.\ln(1-d)n^{-1}+1-(1-d)^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{df(n)}{dn}=(1-d)^{\frac{1}{n}}\left[\ln(1-d)n^{-1}-1\right]+1$$

$$\frac{df(n)}{dn}=(1-d)^{\frac{1}{n}}\left[\frac{\ln(1-d)}{n}-1\right]+1>0$$ Función creciente

$$\frac{d^2f(n)}{dn}=(1-d)^{\frac{1}{n}}\ln(1-d)(-1).n^{-2}\left[\frac{\ln(1-d)}{n}-1\right]+(1-d)^{\frac{1}{n}}(-1).n^{-2}\ln(1-d)$$

$$\frac{d^2f(n)}{dn}=\frac{-(1-d)^{\frac{1}{n}}\ln(1-d)}{n^2}\left[\frac{\ln(1-d)}{n}-1+1\right]$$

$$\frac{d^2f(n)}{dn}=\frac{-(1-d)^{\frac{1}{n}}[\ln(1-d)]^2}{n^3}\langle 0$$ Función convexa

Para saber los valores particulares de dicha función y proceder a su gráfica, ya tenemos n tendiendo a infinito y nos falta n $\rightarrow$ 0.

$$\lim_{n\to 0}\left(\frac{1-(1-d)^{\frac{1}{n}}}{n^{-1}}\right)=0$$

Entonces:

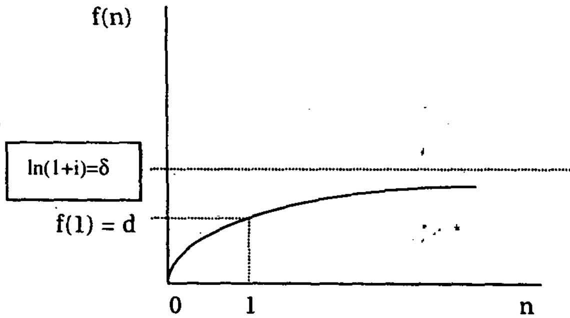
n	f(n)
0	f (0)=0
∞	f (∞)=-ln(1-d) = ln(1-d)$^{-1}$ = ln(1+i)= δ

δ ya la habíamos visto al estudiar la función j(n) y la hemos denominado "***tasa nominal instantánea***".

(1+i) =e$^{\delta}$

(1+i)$^{-1}$ =e$^{-\delta}$

(1-d) =e$^{-\delta}$



Del gráfico se observa que para conseguir el mismo rendimiento efectivo la tasa nominal anual debe aumentar si aumenta n (frecuencia de actualización). Pero tiene un límite que es el ln (1+i).

La función es asintótica. Tiene como asíntota ln(1+i) $\forall n \rightarrow \infty$

Vemos que:

$$f(1)=d < f(2) < f(3) < f(4) \ldots < f(\infty)$$

Ejemplo: Si quiero obtener una tasa efectiva anual de descuento del 9,09%. ¿Cuál será el valor de la T.N.A. considerando diferentes frecuencias de actualización —n—? Determine también para los casos singulares en que la frecuencia de capitalización tome valores como 0 e ∞.

n	$f(n)=n.\left[1-(1-d)^{\frac{1}{n}}\right]$
0	f(0)=0
1	f(1)=d=0,0909
2	
3	$f(3)=3.\left[1-(1-d)^{\frac{1}{3}}\right]=0,09381$
4	$f(4)=4.\left[1-(1-d)^{\frac{1}{4}}\right]=0,0942$
365	$f(365)=365.\left[1-(1-d)^{\frac{1}{365}}\right]=0,095287$
∞	$f(\infty)=-\ln(1-d)=0,09531$

Equivalencias entre los distintos Factores de actualización

$$(1-d_{365})=\left(1-\frac{f_{\frac{365}{m}}\cdot m}{365}\right)^{\frac{365}{m}}=(1-d_m)^{\frac{365}{m}}=e^{-\delta}$$

Aplicaciones

1) Si la tasa nominal anual de descuento para el plazo de 90 días es del 90%. Cuál es la correspondiente tasa efectiva anual de descuento.

Rta.: 0,63855

$$d_{(365)} = 1-\left(1-\frac{0{,}90.90}{365}\right)^{\frac{365}{90}} = 1\text{-}0{,}3614496\text{=}0{,}63855$$

2) Si la tasa nominal anual de descuento para el plazo de 18 días es del 21,40%. Cuál es la correspondiente tasa efectiva mensual y la tasa efectiva de 18 días de descuento.

Rta. : d(30) = 0,01753; d(18)=0,01055

$$d_{30} = 1-\left(1-\frac{0{,}2140\,.18}{365}\right)^{\frac{30}{18}}$$

$d_{30} = 1-(1-0{,}0105534)^{\frac{30}{18}}$ en donde vemos que $d_{18} = 0{,}0105534$

$d_{30} = 0{,}01753$

3) Si la tasa efectiva anual de descuento es del 40,56%. Determine la correspondiente T.N.A. para operaciones de descuento a: a) 45 días de plazo; b) 10 días de plazo.

Rta.: $d_{45} = 0{,}5039$; $d_{10} = 0{,}5165$

$$1-0{,}4056 = \left(1-\frac{f_{\frac{365}{45}}\,.45}{365}\right)^{\frac{365}{45}}$$

$$f_{\frac{365}{45}} = \left[1-(1-0{,}4056)^{\frac{45}{365}}\right]. \frac{365}{45} = 0{,}06212 \cdot \frac{365}{45} = 0{,}5039$$

$$1-0{,}4056 = 1-\left(1-\frac{f_{\frac{365}{10}}\,.10}{365}\right)^{\frac{365}{10}}$$

$$f_{\frac{365}{10}} = \left[1-(1-0{,}4056)^{\frac{10}{365}}\right]. \frac{365}{10} = 0{,}014151 \cdot \frac{365}{10} = 0{,}5165$$

4) Si por un valor a cobrar el 07/07 por \$ 1.800 recibí \$ 1.724,4 el día 1/06, determine:
   a) la tasa efectiva anual de descuento resultante;

b) la tasa efectiva mensual de descuento;
c) la tasa de descuento nominal anual para el plazo de la operación;
d) la tasa de descuento equivalente correspondiente al plazo de la operación.

Rta.: a) $d_{365}= 0{,}3527$; b) $d_{30}= 0{,}0351$; c) $f_{(365/36)} = 0{,}4258$ y d) $d_{36}= 0{,}042$

1°) Debemos hallar el plazo de la operación. La negociación se hizo 36 días antes del vencimiento. n=36

2°) Si medimos la operación en los extremos tenemos la tasa de descuento por el plazo de la operación.

0 1
/________/
1724,4 1.800

D=1800-1724,4=75,6

Si la variación absoluta es de $ 75,60. Nos preguntamos cuánto representa en función al Valor Nominal de $ 1.800.

Nos arroja una variación relativa por el plazo total de 36 días —en tanto por uno— del:

$$0{,}042 = \frac{75{,}60}{1800}$$

Si $d_{36}= 0{,}042$ —tasa de descuento de la operación—. Proporcional con respecto a la T.N.A.

$$f_{\frac{365}{36}} = \frac{0{,}042 \,.\, 365}{36} = 0{,}4258$$

Partimos de la TNA de descuento y hallo la tasa efectiva mensual y anual de descuento.

$$d_{365} = 1 - \left[1 - \frac{0{,}4258 \,.\, 36}{365}\right]^{\frac{365}{36}} = 0{,}3527$$

$$d_{30} = 1 - \left[1 - \frac{0{,}4258 \,.\, 36}{365}\right]^{\frac{30}{36}} = 0{,}3512$$

Capítulo VII

Relaciones entre tasas de interés y de descuento

Equivalencia entre los distintos factores de capitalización y actualización

Cuando tenemos que hallar un tanto en función a otro podemos plantear la equivalencia financiera y despejar la incógnita. A continuación tenemos la equivalencia entre los factores en función a las distintas tasas.

$$(1+i_{365})=\left(1+\frac{j_{\frac{365}{m}}\cdot m}{365}\right)^{\frac{365}{m}}=(1+i_m)^{\frac{365}{m}}=(1-d_{365})^{-1}=\left(1-\frac{f_{\frac{365}{m}}\cdot m}{365}\right)^{-\frac{365}{m}}=(1-d_m)^{-\frac{365}{m}}=e^{\delta}$$

Otras relaciones resultantes:

La equivalencia entre la tasa de interés efectiva y la tasa de descuento efectiva.

Partimos de la equivalencia: $(1+i_{365}) = (1-d_{365})^{-1}$

despejando: $i_{365}=\dfrac{d_{365}}{1-d_{365}}$

$$d_{365}=\frac{i_{365}}{1+i_{365}}$$

Partimos de la equivalencia: $(1+i_m)^{365/m} = (1-d_m)^{-365/m}$

despejando: $i_m=\dfrac{d_m}{1-d_m}$

$$d_m=\frac{i_m}{1+i_m}$$

Partimos de la equivalencia:

$$\left(1+\frac{j_{\frac{365}{m}}\cdot m}{365}\right)^{\frac{365}{m}}=\left(1-\frac{f_{\frac{365}{m}}\cdot m}{365}\right)^{-\frac{365}{m}}$$

despejando:

$$\boxed{j_{\frac{365}{m}}=\frac{f_{\left(\frac{365}{m}\right)}}{1-\frac{f_{\left(\frac{365}{m}\right)}.m}{365}}}\qquad\boxed{f_{\frac{365}{m}}=\frac{j_{\left(\frac{365}{m}\right)}}{1+\frac{j_{\left(\frac{365}{m}\right)}.m}{365}}}$$

Aplicaciones

1) Sabiendo que dispongo de $ 6.000 por un plazo de 90 días, me presenté ante un asesor financiero, quién me ofreció las siguientes alternativas:
   a) Depositarlos en la financiera "Rayo de Sol S.A." por un plazo de 20 días y renovar la operación hasta completar los 80 días y luego depositarlos por los 10 días restantes. En el primer caso la tasa es del 38% nominal anual para el plazo de 20 días y en el último depósito del 38% anual efectivo.
   b) Prestarlos por 90 días a una empresa mediante el sistema de descuento comercial, siendo la tasa pactada de interés del 2% mensual.
   c) Comprar letras por 30 días renovando la operación hasta completar los 90 días. Se asume que por una letra valor nominal de $ 1.000 se debe abonar para el plazo de 30 días $ 980 y que se mantiene fijo dicho importe en las licitaciones siguientes.

   Justifique cuál es la más conveniente.

Rta.: conviene a).

0 20 40 60 80 90 días
/______/______/______/______/______/

a) C_0= 6.000 TEA= 0,38 C_n

b) C_0= 6.000 i_{30}= 0,02 Desc.Comercial C_n

c) C_0= 6.000 $N=1000\leftrightarrow V_{30}=980$ C_n

$$C(n) = 6000\ .\ \left[1+\frac{0{,}38 * 20}{365}\right]^4\ \ (1+0{,}38)^{10/365}$$

C(n) = 6573.30

N = 6000 * (1 - 0,02 . 90 /30) = 6382.98

$C(n) = 6000\,[\,1+ d/(1-d)]^3 = 6374,90$ si $d_{30} = \dfrac{1000-980}{1000} = 0,02$

$C_0 = 6.000$ y $C_n / (1+i)^n = C_0$

$C(n) = 6000\,[\,1+ i\,]^3 = 6374,9$ si $i_{30} = \dfrac{1000-980}{980} = 0,020408$

Para determinar la conveniencia podemos comparar Valores Finales o bien rendimientos.

Para hallar el rendimiento efectivo de la operación, para ese plazo debemos hacer:

$$i_m = \frac{C_n}{C_0} - 1$$

	Operación a	Operación b	Operación c
Montos	6573,30	6382,98	6374,9
T.E.M.	$i_{90} = \dfrac{6573.30}{6.000} - 1 = 0,0956$	$i_{90} = \dfrac{6.382,98}{6.000} - 1 = 0,0638$	$i_{90} = \dfrac{6.374,9}{6.000} - 1 = 0,0625$

La más conveniente resulta ser la operación a) pues arroja mayor valor final o también porque genera el mayor rendimiento de la operación.

2) Si la tasa de interés efectiva para el plazo de 7 días es del 2%. Cuál es la correspondiente tasa de descuento y cuál será la tasa efectiva de descuento para 30 días.

Rta.: 0,0196; 0,08137.

$$d(7) = \frac{0,02}{(1+0.02)} = 0,0196$$

$$d(30) = 1 - [\,1 - d(7)]^{30/7} = 0,08137$$

3) Si la tasa nominal anual de descuento para el plazo de 90 días es del 80%. Cuál es la correspondiente tasa nominal anual de interés.

Rta.: 0,9966.

$$J_{(365/90)} = \frac{f(365/90)}{\left(1 - \dfrac{f_{365/90} * 90}{365}\right)} = 0,9966$$

4) Para una tasa efectiva anual de descuento del 58%, determinar la tasa efectiva anual de interés.

Rta.: 1,3809.

$i_{365} = 0,58 / (1 - 0,58) = 1,3809$

5) Si la tasa nominal anual de interés para el plazo de 10 días es del 42%. ¿Cuál es la correspondiente tasa nominal anual de descuento?

Rta.: 0,4152.

$$f_{365/10} = \frac{j_{(365/10)}}{\dfrac{1 + j_{(365/10)} \cdot 10}{365}} = 0{,}4152$$

6) El 12.08 suscribo un documento por \$ 10.000, con vencimiento el 11.09, recibiendo a cambio \$ 9.200.
Determinar:

a) la tasa de descuento del período *Rta.*: 0,08.
b) la tasa de interés del período *Rta.*: 0,087.
c) la tasa de interés efectiva anual *Rta.*: 1,758.
d) la tasa de descuento efectiva anual *Rta.*: 0,637.
e) la tasa nominal anual de descuento *Rta.*: 0,9733.
f) la tasa nominal anual de interés *Rta.*: 1,058.

$$d_{(30)} = \frac{10000 - 9200}{10.000} = 0{,}08$$

$$i_{(30)} = 0{,}08 / (1 - 0{,}08) = 0{,}087 \qquad i_{(30)} > d_{(30)}.$$

$$i_{365} = (1 + 0{,}0869565)^{365/30} - 1 = 1{,}758$$

$$d_{365} = 1{,}7579 / (1 + 1{,}7579) = 0{,}637 \qquad i_{(365)} > d_{(365)}.$$

$$f_{(365/30)} = \frac{0{,}08 * 365}{30} = 0{,}9733 \qquad f_{(365/30)} > d_{(365)}.$$

$$j_{(365/30)} = \frac{0{,}087 * 365}{30} = 1{,}058 \qquad j_{(365/30)} < i_{(365)}$$

7) Un depositante decidió efectuar varias colocaciones a plazo fijo de acuerdo a sus necesidades de caja futuras. De acuerdo a su cronograma puede inmovilizarse por los siguientes plazos y en las cuantías que se indican:

a) C(0) = 1.000 n= 10 días.
b) C(0) = 800 n= 22 días.
c) C(0) = 500 n= 30 días.
d) C(0) = 400 n= 120 días.

Si las tasas fijadas por una institución financiera, son las que se comunican a continuación en el siguiente memo:

Nos dirigimos a esa Gerencia para comunicar que se resolvió fijar a partir del 1 de julio, las T.E.M. máximas para depósitos:	
1) Depósitos a Plazo Fijo Nominativo constituidos a partir del 1 de julio:	
Transferibles	*3,5%*
Intransferibles	
** de 7 a 14 días*	*2,7%*
** de 15 a 22 días*	*2,8%*
** de 23 a 29 días*	*2.9%*
** de 30 días y más*	*3.5%*
2) Saldos de depósitos en cajas de ahorro vigentes a partir del 1 de julio	
** común*	*2,7%*
** especial*	*3,5%*

Se pide:

a) El monto o valor final de cada uno de los certificados al finalizar el plazo de imposición, considerando que existe una retención del 2% que se practica sobre los intereses y ajustes del capital y recaen en el inversor porque la entidad financiera que capta esos depósitos reviste la calidad de agente de retención.

Rta.: $C_{(10)}$= 1008,74.
$C_{(22)}$ = 816,04.
$C_{(30)}$ = 517,15.
$C_{(120)}$= 457,83.

b) Expresar para los siguientes plazos: n= 10; n= 22; n= 30 y n=120 la correspondiente tasa nominal anual de interés, la tasa equivalente de esos subperíodos y la tasa efectiva anual de interés, considerando los valores enunciados en el cuadro.

Rta.: $j_{(365/10)}$= 0.3255873 $i_{(10)}$= 0.0089202 i=0.382846.
$j_{(365/22)}$= 0.3394101 $i_{(22)}$= 0.0204576 i=0.3993181.
$j_{(365/30)}$ = 0.42583 $i_{(30)}$ = 0.035 i=0.5197574.
$j_{(365/120)}$ = 0.448716 $i_{(120)}$= 0.147523 i=0.5197574.

c) Utilizando los datos del cuadro, calcular para los siguientes plazos: n= 7; n= 30 y n=45 días las tasas adelantadas equivalente de esos plazos, las T.N.A. de descuento para el plazo de n días y las correspondientes T.E.A. de descuento.

Rta.: n= 7; d(7)= 0,006197 d=0,276853 $f_{(365/7)}$ =0,3231374.
n=30; d(30)=0.0338164 d=0.342 $f_{(365/30)}$=0.4114331.
n=45; d(45)=0.0529567 d=0.342 $f_{(365/45)}$=0.4079347.

Para la resolución seguiremos los siguientes pasos:

Punto a):

a.1 -Determinaremos las tasas equivalentes para "n" días, conociendo las T.EM., así la operación es sincrónica.

a.2 -Posteriormente, se calcularán los montantes resultantes en cada uno de los casos de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$C_{(1)} = C_{(0)} + C_{(0)} \,.\, i - 0{,}02 \,.\, C_{(0)} \,.\, i.$$
$$C_{(1)} = C_{(0)} \, [\, 1 + 0{,}98 \,.\, i \,].$$

Como se trata de un único período para el cálculo del monto, no se consideran en dicha fórmula los períodos de capitalización; caso contrario se hubieran utilizando las siguientes fórmulas:

retiro periódico de intereses

$$\boxed{C_{(n)} = C_{(0)} \; [\, 1 + i.(1\text{-}a) \,.\, n \,]}$$

reinversión periódica de intereses

$$\boxed{C_{(n)} = C_{(0)} \; [\, 1 + i.(1\text{-}a) \,]^{n}}$$

Igualmente, volviendo al ejercicio, tratándose de n = 1 tanto la convención lineal como exponencial se confunden, pues este resulta ser el momento a partir del cual se decide que tratamiento dispensarle a los intereses; es decir: si se retiran —utilizo la función lineal— o si se reinvierten —utilizo la función de monto a interés compuesto—.

Debemos tener en cuenta que el tanto de interés periódico que resulta para el cálculo del verdadero rendimiento del inversor está dado por (1-0,02) i ; cuando el tanto de interés que paga la entidad por la captación de depósitos es i.

A continuación, se transcriben los cálculos efectuados para la determinación de lo pedido en el ejercicio, en donde el subíndice de C aquí no significa cantidad de períodos sino el monto al cabo de 10 días, o de 22 días...etc.

C(10) = 1000 [1 + 0,98*i(10)] siendo $i_{10} = (1 + 0{,}027)^{10/30} - 1 =$
<u>C(10) = 1008.74</u> $i_{10} = 0.0089202.$

C(22) = 800 * (1 + 0,98 * 0.0204576).
<u>C(22) = 816.04</u> siendo $i_{22} = (1 + 0.028)^{22/30} - 1.$
$i_{22} = 0{,}0204576.$

C(30) = 500 * (1 + 0.98 * 0.035).
C(30) = 517.15 siendo $i_{30} = 0.035$ —dato—.

C(120) = 400 * (1 + 0.98 * 0.147523)
C(120) = 457.83 siendo $i_{120} = (1 + 0{,}035)^{120/30} - 1.$
$i_{120} = 0.147523.$

b) Para la determinación de las T.N.A.y T.E.A procederemos a:

b.1) Hallar las respectivas tasas nominales, en función de las tasas i_m, a los fines de no despreciar esta información: $j_{(365/m)} = \dfrac{i_m * 365}{m}$

$j_{(365/10)} = 0,0089202 * 365 \ / \ 10 \quad = 0.3255873.$

$j_{(365/22)} = 0.0204576 * 365 \ / \ 22 \quad = 0.3394101.$

$j_{(365/30)} = 0.035 * 365 \ / \ 30 \quad = 0.42583.$

$j_{(365/120)} = 0.147523 * 365 \ / \ 120 \quad = 0.448716.$

b.2) Seguidamente, buscaremos el rendimiento efectivo anual que surge de considerar cada uno de los plazos —m—.

$$i = \left(\frac{1 + j_{(365/m)} * m}{365}\right)^{365/m} - 1.$$

$$i = (1 + i_{(m)})^{365/m} - 1.$$

$i = (1 + 0.0089202)^{365/10} - 1 \quad = \quad 0.382846.$

$i = (1 + 0.0204576)^{365/22} - 1 \quad = \quad 0.3993181.$

$i = (1 + 0.035)^{365/30} - 1 \quad = \quad 0.5197574.$

$i = (1 + 0.147523)^{365/120} - 1 \quad = \quad 0.5197574.$

Las últimas dos tasas (0,5197574) coinciden pues recordemos que los depósitos constituidos para tramos mayores a 30 días ofrecían igual rendimiento efectivo mensual (0,035) y por lo tanto, igual rendimiento efectivo anual.

c) Considerando el período de conversión en cada uno de los casos planteados (m=7; 30 y 45 días) se hallará la respectiva tasa de interés equivalente de m días.
Luego, sabiendo que:

$$i(m) = \frac{d(m)}{1 - d(m)} \qquad \text{y} \qquad d(m) = \frac{i(m)}{1+i(m)}$$

Y se procederá a la determinación de la correspondiente tasa equivalente adelantada y por último sabiendo que:

$$f_{(365/m)} = \frac{d(m) * 365}{m}$$

se encontrará la tasa nominal anual adelantada para el plazo de m días.

$$i_7 = (1 + 0,027)^{7/30} - 1 = 0.0062358.$$

$$d_7 = \frac{0.0062358}{1 + 0.0062358} = 0.00619715.$$

$$f_{(365/7)} = \frac{(0.00619715 * 365)}{7} = 0.3231374.$$

$$d_{365} = 1 - (1 - d_7)^{365/7} = 0.276853.$$

$i_{30} = 0{,}035$

$d_{30} = 0{,}035 / (1+0{,}035) = 0.0338164.$

$f_{(365/30)} = (0.0338164 * 365) / 30 = 0.411433.$

$d_{365} = 1 - (1 - d(30))^{365/30} = 0.342.$

$i_{45}(45) = (1 + 0{,}035)^{45/30} - 1 = 0.0529567.$

$d(45) = 0.0529567 / (1+0.0529567 = 0.0502933.$

$f_{(365/45)} = (0.0502933 * 365) / 45 = 0.4079347.$

$d_{365} = 1 - (1 - d_{45})^{365/45} = 0.342.$

8) A Ud. se le presenta el siguiente cuadro de "Evolución de la tasa de redescuento para atender situaciones transitorias de iliquidez", por lo cual debe encontrar la fórmula que sintetice los valores allí asignados.

	T.E.M	Valor diario -en %-	Valor acumulado -en %-
1	*3,88*	*0,126968*	*0,126968*
2	*4,08*	*0,133388*	*0,260356*
3	*4,24*	*0,138515*	*0,398871*
4	*4,24*	*0,138515*	*0,537386*
5	*4,24*	*0,138515*	*0,675901*
6	*4,24*	*0,138515*	*0,814416*
7	*4,28*	*0,139796*	*0,954212*
8	*4,24*	*0,138515*	*1,092727*
9	*4,22*	*0,137875*	*1,230602*
......	....	....	....
28	*3,97*	*0,129858*	*3,776164*
29	*4,22*	*0,137875*	*3,914039*
30	*4,43*	*0,144594*	*4,058633*

a) Determinación del valor diario - tasa i_d.

Representando $i_{d;t}$ la tasa vencida de interés diaria correspondiente al día t. siendo t=1,2,3...28,29,30,31 para el mes k.
Alcanzando el máximo valor t el último día del mes k
Valor expresado en %

$$i_{d;t} = [(1+ TEM)^{1/30} - 1] * 100.$$

b) Determinación del valor acumulado

$i_{(1;t)}$ = interés acumulado desde el día 1 hasta el día t, generado por 100 unidades monetarias, por eso expresado en %.

$$i_{(1,t)} = \left\{ \sum_{j=1}^{t} \left[(1+TEM_j)^{1/30} - 1 \right] \right\} * 100.$$

9) El 4/3 se constituyó un depósito a plazo de $ 22.000 por 32 días, con un rendimiento equivalente al que genera la tasa nominal anual para el plazo de 16 días que es del 36%. Luego, se renueva íntegramente por 28 días, pactando un tanto efectivo de 42 días del 1,03%. A su vencimiento —es decir a los 60 días contados desde el origen de la operación—, se retira la renta generada en ambos períodos. Entonces el capital inicial se invierte por 60 días, conociendo que la tasa es la equivalente al 40,5% nominal anual adelantada para el plazo de 52 días y los intereses que había generado en ambos subperíodos de 32 días iniciales y 28 días después se ingresan en una cuenta de ahorro que reconoce un interés efectivo anual del 10%, capitalizándose los intereses trimestralmente. Se sabe que a la fecha de depósito de dicha renta todavía faltan 60 días para culminar el período de capitalización.

Calcular:

a) El importe que tendrá disponible 2/07 por el depósito a plazo que fue nuevamente constituido el 3/05 con vencimiento ese día y también por el depósito en caja de ahorro a ese mismo día, fecha en que se retiran ambas colocaciones.

b) El rendimiento obtenido por el plazo total de la operación

c) La tasa media mensual.

d) Cuál hubiera sido la tasa efectiva anual que remunera la línea de depósitos en caja de ahorro, de manera tal que se hubiera obtenido el mismo rendimiento que generan los depósitos a plazo fijo, en el momento de apertura de la caja de ahorro.

Rta.: a) 24.430,54; b) 0,110479; c) 0,0265441 y d) 0,5073.

- *Determinación de los tantos de interés a aplicar*

$$i(32) = \left[\left(1 + \frac{0{,}36 * 16}{365}\right)^{32/16}\right] - 1$$

$$i(32) = 0{,}0318107$$

$$i(28) = (1+0{,}0103)^{28/42} - 1 = 0{,}0068549$$

$$d(52) = 1 - \left(1 - \frac{0{,}405 * 52}{365}\right) = 0{,}0576986$$

$$i(52) = \frac{d(52)}{1 - d(52)}$$

$$i(60) = [\ 1 + i(52)\ ]^{60/52} - 1 = 0{,}070979$$

$$i(90) = (\ 1 + 0{,}10)^{90/365} - 1 = 0{,}0237795$$

a) Determinación del monto al cabo de 60 días y de 120 días

Monto del dep. a P.F: $C(60) = 22000 * [1 + i(32)] * [1 + i(28)] = 22.855{,}44$

Monto del dep. a P.F. $C(120) = 22000 * (\ 1 + 0{,}070979) = 23.561{,}54$

Monto del dep.Caja Ahorro $\$ = 855{,}44\ (1 + \frac{0{,}0237795}{90} * 60) = \underline{869{,}00}$

$\underline{24.430{,}54}$

b) Cálculo del rendimiento por el plazo de la operación

$$i_{(120)} = \frac{24430{,}54}{22000{,}00} - 1 = 0{,}110479$$

c) Cálculo del rendimiento mensual de la operación

$$i_{(30)} = (1 + i_{(120)})^{30/120} - 1 = 0{,}0265441$$

d) Determinación del interés de caja de ahorro de forma tal que resulte equivalente al de plazo fijo, considerando la forma de cálculo de intereses en caja de ahorro y principalmente considerando el plazo de colocación de los fondos en esta cuenta a la vista, pues si el plazo en vez de 60 días hubiera sido otro también hubiera cambiado el valor buscado.

Se pretende que el capital colocado en caja de ahorro genere un interés equivalente al 7,0979% efectivo bimestral, que resulta ser el tanto de interés aplicado en la renovación del depósito a plazo fijo.

El planteo sería:

$855{,}44\ (1 + 0{,}070979) = 855{,}44\ (\ 1 + \frac{i_{(90)}}{90} . 60)$. Despejando $i_{(90)} = 0{,}10647$

La tasa efectiva anual de captación de caja de ahorro equivalente a la tasa de captación de depósito a plazo fijo será del 50,73%

$$(1 + i(90)\ )^{365/90} - 1 = 0{,}5073$$

La comprobación es la siguiente:

* Monto del Depósito a Plazo Fijo por 32 días, renovado por 28 días y 60 días sin considerar el retiro, sino reinversión periódica de intereses a las tasas originalmente pactadas.

$$C_{(120)} = 22000 * [\ 1 + i(32)\ ] * [\ 1 + i\ (28)] * [1 + i(60)]$$

$$C_{(120)} = 22000 * 1{,}0318107 * 1{,}0068549 * 1{,}070979 = \underline{24.477{,}70}$$

* Monto de los Depósitos a Plazo Fijo por 32 días, renovado por 28 días. Retirando la renta generada en estos dos subperíodos, reinvirtiendo el capital por 60 días a la tasa i_{60} y colocando los intereses en un Depósito en Caja de Ahorro a la tasa i_{365} del 50,73% efectivo anual, tasa que produciría la equivalencia financiera.

Dep. a P.F.= {22000.[1 + i(32)]. [1+i (28)] - 855,44}. [1 + i(60)] = 23.561,54

$C_{(120)}$ = [22000 . 1,0318107 * 1,0068549 -855,44]. 1,070979

Dep. C. Ah. = 855,44. (1 + $\frac{0,10647 . 60}{90}$) = 916,16

24.477,70

10) Si la tasa nominal anual de descuento para el plazo de 45 días es del 70%. Un tomador de fondos desea un préstamo de $ 5.000 el día 10.08 por 45 días con cancelación al final del plazo juntamente con los intereses.

a) Determinar cuánto debe devolver al vencimiento.

b) Cuál es la correspondiente tasa efectiva de interés (del plazo de la operación y anual).

c) Si con los fondos prestados los coloca por ese mismo plazo al 75% nominal anual vencido. Determinar si obtuvo por ese arbitraje ganancia. Cuantificarla.

Rta.: a) 5472; b) 0,094 y 1,079; c) 5.462.

a) $5.000\ [1 - d(45)]^{-1} = 5.472,26.$

siendo $d(45) = \dfrac{0,70\ .\ 45}{365}$

b) $i(45) = 0,0863013\ /\ (1 - 0,0863013)$

$i(45) = 0,0944527.$

$i = [1 + i(45)]^{365/45} - 1$

$i = 1,0793684.$

c) $C(0) = 5.000$

$i(45) = \dfrac{0,75\ *\ 45}{365} = 0,0924657$

$C(n) = 5.000\ (1 + 0,0924657) = 5.462,32.$

Como se visualiza en el ejercicio la tasa de colocación de los fondos —i=0,09246— es menor a la tasa de financiación —i=0,09445—. Consecuentemente, esta operación de arbitrar le produciría a este agente económico un perjuicio económico.

Fuente: Tablas de Tasas Activas promedio del Banco Nación

-en %-

Tablas de Tasas Activas promedio del Banco Nación para las operaciones de descuentos de documentos comerciales

MES	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
En	----	3	2	1,6	1,67	1,6	1,16	1,16	1,36 (8)	1,41	1,41	1,46	4	1,55
Fe	----	3	2	1,6	1,75 (2)	1,6	1,16	1,16	1,41	1,41	1,35 (9)	1,46	4	1,55
Ma	----	2,5	1,85	1,6	2,25 (3)	1,6	1,16	1,16	1,41	1,41	1,29	3,66 (11)	3,91 (15)	1,55
Ab	5	2,5	1,8	1,6	2,38	1,6	1,16	1,16	1,41	1,41	1,29	4,5	3,525 (16)	1,55
Ma	4,7	2,5	1,63	1,6	2,12 (4)	1,4	1,16	1,16	1,41	1,41	1,29	4,5	3,02 (17)	1,55
Ju	5	2,28	1,6	1,6	1,67 (5)	1,4	1,16	1,16	1,41	1,41	1,29	4,5	2,33 (18)	1,55
Ju	5	2,2	1,6	1,6	1,64 (6)	1,4	1,16	1,16	1,41	1,41	1,30 (10)	4,71 (12)	1,88 (19)	1,55
Ag	4,7	2,2	1,6	1,6	1,6	1,4	1,16	1,16	1,41	1,41	1,46	5	1,706	1,55
Se	3	2,2	1,6	1,6	1,6	1,4	1,16	1,23 (7)	1,41	1,41	1,46	5	1,68 (20)	1,55
Oc	3	2,05	1,6	1,6	1,6	1,4	1,16	1,33	1,41	1,41	1,46	4,98 (13)	1,55	1,55
No	3	2	1,6	1,6	1,6	1,16	1,16	1,33	1,41	1,41	1,46	4,17 (14)	1,55	1,55
Di	3	2	1,6	1,66 (1)	1,6	1,16	1,16	1,33	1,41	1,41	1,46	4	1,55	1,55

(1) Para la posición de diciembre de 1994 la tasa efectiva mensual desde el 1/12/94 hasta el 6/12/94 es 1,60%, y desde el 7/12/94 hasta el 31/12/94 es 1,67%. (2) (3)

(4) Para la posición de febrero de 1995 la tasa efectiva mensual desde el 1/2/95 hasta el 16/2/95 es 1,67%, desde el 17/2/95 hasta el 23/2/95 es 1,80, y desde el 24/2/95 hasta el 28/2/95 es 1,95%. (5) (6)

(7) Para la posición de marzo de 1995 la tasa efectiva mensual desde el 1/3/95 hasta el 6/3/95 es 1,95%, desde el 7/3/95 hasta el 12/3/95 es 2,12%, y desde el 13/3/95 hasta el 31/3/95 es 2,38%. (8) (9)

(10) Para la posición de mayo de 1995 la tasa efectiva mensual desde el 1/5/95 hasta el 15/5/95 es 2,38%, desde el 16/5/95 hasta el 17/5/95 es 2,27%, desde el 18/5/95 hasta el 18/5/95 es 2,10%, y desde el 19/5/95 hasta el 31/5/95 es 1,81%. (11) (12)

(13) Para la posición de junio de 1995 la tasa efectiva mensual desde el 1/6/95 hasta el 4/6/95 es 1,81%, desde el 5/6/95 hasta el 5/6/95 es 1,73%, y desde el 6/6/95 hasta el 30/6/95 es 1,65%. (14) (15)

(16) Para la posición de julio de 1995 la tasa efectiva mensual desde el 1/7/95 hasta el 27/7/95 es 1,65%, y desde el 28/7/95 hasta el 31/7/95 es 1,60%. (17) (18)

(19) Para la posición de setiembre de 1998 la tasa efectiva mensual desde el 1/9/98 hasta el 17/9/98 es 1,16%, y desde el 18/9/98 hasta el 30/9/98 es 1,33%. (20) (21)

(22) Para la posición de enero de 1999 la tasa efectiva mensual desde el 1/1/99 hasta el 21/1/99 es 1,33%, y desde el 22/1/99 hasta el 31/1/99 es 1,41%. (23) (24)

(25) Para la posición de febrero de 2001 la tasa efectiva mensual desde el 1/2/01 hasta el 15/2/01 es 1,41%, y desde el 16/2/01 hasta el 28/2/01 es 1,29%. (26) (27)

(28) Para la posición de julio de 2001 la tasa efectiva mensual desde el 1/7/01 hasta el 29/7/01 es 1,29%, y desde el 30/7/01 hasta el 31/7/01 es 1,46%. (29) (30)

(11) Para la posición de marzo de 2002 la tasa efectiva mensual desde el 1/3/02 hasta el 26/3/02 es 3,50%, y desde el 27/3/02 hasta el 31/3/02 el 4,50%.

(31) Para la posición de julio de 2002 la tasa efectiva mensual desde el 1/7/02 hasta el 18/7/02 es 4,50%, y desde el 19/7/02 hasta el 31/7/02 es 5,00%. (32) (33)

(34) Para la posición de octubre de 2002 la tasa efectiva mensual desde el 1/10/02 hasta el 30/10/02 es 5,00%, y la del 31/10/02

(35)	es 4,50%.	
(36)	Para la posición de noviembre de 2002 la tasa efectiva mensual desde el 1/11/02 hasta el 10/11/02 es 4,50%, y desde el 11/11/02 hasta el 30/11/02 es 4,00%.	(37) (38)
(39)	Para la posición de marzo de 2003 la tasa efectiva mensual desde el 1/3/03 hasta el 20/3/03 es 4,00%, y desde el 21/3/03 hasta el 31/3/03 es 3,75%.	(40) (41)
(42)	Para la posición de abril de 2003 la tasa efectiva mensual desde el 1/4/03 hasta el 3/4/03 es 3,75%, y desde el 4/4/03 hasta el 30/4/03 es 3,50%.	(43) (44)
(17)	Para la posición de mayo de 2003 la tasa efectiva mensual el 1/5/03 es 3,50%, y desde el 2/5/03 hasta el 31/5/03 es 3,00%.	
(45)	Para la posición de junio de 2003 la tasa efectiva mensual desde el 1/6/03 hasta el 5/6/03 es 3,00%, desde el 6/6/03 hasta el 26/6/03 es 2,25% y desde el 27/6/03 hasta el 30/6/03 es 1,932%.	(46) (47)
(48)	Para la posición de julio de 2003 la tasa efectiva mensual desde el 1/7/03 hasta el 24/7/03 es 1,932%, y desde el 25/7/03 hasta el 31/7/03 es 1,706%.	(49) (50)
(20)	Para la posición de setiembre de 2003 la tasa efectiva mensual desde el 1/9/03 hasta el 25/9/03 es 1,706%, y desde el 26/9/03 hasta el 30/9/03 es 1,550%.	

Para años posteriores la Tasa Activa promedio BNA reflejó valores constantes:

año	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
2005	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6
2006	1,6	1,6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Dado el cuadro de tasas extraído de Internet y que se corresponde con los datos que cualquier información financiera publica sobre esta tasa y que habría que recoger por todo el periodo considerado, se pide:

1) En una demanda de $ 5.000 de capital otorgado el 15/03/99 se resolvió su cancelación aplicando la tasa de interés activa del BNA. Calcular cuál será la tasa de interés devengada al 18/03/2003 por una operación con origen el 15/03/99. Para ello confeccione un cuadro evolutivo del tanto de interés.

Para el caso de este capital de $ 5.000 con fecha origen 15/03/99, cuál será el monto resultante.

Determine la tasa activa promedio mensual de la operación.

Rta.: 177,56% C(n)= 13.878 i(30)=0,0212

La tasa activa del B.N.A. es un tanto utilizado en la Justicia para el cálculo de intereses devengados de los capitales. Ver al final del capítulo la jurisprudencia sobre la utilización de las diferentes tasas según momentos y Fueros.

Para confeccionar el cuadro evolutivo de la tasa de interés, en la columna al lado de "Mes" se volcaron los tantos de interés mensual que surge de la Tabla de Tasas Activas promedio Banco Nación. En la columna siguiente titulada "Valor Final a fin de mes", procedemos a capitalizar mes a mes la T.E.M. informada partiendo de un $C_0 = 1$. Se supone reinversión de los intereses, atento a que el capital demandado de $ 5.000 si se hubiese cobrado podría estar colocado en el circuito financiero devengando intereses exponencialmente.

Así, al 18/03/03 el valor final resultante es:

$$C_n = 5.000 \quad * \quad 2,775599 \quad = 13.878$$

Además, observamos un segundo cuadro que en lugar de exponer el valor acumulado o valor final de una unidad de capital refleja la tasa de interés desde el origen en %. Llegamos a iguales resultados, pero nos permite construir esta "serie estadística", tal como lo titula B.C.R.A y nos entrena para poder construir, interpretar y explicar las distintas series utilizadas en el mercado. Para mayor profundidad el tema será tratado en el Cap. XIV.

En la construcción de este segundo cuadro, cuyas primeras dos columnas son iguales al cuadro anterior, para determinar la tasa de interés —en %— acumulada desde un momento origen (en nuestro caso: 15/03/99) debemos tomar el valor final expuesto en el cuadro anterior para la fecha que necesitamos, al que le restamos la unidad de capital y multiplicamos por 100.

Nuevamente para calcular el monto hacemos:

$$C_n = 5.000 \ . \ (1+1,775599) \ = 13.878$$

$$C_n = 5000.\left(1+\frac{177,5599}{100}\right)$$

M	EVOLUCION DE LA TASA DE INTERES desde el 15 de marzo					-INFORMADO COMO INDICE FINANCIERO-				
E	1999	VALOR FINAL	2000	VALOR FINAL	2001	VALOR FINAL	2002	VALOR FINAL	2003	VALOR FINAL
S	TASA EN %	a fin de mes	TASA EN %	a fin de mes	TASA EN %	a fin de mes	TASA EN %	a fin de mes	TASA EN %	a fin de mes
1	Fecha origen:		1,41	1,158913	1,41	1,370946	1,46	1,616177	4	2,648662
2	15 de marzo	1,000000	1,41	1,175254	1,35	1,389454	1,46	1,639773	4	2,754608
3	1,41	1,007495	1,41	1,191825	1,29	1,407378	3,66	1,699789	0,76	2,775599
4	1,41	1,021701	1,41	1,208630	1,29	1,425533	4,5	1,776279		
5	1,41	1,036107	1,41	1,225671	1,29	1,443922	4,5	1,856212		
6	1,41	1,050716	1,41	1,242953	1,29	1,462549	4,5	1,939742		
7	1,41	1,065531	1,41	1,260479	1,3	1,481562	4,71	2,031103		
8	1,41	1,080555	1,41	1,278252	1,46	1,503193	5	2,132659		
9	1,41	1,095791	1,41	1,296275	1,46	1,525139	5	2,239291		
10	1,41	1,111242	1,41	1,314553	1,46	1,547406	4,98	2,350808		
11	1,41	1,126910	1,41	1,333088	1,46	1,569998	4,17	2,448837		
12	1,41	1,142800	1,41	1,351884	1,46	1,592920	4	2,546790		
	Factor Financiero = Indice Financiero (k) / Indice Financiero (0)					Factor Financiero= 2,7755986/1= 2,7755986				

	EVOLUCION DE LA TASA DE INTERES		-INFORMADO COMO SERIE ESTADISTICA- % ACUMULADO							
	1999	%	2000	VALOR FINAL	2001	VALOR FINAL	2002	VALOR FINAL	2003	VALOR FINAL
	TASA EN %	acumulado	TASA EN %		TASA EN %		TASA EN %		TASA EN %	
1			1,41	15,8913%	1,41	37,0946%	1,46	61,6177%	4	164,8662%
2			1,41	17,5254%	1,35	38,9454%	1,46	63,9773%	4	175,4608%
3	1,41	0,7495%	1,41	19,1825%	1,29	40,7378%	3,66	69,9789%	0,76	177,5599%
4	1,41	2,1701%	1,41	20,8630%	1,29	42,5533%	4,5	77,6279%		
5	1,41	3,6107%	1,41	22,5671%	1,29	44,3922%	4,5	85,6212%		
6	1,41	5,0716%	1,41	24,2953%	1,29	46,2549%	4,5	93,9742%		
7	1,41	6,5531%	1,41	26,0479%	1,3	48,1562%	4,71	103,1103%		
8	1,41	8,0555%	1,41	27,8252%	1,46	50,3193%	5	113,2659%		
9	1,41	9,5791%	1,41	29,6275%	1,46	52,5139%	5	123,9291%		
10	1,41	11,1242%	1,41	31,4553%	1,46	54,7406%	4,98	135,0808%		
11	1,41	12,6910%	1,41	33,3088%	1,46	56,9998%	4,17	144,8837%		
12	1,41	14,2800%	1,41	35,1884%	1,46	59,2920%	4	154,6790%		
	Factor Financiero = (1+ Serie/100) = (1+ 177,5599/100) = 2,775599									

Tasa activa promedio B.N.A.

$$C(n) = 5.000 * 2,775599 = 13.878$$

$$i_{(30)} = (1+1,775599)^{\frac{1}{48}} - 1 = 0,021$$

Demostración a partir de la tasa promedio mensual para cada año.

$$i_{(30)-1999} = 0,0141$$

$$i_{(30)-2000} = 0,0141$$

$$i_{(30)-2001} = \sqrt[12]{(1+0,0141)(1+0,0135)(1+0,0129)^4(1+0,013)(1+0,0146)^5} - 1 = 1,1783^{1/12}-1$$

$$i_{(30)-2001} = 0,01377$$

Otra forma es realizar el cociente de series que contienen las tasas acumuladas del cuadro que hemos confeccionado, es decir;

$$\frac{(1+0,592920)}{(1+0,351884)} - 1 = 0,1783 \text{ -} i_{2001}\text{-}$$

$$i_{(30)-2002} =$$

$$\sqrt[12]{(1+0,0146)^2(1+0,0366)(1+0,045)^3(1+0,0471)(1+0,05)^2(1+0,0498)(1+0,0417)(1+0,04)} - 1$$

$$i_{(30)-2002} = = 1,5988^{1/12}-1=0,03988$$

Otra forma es realizar el cociente de series que contienen las tasas acumuladas del cuadro que hemos confeccionado , es decir;

$$\frac{(1+1,546790)}{(1+0,592920)} - 1 = 0,5988 \text{ - } i_{2002}\text{-}$$

$$i_{(30)\text{-}2003} = \sqrt[3]{(1+0,04)^2(1+0,0076)} - 1$$

$$i_{(30)\text{-}2003} = =1,0898^{1/3}-1=0,029086$$

Por series: $\dfrac{(1+1,775599)}{(1+1,546790)} - 1 = 0,0898 \; - i_{2003}$-

Para calcular la tasa promedio mensual tenemos que considerar la cantidad de veces en que se repite cada tasa antes de determinar el promedio.

$$(1+0,0141)^{21,5}(1+0,01377)^{12}(1+0,03988)^{12}(1+0,029086)^{2,5}-1 = 2,7349 - 1$$

La diferencia con 2,775599 obedece a la tasa promedio tomada en el período fraccionario inicial y final.

$$i_{(30)} = (1+1,7349)^{1/48}-1 = 0,021$$

como vemos es más fácil el procedimiento utilizando las series elaboradas.

Distintos términos utilizados en el mercado

Como vemos en el cuadro que presentan los diarios financieros en nuestro país se mencionan distintas tasas. Por ejemplo:

- **Tasa Activa**: Es el tanto de interés que los prestatarios o deudores que han solicitado financiación en entidades financieras deberán pagar para cancelar sus compromisos de pago. Es la tasa de interés que se aplica sobre los saldos de deuda de los préstamos para el cálculo de los intereses contenidos en cada cuota. Una entidad financiera utiliza para registrar dichos intereses la cuenta "Intereses por Préstamos".

TASAS ACTIVAS (% anual)																	
PRESTAMOS A GRANDES EMPRESAS en pesos a 30 días de plazo				BANCO DE LA NACION ARGENTINA							BAIBOR EN PESOS (TNA)						
Fecha	Promedio	Desvío estándar	Tasa mínima	Fecha	Activa		Descubierto c/garantía hipotec.		Descubierto no solicitado		Fecha	A 1 día	A 7 días	A 30 días	A 90 días	A 180 días	A 365 días
					TNA	TEA	TNA	TEA	TNA	TEA							
10/03/06	6,9270	2,4697	3,2500	14/03/06	18,85	20,57	20,75	22,85	30,41	35,04	14/03/06	8,6250	9,0000	9,1875	9,3125	9,8750	10,5625
13/03/06	7,4307	3,0198	3,2500	15/03/06	18,85	20,57	20,75	22,85	30,41	35,04	15/03/06	9,1250	9,5000	9,2500	9,4375	10,0000	10,5625
14/03/06	7,1120	2,7269	3,2500	16/03/06	18,85	20,57	20,75	22,85	30,41	35,04	16/03/06	9,5000	9,8750	9,7500	9,8750	10,1250	11,0000
15/03/06	7,9620	3,4011	3,2500	17/03/06	18,85	20,57	20,75	22,85	30,41	35,04	17/03/06	9,3125	9,7500	9,8125	9,9375	10,1875	11,1250
16/03/06	7,7080	3,4731	3,2500	20/03/06	18,85	20,57	20,75	22,85	30,41	35,04	20/03/06	8,4375	8,8125	9,5625	9,8125	10,0625	10,8125
17/03/06	7,7080	3,4731	3,2500	21/03/06	18,85	20,57	20,75	22,85	30,41	35,04	21/03/06	7,1250	7,5000	9,3750	9,6250	9,9375	10,7500
Fuente: BCRA/BNA																	

Se observa que las tasas se publican en porcentajes y en términos de T.N.A. y T.E.A. En el cuadro se informan diferentes tantos aplicados para distintas líneas de préstamos, existiendo muchísimas más. Las publicadas son:

- tasas activas cobradas por préstamos a grandes empresas.

- tasas activas cobradas por préstamos del B.N.A. (Banco de la Nación Argentina) en algunos segmentos, y es el cuadro de tasas que informamos en este capítulo anteriormente.

- tasas activas: interbancancaria, es decir para préstamos entre entidades financieras. Denominada **BAIBOR** cuyas siglas son similares a la **LIBOR**, en donde BA significa Buenos Aires y L significa Londres. El resto de las siglas IBOR significa Inter Bank Offer Rate. La tasa informada es una tasa promedio resultante de tasas interbancarias de más de dos decenas de bancos por encuestas realizadas por nuestro B.C.R.A.En el cuadro expuesto podemos ver la TNA BAIBOR informada para diferentes plazos de operación.

  También se encuentra la BADLAR una tasa que elabora y publica el ente rector y corresponde a la tasa por depósito a plazo fijo por importes superiores a $1.000.000 y la BAIBAR es la tasa de interés aceptada entre bancos privados.

- **Tasa Pasiva:** Es el tanto de interés que los depositantes o inversores reciben por sus colocaciones.

  En el cuadro informativo vemos que se expone la tasa pasiva en porcentaje y en términos de T.E.M., y también como T.N.A según se trate de operaciones pasivas en moneda local (pesos) o en dólares, respectivamente.

  Se informan por líneas de depósito (Caja de ahorro y Depósitos a Plazo segmentado por plazos). Son tasas promedios ponderados por las colocaciones según una encuesta realizada por nuestro B.C.R.A.

TASAS PASIVAS (% anual)
(promedio del mercado)

Fecha	Depósitos en $ (T.E.M.)				Depósitos en u$s (T.NA.)			
	Caja Ahorro	A 30 días	30 a 59 días	60 y más días	Caja Ahorro	A 30 días	30 a 59 días	60 y más días
06/03/06	0,07	0,39	0,41	0,5	0,14	0,56	0,56	1,21
07/03/06	0,07	0,47	0,49	0,53	0,14	0,7	0,72	1,02
08/03/06	0,07	0,41	0,44	0,55	0,13	0,66	0,64	1,01
09/03/06	0,07	0,5	0,53	0,53	0,14	0,80	0,73	0,94
10/03/06	0,07	0,46	0,49	0,48	0,13	0,68	0,66	1,58
13/03/06	0,07	0,42	0,45	0,51	0,14	0,44	0,46	1,11
14/03/06	0,07	0,52	0,53	0,16	0,13	0,60	0,61	0,98
15/03/06	0,07	0,44	0,48	0,52	0,13	0,61	0,64	1,62
16/03/06	0,07	0,52	0,56	0,53	0,13	0,87	0,81	1,04
17/03/06	0,07	0,42	0,48	0,51	0,13	0,57	0,59	1,11

Fuente: BCRA.
Nota: Estas tasas se obtienen como prom. ponderado por monto (de saldos en el caso de los dep. en C.A.C. y de coloc. para depósitos a plazo fijo), de las tasas promedio diarias según la información suministrada por las entidades incluidas en la encuesta diaria de tasas de interés.

➢ Prime Rate: Tasa preferencial

Es la tasa de interés que los bancos de EE.UU. cobran por los préstamos otorgados a las grandes empresas de ese país.

TASAS EN EE.UU. (% anual)						
Mercado	**30 d.**	**60 d.**	**90 d.**	**120 d.**	**180 d.**	**1 año**
Documentos comerciales	4,6800	4,7400	4,8100	4,8100	4,8600	--
Certificados de depósitos	4,7700	4,8300	4,9000	4,9400	5,0100	5,1100
Aceptaciones bancarias	4,7700	4,8300	4,9000	4,9400	5,0100	--
Fondos federales	4,7300	4,7700	4,8500	4,8700	4,9600	5,0700
Gov Repo	4,5700	4,6000	4,7500	--	--	--
Euro Depósitos	4,7800	4,8400	4,9100	4,9500	5,0200	5,1200
Prime	--	--	--	--	--	7,5000
Préstamo Broker	--	--	--	--	--	6,2500
Tasa descuento	--	--	--	--	--	5,5000
Fuente: Reuters.						

➢ Libor: London Inter Bank Offer Rate

Es el tanto de interés interbancario negociado en el mercado de Londres. Es una tasa de referencia en muchas operaciones, principalmente para el cálculo de los cupones de renta que ofrecen los Bonos. Se la trabaja como T.N.A. para el plazo informado.

TASAS (% anual)					
LIBOR EN u$s			*EN GRAN BRETAÑA (ACEPTACIONES BANCARIAS)*		
Periodo	**Ayer**	**Ant.**	**Plazo**	**En libras**	**En u$s**
1 mes	4,80188	4,79500	30 ds.	4,57500	4,80000
2 meses	4,86469	4,85750	60 ds.	4,58063	4,86438
3 meses	4,94000	4,93581	90 ds.	4,58875	4,94000
6 meses	5,04969	5,03406	180 ds.	4,62875	5,05000
9 meses	5,11219	5,09563			
12 meses	5,14500	5,12781	*CALL*		
BANCO CENTRAL EUROPEO			**Plaza**		**%**
Actual	02/03/06	2,50	Madrid		2,620
Anterior	01/12/05	2,25	Roma		2,612
RESERVA FEDERAL EE.UU. (FED)			Tokio		0,050
Actual	21/03/06	4,6250	París		2,636
Anterior	20/03/06	4,5625	Amsterdam		2,636

➢ Riesgo País:

Es el spread o diferencia entre la tasa de interés que retribuyen los bonos a largo plazo del Tesoro de EE.UU. —considerados libres de riesgo— y la tasa de interés que un país determinado paga por sus títulos y colocaciones bancarias.

Se informa en puntos ("basic points").

RIESGO-PAIS				
Indice del 20.03.06	Riesgo-país (en puntos básicos)	Variación diaria (%)	Variación en el mes (%)	Variación en el año (%)
EMBI +	197,23	1,29	3,41	-19,64
EMBI + ARGENTINA	335,25	0,95	-5,29	-33.45
EMBI + BRASIL	228,40	1,51	3,32	-26,58
EMBI + BULGARIA	75,87	-2,04	-0,88	-15,96
EMBI + COLOMBIA	175,71	1,73	11,22	-26,28
EMBI + ECUADOR	557,51	-0,86	-2,85	-16,61
EMBI + FILIPINAS	248,06	0,65	-4,44	-17,97
EMBI + MALASIA	80,96	-0,74	7,2	-1,22
EMBI + MARRUECOS	87,51	-0,35	- 8,80	17,29
EMBI + MEXICO	124,86	2,12	21,22	-1,21
EMBI + NIGERIA	413,27	1,79	-17,26	-20,96
EMBI + PANAMÁ	186,61	0,58	-1,48	-24,23
EMBI + PERÚ	221,67	13,81	54,68	7,84
EMBI + POLONIA	58,43	-1,13	5,47	-2,92
EMBI + RUSIA	110,31	0,41	10,43	-6,58
EMBI + SUDÁFRICA	75,13	-1,62	24,22	-11,12
EMBI + TURQUÍA	180,92	1,86	-0,25	-18,92
EMBI + UCRANIA	177,25	0,02	10,93	-3,31
EMBI + URUGUAY	229,68	0,82	-0,29	-22,76
EMBI + VENEZUELA	224,48	0,96	-1,75	-29,49
			Fuente: J. P. Morgan	

Por ejemplo si el riesgo país en Argentina es de 600 puntos representa que el gobierno Nacional deberá pagar a los bancos, u organismos financieros un 6% anual más que la tasa que el Gobierno de Estados Unidos paga por sus bonos emitidos a largo plazo, ya que estos son los bonos definidos mundialmente como libres de riesgo.

El Riesgo País que se informa es elaborado por un banco norteamericano "J.P.Morgan" a través del EMBI cuyas siglas significan "Emerging Market Bond Index" en función de un conjunto de bonos negociados en los mercados de países no desarrollados. Los países considerados como de mercados emergentes, entre otros, son: Argentina, Brasil, México, Turquía, Rusia. Cuanto más alto es el valor del "Riesgo País" más riesgo existe de que ese país incumpla con la deuda.

En el cuadro informativo se desprende que a marzo de 2006 el riesgo país es del 3,35% anual; significa que es el exceso que paga por sus bonos y representa el rendimiento que ofrece nuestro país por encima del que ofrecen los bonos del Tesoro norteamericano.

Por otro lado, vemos en el cuadro que el riesgo país promedio del total de países emergentes es del 1,97% (197 puntos básicos). Este valor está reflejado en el primer renglón del cuadro de referencia.

- **Spread:** Es la diferencia entre la tasa activa y la tasa pasiva.

➢ **Tasa de Devaluación:**

Si constituimos un depósito de dólares 10.000 o cualquier otra moneda, sabiendo que el dólar en el momento de la imposición cotiza a $ 2,90 y en oportunidad del vencimiento el dólar cotiza a $ 3,12. La relación entre ambas cotizaciones $\frac{3,12}{2,90} - 1 = 0,076$ determina la tasa de devaluación.

Tasas de interés de aplicación para operaciones en entidades financieras

Regulaciones normativas

A continuación exponemos un cuadro resumen de las regulaciones sobre Tasa de Interés y su aplicación para operaciones activas o de crédito. Para un mayor alcance deberá consultarse las normas al respecto.

Operaciones de Crédito - Normas del Banco Central de la República Argentina	
· **TASA DE INTERES** **Forma de concertación**: · **Fija**: no pudiendo contener cláusulas contractuales que prevean su modificación. · **Variable**: especificando en forma clara los parámetros para su determinación y periodicidad de cambio. **Base de liquidación:** Los intereses solo pueden liquidarse sobre los *saldos de capitales efectivamente prestados y por los que hayan estado a disposición de los clientes.* **Modalidades de aplicación:** Las tasas se aplicarán en forma *vencida* en todas las operaciones. Se admite la tasa en forma *adelantada* sólo para operaciones de pago único a su vencimiento. **Divisor Fijo:** · General: 365 días · Préstamos Hipotecarios sobre vivienda: 360 días · Préstamos Prendarios sobre automotores: 360 días **Interés Punitorio:** · Créditos vencidos e impagos: durante el período en que se producen los atrasos, es de acuerdo a lo convenido libremente entre las entidades y sus clientes, deben estar consignada en forma clara y precisa en los contratos. · Préstamos amortizables en cuotas periódicas: sólo pueden calcularse sobre el monto de las cuotas vencidas e impagas. Es decir, no se aplican sobre el saldo de deuda total.	Comunicación "A" 3052 del 23/12/99 Sección 1 "Aspectos Generales".

Adelantos transitorios en cuenta corriente: prohibida su aplicación. *Comisiones y otros cargos adicionales a los intereses* - *la que contractualmente convengan, aplicándose sobre los servicios que las entidades presten con o sin riesgo crediticio contingente y sobre los importes no utilizados de los acuerdos de asignación de fondos.* - Para operaciones en mora: solo se cobrará si se trata de reembolsos de erogaciones efectivamente realizadas por las entidades para la protección o recuperación de sus créditos (ej. gastos de protesto, judiciales, constitución de garantías...). - Prohibido aplicar en las operaciones de crédito respecto de los importes efectivamente desembolsados, es decir que incrementen directa o indirectamente las sumas devengadas por intereses compensatorios o punitorios.	Comunicación "A" 3052 del 23/12/99 Sección 1 "Aspectos Generales"
Tarjetas de Crédito. **Interés compensatorio:** La tasa no podrá superar en más del 25% a la tasa de interés que la entidad aplicó durante el mes inmediato anterior, en las operaciones de prestamos personales sin garantías reales... desagregando las tasas según el tipo de moneda y del carácter de fijo o variable. La tasa se aplica sobre los saldos financiados entre la fecha del vencimiento del resumen mensual corriente y la fecha del primer resumen mensual anterior de donde surge el saldo adeudado. **Interés punitorio:** La tasa por este concepto no podrá superar en más del 50% a la tasa de interés compensatorio que la entidad emisora aplique por la financiación de saldos de tarjetas de crédito. Se aplica cuando el titular de la tarjeta no abonó el pago mínimo convenido en el resumen mensual y sobre el importe exigible. No puede capitalizarse.	Comunicación "A" 3266-1/5/01 Sección 2 "Financiaciones vinculadas a Tarjetas de Crédito"
Expresión de las tasas de interés en las operaciones de crédito	Comunicación "A" 3052 del 23/12/99 Sección 3 "Expresión de las tasas"
· ***Objetivo***: Que los usuarios dispongan de *elementos comparables para su evaluación.*	
· ***Exposición en los documentos*** (contratos, recibos, notas de débito u otros documentos de relación con los clientes en donde se expliciten tasas o importes de intereses) de las siguientes tasas: · ***Tasa de interés o de descuento anual contractualmente pactada*** —en % con 2 decimales—.	

· **Tasa de interés efectiva anual equivalente al cálculo de los intereses en forma vencida**—en % con 2 decimales—. · ***Tasa Fija o Tasa Variable de Interés*** indicando los parámetros para la determinación y periodicidad del cambio en el caso de tasa de interés variable. · ***Costo Financiero total*:** **expresado en forma de TEA** —en % con 2 decimales—. Se determina agregando a la tasa de interés el efecto de los cargos asociados a la operación, cualquiera sea su concepto, en la medida que no signifique la retribución de un servicio efectivamente prestado o un genuino reintegro de gasto. Se computan para la determinación del costo financiero totales los siguientes conceptos, entre otros: - Comisiones por la intermediación de la entidad en operaciones de compraventa de inmuebles vinculados a Préstamos otorgados para su adquisición, en la medida en que exceda el valor normal de plazo. - También se considerarán las comisiones que le corresponda abonar al vendedor cuando estén a cargo del comprador. - Primas y otras erogaciones por la contratación de seguros en relación con los prestatarios y los bienes objeto de financiaciones. - Gastos de mantenimiento y apertura de cuentas de depósitos. - Gastos originados en la evaluación de los solicitantes de las financiaciones y en las tasaciones de los bienes. - Erogaciones por envío de avisos de débito y otras notificaciones. - I.V.A. sobre los intereses en el caso de prestatarios que revisten condición de consumidor final. No se computan para el cálculo del Coste financiero total, entre otros: - Los honorarios de escribanía, incluido el reintegro de gastos por diligenciamiento notarial de emisión de certificados de deuda, inscripción de bienes.	Comunicación "A" 3052 del 23/12/99 Sección 3 "Expresión de las tasas"
· ***Publicidad de la tasa de interés en las operaciones de crédito.*** Se deberán *exponer siempre para las operaciones de crédito separando Operaciones en Pesos y Operaciones en Moneda Extranjera:* · ***Tasa de interés nominal anual*** en % con 2 decimales. · ***Tasa de interés efectiva anual*** en % con 2 decimales. · ***Costo Financiero total*** en % con 2 decimales. · ***Si es Tasa Fija o Tasa Variable de Interés*** indicando los parámetros para la determinación y periodicidad del cambio en el caso de tasa de interés variable. - Para cualquier publicidad tal como cualquier medio gráfico tal como periódico, revista, carteleras en vía pública, en obras en construcción,... en donde se publiciten préstamos citando número e importe de los pagos, tasas de interés. - La publicidad en una entidad financiera deberán contener en pizarras además:	Comunicación "A" 3052 del 23/12/99 Sección 4 "Publicidad"

- La mayor y la menor tasas de interés, cuando para una línea de préstamo exista más de una tasa —en % con dos decimales—. - Tasa de interés activa promedio ponderada por operaciones concertadas en el mes anterior al que corresponda —en % con dos decimales—. - La publicidad radial o televisiva: si se hace referencia a importes de cuotas o tasas deberá informar exclusivamente el Costo Financiero total. - La publicidad de cuotas para financiaciones de una determinada vivienda o auto deberán incluir además de las tasas referidas arriba, los conceptos que están a cargo del prestatario, es decir no solamente amortización e intereses incluida en cada cuota, sino también las primas por seguros exigidos contractualmente, impuestos, gastos de mantenimiento de cuentas asociadas al préstamo. - La publicidad de cuotas mencionadas en forma genérica (ej. cuota de $ x por cada $ 10.000 de préstamo = deberá aclararse qué conceptos incluye y cuáles habrá que agregar. Además, deberán incluir las tasas referidas arriba.	Comunicación "A" 3052 del 23/12/99 Sección 4 "Publicidad"

Operaciones Pasivas-Depósitos de Ahorro, Depósitos Especiales, Caja de Ahorro Previsional Normas del Banco Central de la República Argentina	
- **TASA DE INTERES** **Forma de concertación**: - Las tasas de interés se concertarán libremente entre las entidades financieras y los clientes, de acuerdo con las normas que rijan para cada tipo de operación. **Base de liquidación:** Los intereses se liquidarán sobre los *capitales impuestos desde la fecha de recepción de los fondos hasta el día anterior al del vencimiento o del retiro o el día de cierre del período de cálculo.* **Modalidades de liquidación**: *Los intereses se capitalizarán o abonarán en forma vencida de acuerdo a las condiciones pactadas.* **Divisor Fijo:** 365 días	Comunicación "A" 3336 del 27/09/2001 Sección "Disposiciones Generales"
Expresión de las tasas de interés en las operaciones pasivas	Comunicación "A" 3336 del 27/09/01 Sección 5 "Disp. Grales"
- *Objetivo*: Que el público inversor disponga de *elementos comparables para su evaluación.*	

· ***Exposición en los documentos*** (contratos, recibos u otros documentos de relación con los clientes en donde se expliciten tasas o importes de intereses) de las siguientes tasas: - ***Tasa de interés o de descuento anual contractualmente pactada*** —en % con 2 decimales—. - **Tasa de interés efectiva anual equivalente al cálculo de los intereses en forma vencida** —en % con 2 decimales—. - ***Tasa Fija o Tasa Variable de Interés*** indicando los parámetros para la determinación y periodicidad del cambio en el caso de tasa de interés variable. · ***Publicidad de la tasa de interés en las operaciones pasivas.*** Se deberán exponer: - en pizarras de las entidades financieras para las distintas modalidades de inversión separando Operaciones en Pesos y Operaciones en Moneda Extranjera o en títulos. - en otros lugares o medios tales como cualquier medio gráfico: periódico, revista, carteleras en vía pública, en obras en construcción,... de las distintas alternativas de inversión · ***La Tasa de interés nominal anual*** en % con 2 decimales. · **La Tasa de interés efectiva anual** en % con 2 decimales.	Comunicación "A" 3336 del 27/09/01 Sección 5 "Disp. Grales"

Tasas de Interés de aplicación en la Justicia Nacional

- Fuero Civil

Con fecha 23.03.04, en los autos caratulados "Alaniz, Ramona Evelia y otro c. Transportes 123 SACI interno 200 s/ Daños y perjuicios", la Cámara Nacional de Apelaciones en lo Civil, ha tratado la siguiente cuestión: "Si corresponde a partir de la vigencia de la ley 25.561 (6/01/02) y normativa concordante mantener la doctrina establecida en el fallo plenario dictado el 02.08.93 en los autos "Vázquez, Claudia Angélica c/ Bilbao, Walter y otros s/daños y perjuicios".

En tal sentido se ha dejado establecido que:"A partir de la vigencia de la ley 25.561 (6/01/02) y normativa concordante corresponde mantener la doctrina establecida en el fallo plenario dictado el 02.08.93 en los autos "Vázquez, Claudia Angélica c. Bilbao, Walter y otros s/ daños y perjuicios".

El art. 622 del Código Civil dispone que ante la falta de intereses moratorios convenidos o fijados por leyes especiales, serán los jueces quienes determinarán el que se debe abonar. Frente a esta norma, *la Cámara entendió que, por aplicación de la ley 23.928, los intereses moratorios debían liquidarse en ese supuesto conforme a la tasa pasiva que publica mensualmente el Banco Central de la República Argentina de acuerdo a lo previsto por el art. 8° del decreto 529/91, modificado por el decreto 941/91.*

Ahora bien, debe tenerse en cuenta que *las tasas bancarias —entre la que se encuentra la tasa pasiva promedio que publica el BCRA cuya aplicación dispuso la* *doctrina establecida en el plenario que se revisa en esta instancia— contienen por un lado rubros que atienden a las ganancias como renta pura del capital y por otro al mismo tiempo a la eventual corrección de procesos inflacionarios*, que aún mínimos deterioran la moneda en forma paulatina (CNCiv., sala B, *in re* "Brizuela, Nicolás c. El Puente SA s/ art. 250 CPCC - incidente civil", del 30/5/03; Durañona y Vedia y Quintana Terán, "La depreciación de la moneda y los intereses", en JA, 1970-7-332, en esp. p. 337 cap. V).

La tasa de interés pasiva, que es la que pagan las entidades financieras por los depósitos que efectúan los clientes en cajas de ahorro y en plazo fijo, incluye la retribución al capital, la inflación esperada y algún riesgo de que la entidad no devuelva los fondos.

La tasa pasiva promedio que publica el Banco Central de la República Argentina (Comunicado 14.290), refleja la capitalización de la tasa diaria equivalente a la tasa de interés efectiva mensual promedio ponderada de los depósitos en caja de ahorro común y a plazo fijo, correspondiente al segundo día hábil anterior a la fecha informada, según la encuesta que diariamente elabora la institución bancaria. Las ponderaciones surgen de los montos de los saldos de depósitos en caja de ahorro y de las operaciones concertadas en el día para los depósitos a plazo fijo en distintas entidades crediticias.

- Fuero Comercial

La CNCom. mediante el fallo plenario "Sociedad Anónima La Razón s/quiebra s / incidente de pago de los profesionales" del 27.10.94, dejó establecido que no procede por aplicación de la Ley 23.898 *fijar, a partir del 01.04.91, el interés a tasa pasiva.*

Por lo expresado, *el deudor sujeto a reclamación judicial, habrá de solventar el interés que cobran los bancos públicos, por extensión analógica del art. 565 Cód Comercio, es decir la "tasa activa".*

Recordemos el art. 565 Cód. Comercio: "Mediando estipulación de intereses, sin declaración de la cantidad a que estos han de ascender, ... se presume que las partes se han sujetado a los intereses que cobren los bancos públicos...".

A su vez, la CNCom., mediante el fallo plenario "Calle Guevara, Raúl (Fiscal de Cámara) s/ Revisión de Plenario" del 25.08.03, procedió a revisar la anterior doctrina plenaria establecida en "Uzal SA c. Moreno, Enrique s/ Ejecutivo", del 2.10.91.

En tal sentido, *se establece como doctrina legal, que además de los supuestos establecidos explícitamente en el texto positivo de la Ley, no corresponde en otros, la capitalización de intereses devengados, por un crédito cuyo obligado se encuentre en mora.*

Recordamos nuevamente el art. 623 Cód Civil "No se deben intereses de los intereses, sino por convención expresa que autorice su acumulación al capital con la periodicidad que acuerden las partes, o cuando liquidada la deuda judicialmente con los intereses, el juez mandase pagar la suma que resultare y el deudor fuese moroso en hacerlo. Serán válidos los acuerdos de capitalización de intereses que se basen en la evolución periódica de la tasa de interés de plaza. (Modificado por Ley 23.928).

- Fuero Laboral

A partir de 1991, cuando se adoptó la convertibilidad y se eliminó la indexación, la CNAT dictó la Resolución 6/91 del 10.4.91, cuyo artículo 6 establecía "Sin perjuicio de la tasa aplicable hasta el 31.03.91 sobre créditos indexados, *a partir del 1.4.91 se aplicará la tasa de interés que resulte del promedio mensual de la tasa activa aplicada por el BNA para operaciones corrientes de descuento de documentos comerciales.*

Luego del fallo "López, Antonio Manuel c. Explotación Pesquera de la Patagonia S.A." dictado por la CSJN el 10.6.92, la CNAT adoptó el criterio anterior al indexatorio, y *sustituyó la tasa activa por la tasa pasiva. (Acta 200 del 24.6.92).*

A su vez, a partir del fallo "Banco Sudameris c. Belcam SA y otro" dictado por la CSJN el 17.5.94, la CNAT acordó mediante acta 2155 del 9.6.94, establecer tasas de interés fijas para períodos sucesivos, la última de las cuales hasta el 31.12.01, era 12% anual.

Mediante *Acta 2357/2002 del 7.5.02 la CNAT dispuso aplicar a partir del 01.01.02 la tasa de interés que resulte del promedio mensual de la tasa activa fijada por el BNA para el otorgamiento de préstamos.*

Finalmente, mediante *Resolución 8/2002 del 30.05.02, se sustituyó "el promedio mensual de la tasa activa", por la tasa de interés activa.*

Al respecto hemos incorporado las tasas activas fijadas por el Banco de la Nación Argentina para operaciones de descuento al inicio del capítulo.

Tasas de interés contempladas en normas de valuación

En la Resolución Técnica N° 17, en las normas de valuación de distintas partidas de los Estados Contables, se citan varias tasas de interés. A título informativo podemos mencionar dos tipos de tasas en forma genérica:

✔ TASAS IMPLICITAS, cuando cita:

- medición contable obtenida a partir del cálculo del valor descontado de los flujos de fondos que originará el activo o el pasivo, utilizando *la tasa interna de retorno* determinada al momento de la medición inicial.

- medición particular para determinados activos a ser mantenidos hasta su vencimiento: dice considerar la medición original del activo, la porción devengada de cualquier diferencia entre ella y la suma de los importes a cobrar a sus vencimientos, calculada exponencialmente con *la tasa interna de retorno* determinada al momento de la medición inicial sobre la base de ésta y de las condiciones oportunamente pactadas y las cobranzas efectuadas.

✔ TASAS EXPLICITAS, cuando cita:

- Para los casos en que no estuviese disponible el precio de venta o compra para operaciones de contado, en los que deba en consecuencia estimarse una tasa de interés con la finalidad de calcular el valor descontado de una cuenta por cobrar o pagar en moneda local, se utilizarán las siguientes tasas, en ese orden, para los casos de no contarse con una de ellas se sigue con la siguiente:

  a) ***tasa explícita de la operación,*** la que deberá estar soportada por la correspondiente documentación respaldatoria. Nosotros la denominamos tasa contractual.

  b) ***la tasa de interés que refleje las evaluaciones que el mercado*** hace del valor tiempo del dinero y de los riesgos específicos de la operación correspondiente al momento de la medición.

  c) ***la tasa de interés del Banco de la Nación Argentina aplicable a Cajas de Ahorro,*** tomando a estos efectos la más baja de las que se informa diariamente.

  d) Si es necesario aplicar tasas activas: ***la tasa de interés del Banco de la Nación Argentina aplicable a Cajas de Ahorro,*** tomando a estos efectos la más baja de las que se informa diariamente a la que *se le adicionará un 2,5% anual o su equivalente mensual.*

Así podemos observar la importancia del manejo de las tasas de interés las que se encuentran explícitas e implícitas en toda operación financiera. Es el elemento que debe existir en toda operación financiera.

Hay una gran variedad de tasas que se aplican. De lo expuesto, tenemos tasas que se aplican en la Justicia, diferentes a las de valuación contable y a las de cada mercado específico.

ESTUDIO DE CASO EN CAPITALES ÚNICOS

Objetivo: Realizar un ejercicio integrando operaciones de capitalización y actualización con la consiguiente búsqueda del coste financiero periódico resultante en cada operación y en su conjunto.

a) Usted colocó $ 18.000 en una operación de depósito a plazo el día 12/06 con vencimiento el 22/06, y la renovó por igual plazo y tasa dos períodos más, obteniendo un valor final al cabo del mes de $ 18.271,35.

b) El 4/7 Ud. se compró un auto y lo pagó con:
- el producido del cierre de su cuenta de ahorro que tenía en el Banco XX,
- el certificado de depósito a plazo anterior y por la diferencia
- la venta de 500 euros en el mercado al T°C° 1 euro =$4.

c) La agencia de autos para determinar el valor efectivo de negociación del certificado utilizó el Descuento a Interés Compuesto con una tasa activa mensual de descuento del 3%.

d) La agencia de cambios por la transacción en M.E. cobra gasto fijo de $15 por operaciones menores a $ 100 y $10 por operaciones mayores. Los euros que usted vendió fueron comprados el 4/03 a $ 3,60, más los gastos mencionados.

Determine:

1) La T.N.A. para el plazo de 10 días pactada en la operación de depósito a plazo y la T.E.A. resultante.

2) El valor efectivo del certificado de depósito en el momento de la negociación y el coste financiero anual resultante de la negociación del depósito.

3) El producido en la cuenta de caja de ahorro, sabiendo que al 1/6 tenía un saldo de $ 6.000 y el 30/6 retiró $ 1.200. Faltan devengar intereses al 1,2% mensual por el periodo de capitalización del 1/6 y el 4/7 —fecha de retiro del saldo y sus intereses— y debitar gastos por $6.

4) El valor de la liquidación de euros al 4/7 y el rendimiento financiero anual resultante obtenida por la tenencia de dicha moneda.

5) El valor efectivamente pagado en la compra del auto.
Si en oportunidad de retirar su vehículo se entera que faltaban considerar los gastos de patentamiento y otros conceptos vinculados, los que representan un 7,5% adicional, y la concesionaria le financia dicha suma mediante un préstamo ajustable a una TEA del 21% mensual, sabiendo que los ajustes fueron de $\varphi^1{}_{30} = 2\%; \varphi^2{}_{30} = 4\%; y \varphi^3{}_{30} = 3\%$; conviniendo que Ud. deberá abonar mensualmente intereses ajustados y cancelar dentro de 3 meses el capital ajustado. Por tal motivo, los pagos realizados hasta la cancelación del préstamo fueron:
$\boxed{\text{Cuota 1: \$ }\quad}$; $\boxed{\text{Cuota 2: \$ }\quad}$ y la $\boxed{\text{Cuota 3: \$ }\quad}$.

Resolución

Operación de Depósito a Plazo

12/06	22/06	2/07	12/07
0	1	2	3
C_0=18.000			C_3 = 18.271,35

$$18000\left(1+\frac{TNA.10}{365}\right)^3=18.271,35$$

Despejamos la TNA de la ecuación anterior y queda:

$$TNA_{\left(\frac{365}{10}\right)}=\left[\left(\frac{18.271,35}{18.000}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right]\cdot\frac{365}{10}=0,1825$$

Ahora calculamos la TEA:

$$T.E.A.=\left(1+\frac{0,1825.10}{365}\right)^{\frac{365}{10}}-1=0,1997$$

Negociación del Certificado

12/06	22/06	2/0	4/07	12/07
0	1	2		3
C_0=18.000				C_3 = 18.271,35

VN=18.271,35; n= 8; d_{30}=0,03

$V=18271,35(1-0,03)^{8/30}$

V= 18.123,54

El valor efectivo del certificado de depósito en el momento de la negociación es $\boxed{\$ 18.123,54}$

Para el cálculo del C.F.A debemos tener en cuenta el valor nominal y el efectivo y medirlo para un año.

$$CFA=\left(\frac{18271,35}{18123,54}\right)^{\frac{365}{8}}-1=0,4486$$

y el coste financiero anual resultante de la negociación del depósito 44,86 %.

Operación de Depósito a la vista-Caja de ahorros

1/06 30/06 4/07

Saldo: 6.000 Retiro= 1.200

$S_{4/7}$ = (Saldo Disponible+Intereses –Gastos)

Cálculo de la tasa de retribución de los depósitos

Período de capitalización (1-06 al 4-07)= 33 días

$i_{33}= (1+0{,}012)^{33/30}-1= 0{,}013208$

- Método por saldos-determinación del saldo disponible al 4/07

$$S_{4/7}= 4.800 + \frac{0{,}013208}{33} (6.000 \,.\, 29 + 4.800 \,.\, 4) - 6 = 4.871{,}33$$

- Métodos por compensación-determinación del saldo disponible al 4/07

$$S_{4/7}= 4.800 + \frac{0{,}013208}{33} (6.000 \,.\, 33 - 1200 \,.\, 4) - 6 = 4.871{,}33$$

El producido en la cta. de caja de ahorro es $\boxed{\$\ 4.871{,}33}$

Operación de Mercado de Cambios

4/03	4/07
T°C°= \$3,60x 1Euro	T°C°= \$4 x 1 Euro
Gs. Entrada \$ 15 ó \$10	Gs. Salida=\$15 ó \$10
C_0= 500.3,6+10	C_n= 500.4-10
C_0= 1.810	C_n= 1990

$$i_{365} = \left(\frac{1990}{1810}\right)^{\frac{365}{122}} - 1 = 0{,}32796$$

El valor de la liquidación de euros al 4/7 por $\boxed{\$1.990}$ y el rendimiento financiero anual resultante obtenido por la tenencia de dicha moneda $\boxed{32{,}80\%}$

1) El valor pagado en la compra del auto $\boxed{\$\ 24.985}$:
   Certificado: 18.123,54
   Caja de ahorro: 4.871,33, y
   Realización de los Euros 1.990.

Para calcular la asistencia crediticia que deberé recibir conociendo el valor del auto le aplico el 7,5% en concepto de gastos: 24.985 . 0,075= $ 1.874

e) el valor a solicitar en préstamo en la agencia será de $ 1.874.-, ajustable y con una TEA del 21%, sabiendo que los ajustes fueron de:

$\varphi^{1}_{30} = 2\%; \varphi^{2}_{30} = 4\%; y \varphi^{3}_{30} = 3\%;$

La T.E.M. $i_{30} = (1+0{,}21)^{30/365} - 1 = 0{,}01579$

Entonces cada cuota surge de:

Cuota 1:	1.874 (1+0,02) . 0,01579	=	30,18
Cuota 2:	1.874 (1+0,02) (1+0,04) . 0,01579	=	31,40
Cuota 3:	1.874 (1+0,02) . (1+0,04) . (1+0,03) (1+0,01579)	=	<u>2.079,91</u>
			2.141,49

Si se abonaron mensualmente los intereses ajustados y el capital ajustado se canceló a los 3 meses, los pagos realizados hasta la cancelación del préstamo fueron:

Cuota 1: $\boxed{\$\ 30{,}18}$

Cuota 2: $\boxed{\$\ 31{,}40}$

Cuota 3: $\boxed{\$\ 2.079{,}91}$

I.2. Capitales Múltiples
Operaciones Financieras Complejas

Capítulo VIII

Rentas

Objetivo

- ➢ Valuar en un momento cualquiera una sucesión de capitales disponibles en una sucesión de tiempos.
- ➢ Reconocer las herramientas financieras para valuar una renta utilizando los diferentes factores de valuación sean singulares o bien de una serie.
- ➢ Aplicar las funciones financieras a cualquier problema concreto.
- ➢ Poder determinar el tanto de interés contractual en las operaciones.
- ➢ Construir base para hallar el coste financiero o rendimiento financiero de la una renta (tema que se verá en el Capítulo Préstamos y en Proyectos de Inversión y Financiación).

Definición

También denominadas **SUCESIONES FINANCIERAS** o en un sentido amplio **RENTAS**. Se trata de:

- ❒ Sucesión de capitales en una sucesión de tiempos.
- ❒ Conjunto de prestaciones con vencimientos diferentes, cada uno de los cuales se denomina "término de la renta" o simplemente cuota.
- ❒ Sucesión de pagos o cobros con vencimientos en épocas equidistantes y fijas. Surge así el concepto de "período" que es el intervalo de tiempo que media entre dos pagos consecutivos.

Cualquiera sea la definición vemos que se trata de *una multiplicidad de operaciones financieras simples* en donde se producen una sucesión de pagos periódicos o una sucesión de cobros periódicos. Si los vencimientos son equidistantes y las cuantías son iguales, o bien varían de acuerdo a una ley de formación, entonces podemos calcular el valor de una renta de estas características, en cualquier momento, mediante la aplicación de fórmulas que relativamente resultan fáciles. Caso contrario, debemos utilizar herramientas de valuación tales como una Planilla de Cálculo tipo Excel.

Renta

Conjunto de capitales sucesivos | Conjunto de tiempos disponibles

Clasificación

• Cuantía	si c=1➔ renta unitaria
	• constantes : $c_1=c_2=c_3=\ldots c_p=\ldots c_n$
	• variables : $c_1\neq c_2\neq c_3\neq\ldots c_p\neq\ldots c_n$
	  • en progresión aritmética
	  • en progresión geométrica
	  • sin ley de formación en la variación

• duración	• temporales o temporarias :número finito de términos • perpetuas: infinitos términos
• aleatoriedad de su duración o certeza de sus elementos	• ciertas: se conoce la cuantía y el vencimiento de cada elemento • no cierta o aleatoria: cada cuantía y/o vencimiento depende de un hecho aleatorio.
• amplitud de los períodos	• discretas • continuas
• periodicidad en los vencimientos	• periódicas: sincrónicas. Coinciden la frecuencia de pagos /cobros y de capitalización. • fraccionadas: subperiódicas asincrónicas: no coinciden la frecuencia de pagos/cobros y de capitalización.
• ley financiera	• Interés simple • Interés compuesto: que cubren la mayoría de las operaciones de nuestros mercados.
• Vencimiento de los términos	• Adelantados o prepagables: a principio de cada período • Vencidos o pospagables: a fin de cada período
• Momento de valoración. Relación entre Fecha de origen (E.I: Epoca de iniciación de los pagos o cobros y la E.V.(Epoca de Valuación)	• Rentas Inmediatas➔ EI =EV • Rentas Diferidas ➔ EI es POSTERIOR a EV

Casos concretos en donde usted puede clasificar el tipo de renta en cada ejemplo (de acuerdo a la certeza de sus elementos, cuantía y duración):

- El producto bruto anual de un país.
- Títulos de renta fija emitido a perpetuidad.

- Las cuotas que van pagando un préstamo hipotecario.
- El valor reunido con los aportes mensuales de un trabajador, al momento de jubilarse.
- Los dividendos percibidos por la inversión en acciones cuyas cuantías dependen de los resultados de la empresa.
- El fondo acumulado en una cuenta de ahorro.
- Los cupones que cobran los tenedores de Bonos.

Notación

La notación que seguiremos para expresar cada renta será disponiendo linealmente los argumentos o parámetros que la definen, sin utilizar subíndices ni supraíndices. En adelante, a o *a*, así como s o *s* se utilizarán en forma indistinta.

En donde en líneas generales será:

a (.... ; ..... ;......; ......) s(.... ;...... ; ..... ;.......)

1° 2° 3° 4° 1° 2° 3° 4°

1°: momento en que se realiza el primer pago o cobro = E.I (Época de Iniciación de pagos).

2°: n =cantidad de términos o cuotas. No necesariamente coincide con la duración de la renta.

3°: tasa de valoración de la renta, generalmente se la conoce como "i".

4°: razón de variación de las cuotas. Si son constantes este campo se omite y la renta queda expresada con sólo 3 argumentos.

Cada campo o espacio para completar está separado por el signo de puntuación y representa los argumentos expuestos *en ese orden*.

Además: a(...) señala el factor de actualización expresando el valor en el momento 0 (E:V=0).

s(...) señala el factor de capitalización expresando el valor en el momento n (E:V=n).

Este "n" coincide con el último cobro o pago —para rentas vencidas—, o se encuentra un período después del último cobro o pago —para rentas adelantadas—.

En determinados textos se habla de "anualidad" refiriéndose al término de la renta. Nosotros lo omitimos por considerarlo más asociado a la periodicidad del término que al concepto en sí y lo llamamos: cuotas, términos, pagos o cobros.

RENTAS TEMPORARIAS DE TÉRMINOS CONSTANTES
IMPOSICIÓN O VALOR FINAL

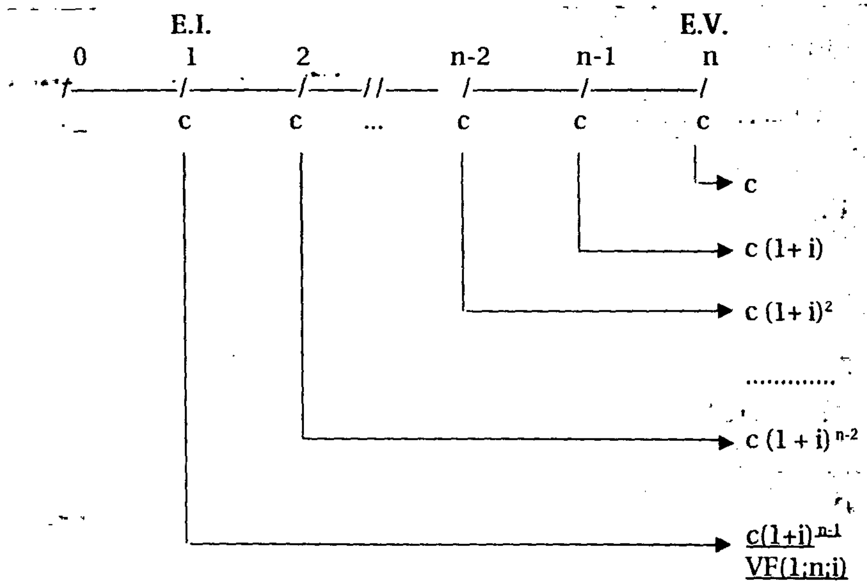
Deducción de la fórmula principal:

- ***Valuación de la renta en oportunidad del último término***

Como cada uno de los términos o cuotas son iguales, los llamamos "c". Otra condición que debe darse en esa sucesión es la consecutividad de sus términos, es decir que se distribuyan en forma escalonada.

Ley financiera utilizada: Interés Compuesto

El gráfico de la renta queda así expuesto:



En forma genérica se tiene:

$$VF(1;n;i) = c\,[\,1 + (1+i)^1 + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\,]$$

Entre corchetes se observa la suma de una sucesión de n términos en geométrica con razón (1+i), y primer término 1.

Resolviendo la suma de esta progresión aritmética, sabiendo que el valor de dicha suma está dado por la fórmula:

$S = a_1.\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ en donde a_1= 1° término de la sucesión; q= $\dfrac{c_2}{c_1} = \dfrac{c_3}{c_2} = \ldots = \dfrac{c_n}{c_{n-1}}$ = razón constante y n= cantidad de términos de la sucesión, queda:

$$\boxed{VF(1;n;i) = c.\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}}$$

Entonces: VF (1;n;i) representa el valor final o monto que produce una serie de "n" cuotas de cuantía "c" periódicas, iguales y consecutivas, capitalizadas a un tanto de interés periódico —"i"— y *expresado al momento de la última cuota*. Observemos que la última cuota queda expresada en el mismo momento de valuación así que capitaliza por $(1+i)^0 = 1$

El factor $s(1;n;i) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ llamado "*factor de capitalización de una renta unitaria uniforme*" que expresa el valor final de una renta unitaria (pues las cuotas son de $1) capitalizadas a la tasa de interés "i" al momento de la última cuota.

Otra notación es $s_{\overline{n|}} = s(1;n;i)$

Si deseamos obtener la cuota c periódica necesaria para integrar un valor final VF(1;n;i).

Se despeja y queda:

$$\boxed{c = VF(1;n;i).\frac{i}{(1+i)^n - 1}}$$

$$\downarrow$$

$$c = VF(1;n;i).\ \underbrace{s^{-1}(1;n;i)}$$

$$\downarrow$$

Factor Cuota Vencida que integra un valor final de $1.

Es el Recíproco del Factor de capitalización de la serie unitaria de términos constantes cuya notación es $s^{-1}(1;n;i)$.

Otra notación es: $s^{-1}{}_{\overline{n|}} = s^{-1}(1;n;i)$

Utilización de la Planilla de Cálculo

Supongamos el caso de un depositante que todos los meses coloca $620 durante 24 meses a fin de mes a los que se les reconoce una tasa de interés mensual del 1,2%. Determine el monto obtenido en oportunidad del último depósito.

Utilizando nuestra fórmula tenemos:

$$VF(1;n;i) = 620.\frac{(1+0{,}012)^{24} - 1}{0{,}012}$$

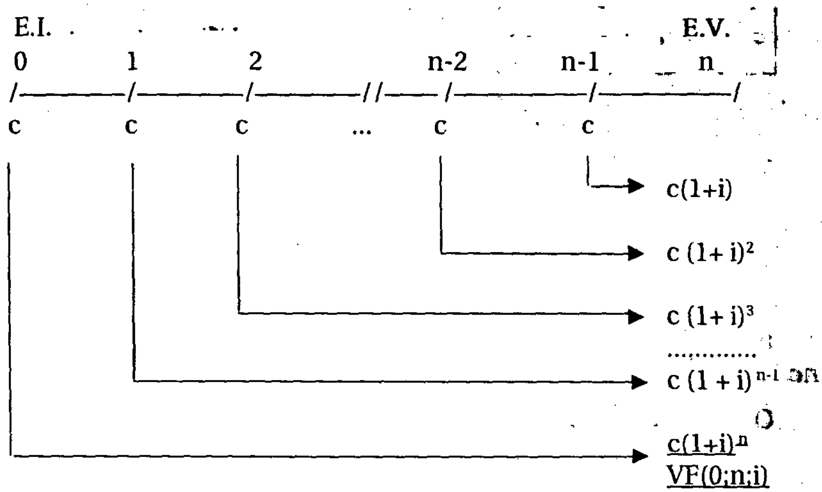
VF (1; n; i) = 620 . 27,62273364 =17.126,09

Utilizando Planilla de Cálculo tipo Excel podemos escribir en una celda **=VF(0,012;24;620;0)** y al apretar ENTER (INTRO) nos dará el resultado.

FUNCION FINANCIERA	Aplicación en Excel	Resultado
VF(1;n;i)	Si: c= 620; n=24 i=0,012 pagos vencidos. Hallar el valor final	$ -17.126,09
Formato numérico para ingresar en Planilla		FORMATO
=VF(0,012;24;620;0)		=VF (tasa en tanto por uno; cant. cuotas, cuota) = VF(i; n;c) 0: periodo vencido, puede no escribirse

- *Valuación de la renta un período después del último término*

Veamos qué ocurre si las cuotas inician en el momento de contratación, es decir el momento 0, y se valúan también en el momento n, es decir un período después al de la última cuota.



En forma genérica se tiene:

$$VF(0;n;i) = c\ [\ (1+i)^1 + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n]$$

Entre corchetes se observa la suma de una sucesión geométrica de razón (1+i), cantidad de términos n y primer término (1+i). Resolviendo la suma de la progresión nos queda:

$$VF(0;n;i) = c.(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1}$$

$$\boxed{VF(0;n;i) = c.(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Entonces: VF (0;n;i) representa el valor final o monto que produce una serie de "n" cuotas de cuantía "c" periódicas, iguales y consecutivas, capitalizadas a un tanto de interés periódico —"i"— y *expresado un período después de la última cuota*. Observemos que la última cuota capitaliza por un período (1+i).

El factor $s(0;n;i) = (1+i)\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ llamado *"factor de capitalización de una renta unitaria uniforme"* que expresa el valor final de una renta unitaria (pues las cuotas son de \$1) capitalizada a la tasa de interés "i" periódica un período después al de la última cuota.

Otra notación es $S_{\overline{n|}} = s(0;n;i)$

Si deseamos obtener la cuota c periódica necesaria para integrar un valor final VF(0;n;i).

Se despeja y queda:

$$\boxed{c = VF(0;n;i).\frac{i}{(1+i)^n - 1}(1+i)^{-1}}$$

$$c = VF(0;n;i).\ \underbrace{s^{-1}(0;n;i)}$$

Factor Cuota Adelantado: que integra un valor final de \$1.

Es el Recíproco del Factor de capitalización de la serie unitaria de términos constantes cuya notación es $s^{-1}(0;n;i)$.

Otra notación es $S^{-1}_{\overline{n|}} = s^{-1}(0;n;i)$

Utilización de la Planilla de Cálculo

Supongamos el caso de un depositante que todos los meses coloca \$620 durante 24 meses a principios de mes a los que se les reconoce una tasa de interés mensual del 1,2%. Determine el monto obtenido en oportunidad del último depósito.

Utilizando nuestra fórmula tenemos:

$$\boxed{VF(1;n;i) = 620.(1+0,012).\frac{(1+0,012)^{24} - 1}{0,012}}$$

$VF(1;n;i) = 620 \,.\, 27,95419531 = 17.331,61$

Utilizando Planilla de Cálculo tipo Excel podemos escribir en una celda **=VF(0,012;24;620;;1)** y al apretar ENTER (INTRO) nos dará el resultado.

VF(0;n;i)	Si: c= 620; n=24 i=0,012 pagos adelantados Hallar el valor final		\$ -17.331,61
=VF(0,012;24;620;;1)			=VF (tasa en tanto por uno; cant. cuotas, cuota;1) = VF(i; n;c;1) 1: periodo adelantado

La determinación de la tasa de interés en una imposición

En la actualidad no tenemos dificultades en determinar este componente, pues contamos con herramientas poderosas:

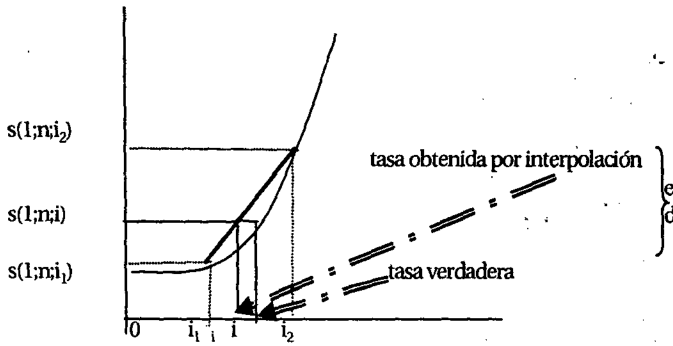
- utilización de planillas de cálculo tipo Excel
- máquinas de calcular con programas incorporados para su cálculo sea financieras o científicas.

En caso de no disponer de dichos medios podemos aplicar otros caminos alternativos que nos arrojan resultados aproximados, tales como:

- Interpolación lineal utilizando la fórmula correspondiente de interpolación proporcional o lineal:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}[f(x_1) - f(x_0)]$$

Interpolación lineal en el cálculo de la tasa de interés para s(1;n;i)



$$\left\{\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{c} i_1 \\ i \end{array}\right\} & \left\{\begin{array}{l} s(1;n;i_1) \\ s(1;n;i) \end{array}\right. \\ i_2 & s(1;n;i_2) \end{array}\right\}$$

$(i_2 - i_1)$ —— $s(1;n;i_2) - s(1;n;i_1)$

$(i - i_1)$ —— $s(1;n;i) - s(1;n;i_1)$

Entonces:

$(i - i_1) * [s(1;n;i_2) - s(1;n;i_1)] = (i_2 - i_1) * [s(1;n;i) - s(1;n;i_1)]$

Despejo i y nos queda:

$$\boxed{i = i_1 + \frac{s(1;n;i) - s(1;n;i_1)}{s(1;n;i_2) - s(1;n;i_1)} \cdot (i_2 - i_1)}$$

Ejemplo: ¿Cuál será la tasa de retribución mensual de mis depósitos de $ 620 c/u si el valor final obtenido en oportunidad de realizar el depósito 24 fue de $ 17.126,10?

.i	s(1;24;i)
$.i_1$=0,01	26,97346485
.i	27,62274194
$.i_2$=0,03	34,42647022

VF(1;n,i) = c . s(1;n;i)

17.126,10 = 620 . s(1;24,i)

s(1;24;i) = 27,62274194

Aplico la fórmula:

$$\boxed{i = i_1 + \frac{s(1;n;i) - s(1;n;i_1)}{s(1;n;i_2) - s(1;n;i_1)} \cdot (i_2 - i_1)}$$

$$i = 0{,}01 + \frac{27{,}62274194 - 26{,}97346485}{34{,}42647022 - 26{,}97346485} \cdot (0{,}03 - 0{,}01)$$

i= 0,01+0,001742323= 0,0117

i= 0,0117

Observamos que en la interpolación lineal, cuanto menor sea la diferencia entre los valores de la variable "i" que interpolamos, el valor de "i" hallado se acerca al verdadero valor, pero siempre estará por debajo del valor de la "i" verdadera, en nuestro caso 0,012.

Fórmula de Baily en el cálculo de la tasa de interés

Parte del desarrollo en serie de la función s(1;n;i) en serie de potencias de i:

$$VF(1;n;i) = c.s(1;n;i) = c.\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{VF(1;n;i)}{c} = \frac{\left[1 + n.i + \frac{n.(n-1)}{2!} i^2 + \frac{n.(n-1)(n-2)}{3!} i^3 + \ldots - 1\right]}{i}$$

Dividimos por n ambos miembros y dividimos por i el segundo miembro:

$$\frac{VF(1;n;i)}{c.n} = 1 + \frac{(n-1)}{2!} i^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{3!} i^2 + \ldots$$

Elevamos cada miembro en esta igualdad a la potencia $\frac{2}{n-1}$ que es la recíproca del coeficiente numérico que acompaña a i en el 2° término del 2° miembro. Así se podrá simplificar cuando trabajemos este segundo miembro nuevamente como binomio.

$$\left[\frac{VF(1;n;i)}{c.n}\right]^{\frac{2}{n-1}} = \left[1 + \frac{(n-1)}{2} i + \frac{(n-1)(n-2)}{6} i^2 + \ldots\right]^{\frac{2}{n-1}}$$

$$x = \left[\frac{(n-1)}{2}.i + \frac{(n-1).(n-2)}{6}.i^2\right]$$

Ahora vamos a trabajar con el segundo miembro volviendo a aplicar el desarrollo en serie y llamamos a todo lo contenido del corchete x, entonces:

$$(1+x)^{\frac{2}{n-1}} = \left[1 + \frac{(n-1)}{2}.i + \frac{(n-1).(n-2)}{6}.i^2 + \ldots\right]^{\frac{2}{n-1}}$$

siendo x = todos los términos que le siguen a 1, es decir desde el 2° término en adelante.

Desarrollamos en serie el binomio $(1+x)^{\frac{2}{n-1}}$

$$(1+x)^{\frac{2}{n-1}} = \left[1 + \frac{2}{(n-1)} x + \frac{2}{(n-1)}\left(\frac{2}{(n-1)} - 1\right)\frac{x^2}{2!} + \ldots\right]$$

$$(1+x)^{\frac{2}{n-1}} = \left[1 + \frac{2}{(n-1)} x + \frac{1}{(n-1)} \frac{[2-(n-1)]}{(n-1)} x^2\right] = \left[1 + \frac{2}{(n-1)} x + \frac{1}{(n-1)} \frac{(2-n+1)}{(n-1)} x^2\right]$$

$$(1+x)^{\frac{2}{n-1}} = \left[1 + \frac{2}{(n-1)} x + \frac{(3-n)}{(n-1)^2} x^2\right]$$

Reemplazamos los valores de x

$$si\ x = \left[\frac{(n-1)}{2}.i + \frac{(n-1).(n-2)}{6}.i^2\right]$$

Reemplazamos y queda

$$\left[\frac{VF(1;n;i)}{c.n}\right]^{\frac{2}{n-1}} = 1+\frac{2}{(n-1)}\left[\frac{(n-1)}{2}.i+\frac{(n-1).(n-2)}{6}.i^2+...\right]+\frac{(3-n)}{(n-1)^2}\left[\frac{(n-1)^2}{2^2}.i^2+...\right]$$

lo c...

$$\left[\frac{VF(1;n;i)}{c.n}\right]^{\frac{2}{n-1}} = \left[1+i+\frac{(n-2)}{3}.i^2+\frac{(3-n)}{4}i^2\right]$$

Si al 1° miembro le restamos la unidad del segundo miembro y lo llamamos h, nos queda:

$$\boxed{\left[\frac{VF(1;n;i)}{c.n}\right]^{\frac{2}{n-1}} - 1 = h}$$

Entonces, también h es igual a:

$$h = i+\frac{(n-2)}{3}.i^2+\frac{(3-n)}{4}i^2 = i+i^2\frac{4(n-2)+3.(3-n)}{4.3} = i+i^2\frac{4n-8-3n+9}{12} = i+i^2\frac{(n+1)}{12}$$

es decir h $i+i^2\frac{(n+1)}{12}$ habiendo utilizando potencias inferiores a 3. Sacamos factor común i.

$$h = i\left[1+i\frac{(n+1)}{12}\right] = i.\frac{12+i(n+1)}{12}$$

y despejo el factor común i. Luego reemplazo i por h

$$i = \frac{12.h}{12+i(n+1)} = \frac{12h}{12+\frac{12h(n+1)}{12+h(n+1)}} = \frac{12h}{\frac{12[12+h(n+1)+h(n+1)]}{12+h(n+1)}}$$

Observemos que estuvimos sustituyendo en i el valor de h, para llegar así otra vez a sustituir y obtener un valor más aproximado.

$$\boxed{i = h\frac{12+h(n+1)}{12+2h(n+1)}}$$

Resolvemos el ejercicio anterior que pedía la tasa de retribución mensual de mis depósitos de \$ 620 c/u si el valor final obtenido en oportunidad de realizar el depósito 24 fue de \$ 17.126,10.

$$\boxed{h = \left[\frac{17.126,10}{620.24}\right]^{\frac{2}{24-1}} - 1 = 0,012299862}$$

$$\boxed{i = 0,012299862\ .\ \frac{12 + 0,012299862\ .\ (24+1)}{12 + 0,012299862\ .\ (24+1)} = 0,012}$$

El tanto de interés mensual es del 1,2%.

Aplicaciones

1) Una persona propietaria de dos fincas decide alquilarlas por 2 ½ años de la siguiente forma.

   a) La propiedad "A" en una cuantía inicial de $ 3.500 por todo el plazo.

   b) La propiedad "B" mediante cobros mensuales de $ 350 por período adelantado.

   En la primera finca, consigue depositar el valor a cobrar en una entidad que ofrece el 127,77% efectivo anual y en el caso de la segunda finca la tasa de inversión es del 5% mensual.

   Calcular cuál de las dos operaciones será más rentable.

   Rta.: alternativa a).

E.V.

0 1 2 19 20
/______/______/______//______/______/

a) C=3.500 TEA= 1,2777

b) c_1= 350 c_2=350 c_3=350 ... c_{20}=350 i_{30}=0,05

a) 3500 [$(1+1.2777)^2$ $(1+1.2777)^{180/365}$] = 27.249,64.

b) 350 s(0;30; 0.05) = 350 . 69,76078988 = 24.416,27.

Este ejemplo permite la diferenciación entre una operación financiera simple y una compleja, denominada comúnmente "rentas" pues permite diferenciar la valuación de un capital único, en el primer caso, utilizando el factor de capitalización singular $(1+i)^n$ y la valuación de una sucesión de capitales en el segundo caso, utilizando el factor de capitalización de la serie.

2) Una persona se compromete a integrar 5 cuotas iguales y consecutivas de $ 1000 cada una, a las que se les reconoce un interés nominal anual del 110% para el plazo de 30 días.

   Calcular el valor final considerando:

   a) Renta vencida.

   b) Renta adelantada.

   Rta.: a) 5989,6; b) 6531,1.

	0	1	2	3	4	5 (E.V.)
a)	--	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
b)	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	--

VF(1;5;0.0904109)=1000 . s(1; 5; 0.0904109)= 5.989,6
VF(0;5;0.0904109)=1000 . s(0; 5; 0.0904109)= 6.531,1

Si VF(1;n;i) (1+i) = VF (0;n;i) entonces:

$$(1+i)=\frac{VF(0;n;i)}{VF(1;n;i)} \qquad (1+0,0904109)=\frac{6.531,1}{5989,6}$$

VF(0;n;i) / VF(1;n;i) = (1 + i)
6531,10 / 5989,6 = (1 + 0,09041)

3) Un artículo del hogar tiene un valor de $ 820. Ud. decide adquirirlo dentro de 6 meses.

a) ¿Cuál es el importe de la cuota que debe depositar mensualmente a fin de cada mes para obtener el capital necesario, suponiendo que dicho bien no aumentará ? Los depósitos ganan un interés mensual del 3,5% y el primer depósito se efectúa al mes siguiente. Calcule los intereses ganados en la operación de ahorro.

b) Si se supone que el valor del artículo en cuestión aumentará un 30%. ¿Cuál será la cuota necesaria de depósito mensual para poder acceder a la compra?

Rta.: 125,18; 68,92 y 162,74.

	0	1	2	3	//	n=6 (E.V.)
a)	-	c	c	c		c

c = 820 s^{-1} (1; 6; 0.035)
c = 125,18
Intereses totales = VF(1;n;i) - c . n
Intereses totales = 820 - 125,18 . 6
Intereses totales = 820 - 751,08 = 68,92

b) c = 820 (1+0.30) s^{-1} (1; 6; 0.035).
c = 162,74

Observemos que la cuota de 162,74 frente a la de 125,18 representa un 30% más, ya que es la cuota necesaria para integrar un Valor final incrementado en un 30%. La cuota es proporcional con respecto al valor final.

4) El 20.01 una persona se comprometió a depositar cuotas mensuales, iguales y consecutivas a partir del mes siguiente a las que se les aplicó un interés mensual acumulativo del 6%, de tal forma que al 20.12 del mismo año integró un valor tal que se utilizó para la constitución de un depósito a plazo fijo a 7 días, siendo la tasa efectiva anual pactada del 120%; sufriendo el depósito una retención del 3% sobre la renta, arribando a un neto de $ 12.000 a su vencimiento el 27.12.

Determinar el importe de los depósitos.

Rta.: 789.84

20/01	20/02	20/03	...	20/12	27/12
0	1	2		n=11	
-	c	c	...	c	

⊗ VF=c.s(1;11;0,06).

C_1=12.000

$$c \,.\, s\,(1;11;0{,}06)\ .\ [1+(1-0{,}03)\,.\,i_7)\ =\ 12.000$$

$$siendo\ i_7 = [\,(1+1{,}20)^{7/365}-1\,] = 0{,}015236$$

$$c \,.\, s\,(1;11;0{,}06)\,.\,[1+0{,}97.\ 0{,}015236) = 12.000$$

$$c\ =\ \frac{12000\quad s^{-1}\ (1;\,11;\,0.06)}{(1+0{,}015236\,.0.97)}$$

$$c\ =\ \frac{12000\ \ .0{,}066792938}{1{,}01477892}\ =\ 789{,}84$$

Comprobación:

$$VF(1;11;0{,}06) = 789{,}84\,.\,s(1;11;0{,}06) = 789{,}84\,.\,14{,}97174264 = 11.825{,}20$$

El valor final reunido por 11 cuotas vencidas de $ 11.825,20 es el C_0 colocado por 7 días, arrojando un monto de:

$$C_n = 11.825{,}20\,.\,(\,1+0{,}015236\,.\,0{,}97) = 12.000$$

5) Una persona solicita un préstamo de $ 100.000 en una sociedad de ahorro y préstamo para la vivienda. Se le exige integrar el 20 % del préstamo mediante 12 cuotas mensuales, iguales y consecutivas a las que se les reconoce un interés del 10% mensual. Primera cuota al mes siguiente de la solicitud de crédito.
Determinar: a) la cuota;

b) Si después de integrada la tercera cuota se presenta el titular y afirma que no puede pagar más de $ 700 por mes, hallar el plazo de la operación.

Rta.: 935,27 y 11

```
                                                          E.V.
 0        1        2        3        4                    n=12
 /________/________/________/________/_____//_____/
a)  -     c        c        c        c      ...           c
```

$VF(1;12;0,10) = 20.000$

$c.s(1;12;0,10) = 20.000 \rightarrow c = 935,27$

a) $20.000 = c \;.\; s(1;12;0,10)$

$c \;=\; 20000 \; s^{-1} \; (1;\, 12;\, 0.10) = \boxed{935,27}$

```
                                                              E.V.
 0          1          2          3          4                n=12
 /__________/__________/__________/__________/______//_______/
 -     c=935,27   c=935,27   c=935,27   c'=700              c'=700
```

b)
$$\frac{935,27 \;\; s(1;3;0.1) \;\;.\;\; (1+0.10)^9 \qquad 700 \;\; s\,(1;p;0,10)}{VF = 20.000}$$

Entonces:

$$20.000 \; - 935,27 \;\; s(1;3;0.10) \;\; . \; (1+0.10)^9 = \; 700 \;\; s\,(1;p;0,10),$$
acá debo despejar el valor de p

$$p = \frac{\log \left\{ 1 + 0.10 \left[\dfrac{20000 \; - 935,27 \; s(1,3,0.1) \; (1+0.10)^9}{700} \right] \right\}}{\log\,(\,1 + 0.1)}$$

$p = \; 11$

6) Determinar el importe de cada depósito si se efectuaron periódicamente colocaciones en un banco, en total 14 a comienzo de cada año, ganando intereses a una T.E.A. del 12%. Luego, el monto reunido un año después del último depósito fue otorgado en préstamo el 1 de abril contra un pagaré de $ 12.000 de valor nominal, que incluye intereses del 1,9% mensual a interés compuesto, cuyo vencimiento opera el 30.09 del mismo año.

Rta.: 295,44.

```
                                              01/04: E.V.      30/09
 0        1        2              13          14
 /________/________/__________//__/__________/___________/
 c        c        c              c                       N=12.000
```

$$VF(0;14;0{,}12)\ (1+0{,}019)^6 = N$$

$$c\,.\ s(0;14;0{,}12) = 12000\ (1+0{,}019)^{-6}$$

Es decir que el monto obtenido de los 14 depósitos es equivalente al valor actual del préstamo otorgado cuyo valor nominal es 12.000. Despejamos el valor de c y nos queda:

$$c = \frac{12.000}{(1+0.019)^6}\ s^{-1}\ (0;\ 14;\ 0.12) = 295{,}44$$

7) Una persona se compromete a depositar 18 cuotas, pero solamente depositó 5 cuotas vencidas, mensuales y consecutivas en un banco que acredita intereses mensualmente a la tasa de interés nominal anual para el plazo de 30 días del 36,5%. Las 13 cuotas restantes fueron depositadas regularmente después de transcurridos tres meses sin depósitos.
¿Cuál es el importe de la cuota mensual —constante— si al cabo de la operación, la cuenta tiene un saldo de $ 65.000?

Rta.: 2.692,92.

```
                                                      E.V.
 0   1   2       5    6   7   8    9                  21 (n+t)=(18+3)
 /___/___/___//__/___ /___/___/____/ ___ //____/
 -   c1  c2  ...  c5              c6          c18
```

$$c\,.\,s(1;5;0{,}03)\ .\ (1+0{,}03)^{16} + c\,.\,s(1;13;0{,}03) = 65.000$$

$$c = \frac{65.000}{s(1;\ 5;\ 0.03)\ (1+0.03)^{16} + s(1;13.0.03)}$$

8) Si se deposita al final de cada mes $ 127,53 en una cuenta que abona el 5,3% mensual con capitalización mensual y luego de efectuado el último depósito, el monto allí reunido permanece cuatro meses adicionales hasta lograr un monto de $ 2.000. Determinar la cantidad de depósitos necesarios para obtener dicho valor.

Rta.: n = 10 cuotas.

```
 0       1          2               n           n+1   ...    n+4
 /_______/__________/_______//______/______//___/____________/
         127,53     127,53          127,53                   VF=2.000
```

$$127{,}53 \ . \ s\,(1;n;0{,}053) \ . \ (1+0{,}053)^{4} = 2000$$

$$n = \frac{\log\left[1 + \dfrac{2000 * 0.053}{127{,}53} * (1+0.053)^{-4}\right]}{\log\,(1+0.053)}$$

9) Una persona se compromete a abonar a partir del 16.09 doce cuotas iguales y mensuales de $ 3.000 en forma consecutiva. Después de abonada la 7ª cuota deja de pagar y solicita se le restituya los importes depositados más los intereses correspondientes de acuerdo a la tasa de interés convenido que fue del 7% mensual acumulativo. Recién el 16.11 del año siguiente del compromiso la entidad procede a la restitución de los depósitos efectuados hasta la séptima cuota juntamente con los intereses correspondientes hasta ese depósito, adeudando los intereses devengados posteriores al depósito N° 7.

Ante la demanda judicial del cliente argumentando la falta de liquidación de intereses posteriores y hasta la fecha de devolución de los fondos surge la sentencia de fecha 14.06 del subsiguiente año después del compromiso.

El Juez falló a favor de la actora para que le reintegren los intereses adeudados y adicionalmente se le abone por el tiempo transcurrido desde el 16/11 en que se practicó la liquidación del reclamo hasta la sentencia, un interés que surge de la serie acumulada de tasa de interés que refleja un tanto del 0,62% efectivo diario. Determine el importe del cheque que la demandada deberá depositar en el expediente para la parte actora. Y cuál es el total que cobró la demandada.

Rta.: 49.632,58 y 75.594,64.

16/09	16/10	16/11	...	16/03	16/04	16/08	16/09	16/10	16/11	14/6
0	1	2		6	7	11	12	13	14	21
C_1	C_2	C_3	...	C_7	C_8	C_{12}	--	--	--	

Buscaremos:
Sobre el valor depositado en concepto de 7 depósitos de $ 3.000 que fueron pagados 8 meses los intereses devengados por ese plazo al que se le aplicará adicionalmente la tasa punitoria.

$$VF = 3000 \ s(1;7;0.07) \ [\,(1+0.07)^{8} - 1\,] \ (1+0.0062)^{210}$$

Acá el valor final de 7 pagos considerados vencidos, pues quedan expresados en el momento del último pago (el 7°) es de $ 25.962,06, habrá que trasladarlo financieramente hasta el 16/11 para calcular cuál es el montante que resulta al momento de pago, es decir 8 meses después contados a partir del 16/03 hasta el 16/11, es decir 210 días si simplificamos el cálculo y consideramos todos los meses de 30 días (210=8.30).

Si tomáramos los días exactos comprendidos entre ambas fechas arroja 226 días.

$VF=3000\ s(1;7;0.07)\ (1+0.07)^8$

$VF= 3.000\ .\ 8,654021092\ .\ (1+0.07)^8$

$VF = 25.962,06\ .\ (1+0.07)^8 = 44.607,66$

Como sólo la entidad pagó $ 25.962,06, debe los intereses devengados por esos 8 meses que son la diferencia entre $ 44.607,66 y $ 25.962,06, es decir $ 18.645,60. De otra forma, más fácil es calcular los intereses del valor final de los 7 pagos es decir:

Intereses devengados y no pagados al 16/11=
$3000\ s(1;7;0.07)\ [\ (1+0.07)^8 - 1\ ]=18.645,60$

Ahora nos queda devengar el interés acumulado por los 210 días calculados desde el 16/11 hasta el 14/06 del año siguiente:
$i_{210}= (1+0.0062).^{210}-1 = 2,661893655$

Intereses devengados y no pagados al 14/06: importe del cheque judicial —VF—
$VF =3000\ s(1;7;0.07)\ [\ (1+0.07)^8 - 1\ ]=18.645,60$

Importe del cheque judicial = 18.645,59 . 2,661893655 =49.632,58

O sea:

Importe del cheque judicial=
$3000\ s(1;7;0.07)\ [\ (1+0.07)^8 - 1\ ]\ (1+0.0062).^{210}$ = 49.632,58
Importe ya cobrado por la actora= 25.962,06
Total de la operación 75.594,64

10) Una empresa tiene que renovar sus maquinarias en 5 años y necesita formar un capital de U$S 1.000.000 en dicho lapso. Decide hacerlo mediante aportes mensuales vencidos en una cuenta que devenga un interés del 0,5% mensual.

a) ¿Cuál será la cuota que deberá integrar?
b) Determinar el capital formado con el depósito de la última cuota del primer año.
c) Los intereses generados por los primeros 12 depósitos.

Rta.: a) 14.332,80.
b) 176.803,15.
c) 4.809,55.

```
0     1     2     3          12     13          59    60
/_____/_____/_____/_____//_____/_____/___//___/___/
-     c     c     c          c      c           c     c
|__________________________________|
```

a) $c = 1.000.000 * s^{-1} (1; 60; 0{,}005)$

$c = 1.000.000 * 0{,}014332801$

$c = 14.332{,}80$

b) $VF(1;12;0.05) = 14332{,}80 * s(1;12; 0{,}005).$

$14.332{,}80 * 12{,}33556237 = 176.803{,}15$

c) $\sum_{1}^{12} I_j = VF(1;n;i) - n \cdot c$

$= 176.803{,}15 - 14.332{,}8 * 12.$

$= 176.803{,}15 - 171.993{,}60 = 4.809{,}55$

11) Determinar el tanto de interés mensual y efectivo anual y el interés acumulado producto de haber depositado 5 cuotas mensuales, iguales y consecutivas de $ 200; la primera de ellas al mes siguiente del contrato de depósito, sabiendo que el monto reunido al momento del depósito de la quinta cuota fue de $ 1.060,77.

Rta.: $i(30) = 0.0295.$

$i = 0.42439.$

$\sum I_j = 60.77$

```
0          1          2             n-1        n=5
/__________/__________/______//______/__________/
-          c          c     ...      c          c
|_______________________________________________|
```

$200 \cdot s(1;5;i) = 1.060{,}77$

$$\left(\frac{VF(1;n;i)}{c.n}\right)^{\frac{2}{n-1}} - 1 = h \qquad i = h.\frac{12 + h.(n+1)}{12 + 2.h.(n+1)}$$

$$h = \left(\frac{1060{,}77 / 200}{5}\right)^{2/4} - 1 = 0.0299369$$

$$i = 0.0299369 \; \frac{12 + 0.0299369 * 6}{12 + 2 * 0.0299369 * 6} = 0.0295018.$$

$$\sum_{1.}^{n.} I_j = 1060.77 - 200 * 5 = 60{,}77$$

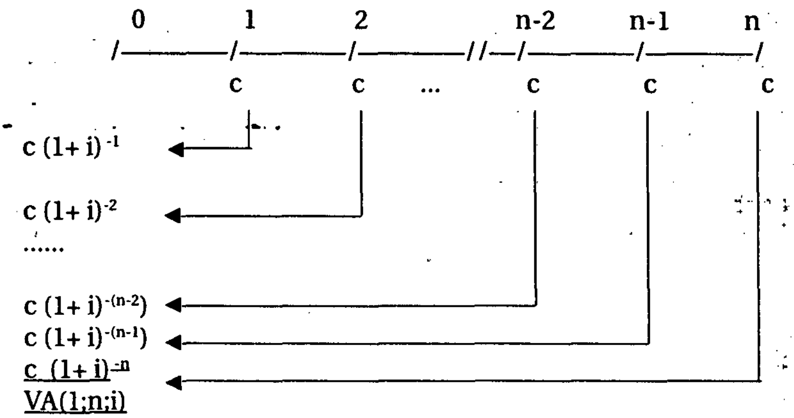
VALOR ACTUAL DE UNA RENTA DE TÉRMINOS CONSTANTES

Deducción de la fórmula principal:

Cuotas vencidas o diferidas en un período desde la contratación

Si las cuotas que se distribuyen escalonadamente son vencidas pues la primera de ellas queda expresada en el momento 1 y la última de ellas en el momento n, podemos decir que la renta es diferida por un período.

Ley financiera utilizada: Interés Compuesto. El gráfico de la renta queda así expuesto:



En forma general se tiene:

$$VA(1;n;i) = c\ [\ (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots + (1+i)^{-(n-2)} + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n}\ ]$$

Entre corchetes se observa la suma de una sucesión geométrica de razón $v= (1+i)^{-1}$, cantidad de términos n y primer término $(1+ i)^{-1}$. Recordemos que la suma de una sucesión de términos en progresión geométrica se resuelve mediante la siguiente fórmula:

$S= a_1 . \dfrac{1-q^n}{1-q}$; siendo n=cantidad de términos; a_1= 1° término y q= razón.

Es la misma fórmula de suma de n términos de una progresión geométrica utilizada para imposición, solamente que multiplicamos y dividimos por (-1) el segundo miembro para mantener inalterada la expresión y por eso queda así. De esta forma los valores encontrados tanto del numerador como denominador son positivos pues el $v<1$; entonces $1 - v>0$.

Resolviendo queda:

$$VA(1;n;i) = c\ .\ (1+i)^{-1}\ .\ \frac{1\ -\ (1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}}$$

$VA(1;n;i) = c.v\frac{1-v^n}{1-v}$ sabiendo que 1-v= d y que $d = \frac{i}{1+i}$ y $v = (1+i)^{-1} = \frac{1}{1+i}$

$VA(1;n;i) = c.$ Entonces $\frac{v}{1-v} = \frac{v}{d} = \frac{\frac{1}{1+i}}{\frac{i}{1+i}} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1+i}{i} = \frac{1}{i}$

$$VA(1;n;i) = c.\frac{1-v^n}{i} = c.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = c.\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i} = c.\frac{\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n}}{i} = c.\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n.i}$$

Nos queda cualquiera de estas tres fórmulas para utilizar en la valuación de una renta de términos constantes cuyo primer pago se produce un período después al de valuación.

$$\boxed{VA(1;n;i) = c.\frac{1-v^n}{i} \qquad VA(1;n;i) = c.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad VA(1;n;i) = c.\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n.i}}$$

Entonces: VA (1;n;i) representa el Valor Actual de una serie de "n" cuotas periódicas iguales y consecutivas de cuantía "c", que incluyen un tanto de interés periódico "i" y con primer cuota al período siguiente de la valuación.

Es importante conocer el "Factor de actualización de la renta unitaria uniforme" a(1;n;i) que justamente nos define el valor actual de una serie de serie de "n" cuotas periódicas iguales y consecutivas de una unidad monetaria , que incluyen un tanto de interés periódico "i" y con primer cuota al período siguiente de la valuación.

$$a(1;n;i) = \frac{1-v^n}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n.i}$$

Entonces:

$$\boxed{\text{VA(1;n;i) = c . a(1;n;i)}}$$

Otra notación es: $a_{\overline{n}|}$ = a (1;n;i) = a (1;n;i)

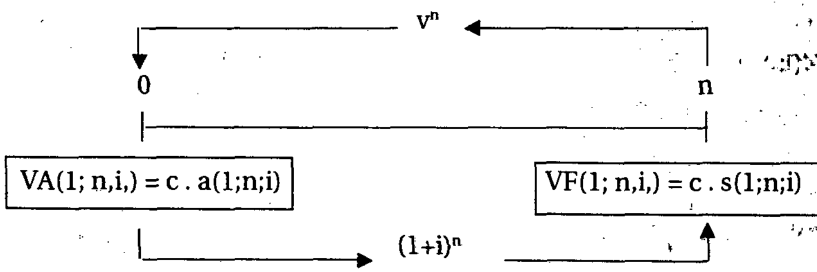
Si deseamos obtener la cuota c periódica se despeja de la fórmula de valor actual.

c = VA(1;n;i) . a^{-1}(1;n;i)

$$a^{-1}(1;n;i) = \frac{i}{1-v^n} = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{(1+i)^n.i}{(1+i)^n-1}$$

a^{-1}(1;n;i) Factor cuota vencida y constante que cancela un préstamo de $1.

Relaciones entre el factor de actualización y el de capitalización de la serie uniforme



Utilización de la Planilla de Cálculo

Supongamos que usted se compromete a pagar 16 mensualidades, iguales y consecutivas, con primer pago al mes siguiente de recibido el préstamo, las que incluyen un tanto de interés mensual del 3,5%. Determine el valor recibido

Utilizando nuestra fórmula tenemos:

$$\boxed{VA(1;n;i) = 1.251,78.\frac{1-(1+0,035)^{-16}}{0,035}}$$

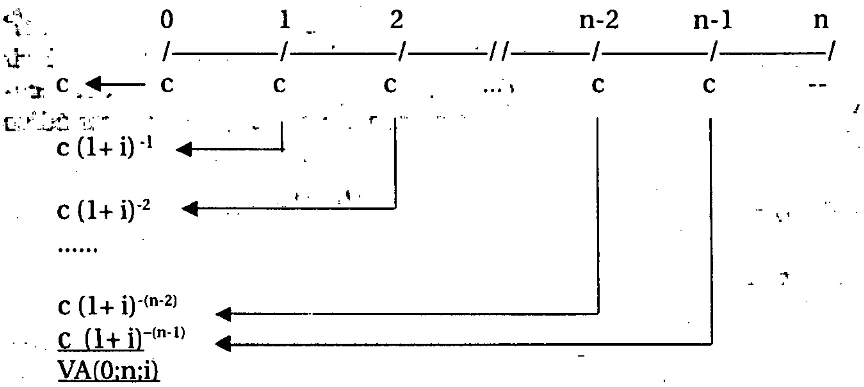
$$\boxed{VA(1;n;i) = 1.251,78 \;.\; 12,09411681 = 15.139,17}$$

Utilizando Planilla de Cálculo tipo Excel podemos escribir en una celda **=VA(0,035;16;1.251,78;0)** y al apretar ENTER (INTRO) nos dará el resultado.

VA(1;n;i)	Si: c= 1251,78; n=16 i=0,035 pagos vencidos. Hallar el valor actual	 $ -15.139,17
		=VA(tasa en tanto por uno; cant.cuotas; cuota;0) =VA(i;n;c)) o : período vencido

- **Deducción de la fórmula principal si las Cuotas son adelantadas**

Si las cuotas son adelantadas el gráfico de la renta queda así expuesto:



En forma general se tiene:

$$VA(1;n;i) = c\,[\,1+(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-(n-2)} + (1+i)^{-(n-1)}\,]$$

Entre corchetes se observa la suma de n términos de una sucesión geométrica de razón $v=(1+i)^{-1}$, y primer término 1. Recordemos que la suma de una sucesión de términos en progresión geométrica se resuelve mediante la siguiente fórmula:

$S = a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$; siendo n=cantidad de términos; a_1= 1° término y q= razón

Resolviendo queda:

$$VA(0;n;i) = c \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}}$$ Sabemos que $v^n = (1+i)^{-n}$

$VA(0;n;i) = c.\dfrac{1-v^n}{1-v}$ si 1-v= d; $d=\dfrac{i}{1+i}$ y $v=(1+i)^{-1}=\dfrac{1}{1+i}$

Entonces $\dfrac{1}{1-v}=\dfrac{1}{d}=\dfrac{1}{\frac{i}{1+i}}=\dfrac{1+i}{i}$

$$VA(0;n;i)=c.(1+i)\frac{1-v^n}{i}=c.(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=c.(1+i).\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}=c.(1+i)\frac{\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n}}{i}=c.(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n.i}$$

Nos queda cualesquiera de estas tres fórmulas para utilizar en la valuación de una renta al momento 0 de términos constantes con primer pago al momento 0 de valuación.

$$\boxed{VA(0;n;i)=c.(1+i)\frac{1-v^n}{i} \quad VA(0;n;i)=c.(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad VA(0;n;i)=c.(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n.i}}$$

Entonces: VA (0;n;i) representa el Valor Actual de una serie de "n" cuotas periódicas iguales y consecutivas de cuantía "c", que incluyen un tanto de interés periódico "i" y con primer cuota al mismo momento de la valuación —momento 0—.

Es importante conocer el **"Factor de actualización de la serie uniforme"** a(0;n;i) que justamente nos define el valor actual de la serie unitaria. Es decir es el valor actual de una sucesión de "n" cuotas periódicas iguales y consecutivas de una unidad monetaria, que incluyen un tanto de interés periódico "i" y con primera cuota al momento de la valuación.

$$a(0;n;i) = \frac{1-v^n}{i}.(1+i) = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.(1+i) = \frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n.i}.(1+i)$$

Entonces:

$$\boxed{VA(0;n;i) = c \, . \, a(0;n;i).}$$
$$\boxed{VA(0;n;i) = c \, . \, a(1;n;i) \, . \, (1+i).}$$
$$\boxed{VA(0;n;i) = VA(1;n;i) \, . \, (1+i).}$$

Otra notación es: $a_{\overline{n}|i} = a\,(0;n;i) = a\,(0;n;i)$

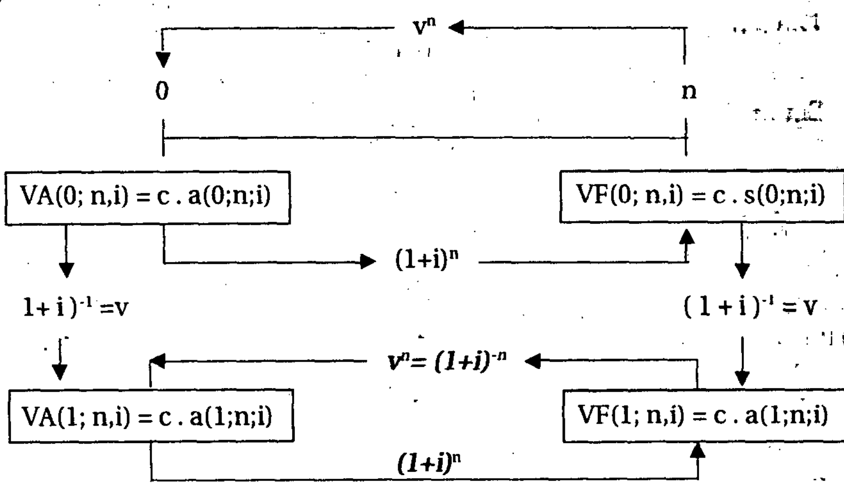
Si deseamos obtener la cuota c periódica se despeja de la fórmula de valor actual.

$$c = VA(0;n;i) \, . \, a^{-1}(0;n;i)$$

$$\boxed{a^{-1}(1;n;i) = \frac{i}{1-v^n}v = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}(1+i)^{-1} = \frac{(1+i)^n.i}{(1+i)^n-1} \cdot \frac{1}{(1+i)}}$$

$a^{-1}(1;n;i)$ Factor cuota adelantada constante que cancela un préstamo de $1.

Relaciones entre el factor de actualización y el de capitalización de la serie uniforme



Utilización de la Planilla de Cálculo

Supongamos que usted se compromete a pagar 16 mensualidades, iguales y consecutivas, con primer pago al momento de recibido el préstamo, las que incluyen un tanto de interés mensual del 3,5%. Determine el valor recibido.

Utilizando nuestra fórmula tenemos:

$$VA(1;n;i) = 1.251,78.(1+0,035)\frac{1-(1+0,035)^{-16}}{0,035}$$

$VA(1;n;i)$ = 1.251,78 . 12,5174109 =15.669,04

Utilizando Planilla de Cálculo tipo Excel podemos escribir en una celda **=VA(0,035;16;1.251,78;1)** y al apretar ENTER (INTRO) nos dará el resultado.

VA(0;n;i)	Si: c= 1251,78; n=16 i=0,035	
	pagos adelantados	
	Hallar el valor actual	$ -15.669,04
		=VA(tasa en tanto por uno; cant.cuotas; cuota;;0)
		=VA(i;n;c;;1))

Aplicaciones

1) Frente a las alternativas de financiación que a continuación se me presentan, determinar la más conveniente:

   a) Adquirir un equipo de computación hoy en $ 2.300 mediante pago con tarjeta de crédito cuyo vencimiento opera dentro de 30 días.

   b) Abonar hoy $ 500 y $ 1.700 dentro de 1 mes.

   c) Abonar hoy $ 750, dentro de 1 mes $ 1000 y dentro de 2 meses otros $1000.

   Suponer tasa de mercado constante del 4,5% mensual.

   Rta.: alternativa b).

	0	1	2
a)	—	2.300	—
b)	500	1.700	—
c)	750	1.000	1.000

a) $2300\ (1+0.045)^{-1} = 2200.96.$

b) $500 + 1700\ (1+0.045)^{-1} = 2126.79.$

c) $750 + 1000\ a(1; 2; 0.045) = 2622.67.$

2) Determinar cuánto debo recibir en concepto de una cesión de un contrato de alquiler de 4 años que especifica pagos bimestrales de $ 850 por adelantado y dicho convenio establece que el interés pactado se considera en un 5% efectivo mensual.

Rta.: 8.263,69.

$i(60) = (1+0.05)^2 - 1 = 0.1025.$

n= 24 (6 bimestres . 4)

```
0         1          2                n-1=23      n=24
/_________/__________/__________//_______/______________/
c=850    c=850      c=850      ...      c=850          -
```

$$VA(0;24;0.1025) = 850\ \frac{(1+0.1025)^{24}-1}{(1+0.1025)^{24} * 0.1025}\ (1+0.1025).$$

3) A Ud. se le presenta las siguientes alternativas para la compra de un vehículo:

a) Pago al contado $ 10.200;

b) Pago de 6 cuotas mensuales, iguales y consecutivas de $ 2000 siendo el primer pago al mes siguiente y a la entrega un anticipo equivalente a una cuota. La tasa de interés es del 7% mensual.

Rta.: Conviene la alternativa a).

```
0          1           2               n-1         n=6
/__________/___________/__________//________/___________/
A=c        c           c          ...       c           c
```

a) $V_{(0)} = 10.200.$

b) $V_{(0)} = 2000\ a(1;6;0.07) + 2000 = 11.533,08.$
$V_{(0)} = 2000\ a(0;7;0.07) = 11.533,08.$

Observemos el perfil de cuotas en el diagrama de tiempos y capitales y nos encontramos con una renta de 6 pagos vencidos y un anticipo, que es igual a 7 pagos adelantados. Es decir:

$a(0;7;i) = a(1;6;i) + 1$

$$\frac{1-v^7}{i}.(1+i) = \frac{1-v^6}{i} + 1$$

$$\frac{(1+i)-v^7(1+i)}{i}=\frac{1-v^6}{i}+1$$

$$\frac{(1+i)-v^6}{i}=\frac{1-v^6}{i}+1$$

$$\frac{1-v^6}{i}+\frac{i}{i}=\frac{1-v^6}{i}+1$$

Hay importantes relaciones entre los diferentes factores que nos permite comprender las valuaciones de las rentas.

4) Calcular la cuantía de c/u de los 7 términos mensuales, iguales y consecutivos que actualizados mensualmente a interés compuesto produce un valor actual de $ 820. El momento de valuación es el 1/05 y las cuotas comienzan el 1/06. La tasa de interés anual efectiva es del 43%.

Rta.: 131,53

$i_{(30)} = (1+0.43)^{30/365} - 1 = 0.0298343.$

$c = 820\ a^{-1}\ (1; 7; 0.0298343)=131,53$

5) El país "B" emite títulos el 20/01 del año X que serán amortizados en 20 cuotas semestrales de $ 500 cada una. La primera cuota será abonada el 20/07 del año de emisión. ¿Cuál será la cantidad que un inversor deberá ofrecer el mismo día del lanzamiento por dicho título si desea obtener un rendimiento del 120% efectivo anual?

Rta.: 1051,63

$VA(1; 20; 0.4752512) = 500\ a\ (1; 20; 0.47525122).$

$i_{(180)} = (1+1.20)^{180/365} - 1 = 0.47525122$

6) Ud. con fecha 1/03 otorga un préstamo de $ 5.000 con cancelación íntegra el 1/10 del año siguiente con intereses del 3,4% mensual. En oportunidad del cobro del crédito lo invierte de tal forma que le genera una renta de cuotas mensuales, adelantadas que incluyen un interés del 3% mensual con una duración de 2 años. ¿Cuál es el importe de la cuota que Ud. percibirá mensualmente?

Rta.: 541,03

1/3/X	1/10/(X+1)				
0	1	2		n-1	n=24
/________	/________	/________	//______	/__________	/
C_0=5.000	c	c	...	c	-
n_1=19 ⟶	C_{19}				

$c = 5000 \cdot (1 + 0.034)^{19} \cdot a^{-1}\ (0; 24; 0.03).$

1°) calculamos el monto del préstamo a cobrar

C_{19}= 5000 . (1 + 0.034) ^{19} =9.437,57

2°) tenemos el valor actual de la siguiente inversión y buscamos el importe de la cuota.

c = 9.437,57. a^{-1} (0; 24; 0.03).= 9.437,57 . 0,057327588= 541,03

La cuota resultante de $ 541.03 debe cancelar el préstamo efectuado de $9.437,57 originado por la capitalización durante 19 meses de la inversión original de $ 5.000.

7) Un trabajador inicia acción judicial por accidente laboral y obtiene una indemnización de $ 12.000. El monto del juicio logra colocarlo a una tasa efectiva anual del 15% y espera por ello obtener una renta mensual durante 20 años. Determinar el importe de la renta si:.

a. desea mantener intacto su capital.

b. compra una mensualidad que incluye intereses.

Rta.: 138.64 y 148.04.

a) Si desea mantener intacto su capital, lo que estaría haciendo es colocar en el mercado dicho Capital de $ 12.000 y percibir mensualmente los intereses. Se trata de una Operación Fiannciera Simple, es decir un solo capital invertido que devenga intereses que son percibidos mensualmente.

i_{30}= $(1+0,15)^{30/365}$-1=0,011553515

También si consideramos que cada uno de los intereses cobrados se calculan sobre el capital inicial estos flujos de fondos constituyen una renta perpetua.

a. $I_1=I_2...=I_n = C_0 . i$ =12000 . 0.0115535.=138,64

b) En este caso el valor actual de las 240 cuotas mensuales que espera cobrar considerando una TEM del 1,15535% será el capital de $ 12.000. Se trata de una Operación financiera compleja o Rentas.

c = 12000 . a^{-1} (1;240;0.0115535). = 148,04

La determinación de la tasa de interés en un valor actual

Si bien hoy en día no tenemos dificultades en determinar este componente, pues contamos con herramientas poderosas:

- utilización de planillas de cálculo tipo Excel;

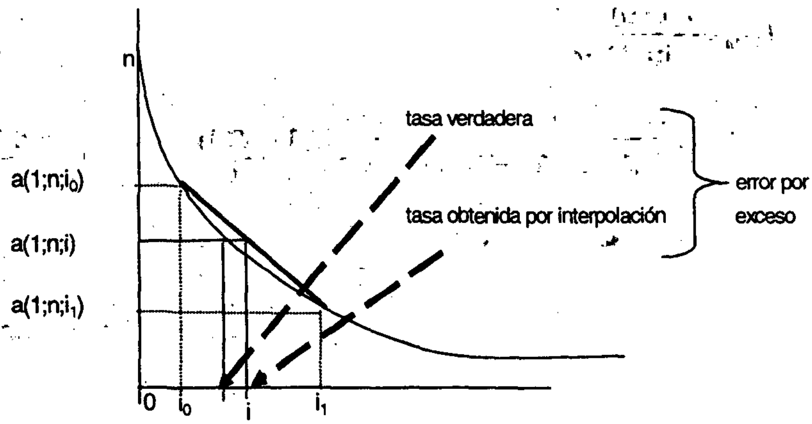
- máquinas de calcular con programas incorporados para su cálculo sea financieras o científicas.

En caso de no disponer de dichos medios podemos aplicar otros caminos alternativos que nos arrojan resultados apróximados, tales como:

- **Interpolación lineal** utilizando la fórmula correspondiente de interpolación proporcional o lineal:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}[f(x_1) - f(x_0)]$$

En el caso de Interpolación lineal en el cálculo de la tasa de interés para a(1;n;i).



$$\left\{ \begin{array}{ll} \left.\begin{array}{r} i_0 \\ i \end{array}\right\} & \left\{\begin{array}{l} a(1;n;i_0) \\ a(1;n;i) \end{array}\right. \\ i_1 & a(1;n;i_1) \end{array} \right\}$$

$(i_1 - i_0)$ —— $a(1;n;i_1) - a(1;n;i_0)$

$(i - i_0)$ —— $a(1;n;i) - a(1;n;i_0)$

Entonces:

$(i - i_0) * [a(1;n;i_1) - a(1;n;i_0)] = (i_1 - i_0) * [a(1;n;i) - a(1;n;i_0)]$

Despejamos i y nos queda:

$$i = i_0 + \frac{a(1;n;i) - a(1;n;i_0)}{a(1;n;i_1) - a(1;n;i_0)} \cdot (i_1 - i_0)$$

Ejemplo:

Un préstamo de $ 15.139,18 resulta ser reembolsado mediante 16 cuotas mensuales, iguales y consecutivas de $ 1251,78 que incluyen una tasa de interés mensual, con primer vencimiento un mes después de recibido el préstamo. Determine el tanto de interés mensual y el tanto de interés nominal anual capitalizable mensualmente.

.i	a(1;16;i)
$.i_0=0,02$	13,5770931
.i	12,09412197
$.i_1=0,06$	10,10589527

VA(1;n,i) = c . a(1;n;i)
15.139,18 = 1251,78 . a(1;16,i)
a(1;16;i) = 12,09412197

Aplico la fórmula

$$i = i_0 + \frac{a(1;n;i) - a(1;n;i_0)}{a(1;n;i_1) - a(1;n;i_0)} . (i_1 - i_0)$$

$$i = 0{,}02 + \frac{12{,}09412197 - 13{,}5770931}{10{,}10589527 - 13{,}5770931} . (0{,}06 - 0{,}02)$$

$$i = 0{,}02 + 0{,}01709 = 0{,}03709$$

En la interpolación lineal, cuanto menor sea la diferencia entre los valores de la variable "i" que interpolamos, el valor de "i" hallado se acerca al verdadero valor. Si calculamos la tasa utilizando una función financiera en Excel el verdadero valor es 3,5% (ver cálculo de la tasa más adelante utilizando Planilla de Cálculo). Por lo visto, el error que da este método de determinación de la tasa de interés es por exceso ya que arrojó un 3,7% y el verdadero valor es 3,5%

El valor de la T.N.A. capitalizable mensualmente partiendo del resultado que arroja este método de cálculo será:

$$T.N.A._{\left(\frac{365}{30}\right)} = \frac{0{,}03709.365}{30} = 0{,}4513$$

- *Fórmula de Baily*

Parte del desarrollo en serie de la función a(1;n;i) en serie de potencias de i:

$$VA(1;n;i) = c.a(1;n;i) = c.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\frac{VA(1;n;i)}{c} = \frac{\left\{1 - \left[1 - n.i - \frac{n.(-n-1)}{2!} i^2 - \frac{n.(-n-1)(-n-2)}{3!} i^3 - ...\right]\right\}}{i}$$

$$\frac{VA(1;n;i)}{c}=\frac{\left\{1-\left[1-n.i+\frac{n.(n+1)}{2!}i^2-\frac{n.(n+1)(n+2)}{3!}i^3+\ldots\right]\right\}}{i}$$

$$\frac{VA(1;n;i)}{c}=n-\frac{n.(n+1)}{2}i+\frac{n.(n+1)(n+2)}{3.2}i^2-\ldots$$

Dividimos por n ambos miembros y elevamos cada miembro en esta igualdad a la potencia $-\frac{2}{n+1}$

que es la recíproca del coeficiente del segundo término del segundo miembro y podrá ser simplificada en pasos posteriores cuando lo transformemos nuevamente en binomio.

$$\left[\frac{VA(1;n;i)}{c.n}\right]^{-\frac{2}{n+1}}=\left[\frac{n}{n}-\frac{n.(n+1)}{2.n}i+\frac{n.(n+1)(n+2)}{6.n}i^2-\ldots\right]^{-\frac{2}{n+1}}$$

$$\left[\frac{VA(1;n;i)}{c.n}\right]^{-\frac{2}{n+1}}=\left[1-\frac{(n+1)}{2}i+\frac{(n+1)(n+2)}{6}i^2-\ldots\right]^{-\frac{2}{n+1}}$$

Ahora vamos a trabajar con el segundo miembro volviendo a aplicar el desarrollo en serie y llamamos a todo lo contenido en el corchete x, entonces:

$$(1+x)^{-\frac{2}{n+1}}=\left[1-\frac{(n+1).i}{2}+\frac{(n+1).(n+2)}{6}.i^2\right]^{-\frac{2}{n+1}} \qquad x=\left[-\frac{(n+1).i}{2}+\frac{(n+1).(n+2)}{6}.i^2\right]$$

$$(1+x)^{-\frac{2}{n+1}}=\left[1-\frac{2}{(n+1)}x-\frac{2}{(n+1)}\left(-\frac{2}{n+1}-1\right)\frac{x^2}{2!}\right]$$

$$(1+x)^{-\frac{2}{n+1}}=\left[1-\frac{2}{(n+1)}x-\frac{2}{(n+1)}\left(\frac{-2-n-1}{n+1}\right)\frac{x^2}{2!}\right]=\left[1-\frac{2}{(n+1)}x-\frac{2}{(n+1)}\left(\frac{-3-n}{n+1}\right)\frac{x^2}{2!}\right]$$

$$(1+x)^{-\frac{2}{n+1}}=\left[1-\frac{2}{(n+1)}x+\frac{2}{(n+1)}\frac{(n+3)}{(n+1)}\frac{x^2}{2!}\right]=\left[1-\frac{2}{(n+1)}x+\frac{(n+3)}{(n+1)^2}x^2\right]$$

$$(1+x)^{-\frac{2}{n+1}}=\left[1-\frac{2}{(n+1)}x+\frac{(n+3)}{(n+1)^2}x^2\right] \qquad y\ si\ x=\left[-\frac{(n+1).i}{2}+\frac{(n+1).(n+2)}{6}.i^2\right]$$

Reemplazamos y nos queda:

$$\left[\frac{VA(1;n;i)}{c.n}\right]^{-\frac{2}{n+1}}=\left[1-\frac{2}{(n+1)}\left[-\frac{(n+1).i}{2}+\frac{(n+1).(n+2)}{6}.i^2\right]+\frac{(n+3)}{(n+1)^2}\left[\frac{(n+1)^2.i^2}{2^2}+\ldots\right]\right]$$

$$\left[\frac{VA(1;n;i)}{c.n}\right]^{-\frac{2}{n+1}}=\left[1+i-\frac{(n+2)}{3}.i^2+\frac{(n+3)}{4}i^2\right]$$

$$\boxed{\left[\frac{VA(1;n;i)}{c.n}\right]^{\frac{2}{n+1}}-1=h}$$ vemos que h es igual a:

$$h=i-\frac{(n+2)}{3}.i^2+\frac{(n+3)}{4}i^2=i+i^2\frac{-4(n+2)+3.(n+3)}{4.3}=i+i^2\frac{-4n-8+3n+9)}{12}=i+i^2\frac{(-n+1)}{12}$$

es decir h = $i+i^2\frac{(-n+1)}{12}$ habiendo utilizando potencias inferiores a 3

$$h=i\left[1+i\frac{(-n+1)}{12}\right]=i.\frac{12+i(-n+1)}{12}$$ y despejamos i quedando:

$$i=\frac{12.h}{12+h(-n+1)}=\frac{12h}{12+\frac{12h(-n+1)}{12+h(-n+1)}}=\frac{12h}{\frac{12[12+h(-n+1)+h(-n+1)]}{12+h(-n+1)}}$$

Observemos que estuvimos sustituyendo en i el valor de h, para llegar así otra vez a sustituir y obtener un valor más aproximado.

$$\boxed{i=h\frac{12-h(n-1)}{12-2h(n-1)}}$$

El valor encontrado es bastante aproximado para valores de n no tan grandes (en general menores a 50) y produce error por exceso.

Considerando el mismo ejemplo del préstamo de \$ 15.139,18 que resulta ser reembolsado mediante 16 cuotas mensuales, iguales y consecutivas de \$ 1251,78 que incluyen una tasa de interés mensual, determine el tanto de interés mensual y el tanto de interés nominal anual capitalizable mensualmente.

$$h=\left[\frac{15.139,18}{1.251,78.16}\right]^{\frac{2}{16+1}}-1=0,035602773$$

$$i=0,035602773\frac{12-0,035602773(16-1)}{12-2.0,035602773(16-1)}=0,0373$$

Iteración o aproximaciones sucesivas

Se buscan los valores extremos que la tasa de interés podría tomar. Para ello, partimos de:

c= VA(1;n;i) . a^{-1} (1;n;i)

$$c=VA(1;n;i).\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$i = \frac{c}{VA(1;n;i)} \cdot \underbrace{\left[1-(1+i)^{-n}\right]}_{\left[1-(1+i)^{-n}\right] < 1} \qquad (1)$$

Si analizamos el segundo factor del segundo miembro $\left[1-(1+i)^{-n}\right]$ vemos que:

- es el Descuento a Interés compuesto y en la Unidad de "Regímenes de Actualización" habíamos visto que:
- $\left[1-(1+i)^{-n}\right] < 1$ pues 1= es el capital futuro.
- Si comparamos las leyes financieras que son conjugadas de las resultantes en el régimen de interés simple y del compuesto, tenemos que el valor actual a interés compuesto es menor al valor actual a interés simple cuando n>1, por ende los descuentos son mayores , es decir:

cuando n>1 $\left[1-(1+i)^{-n}\right] > \left[1-(1+i.n)^{-1}\right]$

Aplicamos en (1) y nos queda:

$$\boxed{i < \frac{c}{VA(1;n;i)}}$$

Acá logramos un límite de i.

- Nos falta conseguir el otro límite y resulta que para poder simplificar podríamos reemplazar en (1) el factor de actualización a interés compuesto $(1+i)^{-n}$ por el de interés simple $(1+i.n)^{-1}$ —modalidad descuento racional—.

O sea: $i = \dfrac{c}{VA\,(1;n;i)} \cdot [1 - (1 + in)^{-1}]$

y por ser mayor el descúento a interés compuesto que el de interés simple entonces:

$$i > \frac{c}{VA\,(1;n;i)} \cdot \left[1 - \frac{1}{1 + in)}\right]$$

$$i > \frac{c}{VA\,(1;n;i)} \cdot \left[\frac{1 + i.n - 1}{(1 + in)}\right]$$

$$i > \frac{c}{VA\,(1;n;i)} \cdot \left[\frac{i.n}{(1 + in)}\right]$$

$$\left[\frac{(1+i.n)}{i.n}\right] i > \frac{c}{VA(1;n;i)}$$

$$\frac{1}{n}+i > \frac{c}{VA(1;n;i)}$$

$$i > \frac{c}{VA(1;n;i)} - \frac{1}{n}$$ Acá hemos logrado el otro límite. Entonces:

$$\boxed{\frac{c}{VA(1;n;i)} - \frac{1}{n} < i < \frac{c}{VA(1;n;i)}}$$

Considerando el mismo ejemplo del préstamo de \$ 15.139,18 reembolsado en 16 mensualidades constantes y sucesivas de \$ 1251,78. Para hallar el tanto de interés mensual:

$$\frac{1.251,78}{15.139,18} - \frac{1}{16} < i < \frac{1.251,78}{15.139,18}$$

$$0,020185 \quad < i < \quad 0,082685$$

Acá recién inicia el método de aproximaciones.

El valor del tanto de interés "i" se ubica entre estos valores. Podemos tomar la media aritmética de los extremos o cotas pero recordemos que es un simple promedio aritmético.

$$i .\ \frac{0,020185 + 0,082685}{2} = 0,051435$$

Entonces probamos y buscamos a(1;16;0,025) pues sabemos que i>0,020185 y como otro valor podemos tomar el de la media (1;16;0,051).

Vemos que la tasa i que buscamos está entre esos valores así que nos hemos aproximado bastante. Probamos con a(1;16;0,038) pues tomé otra media aritmética de las tasas del 2,5% y 5,1% y nos da 11,82611105; eso me indica que debo seguir.

Podemos probar con el promedio entre el 2,5% y el 3,8% que es el 3,15%. Calculamos el factor a(1;16;0,0315) y arroja un valor de 12,418262. Así podría seguir y llegaríamos al valor de i. Este método es el de tanteo o iterativo y lleva tiempo acercarse al valor aproximado a la tasa i.

	.i	a(1;16;i)=12,09412197
	0,025	13,05500266
	.i	12,09412197
→	0,0315	12,418262
	0,038	11,82611105
	0,051	10,76103991

En este método del tanteo o de las aproximaciones sucesivas, en donde más veces sigamos este procedimiento más nos estamos acercando al valor de i.

Máquinas financieras o Programas de Cálculo

En general (pero no todas están diseñadas de esta forma) en las máquinas financieras las funciones son:

PMT = cuota periódica
PV = Valor Actual
n = cantidad de términos o cuotas periódicas
i = tasa de interés periódica

Para el ejemplo, en algunas máquinas las operaciones serían las siguientes:

$PV = 15.139,18$
$PMT = 1.251,78$
$n = 16$

Se ingresa en la máquina			Se ve en la Pantalla
15.139,18	-	PV	-15.139,18
1251,78	PMT		1.251,78
16	n		16
i			running 3,5

Es decir: el valor que da es el 3,5% periódico, pues el valor de la tasa hallada la expone en tanto por ciento.

Con programa de cálculo tipo Excel resolvemos el problema.

	Si: c= 1251,78; n=16 VA=15,139,17	
i	pagos vencidos	
	Hallar la i	3,5%
Formato numérico para ingresar en Planilla		
=TASA(16;1251,78;-15139,17)		=TASA(cant. Cuotas;cuota;valor actual)

Es importante resaltar que, o bien escribimos el formato especificado en una celda cualquiera de la planilla de cálculo, o bien por el menú "Insertar" y luego "f_x función" ingresamos en una pantalla que nos abre el abanico de funciones, allí elegimos "financieras" y dentro de funciones financieras buscamos "TASA". Haciendo click en tasa se abre una hoja para completar e integramos los siguientes datos para este ejercicio:

Número de períodos: 16
Pago: 1.251,78
Valor Actual: -15.139,17

Aceptamos e inmediatamente nos arroja el valor de la tasa de interés periódica que está incluida en los 16 pagos vencidos de 1.251,78 cuyo valor actual es 15.139,17. Es importante considerar los signos de los flujos de caja, es decir si los pagos son positivos el valor actual será negativo, o viceversa para transformarlos en ecuación de grado n cuya incógnita es la tasa.

Actualmente, con la posibilidad que nos da el manejo de computadoras, no hay duda de que la búsqueda de la tasa queda superada con éxito mediante la utilización de un software tipo Planilla, o bien el manejo de máquinas de bolsillo que den respuesta a este problema. Aquí la solución es impecable; no admite errores y tiene una única solución tratándose de flujos financieros que presentan un solo cambio de signo.

De todas formas es conveniente conocer algún otro método que lo sustituya en caso de necesidad por no disponer de dicha herramienta, asumiendo que el valor hallado es aproximado.

Aplicaciones

1) Con fecha 20.04.92 se lanzó por "baja temporada" una promoción de viaje por U$s 609 a la ciudad de Salvador-Bahía. Ante la alternativa de efectuar el pago mediante tarjeta de crédito en cuotas, la agencia de viaje le informa que existe un recargo en el precio del 10%. Las posibilidades de financiación son en 3, 6 y 12 cuotas mensuales, las que resultan de fraccionar ese monto en la cantidad de mensualidades.

   Determinar: a) El costo de financiación mensual y la correspondiente tasa efectiva anual considerando las tres posibilidades.

   Rta.: a) i(30) = 0.049 b) i(30) = 0.028. c) i(30) = 0.015.
   a) T.E.A.= 0,7941 b)T.E.A.= 0,3982 c)T.E.A.= 0,7983.

$$\left(\frac{VA(1;n;i)}{c.n}\right)^{-\frac{2}{n+1}} - 1 = h \qquad i = h.\frac{12 - h.(n-1)}{12 - 2.h.(n-1)}$$

Si: $\frac{609 * 1{,}10}{3} * a(1;3;i) = 609 \qquad 223{,}30 * a(1;3;i) = 609$

$\frac{609 * 1{,}10}{6} * a(1;6;i) = 609 \qquad 111{,}65 * a(1;6;i) = 609$

$\frac{609 * 1{,}10}{12} * a(1;12;i) = 609 \qquad 55{,}825 * a(1;12;i) = 609$

Utilizando Baily como uno los métodos para determinar la tasa de interés y sabiendo que los valores son aproximados, queda planteado así:

a) $h = \frac{(609 / 223.3)^{-2/4} - 1}{3} = 0.0488088$

$i = 0.0488088 * \frac{12 - 2 * 0.0488088}{12 - 2 * 2 * 0.0488088} = 0.049214$

b) $h = \frac{(609 / 111.65)^{-2/7} - 1}{6} = 0.0276056$

$i = 0.0276056 \; \frac{12 - 5 * 0.0276056}{12 - 2 * 5 * 0.0276056} = 0.0279306$

c) $h = \frac{(609 / 55.825)^{-2/13} - 1}{12} = 0.0147711$

$i = 0.0147711 \; \frac{12 - 11 * 0.0147711}{12 - 2 * 11 * 0.0147711} = 0.0149766$

Como las cuotas son mensuales, la tasa de interés encontrada también es mensual. Ahora hallamos la T.E.A.:

T.E.A.= $(1+0{,}049214)^{365/30}-1 = 0{,}7941$
T.E.A.= $(1+0{,}0279306)^{365/30}-1 = 0{,}3982$
T.E.A.= $(1+0{,}0149766)^{365/30}-1 = 0{,}7983$

2) Una persona contrata un préstamo de $ 10.000 el 30.09. La tasa de interés pactada es del 115% nominal anual para el plazo de 30 días. El préstamo será devuelto en 5 cuotas, cuyo primer vencimiento opera al mes siguiente. Existen además dos amortizaciones extraordinarias de $ 1.000 cada una que serán abonadas conjuntamente con las cuotas Nº 2 y Nº 4.

La segunda y tercera cuotas serán superiores a la primera en un 10% y la cuarta y quinta $ 500 superiores a la tercera.

Se pide: a) Calcular el importe de la cuota Nº 1. b) Efectuar el cuadro de marcha.

Rta.: 1885.60

0	1	2	3	4	5
	c_1	$[c_1.(1+0{,}10)]$	$c_1.(1+0{,}10)$	$[c_1.(1+0{,}10)+500]$	$[c_1.(1+0{,}10)+500]$
		1.000		1.000	

$$10000 = \frac{c}{(1+i)} + \frac{c(1+0{,}1)+1000}{(1+i)^2} + \frac{c(1+0{,}1)}{(1+i)^3} + \frac{c(1+0{,}1)+500+1000}{(1+i)^4} + \frac{c(1+0{,}1)+500}{(1+i)^5}$$

Aplicamos propiedad disociativa y conmutativa en cada uno de los términos para facilitar la valuación y formar rentas de igual cuantía.

$$10000=\frac{c}{(1+i)}+\frac{c}{(1+i)^2}+\frac{c.0,1}{(1+i)^2}+\frac{1000}{(1+i)^2}+\frac{c}{(1+i)^3}+\frac{c.0,1}{(1+i)^3}+\frac{c}{(1+i)^4}+\frac{c.0,1}{(1+i)^4}+\frac{500}{(1+i)^4}+\frac{1000}{(1+i)^4}+\frac{c}{(1+i)^5}+\frac{c.0,1}{(1+i)^5}+\frac{500}{(1+i)^5}$$

$$10000=\frac{c}{(1+i)}+\frac{c}{(1+i)^2}+\frac{c}{(1+i)^3}+\frac{c}{(1+i)^4}+\frac{c}{(1+i)^5}+\frac{c.0,1}{(1+i)^2}+\frac{c.0,1}{(1+i)^3}+\frac{c.0,1}{(1+i)^4}+\frac{c.0,1}{(1+i)^5}+\frac{500}{(1+i)^4}+\frac{500}{(1+i)^5}+\frac{1000}{(1+i)^2}+\frac{1000}{(1+i)^4}$$

a) Despejamos c, habiendo previamente asociado por tramos:

$10000 = c\, a(1;5;i) + 0.1\, c\, a(1;4;i)\, v + 500\, a(1;2;i)\, v^3 + 1000\, (v^2 + v^4)$.
siendo $i_{30} = 0.0945205$.
c= 1885,60

b) Cuadro de marcha

k	V(k)	I(k)	t(k)	c(k)	T(k)
0	10.000	0	0	0	0
1	10.000	945,2	940,4	1.885,6	940,4
2	9.059,6	856,3	1.217,8	2.074,1	2.158,2
2	7.841,8	0	1.000	1.000	3.158,2
3	6.841,8	646,7	1.427,4	2.074,1	4.585,6
4	5.414,4	511,8	2.062,3	2.574,1	6.647,9
4	3.352,1	0	1.000	1.000	7.647,9
5	2.352,1	222,3	2.352,1	2.574,4	10.000
		3.182,3	10.000	13.182,3	

3) El 10.03 se recibió un préstamo de $ 20.000 a devolver mediante 18 cuotas mensuales, iguales y consecutivas que incluyen un interés del 2% mensual. Después de abonada la quinta cuota, se decide refinanciar la deuda, cambiando las condiciones contractuales, por lo que se adicionan 3 cuotas a las originales y se cambia la tasa de interés.

Si la nueva cuota resultante es de $ 1251.78, determinar la T.E.M. y la T.N.A. para el plazo de 30 días aplicada para la refinanciación.

Rta.: T.E.M.= 0,035 y T.N.A.=0,4259.

0 1 2 ... 5 n-1 n=18 19 20 21
/_____/_____/_____//_____/_____//__/_____/_____/_____/_____/
V_0=20.000 c_1 = c_2 =... c_5 = c_{17}= c_{18} Contrato original

C= 20.000 . $a^{-1}(1;18;0,02)$
C= 1.334,04

C_6 ... C_{17} C_{18} C_{19} C_{20} C_{21} Contrato modificado

Determinación del saldo pendiente de pago que se cancelará con
$c_6 = c_7 = ...c_{21}$ = **1251,78**
cantidad de cuotas restantes= **16** (18 originales-5 ya pagadas+ 3 adicionales)

V_0=20.000 $(1+0,02)^5$ = 22.081,62
- VF(1;5;0,02) = 1.334.04 .s(1;5;0,02)
VF(1;5;0,02) = <u>6.942,44</u>
15.139,18 → Saldo pendiente de pago luego de abonada la c_5

Otra forma es:

$$V_5 = 20000 * a^{-1}(1;18;0.02) * a(1;13;0.02)$$

$$\underline{V_5} = \underline{15139.18}$$

Si: c= 1251.78; V= 15139.18 n=16.

Utilizando Baily, se busca el valor de i periódico (mensual):

$$h = \left[\frac{15139.18 / 1251.78}{16} \right]^{-2/17} - 1.$$

$$h = 0.0334738.$$

$$i = 0.0334738 \frac{12 - 0.0334738 * 15}{12 - 0.0334738 * 15 * 2}$$

$$\underline{i = 0.035002374}$$

$$j_{(365/30)} = \frac{i_{(30)} . 365}{30} = 0.4259$$

Podemos comprobar los resultados si calculamos el valor actual de todos los pagos que cancelan el préstamo de $ 20.000, es decir:

V_0 = 1.334,04 . a(1;5;0.02) + 1.251,78 . a(1;16;0.035). $(1+0,02)^{-5}$

V_0 = 1.334,04 . 4,713459508 + 1.251,78 . 12,09411681 . 0,905930809

V_0 = 6.288 + 15.139,2 . 0,905930809

V_0 = 6.288 + 13.712

V_0= 20.000

4) Con fecha 20.03 se concedió un préstamo de $ 26.000 a devolver en 15 cuotas mensuales, iguales y consecutivas. Determinar el tanto de interés aplicado si la cuota es de $ 2765,17 y el primer vencimiento opera el 20.04.

Asimismo, si luego de abonada la cuota del 20.03 del año siguiente se modifican las condiciones del contrato, extendiendo en 6 cuotas adicionales el plazo de la operación con una nueva cuota resultante de $1100,27. ¿Cuál fue la T.E.M. aplicada?

Rta.: 0.065.

a)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & 12 & & n-1 & n=15 & \\ /\_\_\_ & /\_\_\_ & /\_\_\_ & //\_\_\_ & /\_\_\_ & //\_\_ & /\_\_\_ & / & \\ V_0=26.000 & c_1 = & c_2 = & \dots & c_{12} & = & c_{14} = & c_{15} & \text{Contrato original} \end{array}$$

$$2765{,}17 = 26.000 \,.\, a^{-1}(1;15;i)$$

Por algún método hay que calcular la tasa de interés, aquí aplicamos Baily.

$$h = \left[\frac{26000/\,2765.17}{15} \right]^{-2/16} - 1 = 0.06011 \qquad i = h \; \frac{12 - h * 14}{12 - 2*14*h} = 0.065$$

La tasa de interés mensual que devenga el préstamo de $ 26.000 a devolver mediante 15 mensualidades constantes con primer pago al mes siguiente es del 6,5%.

b)

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & 12 & & n-1 & n'=21\ (15+6) \\ /\_\_\_ & /\_\_\_ & /\_\_\_ & //\_\_\_ & /\_\_\_ & //\_\_ & /\_\_\_ & / \\ V_0=26.000 & c_1 = & c_2 = & \dots & c_{12} & & & \end{array}$$

$V_0 = 26.000\ (1+0{,}065^{12} =$ 55.356,50

$- VF(1;12;0{,}065) = 2765{,}17\ .s(1;12;0{,}065)$

$VF(1;5;0{,}02) =$ 48.032,97

7.323,53 → Saldo pendiente de pago luego de abonada la c_{12}

$V_{(12)} = 7323{,}53$

$C' = 1.100{,}27$

$$7323.53 = 1.100{,}27\ a\,(1;9;i).$$

Ahora debemos buscar la tasa i que mantenga la equivalencia financiera.

$$h = \left[\frac{7323.53}{1100{,}27 * 9} \right]^{-2/10} - 1 = 0.062195 \qquad i = h \; \frac{12 - h*8}{12 - 2*8*h} = 0.065.$$

En conclusión la tasa de interés ha sido la misma y a continuación lo comprobaremos:

$$V_0 = 2765{,}17\ .\ a(1;12;0.065) + 1.100{,}27\ .\ a(1;9;0{,}065).\,(1+0{,}065)^{-12}$$

$$V_0 = 22.560{,}27 + 3.439{,}73 = 26.000$$

ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN FINANCIERA DE UNA SERIE DE CUOTAS UNIFORMES: A(1;N;I) Y S(1,N;I) VALUADAS EN:

momento 0 — **momento n**

Considerando constante la tasa de interés y variable "n" con la salvedad de que en el mundo concreto los factores son discreto respecto de n —el n representa el número de cuotas—.

F(n)=a(1;n;i)

$$\boxed{F(n)=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

$$f'(n)=\frac{-(1+i)^{-n}.\log(1+i).(-1)}{i}$$

$$f'(n)=\frac{(1+i)^{-n}.\log(1+i).}{i})0$$ ➔ Función creciente

Para n≥0 e i > 0

$$f''(n)=\frac{(1+i)^{-n}.\log(1+i).(-1)\log(1+i)}{i}$$

$$f''(n)=\frac{-(1+i)^{-n}.[\log(1+i)]^2}{i}<0$$ ➔ Función convexa

Para n≥0 e i > 0

La función vemos que es asintótica pues la asíntota es la paralela al eje de la variable temporal por el punto (0;1/i).

F(n)=s(1;n;i)

$$\boxed{F(n)=\frac{(1+i)^n-1}{i}}$$

$$f'(n)=\frac{(1+i)^n.\log(1+i)}{i}>0$$ ➔ Función creciente

Para n>0 e i ≥ 0

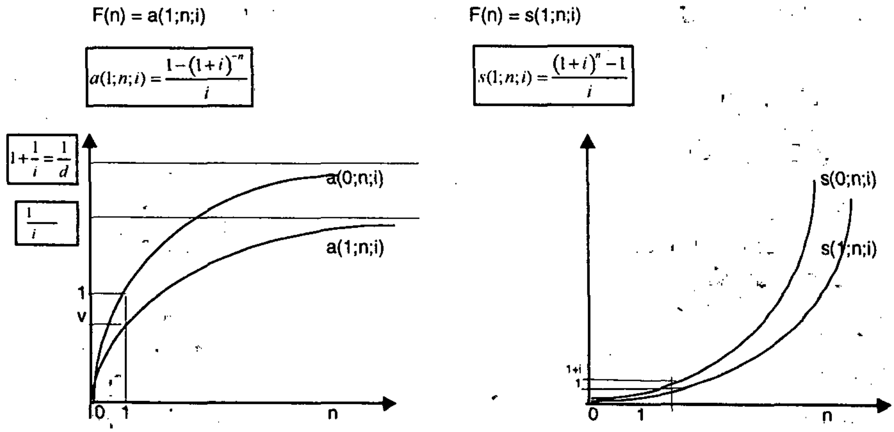
$$f''(n)=\frac{(1+i)^n.[\log(1+i)]^2}{i}>0$$ ➔ Función cóncava

Para n>0 e i ≥ 0

Valores que toma la función para n = 0;1 e ∞

n	$F(n)=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	$F(n)=\frac{1-(1+i)^{-n}}{d}$
0	0	0
1	$\frac{1-(1+i)^{-1}}{i}=\frac{1-v}{i}$ $\frac{d}{i}=\frac{v.i}{i}=v$	$\frac{1-(1+i)^{-1}}{d}=\frac{1-v}{d}$ $\frac{d}{d}=1$
...	...	...
∞	$\frac{1-(1+i)^{-\infty}}{i}=\frac{1-v^{\infty}}{i}$ $\frac{1-0}{i}=\frac{1}{i}$	$\frac{1-(1+i)^{-\infty}}{d}=\frac{1-v^{\infty}}{d}$ $\frac{1-0}{d}=\frac{1}{d}$

n	$F(n)=\frac{(1+i)^n-1}{i}$	$F(n)=\frac{(1+i)^n-1}{d}$
0	0	0
1	$\frac{(1+i)-1}{i}=1$	$\frac{(1+i)-1}{d}$ $\frac{i}{d}=\frac{i}{v.i}=\frac{1}{v}=v^{-1}=(1+i)$
...		
∞	∞	∞



Relación entre el factor cuota de un valor actual y de un valor final

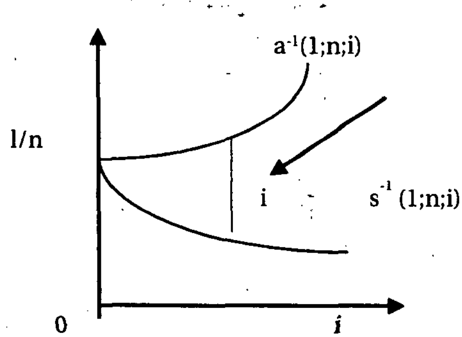
- **$a^{-1}(1;n;i) - s^{-1}(1;n;i) = i$**

$$a^{-1}(1;n;i)-s^{-1}(1;n;i)=\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}-\frac{i}{(1+i)^{n}-1}$$

Debemos trabajar el 1° denominador y nos queda:

$$\frac{i(1+i)^{n}}{(1+i)^{n}-1}-\frac{i}{(1+i)^{n}-1}=\frac{i\left[(1+i)^{n}-1\right]}{(1+i)^{n}-1}=i$$

Si lo graficamos:



Para determinados valores de i tenemos:

i	$a^{-1}(1;n;i)$	$s^{-1}(1;n;i)$
0	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$
∞	∞	0

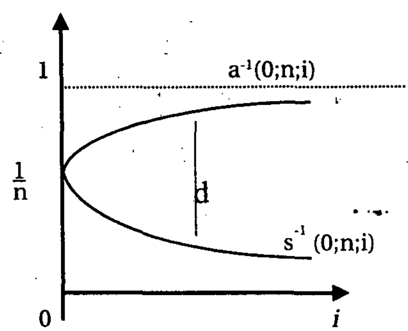
- **$a^{-1}(0;n;i) - s^{-1}(0;n;i) = i$**

$$a^{-1}(0;n;i) - s^{-1}(0;n;i) = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}v - \frac{i}{(1+i)^n - 1}v$$

Debemos trabajar el 1° denominador y sabiendo que v.i=d, nos queda:

$$a^{-1}(0;n;i) - s^{-1}(0;n;i) = \frac{d(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - \frac{d}{(1+i)^n - 1} = \frac{d\left[(1+i)^n - 1\right]}{(1+i)^n - 1} = d$$

Si lo graficamos:



Para determinados valores de i tenemos:

i	$a^{-1}(0;n;i)$	$s^{-1}(0;n;i)$
0	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$
∞	1	0

Otras relaciones

- **a(1;n;i) – a(1;n-1;i) = vⁿ**

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}-\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}=\frac{1-(1+i)^{-n}-1+(1+i)^{-(n-1)}}{i}=\frac{(1+i)^{-n}[(1+i)-1]}{i}=(1+i)^{-n}=v^n$$

- **s(1;n;i) – s(0;n-1;i) = 1**

$$\frac{(1+i)^n-1}{i}-\frac{(1+i)^{n-1}-1}{i}.(1+i)=\frac{(1+i)^n-1-(1+i)^n+(1+i)}{i}=\frac{(1+i)^n-(1+i)^n+i}{i}=1$$

- **s(0;n;i) – s(0;n-1;i) = (1+i)ⁿ**

$$\frac{(1+i)^n-1}{d}-\frac{(1+i)^{n-1}-1}{d}=\frac{(1+i)^n-1-(1+i)^{n-1}+1}{d}=\frac{(1+i)^n[1-(1+i)^{-1}]}{d}=(1+i)^n\frac{1-v}{d}=(1+i)^n\frac{d}{d}=(1+i)^n$$

- **a(1;n;i) – a(0;n-1;i) = v**

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}-\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}(1+i)^{-1}=\frac{1-(1+i)^{-n}-(1+i)^{-1}+(1+i)^{-n}}{i}=\frac{1-(1+i)^{-1}}{i}=\frac{d}{i}=\frac{v.i}{i}=v=(1+i)^{-1}$$

- **a(1;n+p;i) – a(1;n;i) = vⁿ . a(1;p;i)**

$$\frac{1-(1+i)^{-(n+p)}}{i}-\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=\frac{1-(1+i)^{-(n+p)}-1+(1+i)^{-n}}{i}=\frac{(1+i)^{-n}[1-(1+i)^{-p}]}{i}=(1+i)^{-n}.a(1;p;i)=v^n.a(1;p;i)$$

- **s(1;n+p;i) – s(1;n;i) = (1+i)ⁿ . s(1;p;i)**

$$\frac{(1+i)^{n+p}-1}{i}-\frac{(1+i)^n-1}{i}=\frac{(1+i)^{(n+p)}-1+(1+i)^n+1}{i}=\frac{(1+i)^n[(1+i)^p-1]}{i}=(1+i)^n.s(1;p;i)$$

RENTAS DIFERIDAS DE TÉRMINOS CONSTANTES

Una renta es diferida cuando la primera cuota inicia después de un período. Entonces, si la Epoca de Iniciación > Epoca de Evaluación en más de 1 período esa sucesión financiera es diferida. Es lo contrario a la Renta Inmediata cuyo primer pago se genera en el momento 0.

En el caso particular que el primer pago se inicia en el período 1: podemos decir que se trata de una "Renta Inmediata de términos vencidos" como lo hemos planteado en el desarrollo de la fórmula. O también podemos decir que es una Renta Diferida cuando el período de diferimiento es igual a 1 y en un sentido estricto consideramos sólo rentas inmediatas aquellas cuya cuota se produce en el mismo momento de contratación. Así lo trabajaremos también en el Capítulo de Operaciones Actuariales. No varía la fórmula sólo su definición.

Tratamiento durante los "t" períodos de diferimiento

- Caso 1: Devengamiento de Intereses y Pago Periódico de Intereses Devengados

De esta forma durante cada período el Interés Devengado se va a ir pagando, de forma tal que se mantiene la deuda inicial. Es decir, un préstamo de $ 10.000, TEM= 0,10 a cancelar en n mensualidades consecutivas, la primera de ellas en el momento t+1

Significa que al mes siguiente de contratada la operación el Interés devengado de $ 1.000 se paga en concepto de "Cuota de Interés", y la deuda sigue siendo $ 10.000 al segundo mes el Interés Devengado también será de $ 1.000 por igual concepto. En oportunidad de comenzar con los pagos normales y ello se produce luego de t períodos de diferimiento, el valor de la cuota resulta ser el mismo importe que la de una renta inmediata, pues al pagar periódicamente los intereses devengados en los t períodos de diferimiento la deuda se mantiene constante.

Estos "Préstamos" se los denomina también "Préstamos con carencia" o en algunos Títulos Públicos de nuestro mercado argentino lanzados con la cláusula de "t años de gracia", como por ejemplo los tradicionales BONEX (Bonos Externos) ya expirados y otros que se encuentran en circulación.

Se concluye que en este caso: "la determinación de todos los componentes luego de los t períodos de diferimiento: cuota, total amortizado, saldo de deuda —que veremos en el Capítulo Préstamos— se efectuará prescindiendo de estos t períodos de diferimiento, como si fuese una renta inmediata.

En el eje de tiempo y capitales expresamos la prestación única asociada a las contraprestaciones sucesivas.

	0	1	...	t	t+1	t+2	...	t+n-1	t+n
VA(t+1;n,i)		I_1	...	I_t	c	c	...	c	c

$$VA(1;n;i) \quad = \quad c.\ a(1;n;i)$$

- *Caso 2: Devengamiento de Intereses y Pago Periódico de Intereses Devengados*

De esta forma durante cada período el Interés Devengado no se va a ir pagando, por lo tanto se irá acumulando a la deuda inicial.

Siguiendo el planteo inicial: el préstamo de \$ 10.000 se acrecienta en \$ 1.000 por los intereses devengados del 1° período y que no han sido abonados . Al 2° mes el interés es de \$ 1.100 pues la deuda de \$ 11.000 genera intereses al 10% representando la deuda acumulada al 2° período \$ 12.100 y así sucesivamente.

La cuota que cancele el préstamo de \$ 10.000 inicial será aquella cuota inmediata, pero si el préstamo fue capitalizando intereses al momento t pues se trata de un préstamo diferido el préstamo tomó un valor de: VA $(1+i)^t$ siendo este el importe que se cancelará con las n cuotas inmediatas.

En el eje de tiempos y capitales queda expresado así:

0 1 ... t t+1 t+2 ... t+n-1 t+n

/____/____//____/____/____/____//____/____/

VA(t+1;n,i)

$(1+i)^t$ → c c ... c c

$$VA(t+1;n;i) * (1+i)^t = VA(1;n;i)$$

Renta Diferida Capitalizada "t" períodos= Renta Inmediata

Otra forma:

0 1 ... t t+1 t+2 ... t+n-1 t+n

/____/____//____/____/____/____//____/____/

VA(t+1;n,i)

c c ... c c

$c \cdot v^{t+1}$ ←

$c. v^{t+2}$ ←

...

$c \cdot v^{t+n-1}$ ←

$c . v^{t+n}$ ←

VA(t+1;n;i)

$VA(t+1;n;i) = c \cdot v^{t+1} + c. v^{t+2} + \dots + c. v^{t+n-1} + c. v^{t+n}$ Si sacamos factor común v^t

$VA(t+1;n;i) = v^t \; [c \cdot v^1 + c. v^2 + \dots + c. v^{n-1} + c. v^n]$

$VA(t+1;n;i) = v^t \; VA(1;n;i)$

Renta Diferida = Renta Inmediata Actualizada t períodos-

Resulta indistinto haber calculado el valor actual de una renta inmediata que quedaría expresado en el momento t (para pagos vencidos) y luego actualizamos multiplicando esa renta inmediata por v^t.

Este caso, en que los intereses devengados se acumulan a la deuda y se cancelan distribuidos en las n cuotas, es el que veremos en la resolución de aplicaciones, salvo que se diga que se pagan los intereses devengados en los períodos de diferimiento.

También en el mercado se lanzaron bonos que capitalizan mensualmente el intereses y se acumulan, tal es el caso de un bono que acumulaba durante 6 años los intereses devengados y comenzaba su renta de pagos *a posteriori*.

Aplicaciones

1) Con fecha 6.03 se adquiere un lote por $ 5.200 que será pagado de la siguiente forma: el 25% al contado y el 75% restante mediante 12 cuotas mensuales, siendo la tasa de interés del 8,5% mensual, venciendo la primera cuota el 6.05 del mismo año. Determinar el valor de la cuota.

   Rta.: 576,13.

0	1	2	3	4	5	6	7	//		n+t=12+t
6/3	6/4	6/5	6/6	6/7	6/8	6/9	6/10	...	6/3	6/4
0,25 .5200	-	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6 ...		c_{11}	c_{12}

VA(2;12;i) = 5200 * 0,75 = 3900

$3.900 = c \, . \, a\,(0;12;\, 0{,}085) \, . \, (1+0{,}085)^{-2}$

$c=3900 \; (1+0.085)^2.a^{-1} \, (0;12;0.085)$

$$c=3900 \; (1+0.085)^2.\frac{(1+i)^n.i}{(1+i)^n-1}.(1+i)^{-1}$$

c= 576,13

También podríamos haber considerado la renta de pagos vencidos.

VA(2;12;i) = 5200 * 0,75 = 3900

$3.900 = c \, . \, a\,(1;12;\, 0{,}085) \, . \, (1+0{,}085)^{-1}$

$c=3900 \; (1+0.085).a^{-1} \, (1;12;0.085)$

$$c=3900 \; (1+0.085).\frac{(1+i)^n.i}{(1+i)^n-1}$$

c= 576,13

2) Calcular en qué fecha deberá pagar la primera cuota resultante de una refinanciación de deuda que al 20.06 ascendía a \$ 1.707,44, conviniéndose la cancelación en 8 pagos mensuales, iguales y consecutivos de \$ 381,33, siendo la tasa de interés mensual convenido del 7,25%. Por el período de diferimiento los intereses no se pagan sino que se capitalizan a la deuda.

Rta.: 20/11.

20/6
/____//____/____/____/____/____/____/____/____/
1.707,44
\- \- $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = c_7 = c_8 = 381{,}33$
$i_{30} = 0{,}0725$

$$1707{,}44 = 381{,}33 \ a(1;8,\ 0{,}0725)\ (1+0{,}0725)^{-t}$$

$$\frac{1707{,}44}{381{,}33 \ .a(1;8,\ 0{,}0725)} = (1+0{,}0725)^{-t}$$

Para despejar t necesitamos utilizar logaritmos.

$$\log 1707{,}44 - \log 381{,}33 - \log a\ (1;8,\ 0{,}0725) = -t.\log(1+0{,}0725)$$

$$t.\log(1+0{,}0725) = -\log 1707{,}44 + \log 381{,}33 + \log a\ (1;8,\ 0{,}0725)$$

$$t = \frac{-\log 1707.44 + \log 381.33 + \log a(1;8;\ 0.072)}{\log(1+0.072)}$$

$t = 4.$

Si consideramos la fórmula de valor actual de 8 cuotas vencidas, la primera de las 8 cuotas inician en el momento (t+1). Si el momento 0 de contratación es el 20/6 el inicio de los pagos se da al 5° mes, es decir: 20/11.

3) Determinar el valor presente del siguiente flujo de fondos: desde el 1.03 y durante 6 meses más, cuotas iguales y consecutivas de \$ 150. El momento de valuación es el 1.01 y la tasa contractual anual es del 58% para el plazo de 30 días.

Rta.: 835,50

0	1	2	3	4	5	6	7=n+t
1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8
-	-	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6

$$VA(2;\ 7;\ 0.0476712) = 150\ a(1;7;0.047612)\ (1+0.047612)^{-1}$$

4) El 25.3 se concede un préstamo de \$ 10.000 que será devuelto en 6 mensualidades iguales y consecutivas a partir del 25.07 del mismo año. La tasa de interés es del 10% mensual. Calcular el importe de la cuota.

Rta.: 3056,07.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9 =n+t
25/3	25/4	25/5	25/6	25/7	25/8	25/9	25/10	25/11	25/12
				c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6

- $10.000. (1+0,10)^3 = c . a(1;6;0,10)$
  $c = 10000 . (1+0.1)^3 \; a^{-1} \; (1;6;0.1)$, o bien:

- $10.000. (1+0,10)^4 = c . a(0;6;0,10)$
  $c = 10000 . (1+0.1)^4 \; a^{-1} \; (0;6;0.1)$

5) El gobierno del país emite el 15.03 un título de \$ 1.000, estipulándose que se abonará semestralmente a partir del 15.09 del próximo año una suma constante de \$ 300 en concepto de capital e interés. El título expirará a los 5 años de emitido. ¿Cuál será la cantidad que Ud. estaría dispuesto a ofrecer el día de la emisión si desea ganar una rentabilidad del 20% semestral?

Rta.: 799,41.

0	1	2	3	4	5	10
$15/3/x_0$	$15/9/x_0$	$15/3/x_1$	$15/9/x_1$	$15/3/x_2$	$15/9/x_2$	$15/3/x_5$
			c_1	c_2	c_3	c_8

$VA(3;8;0.20) = 300 \; a(1;8;0.20) \; (1+0.20)^{-2}$, o también:

$VA(3;8;0.20) = 300 \; a(0;8;0.20) \; (1+0.20)^{-3} .= 799,41$

Rentas temporarias de términos variables en progresión aritmética

Nomenclaturas:

$(vV)(1;n;i,R) = VA\,(1;n;i;r)$

$(vV)(0;n;i,R) = VA\,(0;n;i;r)$

$(vA)(1;n;i,R) = VF\,(1;n;i;r)$

$(vA)(0;n;i,R) = VF\,(0;n;i;r)$

Valor actual de una renta variable en progresión aritmética

Deducción de la formula principal:

- Cuotas vencidas

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & & n-1 & n \\
/ & / & / & / & /\,-\,/ & / & / \\
 & c & c+r & c+2r & & c+(n-2)r & c+(n-1)r
\end{array}
$$

$c \,.\, v$

$(c+r) \,.\, v^2$

$(c+2r) \,.\, v^3$

....

$[c+(n-2)r]v^{n-1}$

$[c+(n-1)r]v^n$

$\underline{\underline{VA(1;\, n,i,r)}}$

En donde:

$(1+ i)^{-1} = v$

$(1+ i)^{-2} = v^2$

....

$(1+ i)^{-n} = v^n$

$$VA(1;\, n,i,r) = c\,.\,v + (c+r)\,.\,v^2 + (c+2r)\,.\,v^3 + \ldots + [c+(n-2)r]v^{n-1} + [c+(n-1)r]v^n$$

$$VA(1;\, n,i,r) = c.[\,v + v^2 + v^3 + \ldots + v^{n-1} + v^n\,] + r\,[\,v^2 + 2\,.\,v^3 + \ldots + (n-2)v^{n-1} + (n-1)v^n\,]$$

$$VA(1;\, n,i,r) = c.a(1;n;i) + r[(\,v^2 + v^3 + \ldots + v^{n-1} + v^n\,) + (\,v^3 + \ldots + v^{n-1} + v^n\,) + (\,v^{n-1} + v^n\,) + v^n]$$

$$VA(1;\, n,i,r) = c\,.\,a(1;n;i) + r\left[\,v^2\,\frac{1-v^{n-1}}{1-v} + .\,v^3\,\frac{1-v^{n-2}}{1-v} + \ldots + v^{n-1}\,\frac{1-v^2}{1-v} + v^n\,\frac{1-v}{1-v}\right]$$

Si: $\dfrac{v}{1-v} = \dfrac{\frac{1}{1+i}}{d} = \dfrac{\frac{1}{1+i}}{\frac{i}{1+i}} = \dfrac{1}{i}$ tenemos:

$$VA(1;\, n,i,r) = c.a(1;n;i) + r.\left[v\,.\,\frac{1-v^{n-1}}{i} + v^2\,\frac{1-v^{n-2}}{i} + \ldots + v^{n-2}\,\frac{1-v^2}{i} + v^{n-1}\,\frac{1-v}{i}\right]$$

$$VA(1;\, n,i,r) = c\,.\,a(1;n;i) + \frac{r}{i}[\,v - v^n + .\,v^2 - v^n + \ldots + v^{n-2} - v^n + v^{n-1} - v^n]$$

$$VA(1;\, n,i,r) = c\,.\,a(1;n;i) + \frac{r}{i}\,[\,v + .\,v^2 + \ldots + v^{n-2} + v^{n-1} - (n-1)\,v^n\,]$$

$$VA(1;n,i,r) = c \cdot a(1;n;i) + \frac{r}{i}\left[v + v^2 + \ldots + v^{n-2} + v^{n-1} + v^n - n\,v^n\right]$$

$$\boxed{VA(1;n,i,r) = c \cdot a(1;n;i) + \frac{r}{i}\left[a(1;n;i) - n\,v^n\right]}$$

A continuación, seguiremos trabajando esta fórmula y la dejaremos expresada en función de a(1,n;i).

Si $a(1;n;i) = \frac{1-v^n}{i}$ despejamos v^n y queda: $v^n = 1 - a(1;n;i).i$

Reemplazamos en la expresión anterior.

$$VA(1;n,i,r) = c \cdot a(1;n;i) + \frac{r}{i}\{a(1;n;i) - n\,[1 - a(1;n;i) \cdot i]\}$$

$$VA(1;n,i,r) = c \cdot a(1;n;i) + \frac{r}{i} \cdot a(1;n;i) - n\frac{r}{i} + n \cdot \frac{r}{i} a(1;n;i) \cdot i$$

$$VA(1;n,i,r) = c \cdot a(1;n;i) + \frac{r}{i} \cdot a(1;n;i) - n\frac{r}{i} + n \cdot r\; a(1;n;i)$$

$$\boxed{VA(1;n,i,r) = a(1;n;i)\left[c + \frac{r}{i} + n \cdot r\right] - \frac{n\,r}{i}}$$

Podemos utilizar cualquier fórmula. Simplemente si usamos la primera vemos que se puede diferenciar:

$$VA(1;n,i,r) = c \cdot a(1;n;i) + r\,\frac{[a(1;n;i) - n\,v^n]}{i}$$

Factor de actualización de una serie constante — *Factor de actualización de una serie variable*

Se observan los dos factores bien diferenciados: el de una serie constante y el de una serie variable. También podemos utilizar el siguiente que facilita los cálculos.

> ***VA(1;n;i)** =Es el valor actual de una serie de "n" cuotas variables en progresión aritmética valuadas a una tasa de interés periódica, cuya primer cuota se produce un período después al de la valuación.*

-Cuotas adelantadas

0	1	2			n-1	n
c	c+r	c+2r			c+(n-1)r	

VA(0; n,i,r)

$$VA(0;\ n,i,r) = c + (c+r)\ .\ v + (c+2r)\ .\ v^2 + \ldots\ldots + [c+(n-1)r]v^{n-1}$$

Si trabajamos la ecuación de equivalencia financiera tal como lo hicimos en el Valor Actual de n cuotas vencidas, llegamos a la siguiente fórmula:

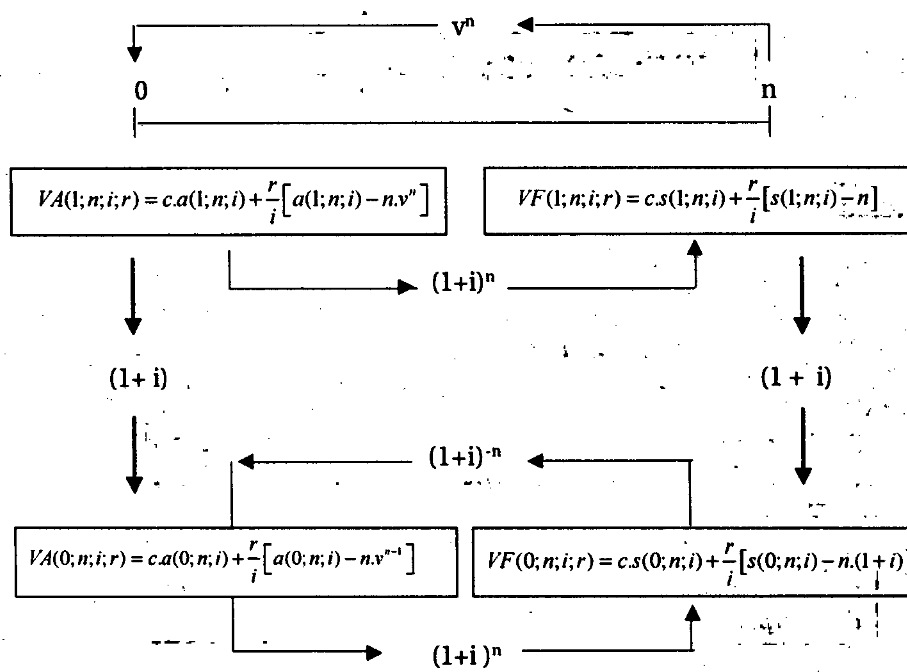
$$\boxed{VA(0;\ n,i,r) = c\ .\ a(0;n;i)\ + \frac{r}{i}\ [\ a(0;n;i)\ \ - n\ v^{n-1}]}$$

$$\boxed{VA(0;n,i,r) = \ a(0;n;i)\ \ [\ c + \frac{r}{i} + n.\ r\ ] - \frac{n\ r}{i}\ (\ 1+i)}$$

La relación entre ambos valores actuales ya la hemos visto.

Valor Final de una renta de términos variables en progresión aritmética. Valor de la renta con cuotas vencidas y adelantadas

Al igual que vimos en rentas de términos constantes si capitalizamos por el factor $(1+i)^n$ el valor actual de una renta de términos variables obtenemos el valor final de la misma.



En este esquema de la renta tomamos como valuación el momento 0 y el momento n. Asimismo, planteamos el caso de términos vencidos y adelantados.

Aplicaciones

1) Una persona desea integrar \$ 8.500 en un plan de ahorro de 10 cuotas mensuales. Si la tasa de interés mensual es del 7,8% y se sabe que cada cuota supera a la anterior en \$ 85, se pide determinar la primera y octava cuota.

Rta.: 262,02 y 857,02.

$$VF(1;10;0,078;85) = c_{(1)}\, s(1,10,0,078) + \frac{85}{0,078}\,[\,s(1,10,0,078) - 10].$$

Despejando $c_{(1)}$ queda:

$c_{(1)} = 262,02$ y $c_{(8)} = c(1) + (8-1) * 85. = 857,02$

2) Determinar el valor de un préstamo otorgado con fecha 1/01 si se sabe que se abonará en cuotas mensuales y consecutivas, siendo abonada la primera el 1/02 por la suma de \$ 285, y en donde la cuota correspondiente al 1/08 —siempre del mismo año— será de \$ 195 y la última de \$ 150. El interés mensual aplicado es del 5%. Posteriormente halle el total de las cuotas.

Rta.: 1.725,91.

Si $c_{(7)} = c_{(1)} - r\,(7 - 1)$.
en donde: $c_{(7)} = 195$.
$c_{(1)} = 285$.
$c_{(n)} = 150$
entonces: $r = (285 - 195) / 6$.
$r = 15$ (razón de decrecimiento).
Queda:.
$c_n = c(1) - r\,(n - 1)$.
$150 = 285 - 15\,(n - 1)$.
$n = 10$

Reemplazando los valores hallados en la fórmula, tenemos:

$$VA(1;10;0.05;-15) = 285\, a(1;10;0.05) - \frac{15}{0,05}\,[a(1;10;0.05) - 10.(1+0,05)^{-10}].$$

$VA(1;10;0.05;-15) = 1725,910,05$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j = \frac{(c_1 + c_n).n}{2} = \frac{(285+150)}{2} = 2.175$$

el resultado es consistente pues la suma de las cuotas siempre debe ser menor al valor actual que representa el préstamo recibido.

3) Si un depositante decide efectuar depósitos al finalizar cada mes durante 14 meses, siendo los mismos variables, el primero de \$ 120 y los

restantes mayores que el inmediato anterior en un 5% de la primera cuota. Calcular el monto reunido al finalizar el plazo, si el interés que gana cada depósito será del 4,5% mensual.

Rta.: 2.929,47.

r= 120 . 0,05= 6
n=14
c_1 =120
i= 0,045

$$VF\ (1;14;0{,}045;6) = 120\ s(1,14,0.045) + \frac{6}{0{,}045}\,[s(1,14,0{,}045) - 14] = 2929{,}47$$

4) Para obtener un préstamo mediante un sistema de ahorro previo me exigen integrar una cantidad de dinero. Suponiendo que opto por un plan de 25 cuotas mensuales, vencidas, crecientes en razón de $ 12 por mes, en el cual debo integrar al cabo de ese período la suma de $ 10.500.

¿Cuál es el valor de la primera cuota y de la novena?

Considere que la tasa de interés vigente de la operación es del 6% mensual.

Rta.: $c_{(1)}$ = 82.51.
$c_{(9)}$ = 178,51.

$$c_{(1)} = \frac{10.500}{s(1;25;0{,}06)} - \frac{12}{0{,}06}\left[\frac{s(1;25;0{,}06) - 25}{s(1;25;0{,}06)}\right]$$

$c_{(1)}$ = 82,51.

$c_{(9)}$ = 82,51 + 12 * 8. = 178,51

5) El 14.06 Ud. celebra un contrato con una persona, quien se compromete a abonarle a partir del mes siguiente y durante 18 períodos mensuales $ 180: ler. mes; y las cuotas posteriores incrementadas en $ 30 por mes. Si la tasa de rentabilidad que Ud. espera obtener como retorno de la suma que deberá prestar es del 141,06% efectivo anual; determinar el valor efectivo del crédito.

Además, determine el valor de la cuota correspondiente al 14.09 del mismo año de celebrado el contrato y el de la última, sabiendo que la primera vence el 14/07.

Rta.: 3.670,73; 240 y 690.

$$VA(1;18;0.075;30) = 180\ a(1;18;0.075) + \frac{30}{0{,}075}\,[a(1;18;0.075) - 18\, v^{18}] = 3670{,}73$$

c(3) = 180 + 30 (3-1).=240
c(18) = 180 + 30 (18-1).=690

6) Se otorga un préstamo de $ 2.000 a 6 meses de plazo, estipulándose que la primera cuota se abonará al mes siguiente de concretada la operación y el importe de las mismas serán variables, en una razón de crecimiento equivalente a $ 100 mensuales.

La tasa de interés es del 9,5% mensual.

Calcular: a) la cuota que se abonará en el momento 1; b) efectuar el cuadro de marcha.

Rta.: 228,85.

Despejamos de cualquier fórmula de valor actual, p.e.:

$$VA(1;n;i;r) = c \cdot a(1;n;i) + \frac{r}{i} \cdot \left[a(1;n;i) - n.v^n\right] \qquad \textbf{(1)} \quad \text{o también de:}$$

$$VA(1;n,i;r) = \left(c + \frac{r}{i} + n \cdot r\right) \cdot a(1;n,i) - \frac{n \cdot r}{i} \qquad \textbf{(2)}$$

Si despejamos el factor "c" de la fórmula (1):

$$c_1 = \frac{2.000}{a(1;6;0,095)} - \frac{100}{0,095} \cdot \frac{a(1;6;0,095) - 6 \cdot (1+0,095)^{-6}}{a(1;6;0,095)} = 228,85$$

Cuadro de marcha de la operación de financiación

k	V(k)	I(k)	t(k)	c(k)	T(k)
0	2.000	0	0	0	0
1	2.000	190,00	38,85	228,85	38,85
2	1.961,15	186,31	142,54	328,85	181,39
3	1.818,61	172,77	256,08	428,85	437,47
4	1.562,53	148,44	380,41	528,85	817,88
5	1182.,12	112,3	516,55	628,85	1334,.43
6	665,57	63,28	665,57	728,85	2.000,00
		873,1	2.000,0	2.873,1	

7) Calcular qué suma puede pedirse en préstamo si el mismo será reintegrado mediante 14 pagos bimestrales vencidos, el primero de $ 465 y cada uno de los restantes $ 35 menos que el anterior. La valuación se efectúa considerando una tasa del 18% bimestral vencido.

Rta.: 1623,23.

$$VA(1;14;0.18;-35) = 465\ a(1;14;0.18) - \frac{35}{0,18}.18\ [a(1,14,0.18) - 14\ .\ v^{14}].$$

Se debe verificar el límite de la renta, en caso de sucesiones con términos decrecientes, pues financieramente no se pueden aceptar aquellas cuotas que resultan nulas o negativas. El valor de la $c_n = c_{14} = 465 - 35 . 13 = 465 - 455 = 10$

8) Si deposito en una entidad financiera $ 12.000 a los fines de retirar a fin de cada mes y durante 1 año sumas que van aumentando mensualmente en un importe igual al de la primera cuota de retiro, devengando un interés mensual equivalente al 127,77% efectivo anual. Calcular el importe del primer retiro.

Rta.: 264,94.

Reemplazando en la fórmula general h por el valor de c(1) nos quedaría:

$$\text{Si} \quad VA(1,n,i,h) = c(1)\ \left[a(1,n,i) + \frac{a(1;n;i) - n\ v^n}{i}\right].$$

$$c(1) = \frac{12.000}{\left[a(1;12;0.07) + \frac{a(1;12;0.07) - 12\ .\ (1+0.07)^{-12}}{0,07}\right]}$$

9) Determinar el valor final de una serie de pagos, los que se indican a continuación:

a) Los primeros 5 pagos son en progresión aritmética cuyo primer importe es de $ 230 y cada uno de los restantes aumentan en $ 30 con respecto al anterior.

b) Luego, 7 pagos constantes de $ 400 c/u.

La valuación para los cinco primeros pagos se efectúa al 4% mensual de interés y los restantes al 5% mensual.

Rta.: 5.449,05.

I) Determinación de la imposición referida en a).

$$VF\ (1;5;0,04;30) = 230\ s(1;5;0,04) + \frac{30}{0,04}\ [s(1;5;0,04) - 5].$$

$$VF\ (1;5;0,04;30) = 1245,75 + 312,24 = 1557,99.$$

II) Determinación de la imposición del punto b).

$$VF\ (1;7;0,05) = 400\ s(1;7;0,05).$$

$$VF\ (1;7;0,05) = 3256,80.$$

III) Cálculo del valor final de la operación.

$$\begin{array}{ccc} 0 & 5 & 12 \\ / & / & / \\ & VF_{(1)} = 1557{,}99 & VF_{(2)} = 3256{,}80. \\ & \downarrow \quad 1557{,}99 \, . \, (1+0{,}05)^{7} \longrightarrow & \underline{2192{,}25} \\ & & 5449{,}05 \end{array}$$

10) Compro una maquinaria por \$ 60.000. Se pagan 12 mensualidades vencidas en progresión aritmética de modo que la última sea igual a la cantidad que disminuye cada mes. La tasa de interés aplicada es del 8,2% mensual. ¿Cuál será el importe del primer pago?

Rta.: 13.005.

Es un caso particular en dicha sucesión financiera, por ser:

$c_{(n)} = r$ (razón que debe ser decreciente).

Para determinar la razón r se resuelve la siguiente ecuación del valor:

$c(n) = c(1) + (n-1)\, r$ tomando r valor negativo; o:

$c(n) = c(1) + (n-1)\,(-r)$

si $c_{(n+1)} = 0 \rightarrow c_{(n+1)} = c_1 + n\,(-r)$, despejamos y queda que:

$$r = \frac{c_1}{n} \quad \text{o bien} \quad n = \frac{c_1}{(-r)}$$

Debemos recordar que en la sucesión financiera estas cuotas deben ser positivas $c_p > 0$, pues no pueden existir términos negativos ni nulos.

Determinación de la primera cuota

$$60.000 = c_{(1)}\, a(1;12;0{,}082) - \frac{c_{(1)}}{12} \cdot \frac{1}{0{,}082} \left[a(1;12;0{,}082) - 12 .\, (1{,}082)^{-12} \right].$$

despejo : $c_{(1)} = 13.005.$

11) Un préstamo concedido al 5% mensual de interés cuya primera cuota se abonará al mes siguiente, por la suma de \$ 500 y cada una de las restantes será menor que la anterior en \$ 50, con un total de 8 pagos. Determinar el valor del préstamo.

Rta.: 2.183,11.

$$VA(1;8;0{,}05;-50) = 500\, a(1;8;0{,}05) + \frac{(-50)}{0{,}05} \left[a(1;8;0{,}05) - 8 .\, (1{,}05)^{-8} \right] = 2.183{,}11$$

12) Una persona para obtener un préstamo mediante un plan de ahorro previo, se le exige integrar una suma de dinero. Para ello, opta por un plan de 10 meses de plazo, con cuotas mensuales, crecientes en razón de $ 20 por mes comprometiéndose a integrar la suma de $ 3.500 al cabo de ese período. La tasa de interés es del 2% mensual. ¿Cuál será el valor de la primera y séptima cuota?

Rta.: $c_{(1)} = 232{,}91$ y $c_{(7)} = 352{,}91$.

$$c_1 = \frac{3.500}{s(1;10;0{,}02)} - \frac{20}{0{,}02} \cdot \frac{s(1;10;0{,}02) - 10}{s(1;10;0{,}02)}$$

$C_{(1)} = 232{,}91$ $C_{(7)} = C_{(1)} + 20 * 6. = 352{,}91$

13) Calcular el valor final obtenido al 10/12 del año x como resultado de haberse efectuado 9 depósitos constantes de $ 180 mensuales vencidos, constituyéndose el último depósito el día 10/01 del mismo año x. Luego, cada una de las siguientes cuotas que se depositaban iban aumentando, de acuerdo al detalle adjunto, asta el 10/12 —fecha del último depósito—. Seguidamente se exponen las primeras sumas que fueron depositadas: 10.02: $ 195; 10.03: $ 210 y 10.06: $ 255... y así siguiendo esa formación.

La tasa de rendimiento para los primeros 9 depósitos representa el 19,50926%, referida a los nueve meses, y para los restantes el 2,5% mensual.

Rta.: 5.628,16

Primero debemos hallar la TEM equivalente a $i_{270} = 0{,}1950926$

$$VF = 180\, s(1;9;0{,}02)\,(1+0{,}025)^{11} + \{195\, s(1;11;0{,}025) + \frac{15}{0{,}025}[s(1;11;0{,}025) - 11]\}$$

$$VF = 2303{,}81 + 3324{,}35. = 5628{,}16$$

14) Un préstamo de $ 1.800 a cancelar en 5 meses, estableciéndose que la primera cuota se abonará al mes siguiente de concretada la operación. Cada cuota, además, será superior a la precedente en $ 35.

La tasa de interés es del 62% nominal anual para el plazo de 30 días.

a) Efectuar el cuadro de marcha.

b) Calcular la primera cuota.

c) Determinar el total de intereses de la operación.

Rta.: 350,33.

- Determinación la cuota Nº 1

$$c_1 = 1800 \cdot a^{-1}(1;5;0{,}0509589) - \frac{35}{0{,}0509589}\left[\frac{a(1;5;0{,}0509589 - 5.(1+0{,}0509589)^{-5}}{a(1;5;0{,}0509589)}\right]$$

$c_1 = 350{,}33$

- Determinación de los intereses totales

$$\sum_{j=1}^{n} I_j = (c_1 + c_n).\frac{n}{2} - VA(1;n;i;r)$$

$c_1 = 350{,}33$ $c_5 = 350{,}33+35.4$

$$\sum_{j=1}^{n} I_j = (350{,}33 + 490{,}33).\frac{5}{2} - 1800 = 2101{,}65 - 1800 = 301{,}65$$

La diferencia con el valor totalizado según el cuadro de marcha de Intereses Totales= 466,57 obedece a error por aproximación.

- Cuadro de marcha

k	V(k)	I(k)	t(k)	c(k)	T(k)
0	1.800	0	0	0	0
1	1.800	91,73	258,6	350,33	258,6
2	1.541,4	78,54	306,79	385,33	565,39
3	1.234,61	62,91	357,41	420,32	922,8
4	877,2	44,7	410,63	455,33	1.333,43
5	466,57	23,76	466,57	490,33	1.800,00
		301,64	1.800,00	2.101,64	

RENTAS TEMPORARIAS DE TÉRMINOS VARIABLES EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Nomenclatura:

(vV)(1;n;i,q) = VA (1;n;i;q)
(vV)(0;n;i,q) = VA (0;n;i;q)
(vA)(1;n;i,q) = VF (1;n;i;q)
(vA)(0;n;i,q) = VF (0;n;i;q)

Valor actual de una renta variable en progresión geométrica

Dada la siguiente sucesión:

0	1	2	3
	100	110	121

podemos expresar esta sucesión de términos diciendo que crecen en un 10%, pues: $\frac{110}{100} = \frac{121}{110} = 1{,}10 = (1 + 0{,}10)$

Para deducir la fórmula que valúa una sucesión financiera con estas características, independientemente del signo de la razón, pues también puede ser decreciente, debemos ver cómo denominamos a esa razón pues, puedo decir que:

Modo a) $c_2 = c_1\,(1+q)$; en este caso: $110 = 100\,(1+0{,}10)$

La progresión será creciente como en este caso cuando $(1+q) \cdot v > 1 \rightarrow q > i$
La progresión será decreciente cuando $(1+q) \cdot v < 1 \rightarrow q < i$
La progresión será uniforme cuando $(1+q) \cdot v = 1 \rightarrow q = i$

o bien

Modo b) $c_2 = c_1\, q$; en este caso: $110 = 100\,(1{,}10)$

Como son estas las dos maneras en que son tratadas las rentas, veremos ambas, aclarando que los ejercicios aquí planteados responden al modo a).

La progresión será creciente como en este caso cuando $q \cdot v > 1 \rightarrow q > (1+i)$
La progresión será decreciente cuando $q \cdot v < 1 \rightarrow q < (1+i)$
La progresión será uniforme cuando $q \cdot v = 1 \rightarrow q = (1+i)$

Según consideremos el valor de "q" la fórmula será diferente. Veremos ambas.

- ***Deducción de la formula principal:***
  Cuotas vencidas
  Modo a)

Si $\frac{C_2}{C_1} = \frac{C_3}{C_2} = \dots \frac{C_p}{C_{p-1}} = \dots \frac{C_n}{C_{n-1}} = (1+q)$

0	1	2	3		n-1	n
	c	$c(1+q)$	$c(1+q)^2$		$c(1+q)^{n-2}$	$c\,(1+q)^{n-1}$

$c \cdot v$

$c(1+q) \cdot v^2$

$c(1+q)^2 \cdot v^3$

....

$c(1+q)^{n-2}\, v^{n-1}$

$c(1+q)^{n-1} \cdot v^n$

$VA(1;\, n, i, q)$

En donde:

$(1+i)^{-1} = v \qquad (1+i)^{-2} = v^2 \quad .... \quad (1+i)^{-n} = v^n$

$VA(1;n,i,q) = c \cdot v + c(1+q) \cdot v^2 + c(1+q)^2 v^3 + ... + c(1+q)^{n-2} v^{n-1} + c(1+q)^{n-1} v^n$

$VA(1;n,i,r) = c \cdot [v + (1+q) \cdot v^2 + (1+q)^2 v^3 + ... + (1+q)^{n-2} v^{n-1} + (1+q)^{n-1} v^n]$

$VA(1;n,i,r) = c \cdot v [1 + (1+q) \cdot v + (1+q)^2 v^2 + ... + (1+q)^{n-2} v^{n-2} + (1+q)^{n-1} v^{n-1}]$

$$VA(1;n;i;q) = \frac{c}{(1+i)}\left[1+\frac{1+q}{1+i}+\left(\frac{1+q}{1+i}\right)^2+...+\left(\frac{1+q}{1+i}\right)^{n-2}+\left(\frac{1+q}{1+i}\right)^{n-1}\right]$$

Caso a) $q \neq i$

Resolvemos la suma de esta progresión geométrica que está entre corchetes, siendo el primer término de esta progresión igual a 1, n es la cantidad de términos y la razón es: $\frac{1+q}{1+i}$

$$VA(1;n;i;q) = \frac{c}{(1+i)}\left[\frac{\left(\frac{1+q}{1+i}\right)^n - 1}{\frac{1+q}{1+i} - 1}\right] = \frac{c}{(1+i)}\left[\frac{\left(\frac{1+q}{1+i}\right)^n - 1}{\frac{q-i}{1+i}}\right]$$

$$\boxed{VA(1;n;i;q) = c\left[\frac{\left(\frac{1+q}{1+i}\right)^n - 1}{q-i}\right]}$$

Caso b) $q=i$

Por ser $\frac{1+q}{1+i} = q.v = 1$

Partimos de la deducción general anterior y llegamos a este paso en donde vemos que si la tasa de interés es coincidente con la tasa de crecimiento de las cuotas: cada uno de los términos encerrados en el corchete es igual a la unidad pues $(1+q).v=1$ o bien $\frac{1+q}{1+i} = 1$

$VA(1;n,i,r) = c \cdot v [1 + (1+q) \cdot v + (1+q)^2 v^2 + ... + (1+q)^{n-2} v^{n-2} + (1+q)^{n-1} v^{n-1}]$

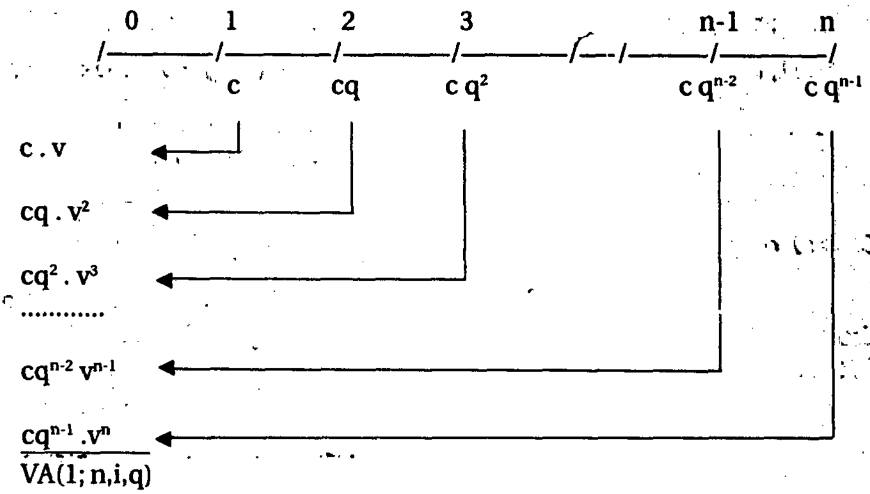
$$VA(1;n;i;q) = \frac{c}{(1+i)}\left[1+\frac{1+q}{1+i}+\left(\frac{1+q}{1+i}\right)^2+...+\left(\frac{1+q}{1+i}\right)^{n-2}+\left(\frac{1+q}{1+i}\right)^{n-1}\right]$$

Entonces la fórmula queda n términos que multiplican a $\frac{c}{1+i}$:

$$\boxed{VA(1;n,i;q) = c \; v \, . \, n}$$

- ***Modo b) de la deducción de la formula principal:***

Si: $\frac{C_2}{C_1}=\frac{C_3}{C_2}=\ldots\frac{C_p}{C_{p-1}}=\ldots\frac{C_n}{C_{n-1}}=q$



$VA(1;n,i,q) = c\,.\,v + c\,q\,.\,v^2 +.\,cq^2\,v^3 + \ldots + cq^{n-2}v^{n-1} + c\,q^{n-1}v^n$

$VA(1;n,i,r) = c\,.[\,v + q\,.\,v^2 +.\,q^2\,v^3 + \ldots + q^{n-2}v^{n-1} + q^{n-1}v^n]$

$VA(1;n,i,r) = c\,.v\,[\,1 + q\,.\,v +.\,q^2\,v^2 + \ldots + q^{n-2}v^{n-2} + q^{n-1}v^{n-1}]$

$$VA(1;n;i;q)=\frac{c}{(1+i)}\left[1+(qv)+(qv)^2+\ldots+(q.v)^{n-2}+(q.v)^{n-1}\right]$$

Caso a) $q \neq i$

Resolvemos la suma de esta progresión geométrica que está entre corchetes, siendo el primer término de esta progresión igual a 1, n es la cantidad de términos y la razón es (q.v)

$$VA(1;n;i;q)=\frac{c}{(1+i)}\left[\frac{1-(q.v)^n}{1-q.v}\right]=c\frac{1}{1+i}\left[\frac{1-(q.v)^n}{1-\frac{q}{1+i}}\right]=c\frac{1}{1+i}\left[\frac{1-(q.v)^n}{\frac{1+i-q}{1+i}}\right]=c\left[\frac{1-(q.v)^n}{1+i-q}\right]$$

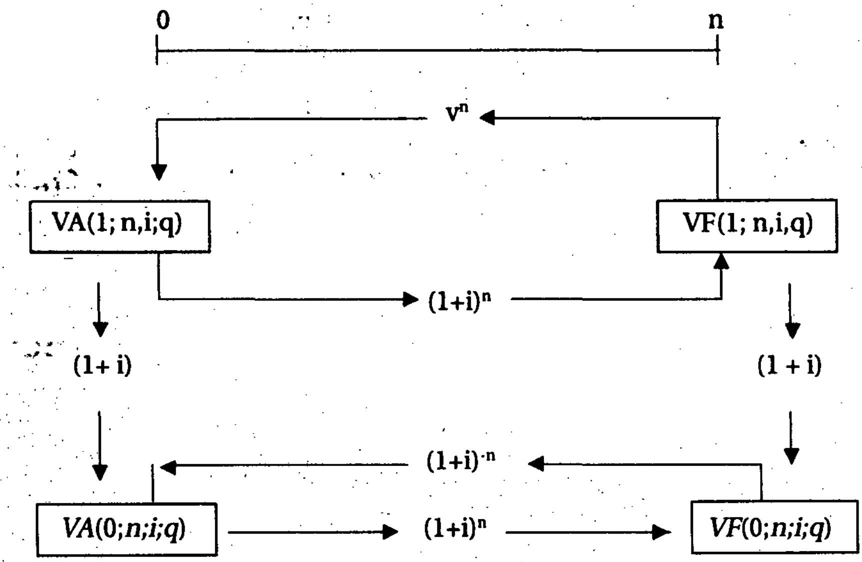
$$\boxed{VA(1;n;i;q)=c\left[\frac{1-(q.v)^n}{1+i-q}\right]}$$

Caso b) $q=i$

$$\frac{q}{1+i}=q.v=1$$

$$\boxed{VA(1;n;i;q)=c\frac{1}{1+i}n=c.v.n}$$

Valor Final de una renta de términos variables en progresión geométrica. Valor de la renta con cuotas vencidas y adelantadas



Las fórmulas de cada una de esta notaciones serán las vistas en este capítulo, teniendo en cuenta que q puede ser igual o diferente de i.

Aplicaciones

1) Una persona desea integrar \$ 1.000 en un plan de ahorro de 10 cuotas mensuales. Si la tasa de interés mensual es del 6% y cada cuota supera a la anterior en un 10%, determinar el valor de la primera y octava cuota. Asimismo, hallar el total de las cuotas.

Rta.: $c(1) = 49{,}82$ y $c(2) = 97{,}08$

Total de cuotas $= VF(1;10;0{,}06;0{,}10) = c(1)\ \dfrac{[(1+q)\,v\,]^n - 1}{q - i}\ (1+i)^n$

Reemplazo: $n=10$; $q= 0{,}10$; $i = 0{,}06$. Despejo c

$$c_1 = \frac{1000}{(1+0{,}06)^{10}} \cdot \frac{0{,}10-0{,}06}{\left(\dfrac{1+0{,}10}{1+0{,}06}\right)^{10} - 1} = 49{,}82$$

$$c_{(8)} = c_{(1)}\,(1+0{,}10)^7 = 49{,}82 \,.\, (1+0{,}10)^7 = 97{,}08$$

Para determinar el total de las cuotas que permiten integrar un monto de \$ 1.000, utilizamos la fórmula de suma de una progresión geométrica en donde:

$a_1 = 49{,}82$
cantidad de términos= 10
razón en que crece cada cuota= 1,10 pues;

$c_1 =$ 49,82
$c_2 = 49{,}82 * 1{,}10 =$ 54,80
$c_3 = 49{,}82 * 1{,}10^2 =$ 60,28
$c_4 = 49{,}82 * 1{,}10^3 =$ 66,31
$c_5 = 49{,}82 * 1{,}10^4 =$ 72,94
$c_6 = 49{,}82 * 1{,}10^5 =$ 80,24
$c_7 = 49{,}82 * 1{,}10^6 =$ 88,26
$c_8 = 49{,}82 * 1{,}10^7 =$ 97,09
$c_9 = 49{,}82 * 1{,}10^8 =$ 106,79
$c_{10} = 49{,}82 * 1{,}10^9 =$ 117,47
Suma de las 10 cuotas = 794

Contando con la fórmula de suma de una progresión geométrica en forma simple realizamos el cálculo para los n términos.

$$\sum_{j=1}^{10} c_j = 49{,}82 . \frac{1{,}10^{10} - 1}{1{,}10 - 1} = 794$$

2) Se desea saber cuál es el primer pago que produce una renta de \$ 6.000, en progresión geométrica, pagadera en 26 meses, con cuotas mensuales las que irán aumentando en razón del 4% mensual. La tasa de interés mensual es del 4,5%.

Rta.: c(1) = 255,89.

$$c_1 = \frac{6000 \cdot (0{,}04 - 0{,}045)}{\left(\frac{1+0{,}04}{1+0{,}045}\right)^{26} - 1}$$

3) ¿Qué resulta más conveniente para un tomador de un préstamo? Se trata de un operación de financiación por la suma de \$ 2.800 pagadera en 7 cuotas mensuales, crecientes en progresión geométrica a razón del 6% mensual.

Aceptar: a) una tasa de interés del 6% mensual.
b) una tasa de interés del 5% mensual.
c) una tasa de interés del 6,5% mensual.

Rta.: la alternativa b).

Independientemente del tipo de renta utilizado, sea de términos constantes o variables, lo que importa es el coste del dinero para ese tomador de fondos o desde la otra figura: el acreedor o colocador de fondos, la rentabilidad resultante como retorno del capital prestado y que en definitiva tienen jerarquizaciones contrapuestas, es decir que al deudor le convendría aceptar condiciones en donde la tasa de interés sea lo más baja posible, situación contraria para el acreedor quien pretendería cobrar un tanto de interés lo más alto posible.

Para este tomador de fondos le conviene la alternativa b) por ser la de menor tasa de interés.

También resulta válido hacer el análisis —al tratarse de términos constantes— comparando las cuotas y llegamos a análogas conclusiones.

a) Caso particular en que q=i

$$c_{(1)} = \frac{2800}{7} * (1+0,06). = 424$$

b) $$c_{(1)} = \frac{2800.(0,06-0,05)}{\left(\frac{1+0.06}{1+0.05}\right)^7 - 1} = 408,15$$

c) $$c_{(1)} = \frac{2800.(0,06-0,065)}{\left(\frac{1+0.06}{1+0.065}\right)^7 - 1} = 432,04$$

4) Cuál será el número de pagos mensuales necesarios para cancelar un préstamo de $ 1.798,50, siendo el primer término de $ 250; la razón del 2% mensual y la tasa de interés mensual del 4%.

Rta.: 8 pagos.

$$1798,50 = 250.\frac{\left(\frac{1+0,02}{1+0,04}\right)^n - 1}{(0,02-0,04)}$$

despejamos n, aplicando logaritmos

$$n = \frac{\log\left[1+\frac{1798,50}{250}(0,02-0,04)\right]}{\log(1+0,02)-\log(1+0,04)}$$

n = 8.

5) Calcular el valor actual de una serie de 18 pagos vencidos que presentan las siguientes características:

- Los primeros 8 pagos se realizan en progresión geométrica, siendo el primero de $ 120 y el último de $ 137,84.
- Los 10 pagos siguientes son constantes e iguales al importe del octavo pago.

- La tasa de interés es del 4,25% mensual para los primeros 8 pagos, luego del 5% mensual para los siguientes 5 pagos y para los últimos del 5,20% mensual.

Rta.: VA = 1615,30.

1) Determinación de la razón de crecimiento, conociendo los siguientes valores:
   $c_{(8)} = 137{,}84$
   $c_{(1)} = 120$ y $n = 8$ $\quad q = \left(\dfrac{137{,}84}{120}\right)^{1/7} - 1 = 0{,}02$

2) Determinación de cada uno de los tramos de renta según el perfil y vector de flujos que resultan de las condiciones de la sucesión financiera:

$$VA(1;8;0{,}0425;0{,}02) \;=\; 120\,\frac{\left(\dfrac{1+0{,}02}{1+0{,}0425}\right)^{8}-1}{0.02-0.0425} = 854{,}22.$$

$VA(1;5;0{,}05) = 137{,}84\ a(1;5;0{,}05)\ (1+0{,}0425)^{-8} = 427{,}76$

$VA(1;5;0{,}052) = 137{,}84\ a(1;5;0{,}052)\ (1+0{,}05)^{-5}\ (1+0{,}0425)^{-8} = \underline{333{,}32}$

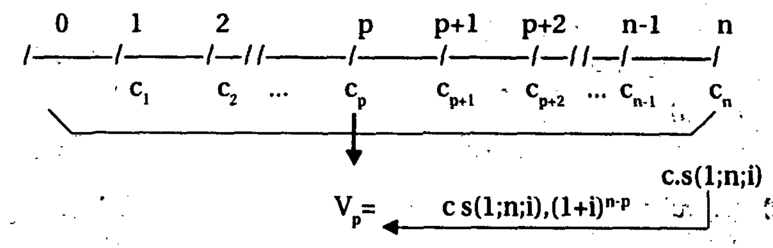
VALOR ACTUAL $\underline{1615{,}30}$

VALUACIÓN DE RENTAS EN UN MOMENTO P

Dado el siguiente eje de tiempos y capitales: se pide valuar la renta en el momento p. Cualquier camino elegido da el mismo resultado pues estamos valuando con la ley financiera a interés compuesto.

Caminos:

➢ Valuar la renta al momento n y luego actualizamos el valor final al momento p



En el caso de cuotas constantes nos queda:

$V_p = c\ s(1;n;i)\ .(1+i)^{n-p}$

➢ Valuar la renta al momento 0 y luego capitalizamos el valor actual al momento p

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
0 & & 1 & & 2 & & p & p+1 & p+2 & n-1 & n \\
| & \text{—} & | & \text{—} & | & \text{—}//\text{—} & | & | & | \text{—}//\text{—} | & & | \\
 & & c_1 & & c_2 & \ldots & c_p & c_{p+1} & c_{p+2} & \ldots\ c_{n-1} & c_n
\end{array}
$$

$$c.a(1;n;i) \quad (1+i)^p \quad = V_p$$

En el caso de cuotas constantes nos queda:

$$V_p = c\,a(1;n;i)\,.(1+i)^p$$

➢ Valuar al momento p, capitalizando las p cuotas y actualizando las n-p cuotas

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
0 & & 1 & & 2 & & p & p+1 & p+2 & n-1 & n \\
| & \text{—} & | & \text{—} & | & \text{—}//\text{—} & | & | & | \text{—}//\text{—} | & & | \\
 & & c_1 & & c_2 & & c_p & c_{p+1} & c_{p+2} & \ldots\ c_{n-1} & c_n \\
 & & & & & & V_p & & & &
\end{array}
$$

En el caso de cuotas constantes nos queda:

$$V_p = c\,s(1;p;i) + c\,a(1;n-p;i)$$

RENTAS PERPETUAS

Si la cantidad de términos son infinitos la sucesión financiera de n términos será perpetua.

La valuación es muy simple pues tenemos que reemplazar $n=\infty$. No podemos cuantificar el valor final de infinitas cuotas pues es infinito. Sólo podemos valuar el valor actual inmediato o diferido de infinitas cuotas.

- **Renta Perpetua Inmediata de términos constantes**

Hemos analizado y representado la función financiera de una serie de cuotas uniformes $a(1;n;i)$ y en dicho análisis matemático cuando n toma el valor particular de ∞, esta renta constante unitaria $a(1;\infty;i) = 1/i$ y para el caso de $a(0;\infty;i) = 1/d$. Veamos:

- Vencidos

0 1 2 // n-1 n n+1 n+2 .... ∞
/____/____/____//____/____/____/____/____/____// →
c c ... c c c c .... c c

$VA(1;\infty;i)= c\ a(1;\infty;i) = c\frac{1-v^{\infty}}{i} = c\frac{1}{i}$ Recordemos que $v^{\infty} = 0$

- Adelantados

0 1 2 // n-1 n n+1 n+2 .... ∞
/____/____/____//____/____/____/____/____/____// →
c c c ... c c c c ... c

$VA(0;\infty;i)= c\ a(0;\infty;i) = c\ [\ a(1;\infty;i) + 1] = c.\left[\frac{1-v^{\infty}}{i}+1\right] = c.\left[\frac{1}{i}+1\right] = c.\frac{1+i}{i} = c\frac{1}{d}$

- **Renta Perpetua Diferida de términos constantes**

0 1 t t+1 t+2 // t+n-1 t+n t+n+1 t+n+2 .... ∞
/____/__//__/____/____/__//__/____/____/____/____// →
c c ... c c c c ...c

$VA(t+1;\infty;i) = c\ a(t+1;\infty;i)= c.\ v^{t}\ \frac{1-v^{\infty}}{i} = c\frac{1}{i}.v^{t}$ Recordemos que $v^{\infty} = 0$

También podemos expresarlo con primera cuota en el momento t y valuar la renta adelantada.

- **Renta Perpetua Inmediata de términos variables**

En la valuación de rentas variables deberá tenerse presente las distintas condiciones financieras:

- Para el caso de variables en progresión aritmética deberán ser crecientes, pues de tratarse de rentas que varían con una razón decreciente en algún momento dichas cuotas se harían negativas.
- Para el caso de variables en progresión geométrica: la razón $q<i$ o bien $\frac{1+q}{1+i}<1$ para que la renta alcance un valor finito y sea convergente.

- Vencidos

0 1 2 // n-1 n n+1 n+2 .... ∞
/____/____/____//____/____/____/____/____/____// →
c_1 c_2 ... c_{n-1} c_n c_{n+1} c_{n+2} ...

- *en progresión aritmética*

$$VA(1;\infty;i,r) = c\ a(1;\infty;i)+\frac{r}{i}\left[a(1;\infty;i)-\infty.v^{\infty}\right]=c\frac{1}{i}+\frac{r}{i}\left[\frac{1}{i}\right]=\frac{1}{i}\left[c+\frac{r}{i}\right]$$

- *en progresión geométrica*

$$VA(1;\infty;i;q)=c\left[\frac{\left(\frac{1+q}{1+i}\right)^{\infty}-1}{q-i}\right]=c\frac{(-1)}{q-i}=c\frac{1}{i-q}$$

- Adelantados

0 1 2 // n-1 n n+1 n+2 .... ∞

/_____/_____/_____//_____/_____/_____/_____/_____/_____//

c_1 c_2 C_3 ... c_n c_{n+1} c_{n+2} c_{n+3} ... →

- *en progresión aritmética*

$$VA(0;\infty;i;r)=\left\{c\ a(0;\infty;i)+\frac{r}{i}\left[a(0;\infty;i)-\infty.v^{\infty}\right]\right\}=\left[c\frac{1}{d}+\frac{r}{i}\left[\frac{1}{d}\right]\right]$$

$$VA(0;\infty;i;r)=\frac{1}{d}\left[c+\frac{r}{i}\right]=\frac{1}{i}(1+i)\left[c+\frac{r}{i}\right]=\frac{1}{i}(1+i)\left[c+\frac{r}{i}\right]$$

- *en progresión geométrica*

$$VA(0;\infty;i;q)=c.(1+i)\left[\frac{\left(\frac{1+q}{1+i}\right)^{\infty}-1}{q-i}\right]=c(1+i)\frac{(-1)}{q-i}=c(1+i)\frac{1}{i-q}$$

- **Renta Perpetua Diferida de términos variables**

0 1 t t+1 t+2 // t+n-1 t+n t+n+1 t+n+2 .... ∞

/_____/__//__/_____/_____/___//__/_____/_____/_____/_____//

c_1 c_2 ... c_{n-1} c_n c_{n+1} c_{n+2} ... C

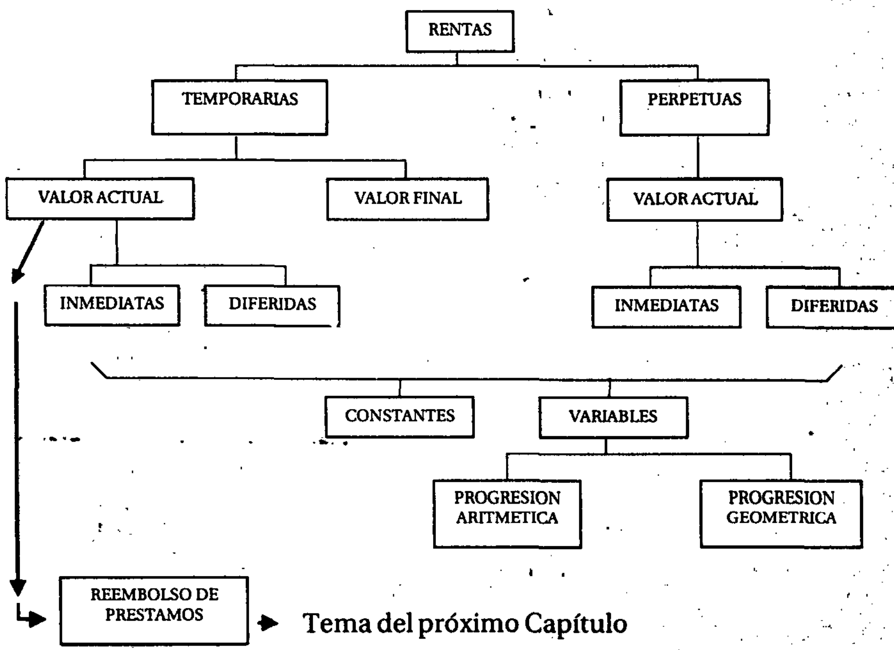
- *en progresión aritmética*

$$VA(t+1;\infty;i;r)=v^t\left\{c\ a(1;\infty;i)+\frac{r}{i}\left[a(1;\infty;i)-\infty.v^{\infty}\right]\right\}=v^t\left[c\frac{1}{i}+\frac{r}{i}\left[\frac{1}{i}\right]\right]=\frac{1}{i}v^t\left[c+\frac{r}{i}\right]$$

- *en progresión geométrica*

$$VA(t+1;\infty;i;q)=c.v^t\left[\frac{\left(\frac{1+q}{1+i}\right)^{\infty}-1}{q-i}\right]=cv^t\frac{(-1)}{q-i}=cv^t\frac{1}{i-q}=v^t\frac{c}{i-q}$$

ESQUEMA CONCEPTUAL ACERCA DE LAS RENTAS QUE ESTUDIAMOS Y QUE DIERON ORIGEN A LAS FÓRMULAS COMO HERRAMIENTAS DE VALUACIÓN



Capítulo IX

Reembolso de préstamos

Objetivos:

- Manejar los sistemas de préstamos principales
- Enmarcar el sistema de préstamo dentro de una normativa vigente y un marco jurídico
- Calcular los valores de cada uno de los componentes: cuota, amortización, interés, total amortizado, saldo de deuda.
- Crear otros sistemas de préstamos
- Comparar sistemas de préstamo y su conveniencia
- Relacionar la tasa de interés contractual y la tasa de interés implícita resultante

Definición de Préstamo

Es una operación de financiación para quien recibe una cuantía $V_{(0)}$ y es el que denominamos deudor, prestatario, o tomador de los fondos. Esta prestación única que le hace otra persona denominada acreedor o colocador de fondos deberá ser devuelta con sus intereses, de acuerdo a un cronograma de pagos previsto en el contrato de préstamo.

Entonces, en general se dice que un préstamo es una prestación única del momento 0 asociada a contraprestaciones múltiples escalonadas en el tiempo.

La contraprestación o conjunto de contraprestaciones sirven para reembolsar, extinguir, cancelar, amortizar el capital principal o préstamo y recibe también la denominación de cuota, términos amortizativos.

- *Contraprestación única*: el préstamo del momento 0 se cancela en el momento n —vencimiento del contrato de préstamo— mediante un único pago que comprende el capital y sus intereses acumulados. Constituye una operación financiera simple.

- *Contraprestaciones múltiples*: son reembolsos sucesivos que deberán cancelar el capital y que incluyen intereses. Constituye una operación financiera compleja y son las que estudiaremos a continuación:

Elementos que inciden en la cuantía de cada contraprestación

Definidas cada una de las variables siguientes, surgirá una distribución temporal en forma periódica de las contraprestaciones que incluiremos en el cronograma de pagos para el deudor de acuerdo al sistema de préstamo definido.

- Ley financiera de valuación: interés simple o compuesta.
- Tanto de interés contractual de la operación: constante o variable.
- Plazo de la operación: es decir dentro de cuántos períodos expira el préstamo, explicitando cantidad de cuotas, pues puede no coincidir cantidad de períodos de duración y número de cuotas. Cuando el número de cuotas previsto en el contrato original es menor al número de períodos de la operación las rentas no son inmediatas; tal el caso de préstamos diferidos o también denominados con carencia.
- Momento del primer vencimiento de la contraprestación desagregando en cuota de interés y cuota de amortización en el caso que no coincidan ambos vencimientos.
- Forma de determinación de las:
  - cuotas de interés
  - cuotas de amortización.

Todo contrato además, deberá prever si admite que el deudor pueda extinguir su deuda antes del vencimiento, incluyendo cláusulas sobre la forma y a partir de qué momento se admite esa Cancelación total o parcial.

Generalmente el usuario potencial de un préstamo buscará que sus contraprestaciones, es decir cada una de las cuotas que cancele el préstamo solicitado, se adecuen al nivel de sus ingresos periódicos. Por otro lado, el acreedor mediante un razonable estudio de crédito determinará cuál es el máximo de cuota que podrá afrontar el deudor en función a la capacidad de pago que resulta del análisis crediticio que resulta de los futuros ingresos del mismo.

En un escenario de simples pagos periódicos que comprenden solo intereses, el mayor esfuerzo financiero recae al vencimiento del préstamo y habrá que analizar si el deudor puede afrontar el reembolso del capital íntegramente.

En general, vemos que los pagos periódicos podrán cumplir una doble función si se determina que ambos componentes sean periódicos: la del pago del interés periódico —interés— y la restitución del préstamo en forma escalonada —amortización—. Se pueden hacer tantas combinaciones acerca de la forma de cálculo y la oportunidad de pago de estos dos elementos —amortización e interés— que resultarán sucesiones financieras de cuantías diferentes derivando en distintos sistemas de préstamos.

Si se trata de una sucesión de pagos lo habitual es que sean periódicos pero también pueden no serlo, sus cuantías podrán ser constantes o bien, variables. Las tasas de interés que retribuyen a estas operaciones serán fijas o variables. Además, podrán contener corrección monetaria o no, es decir ajustables mediante la utilización de distintos coeficientes de corrección, o no ajustables.

Cada pago de la serie cancelatoria del préstamo debe estar compuesto por lo menos por la porción de los intereses devengados pactados según las condiciones contractuales, tal como lo señala el Código Civil. Los pagos, también llamados cuotas de servicios, generalmente estarán conformados por la porción de intereses, y por la amortización del capital prestado. Es así que al final del cronograma las sumas erogadas en concepto de capital —amortización de deuda— deben ser suficientes para cancelar saldo de deuda, es decir extinguirla.

Sistemas de amortización

La "Amortización" se interpreta como el pago o la serie de pagos necesarios para cancelar una deuda.

Desarrollaremos los sistemas de amortización que podemos denominar "clásicos o usuales en la literatura o publicaciones sobre la temática financiera" con el propósito de facilitar el abordaje de todas las modalidades que se pueden plantear en el mercado como asimismo poder armar el sistema de préstamo que se desee.

Distintos sistemas de amortización

✓ 1. Con reintegro final de capital

1.a) Con pago periódico de interés:

- *Con constitución de un fondo*

Llamado por muchos "**sistema americano**": en donde el acreedor recibe en forma periódica los intereses del capital a una tasa activa y al finalizar el plazo el deudor le cancela el préstamo mediante el Fondo Acumulado resultante de la constitución periódica de una reserva que irá periódicamente devengando intereses a una tasa pasiva. Se dice que son cuotas facultativas. El costo financiero de este sistema depende de estas dos tasas de interés: la del préstamo (tasa activa) y la de los depósitos facultativos (tasa pasiva).

Algunos consideran que este no es un sistema de amortización, sino una forma de pago. Nos importa analizarlo, conocer cuál es al tasa de interés implícita o coste financiero que resulta de la serie de pagos asociados al préstamo recibido

- *Sin constitución de un fondo*

Este sistema muy utilizado se compone del pago de intereses periódicos y restitución del capital al vencimiento

1.b) Con reintegro único de capital e intereses al final del plazo:

Es un problema de monto —como suma a reintegrar al vencimiento— de un capital único.

✓ **2) Con reintegro periódico de capital e intereses:**

2.a) Sistemas en los cuales la cuota de servicio (capital e intereses) es constante si la tasa es fija

2.a.1) Sistema de amortizaciones progresivas o sistema francés.
Intereses calculados sobre saldos de deuda —decrecientes— > cuota
Amortización creciente > constante

2.a.2) Sistema de Intereses Directos o Cargados en la cuota
Intereses calculados sobre principal —constantes— > cuota
Amortización constante > constante

2.a.3) Sistema Alemán Promedio.
Intereses promediados —constantes— > cuota
Amortización constante > constante

2.b) Sistemas en los cuales la cuota de servicio (capital e intereses) es variable, aunque sea con tasa fija:

2.b.1) Sistema de amortizaciones con servicios en progresión aritmética:

2.b.2) Sistema Alemán
Intereses calculados sobre saldos adeudados —decrecientes— > cuota
Amortización constante > constante

2.b.3) Sistema de amortización con servicios en progresión geométrica, u otros constituidos sin ninguna ley de formación predeterminada.
No serán estudiados, pero en el caso de cuotas variables en progresión geométrica se realiza un cuadro de marcha con estas características, según el valor que tome q en el ejercicio integrador al final del capítulo.

Nosotros nos ocuparemos de algunos de ellos, con la modalidad de tasa de interés constante y vencida.

Nomenclatura:

V(0) = Préstamo

V(p) = Saldo de deuda al inicio del período p, que coincide con el saldo de deuda luego de abonada la cuota (p-1) en ese preciso momento. Será nuestra 1ª columna en el cuadro de marcha pues sirve para el cálculo de los intereses devengados desde el anterior período hasta este periodo "p" y que están incluidos en la cuota que se pagará en el período "p". En el eje de tiempo queda ubicado en el periodo (p-1) luego de abonada la cuota (p-1).

V'(p) = Saldo de deuda luego de abonada la cuota p —en ese preciso momento—.
Lo importante es saber que queda ubicado en el eje de tiempo en el periodo p luego de abonada la cuota "p". Integra la última columna del cuadro de marcha.
Es lo mismo trabajar con cualquiera de estos saldos de deuda.

c(p) = cuota de servicio del período p. En general contiene: c(p) = I(p) + t(p).

I(p) = cuota de interés incluida en la cuota correspondiente al período p.

t(p) = cuota de capital incluida en la cuota correspondiente al período p.

T(p) = total amortizado hasta el final del período p. Siendo T(n) = V(0).

"i" = tasa de interés efectiva periódica. Es la tasa contractual: es la referencia en el contrato. Es la tasa explícita.

n = cantidad de cuotas.

Si consideramos en el eje de plazos y capitales el siguiente esquema de una operación de amortización cuyo primer término se produce al período siguiente de contratada la operación:

Eje de tiempos y capitales

tasa de interés vigente: $i_{(0;1)}=i_1$ $i_{(1;2)}=i_2$ $i_{(2;3)}=i_3$ $i_{(n-1;n)}=i_n$

	0	1	2	p		n-1	n
Préstamo	$V_{(0)}$						
cuotas periódicas		$c_{(1)}$	$c_{(2)}$	$c_{(p)}$	...	$c_{(n-1)}$	$c_{(n)}$
Intereses periódicos		$I_{(1)}$	$I_{(2)}$	$I_{(p)}$	...	$I_{(n-1)}$	$I_{(n)}$
amortización periódica		$t_{(1)}$	$t_{(2)}$	$t_{(p)}$	...	$t_{(n-1)}$	$t_{(n)}$
Total amortizado hasta p		$T_{(1)}$	$T_{(2)}$	$T_{(p)}$	...	$T_{(n-1)}$	$T_{(n)}$
Saldo de deuda periódico		$V'_{(1)}$	$V'_{(2)}$	$V'_{(p)}$	...	$V'_{(n-1)}$	$V'_{(n)}=0$
Saldo de deuda perиód.	$V_{(0)}=V_{(1)}$	$V_{(2)}$	$V_{(3)}$	$V_{(p+1)}$	...	$V_{(n)}$	$V_{(n+1)=0}$

El postulado de equilibrio establece la equivalencia financiera entre prestación y contraprestaciones de la operación en el momento inicial, en donde el valor del préstamo es equivalente al valor actual a una tasa i —constante o variable— de cada una de las n cuotas.

Tasa constante: ◆ Si $i_{(1)}=i_{(2)}=i_{(3)...}=i_{(n-1)}=i_{(n)}=i$

$$\boxed{V_o=\sum_{p=1}^{n}\frac{c_p}{(1+i)^p}}$$

Tasa variable: ◆ Si $i_{(1)}\neq i_{(2)}\neq i_{(3)}...\neq i_{(n-1)}\neq i_{(n)}$

$$V_{(0)}=\frac{c_1}{(1+i_1)}+\frac{c_2}{(1+i_1)(1+i_2)}+...+\frac{c_n}{(1+i_1)(1+i_2)...(1+i_n)}$$

$$\boxed{V_0=\sum_{p=1}^{n}\frac{c_p}{\prod_{j=1}^{p}(1+i_j)}}$$

Viabilidad del sistema de préstamo

Observe que: $n \cdot c > V_{(0)}$ debido a los intereses contenidos en las n cuotas y: $c_{(p)} > I_{(p)}$, pues, de coincidir, la deuda se transforma en una renta perpetua y no se produciría la restitución del capital. Si $c(p) < I(p)$ la deuda crece por los intereses devengados no pagados y que terminan acumulándose al capital. Esta relación es de gran utilidad cuando hay modificaciones en las condiciones originales del préstamo. En el mercado es práctica habitual que se replantee un nuevo plazo y una nueva cuota, y lo primero que se debe hacer es determinar el saldo pendiente a ese momento y analizar la viabilidad de las nuevas propuestas que puede ofrecer el deudor.

Normativa de aplicación

El Código Civil, en el capítulo "Obligaciones", art. 777 establece que "el pago hecho por cuenta de capital e intereses, *se imputará primero a los intereses* a no ser que el acreedor diese recibo por cuenta de capital". Es decir, cada contraprestación primero sirve para satisfacer los intereses devengados por el préstamo y si existe remanente cancela capital.

En el art. 744 expone: si "se deben sumas de dinero con intereses, el pago no se estima íntegro sino pagándose todos los intereses con el capital".Ello refuerza el sentido de una operación financiera, que lo es si produce variación cuantitativa de su capital, es decir genera intereses para ser satisfechos íntegramente por la parte deudora.

Se refuerza con el artículo 766 que dispone "si el deudor debiese capital e intereses no puede, sin consentimiento del acreedor imputar el pago al principal".

Entonces, si hubiese un pago inferior al propuesto o cambios en las condiciones contractuales originales por incumplimientos en los pagos por parte del deudor, primero se satisface el interés y el remanente es amortización.

Es práctica habitual que el préstamo se amortice mediante cuotas, también denominadas: términos amortizativos o anualidades o pagos de cuantía constante o variable, cuyo primer vencimiento se produce un período después del préstamo por eso esas cuotas son vencidas. Se limitará el desarrollo del tema con el supuesto de intereses por períodos vencidos, pues en el mercado financiero argentino está así normado por las Comunicaciones del BCRA en lo que respecta a operaciones de préstamos realizadas a través de entidades financieras.

Acerca de las expresiones, forma de publicitar las tasas, el tema normativo fue expuesto en el Capítulo de Tasas.

Existen otras variantes para amortización de préstamos: cuotas adelantadas, o solamente cuota de interés adelantadas y amortización en otros momentos de la vida del préstamo, diferimiento en el cronograma de pagos, es decir cuotas cuyo primer vencimiento inicia "t" períodos después de contratado el préstamo. Desde el punto de vista de las necesidades de caja, al deudor tal vez le convenga diferir los compromisos de pago; entonces, la renta en vez de ser inmediata de pagos vencidos será diferida en más de 1 período.

Con respecto a la tasa de interés se puede convenir constante o variable. Si bien en cada sistema de préstamo se usará tasa fija, en el mercado se aplica también tasa variable repactable periódicamente.

En resumen podemos expresar que en el mercado financiero argentino el Banco Central de la República Argentina establecía en sus comunicaciones OPRAC "A" 49 Condiciones Básicas —derogada pero reemplazada por otras complementarias que mantienen la misma disposición—, tales como en la Com. "A" 3052 del 23/12/99 que la modalidad de percepción de los intereses de las operaciones de crédito (Operaciones Activas de una entidad) *debe ser vencida en todas las operaciones,* no dando la opción de cobrar a los deudores intereses adelantados *salvo* para operaciones de pago único a su vencimiento —<180 días—. La forma de cálculo de los intereses, también estaba establecida en el punto titulado "Montos y plazos sobre los que pueden cobrarse intereses" o bien "Base de liquidación" exponiendo que "*sólo pueden cobrar intereses sobre los saldos efectivamente prestados y por los tiempos en que hayan estado a disposición de los clientes*", es decir se cobran intereses periódicos sobre saldos de deuda periódicos. A pesar de la volatilidad normativa se mantienen vigentes aspectos como los señalados que resultan ser troncales.

En el mercado fuera del financiero institucionalizado, podemos decir que existen otros tipos de préstamos, tales como veremos el "Sistema de préstamo directo" al que no le alcanzan las normas de B.C.R.A. por no ser su ente de control y están sujetos a otras regulaciones que oportunamente al tratar esa modalidad estudiaremos. Es más, las partes pueden armar su sistema de préstamo de una manera más flexible.

De lo expuesto, desarrollaremos los sistemas de préstamos más tradicionales: el sistema francés y el sistema alemán, por ser sistemas que por sus características son de uso general y aplicables en el mercado financiero institucionalizado; el sistema directo porque su utilización es importante comercialmente y utilizaremos otros, tales como: alemán promedio, americano que cumplen fundamentalmente la finalidad de entrenamiento para la construcción de otros sistemas, razonando sobre sus características, confrontarlos, e interpretar sus resultados, fundamentalmente en lo relacionado a la determinación de su tasa de interés implícita.

Cuadro de marcha general para préstamos cuyos intereses se calculan sobre saldos

Sistemas más utilizados:

- Sistema de préstamo francés
- Sistema de préstamo alemán

Los cuadros de marcha son de vital importancia para la comprensión de un sistema de préstamo, se puede observar la evolución de su deuda, como disminuye en función al cronograma de pagos convenido al concretar tal operación. Si Ud. desea obtener información sobre una determinada financiación la entidad probablemente le acerque a Ud. una planilla integrada con los datos del préstamo y el cronograma de pagos asociados al mismo.

Debemos interpretarlo correctamente. Asimismo, imagínese Ud. un préstamo cuyo plazo de financiación no son por ejemplo 3, 6, 9 cuotas, sino es mucho más extenso y quisiera conocer en algún momento "p" el saldo de deuda, la porción de interés o de amortización contenida en esa cuota p independientemente del cuadro de marcha. Pues entonces, ahora hallaremos cada componente a través de fórmulas, muchas de ellas nos resultarán conocidas.

Si bien este cuadro de marcha responde totalmente a un sistema de préstamo francés, no lo invalida para el sistema alemán, salvo que en la cuota de amortización al ser de cálculo sencillo en el sistema alemán y perfectamente determinable pues representa una alícuota del capital, entonces ese valor de t_p lo tenemos, en lugar de hallarlo por diferencia como aquí está expuesto y lo que hacemos consecuentemente, es hallar la cuota del sistema alemán como suma de cada uno de sus componentes.

P	V(p) SALDO de DEUDA Al INICIO	I(p) CUOTA DE INTERES	t(p) CUOTA DE AMORTIZ	c(p) CUOTA	T(p) TOTAL AMORTIZADO	V'(p) SALDO DE DEUDA LUEGO DE ABONADA LA CUOTA p
0	$V_{(0)}$	0	0	0	0	$V'_{(0)} = V_{(0)}$
1	$V_{(1)}=V'_{(0)}=V_{(0)}$	$I_{(1)} = V_{(1)}.i$	$t_{(1)} = c - I_{(1)}$	$C_{(1)}$	$T_{(1)} = t_{(1)}$	$V'_{(1)} = V_{(0)} - t_{(1)} = V_{(o)} - T_{(1)}$
2	$V_{(2)}=V'_{(1)}$	$I_{(2)} = V_{(2)}.i$	$t_{(2)} = c - I_{(2)}$	$C_{(2)}$	$T_{(2)} = t_{(1)} + t_{(2)}$	$V'_{(2)} = V_{(0)} - T_{(2)}$
...	...	...	...	...	...	...
n-1	$V_{(n-1)} = V'_{(n-2)}$	$I_{(n-1)} = V_{(n-1)}.i$	$t_{(n-1)} = c - I_{(n-1)}$	$C_{(n-1)}$	$T_{(n-1)} = t_{(1)} + t_{(2)} + \ldots t_{(n-2)} + t_{(n-1)}$ $T_{(n-1)} = T_{(n-2)} + t_{(n-1)}$	$V'_{(n-1)} = V(_{n-1}) - t_{(n-1)} = V_{(o)} - T_{(n-1)}$
n	$V_{(n)} = V'_{(n-1)}$	$I_{(n)} = V_{(n)}.i$	$t_{(n)} = c - I_{(n)}$	$C_{(n)}$	$T_{(n)} = T_{(n-1)} + t_{(n)} = V_0$	$V'_{(n)} = V(_{n}) - t_{(n)} = V_{(o)} - T_{(n)} = 0$

Gráfico del Saldo de Deuda

En el gráfico de saldo de deuda observaremos que en el momento 0 —inicial— que responde a la fecha de otorgamiento del préstamo, tiene ordenada al origen V_0, pues 0 es el momento en que nace V_0. Luego, día a día va incrementándose por los intereses devengados a la tasa de interés diaria —i_d—equivalente a la tasa equivalente de m días utilizada para el cálculo de los Intereses Devengados por ese período de m días. Es decir $V_0\ (1+i_m)^{k/m}$ Un día después de recibido el préstamo éste toma un valor de: $V_0\ (1+i_m)^{1/m}$ Al 2° día la deuda será de $V_0\ (1+i_m)^{2/m}$ Así seguirá acrecentándose (ver Devengamiento de Operaciones Activas en el Capítulo respectivo) hasta llegar al último día del período, en donde k=m y la deuda tomó el valor de $V_0\ (1+i_m)^{m/m}= V_0\ (1+i_m)$. Es el mayor valor que toma el préstamo en el transcurso de su vida. En este 1° período —momento 1— el deudor paga la cuota 1 —c_1— desagregada en la porción de Interés contenida en la cuota 1 —I_1— y la porción de amortización contenida en la cuota 1 —t_1—. Observemos que con el pago del Interés Periódico incluida en la cuota 1, vuelve la deuda a transformarse en V_0 y con la porción de amortización reducimos deuda. En el preciso momento en que al deudor le sellan el recibo con el pago de la cuota 1, la deuda disminuyó tomando el valor $V'_1 = V_0 - t_1$.

Así nace un nuevo período en que diariamente se irán devengando los intereses hasta llegar al momento 2...

Si el deudor en algún momento de la vida de la operación decide cancelar la misma, o bien cambiar condiciones, siempre necesitaremos el saldo de deuda en ese momento, que puede ser entero o fraccionario. Nosotros estamos, como se observa devengando en el período fraccionario con el criterio exponencial, pues es el utilizado en la valuación de este tipo de préstamos. En el Capítulo de Regimenes de capitalización hemos tratado el período de capitalización considerando los dos criterios: exponencial y lineal.

Retomando al saldo en un momento "k" cualquiera comprendido entre los períodos (p) y (p+1), si se admite en el contrato de préstamo la cancelación anticipada, pues ese sería su valor. Cuando tratemos el Capítulo de "Empréstitos" observaremos que a dicho saldo al momento k lo denominamos Valor Técnico o Valor de Rescate y en los medios de revistas y diarios financieros, lo denominan "Valor Actualizado". Justamente es el Valor Residual —acá será nuestro saldo de deuda luego de abonada la cuota anterior, en ese preciso instante— más el Cupón corrido que son los intereses devengados desde p hasta el momento k.

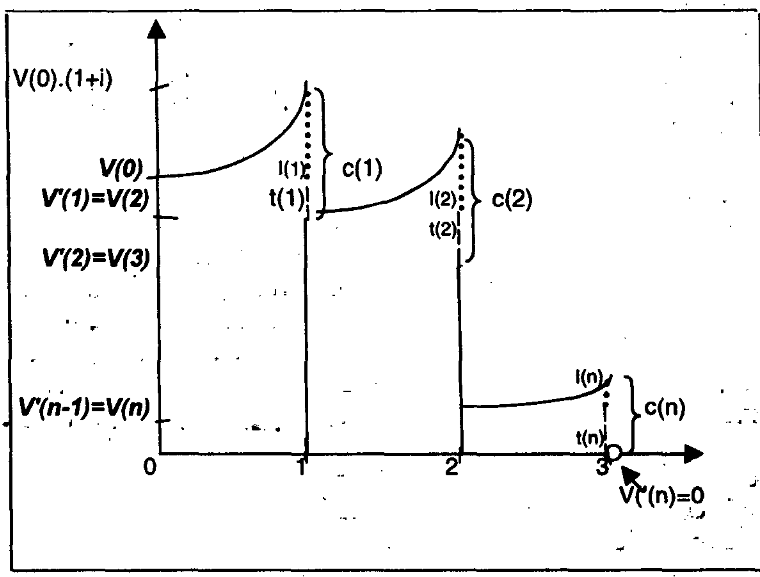


Gráfico del saldo de deuda

SISTEMA DE PRÉSTAMO FRANCÉS

Deducción de las fórmulas

	0	1	2	p		n-1	n
Préstamo	$V_{(0)}$						
cuotas periódicas		$c_{(1)}$ =	$c_{(2)}$ =	$c_{(p)}$ =	...=	$c_{(n-1)}$	= $c_{(n)}$

Observamos el eje de tiempo y para ir armando cada uno de los componentes me interesa primero plantear la ecuación de equivalencia inicial entre prestación y contraprestaciones utilizando la ley financiera a interés compuesto para la valuación.

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{c_p}{(1+i)^p} = V_0$$

Como el valor del préstamo es igual al valor actual de las cuotas constantes si la tasa de interés es constante, nos queda simplificada la ecuación de equivalencia inicial entre prestación y contraprestaciones: $\boxed{V_{(0)} = c\, a\,(1, n, i)}$

- **Cuota**

Si despejamos c de la expresión general: $\boxed{c = V_{(0)} \cdot a^{-1}(1, n, i)}$

Son fórmulas conocidas pues representan el valor actual de una renta cierta temporaria inmediata de términos constantes efectuados por períodos vencidos o bien de una renta cierta temporaria diferida por 1 período.

Sabemos que cada cuota se compone de amortización y de interés calculado sobre saldos de deuda. Por otro lado, si la cuota es constante y el interés contenido en cada uno de las cuotas es decreciente por la forma de determinación —se calcula sobre saldos de deuda—, entonces la amortización contenida en cada cuota será creciente

Como cada cuota se compone de la porción de interés y de amortización buscaremos esos componentes y qué ley de formación representa pues $c_1=c_2=\dots c_n$, pero no serán iguales amortización e interés.

• Amortización contenida en la cuota p • Interés contenido en la cuota p

Recuerde que la amortización surgió por diferencia entre la cuota y el interés contenido en esa cuota

$t_1 = c - I_1$

$t_1 = V_0 \cdot a^{-1}(1;n;i) - V_0 \cdot i$

$t_1 = V_0 \cdot [a^{-1}(1;n;i) - i]$

$\boxed{t_{(1)} = V_{(0)} \cdot s^{-1}(1;n;i)}$

$I_1 = V_0 \cdot i$; pues $V_0 = V_1$

$I_2 = V_2 \cdot i$

...

$\boxed{I_p = V_p \cdot i}$

$\boxed{t_{(1)}}$="Fondo Amortizante": Es el valor de la amortización real contenida en la primera cuota, y en el caso de considerar que $V_0 = 1$ se denomina tasa de amortización.

Para conocer la amortización real contenida en cualquier cuota p expresaremos cada componente en función de "t"

$c_1 = c_2$

$t_1 + I_1 = t_2 + I_2$

$t_1 + V_0 \cdot i = t_2 + (V_0 - t_1) \cdot i$

$t_1 + V_0 \cdot i = t_2 + V_0 \cdot i - t_1 \cdot i$

$t_1 (1 + i) = t_2$

$c_2 = c_3$

$t_2 + I_2 = t_3 + I_3$

$t_2 + (V_0 - t_1) \cdot i = t_3 + (V_0 - t_1 - t_2) \cdot i$

$t_2 + V_0 \cdot i - t_1 \cdot i = t_3 + V_0 \cdot i - t_1 \cdot i - t_2 \cdot i$

$t_2 (1 + \cdot i) = t_3$; siendo $t_1 (1 + i) = t_2$

$t_1 (1 + i)^2 = t_3$

...

Entonces: cada amortización crece con respecto a la anterior en una razón constante (1+i) en progresión geométrica. Si expresamos la amortización en función al fondo amortizante, tenemos que: $\boxed{t_{(p)} = t_1 \,.\, (1+i)^{p-1}}$

- **Total Amortizado**

Representa los derechos del deudor frente a su obligación contraída de V_0

$T_1 = t_1$ $\qquad\qquad$ $T_1 = t_1$

$T_2 = t_1 + t_2$ $\qquad\qquad$ $T_2 = t_1 + t_1 \,.\, (1+i)$

$T_3 = t_1 + t_2 + t_3$ $\qquad\qquad$ $T_3 = t_1 + t_1 \,.\, (1+i) + t_1 \,.\, (1+i)^2$

... $\qquad\qquad$ ...

$T_p = t_1 + \dots t_p = \sum_{j=1}^{p} t_j$ $\qquad$ $T_p = t_1 [\, 1 + (1+i) + \dots (1+i)^{p-1}] = t_1 \sum_{j=1}^{p} (1+i)^j = t_1 \,.\, s(1;n;i)$

$$\boxed{T_{(p)} = t_{(1)} \,.\, s\,(1;\, p;\, i)}$$

El total amortizado representa los derechos adquiridos por los prestatarios. Es decir, que si el prestatario tiene una obligación de V_0, pero al momento p tiene derechos por T_p. Será la diferencia entre V_0 y T_p a lo que se encuentra obligado.

Probemos qué ocurre en el caso de hallar el total amortizado hasta el último pago. Sabemos que debe ser igual al préstamo, pues con las n amortizaciones se debe cancelar el capital recibido V_0.

$T_n = t_1 + \dots t_n = \sum_{j=1}^{n} t_j$ $\qquad$ $T_n = t_1 [1 + (1+i) + \dots (1+i)^{n-1}] = t_1 \sum_{j=1}^{n} (1+i)^j = t_1 \,.\, s(1;n;i)$

$$T_n = V_0 \,.\, s^{-1}(1;n;i)\; s(1;n;i)$$

$$T_n = V_0.$$

Otra forma, es decir: $T_n = t_1 [\, 1 + (1+i) + \dots (1+i)^{n-1}] = V_0$

Resolvemos la progresión geométrica que observamos entre corchetes.

$$V_0 = t_1 \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = t_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i} = (c - V_0 . i) \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Distribuimos los dos términos del primer factor con el segundo factor de capitalización.

$$V_0 = c \frac{(1+i)^n - 1}{i} - V_0 . i . \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$V_0 = c\frac{(1+i)^n - 1}{i} - V_0(1+i)^n + V_0$$

$$V_0 + V_0(1+i)^n - V_0 = c\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$V_0 = c\dfrac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$ volvemos a la equivalencia inicial que es la fórmula general

- **Saldo de Deuda**

Conocer el saldo de la deuda (en un momento determinado) es importantísimo pues lo utilizamos como valor de rescisión del contrato y proceder a su cancelación con un reembolso único, o bien para una cesión de crédito a otro transfiriendo los derechos a un tercero, o bien cambiar condiciones originalmente pactadas con el cliente ante requerimiento de este en un plan de *refinanciación*, tales como: disminuir el importe de la cuota, cambiar el plazo de la operación y así replantear el sistema. ¿Cuál es el saldo pendiente de deuda, saldo de la operación, capital vivo o deuda pendiente de amortización? —cualquiera de las formas que queramos denominarlo—.

Se puede hallar el saldo de deuda por varios caminos debiendo arribar siempre a iguales valores:

- *en función retrospectiva* (con lo ya amortizado, es decir mirar el pasado de la operación).

Si miramos el cuadro de marcha podemos decir que la cuantía que resta por amortizar denominada V_p corresponde al saldo de deuda después de haber pagado la cuota (p-1) y está expresada en ese momento (p-1). Entonces V_p = Préstamo recibido de V_0 neto del total amortizado hasta la cuota (p-1) $-T_{p-1}$. Es decir tenemos en cuenta la vida ya transcurrida de la operación desde el inicio hasta el momento de valuación.

Esa primera columna del cuadro de marcha V_p es la utilizada para el cálculo de los Intereses contenidos en la cuota p —I_p— que es la columna siguiente.

Si seguimos observando el cuadro de marcha se integró una última columna que repite esta primera columna pero está desfasada un período.

Como hay literatura que comprende la primera y otra la segunda columna, hemos puesto las dos para interpretarla, pues lo único importante es saber distinguir en qué momento del eje de tiempo está ubicado el valor del saldo de deuda.

La última columna V_p expresa el saldo de deuda luego de abonada la cuota de ese momento p en ese instante, es decir al momento en que me sellan el recibo y por lo tanto, el saldo de deuda está expresado en el eje de tiempo en el momento p.

Es decir: $V'_p = V_{p+1}$

Hecha la aclaración volvemos a la búsqueda del saldo de deuda por el método retrospectivo, en donde:

A la obligación V_0 se le deducen los compromisos de pago ya abonados:

$\boxed{V'_{(p)} = V_{(0)} - T_{(p)}}$ ➔ valuado al momento p, luego del pago de la cuota p —en ese preciso momento—.

$\boxed{V_{(p)} = V_{(0)} - T_{(p-1)}}$ ➔ valuado al momento (p-1),luego del pago de la cuota (p-1) y en ese momento (p-1).

Entonces:

$V_p = V_0 - T_{p-1}$

$V_p = V_0 - t_1 \,.\, s(1;p-1;i)$

$V_p = V_0 - V_0 \,.\, s^{-1}(1;n;i) \,.\, s(1;p-1;i)$

$$V_p = V_0\left[1 - \frac{s(1;p-1;i)}{s(1;n;i)}\right] = V_0\left[1 - \frac{(1+i)^{p-1}-1}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$\boxed{V_p = V_0\left[1 - \frac{(1+i)^{p-1}-1}{(1+i)^n - 1}\right]}$$

En el caso de V'_p recordemos que el total amortizado será T_p y la fórmula:

$$\boxed{V'_p = V_0\left[1 - \frac{(1+i)^{p}-1}{(1+i)^n - 1}\right]}$$

- *en función prospectiva* (con lo que me falta abonar, es mirar el futuro de la operación).

Puedo decir que lo que me resta amortizar en el momento V_p, ubicado en (p - 1) en el eje en que se acaban de pagar (p-1) cuotas, es igual a la suma de los valores actuales de las cuotas restantes (n-p+1) pues de la cantidad total de cuotas: n ya están pagadas p-1 cuotas). Entonces quedan restantes = n-(p-1)= n-p+1.

La deuda es el valor actual de los compromisos de pago aún no abonados.

$V_{(p)} = c \,.\, a(1;\, n-p+1\, ;i)$

$V'_{(p)} = c \,.\, a(1;n-p;i)$

$$V_p = V_0 \,.\, a^{-1}(1;n;i) \,.\, a(1;n-p+1;i)$$

$$V_p = V_0 \cdot \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \cdot \frac{(1+i)^{n-p+1}-1}{(1+i)^{n-p+1}\, i} \quad \text{simplificamos i}$$

$$V_p = V_0 . \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} . \frac{(1+i)^{n-p+1} - 1}{(1+i)^{n-p+1}}$$

$$\boxed{V_p = V_0 . \frac{(1+i)^{n-p+1} - 1}{(1+i)^n - 1} (1+i)^{n-p+1}}$$

En el caso de V'_p recordemos que el total de cuotas pendientes de pago serán n-p y la fórmula:

$$\boxed{V'_p = V_0 . \frac{(1+i)^{n-p} - 1}{(1+i)^n - 1} (1+i)^{n-p}}$$

Observamos en el cuadro de marcha la columna de Saldo de deuda (algunos autores lo incorporan al inicio, otros al final y otros lo toman en los dos lados). Resulta importante interpretar sus valores. Por ejemplo:

- V_p representa el saldo de deuda luego de abonada la cuota (p-1) y
- V'_p representa el saldo de deuda luego de abonada la cuota p, siendo: $V_p = V'_{p-1}$. Ejemplo: el saldo de deuda luego de abonada la segunda cuota es $V'_2 = V_3$, que es el saldo de deuda al final del período anterior. Utilice cualquiera de ambas expresiones.

- *en forma recurrente*

$V'_{(p)} = V'_{(p-1)} . (1+i) - c_{p=}$

$V_p . (1+i) - c_p = V_{(p+1)}$

Vimos que tanto $V_{(p+1)}$ como V'_p están expresados luego de abonada la cuota p y en el momento p.

- ***Tiempo medio de reembolso***

Sirve para determinar en qué momento, desde el origen del préstamo, se amortizó la mitad del mismo. Observe que, dado el carácter progresivo de las amortizaciones, es erróneo pensar que a mitad del plazo total se amortiza la mitad de la deuda.

Buscaremos ese momento p al que denominaremos tiempo medio de reembolso:

$$\frac{V_0}{2} = T_p$$

$$\frac{V_0}{2} = V_0 . s^{-1}(1;n;i) . s(1;p;i) = V_0 . \frac{i}{(1+i)^n - 1} . \frac{(1+i)^p - 1}{i}$$

despejamos p

$$\frac{1}{2}=\frac{i}{(1+i)^n-1}\cdot\frac{(1+i)^p-1}{i}=\frac{(1+i)^p-1}{(1+i)^n-1}$$

$$\frac{1}{2}\cdot[(1+i)^n-1]=(1+i)^p-1 \quad \frac{(1+i)^n-1}{2}+1=(1+i)^p$$

$$(1+i)^p=\frac{(1+i)^n-1+2}{2}=\frac{(1+i)^n+1}{2}$$

$$p.\log(1+i)=\log\left[\frac{(1+i)^n+1}{2}\right]$$

$$\boxed{p=\frac{\log\left[\frac{(1+i)^n+1}{2}\right]}{\log(1+i)}}$$

Características del sistema de préstamo francés

a) la ley financiera utilizada es a interés compuesto,

b) resulta de la aplicación de una renta cierta, temporaria de términos constantes,

c) la cuota es constante si es constante la tasa de interés,

d) los intereses son calculados sobre saldos de deuda, los que son decrecientes,

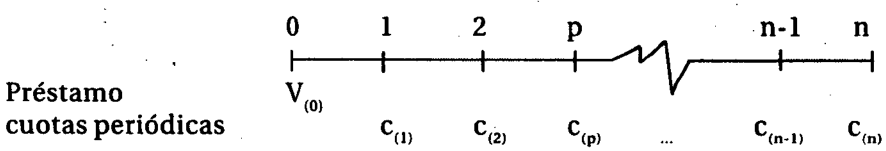
e) la amortización progresiva es creciente en (1+i),

f) el tanto de interés implícito de la operación es la tasa de interés contractual considerando las cuotas puras.

g) los factores exógenos (recargos en las cuotas, deducciones en la cuantía del préstamo), que se generan al concretar los préstamos medidos en tanto de interés provocan un tanto de interés implícito o coste financiero diferente de la tasa contractual.

SISTEMA DE PRÉSTAMO ALEMÁN

Deducción de las fórmulas



Las cuotas son variables: $c_{(1)} \neq c_{(2)} \neq c_{(3)} \ldots \neq c_{(n-1)} \neq c_{(n)}$

Resulta la siguiente ecuación de equivalencia en el origen: $\sum_{p=1}^{n} \frac{c_p}{(1+i)^p} = V_0$

Sabemos que cada cuota se compone de amortización y de interés calculado sobre saldos de deuda. Por otro lado, la amortización contenida en cada cuota será una parte alícuota del capital, quiere decir que el préstamo se cancela con n cuotas de capital o amortización de importe fijo y por otro lado, el interés contenido en cada uno de las cuotas calculados sobre saldos de deuda será decreciente por la forma de cálculo, entonces cada una de las cuotas serán decrecientes y ya podemos pensar que disminuirán en un importe igual al que disminuirán los intereses contenidos en cada una de ellas.

Usted podrá hacer un cuadro de marcha con una operación de préstamo de estas características, por ejemplo un préstamo de $ 1.200 a devolver en 3 mensualidades consecutivas, la primera de ellas al mes siguiente del contrato, las que incluyen una tasa de interés mensual del 2% y una amortización constante. A los fines prácticos, para no realizar otro cuadro, lo remito solamente al cuadro del ejercicio N° 9 de Combinación de Préstamos, pero vea solamente el punto 4) que responde a este tipo de préstamo, no se preocupe por el resto. Trate de armar el cuadro de marcha. Es muy sencillo y si no allí está expuesto. Calcule los intereses totales de la operación, observe que se trata de una renta variable en progresión aritmética como lo son la sucesión de cuotas de este préstamo. Hasta allí pudo aplicar lo visto en Rentas. Ahora, hallaremos cada componente.

Por lo comentado:

➪ ***Amortización contenida en la cuota p***

La amortización real para cualquier "p" período es constante $t = \frac{V_{(o)}}{n}$

+

➪ ***Interés contenido en la cuota p***

El Interés contenido en la cuota 1 será: $I_1 = V_0 \, . \, i$

Si sumamos amortización e interés contenido en la ***cuota 1***: $c_1 = V_o . \left(\frac{1}{n} + i \right)$

Veamos cada una de las cuotas siguientes que serán decrecientes en función de los intereses.

$$I_2 = V_2 . i \qquad I_3 = V_3 . i \qquad \ldots \qquad I_n = V_n . i$$

$$I_2 = \left(V_o - \frac{V_0}{n} \right) . i \qquad I_3 = \left(V_o - 2\frac{V_0}{n} \right) . i \qquad \ldots \qquad I_n = \left(V_0 - (n-1)\frac{V_0}{n} \right) . \, i$$

Distribuimos i y nos queda:

$$I_2 = V_0.i - \frac{V_0}{n}i \qquad I_3 = V_0.i - 2\frac{V_0}{n}i \qquad \ldots \qquad I_n = V_0.i - (n-1)\frac{V_0}{n}i$$

Si al Interés contenido en cada cuota le sumamos la amortización nos da el valor de cada cuota:

➩ ***Cuota p***

$$c_2 = \frac{V_{(o)}}{n} + V_0.i - \frac{V_0}{n}i \qquad c_3 = \frac{V_{(o)}}{n} + V_0.i - 2\frac{V_0}{n}i \qquad c_n = \frac{V_{(o)}}{n} + V_0.i - (n-1)\frac{V_0}{n}i$$

O sea que para cualquiera cuota p

$$cp = V_o\left(\frac{1}{n} + i\right) - (p-1)\frac{V_o.i}{n} \qquad \text{o bien:} \qquad cp = c_1 - (p-1).\frac{V_o.i}{n}$$

Cada cuota se descompone en una cuota de interés I_p o interés periódico y una cuota de capital t_p o amortización real que es la única porción de la cuota que se destina a disminuir la deuda. Acá la amortización real es constante y el interés es decreciente en una razón constante que como se puede observar esa disminución es igual a $-\frac{V_0}{n}.i$:

Entonces, si el préstamo representa el valor actual de estas contraprestaciones variables, cuya razón de variación es una constante ($-\frac{V_0}{n}.i$), podemos decir que se trata del Valor Actual de una Renta Variable en Progresión Aritmética.

➩ ***Total Amortizado***

Se llega a que el total amortizado en un momento dado —p— es la suma de amortizaciones a ese momento y como son iguales es p veces una amortización.

$$T_p = \frac{V_{(o)}}{n}.p$$

➩ ***Saldo de deuda***

Si deseamos conocer el saldo de deuda al momento después de haber abonado la cuota (p-1)

$$V_p = V_0 - T_{p-1} = V_0 - (p-1)\frac{V_0}{n} = V_0\left[1 - \frac{(p-1)}{n}\right] = V_0\left[\frac{n-p+1}{n}\right]$$

$$V_p = V_{(o)}\frac{(n-p+1)}{n}$$

Los mismos comentarios que en el sistema francés, en lo referente a V_p y V'_p.

$$V'_p = V_0 - T_p = V_0 - p\frac{V_0}{n} = V_0\left[\frac{1-p}{n}\right] = V_0\left[\frac{n-p}{n}\right]$$

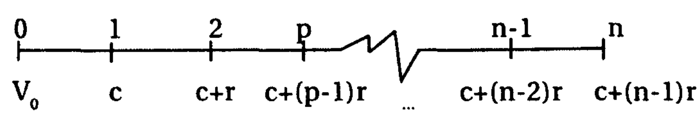
Si se quiere conocer el saldo de deuda en forma recurrente tenemos:

$$\boxed{V'_{(p)} = V'_{(p-1)} \cdot (1+i) - c_p = V_p \cdot (1+i) - c_p = V_{(p+1)}}$$

Pudimos observar que las n cuotas que cancelan el préstamo constituyen una renta variable en progresión aritmética y por lo tanto las fórmulas se podrían haber derivado directamente utilizando el valor actual de dicha renta variable, siendo así nos hubiera permitido calcular todos los componentes de un préstamo cuyas contraprestaciones sean variables crecientes o decrecientes en una razón constante.

➪ ***El valor de la cuota en función a la fórmula de Valor Actual de una Renta Variable en Progresión Aritmética***

Atento a que la aplicación en el contexto es de Préstamos que se reintegran con cuotas variables con una razón igual a $-\frac{V_0}{n}.i$ podríamos verificar lo comentado partiendo de la fórmula de "valor actual de la renta variable en progresión aritmética" y reemplazar "r" por el valor $-\frac{V_0}{n}.i$ de la siguiente manera:



$$V_{(0)} = c_1 \cdot a(1;n;i) + \frac{-\frac{V_{(o)} \cdot i}{n}}{i}[a(1;n;i) - n \cdot v^n]$$

Despejamos el valor de c_1 y resolvemos algebraicamente sabiendo que $v^n = [1 - a(1;n;i) . i]$. Ello surge de despejar v^n de la expresión a(1;n;i). Recordemos que $a(1;n;i) = \frac{1-v^n}{i}$

$$V_{(o)} = c_1 \cdot a(1;n;i) - \frac{V_{(o)} \cdot i}{n \cdot i}[a(1;n;i) - n \cdot (1 - a(1;n;i).i]$$

$$V_{(o)} = c_1 \cdot a(1;n;i) - \frac{V_{(o)} \cdot i}{n \cdot i}[a(1;n;i) - n \cdot + na(1;n;i).i]$$

$$V_{(o)} = c_1 \cdot a(1;n;i) - \frac{V_{(o)} \cdot i}{n \cdot i} a(1;n;i) + n \cdot \frac{V_{(o)} \cdot i}{n \cdot i} - \frac{V_{(o)} \cdot i}{n \cdot i} na(1;n;i).i$$ simplificamos:

$$V_{(o)} = c_1 \cdot a(1;n;i) - \frac{V_{(o)}}{n} a(1;n;i) + V_{(o)} - V_{(o)} a(1;n;i).i$$

$$V_{(o)} = c_1 \cdot a(1;n;i) - \frac{V_{(o)}}{n} a(1;n;i) + V_{(o)} - V_{(o)} a(1;n;i).i$$

$$\frac{V_{(o)} - V_{(o)} + V_{(o)} a(1;n;i).i + \frac{V_{(o)}}{n} a(1;n;i)}{a(1;n;i)} = c_1$$

Simplificamos el factor de actualización a(1;n,i): $c_1 = V_{(o)} i + \frac{V_{(o)}}{n}$

Ordenamos los términos y nos queda la fórmula de cuota N°1 en el sistema alemán:

$$\boxed{c_1 = V_o \left(\frac{1}{n} + i \right)}$$

Características del sistema de préstamo alemán

a) la ley financiera utilizada es a interés compuesto,

b) es la aplicación de una renta cierta, temporaria de términos variables en progresión aritmética,

c) la cuota es variable,

d) los intereses son calculados sobre saldos de deuda, los que son decrecientes,

e) la amortización es constante pues es una alícuota fija de capital,

f) el tanto de interés implícito de la operación es la tasa de interés contractual,

g) los factores exógenos (recargos en las cuotas, deducciones en el préstamo), que se generan al concretar los préstamos medidos en tanto de interés provocan costes financieros que difieren de la tasa contractual.

Cuadro de marcha para préstamos cuyos intereses se calculan sobre principal

- **Sistema de préstamo directo**

Cuota constante: comprende amortización constante e interés constante pues siempre se calcula sobre el principal.

P	V(p) SALDO de DEUDA al INICIO	I(p) CUOTA DE INTERES	t(p) CUOTA DE AMORTIZ	c(p) CUOTA	T(p) TOTAL AMORTIZADO	V'(p) SALDO DE DEUDA LUEGO DE ABONADA LA CUOTA p
0	V(0)	0	0	0	0	V'(0) = V(0)
1	$V_{(1)} = V'_{(0)} = V_{(0)}$	$I(1) = V_{(0)}\, i_r$	$t(1) = c - I(1) = V_0/n$	c	$T(1) = t(1)$	$V'(1) = V(1) - t(1) = V(o) - T(1)$
...	...	...	...	...	...	...
n-1	$V(n-1) = V'(n-2)$	$I(n-1) = V_{(0)}\, i_r$	$t(n-1) = c - I(n-1) = V_0/n$	c	$T_{(n-1)} = T_{(n-2)} + t_{(n-1)}$ $T_{(n-1)} = \frac{Vo}{n} \cdot (n-1)$	$V'(n-1) = V(n-1) - t(n-1) = V(o) - T(n-1)$
n	$V(n) = V'(n-1)$	$I(n) = V_{(0)}\, i_r$	$t(n) = c - I(n) = V_0/n$	c	$T_{(n)} = T_{(n-1)} + t_{(n)}$ $T_{(n)} = Vo$	$V'(n) = V(n) - t(n) = V(o) - T(n) = 0$

Usted podrá confeccionar el cuadro de marcha con una operación de préstamo de estas características, por ejemplo un préstamo de $ 1.200 a devolver en 3 mensualidades consecutivas, la primera de ellas al mes siguiente del contrato, las que incluyen una tasa de interés directa mensual del 2% y una amortización constante. Este cuadro se corresponde con el del ejercicio N° 9 de Combinación de Préstamos, en su punto 9) que responde a este tipo de préstamo, no se preocupe por el resto. Trate de armar el cuadro de marcha. Es muy sencillo y si no, allí está expuesto. Calcule los intereses totales de la operación. Ahora, hallaremos cada componente. Es el sistema más sencillo.

Deducción de las fórmulas

➩ *Cuota*

Si usted toma un préstamo mediante el sistema directo para determinar cuánto deberá ser la contraprestación se razona de la siguiente manera:

Al préstamo de una determinada cuantía V(o) se le recargan intereses durante el plazo de vigencia de la operación, utilizando la ley financiera a interés simple. Este valor: $V(o) \cdot (1+i_r \cdot n)$ constituido representa el principal y sus intereses, que será reembolsado periódicamente mediante una distribución lineal mediante n cuotas constantes, es decir:

$$c = \frac{V_{(o)} \cdot (1 + i_r . n)}{n} = V_{(o)} \cdot \left(\frac{1}{n} + i_r \right)$$

Por lo visto, los intereses totales del préstamo serán n veces el interés de un período ya que es constante y por lo tanto es: $V_0 \cdot n \cdot i_r$ pues en este sistema directo o también denominado de la tasa directa cargada, los intereses siempre se calculan sobre el principal, independientemente del saldo adeudado. La amortización también es una alícuota fija del capital, tal como se determinó en el sistema alemán. En conclusión:

$$\boxed{c = V_o \cdot \left(\frac{1}{n} + i \right)}$$

➪ ***Amortización e Interés contenido en cada cuota***

$$t = \frac{V_{(o)}}{n} \qquad I = V_0 \cdot i$$

Cada cuota se descompone en una cuota de interés I_p o interés periódico constante y una cuota de capital t_p o amortización real que es la porción de la cuota que se destina a amortizar y por lo tanto, a disminuir la deuda que también es constante.

➪ ***Total amortizado***

El total amortizado será: $\boxed{T_p = \frac{V_{(o)}}{n} \cdot p}$

➪ ***Saldo de deuda***

El saldo de deuda V_p luego de abonada la cuota p-1, en ese preciso momento (p-1):

$$V_p = V_{(o)} \frac{(n - p + 1)}{n}$$

El saldo de deuda V'_p luego de abonada la cuota p, en ese preciso momento (p):

$$V'_p = V_{(o)} \frac{(n - p)}{n}$$

Observe que para determinar el saldo de deuda, en función retrospectiva, total amortizado y amortización contenida en cada cuota, responde a las fórmulas del sistema alemán; pues el servicio de amortización es constante como en el sistema alemán.

En el mercado, se da tanto la financiación con cuotas vencidas, como con cuotas adelantadas: la modalidad más común es un anticipo en el momento 0 que es de igual importe al de la cuota. Más común es el diferimiento en el pago de las cuotas que cancelan el préstamo a los fines de alentar el consumo y se da generalmente en épocas cercanas a determinados eventos, tales como Día de la Madre, del Padre, Fin de Año...

Tanto de interés contractual —i_r— en el sistema de préstamo directo y la tasa de interés implícita de la operación —i^*—. Relaciones

La diferencia sustancial con respecto a los otros sistemas de préstamos es la forma de cálculo de los intereses contenidos en cada cuota, los que se calculan siempre sobre el principal, a pesar de que el saldo adeudado se va reduciendo en cada pago.

Una relación muy importante es encontrar: "i_p" representada por la relación entre I_p y V_p, sabiendo que I_p está calculado en función a esa tasa i contractual. Esta variación relativa periódica —i_p— va incrementándose a medida que el préstamo se acerca a su expiración.

Aquí en este sistema ocurre algo diferente con los anteriormente vistos, en donde los intereses se calculaban sobre saldos de deuda. En este sistema directo, resulta un tanto de interés periódico sobre saldos variable y creciente.

Así analizado, vemos que no sirve decir que en cada período en que se abona cada cuota, el tanto de interés pasó del x % a (x+α)% sino nos interesa conocer un valor único como parámetro de comparación con otros sistemas o con la tasa de mercado. Ello nos lleva a la búsqueda del tanto de interés implícito de la operación, coste financiero periódico, tasa sobre saldos que resulta ser el único valor de i* que satisface la ecuación de equilibrio inicial, cuya expresión es:

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{c}{(1+i^*)^p} = V_{(0)}$$

Cabe preguntarse que tasa i* permite igualar el valor del préstamo con la suma de los valores actuales de las cuotas Al tratarse de cuotas constantes esta ecuación queda reducida a:

$$V_{(0)} = V_{(0)}\left(\frac{1}{n}+r\right)\cdot a(1;n;i^*)$$

Podemos pasar al primer miembro el factor de actualización de la serie uniforme y nos queda una ecuación que permite hallar ese tanto de interés implícito i*, o sea el valor que se iguala la cuota del sistema progresivo sobre saldos o francés con la cuota del sistema directo.

$$V_{(0)}\cdot a^{-1}(1;n;i^*) = V_{(0)}\left(\frac{1}{n}+i_r\right)$$

$$V_{(0)}\cdot\frac{i^*.(1+i^*)^n}{(1+i^*)^n-1} = V_{(0)}\left(\frac{1}{n}+i_r\right)$$

Encontrar el valor de i* significa resolver la ecuación de grado n. Para ello podemos acudir a las diferentes formas de cálculo de la tasa ya comentados.

La pregunta que nos hacemos es: *¿Esa i* —tasa sobre saldos— se mantiene constante cualquiera fuese la cantidad de términos o cuotas?* Podemos confeccionar un cuadro de relación entre las tasa sobre saldos una directa y la tasa sobre saldos —i*— para plazos distintos.

Recordemos que esa tasa sobre saldos es la tasa de interés implícita de la operación al representar el coste financiero de la misma.

La tasa de interés implícita de la operación —i*— en función a la tasa directa —i_r— y al número de cuotas —n—

Consideremos un préstamo de $ 1 que se reembolsa en n= 1; 2; 3; 4;... cantidad de cuotas cuyos valores de r se indican en el cuadro. Los valores hallados i* son los siguientes:

Determinación de i*					
n	i_r=0,02	i_r=0,06	i_r=0,089	i_r=0,12	i_r=0,20
1	0,02	0,06	0,089	0,12	0,20
2	0,0266	0,079	0,1165	0,1562	0,2569
3	0,0297	0,0876	0,1283	0,1710	0,2776
4	0,0315	0,0920	0,1340	0,1776	0,2849
5	0,0326	0,0943	0,1367	0,1803	0,2864
6	0,0334	0,0956	0,1379	0,1810	0,2853
7	0,0339	0,0962	0,1381	0,1807	
8	0,0342	0,0964	0,1378		
9	0,0345	0,0963			
10	0,0346				
11	0,0347				
12	0,03475				
13	0,03478				
14	0,03477				
15	0,03474				
...	...				
20	0,03443				

Observamos que a la tasa contractual del 2% directa tiene un coste financiero mensual para un préstamo a devolver en 5 cuotas del 3,26%, pero si le hubiesen financiado en 10 cuotas i* sería del 3,46%.En el caso de nuestro ejercicio inicial de V_0= 1200, n=3 e $i_{d=}$ 0,02 , el coste financiero mensual será del 2,97% tal como figura en el ejercicio integrador y tal como lo vemos en el presente cuadro. Por lo tanto, la tasa de interés implícita mensual es variable y depende no sólo de la tasa directa sino del plazo de financiación. Eso es importante a la hora de aceptar financiar una compra a la que se le aplica una determinada tasa directa de financiación y luego negociar el plazo, pues pudimos ver que a igual tasa directa pero diferente cantidad de cuotas el coste financiero es diferente.

Del cuadro podemos ver que la tasa de interés implícita crece pero no indefinidamente, tiene un límite pues vemos que resulta ser menor a 2 veces la tasa directa y luego empieza a decrecer haciéndose la función asintótica al eje de la abcisa.

Ese punto máximo que es un punto de inflexión es diferente según los valores de i pues ya comentamos que depende no solo de la tasa directa sino del valor de n, es decir del plazo de financiación

Cuanto más baja sea la tasa directa el plazo de financiación óptimo para el prestamista es mayor.

Comentarios que merece el análisis del cuadro:

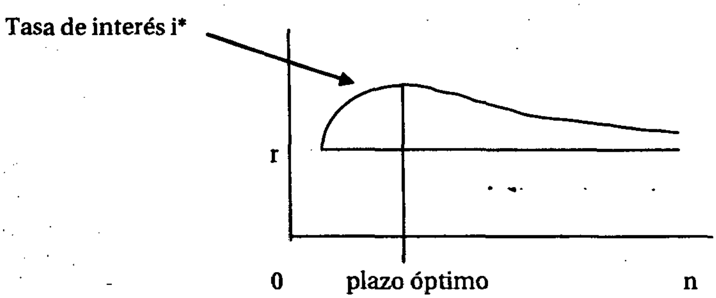
- La i^* nunca llega a duplicar la tasa i_r.
- La relación entre i^* y la i_r pasa por un punto máximo.
- Para cada valor de i_r se genera u máximo, que resulta ser un punto de inflexión, punto máximo que representa el plazo óptimo para el prestamista o colocador de fondos y el peor plazo para el deudor o tomador de fondos.
- La diferencia porcentual entre las tasas en ese punto máximo es mayor cuanto menor es la tasa i_r.

$$\frac{0{,}03478}{0{,}02}=0{,}73\rangle\frac{0{,}0964}{0{,}06}=0{,}60\rangle\frac{0{,}1381}{0{,}089}=0{,}55\rangle\frac{0{,}1810}{0{,}12}=0.50\rangle\frac{0{,}2864}{0{,}20}=0{,}43$$

Casos particulares

n	i^*
1	i_r
$\to\infty$	i_r

Gráfico de los valores hallados en función de n



La pregunta que nos hacemos es si está permitido esta modalidad de préstamo. Salvo su prohibición expresa para el ámbito de las entidades financieras, en otros rubros no está prohibido pues no hay norma que disponga al respecto que los intereses se calculen sobre saldos de deuda. En definitiva, cualesquiera sean las condiciones de un préstamo interesa en definitiva conocer su coste financiero, es decir ese valor relativo resultante de enfrentar la cuantía recibida con los desembolsos necesarios para cancelar esa deuda y encontrar un parámetro de comparación con otras alternativas. Por eso ese coste financiero resulta ser un valor único que permite su comparación.

Por resoluciones de la Secretaría de Comercio del año 1976 se pone en conocimiento que a los fines de documentar cualquier operación de venta a crédito se deberá dar a conocer al consumidor el Precio Contado (P.C) de los productos o servicios, el anticipo, el Precio Total Financiado(P.T.F), el número de períodos de financiación, la tasa de interés directa —es muy común verla escrita como T.I.D. o T.I.M.D. (abreviaturas de tasa de interés directa o tasa de interés mensual directa)— y el coste financiero. Para conocer ese coste financiero, hace referencia la resolución a las tabla de equivalencia entre la tasa de interés mensual sobre la deuda inicial y la tasa de interés mensual y anual sobre saldo de deuda publicada por el Centro de Estudios Monetarios y Bancarios del Banco Central. Al respecto, hoy día no tenemos necesidad de acudir a tablas para el cálculo de valores, como tampoco la necesitamos para la resolución de nuestras fórmulas, frente a la incorporación masiva de calculadoras como también de computadoras personales para tal fin. Si nos ubicamos en el escenario en que fue emitida la resolución (año 1976) el desarrollo tecnológico estaba reservado para algunos, y se utilizaban otras formas de medición, aproximadas muchas de ellas. Aún más, podemos afirmar que hasta hace muy poco tiempo no publicaban ese coste financiero y quien lo hacía equivocaba su resultado.

Las aplicaciones del sistema directo se ven en la financiación sobre la venta de productos (tales como electrónicos, electrodomésticos en general, automotores), contratación de servicios, entre otros.

Características del sistema directo:

a) La ley financiera utilizada en el sistema directo es a interés simple.

b) La cuota es constante.

c) La amortización contenida en cada cuota es constante.

d) El interés contenido en cada cuota es constante.

e) La tasa de interés contractual, a la que denominamos tasa directa —i_r— para préstamos reembolsables en cuotas genera un tanto de interés implícito diferente.

f) El tanto de interés implícito depende del número de cuotas y toma un valor máximo con relación al tanto contractual.

SISTEMA DE PRÉSTAMO AMERICANO A DOS TASAS

El tomador del crédito deberá pagar periódicamente los intereses de acuerdo a una tasa activa "i_a". Como la deuda se paga al finalizar la operación, el saldo de la misma es siempre el préstamo $V_{(0)}$ quien genera intereses a esa tasa activa i_a.

Este deudor efectúa imposiciones periódicamente a los fines de intentar constituir el capital que debe devolver al vencimiento —n—, así planteado constituye un sistema de préstamo con constitución de fondo de amortización.

Esquema de la operación: a través del eje de plazos y capitales

	0	1	2	p		n-1	n
Préstamo	$V_{(0)}$						
cuotas total	$ct_{(1)}$	$ct_{(2)}$	$ct_{(3)}$	...	$ct_{(n-1)}$	$ct_{(n)}$	
cuota de interés		$ci_{(1)}$	$ci_{(2)}$	$ci_{(p)}$	...	$ci_{(n-1)}$	$ci_{(n)}$
cuota de capital		$cf_{(1)}$	$cf_{(2)}$	$cf_{(p)}$	...	$cf_{(n-1)}$	$cf_{(n)}$
Fondo acumulado hasta p		$FA_{(1)}$	$FA_{(2)}$	$FA_{(p)}$	...	$FA_{(n-1)}$	$FA_{(n)}$
Desembolso Neto	$V'_{(1)}$	$V'_{(2)}$	$V'_{(3)}$	...	$V'_{(n-1)}$	$V'_{(n)}$	

Cuadro de marcha

p	V(p) SDO DEUDA	ci(p) CUOTA DE INTERES	cf(p) CUOTA AL FONDO	ct(p)	I(p) INTERESES GANADOS	FA(p) FONDO ACUMULADO	V'p) DESEMBOLSO NETO PARA CANCELACION
0	$V_{(0)}$	0	0	0	0	0	$V'_{(0)} = V_{(0)}$
1	$V_{(0)}$	$Ci_{(1)} = V_{(0)} . i_a$	$cf_{(1)}=V_{(0)}\, s^{-1}(1;n,i_p)$	c	$I_{(1)} = FA_{(0)} . i_p$	$FA_{(1)} = cf_{(1)}$	$V'_{(1)} = V_{(0)} - FA_{(1)}$
...	...	...	...	...	...	...	...
n-1	$V_{(0)}$	$ci_{(n-1)} = V_{(0)} . i_a$	$cf_{(n-1)} = V_{(0)}\, s^{-1}(1;n,i_p)$	c	$I_{(n-1)}=FA_{(n-2)} . i_p$	$FA_{(n-1)} = cf_{(1)}\, s(1;n-1;i_{(p)})$	$V'_{(n-1)} = V_{(o)} - FA_{(n-1)}$
n	$V_{(0)}$	$ci_{(n)} = V_{(0)} . i_a$	$cf_{(n)} = V_{(0)}\, s^{-1}(1;n,i_p)$	c	$I_{(n)} = FA_{(n-1)} . i_p$	$FA_{(n)} = cf_{(1)}\, s(1; n; i_{(p)})$ $FA_{(n)} = V_{(o)}$	$V'_{(n)} = V_{(o)} - FA_{(n)} = 0$

Características del sistema americano y sus fórmulas

El préstamo recibido como prestación única será devuelto mediante:

- ➢ pago periódico de intereses, calculados a una tasa $_{ia}$ que devenga el préstamo. Si la tasa es constante, entonces la cuota de interés periódica será constante.
- ➢ reembolso de capital a su vencimiento, con constitución de un fondo de amortización: aunque el deudor está obligado al desembolso del principal al fin estipulado en el contrato de préstamo, efectuará imposiciones periódicas y constantes en un fondo que devenga una tasa i_p a los fines de constituir el mismo capital que debe devolver al final del contrato.

Es un sistema llamado "*Sistema de amortización a dos tasas" o Sinking Fund,* debido a que lo común es que existan dos tasas de interés diferentes entre sí: la tasa que denominamos i_a es la que el prestatario abona por el uso del capital pedido en préstamo, constituye una tasa activa y por otro lado la tasa pasiva que denominamos i_p y la podemos definir como la tasa que remunera los depósitos que constituye el deudor para formar el fondo de amortización.

Por lo visto, coexisten dos contratos de signo distinto, uno como deudor del capital recibido mediante el contrato de préstamo y otro como acreedor del capital formado mediante un contrato de ahorro.

p	Dinámica del	
	Contrato de préstamo	**Contrato de ahorro**
0		
1	$I_1 = V_{(0)} \cdot i_{(a)}$	$cf_1 = V_{(0)} \cdot s^{-1}(1;n;i_{(p)})$
2	$I_2 = V_{(0)} \cdot i_{(a)}$	$cf_2 = V_{(0)} \cdot s^{-1}(1;n;i_{(p)})$
...	$I_{n-1} = V_{(0)} \cdot i_{(a)}$	$cf_{n-1} = V_{(0)} \cdot s^{-1}(1;n;i_{(p)})$
n	$I_n = V_{(0)} \cdot i_{(a)} + V_{(0)}$	$cf_n = V_{(0)} \cdot i_{(a)} \cdot s^{-1}(1;n;i_{(p)})$

$\sum cf_p$ capitalizadas a la tasa $i_{(p)} = V_{(0)}$

Cuota

Cada cuota se descompone en una cuota de interés —obligatoria— y una cuota al fondo —facultativa— que es una tasa de reconstrucción del fondo, o simplemente fondo amortizante. Por tal motivo, en la realidad económica: $i_a > i_p$, pues es muy difícil que la tasa diferencial entre la que abona el prestatario y la que cobra por sus depósitos sea nula o con signo negativo.

La cuota total es suma de cuota obligatoria y cuota facultativa.

$$\boxed{c = V_{(0)} \cdot \left[i_a + s^{-1}(1;n;i_p) \right]}$$

Es importante analizar el comportamiento de las dos tasas, transformando la expresión anterior, sabiendo que $ip + s^{-1}(1;n;ip) = a^{-1}(1;n;ip)$; entonces:

$$c = V_{(0)} \cdot [(i_a - i_p) + a^{-1}(1;n;i_p)]$$

Las dos tasas

Si analizamos el segundo factor del segundo miembro tenemos:

- si: $(i_a = i_p)$ ese término se anula y la cuota del sistema americano se transforma en la cuota del sistema francés.

- si: (i_p = 0) el factor cuota es 1/n que sumado a i_a se transforma en la cuota del sistema directo

- La realidad económica es que ($i_a > i_p$) y que en el proceso de constitución del capital o del fondo que realiza el deudor no puede afectar esa suma como pago que sirva para cancelar el principal, pues hasta el vencimiento la deuda se mantiene igual, es decir el deudor siempre adeuda el préstamo inicial sobre el que se devengan y se pagan intereses.

Recordemos hacer un cuadro de marcha con una operación de préstamo de estas características, por ejemplo un préstamo de $ 1.200 a devolver en 3 mensualidades consecutivas, la primera de ellas al mes siguiente del contrato, las que comprenden únicamente intereses calculados a la tasa de interés mensual del 2%, conjuntamente el deudor depositará una cuota mensual durante el plazo de la operación de 3 meses, las que ganan intereses de forma tal de constituir con la última cuota depositada y en ese momento un fondo equivalente al valor del préstamo que deberá cancelar. Está expuesto en el cuadro del ejercicio N° 9 de Combinación de Préstamos, en sus puntos 11), 12), 13) y 14) pues cada uno de ellos responden a tasas de interés diferentes que retribuyen al Fondo de Ahorro, a los fines de generar relaciones con otros sistemas.

En este sistema no se pagan intereses sobre los saldos adeudados, los que en realidad estarían representados por la columna de "desembolso neto" para el caso que ambos contratos de préstamo y ahorro estuvieran cargados en la misma persona.

Desembolso neto

Pero, ¿qué sucede con la deuda? Si en un momento p se decide rescindir la operación y consecuentemente, cancelarla, el deudor está obligado a la cancelación del capital recibido en préstamo (pues nunca amortizó), pero por otro lado tiene derecho a la devolución del fondo constituido hasta el momento p.

De la conjunción de ambos contratos que podrían llamarse de préstamo y de depósito surge un desembolso neto que será menor que la deuda en todo momento p>1.

$$\boxed{DN_{(K)} = V_{(0)} - F(k)}$$

En conclusión, en caso de rescisión contractual el Desembolso al que estaría sujeto el deudor es el neto de la deuda —V(0)— y el acumulado en el Fondo de constitución —F(k)—. Este último importe resulta ser creciente a medida que avanzamos en el perfil temporal de la renta, por lo que guarda relación inversa con el importe a saldar de la deuda —DN(k)—.

➪ *Fondo Acumulado y sus Intereses devengados*

0 1 2 3 ... n-1 n

Préstamo $V_{(0)}$

cuotas del fondo $cf_{(1)}$ $cf_{(2)}$ $cf_{(3)}$ ... $cf_{(n-1)}$ $cf_{(n)}$

El deudor deberá abonar una cuota tal periódicamente, que capitalizadas a la tasa de interés i_p al cabo de n períodos integre un monto destinado a la cancelación de V_0.

La equivalencia queda así planteada:

$$cf_1 .(1+i_p)^{n-1} + cf_2 .(1+i_p)^{n-2} + cf_3 .(1+i_p)^{n-3} + ... + cf_{(n-1)} .(1+i_p) + cf_{(n)} = V_0$$

Ya que cada una de las cuotas del fondo son iguales, nos queda:

$$cf_1 . [(1+i_p)^{n-1} + (1+i_p)^{n-2} + .(1+i_p)^{n-3} + ... + (1+i_p) + 1] = V_0$$

Estamos en condiciones de resolver la suma de la progresión geométrica. Ordenamos para que resulte más simple en orden creciente la progresión. Así ordenada, el 1° término de esta suma es 1, la razón es $(1+i_p)$ y la cantidad de términos son n. Resolvemos, identificando el factor de capitalización de esta serie : $s(1;n,i_p)$.

$$cf_1 . s(1;n;i_p) = V_0$$

$$\boxed{F(k) = c(f) * s(l;k;i_{(p)})}$$

$$IF(k) = F(k-l) * i_{(p)}$$

➪ *Tasa de interés implícita de la operación*

Acá cabe preguntarse que tasa i* permite igualar el valor del préstamo con la suma de los valores actuales de las cuotas totales representadas por los desembolsos que debe afrontar quien tomó el préstamo en concepto de cuota de interés y cuota del fondo. Al tratarse de cuotas constantes la ecuación anterior queda reducida a la siguiente:

$$V_{(0)} = V_{(0)} \left[i_a + s^{-1}(1;n;i_p) \right] \cdot a(1;n;i^*)$$

Podemos pasar al primer miembro el factor de actualización de la serie uniforme y nos queda una ecuación que permite hallar ese tanto de interés implícito i*, o sea el valor que se iguala a la cuota del sistema progresivo sobre saldos o francés con la cuota del sistema americano.

$$V_{(0)} \cdot a^{-1}(1;n;i^*) = V_{(0)}\left[i_a + s^{-1}(1;n;i_p)\right]$$

$$V_{(0)} \cdot \frac{i^*.(1+i^*)^n}{(1+i^*)^n - 1} = V_{(0)} \cdot \left[i_a + s^{-1}(1;n;i_p)\right]$$

Encontrar el valor de i* significa resolver la ecuación de grado n. Para ello podemos acudir a las diferentes formas de cálculo de la tasa ya comentados en el Capítulo VIII - "Capitales Múltiples".

RELACIÓN ENTRE EL TANTO DE INTERÉS CONTRACTUAL Y LA TASA DE INTERÉS IMPLÍCITA DE LA OPERACIÓN PARA CUALQUIER SISTEMA DE PRÉSTAMO

Nos ocuparemos del tanto de interés en el contrato de préstamo. Podemos mencionar el primer referente y es la T.N.A., o la T.E.M. que se especifica expresamente en el contrato. Esta tasa la denominamos "contractual" en un sentido amplio pues es la tasa de referencia que está consignada en todo instrumento financiero.

Podemos decir que esa tasa contractual medida en términos nominales anuales o efectivo anual o mensual, es la tasa que se aplica para el cálculo de los componentes del sistema de préstamo convenido entre las partes. Así calculamos por ejemplo el valor de cada cuota mensual. Son cuotas puras pues no tenemos en cuenta todavía la incidencia de gastos.

Antes de avanzar quiero detenerme en una aclaración sobre la TNA que en comunicaciones de BCRA por ej. en la Com. "A" 3052 la define como la tasa contractualmente pactada. En este trabajo, cuando menciono la tasa de referencia de una operación que puede estar expresada como una T.NA, T.E.A. y T.E.M. la denominé "Tasa contractual" no por ser TNA sino por ser la tasa que consta en el contrato, la que reitero puede ser efectiva o nominal. El propósito justamente es diferenciar esa:

- tasa que denomino contractual y que sirve de base para los cálculos de todos los componentes de una operación de la otra. También puede definirse como "tasa explícita";
- tasa implícita resultante de la operación.

Aclarado esto, podemos agregar que de todas formas una operación concertada en el mercado financiero institucionalizado debe contener como mínimo dos tasas, la T.N.A. y la T.E.A. y en el caso de operaciones activas aparece otra más esa tasa implícita que en la comunicación de B.C.R.A. la denomina C.F.T. (Coste Financiero Total).

¿En qué circunstancias coste financiero total puede ser diferente de la tasa contractual? Plantear la ecuación de valor del coste financiero no es otra cosa que buscar el tanto de interés que permita una equivalencia financiera entre los flujos de fondos (cuantía recibida) y cuantías a entregar (las cuotas del préstamo). En determinados sistemas de préstamos, tales como el sistema francés, el alemán y en general cualquiera en donde la forma de cálculo de los intereses se realice sobre saldos de deuda generan una tasa de interés implícita igual a la tasa contractual. Recordemos que la tasa contractual es aquella utilizada para la determinación de los componentes del cuadro de marcha de un préstamo y es la fijada y generalmente publicada.

Ahora bien, nos preocupa conocer si esa tasa contractual es la verdadera tasa de la operación, es decir si planteamos nuestra equivalencia financiera, por ejemplo al origen, y nos preguntamos cuál es la tasa de interés que permite satisfacer la ecuación financiera, en donde decimos que el valor actual (el préstamo) que recibe el deudor tiene que ser equivalente financieramente al valor actual de esas cuotas mensuales.

En esa ecuación puede resultar que esa tasa de interés que denominaremos "tasa de interés implícita" coincida con esa tasa contractual y podemos afirmar que el sistema de préstamo es transparente, me cobran lo que me dicen que me van a cobrar.

Hemos visto que hay sistemas de préstamos en donde se produce esa transparencia financiera y hay sistemas en donde dicha situación no ocurre y entonces resulta importante conocer cuál es el verdadero coste financiero de la operación para el deudor o el rendimiento financiero para el acreedor, es decir cuál es la tasa de interés implícita de la operación, obligándonos a abandonar para toma de decisiones esa tasa contractual.

Ahora bien, en oportunidad de solicitar un préstamo la entidad acreedora nos pone en conocimiento de gastos involucrados al mismo, situación que generan también en determinadas inversiones. A la hora de tener que decidir, debemos incorporar todos estos elementos para asegurarnos de elegir bien cuál préstamo me conviene más. Debemos partir de la misma equivalencia financiera anterior a la que le agregaremos esos gastos pues representan un importe más alto de cuotas y un importe menor de préstamo recibido para el caso de gastos por única vez al origen. La tasa de interés que permite satisfacer dicha ecuación también es la "tasa de interés implícita financiera" o "coste financiero del deudor".

Al respecto aparece el concepto "coste financiero total", denominado así en las comunicaciones del Banco Central de la República Argentina, el que debe ser publicado conjuntamente con la tasa activa que es la tasa contractual (la del contrato del préstamo).

Suponga usted que en oportunidad de concretarse la operación financiera de préstamo se producen gastos e impuestos sobre dichos gastos, tal como ocurre. Todos estos gastos de formalización del préstamo modifican la equivalencia financiera inicial .Por otro lado, hay gastos mensuales relacionados a emisión de resúmenes, formalización de seguros personales —seguro sobre la vida—, seguros patrimoniales —ej. seguros contra incendio— impuestos sobre los intereses y otros conceptos. La pregunta que debemos hacernos es: ¿A qué tasa se produce esa equivalencia financiera? A una tasa i*. Esa tasa i* es denominada costo financiero total, o tasa interna de retorno (T.I.R.), aclarando que el concepto de TIR es más complejo que considerar Costo Financiero o tasa de interés implícita, pues la TIR trae supuestos muy fuertes que no siempre se cumplen, tales como la reinversión y financiación de los flujos a esa misma tasa.

Así planteado, puede ocurrir entonces, que el coste financiero del deudor difiera del rendimiento financiero del acreedor, pues la consideración impositiva, es un mayor flujo de fondos para el deudor y afecta su coste financiero pero no ocurre lo mismo para el acreedor en donde es simplemente un agente de retención y no forma parte de su rendimiento financiero.

Entonces, definimos esa tasa i* como la tasa de interés implícita de la operación de préstamo o de financiación y representa aquella tasa que produce la equivalencia financiera entre los flujos de caja positivos (el importe efectivamente cobrado del préstamo) y negativos (los desembolsos de caja periódicos).

Ecuación del valor de la tasa de interés implícita de la operación i*:

a) Considerando cuotas puras —cp— que incluyen la tasa de interés contractual —i— que cancelan el préstamo V_0.

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{cp}{(1+i^*)^p} = V_0$$

Tal como hemos visto:

$i^* = i$ en los sistemas de préstamos francés, alemán....

$i^* \neq i$ en los sistemas de préstamos directo, americano....

b) Considerando cuota pura —cp— más gastos —β— que representan un mayor egreso para el deudor y —α— que representan un menor ingreso por el préstamo recibido. La equivalencia financiera:

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{cp+\beta}{(1+i^*)^p} = V_0(1-\alpha)$$

Normativa

¿Se pueden cobrar comisiones o gastos? Claro que sí. Las entidades financieras exponen en sus Balance el rubro "resultados por intermediación financiera" y es la diferencia entre intereses cobrados por operaciones activas (préstamos, entre otros) e intereses pagados por operaciones pasivas (depósitos es uno de ellos). Además generan entre otros, "resultados por servicios", rubro en el que compiten las entidades para la contabilización de estas comisiones.

Al respecto, dentro del marco financiero regulado por el B.C.R.A. y en lo relacionado a operaciones que realizan las entidades financieras, en el punto 1.5. del capítulo II de la Comunicación OPRAC-1, que si bien ha sido sustituido por otras comunicaciones, es importante resaltarla por ser troncal y no modificarse en las posteriores normas que las sustituyen, se establece que queda prohibido el cobro de comisiones y otros cargos adicionales a los intereses en las operaciones de crédito respecto de los importes efectivamente desembolsados, *salvo* que se convenga con los clientes e importen una real prestación de servicios (gastos en verificaciones domiciliarias, estudio del título ofrecido en garantía, pedido de informes tales como el VERAZ, etc.) . Recordemos que en Capítulos anteriores hemos volcado dichas consideraciones con las comunicaciones actualizadas sobre Operaciones de Crédito.

Según la línea de préstamo que se trate, existen otros conceptos que incrementan el valor de la s cuotas, veamos por ejemplo el caso de un préstamo prendario en donde el acreedor cubre su crédito recargando en la cuota del deudor la prima resultante del seguro del auto que se ofrece como garantía. Si fuese un crédito hipotecario será la prima por el seguro del inmueble (por ejemplo, el seguro por incendio, pues en caso de siniestro el acreedor pierde su garantía). Además no debemos olvidar otros conceptos como el efectos impositivos, en donde las entidades actúan como agentes de retención del I.V.A., es decir el deudor también deberá pagar el IVA de los intereses periódicos. Cuantos más adicionales tenga la cuota pura, se aleja más el valor del tanto de interés implícito del tanto de interés contractual.

Entonces, es importante preguntar si la cuota que se informa es lo que se denomina cuota pura y qué adicionales se presentan. a la hora de elegir el préstamo más conveniente.

En conclusión, una vez determinadas las cuantías de las contraprestaciones que cancelan la prestación única, y que podemos denominarlas cuotas puras, debemos considerar los denominados *"factores exógenos"*, gastos que incrementan el valor de las contraprestaciones y gastos que se deducen de la prestación inicial, los que producen en la determinación del equilibrio entre ingresos y egresos financieros un tanto de interés que denominaremos implícito de la operación de financiación diferente al tanto de interés contractual que vimos al inicio.

Se plantea un problema adicional, que es la resolución de una ecuación de grado n para encontrar la raíz que satisface la ecuación de determinación de la tasa de interés. Para ello contamos con muchos elementos.

Estos métodos para determinar la tasa de interés implícita son: tablas financieras, interpolación, fórmula de Baily, pero en caso de tratarse de cuotas variables la mejor ayuda la constituye una máquina financiera y fundamentalmente la planilla de cálculo.

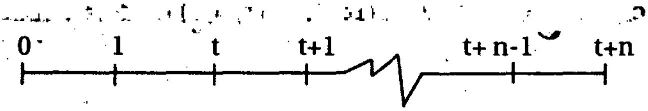
Préstamos que se cancelan con cuotas diferidas: un caso particular común en la práctica financiera

El reembolso de capital en "n" pagos después de "t" períodos de diferimiento es un caso muy utilizado. Por ejemplo, un préstamo contratado en el mes de marzo, en el cual el cronograma de pagos se inicia en el mes de julio. Cuando un préstamo se amortiza en estas condiciones el valor actual que recibe el deudor es equivalente al valor actual de una sucesión de pagos diferidos.

Pago periódico de intereses durante t periodos y reembolso del capital al vencimiento

En este caso sucede que los intereses durante los "t" períodos de diferimiento se abonen, permaneciendo constante el valor de la deuda —V_0—.

Esquema de la operación a través del eje de plazos y capitales



Préstamo $V_{(0)}$

Cuotas Periódicas $I_{(1)}$ $I_{(t)}$ $c_{(t+1)}$ ... $c_{(t+n-1)}$ $c_{(t+n)}$

$I_{(1)} = I_{(2)} = ... = I_{(h)} = V_{(0)} . i$ durante los t períodos de diferimiento.

Según sea el sistema de préstamo tomado: francés diferido —o alemán diferido en donde los pagos periódicos durante los t periodos de diferimiento correspondían sólo al pago de interés y posteriormente se continuaba el cronograma con pagos que incluyen interés y amortización—; entonces nos queda que el valor de cada cuota c_{t+p} es igual al de cada cuota del sistema tradicional (francés o alemán) pues el valor recibido devenga intereses periódicos que se pagan y la deuda siempre sigue siendo V_0.

$$C_1 = V_{(0)} . i$$

$$C_2 = V_{(0)} . i$$

...

$$C_t = V_{(0)} . i$$

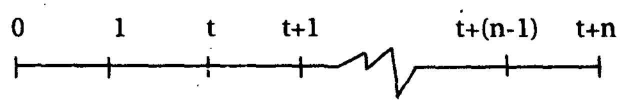
$$C_{t+1} = c_{t+2} = c_{t+n-1} = c_{t+n} = V_{(0)}\, a^{-1}\,(1, n, i) \quad \boxed{\text{Sistema francés}}$$

Algunos autores denominan a este tipo de préstamos como con "plazo de carencia", pues durante el período de diferimiento sólo se satisface la cuota de interés, de donde se observa que la ecuación de equilibrio en el origen es similar al de un préstamo inmediato y por lo tanto sus magnitudes resultantes son iguales al del préstamo sin carencia.

Capitalización periódica de intereses durante t periodos

Los intereses durante los "t" períodos de diferimiento no se abonan, acumulándose en el valor del préstamo capitalizándose.

Esquema de la operación a través del eje de plazos y capitales



Préstamo	$V_{(0)}$						
cuotas periódicas	-	-	c(t+1)	...	c(t+n-1)	c(t+n)	

$$c_{t+1} = c_{t+2} = c_{t+n-1} = c_{t+n} = V_{(0)} \cdot (1+i)^t \cdot a^{-1}(1, n, i) \quad \boxed{\text{Sistema francés}}$$

Esta fórmula responde al sistema de cuotas constantes. En caso de rentas variables deberá cambiarse el factor de actualización de la serie uniforme de arriba por el de la serie variable; o bien adaptarse al tipo de renta que fuese.

Aplicaciones

➢ SISTEMA FRANCÉS

1) Una entidad financiera decide conceder préstamos personales mediante el sistema de amortización progresiva, a una tasa de interés activa del 8,5% efectiva mensual. En el caso de una línea de préstamo de $ 6.000 amortizable en 12, 18 o 30 mensualidades.
Determinar: a) la cuota; b) el interés y el fondo amortizante contenido en la primera cuota.

Rta.:	c= 816,92	$t_{(1)}$=306,92	$I_{(1)}$=510.
	c= 662.58	$t_{(1)}$=152.58	$I_{(1)}$=510.
	c= 558.30	$t_{(1)}$= 48.30	$I_{(1)}$=510.

Para la determinación de la cuota y de los componentes que integran el primer servicio, se utilizan las siguientes fórmulas:

$c = V(0) \cdot a^{-1}(1; n; i).$

siendo:

$$c_{(1)} = t_{(1)} + I_{(1)}.$$

$$\boxed{c_{(1)} = V(0) \,.\, s^{-1}(1;n;i) + V(0) \,.\, i.}$$

a.1) si n=12 | a.2) si n=18 | a.3) si n=30.

a.1) si n=12	a.2) si n=18	a.3) si n=30.
$c= 6000\ a^{-1}\ (1,12,0.085)$	$c= 6000\ a^{-1}\ (1,18,0.085)$	$c=6000\ a^{-1}\ (1,30,0.085)$.
$c= 816.92$	$c= 662.58$	$c= 558.3$.
$I(1) = 6000 * 0.085$	$I(1) = 6000 * 0.085$	$I(1) = 6000 * 0.085$.
$I(1) = 510$	$I(1) = 510$	$I(1) = 510$.
$t(1)=6000\ s^{-1}\ (1,12,0.085)$	$t(1)=6000\ s^{-1}\ (1,18,0.085)$	$t(1)=6000\ s(1,30,0.085)$
$t(1) = 306,92$	$t(1) = 152,58$	$t(1) = 48,30$.

2) Un préstamo de \$ 3.500 será devuelto en 7 cuotas mensuales, iguales y consecutivas con vencimiento la primera de ellas al mes siguiente de su contratación, las que sufren un recargo del 6,8% mensual de interés.

Determinar:

a) la cuota;
b) la amortización real del período 4;
c) el interés correspondiente al período 4;
d) el saldo de deuda luego de abonada la cuota 3;
e) el total amortizado hasta fin del período 4;
f) el saldo de deuda al momento 4 justo antes de abonar la cuota 4;
g) Efectuar el cuadro de marcha de la operación.

Rta.: $c= 644,92$; $t_4=495,70$; $I_4=149,22$; $V_4=2.194,35$; $V_5=2.343,57$.

a) *Determinación de la cuota.*

$$c = V(0) \,.\, a^{-1} \ (1;7;0.068) = 644,92$$

b) *Determinación de la amortización contenida en la cuota 4.*

$$t(4) = t(1) \ (1+0,068)^{4-1}$$

$$t(4) = 3500 \ s^{-1} \ (1,7,0.068) \ (1+0.068)^3$$

$$t(4) = 406,92 \ .\ 1,2181864 = 495,70$$

c) *Determinación del interés contenido en la cuota 4.*

$$I(k) = V(k) \,.\, i.$$

$I(k) = c\ a(1; n-k+1; i) \ .\ i$ —en función prospectiva—.

$$I(4) = 644,92 \ a(1, 4, 0,068) \ .\ 0.068.$$

$$I(4) = 2194,35 \ .\ 0.068.$$

$$I(4) = 149,22.$$

$I(k) = [V(0) - T_{K-1}] \cdot i$ —en función retrospectiva—.

$I(k) = V(0) - [V(0)\ s^{-1}(l,n,i)\ s(l;k-l;i)] \cdot i$

$$I(4) = 3500 - 3500\ \frac{s(1;3;0{,}068)}{s(1;7;0{,}068)}\ 0{,}068$$

$I(4) = 3500 - 1305{,}65.$

$I(4) = 2.194{,}35 \cdot 0.068.$

$I(4) = 149{,}22.$

d) *Determinación del saldo de deuda luego de abonada la 3ª cuota.*

En realidad por la estructura del cuadro de marcha nos encontramos en la búsqueda de $V_{(4)}$ que si bien se visualiza como saldo de deuda al inicio del período 4, se trata del saldo luego de abonada la cuota 3.
Como se observa, si el prestatario decide rescindir el contrato y cancelar la totalidad adeudada al mes siguiente de contratado el préstamo; deberá pagar, no solamente el valor de referencia en $V_{(1)} = 3500$ sino también $I_{(1)} = 238$ correspondiente al interés devengado entre 0 y 1, o sea. $V_{(1)} + I_{(1)}$ por tratarse de $V_{(1)}$ el saldo de deuda al momento anterior.
Análogamente, si la cancelación se produjese en el momento 4 el importe a cancelar sería de 2194,35 —correspondiente al saldo pendiente de pago luego de abonada la cuota 3— más los intereses contenidos entre 3 y 4 por \$ 149,22; es decir \$ 2.343,57.

e) *Determinación del Total amortizado hasta el período 4.*

$$T(k) = V(0)\ \frac{s(1,k,i)}{s(1,n,i)}$$

$$T(4)\ 3500\ \frac{s\,(1{,}4{,}0{,}068)}{s\,(1{,}7{,}0{,}068)}$$

$T(4) = 1.801{,}35.$

f) *Cuadro de marcha.*

k	V(k)	I(k)	t(k)	c(k)	T(k)
0	3.500	0	0	0	0
1	3.500	238,00	406,92	644,92	406,92
2	3.093,08	210,33	434,59	644,92	841,51
3	2.658,49	180,78	464,14	644,92	1.305,65
4	2.194,35	149,22	495,70	644,92	1.801,35
5	1.698,65	115,51	529,41	644,92	2330,.76
6	1.169,24	79,51	565,41	644,92	2.896,17
7	603,83	41,09	603,83	644,92	3.500,00
		1.014,44	3.500,00	4.514,44	

3) Un préstamo de $ 9.200 en 15 cuotas bimestrales concedido por el sistema de amortización progresiva e intereses sobre saldos adeudados fue otorgado a una tasa efectiva mensual del 7,1%. Si luego de abonada la sexta cuota se modifica el tanto de interés al 16% bimestral, calcular la nueva cuota resultante.

Rta.: c = 1623.51.

Siendo : V(0) = 9.200 ; n = 15   i' = 0.147041   c' = x.
i'' = 0.16   c'' = x.

Primer paso: Determinación de la cuota primitiva.

$c' = 9200 \; a^{-1} \; (1; 15; 0.147041).$

$c' = 1550.88.$

Segundo paso: Cálculo de la nueva cuota, para ello primero se determinará el saldo de deuda luego de abonada la 6ta. cuota —$V_{(7)}$—. Este importe pendiente de pago será cancelado con las 9 cuotas faltantes (n-k+1)=(15-7+1), las que incluirán un nuevo interés —i''=0.16— a partir de ese momento.

$V_{(7)} = c \; . \; a\,(1; n\text{-}k\text{+}1 \,; i').$

$V_{(7)} = 1550.88 \,.\; a(1;9;0.147041).$

$V_{(7)} = 7478.75.$

$c'' = V(k) \; . \; a^{-1} \; (1; n\text{-}k\text{+}1; i'')$

$c'' = 7478.75 \,.\; a^{-1} \; (1; 9; 0.16).$

$c'' = 1623.51.$

De otro modo:

$$c'' = c' \frac{a(1; n\text{-}k\text{+}1 \,;\, i')}{a(1; n\text{-}k\text{+}1; i'')}$$

$$c'' = 1550.88 \; \frac{a(1,9,0.147041)}{a(1,9,\, 0.16)}$$

$c'' = 1623.51.$

También:

$$c'' = V(0) * \left[\, 1 - \frac{s\,(1;k\text{-}1;i')}{s(1;n;i')} \,\right] * \; a^{-1} \; (1; n\text{-}k\text{+}1;i'')$$

$$c'' = 9200 \left[\, 1 - \frac{s(1,6,0.147041)}{s(1,15,0.147041)} \,\right] \; a^{-1} \, (1,9,0.16)$$

$c'' = 1623.51.$

4) Un préstamo de $ 5.000 a pagar en 11 mensualidades iguales y consecutivas concedido mediante el sistema francés, con una tasa de interés del 9,25% mensual, luego de abonada la quinta cuota, se modifica el plazo original del mismo siendo sustituido por otro de 4 pagos adicionales y simultáneamente se modifica la tasa de interés elevándose la misma al 10,5% mensual. Determinar la nueva cuota.

Rta.: c = 550,36.

Si: $V_{(0)} = 5.000$; $n' = 11$; $i' = 0.0925$.
$V_{(6)} = x$; $n-k+1 = 10$; $i'' = 0.105$ $c'' = x$.

Entonces:

- *Determinación del saldo de deuda luego de abonada la 5ª Cuota-V_6:*

$$V_{(6)} = 5000 - 5000 \frac{s(1;5;0.0925)}{s(1;11;0.0925)}$$

$V_{(6)} = 5000 - 1689.72.$

$V_{(6)} = 3310.28.$

- *Cálculo de la nueva cuota:.*

$c'' = 3310.28\ a^{-1}\ (1; 10; 0.105).$

$c'' = 550.36.$

5) Un préstamo de $ 16.800 es contratado en 40 mensualidades con una tasa de interés del 7,5% mensual. Se presenta el deudor una vez pagadas 12 cuotas y solicita disminuir el plazo del mismo en un año, para ello abonaría en concepto de amortización extraordinaria un importe tal que no modifique el importe de las cuotas restantes.Por tal razón, se modifica el plazo por lo que restarían abonar l6 cuotas. Determinar el importe de esa amortización extraordinaria.

Rta.: AE = 3243,94.

a) *Determinación de la cuota primitiva:*

$c = 16.800\ a^{-1}\ (1;40;\ 0.075).$

$c = 1333.93.$

b) *Saldo de deuda luego de abonada la cuota 12:*

b.1 en las condiciones contractuales originales.

$V_{(13)} = 1333.93 * a\ (1;\ 28,\ 0.075)$ $n-k+1 = 40-13+1 = 28.$

$V_{(13)} = 15438.02.$

b.2 en las condiciones modificadas.

$V_{(13)} = 1333.93 * a(1; 16; 0.075).$

$V_{(13)} = 12194.09.$

c) *Determinación de la Amortización Extraordinaria.*

AE = 15438,02 - 12194,09.

AE = 3243,94.

Otro camino es considerar:

$$AE = \frac{c\ a(1,12,0.075)}{(1 + 0.075)^{16}}$$

$$AE = \frac{1333{,}93\ .\ a(1,12,\ 0.075)}{(1+0{,}075)^{16}}$$

$$AE = \frac{10318.28}{(1+0.075)^{16}} = 3243.94.$$

Ya sea un razonamiento o el otro, se arriba a los mismos resultados; en este último caso se considera que la amortización extraordinaria es el valor actual de los últimos 12 pagos que se anticipan, los que quedan expresados al momento 28 del eje del tiempo, y al cancelarse en el momento 12 son reexpresados a ese período actualizándolo 16 meses.

En el primer caso, se resolvió hallando la deuda que hubiera resultado al momento 12, en función de la cantidad de cuotas originales —es decir: 40— y por otro lado, la deuda si se empleaba la cantidad de cuotas modificadas —es decir 28—. Por tal razón, la diferencia entre el valor actual de las 28 cuotas restantes pendientes de pago —contrato original— y el valor actual de las 16 cuotas restantes pendientes de pago —según contrato modificado a partir del momento 12— genera el importe de la amortización extraordinaria a abonar en el momento 12 luego de pagada la cuota de ese período.

6) Ud. ha solicitado un préstamo de $ 50.000 a devolver en 10 cuotas mensuales, consecutivas. El sistema aplicado es el francés con tasa de interés flotante. Efectuar el cuadro de marcha del préstamo, sabiendo que las tasas aplicadas fueron las siguientes: i(1) = 0.2633; i(2)= 0.4741; i(3) =0.3058; i(4)=0.1008; i(5)= 0.1101; i(6)= 0.1319; i(7)=0.0836; i(8)=0.1506; i(9)= 0.1219 e i(10)= 0.1058. Plantee la ecuación para la determinación del costo financiero mensual promedio de toda la operación.

Cuadro de marcha de la operación de financiación.

k	V(k)	I(k)	t(k)	c(k)	T(k)
0	50.000	0	0	0	0
1	50.000	13.165	1.407,57	14.572,57	1.407,57
2	48.592,43	23.037,67	722,96	23.760,63	2.130,54
3	47.869,46	14.638,48	1.964,09	16.602,58	4.094,63
4	45.905,37	4.627,26	4.826,8	9.454,07	8.921,43
5	41.078,57	4522.75	5.190,06	9.712,81	14.111,49
6	35.888,51	4.733,69	5.517,28	10.250,97	19.628,77
7	30.371,23	2.539,04	6.704,26	9.243,29	26.333,03
8	23.666,97	3.564,25	6.811,66	10.375,91	33.144,68
9	16.855,32	2.054,66	7.943,5	9.998,16	41.088,19
10	8.911,81	942,87	8.911,8	9.854,68	50.000
		73825,67	50.000,00	123825,67	

$$50.000 = \sum_{k=1}^{n} \frac{c(k)}{(1+i^*)^n} \rightarrow i^* = 0.2592.$$

La búsqueda del coste financiero mensual de la operación surgirá utilizando una máquina financiera o bien una planilla de cálculo tipo "Excel".

7) En un préstamo a cancelar en 40 mensualidades que incluyen un interés del 7% mensual, se sabe que el total amortizado, faltando aún 15 servicios es de $ 20.000. ¿Cuál es el monto del préstamo?

Rta.: 63.127.

$T_{25} = 20000$
$n = 40$
$i = 0{,}07$ Si $T_k = V_0 \cdot \dfrac{s(1,k,i)}{s(1;n;i)}$ Entonces $V_0 = T_k \cdot \dfrac{s(1,n,i)}{s(1;k;i)}$

en nuestro caso:

$$V_0 = 20000 \frac{s(1,40,\ 0.07)}{s(1;\ 25;\ 0.07)} = 63.127.$$

8) Un préstamo pactado mediante el reembolso con cuotas mensuales, iguales y consecutivas de $ 100 que incluyen un interés del 2% mensual, registra un saldo de deuda luego de abonada la cuota k de $ 1567,85. Cuál será el saldo adeudado luego de abonada la cuota k-1 y la cuota k+1?

Rta.: 1635.14 y 1499,21.

$V_{k+2} = 1567.85 - (100 - 1567.85 * 0.02) = 1499.21.$

$V_{k+1} = V_k - t_k$

$V_{k+1} = V_k - t_{k+1} / (1 + i)$

$$V_k = 1567.85 + \frac{68.64}{(1+0,02)} = 1567,85 + 67,29 = 1635.14.$$

t	V(t)	I(t)	t(t)	c(t)
k	1.635,14			100
k+1	1.567,85	31,36	68,64	100
k+2	1.499,21			

9) Se trata de una línea de préstamo personal reembolsable en 40 mensualidades iguales y consecutivas, la primera de ellas pagaderas al mes siguiente de recibido el préstamo, en la cual se ha perdido información sobre una operación allí incluida. Es el Crédito N° 1289 del cual solo se ubicaron los últimos recibos de pago deteriorados: N° 17 y 18 del deudor pudiéndose leer solamente las amortizaciones correspondientes a esos momentos las que representan $ 329,13 y $ 333,73, respectivamente. Se pide: armar la operación determinando:

a) valor del préstamo;
b) tasa de interés mensual aplicada;
c) cuota mensual;
d) saldo de deuda antes de abonada la cuota N° 17 , en ese preciso momento;
e) saldo de deuda luego de abonada las cuotas N° 17 y 18 , en ese preciso momento.
f) Confeccione el cuadro de marcha para esos períodos.

Rta.: a) V_0 =14.000,5.
b) i_{30} = 0,014.
c) 459,5.
d) 9.442,13.
e) 8.648,89.

Cálculo de la tasa de interés

Con los datos disponibles es conveniente hallar la tasa de interés que resulta de vincular los datos correspondientes a las amortizaciones parciales

$t_p = t_{(p-1)} .(1+i)$

$333,73 = 329,13 (1+i)$

$\underline{i = 0,014}$

Determinación de V_0

$V_0 = t_1 \; . \; s(1;n;i)$

Necesitamos calcular el fondo amortizante: t_1 para aplicar en la fórmula de arriba y despejar V_0.

$t_1 . (1+0{,}014)^{16} = 329{,}13$
$t_1 . (1+0{,}014)^{17} = 333{,}73$
$t_1 = 263{,}49$

Entonces:

$V_0 = 263{,}49 \; . \; s(1;40;0{,}014)$

$V_0 = 263{,}49 \; . \; 53{,}13474547 = 14.000{,}5$

Cálculo de la cuota

$c = V_0 \,.\, a^{-1}(1;n;i)$
$c = 14.000{,}5 \; . \; a^{-1}(1;40;0{,}014)$
$c = 14.000{,}5 \; . \; 0{,}032820076$
$c = 459{,}5$

También se podía hallar la cuota partiendo de sus componentes: I_1 y t_1

$I_1 = V_0 \,.\, i = 14.000{,}5 \; . \; 0{,}014$

$I_1 = 196{,}01$ $\qquad\qquad$ $t_1 = 263{,}49$

$C = 459{,}5$

Cálculo del saldo de deuda V'_{16} luego de abonar la cuota 16

—en función prospectiva—
$V'_{16} = 459{,}5 \; . \; a(1; 40\text{-}16;0{,}014)$
$V'_{16} = 459{,}5 \; . \; 20{,}26497738$
$V'_{16} = 9.311{,}76$

—en función retrospectiva—
$V'_{16} = 14.000{,}5 \; - \; 263{,}49 \; . \; s(1;16;0{,}014)$
$V'_{16} = 14.000{,}5 \; - \; 263{,}49 \; . \; 17{,}79492628$
$V'_{16} = 14.000{,}5 \; - 4.688{,}79 = 9.311{,}76$

Pero como nos piden el cálculo del saldo antes de abonar la cuota 17, significa que V'_{16} está valuado en el momento 16 y faltan devengar los intereses que corren desde el momento 16 hasta el 17.

$V'_{16} + V'_{16} \,.\, i = V_{17} + I_{17}$

$9.311{,}76 \; + 9.311{,}76 \; . \; 0{,}014 = 9.311{,}76 + 130{,}37 = 9.442{,}13$

Para mejor comprensión ver los valores que se exponen en el cuadro de abajo.

Cálculo del saldo de deuda V'_{18} luego de abonar la cuota 18:

Si el Total amortizado T_{18} = 263,49 . s(1,18;0,014) = 263,49. 20,31067202 = 5.351,61

El saldo luego de abonada la cuota 18 en ese momento será:
14.000,50 – 5.351,61= 8.648,89

Cálculo del saldo de deuda V'_{17} luego de abonar la cuota 17:

También podemos calcular el saldo partiendo del saldo anterior V'_{16}. Es decir:

$V'_{17} = V'_{16} - t_{17}$ Sabemos que $t_{17} = t_1 .(1+i)^{16}$

$V'_{17} = 9311,76 - 263,49 . (1+0,014)^{16}$

$V'_{17} = 9311,76 - 329,13 = 8.982,63$

Cuadro de Marcha

p	V(p)	I(p)	t(p)	c(p)	T(p)	V'(p)
0	14.000,5	0	0	0	0	0
...	...	...	...	...	...	...
16	...	...	...	...	...	9.311,76
17	9.311,76	130,37	329,13	459,50	5.017,87	8.982,63
18	8.982,63	125,76	333,74	459,50	5.351,61	8.648,89

10) En un préstamo de $ 28.600 se conoce que el total de las 36 mensualidades iguales y consecutivas con primer vencimiento al mes siguiente de concretada la operación será de $ 46.179,7. Halle:
   a) El valor de cada mensualidad.
   b) La tasa de interés mensual del contrato.
   c) Los intereses totales de la operación.
   d) Los intereses que deberán pagarse desde el inicio de la operación hasta la cuota Nº 5.
   e) Los intereses que deberán pagarse entre las cuotas 3 y 5.

Rta.: a) c= 1.282,77; b) i_{30} = 0,02861; c) 17.579,70; d) 3.953,01; e) 2.330,38.

Cálculo de la cuota

$$c = \frac{46.179,7}{36} = 1.282,77$$

Cálculo de la tasa de interés mensual (usaremos p.ej., Baily)

$$h = \left(\frac{28.600}{1.282,77.36}\right)^{-\frac{2}{37}} - 1 = 0,026237433$$

$$i = 0,026237433.\frac{12-0,026237433.35}{12-2.0,026237433.35} = 0,02861$$

comprobamos la tasa utilizando cuatro decimales —en tanto por uno— pues así se lee en el mercado 0,0286 = 2,86% y verificamos que 1.282,77 a(1;36;0,0286) = 28.600

Cálculo de los intereses totales de la operación

$$\sum_{j=1}^{36} I_j = n.c - V_0 = 46.179,7 - 28.600 = 17.579,7$$

Cálculo de los intereses comprendidós desde la primera hasta la quinta cuota

$$\sum_{j=1}^{5} I_j = 5.c - T_5 = 5.1282,77 - t_1.s(1;5;0,0286)$$

$$\sum_{j=1}^{5} I_j = 6.413,85 - 28.600.s^{-1}(1;36;0,0286).s(1;5;0,0286).$$

$$\sum_{j=1}^{5} I_j = 6.413,85 - 464,81.5,294297237 = 6.413,85 - 2.460,84 = 3.953,01$$

Cálculo de los intereses comprendidos entre la tercera y la quinta cuota

$$\sum_{j=3}^{5} I_j = \sum_{j=1}^{5} I_j - \sum_{j=1}^{2} I_j$$

$$\sum_{j=3}^{5} I_j = (5.c - T_5) - (2.c - T_2)$$

$$\sum_{j=3}^{5} I_j = (5.1.282,77 - 2.460,84) - (2.1.282,77 - 464,81.s(1;2;0,0286)$$

$$\sum_{j=3}^{5} I_j = 3.953,01 - (2.565,54 - 942,91)$$

$$\sum_{j=3}^{5} I_j = 3.953,01 - 1.622,63 = 2.330,38$$

p	V(p)	I(p)	t(p)	c(p)	T(p)	V'(p)
0	28.600,00	-	-	-	-	-
1	28.600,00	817,96	464,81	1.282,77	464,81	28.135,19
2	28135,19	804,67	478,10	1.282,77	942,91	27657,09
3	27657,09	790,99	491,78	1.282,77	1.434,69	27.165,31
4	27165,31	776,93	505,84	1.282,77	1.940,53	26.659,47
5	26659,47	762,46	520,31	1.282,77	2460,84	26.139,16
Intereses		3.953,01				

Si sumamos los valores del cuadro: I_3, I_4 e I_5 = 790,99 + 776,93 +762,46 = 2.330,38.

11) Un préstamo concedido el 10/01 del presente año se cancelará mediante mensualidades iguales y consecutivas vencidas. Sabiendo que hubo cumplimiento normal en los pagos los que incluyen una T.E.M. del 3,48% —fija— calculada sobre saldos, que el total amortizado hasta la cuota pagadera en el mes de septiembre de ese año fue de $ 14.838,97 y que el interés cobrado en la cuota de ese mes fue de $ 1.167,32, halle:

a) El saldo que se adeuda luego de abonada la cuota con vencimiento en el mes de septiembre del mismo año en que se concedió el préstamo.

b) Si con fecha 1 de octubre usted decide cancelar la operación y está permitido contractualmente cuál será el valor de cancelación total.

c) En qué número de cuota se amortizó la mitad del préstamo. Compruébelo en un cuadro de marcha (no utilice decimales).

Rta.: a) 31.459,29; b) 32.221,7; c) 11<p<12.

Si disponemos los datos en el cuadro:

	p	V(p)	I(p)	t(p)	c(p)	T(p)	V'(p)
10/09	8		1.167,32			14.838,97	

En función a los datos, hallaremos T_8, el fondo amortizante y t_8

$T_8 = t_1 \,.\, s(1;8;\,0{,}0348)$

$t_1 = 14.838{,}97 \,.\, s^{-1}\ (1;8;0{,}0348)$

$t_1 = 14.838{,}97 \,.\, 0{,}11055524 = 1.640{,}53$

$I_8 = V_8 \,.\, i$

$1.167{,}32 = V_8 \,.\, 0{,}0348$

$V_8 = 33.543{,}68$

$t_8 = t_1 \,.\, (1+0{,}0348)^7 = 1.640{,}53 \,.\, (1+0{,}0348)^7 = 2.084{,}39$

$V'_8 = 33.543{,}68 - 2.084{,}39 = 31.459{,}29$

Ahora completamos los datos faltantes en el cuadro

	p	V(p)	I(p)	t(p)	c(p)	T(p)	V'(p)
10/01	0		0	0	0	0	0
...		...	...	...	...	...	...
10/09	8	33.543,68	1.167,32	2.084,39	3.251,71	14.838,97	31.459,29
1/10	Importe de Cancelación= 31.459,29 $(1+0{,}0348)^{21/30}$ = 32.221,70						

Recordemos que el Importe de Cancelación un período fraccionario después, arroja un valor final menor utilizando la Ley Financiera a Interés compuesto que si se hubiese utilizado Interés simple, pues a Interés Simple: Veamos: $31.459{,}29 . (1+0{,}0348 . \frac{21}{30}) = 32.225{,}64$

Otra forma de calcular a Interés Simple es proporcionando los intereses que devengaron del total a devengar en el mes.

Es decir: 31.459,29 . 0,0348 = 1.094,78. Si son intereses a pagar el 10/10, debemos calcular el interés proporcional devengado desde el 10/09 al 1/10, lo que significa 9 días menos que no han devengado —desde el 1/10 al 10/10— o bien 21 días calculados desde el 10/09 al 1/10.

$$31.459{,}29 + \frac{1.094{,}78 . 21}{30} = 31.459{,}29 + 766{,}35 = 32.225{,}64$$

- *Tiempo medio de reembolso*

Para averiguar en qué momento se adeuda la mitad del préstamo es necesario conocer el valor del mismo.

$C = t_1 + I_1$
$3.251{,}71 = 1.640{,}53 + I_1$
$I_1 = 1.611{,}18$

Si $I_1 = V_0 . i$
$1.611{,}18 = V_0 . 0{,}0348$
$V_0 = 46.298{,}30$

$½ V_0 = 46.298{,}30 . ½$
$T_p = 23.149{,}15$

$23.149{,}15 = 1640{,}53 \; s(1;p;0{,}0348)$

Despejamos k y nos queda

$$\frac{\log\left(1+\frac{23.149{,}15}{1.640{,}53}.0{,}0348\right)}{\log(1+0{,}0348)} = p$$

$$p = \frac{\log 1{,}491054976}{\log 1{,}0348} = \frac{0{,}173493656}{0{,}01485642} = 11{,}67$$

Después de 12 pagos el deudor ya canceló un poco más de la mitad, pues un período menos no alcanzaría, es decir que con 12 cuotas cancela el 51,7% del préstamo. Pues:

$T_{12} = t_1 . s(1;12{,}0{,}0348)$ siendo $t_1 = 1.640{,}53$

$T_{12} = 23.927{,}62$

$23.927{,}62 \; / \; 46.298{,}= 0{,}517$

Se puede utilizar directamente la fórmula de "tiempo medio de reembolso" pero para ello es necesario buscar el plazo total de la operación.

$V_0 = 46.298,30$

c= 3.251,71

46.298,3 = 3.251,71 . a (1;n;0,0348)

$$\frac{46.298,3}{3.251,71} = \frac{1-(1+0,0348)^{-n}}{0,0348}$$

$$(1+0,0348)^{-n} = \left(1-\frac{46.298,3}{3.251,71}.0,0348\right)$$

$$-n.\log(1+0,0348) = \log\left(1-\frac{46.298,3}{3.251,71}.0,0348\right)$$

$$n = -\frac{\log\left(1-\frac{46.298,3}{3.251,71}.0,0348\right)}{\log 1,0348} = -\frac{\log 0,504512751}{0,01485642} =$$

$$-\frac{(-0,297127852)}{0,01485642} = 20$$

Si n=20; e i=0,0348 aplicamos los valores en la fórmula de "tiempo medio de reembolso":

$$p = \frac{\log\left[\frac{(1+i)^n+1}{2}\right]}{\log(1+i)} = \frac{\log\left[\frac{(1+0,0348)^{20}+1}{2}\right]}{\log(1+0,0348)} =$$

p= log 1,491056479 / log 1,0348 = 0,17349404/0,01485642

p = 11,67

	p	V(p)	I(p)	t(p)	c(p)	T(p)	V'(p)
10/01	0		0	0	0	0	0
...		...	...	...	...	...	...
10/09	8	33.544	1.168	2.084	3.252	14.839	31.459
10/10	9	31.459	1.095	2.157	3.252	16.996	29.302
10/11	10	29.302	1.020	2.232	3.252	19.228	27.070
10/12	11	27.070	942	2.310	3.252	21.538	24.760
10/01	12	24.760	941	2.390	3.252	23.928	22.370

12) Un préstamo con destino para la compra de un auto del 23/03 del corriente fue otorgado con las siguientes condiciones: T.N.A.= 34,2% (considerar un año de 360 días), cuotas mensuales iguales y conse-

cutivas vencidas de $ 1.275,37 e intereses calculados sobre saldos. Una vez abonada la cuota con vencimiento 4 meses después de concretado el préstamo se conoce que ya tiene cancelado un importe de $ 4.134,08. Se pide: a) arme en el cuadro de marcha el renglón correspondiente al vencimiento de julio; b) halle en qué número de cuota el préstamo ya tiene amortizado el 75% de la deuda original; c) determine el total de intereses de la operación.

Rta.: b) cuota N° 7; c) 1.478,33.

Datos:

	p	V(p)	I(p)	t(p)	c(p)	T(p)	V'(p)
23/07	4				1.275,37	4.134,08	

$4.134,08 = t_1 \,.\, s(1;4;0,0285)$

$4.134,08 = t_1 \,.\, 4,174272149$

$t_1 = 990,37 \longrightarrow t_4 = t_1 \,.\, (1+0,0285)^3 = \underline{1.077,48}$

$c = t_4 + I_4$

$1.275,37 = 1.077,48 + I_4 \qquad I_4 = \underline{197,89}$

$c = t_1 + I_1$

$1.275,37 = 990,37 + I_1 \qquad I_1 = \underline{285}$

$I_1 = V_0 \,.\, i$

$285 = V_0 \,.\, 0,0285 \qquad V_0 = 10.000$

$197,89 = V_4 \,.\, 0,0285 \qquad V_4 = 6.943,50$

$V_5 = V'_4 = 6.943,51 - 1.077,48 = 5.866.03$

Cuadro de marcha para el período 4

	p	V(p)	I(p)	t(p)	c(p)	T(p)	V'(p)
23/03	0	10.000	0	0	0	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...
23/07	4	6.943,50	197,89	1.077,48	1.275,37	4.134,08	5.866,02
También podemos hacer $V'_4 = V_5 = 10.000 - 4134,08 = 5.865,92$ que difiere con 5866,02 por problemas de decimales en los cálculos de los componentes del cuadro-							

$$V_0 .0,75 = t_1 .s(1;p;i)$$

$$\frac{10.000.0,75}{990,37} = \frac{(1+0,0285)^p - 1}{0,0285}$$

$$p = \frac{\log\left(1 + \dfrac{10.000.0,75}{990,37} .0,0285\right)}{\log(1+0,0285)} = \frac{\log 1,215828428}{\log 1,0285} = 6,95$$

Comprobamos que con la cuota 7 el total amortizado es $ 7554,30, representando el 75,54% de la deuda.

$T_7 = 990,37\ s(1;7;0,0285) = 7554,30$

Cálculo de los intereses totales

Debemos encontrar el plazo total de la operación.

$10.000 = 990,37\ s(1;n;0,0285)$

$$\frac{10.000}{990,37} = \frac{(1+0,0285)^k - 1}{0,0285}$$

$$n = \frac{\log\left(1 + \frac{10.000 \bullet 0,0285}{990,37}\right)}{\log(1+0,0285)}$$

$n=9$

Entonces $\sum_{j=1}^{n=9} I_j = 9 \bullet 1.275,37 - 10.000 = 11.478,33 - 10.000 = 1.478,33$

13) Un crédito otorgado el 18/03 del corriente año se pactó su reembolso mediante 11 mensualidades constantes y sucesivas que incluyen un interés sobre saldos del 2,6% mensual. La cuota representa el máximo permitido según normas crediticias de esa entidad: 20% de los ingresos mensuales los que representan $ 2.114. De acuerdo a la evolución del crédito surge que el prestatario pagó regularmente en cada vencimiento hasta el 18/09 inclusive. Incumplió en las cuotas con vencimiento 18/10 y 18/11 dejándolas impagas. Si días antes del vencimiento que opera el 18/12 se presentó a la entidad y solicita regularizar su situación, considerando que no hay cobro de punitorios, halle según las alternativas presentadas cual será cada uno de los restantes pagos que deberá hacer el deudor hasta la cancelación del préstamo, sin modificar en ninguno de los casos el coste financiero mensual de la operación.

Alternativa a): Que siga con el cronograma original y conjuntamente con la cuota que vence en diciembre cancele lo adeudado por el incumplimiento

Alternativa b): Que los pagos incumplidos sean distribuidos financieramente entre las cuotas restantes.

Alternativa c): Que en el momento de continuar los pagos con esa primera cuota pague lo atrasado.

Datos según el contrato de préstamo

C= 422,80 (2.114* 0,20) - 1° venc.: 18/04 i = 0,02 n= 11

Regularidad en los pagos hasta la cuota N°6 correspondiente a septiembre.

18/3	18/4	18/5		18/9	18/10	18/11	18/12	18/01	18/02
0	1	2	...	6	7	8	9	10	11
V_0	422,80	422,80	...	422,80	—	—	—	422,80	422,80
							*		

$V_0 = 422{,}8 \,.\, a(1;11;0{,}026)$

$V_0 = 422{,}8 \,.\, 9{,}461025251 = 4.000{,}1$

- ***Resolución de alternativa a): Que siga con el cronograma original y juntamente con la cuota que vence en diciembre cancele lo adeudado por el incumplimiento***

Averiguaremos el saldo de deuda luego de abonada la última cuota en situación normal, es decir $V'_6 = 422{,}80 \;.\; a(1;5;0{,}026)$

$V'_6 = 1.958{,}5$

Al dejar de pagar la deuda devengó intereses por 2 meses acumulando un saldo de $ 2.061,7

$V'_{6\text{—al } 18/09\text{—}} = 1.958{,}5$

$V'_{\text{—al } 18/11\text{—}} = 1.958{,}5\,(1+0{,}026)^2 = 2.061{,}7$

A continuación realizamos el cuadro de evolución de la deuda; vemos cómo se interrumpe los pagos y cómo se incrementa el saldo.

	p	V(p)	I(p)	t(p)	c(p)
18/03	0	4.000,10	-	-	-
18/04	1	4.000,1	104,00	318,8	422,80
18/05	2	3.681,3	95,70	327,1	422,80
18/06	3	3.354,20	87,20	335,6	422,80
18/07	4	3.018,6	78.5	344,3	422,80
18/08	5	2.674,3	69,5	353,3	422,80
18/09	6	2.321,0	60,3	362,5	422,80
18/10	7	1.958,5	50,9	-	-
18/11	8	2.009,4	52,3	-	-
18/12	9	2.061,7	53,6	369,2	422,80
18/01	10	1.692,5	44,0	378,8	422,80
18/02	11	1.313,7	34,2	388,6	422,80
18/02	11	925,1	-	925,1	925,10

Cálculo del refuerzo extraordinario —RE— que deberá pagar el deudor conjuntamente con la cuota original N° 11 el día 18/02.

Para ello, la equivalencia financiera se puede hacer :

- en el momento 6 y luego se capitaliza hasta el momento 11 para valuar el pago complementario.

1.958,50 = 422,8 a(1;3;0,026).$(1+0,026)^{-2}$+RE —valuación al momento 6—

1.958,5 = 1.144,9 +RE

RE = 813,6 —expresada al momento 6— y si capitalizamos los 5 meses

813,6 $(1+0,026)^5$ = 925

- en el momento 8 y luego se capitaliza hasta el momento 11 para valuar el pago complementario .

1.958,50 .$(1+0,026)^2$ = 422,8 a(1;3;0,026).+RE —valuación al momento 8—

2.061,7 = 1.205,2 +RE

RE = 856,5 —expresada al momento 8— y si capitalizamos los 3 meses

856,5 $(1+0,026)^3$ = 925

- ***Alternativa b): Que los pagos incumplidos sean distribuidos financieramente entre las cuotas restantes.***

Si ya tenemos el saldo de deuda luego de abonada la última cuota en situación normal, es decir V'_6= 1.958,5 el que acumuló intereses por 2 meses transformándose en $V'_{\text{—al 18/11—}}$ = 2.061,7, éste será la deuda que se deberá cancelar con las 3 cuotas restantes. Por ello averiguamos el valor de la cuota.

2.061,70 = c a (1;3;0,026)

2.061,7 . 0,350814953 = c

c= 723,3

A continuación realizamos el cuadro de evolución según esta propuesta:

	p	V(p)	I(p)	t(p)	c(p)
18/03	0	4.000,10	-	-	-
18/04	1	4.000,1	104,00	318,8	422,80
18/05	2	3.681,3	95,70	327,1	422,80
18/06	3	3.354,20	87,20	335,6	422,80
18/07	4	3.018,6	78.5	344,3	422,80
18/08	5	2.674,3	69,5	353,3	422,80
18/09	6	2.321,0	60,3	362,5	422,80
18/10	7	1.958,5	50,9	-	-
18/11	8	2.009,4	52,3	-	-
18/12	9	2.061,7	53,6	669,7	723,3
18/01	10	1.392,0	36,2	687,1	723,3
18/02	11	704,9	18,4	704,9	723,3

- ***Alternativa c): Que en el momento de continuar los pagos con esa primera cuota pague lo atrasado***

En nuestro caso el 18/12 además de pagar $422,80 —cuota original— deberá abonar el valor final de las 2 cuotas atrasadas juntamente con la cuota correspondiente al 18/12.

422,80 . s(1;2;0,026). (1+0,026) = 878,9 —importe de las cuotas caídas—

A continuación planteamos el cuadro de evolución según esta propuesta:

	p	V(p)	I(p)	t(p)	c(p)
18/03	0	4.000,10	-	-	-
18/04	1	4.000,1	104,00	318,8	422,80
18/05	2	3.681,3	95,70	327,1	422,80
18/06	3	3.354,20	87,20	335,6	422,80
18/07	4	3.018,6	78.5	344,3	422,80
18/08	5	2.674,3	69,5	353,3	422,80
18/09	6	2.321,0	60,3	362,5	422,80
18/10	7	1.958,5	50,9	-	-
18/11	8	2.009,4	52,3	-	-
18/12	9	2.061,7	53,6	369,2	422,80
"	9	1.692,5	-	878,9	878,9
18/01	10	813,6	21,1	401,6	422,80
18/02	11	412,0	10,8	412,0	422,80

Cuadro resumen de los flujos de caja comprometidos según cada alternativa.

Cronograma de las mensualidades					
		Según contrato original	**Según propuesta a**	**Según propuesta b**	**Según propuesta c**
18/03	0	-	-	-	-
18/04	1	422,80	422,80	422,80	422,80
18/05	2	422,80	422,80	422,80	422,80
18/06	3	422,80	422,80	422,80	422,80
18/07	4	422,80	422,80	422,80	422,80
18/08	5	422,80	422,80	422,80	422,80
18/09	6	422,80	422,80	422,80	422,80
18/10	7	422,80	-	-	-
18/11	8	422,80	-	-	-
18/12	9	422,80	422,80	723,3	1301.70
18/01	10	422,80	422,80	723,3	422,80
18/02	11	422,80	1.353,90	723,3	422,80
C.F.M.		0,026	0,026	0,026	0,026

➢ SISTEMA ALEMÁN

1) Una deuda contratada por el sistema de amortización constante e intereses sobre saldos de deuda de $ 5.100 será pagada en 6 cuotas mensuales y consecutivas, sufriendo un interés del 7,6% mensual. Hallar:
   I. a) servicio de amortización;
   b) el saldo de deuda luego de abonada la tercera cuota;
   c) servicio de intereses incluidos en la cuarta cuota;
   d) cuota del período 4.
   II. Confeccionar el cuadro de marcha.

Rta.: I. a) 850; b) 2.550; c) 193,8; d) 1.043,8.

I. a) *Determinación de la amortización.*

$$t = \frac{V(0)}{n} = \frac{5100}{6} = 850.$$

b) *Cálculo del saldo de deuda.*

$$V(k) = V(0) * \frac{n-k+1}{n}$$

$$V(4) = 5.100 * \frac{3}{6} = 2.550$$

c) *Cálculo de los intereses.*

$$I(k) = V(k) * i.$$

$$I(4) = 2550 * 0.076.$$

$$I(4) = 193,8.$$

d) *Determinación de la cuota.*

$$c(k) = t(k) + I(k).$$

$$c(k) = \frac{V(0)}{n} + i * V(0) * (1 - \frac{k-1}{n})$$

$$c(4) = 850 + 0.076 * 5100 (1 - \frac{3}{6})$$

$$c(4) = 850 + 193.80$$

$$c(4) = 1043.80$$

II. *Cuadro de Marcha*

k	V(k)	I(k)	t(k)	c(k)	T(k)
0	5.100	0	0	0	0
1	5.100	387,6	850	1.237,6	850
2	4.250	323	850	1.173	1.700
3	3.400	258,4	850	1.108,4	2.550
4	2.550	193,8	850	1.043,8	3.400
5	1.700	129,2	850	979,2	4.250
6	850	64,6	850	914,6	5.100
		1.356,6	5.100	6.456,6	

Como observamos en el cuadro de marcha de la operación el importe de cada una de las cuotas resultan decrecientes con una razón igual a \$ -64,60, equivalente a:

$$r = -\frac{V(0) * i}{n}$$

En nuestro caso, $r = -\frac{5100 * 0.076}{6} = -64{,}60.$

Entonces, el importe de cada cuota resulta de la siguiente fórmula:

$$c(k) = V(0) * \left(\frac{1}{n} + i\right) + r\,(k-1)$$

siendo $r = -\frac{V(0) * i}{n}$

$$c(k) = V(0) * \left(\frac{1}{n} + i\right) - r\,(k-1)$$

siendo $r = \frac{V(0) * i}{n}$

Al ser la amortización periódica constante, la razón de decrecimiento de las cuotas es coincidente con la razón de decrecimiento de los intereses contenidos en cada una de ellas (ver el cuadro de marcha).

Como se observa, la primera cuota del sistema alemán es la cuota del sistema directo, luego va decreciendo por la forma de cálculo de los intereses que son calculados sobre saldos adeudados.

Además, este sistema de préstamo cumple con las características de una renta cierta, temporaria, inmediata, de pagos vencidos, con el régimen del interés compuesto, variables con una ley de formación: en progresión aritmética decreciente y, consecuentemente, se pueden utilizar todas las fórmulas derivadas de la renta variable. Por ejemplo:

$$VA(1,n,i,r) = c\,a(1,n,i) + \frac{r}{i}\left[a(1,n,i) - n\,v^{n}\right]$$

siendo $r = -\frac{V(0) * i}{n}$

$$V_{(0)}\left[\frac{1}{n} + i\right] = c_{(1)}$$

2) El Auditor de una Cía. detecta la siguiente registración contable:

3 de junio		
Valores a depositar	233,71	
a Amortización Prestamos Personales —Nº 4521—		x(1)
a Intereses Prestamos Personales —Nº 4521—		x(2)
Por el cobro de la cuota Nº 4 por $ 233,71, correspondiente al Prést. Person. Nº 4521 otorgado el 2.2 del mismo año por $1600 en 14 cuotas.		

Se pide: Integrar los importes en las partidas arriba pendientes y determinar para el próximo mes cuáles serán los importes del asiento contable.

Si: $c(4) = 233{,}71$; $V_{(0)} = 1600$; $n = 14$ $k = 4$.

1) *Determinación de la amortización y de los intereses contenidos en la cuarta cuota.*

$$t = \frac{V(0)}{n} = \frac{1600}{14} = 114.29.$$

$$c(4) = t(4) + I(4)$$

$$233.71 = 114.29 + I(4) \Rightarrow I(4) = 119.42$$

2) *Cálculo de la cuota Nº 5 y sus componentes*; en donde primeramente plantearemos la ecuación del valor de i.

$$I(5) = V(5) * i = 1600 * \frac{14-5+1}{14} * i$$

Se sabe que:

$$I(4) = 119{,}42 \text{, el que resulta de:}$$

$$119{,}42 = 1600 * i * \frac{14-4+1}{14} \Rightarrow i = 0.095$$

Reemplazamos en la fórmula cuota desagregando cada uno de sus componentes.

$$I(5) = 1600 * 0.095 * \frac{(14-5+1)}{14} = 108.57$$

$$+\ t(5) = t = \frac{V(0)}{n} = 114.29$$

$$c(5) = 222.86$$

➤ SISTEMA DIRECTO

1) Compro un automóvil en la suma de $ 5600 pagando el 20% al momento de la entrega y por el resto financiándolo a 4 meses. Las cuotas

mensuales se calculan mediante este sistema de préstamo. La tasa directa cargada es del 7,5% mensual. Calcular la cuota.

Rta.: c= 1.456

V(0) = 5600 * 0.80.
V(0) = 4480.
n = 4.
r = 0.075.

$$c = V(0) * \left(\frac{1}{n} + i\right).$$

$$c = 4480 \left(\frac{1}{4} + 0.075\right).$$

$$c = 1456.$$

2) Solicito un préstamo de $ 6000 que debo integrar en 18 cuotas de $ 587,89.
a) Calcular la tasa de interés directa de la operación.
b) Determinar cuál es la verdadera tasa que me están cobrando (tasa mensual implícita de la operación).

Rta.: $i_{30}^{*} = 0,068$

Si: V(0) = 6000 n= 18 c= 587,89

a)
$$\frac{c}{V_{(0)}} - \frac{1}{n} = r$$

$$\frac{587,89}{6000} - \frac{1}{18} = 0.0424261.$$

b) Para determinar la tasa de interés sobre saldos, debemos resolver la siguiente ecuación de grado n:

$$\frac{(1+i)^n\ i}{(1+i)^n - 1} = 1 + r$$

$$\frac{(1+i)^{18}\ i}{(1+i)^{18} - 1.} = 1 + 0.0424261 = 0.0979816 \Rightarrow i = 0,068$$

La resolución del tanto de interés se puede efectuar por:

a. Tablas Usuales —aproximada—.
b. Máquina de calcular.
c. Planilla de Cálculo en Programas tipo Excel.
c. Baily—aproximada—.
d. Método iterativo —aproximada—.
e. Interpolación proporcionada —aproximada—.

➤ SISTEMA AMERICANO

1) Una deuda contratada el 12.06, por la suma de $ 20.000 será pagada de la siguiente forma:
- Intereses periódicos mensuales vencidos del 6%. Con fecha 12.11 del mismo año será reembolsado el capital recibido en préstamo, para ello queda convenido que el deudor formar periódicamente un fondo de amortización con una tasa del 4% mensual, de forma tal que al vencimiento del préstamo se logre reunir el monto del mismo.
a) Efectuar el Cuadro de marcha.
b) Determinar cada uno de sus componentes.
c) Hallar la tasa resultante de la operación —mensual—, es decir el verdadero coste financiero.

a) *Cuadro de marcha*

k	V(k)	c(i)	c(f)	c(t)	IF(k)	F(k)	DN(k)
0	20.000	0	0	0	0	0	20.000
1	20.000	1.200	3.692,54	4.892,54	0	3.692,54	16.307,46
2	20.000	1.200	3.692,54	4.892,54	147,7	7.532,78	12.467,22
3	20.000	1.200	3.692,54	4.892,54	301,31	11.526,63	8.473,37
4	20.000	1.200	3.692,54	4.892,54	461.,06	15.680,23	4.319,77
5	20.000	1.200	3.692,54	4.892,54	627,2	20.000	0
		6.000	18.462,7	24.462,7			

b) *Determinación de los componentes*

$\boxed{c(i) = V(o) \,.\, i(a)}$ $c_{(i)} = 20000 * 0.06. \qquad = 1200,00$

$\boxed{c(f) = V(o) \,.s\text{-}1\ (1;n;i(p)}$ $c_{(f)} = 20.000 \cdot s\text{-}1\ (1;5;0,04)= 3692,54$

$\boxed{c(t) = V(o)\ [\, i(a) + s^{-1}\ (1;n;i(p)]}$ $c_{(t)} = 1200 + 3692.50= 4892,54$

Otra forma de hallar la cuota total es a través de la siguiente fórmula.

$\boxed{c(t) = V(0)\ \{[\, i_{(a)} - i_{(p)}\,] + a^{-1}\,(1;n;i_{(p)}\,)\}}$

$c_{(t)} = 20.000\ [(0,06\text{-}0,04)+a^{-1}(1;5;0,04)]= 4892,54$

Como la deuda se paga al finalizar la operación, el saldo de la misma es siempre el préstamo $V_{(o)}$=20.000.

El desembolso a que estaría sujeto el deudor en caso de rescisión de los contratos de préstamo y de ahorro está dado por el neto entre la deuda —V(0)— y el acumulado en el Fondo —FA(k)—, importe este último que resulta ser creciente a medida que avanzamos en el perfil temporal de la renta, por lo que guarda relación inversa con el importe a saldar de la deuda —DN(k)—.

$\boxed{DN(K) = V_{(0)} - F(k)}$ Sabiendo que $\boxed{F(k) = c(f) * s(1;k;i_{(p)})}$

Para la determinación del verdadero costo financiero debo plantear la ecuación del valor de i*.

No resulta tan difícil pues se trata de flujos constantes y por lo tanto ya conocemos varios caminos.

El planteo sería:

$$V(0) = c_{(t)} * a(1,n,i^*)$$

$$\frac{20.000}{4892,54} = a(1,5,i^*) \Rightarrow i^* = 0.071.$$

➤ SISTEMA ALEMÁN PROMEDIO

1) Una deuda contratada por el sistema de amortización constante e intereses promediados constantes cuya base es la suma de los intereses calculados sobre saldos de deuda. La deuda inicial es $ 5.100 y será cancelada en 6 cuotas mensuales y consecutivas, sufriendo un interés del 7,6% mensual.
Hallar:
I. a) servicio de amortización;
b) el saldo de deuda luego de abonada la tercera cuota;
c) servicio de intereses incluidos en la cuarta cuota;
d) cuota del período 4.
II. Confeccionar el cuadro de marcha.

Rta.: I. a) 850; b) 2.550; c) 193,8; d) 1.043,8.

I.
- *Determinación de la amortización.*

$$t = \frac{V(0)}{n} = \frac{5100}{6} = 850.$$

El total amortizado a un momento p al igual que en el sistema alemán y directo es p veces la amortización de un período.

- *Cálculo del saldo de deuda.*

$$V(k) = V(0) * \frac{n-k+1}{n}$$

$$V(4) = 5.100 * \frac{3}{6} = 2.550$$

- *Cálculo de los intereses.*

Si comparamos los valores hallados en este ejercicio con el primer ejercicio resuelto en el Sistema Alemán, no hay diferencia. El cambio se produce en el cálculo de los componentes Interés contenido en cada cuota y por ende en la Cuota, debido a que la forma de determinación de los intereses difiere. Debemos tener la suma de los intereses sobre saldos, para ello teniendo los mismos valores del ejercicio 1 del Sistema alemán sumamos dichos intereses periódicos y los distribuimos proporcionalmente en la cantidad de cuotas que son 6. Es decir 1356,6 / 6 = 226,10.

En fórmula hicimos:

$$I=\frac{\sum_{j=1}^{n} I_j^{s.aleman}}{n}=\frac{I_1^{s.aleman}+I_2^{s.aleman}+..I_n^{s.aleman}}{n}=\frac{V_0.i+\left(V_0-\frac{V_0}{n}\right).i+...+\left(V_0-(n-1)\frac{V_0}{n}\right).i}{n}$$

Recordemos que cada uno de los intereses periódicos en el sistema alemán conforman una sucesión en progresión aritmética. Entonces contamos con la fórmula de suma de esa progresión.

$$I=\frac{\left[V_0.i+\left(V_0-(n-1)\frac{V_0}{n}\right).i\right]n}{2.n}$$

$$I=\frac{\left[V_0.i+V_0.i-n.\frac{V_0}{n}.i+\frac{V_0}{n}.i\right]n}{2.n}=\frac{2.V_0.i-V_0.i+\frac{V_0}{n}.i}{2}=\frac{V_0.i+\frac{V_0}{n}.i}{2}=\frac{V_0.i\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2}=\frac{V_0.i\left(\frac{n+1}{n}\right)}{2}$$

$$\boxed{I=\frac{V_0.i.(n+1)}{2.n}}$$

$$I=\frac{5100.0,076(6+1)}{2.6}=226,10$$

- Determinación de la cuota.

$$c=t+I=\frac{V_0}{n}+\frac{V_0.i.(n+1)}{2.n}$$

$$\boxed{c=V_0.\left[\frac{1}{n}+i\frac{(n+1)}{2.n}\right]}$$

$$c=5100.\left[\frac{1}{6}+0,076.\frac{(6+1)}{2.6}\right]=5100.0,211=1076,10$$

II. *Cuadro de Marcha*

k	V(k)	I(k)	t(k)	c(k)	T(k)
0	5.100	0	0	0	0
1	5.100	226,10	850	1076,10	850
2	4.250	226,10	850	1076,10	1.700
3	3.400	226,10	850	1076,10	2.550
4	2.550	226,10	850	1076,10	3.400
5	1.700	226,10	850	1076,10	4.250
6	850	226,10	850	1076,10	5.100
		1.356,60	5.100	6.456,60	

2) Para una línea de préstamos de $ 3.000 a reintegrar en 8 mensualidades, se pretende una tasa de interés implícita mensual del 2%. Determine:
   a) El valor de la cuota resultante.
   b) La tasa de interés mensual contractual aplicada.
   c) Realice el cuadro de marcha.
   d) Verifique que el coste financiero mensual de la operación sea el tanto pretendido.

Rta.: a) 409,53; b) 0,0232

➪ *Cuota*

Sabemos que la cuota del sistema alemán promedio será de una cuantía equivalente a la del sistema francés cuya tasa de interés contractual coincide con su tasa de interés mensual implícita o coste financiero. Por lo tanto, planteamos dicha equivalencia financiera que nos va a permitir despejar la tasa contractual del sistema alemán promedio.

$$c = 3000.\left[\frac{1}{8} + i\frac{(8+1)}{2.8}\right] = 3000.a^{-1}(1;8;0,02)$$

$$c = 3000.\left[\frac{1}{8} + i\frac{(8+1)}{2.8}\right] = 409,53$$

➪ . *Tasa de interés mensual contractual*

Partimos de la ecuación de equivalencia de arriba y debemos despejar la tasa de interés contractual.

$$i = \left[\frac{3000.a^{-1}(1;8;0,02)}{3000} - \frac{1}{8}\right].\frac{2.8}{(8+1)} = 0,02302$$

En forma general:

$$\boxed{i = \left[a^{-1}(1;n;i) - \frac{1}{n}\right].\frac{2.n}{(n+1)}}$$

II. *Cuadro de Marcha*

k	V(k)	I(k)	t(k)	c(k)	T(k)
0	3000	0	0	0	0
1	3000	34,53	375	409,53	375
2	2625	34,53	375	409,53	750
3	2250	34,53	375	409,53	1125
4	1875	34,53	375	409,53	1500
5	1500	34,53	375	409,53	1875
6	1125	34,53	375	409,53	2250
7	750	34,53	375	409,53	2625
8	375	34,53	375	409,53	3000
		276,24	3.000	3.276,24	

- Comprobación del coste financiero mensual

Si el C.F.M. es del 2%. Entonces el valor actual de los 8 pagos de $ 409.53 a ese tanto de interés debe ser equivalente al valor del prestamo de $ 3.000

$409{,}53 \,.\, a(1;8;0{,}02) = x$ Resolvemos $x = 3.000$

➤ COMBINACIÓN DE SISTEMAS DE PRÉSTAMOS

1) Ud. necesita un préstamo de $ 6.000 y le ofrecen las distintas alternativas:
   a) Cancelación en 18 cuotas, a una tasa mensual del 6%, siendo las cuotas calculadas según el sistema progresivo sobre saldos.
   b) Devolución en 18 cuotas, a una tasa del 4,5% mensual; con el sistema de interés directo
   c) Cancelación en 18 cuotas, a una tasa del 6% mensual, calculando la cuota mediante el sistema alemán promedio.

   Determinar qué me conviene más.

   Rta.: alternativa c).

   a) $c = 6000 \; a^{-1}(1;\, 18;\, 0.06)$ ➔ $c = 554.14$

   b) $c = 6000 \left(\frac{1}{18} + 0.045\right)$ ➔ $c = 603.33$

   c) $c = 6000 \left(\frac{1}{18} + 0.06 * \frac{19}{36}\right)$ ➔ $\underline{c = 523.33}$

   La jerarquización en este ejercicio al tratarse en *todos* los préstamos reembolsables en *cuotas iguales* se puede hacer comparando las cuotas. Otro camino es calcular en cada sistema de préstamo la tasa sobre saldos —i*—. Este último se aplica universalmente, ya sea en cuotas constantes o variables.

   Si jerarquizamos comparando las tasas de interés calculada sobre saldos de deuda hubiera arrojado los siguientes valores:

   a) $i^* = 0{,}06$ b) $i^* = 0{,}072$ y c) $i^* = 0{,}052$; acá la tasa más baja es c).

2) Se desea un crédito de $ 20.000 a cancelar en 10 mensualidades mediante pago periódico de intereses del 2,5% mensual y reintegro del capital al vencimiento. Suponiendo que para hacer frente a su obligación este prestatario debe constituir un fondo mensual, el que irá generando intereses según lo pactado —un tanto de interés mensual del 1%—, determinar: a) La tasa resultante de la operación —i*—;

b) A los fines de obtener igual coste financiero: Qué tasa se habría tenido que aplicar en los siguientes sistemas de préstamos:
   b.1 francés.
   b.2 alemán.
   b.3 alemán promedio.
   b.4 directo.

Rta.: a) i*=0,0356; b) 0,0356; 0,0356; 0,0368 y 0,0202.

a) $$c = 20000\left[0.025 + \frac{0.01}{(1+0.01)^{10} - 1}\right] = 2411{,}64$$

$$20.000 = 2411{,}64 \; a(1;10;i^*) \Rightarrow \text{siendo } i^* = 0{,}03556$$

Utilizando Baily:

$$h = \left[\frac{a(1;10;i)}{10}\right]^{-2/(10+1)} - 1 \qquad h = 0.034614673.$$

$$i = h\,\frac{12 - h(10-1)}{12-2h(n-1)} \qquad i = 0.035562.$$

Como se observa el valor hallado por Fórmula de Baily se aproxima bastante a la verdadera tasa.

b.1) La i del sistema francés es la tasa sobre saldos. Es decir:.

$$a^{-1}(1;10;i) = 0.025 + s^{-1}(1;10;0.01).$$

$$i = 0.035562.$$

b.2) La i del sistema alemán es la tasa sobre saldos -0.035562.

b.3) La i* del sistema alemán promedio difiere de la tasa pactada, por lo que es necesario plantear la ecuación de valor:

$$a^{-1}(1;10;0.035) = \frac{1}{10} + i^*\frac{11}{20}$$

$$i = 0{,}0368$$

b.4) La i del sistema directo difiere de la tasa pactada, por lo que es necesario plantear la ecuación de valor:

$$a^{-1}(1;10;0.035) = \frac{1}{10} + i$$

$$i = 0{,}0202$$

3) Ud. está evaluando tomar un préstamo de $ 56.000. Conoce que la T.E.M. activa para Préstamos Personales reembolsables en 28 mensualidades que incluyen amortización constante e intereses sobre

saldos es: 2,8% en entidades financieras y por otro lado la T.I.M.D. para préstamos otorgados mediante calculo de intereses sobre principal es: 1,6%.
En ambos casos el 1° pago es al mes siguiente:
Determine cuál me conviene más como deudor y justifique.

Rta.: En este caso, me conviene más el sistema directo por tener una tasa de interés mensual implícita menor al del sistema francés.

a) *Determinación de la tasa de interés implícita mensual en el sistema directo*

Datos:
$V_0=56.000$
$n=28$
$TIMD=r=i_{sd}= 0,016$ —se lee tasa de interés mensual directa, o tasa mensual directa, también simbolizada como r o i_{sd}

$$56.000.\ a^{-1}(1;28;i^*) = 56.000.\left(\frac{1}{28}+0,016\right)$$

$$a^{-1}(1;28;i^*) = \frac{2896}{56000} = 0,05171$$

Para hallar i* podemos utilizar Baily ya que la renta es constante; se trata de hallar aquella tasa de interés i* que iguala el valor actual de 28 cuotas de 2.896 con el préstamo de 56.000.

$$h=\left(\frac{56000}{2896.28}\right)^{\frac{2}{29}}-1=0,02586$$

$$i^*=0,02586.\frac{12-0,02586.(28-1)}{12-2.0,02586.(28-1)}=0,0276$$

b) Tasa de interés implícita mensual en el sistema alemán para cuotas puras coincide con la tasa contractual del 2,8%.

Conclusión: Debemos reconocer que en el caso del sistema directo el coste financiero mensual es menor al caso del sistema alemán. Por lo tanto, como deudor opto por el sistema directo dada las condiciones de este préstamo. No podemos comparar cuotas para jerarquizar ya que en el sistema alemán son variables.

4) Un préstamo de $ 56.000 del 10/01 amortizable progresivamente en 28 cuotas de capital que forman una renta variable en progresión geométrica cuya razón es (1+i) con cuotas constantes que incluyen además de amortización intereses del 2,8% calculados sobre saldos. Halle el saldo de deuda justo después de abonar la cuota con vencimiento en junio del mismo año y desagregue la cuota de ese mes.

Rta.: $V_6 = 48.893{,}5$; $t_5 = 1.500{,}87$ e $I_5 = 1.411{,}04$.

$C = 56000.\ a^{-1}(1;28;0{,}028)$

$C = 2911{,}91$

Cálculo del saldo de deuda en forma retrospectiva

$$V6 = 56.000 \,.\left[1 - \frac{(1+0{,}028)^5 - 1}{(1+0{,}028)^{28} - 1}\right] = 48.893{,}5$$

Cálculo del saldo de deuda en forma prospectiva

$V_6 = 56.000.\ a^{-1}(1;28;0{,}028)\ a\,(1;28-6+1;0{,}028)$

$V_6 = 2911{,}91 \,.\, 16{,}79083503 = 48.893{,}47$

Determinación de los componentes de la cuota N° 5 que vence en junio

$C = t_5 + I_5$

Vemos que es necesario buscar el fondo amortizante para luego capitalizarlo (k-1) períodos y encontrar la amortización contenida en la cuota k.

$t_1 = 56.000.\ s^{-1}(1;28;0{,}028) = 1.343{,}91$

$t_5 = 1343{,}91 \,.\, (1+0{,}028)^4 = 1500{,}87$

Volcamos los datos que tenemos en el cuadro y vemos que para calcular I_5 podemos sumarle al saldo de deuda luego de abonada la cuota 5 la amortización contenida en esa cuota y llegar a V_5.

K	V_k	I_k	t_k
5			1500,87
6	48.893,47		

$V_5 = 48.893{,}47 + 1500{,}87 = 50.394.34$

$I_5 = 50.394{,}34 * 0{,}028 = 1.411{,}04$

Entonces: $t_5 = 1.500{,}87$
$I_5 = \underline{1.411{,}04}$
$c = 2.911{,}91$

5) Con fecha 10/01/05 he aplicado $ 56.000 en:
a) compra de 6 Bonos emitidos el 20/4/03 VN $ 15.000. Cada bono da derecho al cobro de dos cupones: el cupón anteúltimo por intereses

$ 50 que vence el 20/6/05 y el último cupón que vence el 20/12/05 por intereses $ 50 y amortización $ 5.000. La T.I.R.E.M. del Bono a la fecha de compra es del 1,8% efectivo mensual, y

b) por el resto hice un desembolso tal que generará ingresos de caja de igual riesgo por $3.000 durante 12 mensualidades a partir del mes próximo.

Determine cuál de las dos alternativas de inversión fue más ventajosa.

Rta.: La segunda inversión generó mayor TIR.

10/01/05	20/06/05	20/12/05
◆	50	(50+5000)
-PM		

$$PM = \frac{50}{\left(1+0,018\right)^{\frac{161}{30}}} + \frac{5050}{\left(1+0,018\right)^{\frac{344}{30}}} = 45,43+4115,76 = 4161,19$$

Cada bono tiene un precio de $ 4.161,19. El valor de la inversión en títulos ha sido de $24.967,14 (4161,19 * 6).

La primera aplicación fue de $ 24.967,14 y genera una TIREM del 1,8% mensual al momento de la compra. Cuando estudiemos Bonos, veremos que dicho rendimiento financiero mensual se cumple siempre y cuando mantenemos el título al vencimiento y no lo realizamos.

a) Para calcular la segunda aplicación necesito conocer el tamaño de la inversión que será de la diferencia entre el total disponible 56.000 y la compra de 6 títulos por $ 4.161,19 c/u, es decir la segunda aplicación será de $ 56.000 – $24967,14= 31032,86

El planteo para determinar la TIREM será:

31.032,86 = 3000 . a(1;12;i*)

Para hallar i* podemos utilizar Baily ya que la renta es constante. Debemos, entonces, buscar aquella tasa de interés i* que iguala el valor actual de 12 cuotas de 5.000 con la inversión que fue necesaria hacer = 31.033.

$$h = \left(\frac{31.033}{3000.12}\right)^{-\frac{2}{13}} - 1 = 0,023104$$

$$i^* = 0,023104.\frac{12-0,023104(12-1)}{12-2.0,023104.(12-1)} = 0,0236$$

La segunda aplicación ofrece una mayor TIR (2,36%).

6) Deduzca y calcule las cuotas de un préstamo de $ 5.000 que paga intereses calculados sobre principal y amortización creciente en un 10% con respecto a la anterior. Para n=3; TEM del 4%. Posteriormente efectúe un cuadro de marcha del préstamo.

Se pretende crear cualquier sistema de préstamo conociendo la ley de formación de cada uno de sus componentes y acá sabemos que las cuotas son crecientes.

Datos:
$V_0 = 5.000$
TIMD= 0,04
q= 0,10
n =3

Determinación de la amortización contenida en cada cuota k.

$$5.000 = t_1 + t_1 (1+0,10) + t_1 (1+0,10)^2$$
$$5.000 = t_1 \, [\, 1 + (1+0,10) + (1+0,10)^2 \,]$$
$$5.000 = t_1 \, . \, s(1;3;0,10)$$
$$t_1 = 5.000 \, . \, s^{-1} (1;3;0,10)$$
$$t_1 = 1.510,57$$
$$t_2 = 1.510,57 \, .(1+0,10) = 1.661,63$$
$$t_3 = 1.510,57(1+0,10)^2 = 1.827,90$$

Determinación de los intereses contenidos en cada cuota k —constantes— se calculan sobre el principal.

$$I = 5.000 \, . \, 0,04$$
$$I = 200$$

En regla general:

$t_1 = V_0 \, . \, s^{-1}(1;n;q)$

$t_k = t_1 \, (1+q)^{k-1}$

$I = V_0 \, . \, i$

$$c_k = V_0 \, . \, s^{-1} \, . \, (1;n;q) \, (1+q)^{k-1} + V_0 \, . \, i$$
$$c_k = V_0 \, . \, [\, s^{-1} \, . \, (1;n;q) + i \,]$$

K	Vk	Ik	Tk	Ck	Tk
0	5.000	-	-	-	-
1	5.000	200	1.510,57	1710,57	1510,57
2	3.489,43	200	1.661,63	1.861,63	3.172,20
3	1.827,80	200	1.827,80	2.027,80	5.000,00
Sumas		600	5.000,00	5.600	

7) En un préstamo de $ 112.000 a devolver en 56 mensualidades iguales y consecutivas que incluyen intereses sobre el principal y amortización constante, tiene una tasa de interés implícita mensual del 2,3%. Determine:
   a) El importe de cada mensualidad y la tasa mensual contractual.
   b) El total de intereses de la operación.
   c) El saldo de deuda un momento después de abonada 40 mensualidades.
   d) Si me ofrecen otro préstamo de igual importe a cancelar en 56 mensualidades iguales y consecutivas de $ 3.588,56. Halle el total de intereses de la operación
   e) Qué me conviene más: el préstamo inicial o el del punto d).
   f) Si aparece otra tasa de financiación para préstamos a pagar en mensualidades a largo plazo en el mercado y es una TIREA del 32,82% ¿Cuál alternativa me conviene más?

Rta.: a) C= 3.577,16; i = 0,01408; b) 88.310; c) $V'_{40}=V_{41}$= 32.000; d) 88.959,36; e) Conviene a); f) Conviene a).

V_0= 112.000
n=56
T.I.M.D. = se desconoce
i* = 0,023

a) *Cálculo de la cuota*

Conociendo el coste financiero o tasa de interés implícita planteamos la equivalencia financiera entre la cuota del sistema francés que contiene una i* igual a la contractual y la cuota del sistema directo. Luego, estamos en condiciones de buscar la tasa contractual del sistema directo.

$C = 112.000.\ a^{-1}\ (1;56;0,023)$

C= 3.577,16

$$3.577,16 = 112.000.\left(\frac{1}{56}+i\right)$$

$$i = \frac{3.577,16}{112.000} - \frac{1}{56} = 0,03194 - 0,01786 = 0,01408$$

i = 0,01408

Una tasa contractual en el sistema directo del 1,408% correspondiente a un préstamo que se reintegra en 56 mensualidades tiene una tasa de interés implícita del 2,3%. Es importante mencionar el plazo de la operación pues la tasa de interés implícita varía en función al número de cuotas.

b) *Cálculo del total de intereses*

Para hallar el total de intereses del sistema directo:

$$\sum_{j=1}^{56} I_j = V_0.i.n$$

$$\sum_{j=1}^{56} I_j = 112.000.0{,}01408.56 = 1576{,}96.56 = 88.309{,}76$$

- En cada una de las cuotas se incluyen una porción de interés de \$ 1.576,96 constante. En 56 cuotas el total es 56 veces ese interés.

c) *Cálculo del saldo de deuda*

$$V_{41} = 112.000\ .\left[\frac{56-41+1}{56}\right] = 32.000$$

d) *Cálculo de Intereses de la operación si la cuota es de 3.588,56.*

Si bien no se especifica la modalidad de este préstamo, para determinar el total pagado en concepto de retribución a ese capital prestado no se necesita otro elemento. Por lo tanto, el total de intereses de la operación es la suma de 56 cuotas de \$ 3.588,56 menos el préstamo de \$ 112.000:

$$\sum_{j=1}^{56} I_j = n.c - V_0.$$

$$\sum_{j=1}^{56} I_j = 3.588{,}56.56 - 112.000 = 200.959{,}36 - 112.000 = 88.959{,}36$$

e) *Conveniencia entre los dos sistemas de préstamos:*

- Préstamo a) Se devuelven \$ 112.000 mediante 56 mensualidades iguales de \$ 3.577,16 - TIREM = 2.3%.
- Préstamo b) Se devuelven \$ 112.000 mediante 56 mensualidades iguales de \$ 3.588,56 – TIREM = 2,31%.

$$h = \left(\frac{112.000}{3588{,}56.56}\right)^{-\frac{2}{57}} - 1 = 0{,}02072424$$

$$i^* = 0{,}02072424.\frac{12-0{,}02072424(56-1)}{12-2.0{,}02072424(56-1)} = 0{,}0231$$

No queda ninguna duda que ante igualdad de cuotas en todo el horizonte de la operación la alternativa a) es la más conveniente por contener una menor cuota. O bien por tener la menor TIREM.

e) *Conveniencia entre los sistemas de préstamos dando de alta otra alternativa que ofrece una TIREA= 32,82%.*

Tenemos que calcular la tasa mensual que cobran: considerando un año de 360 días o de 365 días, pues si no se especifica deberíamos contemplarlo para el cálculo de cada cuota. Considerando ambas posibilidades el cálculo de cada mensualidad será:

$TIREM = (1+0,3282)^{\frac{30}{365}} - 1 = 0,0236$

C= 112.000. a^{-1} (1;56;0,0236)

C= 112.000 . 0,032365779

C= 3.624,97

$TIREM = (1+0,3282)^{\frac{30}{360}} - 1 = 0,0239$

C= 112.000. a^{-1} (1;56;0,029)

C= 112.000 . 0,032580243

C= 3.648,99

Nuevamente volvemos a elegir en nuestro caso la alternativa a) pues en este caso la cuota es aún mayor a cualquiera de las anteriores y ocurre lo mismo con el coste financiero resultante.

Recordemos que la elección se hace o bien calculando el coste financiero resultante que en nuestro caso sería un 2,3% de la alternativa a) un 2,36% de la alternativa c) y un 2,39% de la alternativa d) y en la b) podríamos también calcularlo, pero sabemos que debe dar mayor a la aternativa a) por tener una cuota mayor que en esa alternativa.
O bien podemos en este caso compararar las cuotas por tratarse de cuotas constantes y la preferencia en uno u otro se da siempre.

8) Un préstamo de $ 80.000 a devolver en 40 mensualidades consecutivas que incluyen intereses sobre saldos calculados con una T.E.M. del 2% y amortización creciente. El prestatario hasta la cuota N° 31 con vencimiento el 8/02 del año x venía cumpliendo normalmente, luego deja de pagar las cuotas N° 32, 33 y 34 que vencían el 8/03; 8/04 y 8/05 del mismo año x respectivamente.

a) Determine el total amortizado hasta la cuota 31.

b) Halle en qué momento del préstamo se debía producir el tiempo medio de reembolso es decir el momento en que el total amortizado es la mitad del préstamo.

c) Si este prestatario decide cancelar la deuda el 8/6 del año x, ¿cuál es el valor que deberá pagar, recordando que las últimas cuotas resultaron impagas?

d) Suponiendo igual planteo anterior pero que a cada una de las cuotas vencidas se les adiciona un interés punitorio equivalente al 50% de la tasa compensatoria. ¿Cuál es el importe de cancelación en tal caso?

Rta.: a) T_{31}= 56.129,87; b) tiempo medio de reembolso: 23<k<24; c) Importe de Cancelación: $ 25.838; d) $ 26.018,85.

a) *Cálculo de T_{31}*

$T_{31} = t_1 \cdot s(1;31;0{,}02)$

siendo $t_1 = 80.000 \cdot s^{-1}(1;40;0{,}02) = 80.000 \cdot 0{,}016555747 = 1324{,}46$

$T_{31} = t_1 \cdot s(1;31;0{,}02)$

$T_{31} = 1.324{,}46 \cdot s(1;31;0{,}02)$

$T_{31} = 1.324{,}46 \cdot 42{,}37944079$

$T_{31} = 56.129{,}87$

b) *Cálculo del tiempo medio de reembolso.*

Planteamos que el total amortizado hasta el momento p (el que debemos hallar) es la mitad del préstamo. Es decir en que momento ya he cancelado la mitad de la deuda: \$ 40.000.

$$40.000 = 1.324{,}46 \cdot \frac{(1+0{,}02)^p - 1}{0{,}02}$$

$$p = \frac{\log\left(1 + \dfrac{40.000}{1.324{,}46} \cdot 0{,}02\right)}{\log(1+0{,}02)} = \frac{\log 1{,}60401975}{\log 1{,}02} = \frac{0{,}205209711}{0{,}008600172} = 23{,}86$$

Podemos comprobar que si p=23 el total amortizado será de \$ 38.204 y si p=24 el total amortizado será de \$ 40.292,54.

$$40.000 = 1.324{,}46 \cdot \frac{(1+0{,}02)^{23} - 1}{0{,}02} = 38.204$$

$$40.000 = 1.324{,}46 \cdot \frac{(1+0{,}02)^{24} - 1}{0{,}02} = 40292{,}54$$

De todas formas como las cuotas son discretas podemos decir que una vez pagadas 23 cuotas el saldo adeudado se está acercando a un importe equivalente a la mitad del préstamo pero todavía supera la mitad del préstamo y cuando se pagó una cuota más ya debe un poco menos de la mitad pues debería \$ 39707,46 (la diferencia entre V_0= 80.000 y T_{24}= 40.292,54).

c) *Importe de cancelación el 8/6*

Recordemos que la última cuota paga fue la cuota N° 31 correspondiente al mes de febrero.

Tiene impagas las cuotas: N° 32 –venc. 8/3
N° 33 –venc. 8/4
N° 34 –venc. 8/5

- Un razonamiento es calcular el saldo de deuda al 8/6 según el cronograma normal de pagos, es decir habiendo pagado teóricamente las cuotas Nos. 32, 33 y 34 y adicionarle el valor de las cuotas impagas; todo ello valuado al momento de pago que es el 8/6 cuando k=35. Se le deben sumar las cuotas que se consideraron pagas al hallar V'_{34}.
El importe de cada cuota es $c= 80.000 \,.\, a^{-1}(1;40;0,02)$
$c= 2.924,46$

...	8/2	8/3	8/4	8/5	8/6
	31	32	33	34	35

V'_{34}= 16.381,16 (1+0,02)= **16.708,78**

cuotas impagas	2.924,46	2.924,46	2.924,46	—

2.924,46 .s(0;3;0,02)
9.129,02
25.837,8

V'_{34}= 2.924,46 a(1; 6;0,02)=16.381,16. Este saldo corresponde al remanente luego de abonada la cuota 34 y en ese momento 34. Por lo tanto para reexpresarlo al momento 35 —8/6— deberá capitalizarse por un período más, es decir sumarle los intereses devengados desde el 8/5 al 8/6, arrojando igual valor de $ 16.708,78.

- Otro razonamiento es calcular el saldo de deuda luego de abonada la cuota 31 y como recién se paga 4 meses después, capitalizar por estos 4 meses ese saldo a la tasa convenida. Recordemos que no se plantearon intereses punitorios.

V'_{31} = 80.000- 56129,87
V'_{31} = 23.870,13 $\qquad\qquad$ V'_{31+t}= 25.837,80

$$V'_{31}\ \xrightarrow{(1+0,02)^4}\ V'_{31+t}$$

- Otra forma es plantear el siguiente esquema y capitalizar al momento 35 las 4 cuotas pendientes, que son las 3 vencidas y la que vence ese día, y actualizar las 5 cuotas a vencer en forma escalonada a partir del mes siguiente.

8/2	8/3	8/4	8/5	8/6	8/7	8/8	8/9	8/10	8/11
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
-	c_{impaga}	c_{impaga}	c_{impaga}	c ◆	c	c	c	c	c

Si todas las cuotas impagas por ser vencidas o a vencer son de igual importe =$ 2.924,46. Entonces nos queda:

$$\underbrace{2.924,46\ s(1;4;0,.02)}_{12.054} + \underbrace{2.924,46\ .\ a(1;5;0,02)}_{13.784}$$

12.054 + 13.784
25.838

Cualquiera fuese el camino, vemos que no habiendo gastos ni intereses adicionales por pago fuera de término, el importe para rescindir el contrato es de 25.838.

d) Adición del 50% en la tasa de interés para las cuotas vencidas es decir i= 0,02 + 0,01 (50% del 2%) = 0,03

8/2	8/3	8/4	8/5	8/6	8/7	8/8	8/9	8/10	8/11
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
-	C_{impaga}	C_{impaga}	C_{impaga}	C ◆	C	C	C	C	C

Si todas las cuotas impagas por ser vencidas o a vencer son de igual importe = \$ 2.924,46. Entonces nos queda:

$$2.924{,}46\ s(1;4;0{,}.03) \quad + \quad 2.924{,}46\ .\ a(1;5;0{,}02)$$
$$12.234{,}85 \quad + \quad 13.784$$
$$26.018{,}85$$

9) Considerando cuotas puras que cancelan un préstamo en las siguientes condiciones: V(o)= 1.200; n = 3; i = 2% mensual —tasa fija—; Fecha de otorgamiento: 20/06; Fecha de vencimiento de las cuotas mensuales: A los 30 días del préstamo.

a) Complete el siguiente cuadro:

Cuotas	ΣI_k	V_o	C_1	C_2	C_3	T.I.R.	Tasa Contractual
A-Prestación reembolsable en cuotas periódicas que incluyen "intereses calculados s/saldos".							
1) IGUALES							
2) VARIABLES R=8							
3) VARIABLES R=(-2)							
4) VARIABLES R= (-8)							
5) VARIABLES Q=0,02							
6) VARIABLES Q= (-0,02)0							
7) VARIABLES Q=0,05							
B-Prestación reembolsable en cuotas periódicas: incluyen "intereses promediados constantes"							
8) CONSTANTES							
C-Prestación reembolsable en cuotas periódicas: incluyen "intereses s/ el principal"							
9) CONSTANTES							
D- Prestación con reembolso único de capital y Pago periódico de intereses							
D.1. Sin constitución de un fondo de amortización							
10)							
D.2. Con constitución de un fondo de amortización							
11) i_a= 0,02 ; i_p= 0,00							
12) i_a= 0,02 ; i_p= 0,005							
13) i_a= 0,02 ; i_p= 0,02							
14) i_a= 0,02 ; i_p= 0,025							
E- Prestación con reembolso único de capital e intereses							
CUOTA ÚNICA							

b) Integre un cuadro de marcha.
c) Calcule el coste financiero mensual o T.I.R.E.M.
d) Saque las conclusiones acerca de la conveniencia financiera a los fines de optar.

Para resolverlo debemos, en cada sistema de préstamo, determinar el importe de cada cuota. La suma de las n cuotas constantes o bien de cuotas variables en progresión aritmética o geométrica, si encontramos esta ley de formación determina el "Total pagado". Con estos datos tenemos también el "Total de Intereses de la Operación".

Podemos ir integrando el cuadro. Colocamos la tasa de referencia o contractual que es el el 2% de tasa activa mensual.

Ahora, ya contamos con los flujos de caja para cada alternativa. Nos queda determinar el coste financiero mensual para el deudor.

Lo importante es reconocer que en los sistemas de préstamos las tasas de interés son:

- ***La tasa contractual (es la referenciada en el contrato que instrumenta la deuda).***
  - ***Tasa de interés directa:*** *(T.I.D-T.I.M.D.)* También llamada tasa de interés cargada. Es la tasa que se aplica en los sistemas de préstamos directos, en donde los intereses periódicos se calculan siempre sobre el capital inicial o principal.
  - ***Tasa de interés sobre saldos:*** es la tasa que se aplica en los sistemas de préstamos en donde los intereses se calculan sobre el saldo adeudado.

- ***La tasa de interés implícita:*** es el coste o rendimiento financiero de una operación de inversión o financiación que surge de la equivalencia financiera entre los ingresos y los egresos de caja. Que en definitiva es la tasa de interés sobre saldos.

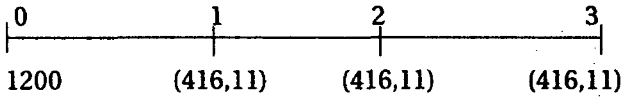
Comparamos en las últimas dos columnas del cuadro ambas tasas y concluimos.

1) *Cuotas mensuales, iguales y consecutivas*

$$c = 1.200.a^{-1}(1;3;0,02)$$
$$c = 416,11$$

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = n.c - V_o$$
$$\sum_{k=1}^{3} I_k = 3.416,11 - 1.200 = 48,33$$

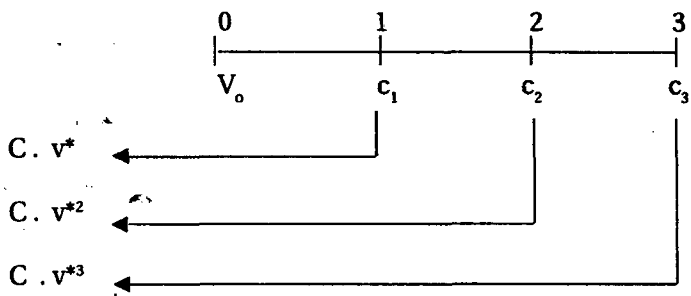
Los flujos de fondos asociados a la operación son:



Fecha	K	V_k	I_k	t_k	c_k	T_k	V'_k
20/06	0	1.200,00	-	-	-	-	1.200,00
20/07	1	1.200,00	24	392,11	416,11	392,11	807,89
19/08	2	807,89	16,16	399,95	416,11	792,06	407,94
18/09	3	407,94	8,17	407,94	416,11	1.200,00	0
			48,33	1.200,00	1.248,33		

*Determinación de la tasa de interés implícita mensual de la operación -i**

Dado el siguiente flujo de fondos



En donde: $v^* = (1+i^*)^{-1}$

Debemos hallar la tasa periódica i* que iguala el valor del préstamo con el valor actual de todos los pagos. Nos queda así:

$$V_o = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(1+i^*)^k}$$

También se puede expresar como la tasa i* es aquella que hace cero el valor actual neto.

$$V_o - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(1+i^*)^k} = 0$$

Si denominamos V_o como c_o la expresión anterior queda de la siguiente forma:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{(1+i^*)^k} = 0$$

Ahora, podemos calcular el valor de i*. En este caso particular todos los flujos que reembolsan al préstamo son de igual cuantía, por lo que el valor actual de dichos flujos se encuentran representados por el factor de actualización de una serie uniforme a(1;n;i*); es decir:

$V_0 = c \ . \ a(1;n;i^*) \quad 1200 = 416,11 \ . \ a(1;3;i^*).$

Si resolvemos la ecuación de grado 3 llegamos a que la tasa de interés implícita mensual es también la tasa contractual que fue utilizada para determinar los componentes del cuadro de marcha.

2) *Cuotas mensuales, consecutivas en gradiente aritmético creciente en $8*

Partimos de la fórmula de Valor Actual de la renta variable en progresión aritmética.

$VA(1;n,i;r) = c.a(1;n;i) + \frac{r}{i}\left[a(1;n;i) - n.v^n\right]$ y despejamos c, obteniendo:

$$c = 1.200.a^{-1}(1;3;0,02) - \frac{8}{0,02}\left[1 - 3.s^{-1}(1;3;0,02)\right]$$

$c = 408,21$

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = \frac{(c_1 + c_n).n}{2} - V_o$$

$$\sum_{k=1}^{3} I_k = \frac{(408,21 + 424,21).3}{2} - 1200 = 48,63$$

Para hallar la suma de intereses necesito conocer la primera y última cuota.

Sabemos que $c_k = c_1. + (k-1).r$; siendo $c_n = c_1. + (n-1).r$;

$c_3 = 408,21. + (3-1).8 = 424,21$

Los flujos de fondos asociados a la operación son:

0	1	2	3
1200	(408,21)	(416,21)	(424,21)

Fecha	K	V_k	I_k	t_k	C_k	T_k	V'_k
20/06	0	1.200,00	-	-	-	-	1.200,00
20/07	1	1200,00	24,00	384,21	408,21	384,21	815,79
19/08	2	815,79	16,32	399,89	416,21	784,10	415,90
18/09	3	415,90	8,31	415,90	424,21	1200,00	
			48,63	1200.00	1248,63		

*Determinación de la tasa de interés implícita mensual de la operación –i**

Debemos hallar esa tasa periódica i* que permite que el valor del préstamo sea equivalente financieramente con el valor actual de todos los pagos. Nos queda así:

$$V_o = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(1+i^*)^k}. \text{ En nuestro ej. } 1200 = \frac{408,21}{(1+i^*)} + \frac{416,21}{(1+i^*)^2} + \frac{424,21}{(1+i^*)^3}$$

arrojando i*=0,02.

3) *Cuotas mensuales, consecutivas en gradiente aritmético decreciente en $2*

$$VA(1;n;i;r) = c.a(1;n,i) + \frac{r}{i}\left[a(1;n,I) - \frac{n}{(1+i)^n}\right]$$ Despejando c , queda:

$$c = 1.200 \cdot a^{-1}(1;3;0,02) + \frac{2}{0,02}\left[1 - 3.s^{-1}(1;3;0,02)\right]$$

$$c = 418,08$$

$$\sum_{k=1}^{3} I_k = \frac{(418,08+414,08).3}{2} - 1200 = 48,24$$

$$c_3 = 418,08. + (3-1).(-2)) = 414,08$$

Los flujos de fondos asociados a la operación son:

0	1	2	3
1200	(418,08)	(416,08)	(414,08)

Fecha	K	V_k	I_k	t_k	C_k	T_k	V'_k
20/06	0	1.200,00	-	-	-	-	1.200,00
20/07	1	1200,00	24,00	394,08	418,08	394,08	805,92
19/08	2	805,92	16,12	399,96	416,08	794,04	405,96
18/09	3	405,96	8,12	405,96	414,08	1200,00	
			48,24	1200,00	1248,24		

*Determinación de la tasa de interés implícita mensual de la operación –i**

Debemos hallar esa tasa periódica i* que permite que el valor del préstamo sea equivalente financieramente con el valor actual de todos los pagos. Nos queda así:

$$V_o = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(1+i^*)^k} \quad \text{En nuestro ej.} \quad 1200 = \frac{418,08}{(1+i^*)} + \frac{416,08}{(1+i^*)^2} + \frac{414,08}{(1+i^*)^3}$$

arrojando i*=0,02

4) *Cuotas mensuales, consecutivas en gradiente aritmético decreciente en $8*

$$VA(1;n;i;r) = c.a(1;n,i) + \frac{r}{i}\left[a(1;n,I) - \frac{n}{(1+i)^n}\right]$$ Despejando c, queda:

$$c = 1.200.a^{-1}(1;3;0{,}02) - \frac{(-8)}{0{,}02}\left[1 - 3.s^{-1}(1;3;0{,}02)\right]$$

$$c = 424$$

$$\sum_{k=1}^{3} I_k = \frac{(424+408).3}{2} - 1200 = 48$$

Para hallar la suma de intereses necesito conocer la primera y última cuota.

Sabemos que $c_k = c_1.+(k-1).r$ **; siendo** $r = -\frac{V_0.i}{n}$ **y** $c_n = c_1.+(n-1).r$**;**

$$c_3 = 424.+(3-1).\left(\frac{1200.0{,}02}{3}\right) = 408$$

Los flujos de fondos asociados a la operación son:

0	1	2	3
1200	(424)	(416)	(408)

Fecha	K	V_k	I_k	T_k	c_k	T_k	V'_k
20/06	0	1.200	-	-	-	-	1.200
20/07	1	1200	24	400	424	400	800
19/08	2	800	16	400	416	800	400
18/09	3	400	8	400	408	1200	0
			48	1200	1248		

*Determinación de la tasa de interés implícita mensual de la operación –i**

Debemos hallar esa tasa periódica i* que permite que el valor del préstamo sea equivalente financieramente con el valor actual de todos los pagos. Nos queda así:

$$V_o = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(1+i^*)^k} \qquad \text{En nuestro ej.} \quad 1200 = \frac{424}{(1+i^*)} + \frac{416}{(1+i^*)^2} + \frac{408}{(1+i^*)^3}$$

arrojando i* = 0,02.

5) *Cuotas mensuales, consecutivas en gradiente geométrico creciente un 2%*

Se debe cumplir que $\frac{c_2}{c_1} = \frac{c_3}{c_2} = \cdots \frac{c_{(n)}}{c_{(n-1)}}$; en donde cada cuota se forma:

$$c_k = c_1.\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{k-1}$$

Si cada cuota crece en progresión geométrica siendo su razón (1+q)=

$\frac{c_2}{c_1}=\frac{c_3}{c_2}=\dots\frac{c_{(n)}}{c_{(n-1)}}$ → la suma de las n cuotas se resuelve con la fórmula de suma de la progresión geométrica.

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = c_1.\frac{\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^n-1}{\left(\frac{c_2}{c_1}\right)-1}-VA(1;n;i;q)$$ En nuestro ej.:

Hallamos el valor actual: $\forall$q= i → $VA(1;n;i;q)=\frac{c.n}{(1+i)}$

Si VA(1;n;i;q)=V_o y despejamos c, nos queda:

$$c_1=\frac{V_0.(1+i)}{n} \qquad c_1=\frac{1200.(1+0{,}02)}{3}=408$$

y la suma de los intereses en este ejemplo:

$$\sum_{k=1}^{3} I_k = 408.\frac{(1{,}02)^3-1}{(1{,}02)-1}-VA(1;3;0{,}02;0{,}02)=1248{,}64-1200=48{,}64$$

Los flujos de fondos asociados a la operación son:

0	1	2	3
1200	(408)	(416,16)	(424,48)

Fecha	K	V_k	I_k	t_k	C_k	T_k	V'_k
20/06	0	1.200,00	-	-	-	-	1.200,00
20/07	1	1200,00	24,00	384,00	408,00	384,00	816,00
19/08	2	816,00	16,32	399,84	416,16	783,84	416,16
18/09	3	416,16	8,32	416,16	424,48	1200,00	0
			48,64	1200,00	1248,64		

*Determinación de la tasa de interés implícita mensual de la operación–i**

Debemos hallar esa tasa periódica i* que permite que el valor del préstamo sea equivalente financieramente con el valor actual de todos los pagos. Nos queda así:

$$V_o=\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{(1+i^*)^k}$$ En nuestro ej.: $$1200=\frac{408}{(1+i^*)}+\frac{416{,}16}{(1+i^*)^2}+\frac{424{,}48}{(1+i^*)^3}$$

arrojando i* = 0,02.

6) *Cuotas mensuales, consecutivas en gradiente geométrico decreciente un 2%*

Este es un caso general de renta que varía en progresión geométrica con q≠i.

$$\forall q \neq i \rightarrow VA(1;n;i;q) = c.\frac{\left(\frac{1+q}{1+i}\right)^n - 1}{q-i}$$ Despejando c nos queda:

$$c_1 = V_o \cdot \frac{(q-i)}{\left(\frac{1+q}{1+i}\right)^n - 1}$$

Hallamos: $c_1 = 1200 \cdot \frac{(-0{,}02 - 0{,}02)}{\left(\frac{1-0{,}02}{1+0{,}02}\right)^3 - 1} = 424{,}43$

La suma de intereses totales de la operación se halla a partir de la fórmula ya planteada en el anterior ejercicio:

$$\sum_{k=1}^{3} I_k = 424{,}43.\frac{(1-0{,}02)^3 - 1}{(1-0{,}02)-1} - VA(1;3;0{,}02;-0{,}02) = 1247{,}99 - 1200 = 47{,}99$$

Los flujos de fondos asociados a la operación son:

0	1	2	3
1200	(424,43)	(399,95)	(407,62)

Fecha	K	V_k	I_k	t_k	c_k	T_k	V'_k
20/06	0	1.200,00	-	-	-	-	1.200,00
20/07	1	1200,00	24,00	400,43	424,43	400,43	799,57
19/08	2	799,57	15,99	399,95	415,94	800,38	399,62
18/09	3	399,62	8,00	399,62	407,62	1200,00	0
			47,99	1200,00	1247,99		

*Determinación de la tasa de interés implícita mensual de la operación –i**

Debemos hallar esa tasa periódica i* que permite que el valor del préstamo sea equivalente financieramente con el valor actual de todos los pagos. Nos queda así:

$$V_o = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(1+i^*)^k}$$ En nuestro ej. $$1200 = \frac{424{,}43}{(1+i^*)} + \frac{415{,}94}{(1+i^*)^2} + \frac{407{,}62}{(1+i^*)^3}$$

arrojando i* = 0,02.

7) *Cuotas mensuales, consecutivas en gradiente geométrico creciente un 5%*

Hallamos $c_1 = 1200 \cdot \dfrac{(0{,}05-0{,}02)}{\left(\dfrac{1+0{,}05}{1+0{,}02}\right)^3 - 1} = 396{,}23$

La suma de intereses totales de la operación se halla a partir de la fórmula ya planteada en el anterior ejercicio.

$$\sum_{k=1}^{3} I_k = 396{,}23 . \frac{(1+0{,}05)^3-1}{(1+0{,}05)-1} - VA(1;3;0{,}02;0{,}05) = 1249{,}12 - 1200 = 49{,}12$$

Los flujos de fondos asociados a la operación son:

0	1	2	3
1200	(396,23)	(416,04)	(436,85)

Fecha	*K*	V_k	I_k	T_k	c_k	T_k	V'_k
20/06	0	1.200,00	-	-	-	-	1.200,00
20/07	1	1200,00	24,00	372,23	396,23	72,23	827,77
19/08	2	827,77	16,56	399,48	416,04	771,71	428,29
18/09	3	428,99	8,56	428,29	436,85	1200,00	
			49,12	1200,00	1249,12		

*Determinación de la tasa de interés implícita mensual de la operación –i**

Debemos hallar esa tasa periódica i* que permite que el valor del préstamo sea equivalente financieramente con el valor actual de todos los pagos. Nos queda así:

$V_o = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{c_k}{(1+i^*)^k}$ En nuestro ej. $1200 = \dfrac{396{,}23}{(1+i^*)} + \dfrac{416{,}04}{(1+i^*)^2} + \dfrac{436{,}85}{(1+i^*)^3}$

arrojando $i^* = 0{,}02$.

8) *Cuotas mensuales, iguales y consecutivas que incluyen "intereses promediados y amortización" constante.*

$c = 1.200 . \left(\dfrac{1}{3} + 0{,}02 \bullet \dfrac{(3+1)}{2. \bullet 3}\right)$

$c = 416$

$\sum_{k=1}^{n} I_k = n.c - V_o$

$\sum_{k=1}^{3} I_k = 416.3 - 1.200 = 48$

Los flujos de fondos asociados a la operación son:

0	1	2	3
1200	(416)	(416)	(416)

Fecha	K	V_k	I_k	T_k	c_k	T_k	V'_k
20/06	0	1.200,00	-	-	-	-	1.200,00
20/07	1	1.200,00	16,00	400,00	416,00	400,00	800,00
19/08	2	800,00	16,00	400,00	416,00	800,00	400,00
18/09	3	400,00	16,00	400,00	416,00	1.200,00	0
			48,00	1.200,00	1.248,00		

*Determinación de la tasa de interés implícita mensual de la operación -i**

Debemos hallar la tasa periódica i* que iguala el valor del préstamo con el valor actual de todos los pagos. Nos queda así:

$V_o = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(1+i^*)^k}$ En nuestro ej. $1200 = 416 \bullet a(1;3;i^*)$ arrojando

$i^* = 0{,}01987$.

La tasa de interés implícita mensual encontrada difiere de la tasa contractual que fue utilizada para determinar los componentes del cuadro de marcha.

Cuadro resumen de los valores hallados y búsqueda de la tasa de interés implícita mensual cobrada.

9) *Cuotas mensuales, iguales y consecutivas que incluyen "intereses y amortización" constante.*

$$c = 1.200.\left(\frac{1}{3} + 0{,}02\right) \qquad \sum_{k=1}^{n} I_k = n.c - V_o$$

$$c = 424 \qquad \sum_{k=1}^{3} I_k = 424.3 - 1.200 = 72$$

Los flujos de fondos asociados a la operación son:

0	1	2	3
1200	(424)	(424)	(424)

Fecha	K	V_k	I_k	T_k	c_k	T_k	V'_k
20/06	0	1.200,00	-	-	-	-	1.200,00
20/07	1	1.200,00	24,00	400,00	424,00	400,00	800,00
19/08	2	800,00	24,00	400,00	424,00	800,00	400,00
18/09	3	400,00	24,00	400,00	424,00	1200,00	0
			72,00	1.200,00	1.248,00		

*Determinación de la tasa de interés implícita mensual de la operación -i**

Debemos hallar la tasa periódica i* que iguala el valor del préstamo con el valor actual de todos los pagos. Nos queda así:

$V_o = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(1+i^*)^k}$ En nuestro ej. $1200 = 424 \bullet a(1;3;i^*)$ arrojando

$i^* = 0{,}02971$.

La tasa de interés implícita mensual encontrada difiere de la tasa contractual que fue utilizada para determinar los componentes del cuadro de marcha.

10) *Cuotas de interés consecutivas y Reembolso de capital al vencimiento*

$c = 1.200. \bullet 0{,}02$

$c = 24$

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = (n.c + V_0) - V_o$$

$$\sum_{k=1}^{3} I_k = 24 * 3 = 72$$

si $c = V_0 . i$ entonces $\sum_{k=1}^{n} I_k = V_o.i.n$

Los flujos de fondos asociados a la operación son:

0	1	2	3
1200	(24)	(24)	(1224)

Fecha	K	V_k	I_k	T_k	c_k	T_k	V'_k
20/06	0	1.200,00	-	-	-	-	1.200,00
20/07	1	1.200,00	24,00	-	24,00	-	1.200,00
19/08	2	1.200,00	24,00	-	24,00	-	1.200,00
18/09	3	1.200,000	24,00	1.200,00	1.224,00	1200,00	0
			72,00	1.200,00	1.272,00		

*Determinación de la tasa de interés implícita mensual de la operación –i**

Debemos hallar la tasa periódica i* que iguala el valor del préstamo con el valor actual de todos los pagos. Nos queda así:

$$V_o = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(1+i^*)^k} \quad \text{En nuestro ej. } 1200 = \frac{24}{(1+i^*)} + \frac{24}{(1+i^*)^2} + \frac{1.224}{(1+i^*)^3}$$

arrojando i* = 0,02.

La tasa de interés implícita mensual encontrada difiere de la tasa contractual que fue utilizada para determinar los componentes del cuadro de marcha.

11) *Cuotas mensuales, iguales y consecutivas que incluyen una cuota de ahorro —optativa— y la cuota del préstamo —obligatoria—.*

Caso a): tasa activa : 2% mensual - tasa pasiva : 0% mensual

$c = 1.200\ [0{,}02 + s^{-1}\ (1;3;0)]$

$c = 424$

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = n.c - V_o$$

$$\sum_{k=1}^{3} I_k = 424.3 - 1.200 = 72{,}00$$

Los flujos de fondos asociados a la operación son:

0	1	2	3	
1200	(424)	(424)	(424)	Operación de Préstamo y Ahorro

Fecha	K	V_k	I_k	t_k	$C_{(préstamo)}$	V'k	$C_{(ahorro)}$	$F.Acuml_k$
20/06	0	1.200,00	-			-	-	-
20/07	1	1.200,00	24,00	0	24,00	1200,00	400	400,00
19/08	2	800,00	24,00	0	24,00	1200,00	400	800,00
18/09	3	400,00	24,00	1200,00	1224,00	0	400	1200,00
			72,00	1.200,00			1200,00	

*Determinación de la tasa de interés implícita mensual de la operación –i**

Debemos hallar la tasa periódica i* que iguala el valor del préstamo con el valor actual de todos los pagos.

Nos queda así: $V_o = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(1+i^*)^k}$ Consideramos c_k= cuota total

En nuestro ej.: 1200 = 424 . α (1;3;i^*) arrojando i* = 0,02971.

La tasa de interés implícita mensual encontrada difiere de la tasa contractual que fue utilizada para determinar los componentes del cuadro de marcha.

Observamos que coincide con la i* del sistema directo, pues cuando la tasa pasiva es nula el valor de la cuota total en el sistema americano coincide con el valor de la cuota del sistema directo.

12) *Cuotas mensuales, iguales y consecutivas que incluyen una cuota de ahorro —optativa— y la cuota del préstamo —obligatoria—.*

Caso a) tasa activa : 2% mensual - tasa pasiva : 0,5% mensual

$c = 1.200\ [0{,}02 + s^{-1}\ (1;3;0{,}005)]$

$c = 422{,}01$

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = n.c - V_o$$

$$\sum_{k=1}^{3} I_k = 422{,}01.3 - 1.200 = 66{,}03$$

Observamos que en el Contrato de Préstamo la suma de intereses pagados es de \$ 72 mientras que el Contrato de Depósito la suma de intereses cobrados es de \$ 5,97. Conjuntamente nos queda el total de Intereses Netos pagados, que es de \$ 66,03.

Los flujos de fondos asociados a la operación son:

0	1	2	3	
1200	(422,01)	(422,01)	(422,01)	Operac. de Préstamo y Ahorro

Fecha	K	V_k	I_k	t_k	$C_{(préstamo)}$	V'_k	$C_{(ahorro)}$	$F.Acuml_k$	$C_{(total)}$
20/06	0	1.200,00	-			-	-	-	
20/07	1	1.200,00	24,00	0	24,00	1200,00	398,01	398,01	422,01
19/08	2	800,00	24,00	0	24,00	1200,00	398,01	798,00	422,01
18/09	3	400,00	24,00	1200,00	1224,00	0	398,01	1200,00	422,01
			72,00	1.200,00			1194,03		1266,03

Int.Tot=5,97

*Determinación de la tasa de interés implícita mensual de la operación –i**

Debemos hallar la tasa periódica i* que iguala el valor del préstamo con el valor actual de todos los pagos. Nos queda así:

$V_o = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(1+i^*)^k}$ En nuestro ej.: $1200 = 422{,}01\ .\ \alpha\ (1;3;i^*)$ arrojando i* = 0,02728.

La tasa de interés implícita mensual encontrada difiere de la tasa contractual que fue utilizada para determinar los componentes del cuadro de marcha.

13) *Cuotas mensuales, iguales y consecutivas que incluyen una cuota de ahorro —optativa— y la cuota del préstamo —obligatoria—.*

Caso a) tasa activa : 2% mensual - tasa pasiva : 2% mensual

$$c = 1.200 \cdot \left[0{,}02 + s^{-1}(1;3;0{,}02)\right]. \qquad \sum_{k=1}^{n} I_k = n.c - V_o$$

$$c = 416{,}11 \qquad \sum_{k=1}^{3} I_k = 416{,}11.3 - 1.200 = 48{,}33$$

Observamos que en el Contrato de Préstamo la suma de intereses pagados es de $ 72 mientras que el Contrato de Depósito la suma de intereses cobrados es de $ 23,67. Conjuntamente nos queda el total de Intereses Netos pagados, que es de $ 48,33.

Los flujos de fondos asociados a la operación son:

0	1	2	3	
1200	(416,11)	(416,11)	(416,11)	Operación de Préstamo y Ahorro

Fecha	K	V_k	I_k	t_k	$C_{(préstamo)}$	V'_k	$C_{(ahorro)}$	$F.Acuml_k$	$C_{(total)}$
20/06	0	1.200,00	-			-	-	-	
20/07	1	1.200,00	24,00	0	24,00	1200,00	392,11	392,11	416,11
19/08	2	800,00	24,00	0	24,00	1200,00	392,11	792,05	416,11
18/09	3	400,00	24,00	1200,00	1224,00	0	392,11	1200,00	416,11
			72,00	1.200,00			1176,33		1248,33

Int.Tot=23,67

*Determinación de la tasa de interés implícita mensual de la operación –i**

Debemos hallar la tasa periódica i* que iguala el valor del préstamo con el valor actual de todos los pagos. Nos queda así:

$$V_o = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(1+i^*)^k}$$ En nuestro ej.: $1200 = 416{,}11 \,.\, \alpha\,(1;3;i^*)$ arrojando i* = 0,02.

La tasa de interés implícita mensual encontrada coincide con la tasa contractual que fue utilizada para determinar los componentes del cuadro de marcha los que coinciden con los del sistema francés pues se ha utilizado una tasa activa igual a la pasiva del 2%

14) *Cuotas mensuales, iguales y consecutivas que incluyen una cuota de ahorro —optativa— y la cuota del préstamo —obligatoria—.*

Caso a) tasa activa : 2% mensual - tasa pasiva : 2,5% mensual

$$c = 1.200 \cdot \left[0{,}02 + s^{-1}(1;3;0{,}025)\right].$$

$$c = 414{,}16$$

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = n.c - V_o$$

$$\sum_{k=1}^{3} I_k = 414{,}16.3 - 1.200 = 42{,}48$$

Observamos que en el Contrato de Préstamo la suma de intereses pagados es de $ 72 mientras que el Contrato de Depósito la suma de intereses cobrados es de $ 29,52. Conjuntamente nos queda el total de Intereses Netos pagados, que es de $ 42,48.

Los flujos de fondos asociados a la operación son:

0	1	2	3	
1200	(414,16)	(414,16)	(414,16)	Operación de Préstamo y Ahorro

Fecha	K	V_k	I_k	t_k	$C_{(préstamo)}$	V'_k	$C_{(ahorro)}$	F.Acuml$_k$	$C_{(total)}$
20/06	0	1.200,00	-			-	-	-	
20/07	1	1.200,00	24,00	0	24,00	1200,00	390,16	390,16	414,16
19/08	2	800,00	24,00	0	24,00	1200,00	390,16	790,08	414,16
18/09	3	400,00	24,00	1200,00	1224,00	0	390,16	1200,00	414,16
-			72,00	1.200,00			1170,48		1248,48

Int.Tot=29,52

*Determinación de la tasa de interés implícita mensual de la operación –i**

Debemos hallar la tasa periódica i* que iguala el valor del préstamo con el valor actual de todos los pagos. Nos queda así:

$$V_o = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(1+i^*)^k}$$

En nuestro ej.: 1200 = 414,16 . $\alpha\,(1;3;i^*)$ arrojando i* = 0,017598.

La tasa de interés implícita mensual encontrada difiere de la tasa contractual que fue utilizada para determinar los componentes del cuadro de marcha.

Ver en página siguiente, Cuadro resumen de V_0; S I_k; c_k tasa de interés implícita mensual vs. tasa contractual.

CUOTAS	ΣI_k	V_0	C_1	C_2	C_3	T.I.R.	TASA CONTRACTUAL
A-Prestación reembolsables en cuotas periódicas que incluyen "Intereses calculados sobre saldos de deuda".							
1) Iguales	48,33	1200,00	416,11	416,11	416,11	0,02	0,02
2) Variables r=8	48,63	1200,00	408,21	416,21	424,21	0,02	0,02
3) Variables r=(-2)	48,24	1200,00	418,08	416,08	414,08	0,02	0,02
4) Variables r= (-8)	48,00	1200,00	424,00	416,00	408,00	0,02	0,02
5) Variables q=0,02	48,64	1200,00	408,00	416,16	424,48	0,02	0,02
6) Variables q= (-0,02)0	47,99	1200,00	424,43	415,94	407,62	0,02	0,02
7)Variables q=0,05	49,12	1200,00	396,23	416,04	436,85	0,02	0,02
B-Prestación reembolsables en cuotas periódicas que incluyen "Intereses promediados constantes"							
8) Constantes	48,00	1200,00	416,00	416,00	416,00	0,01987	**0,02**
C-Prestación reembolsables en cuotas periódicas que incluyen "Intereses calculados sobre el principal"							
9) Constantes	72,00	1200,00	424,00	424,00	424,00	**0,02971**	**0,02**
D- Prestación con reembolso único de capital y Pago periódico de intereses							
D.1. Sin constitución de un fondo de amortización							
10)	72,00	1200,00	24,00	24,00	1224,00	0,02	0,02
D.2. Con constitución de un fondo de amortización							
11) $i_{a=}0,02$; $i_{p=}0,00$	72,00	1200,00	424,00	424,00	424,00	**0,02971**	**0,02**
12) $i_{a=}0,02$; $i_{p=}0,005$	66,03	1200,00	422,01	422,01	422,01	**0,02728**	**0,02**
13) $i_{a=}0,02$; $i_{p=}0,02$	48,33	1200,00	416,11	416,11	416,11	0,02	0,02
14) $i_{a=}0,02$; $i_{p=}0,025$	42,48	1200,00	414,16	414,16	414,16	**0,017598**	**0,02**
E- Prestación con reembolso único de capital e intereses							
Cuota única	73,45	1200,00	0	0	1273,45	0,02	0,02

Concluimos que en los sistemas de préstamos puros cuyas características son: cálculo de intereses sobre saldos de deuda, se utiliza el criterio exponencial como ley financiera de valuación: el coste financiero mensual es la tasa contractual convenida. (Ej. todos los casos desarrollados en A; D.1 y E-con reembolso único integro). Todos estos casos tratan sobre contraprestaciones constantes o variables, sean en progresión aritmética o geométrica en donde siempre hemos devengado intereses sobre saldos tal como consta en los cuadros de marcha de cada operación.

Aquellos sistemas de préstamos en donde el cálculo del interés contenido en cada cuota resulta ser:

- constante pues se calcula siempre sobre el principal o préstamo original. (Ej. C9). La cuota del sistema directo surge de la fórmula de interés simple —visto oportunamente—.

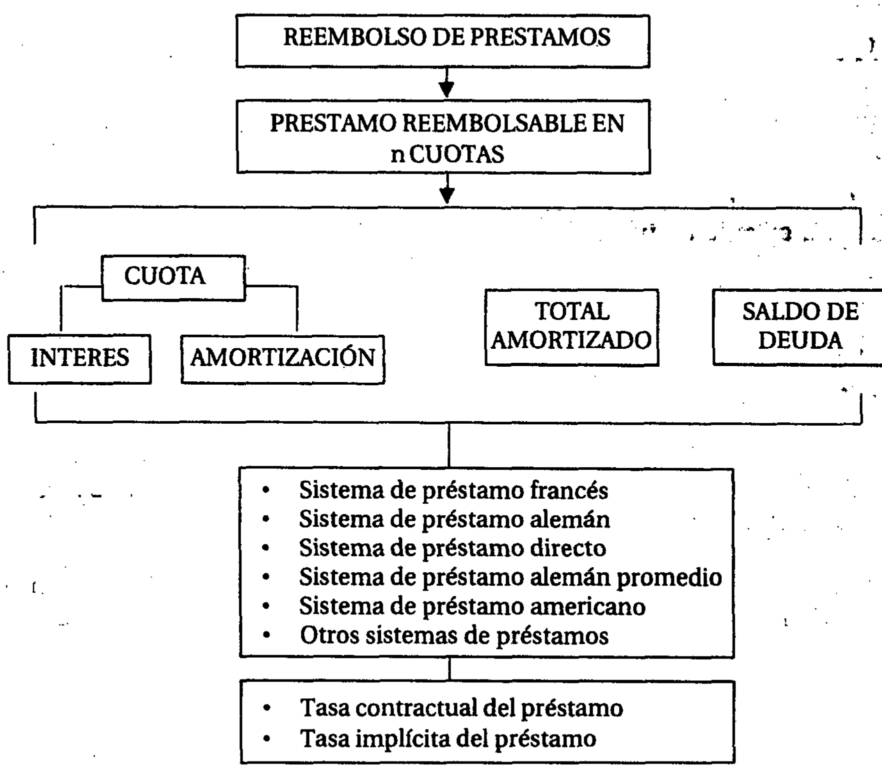
- un promedio aritmético de los intereses periódicos devengados sobre saldos. (Ej. B8).

> constante calculado sobre el principal, pero a su vez se producen pagos adicionales que no son aplicados como cancelación de deuda; tal es el caso del sistema americano, en donde la tasa aplicada para el cálculo de los intereses que devenga la deuda puede ser diferente a la tasa aplicada para la formación del capital.

En estos casos la tasa contractual difiere de la tasa implícita de la operación. Ello significa que me están cobrando una tasa diferente a la que consta en el contrato.

En definitiva, lo que interesa es conocer ese coste financiero resultante del cronograma de pagos que me propone el acreedor y comparar con el de otra alternativa de préstamo. Por ello, en muchos casos la tasa contractual es una tasa de trabajo como lo era la T.N.A. cuando vimos el capítulo de tasas. Esa tasa contractual sirve para armar el cuadro de marcha, las contraprestaciones. Para conocer el verdadero coste financiero o tasa de interés implícita debemos calcular esa T.E.A, T.E.M. o tasa equivalente para cualquier plazo que permite que se cumpla la equivalencia financiera entre la prestación y las contraprestaciones asociadas a la misma.

ESQUEMA DE CONCEPTOS DE LO VISTO



ESTUDIO DE CASO

Objetivo

Aplicación del tema "Reembolso de Préstamos" en un caso concreto, introduciendo las características propias de una financiación en el sistema financiero. Confrontar, validar los datos que se publiciten, poder armar un cuadro de marcha considerando todos los aspectos que en el inciden, además de la cuota pura y llegar a las conclusiones acerca del verdadero coste financiero en los dos sistemas de préstamos tradicionales utilizados en el mercado financiero institucionalizado.

Etapa de análisis

1) Lea bien las condiciones del préstamo que se adjuntan, en donde se exponen: características, tasas, requisitos...

2) Si Ud. está evaluando tomar un préstamo de la línea "Prendarios" a devolver en 12 mensualidades consecutivas con vencimiento al mes siguiente y la asistencia crediticia $ 10.000.

   2.1) La T.N.A. para el plazo de 30 días =______%

   2.1)Considerando cuotas iguales. El importe de la cuota es: $______.
   El total de intereses de la operación es $________.
   Realice el cuadro de marcha de la operación —con cuotas puras—.
   La T.I.R.E.M (coste financiero puro) es del _____%.

3) Incorpore a la estructura tradicional de cuotas pura los desembolsos adicionales que complementan el valor de la cuota y los desembolsos adicionales en el momento de otorgamiento del préstamo. Confeccione el flujo de fondos de la operación integrándolo en el cuadro de marcha de la operación anterior.
   Para ello, integre a continuación los factores que escenifican una situación real concreta.

	Importe	Fecha de imputación
Gastos de otorgamiento	______	__________
Débitos mensuales por:		
Gastos	______	__________
Impuestos	______	__________
Seguro de vida	______	__________

Tenga en cuenta si los débitos son fijos o variables y la forma de cálculo. En virtud de todos estos conceptos que se traducen en una menor asistencia crediticia y una mayor corriente de egresos de caja para el deudor, determinan en función a ese flujo de fondos resultantes asociados al flujo inicial un coste financiero mensual y anual del ____% respectivamente.

4) De acuerdo a la planilla informativa que se publicita en los medios, ¿encontró diferencias?

5) Si usted ahora evalúa obtener dicha asistencia crediticia reembolsándola con el sistema de préstamo alemán, ¿cómo se modifican los flujos de fondos?

6) ¿Altera el coste financiero puro y el coste financiero total resultante?

PRESTAMO PRENDARIO OTORGADO POR EL BANCO... EN EL PAIS	
CARACTERISTICAS	
Tipos de vehículos a financiar	Automotores hasta 1200 kg. De carga 0 k.m. y usados hasta 8 años de antigüedad
Moneda del préstamo	Pesos
Tipo de tasa:	fija
Sistema de amortización	Francés
Seguros	De Vida y del Automotor
Gastos	
Gastos de otorgamiento	2% más IVA (SOBRE CAPITAL ORIGINAL DEL PRESTAMO
Gastos mensuales	$ 6 por mes a debitar de la caja de ahorro(bonificada por los 3 meses)
Seguro de vida	Hasta 64 años: 0,32% mensual sobre saldos de deuda De 65 a 73 años: 0,58% mensual sobre saldos de deuda
Antigüedad laboral	Empleados en relación de dependencia: 1 año Independientes profesionales: 2 años Independientes no profesionales: 3 años
Seguro del automotor	Dependiendo de la zona
Documentación a presentar: si usted financia hasta el 60% de su nuevo auto solo debe presentar: - Certificación de identidad: copia de su DNI/LE/LC - Certificación de domicilio: copia de un servicio, impuesto o resumen de tarjeta de crédito, extracto de cuenta corriente a su nombre.	
Ventajas	
Plazos de hasta 24 meses	
Tasas de financiación muy convenientes	
Tasas fijas y variables Montos de hasta $ 10.000	
Requisitos	
Edad:	Hasta 70 años
Nacionalidad	Argentinos y Extranjeros nacionalizados o en trámite
Ingresos mínimos	$ 1500 netos mensuales (grupo familiar)

Plazo (meses)	T.N.A.	T.E.A.	Tasa Directa Mensual	Cuota c/$1000	Costo Financ.Total
Hasta 6	9%	9,38%	0,44%	$175,84	23,41%
7 a 12	11%	11,57%	0,50%	$93,51	21,91%
13 a 18	13%	13,80%	0,59%	$66,92	22,93%
19 a 24	14%	14,94%	0,63%	$53,66	23,40%
25 a 36	16%	17,23%	0,74%	$41,16	25,08%
37 a 48	17%	18,39%	0,80%	$ 35,03	25,92%
49 a 60	18%	19,56%	0,87%	$31,74	26,91%

PRÉSTAMO PRENDARIO A ANALIZAR

Valor del vehículo	$ 20.000
Capital a financiar	$10.000
Plazo (en meses)	12
Valor primera cuota	$ 935,07
Gastos de otorgamiento	$242
Tasa Nominal anual	11%
Tasa efectiva anual	11,57%
Costo financiero total	21,91%

Resolución: Se trabajó en una planilla de cálculo a los fines de armar dos cuadros de la operación considerando los dos sistemas de préstamos: francés y alemán. Se utilizaron los datos contenidas en la información periodística para ir armando los elementos del cuadro y fundamentalmente las contraprestaciones puras (reflejadas en la columna titulada "Cuota Pura" y las contraprestaciones totales (reflejadas en la columna titulada "Cuota total").

SISTEMA DE PRESTAMO FRANCES

Cuadro de marcha del préstamo $10000

T.E.M 0,0092 =(0,11/12)

plazo 12

									21% de [illegible]	0,32%Sdo		Flujos de Fondos	
Fecha	Mom	Saldo de deuda	Interés	Amortización	Cuota pura	Total amortizado	Saldo adeudado		IVA	Seg. Vida	Cuota total	con gastos	sin gastos
10-Ene	0	10.000,0	-	-		-	10.000,0	200,0	42,0		242,00	(9.758,0)	(10.000,0)
-Febr	1	10000,0	91,7	792,1	883,8	792,1	9207,9	0,0	19,3	32,0	935,1	935,1	883,8
-Marz	2	9207,9	84,4	799,4	883,8	1591,6	8408,4	0,0	17,7	29,5	931,0	931,0	883,8
-Abr	3	8408,4	77,1	806,7	883,8	2398,3	7601,7	0,0	16,2	26,9	926,9	926,9	883,8
-May	4	7601,7	69,7	814,1	883,8	3212,4	6787,6	6,0	14,6	24,3	928,8	928,8	883,8
-Jun	5	6787,6	62,2	821,6	883,8	4034,0	5966,0	6,0	13,1	21,7	924,6	924,6	883,8
-Jul	6	5966,0	54,7	829,1	883,8	4863,2	5136,8	6,0	11,5	19,1	920,4	920,4	883,8
-Agost	7	5136,8	47,1	836,7	883,8	5699,9	4300,1	6,0	9,9	16,4	916,1	916,1	883,8
-Sept	8	4300,1	39,4	844,4	883,8	6544,3	3455,7	6,0	8,3	13,8	911,9	911,9	883,8
-Oct	9	3455,7	31,7	852,1	883,8	7396,4	2603,6	6,0	6,7	11,1	907,5	907,5	883,8
-Nov	10	2603,6	23,9	860,0	883,8	8256,4	1743,6	6,0	5,0	8,3	903,2	903,2	883,8
-Dic	11	1743,6	16,0	867,8	883,8	9124,2	875,8	6,0	3,4	5,6	898,8	898,8	883,8
-Ener	12	875,8	8,0	875,8	883,8	10000,0	0,0	6,0	1,7	2,8	894,3	894,3	883,8
		TOTALES	805,8	10.000,0	10.805,8			254,0	189,2	211,5	11.240,5	1,9055%	0,9167%

AÑO DE 360 SI TIREM= 0,0190551 TIREA =+(1+D23)^(360/30)-1TIREA= 25,4215%

AÑO DE 365 SI TIREM= 0,0190551 TIREA =+(1+D23)^(365/30)-1TIREA= 25,8167%

<u>Cálculo de tasas</u>

AÑO 360 TNA= 0,11 i_{30}==> 0,11/12 = 0,009167

AÑO 365 TNA= 0,11 i_{30}==> 0,11/(365/30) = 0,0090411

TEA(año360)= $(1+0,009167)^{12}-1$ TEA(año365)= $(1+0,009167)^{365/30}-1$

TEA(año360 0,1157 TEA(año365)= (1+0,00[illegible])(365/30)-1

	i	VAN (i)
VAN 0%	0,0000000	-1.240,50
VAN1%	0,0091670	- 611,17
VAN1,827%	0,0100000	- 557,08
VAN 2%	0,0190550	0
VAN100%	infinito	9.758

<u>Tasa directa</u>

10000 (1/12+r) = 883,82

r = 0,005

SISTEMA DE PRESTAMO ALEMAN

PRÉSTAMO 10000
T.E.M 0,0092 =(0,11/12)
PLAZO 12

									21% de Int.	0,32%Sdo		Flujos de Fondos	
Fecha	Mom	Saldo de deuda	Interés	Amortización	Cuota pura	Total amortizado	Saldo adeudado	Gs.	IVA	Seg. Vida	Cuota total	con gastos	sin gastos
10-Ene	0	10.000,0	-	-		-	10.000,0	200,0	42,0		242,00	(9.758,0)	(10.000,0)
- Febr	1	10000,0	91,7	833,3	925,0	833,3	9166,7	0,0	19,3	32,0	976,3	976,3	925,0
-Marz	2	9166,7	84,0	833,3	917,4	1666,7	8333,3	0,0	17,6	29,3	964,3	964,3	917,4
-Abr	3	8333,3	76,4	833,3	909,7	2500,0	7500,0	0,0	16,0	26,7	952,4	952,4	909,7
-May	4	7500,0	68,8	833,3	902,1	3333,3	6666,7	6,0	14,4	24,0	946,5	946,5	902,1
-Jun	5	6666,7	61,1	833,3	894,4	4166,7	5833,3	6,0	12,8	21,3	934,6	934,6	894,4
-Jul	6	5833,3	53,5	833,3	886,8	5000,0	5000,0	6,0	11,2	18,7	922,7	922,7	886,8
-Agost	7	5000,0	45,8	833,3	879,2	5833,3	4166,7	6,0	9,6	16,0	910,8	910,8	879,2
-Sept	8	4166,7	38,2	833,3	871,5	6666,7	3333,3	6,0	8,0	13,3	898,9	898,9	871,5
-Oct	9	3333,3	30,6	833,3	863,9	7500,0	2500,0	6,0	6,4	10,7	887,0	887,0	863,9
-Nov	10	2500,0	22,9	833,3	856,3	8333,3	1666,7	6,0	4,8	8,0	875,1	875,1	856,3
-Dic	11	1666,7	15,3	833,3	848,6	9166,7	833,3	6,0	3,2	5,3	863,2	863,2	848,6
-Ener	12	833,3	7,6	833,3	841,0	10000,0	0,0	6,0	1,6	2,7	851,2	851,2	841,0
		TOTALES	595,8	10.000,0	10.595,8			254,0	167,1	208,0	11.225,0	1,9132%	0,9167%

AÑO DE 360 SI TIREM= 0,019132 TIREA =+(1+D23)^(360/30)-1 TIREA= 25,5359%
AÑO DE 365 SI TIREM= 0,019132 TIREA =+(1+D23)^(365/30)-1 TIREA= 25,9330%

Cálculo de tasas

AÑO 360 TNA= 0,11 i_{30} ⟹ 0,11/12 = 0,009167
AÑO 365 TNA= 0,11 i_{30} ⟹ 0,11/(365/30) = 0,0090411
TEA(año360)= $(1+0,009167)^{12}-1$ TEA(año365)= $(1+0,009167)^{(365/30)}-1$
TEA(año360 0.1157 TEA(año365)= (1+0,009167)^(365/30)-1

i	VAN (i)
0,0000000	-1.224,96
0,0091670	- 605,99
0,0100000	- 552,77
0,0191320	0
infinito	9.758

Conclusiones:

Atento a que la información periodística trabaja sobre el sistema de préstamo francés, sacaremos algunas conclusiones:

- La cuota informada periodísticamente de $ 935,05 es efectivamente la cuota total que al mes siguiente de recibido el préstamo deberá pagar el deudor, tal como consta en nuestro cuadro de marcha en el renglón correspondiente a "febrero" y en la columna "Cuota total".

- Los gastos de otorgamiento de $ 242 informado periodísticamente surge de las condiciones también informadas correspondientes al 2% del Préstamo incrementado en el 21% del IVA (242=10.000 . 0,02 . 0,21) y se consideró como menor prestación recibida para la determinación del Coste financiero total.

- La tasa activa nominal anual del 11% para esta línea de préstamos y este plazo fue convertida mensualmente pues las cuotas son mensuales considerando un año de 12 meses y no de 365 días —año civil—. Pues i_{30}= 0,11/12 =0,009167 por aproximación i_{30}= 0,0092. De esta forma llegamos al valor de la cuota informada.
  Al respecto B.C.R.A. establecía como divisor fijo=365 días, pero por comunicaciones posteriores, tal como la com. "A" 3052 del 23/12/99 estableció un divisor fijo de 360 días para determinados préstamos tales como los hipotecarios sobre vivienda y prendarios sobre automotores.

- Por ende, la T.E.A. informada periodísticamente del 11,57% es la que surge de la TNA del 11% capitalizable mensualmente considerando una frecuencia de capitalización =12

- Ambas tasas informadas (La T.N.A. del 11% y la T.E.A. del 11,57%) son las que denominamos tasas contractuales pues sirven para armar las contraprestaciones puras y totales como así también los demás elementos: saldo de Deuda, amortizaciones parciales y totales.

- Dichas tasas la TEA y la TNA que es denominada por Banco Central como la tasa de interés contractualmente aplicada son las que deben expresarse en cualquier publicidad, conjuntamente con el CFT tal como lo establece la comunicación ya referida (Capítulo VII).

- Al tratarse del sistema francés, también ocurre con el sistema alemán, la tasa contractual es la tasa de interés implícita de la operación o coste financiero para cuotas puras. Verificamos que el cálculo de la TIR arroja un valor del 0,9167% en la última columna de los cuadros de marcha del sistema francés o del sistema alemán.

- Si bien, en estos sistemas de préstamos puros me cobran lo que me dicen que me van a cobrar, si introducimos otros elementos que modifican la prestación y sus contraprestaciones asociadas, entonces ese coste financiero será otro.

- Recordemos que el valor informado periodísticamente corresponde al de la primera cuota, luego esta decrece en ambos sistemas de préstamos, incluido el francés que tiene cuota constante, pero es constante considerando solamente los elementos puros (amortización más interés) pero al agregar elementos que tienen base de cálculo diferente y algunos de ellos en general surgen de cálculos realizados sobre saldos de deuda o intereses que son decrecientes, entonces provoca que la sucesión de cuotas totales tengan un comportamiento decreciente.

- El Coste financiero mensual que surge del cuadro de marcha prácticamente para líneas de préstamos ofrecidas en ese plazo duplica la tasa contractual. Observemos que arroja un coste financiero mensual del 1,9055% lo que genera un Coste Financiero total del 25,4215% ó 25,8167% según consideremos el año de 360 días o 365 días, respectivamente.

- El Coste Financiero Total informado periodísticamente es mucho menor pues arroja un valor 21,91% erróneamente. Si excluimos del cálculo los gastos mensuales a debitar de $6 a partir del 4° mes, de la ecuación para la determinación de la TIR el valor hallado es 1,826%. Este C.F.M. si es considerado proporcional a una T.NA. nos queda que la T.N.A. será 0,0186*12= 0,2191. El C.F.T informado periodísticamente del 21,91% es erróneo; entonces, es en términos nominales y no efectivo anual, además de excluirse los gastos.

- Al respecto, en la Comunicación "A" 3052 en la Sección 3 "Expresión de las tasas" informa que para determinar el C.F.T. se computarán como conceptos tales como... gastos de mantenimiento y apertura de cuentas de depósitos, por lo tanto ese concepto no debió haberse omitido en la información publicitaria.

- Otro elemento importantísimo es la forma de cálculo del C.F.M. Tal como lo dispone la Comunicación "A" 3052 del Banco Central en su punto 3.4 el Costo financiero total se expresará en forma de tasa efectiva anual. Así que no hay duda normativa.

- En el sistema alemán según vemos en nuestro cuadro de marcha el Coste Financiero Mensual es del 1,9132% y el Coste Financiero Total es del 25,5359% o 25,933% según tomemos el año de 360 días o 365 días, respectivamente. Es decir que difiere del coste del sistema francés. La diferencia obedece justamente a que la forma de cálculo de los componentes adicionales cuya base son los saldos y los intereses periódicos que son distintos en ambos sistemas genera entonces, gastos distintos y por ende con cuotas no puras sino totales no coinciden esas tasas de interés implícitas en ambos sistemas, resultando más oneroso el sistema alemán.

- El gráfico que se realizó acompañando cada cuadro de marcha es el "Grafo del V.A.N" que permite visualizar la TIR (que denominamos también coste financiero o tasa de interés implícita) en el caso de cuotas puras.

- La información periodística en uno de sus cuadros menciona "Tasa directa Mensual" del 0,50%. Hemos reconstruido el valor que consta como último cálculo en el cuadro de marcha del sistema francés que hicimos y vemos que la tasa directa corresponde a un préstamo de $10.000 a devolver en 12 cuotas de $ 883,82. O sea que la tasa directa informada publicitariamente corresponde al préstamo puro. De lo expuesto, cabría preguntarse si hay otra opción de financiación fuera del mercado financiero institucionalizado cuales son los gastos adicionales para poder determinar el Coste Financiero de la operación como lo estamos realizando aquí.

Es decir, si en el mercado financiero a una tasa contractual del 11% nominal anual genera un coste financiero total de casi el 26%. En la agencia de autos si me financian la operación fuera del circuito financiero, la tasa directa del 0,5% genera igual cuota y sería indiferente que la cuota del francés o del alemán con la tasa del 0,92%, pero aquí empieza el análisis: entonces con gastos como ocurre debemos considerar los gastos que cobraría la agencia y calcular la propia TIR.

MORATORIAS FISCALES

➢ De acuerdo a una verificación de la AFIP sobre determinados impuestos sujetos a fiscalización resultaron las siguientes observaciones que dieron lugar a la determinación de oficio que Ud.: 1) deberá confeccionar:

Observaciones:

- Período de fiscalización: 2005
- Fecha de vencimiento del impuesto: 9/05/2005
- Importe del impuesto impago: $1.487
- Fecha de determinación de oficio: 30/04/2006
- Intereses resarcitorios: 3% mensual

2) Ante la falta de pago por parte del contribuyente posteriormente se le calculó una multa que según la Ley N° 11.683 —art. 45 y 46 de procedimientos administrativos— representa el 80% del impuesto sujeto a cálculo.

3) Por lo tanto, deberá integrar otro cuadro de determinación a la misma fecha 30/04/2006 por ser la fecha de la resolución en que se determinó de oficio el impuesto.

4) Suponiendo que el contribuyente tiene la alternativa de solicitar un plan de pagos para cumplir con su obligación fiscal, con la condición de ingresar un pago a cuenta del 5% de la deuda, no pudiendo ser menor a $100. Determine el importe de cada mensualidad, igual y consecutiva sabiendo que de acuerdo al tipo de plan en que decida acogerse en el financiamiento la tasa será diferente y fluctúa entre el 6% y el 12% según las escalas que a continuación se expone. Luego calcule el C.F.M. resultante de la financiación.

Tipo de Plan	Número máximo de cuotas	Tasa de interés sobre saldos anual	Tasa de interés sobre saldos mensual	Un pago adicional
1	12	6%	0,5%	5% de la deuda o $ 100, el mayor
2	24	8%	0,666%	
3	36	10%	0,833%	
4	48	11%	0,916%	
5	60	12%	1%	

1) *Cálculo de los Intereses Resarcitorios*

Plazo en mora: 356 días —contados desde el vencimiento hasta la fecha de valuación: 30/04/2006—.

Para el cálculo de los intereses resarcitorios, se aplica el interés simple:

$$I(0;356) = 1487\frac{0,03}{30}.356 = 529,37$$

Integración de un cuadro con todos los datos para anexar a la nota de envío al contribuyente con el reclamo pertinente.

Fecha de determinación de oficio: 30/04/06 – Cálculo del impuesto a pagar con sus intereses						
Período fiscal	Fecha de vencim.	Impuesto	Tasa de int. mensual Resarcitorio i_{30}=3%	Mora —días—	Intereses Resarcitorios	Monto a pagar
2005	9/05/2005	$ 1.487	0,03/30	356	529,37	2.016,37
Totales		**$1.487**			**529,37**	**2.016,37**

2) *Cálculo de la Multa*

Multa = 1487 . 0,8 = 1189,60

3) *Nuevo Anexo a enviar al contribuyente*

Fecha de determinación de oficio: 30/04/06 – Cálculo del impuesto a pagar con sus intereses y multas						
Período fiscal	Fecha vencim.	Impuesto (1)	Tasa de int. mens. Resarcitorio i_{30}=3%/ mora	Intereses Resarcitorios (2)	Multa (3)	Monto a pagar (4)=(1+2+3)
2005	9/05/05	$ 1.487	0,03/30 356	529,37	1189,60	3.205,97
Totales		**$1.487**		**529,37**	**1189,60**	**3.205,97**

4) *Cálculo de los compromisos fiscales según el tipo de plan*

Plan	Deuda V_0	**Pago a Cuenta**	Importe a financiar	**Importe de cada Mensualidad**	**Cantid.de mensualid**	Tasa Contract. — i_{30} —	C.F.M
1	3205,97	**160,30**	3045,67	**262,13**	**12**	***0,5%***	***0,5%***
2	3205,97	**160,30**	3045,67	**137,74**	**24**	***0,666%***	***0,666%***
3	3205,97	**160,30**	3045,67	**98,27**	**36**	***0,833%***	***0,833%***
4	3205,97	**160,30**	3045,67	**78,71**	**48**	***0,916%***	***0,916%***
5	3205,97	**160,30**	3045,67	**67,75**	**60**	***1%***	***1%***

Para hallar el importe de cada cuota que cancela la deuda fiscal de $ 3045,67 debemos considerar el plazo de cada plan y la tasa sobre saldos informada, por lo cual el sistema de préstamo utilizado es el sistema francés.

Fórmula de aplicación: $c = V_0 \cdot a^{-1}(1;n;i)$

Cálculo de las compromisos mensuales fiscales

Plan 1
$c = 3.045,67 \cdot a^{-1}(1;12;0,005)$
$c = 262,13$

Plan 2
$c = 3.045,67 \cdot a^{-1}(1;24;0,00666)$
$c = 137,74$

Plan 3
$c = 3.045,67 \cdot a^{-1}(1;36;0,00833)$
$c = 98,27$

Plan 4
$c = 3.045,67 \cdot a^{-1}(1;48;0,00916)$
$c = 78,71$

Plan 5
$c = 3.045,67 \cdot a^{-1}(1;60;0,01)$
$c = 67,75$

La determinación del C.F.M. que resulta de buscar que tasa de interés iguala el valor del préstamo con la suma de los valores actuales de las mensualidades que lo cancelan nos arroja un tanto coincidente con el contractual que ya estaba explícitamente definido como "interés sobre saldos".

Un contribuyente de Monotributo incumplió los siguientes compromisos fiscales para los períodos que se informan a continuación.

Fecha de vencimiento	Impuesto adeudado
20/09/x	$ 121
20/11/x	$ 121
20/12/x	$121
20/01/(x+1)	$121
20/02/(x+1)	$121
20/03/(x+1)	$121
20/04/(x+1)	$121
20/05/(x+1)	$121
20/06/(x+1)	$121
Total adeudado	**$ 1.089**

Calcule: a) El importe adeudado a la fecha de acogimiento —30/06 del año (x+1)— si los intereses resarcitorios a aplicar dispuesto es del 1% mensual para obligaciones impagas hasta el 31/10 del año x y para las obligaciones impagas desde el 1/11 del año x en adelante es del 3% mensual.

b) Atento a que el contribuyente solicita ante la AFIP facilidades de pago, el organismo respectivo, le ofrece el siguiente plan:

- *Para obligaciones adeudadas hasta el 31 de octubre del año x podrá:*

Entrar en el plan de facilidades siguiente:

<table>
<tr><th>Tipo de Plan</th><th>Número máximo de cuotas</th><th>Tasa de interés sobre saldos anual</th><th>Tasa de interés sobre saldos mensual</th><th>Un pago adicional</th></tr>
<tr><td>1</td><td>12</td><td>6%</td><td>0,5%</td><td rowspan="7">5% de la deuda o $100, el mayor</td></tr>
<tr><td>2</td><td>24</td><td>8%</td><td>0,666%</td></tr>
<tr><td>3</td><td>36</td><td>10%</td><td>0,833%</td></tr>
<tr><td>4</td><td>48</td><td>11%</td><td>0,916%</td></tr>
<tr><td>5</td><td>60</td><td>12%</td><td>1%</td></tr>
<tr><td>6</td><td>84</td><td>6%</td><td>0,5%</td></tr>
<tr><td colspan="3">El importe que resulte de cada cuota no puede ser inferior a $ 100</td><td></td></tr>
</table>

Determine las distintas alternativas del Plan de Facilidades de Pago.

- *Para obligaciones adeudadas desde el 1 de noviembre del año x en donde podrá:*

- Un pago a cuenta obligatorio que represente el 5% de la deuda, el que no podrá ser menor a $100.
- Cuotas mensuales, iguales y consecutivas de una cuantía no menor a $ 100 cada una.
- La tasa de interés mensual sobre saldos es del 1,12%.
- El plazo de financiación máximo es de 9 mensualidades, y depende de la antigüedad de la deuda. Si la deuda registra hasta 1 mes de antigüedad: la cantidad máxima de cuotas son 3.
- Si la deuda registra 1 a 2 meses de antigüedad: la cantidad máxima de cuotas son 6.
- Si la deuda registra 2 a 3 meses de antigüedad: la cantidad máxima de cuotas son 9.

Supongamos, que por resolución posterior se determinó que si la deuda registra antigüedad mayor y no supera los 24 meses: la cantidad máxima de cuotas es 12.

Entonces, si el contribuyente se encuentra encuadrado en distintos tramos de escala en la antigüedad de sus obligaciones, la deuda total será cancelada en un número de cuotas máximo que resulte del promedio ponderado del número máximo de cuotas de cada tramo en que se encuadre por los montos de deudas existentes en cada tramo.

Se aclara que el planteo no es un "estudio de caso" pues se adicionaron datos no reales. Pero, la metodología de las modalidades de moratoria revisten cierto parentesco con las reales y ayuda a comprender la mecánica de cálculo.

Solución:

a) Para el cálculo del monto a pagar por cada impuesto impago aplicamos el interés simple por el tiempo transcurrido desde el vencimiento de la obligación a la fecha de acogimiento —30/06 del año subsiguiente—.

Fecha de Valuación: 30/06/(x+1)						
		Mora al	i_{30}	Forma de Cálculo de		
Vto	Impuesto adeudado	30-Jun		Interes Resarcitorios	Intereses Resarcitorios	Total Adeudado
20-Sep-x	121	283	0,01	121*0,01/30*283=	11,41	132,41
20-Nov-x	121	222	0,03	121*0,03/30*222=	26,86	147,86
20-Dic-x	121	192	0,03	121*0,03/30*192=	23,23	144,23
20-Ene-x+1	121	161	0,03	121*0,03/30*161=	19,48	140,48
20-Feb-x+1	121	130	0,03	121*0,03/30*130=	15,73	136,73
20-Mar-x+1	121	102	0,03	121*0,03/30*102=	12,34	133,34
20-Abr-x+1	121	71	0,03	121*0,03/30* 71=	8,59	129,59
20-May-x+1	121	41	0,03	121*0,03/30* 41=	4,96	125,96
20-Jun-x+1	121	10	0,03	121*0,03/30* 10=	1,21	122,21
Totales	1089				123,82	1212,82

b) Cálculo de la cuota sabiendo que la deuda impaga a considerar en este plan son correspondientes a obligaciones vencidas al 31/10 del año x y por lo tanto solamente es $132,41.
Atento a que la cuota mínima debe ser de $ 100 además de otro anticipo de igual importe, deberá ingresar dicha deuda como Pago al contado.

c) Cálculo de la cuota en el Plan de facilidades que resulte de acuerdo a mi cronograma de vencimientos correspondientes a obligaciones vencidas a partir del 1/11 del año x y hasta el 30/06/(x+1).

Como podemos observar la antigüedad promedio surge de considerar:
- Deuda tramo 1 a la que denominamos D(1) asociada a un plan de pagos máximo de n(1).
- Deuda tramo 2 a la que denominamos D(2) asociada a un plan de pagos máximo de n(2).
- Deuda tramo 3 a la que denominamos D(3) asociada a un plan de pagos máximo de n(3).

- Deuda tramo 4 a la que denominamos D(4) asociada a un plan de pagos máximo de n(4).

Para hallar el número máximo de cuotas haremos el promedio aritmético ponderado.

$$n = \frac{D_1.n_1 + D_2.n_2 + D_3.n_3 + D_4.n_4}{D_1 + D_2 + D_3 + D_4} = \frac{\sum_{j=1}^{t} D_j.n_j}{\sum_{j=1}^{t} D_j}$$

siendo t= la cantidad de tramos existentes.

A continuación preparamos en un cuadro de marcha los datos para determinar el plazo máximo de financiación que no puede superar las 9 cuotas.

Fecha de Valuación: 30/06/(x+1)						
	Impuesto	**Intereses**	**Deuda total**	**Antigüed.**	**Plazo máx**	
Vto.	**Adeudado**	**Resarcitorios**	**D(j)**	**de deuda**	**n(j)**	**D(j) . n(j)**
			(a)		**(b)**	
20-Nov	121	26,86	**147,86**	222	**12**	**1774,34**
20-Dic	121	23,23	**144,23**	192	**12**	**1730,78**
20-Ene	121	19,48	**140,48**	161	**12**	**1685,77**
20-Feb	121	15,73	**136,73**	130	**12**	**1640,76**
20-Mar	121	12,34	**133,34**	102	**12**	**1600,10**
20-Abr	121	8,59	**129,59**	71	**9**	**1166,32**
20-May	121	4,96	**125,96**	41	**6**	**755,77**
20-Jun	121	1,21	**122,21**	10	**3**	**366,63**
Totales	968,00	112,41	**1080,41**		**TOTAL**	**10720,48**

$$n = \frac{10720,48}{1080,41} = 9,92$$

Es decir el plazo máximo será de 9 cuotas para el plan de facilidades.

La determinación de la cuota será de la aplicación de la fórmula de cuota del sistema francés, pues nos informa la tasa sobre saldos a aplicar del 1,12% mensual.

Recordemos que estamos obligados a realizar un Pago a cuenta del 5% calculado sobre la deuda de \$1080,41 (1080,41 * 0,05 = \$ 54) o \$ 100 el mayor. En consecuencia:

Pago a cuenta adelantado = \$100 —es decir el 30/06/(x+1)—

9 Cuotas mensuales, la primera de ellas pagaderas un mes después del pago a cuenta que permitirán cancelar la deuda restante \$ 980,41.

$c = V_0 \,.\, a^{-1}\,(1;n;i)$

$c = 980{,}41 \,.\, a^{-1}(1;9;0{,}0112) = 980{,}41 \,.\, 0{,}117425719 = 115{,}12$

Queda expresado en el siguiente eje de tiempo y compromisos fiscales:

	30/6/x+1	30/7/x+1 ...					30/3/x+2
	0	1	2	3	....	8	9
Plan Contado	1.080,41						
Plan Facilidades							
	100	115,12	115,12	115,12	...	115,12	115,12

Capítulo X
Empréstitos

Objetivo

- ➢ Valuar cualquier ***préstamo diviso***
- ➢ Manejar los conceptos utilizables en el mercado
- ➢ Interpretar la información que se publica sobre cualquier bono para toma de decisiones.

Definición

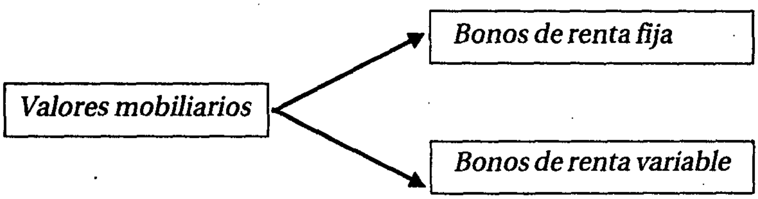
Los bonos son instrumentos financieros de deuda. Se diferencian de los préstamos vistos en el capítulo correspondiente por ser aquellos "préstamos indivisos", y esta forma de financiación utilizada tanto por los gobiernos como por empresas privadas constituyen "préstamos divisos" pues se caracterizan por ser:

- masivos
- divisibles

Estos títulos de deuda pueden ser emitidos por;

- ➢ gobiernos (nacionales, provinciales, municipales)→ **T.P.**: Títulos Públicos, Provinciales o Municipales.
- ➢ empresas privadas (Sociedades anónimas, Sociedades en Comandita por acciones, Cooperativas, asociaciones civiles y Entidades financieras autorizadas Ley 21.526 → **O.N.**: Obligaciones Negociables.

Forman parte de los denominados Valores Mobiliarios y se suelen llamar "Bonos de renta fija", no porque el rendimiento que cobra el inversor sea constante sino porque está estipulado en el contrato el tipo de renta que paga. También se especifica en el contrato la forma el cálculo cuya tasa podrá ser variable en cada período de cálculo. Por lo dicho, tenemos:



BONOS DE RENTA FIJA	BONOS DE RENTA VARIABLE
• Los bonos de renta fija tienen un vencimiento definido. • Los rendimientos no dependen de los resultados sino de las condiciones de su emisión. • Cuando un agente demanda una importante de suma de dinero puede buscar financiación mediante los "Empréstitos" que no son otra cosa que una operación financiera de préstamo diviso: con la particularidad que no existe un solo acreedor sino muchísimos. Cada uno de ellos hace su aporte parcial en el globo del empréstito mediante la compra de partes alícuotas del mismo denominadas títulos. • Los "Títulos" pueden especificar su especie: bonos, debentures, obligaciones,..	• Los bonos de renta variable son las denominadas "acciones" que tienen un vencimiento indefinido. • La renta es en forma de dividendos. Se calculan en función de los resultados de la empresa. • Se caracterizan por no tener último pago y tampoco servicios financieros. • Algunas además de propiedad, dan el control, teniendo voto.

Marco Legal de los bonos de renta fija:

➢ Ley de Administración Financiera, inc. a del art. 57 prevé el endeudamiento originado por la emisión y colocación de títulos, bonos u obligaciones de largo y mediano plazo, constitutivos del empréstito.

➢ La emisión de deuda privada está regida por la ley 23.576 denominada Ley de Obligaciones Negociables (ON).

➢ La emisión del título se autoriza por medio de Leyes y Decretos que fijan las condiciones y las obligaciones para el emisor y en consecuencia los derechos para el tenedor. Es el documento que detalla todas las condiciones de la deuda. Tiempo atrás, los títulos eran cartulares, es decir que en oportunidad de realizar un arqueo físico la lámina formaba físicamente parte del inventario. Dicha lámina se dividía en dos partes, la de la izquierda contenía el cuerpo con las condiciones de emisión y la otra parte se encontraba troquelada formando cupones en una cantidad igual a las cuotas que lo cancelan indicando en cada cupón si se trataba de amortización y renta o simplemente renta.

Clasificación de los Bonos

❑ ***en función de los sistemas de reembolso***

- *amortizing*: pagan periódicamente servicios de renta y de capital Los más usuales. Se reembolsan mediante el sistema de préstamo alemán para su reembolso con algunas particularidades.

- *bullet* (bala): pagan periódicamente servicios de renta, y amortización única al vencimiento del bono.

- *bonos de cupón cero*: pagan al vencimiento renta y capital (en general se trata de títulos de descuento). Ejemplo bonos del tesoro de EE.UU. que son el referente o *benchmark*, por ser considerados inversión sin riesgo para evaluar distintas calidades crediticias que ofrecen los emisores en los mercados.

❒ ***en función de la forma en que se acredita su tenencia***

- *Títulos escriturales*: títulos cuyas planchas físicamente no existen. La titularidad de los bonos se acreditan mediante certificados de depósitos emitidos por "Caja de Valores".

- *Títulos carturales*: títulos cuyas planchas se imprimen. Y lleva adherida los cupones para que periódicamente se corten y se presenten físicamente al cobro. Actualmente dejaron de utilizarse.

Personas que intervienen en la negociación de los bonos:

Prestatario	Prestamistas o Inversores	Intermediario financiero
Es el tomador de fondos o emisor del bono que solicita se lo financie emitiendo estas obligaciones que colocará en el mercado financiero.	Representado por todo el abanico de colocadores de fondos, sean personas físicas o jurídicas que por ser unidades superavitarias le prestan el dinero al emisor.	Entidad que une a ambos agentes de fondos: colocadores y tomadores. Brindan asesoramiento. Las transacciones con bonos se realizan a través de cualquier agente autorizado nucleados dentro de dos entes: Mercado Abierto Electrónico y las Sociedades de Bolsa. Puede cumplir el rol de "Underwriter" como agente pagador de los cupones de amortización y renta: además de la función de planificar la emisión y la colocación del bono. Para el inversor le resulta útil pues puede administrarle su cartera relacionado a custodia y cobro de los cupones, o posterior negociación.

Elementos de un Bono y Conceptos en la valoración de bonos de renta fija

Forman parte de las Condiciones de Emisión:

- *Fecha de emisión*: Es en ese momento en que tiene vigencia el instrumento de la deuda
- *Plazo*: se cuenta a partir de la fecha de emisión hasta la total extinción de los compromisos de pago asumidos por el emisor. En función al plazo se pueden clasificar en bonos a CP; MP y LP.
- *Moneda de emisión*: pudiendo ser moneda local o moneda extranjera.
- *Valor nominal*: (valor facial) Es el valor por el cual fueron emitidos los títulos. Se trata de importes múltiplos. Ej. VN=100; 500, 1000, 5000, 10.000...
- *Valor residual*: porción de capital no amortizado.
- *Monto autorizado a emitir*: Es el VN total (suma de todos los VN de los títulos) máximo en que el emisor podrá endeudarse.
- *Monto colocado*: aquel en que el emisor se endeudó, no pudiendo superar al autorizado a emitir.Es la diferencia entre:
    - el monto emitido originalmente en valores nominales;
    - la suma en valores nominales del monto no colocado , de las amortizaciones ya producidas, de los rescates anticipados si los hubo, de las tenencias del sector público y de las ampliaciones realizadas.
- *Período de gracia:* usualmente queda definido para el período en que el título no amortiza y sólo paga servicios financieros. Tal como vimos en Rentas y Préstamos: rentas diferidas con pago periódico de interés por el período de diferimiento.
- *Cupones de renta: o servicios financieros —COUPON YIELD—*: surge del cronograma de vencimientos, la especificación de la tasa de interés aplicable que se calcula sobre saldos de deuda consignando si es fija o variable.
- *Cupones de amortización* (o servicios de capital): estableciendo la forma de cálculo, aunque generalmente se fijan las alícuotas periódicas en forma de porcentual si se trata de varios vencimientos . Resultan de un cronograma de vencimientos
- *Flujo de pagos:* son los compromisos periódicos asumidos por el tenedor del título que permiten su cancelación y están constituidos por los cupones de renta y los cupones de amortización pudiendo ser conjuntamente de igual periodicidad. Caso contrario, siempre existe cupón financiero pudiendo excluirse el de amortización.
- *Rescate anticipado*: sirve para cuando está previsto el retiro de circulación de un título antes de su fecha de vencimiento. Es el V.T. (Valor Técnico) o V.R. (Valor de Rescate) denominado en el mercado Valor Actualizado.
- *Garantía:* común, flotante, aval...

Conceptos en la valoración de un bono

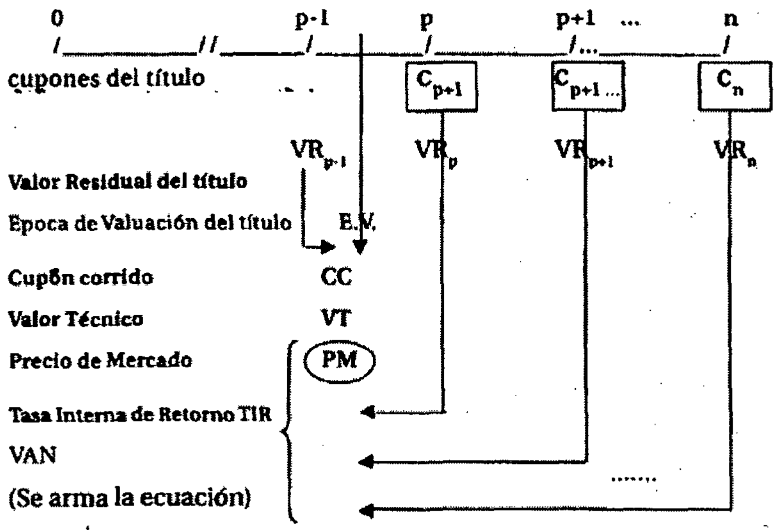
• <u>Precio de emisión</u>	• Es el precio que se fija a la colocación del título que determina el monto a desembolsar por el acreedor por cada 100 de valor nominal del título emitido. El mismo puede ser bajo la par, sobre la par o a la par (100%).
• <u>Precio de mercado:</u> (P.M)	• **Es el precio que surge del libre juego de la oferta y la demanda establecida en la cotización del Mercado Abierto Electrónico, la bolsa u otros mercados. Ya emitido y colocado el título en el mercado primario, se cotiza en forma permanente en los mercados secundarios previstos en su emisión. Por tal razón gozan de liquidez.** **Queda también definido como el <u>valor técnico</u> que se corrige por los siguientes factores:** • **el tanto de interés mínimo esperado en estos títulos en función de las condiciones financieras de ese momento.** • **el riesgo definido como la apreciación subjetiva que en función de la información disponible el mercado se tiene sobre la capacidad de pago en tiempo y forma.** **Los bonos por tal razón son calificados por empresas especializadas, pasando de la calificación más alta o triple A "Investments grade" hasta la más baja "Speculative grade" o "Junk bonds" como inversiones especulativas o bonos basura.** ***En la columna del cuadro "Títulos Públicos" se exponen los precios de cotización en el Mercado de Valores —Bolsa— o en el Mercado Abierto. La diferencia está en que el precio en el Mercado Abierto está dado por cada $100 de V.N. del título. Por ejemplo si el título x cotiza en Mercado Abierto a $ 25,050 éste es el precio de una lámina de VN $100 y que tiene un valor residual del 25%. Mientras que el valor informado en Mercado de Valores será por ej. de $ 99,08 correspondiente al 100% de Valor Residual.*** ***Si Ud. tiene un título de VN 100 de estas características recuerde que si toma el precio según M. Valores deberá calcularlo para un VR del 25%; es decir multiplicar Precio y Valor Residual.***
• <u>Valor Técnico:</u> (V.T.)	• **valor residual del bono - saldo de deuda luego de abonado el último cupón (calculado como: principal o V.N. menos amortizaciones acumuladas pagadas)** • **más:** • **cupón corrido.** ***En la columna del cuadro "Títulos Públicos" se expone con el título "Valor Actualizado".*** También denominado Valor de Rescate y en información periodística "Valor Actualizado".
• <u>Cupón corrido</u> <u>(C.C.)</u>	• **Intereses devengados durante el período que está en curso. Comprende desde el inicio del nuevo período de renta y hasta el momento de la valoración, sobre la base de la tasa de interés que se utilizará para el pago del próximo servicio financiero. El día en que inicia cada período de renta el CC=0.** Un indicador de rentabilidad muy conocido por ser de cálculo rápido es el: • CURRENT YIELD: relaciona el cupón de servicio financiero del período que se evalúa con el Precio de Mercado.
• <u>Paridad Técnica</u> <u>(P)</u>	• **Es la relación entre el Precio de Mercado y el Valor Técnico** **Permite conocer si el título cotiza a la par, sobre la par o bajo la par.** **$P>1 \rightarrow$ cotización sobre la par. Tiene una prima que es el excedente de 1** **Prima = P - 1** **$P=1 \rightarrow$ cotización a la par** **$P<1 \rightarrow$ cotización bajo la par. Tiene un desagio.** **Desagio = (1 - P) se define como el castigo que el mercado le asigna al bono respecto de su valor técnico.** **Es importante destacar que la paridad depende de muchos factores entre ellos: el perfil temporal, plazo del título, su próximo cupón, las expectativa del mercado (oferta y demanda), las expectativas de cobrabilidad y de comportamiento...**

- Teniendo el flujo de fondos armado podemos mencionar otros elementos que podemos calcular:
- Vida promedio: sintéticamente se la puede definir como la vida promedio del bono; es decir el tiempo promedio en que el inversor tarda en recuperar el capital de su inversión.
- Duration: plazo promedio del flujo de fondos integrado por los pagos formados por amortización más intereses ponderados por los flujos de fondos actualizados a la TIR —el precio de mercado—. Representa una medida de madurez y también de riesgo del bono. Es como dijimos el promedio ponderado de la madurez de ese bono.

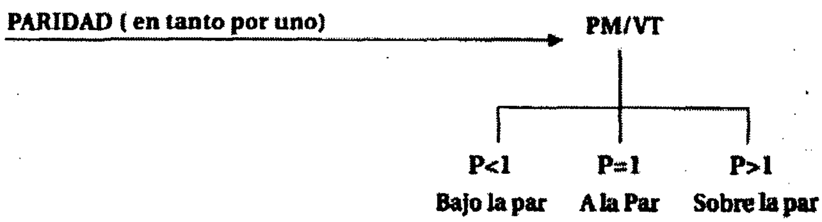
En la columna del cuadro "Títulos Públicos" se expone en la última columna y se expresa en días.
Por su fórmula de cálculo vemos que a : >TIR ==> <Duration

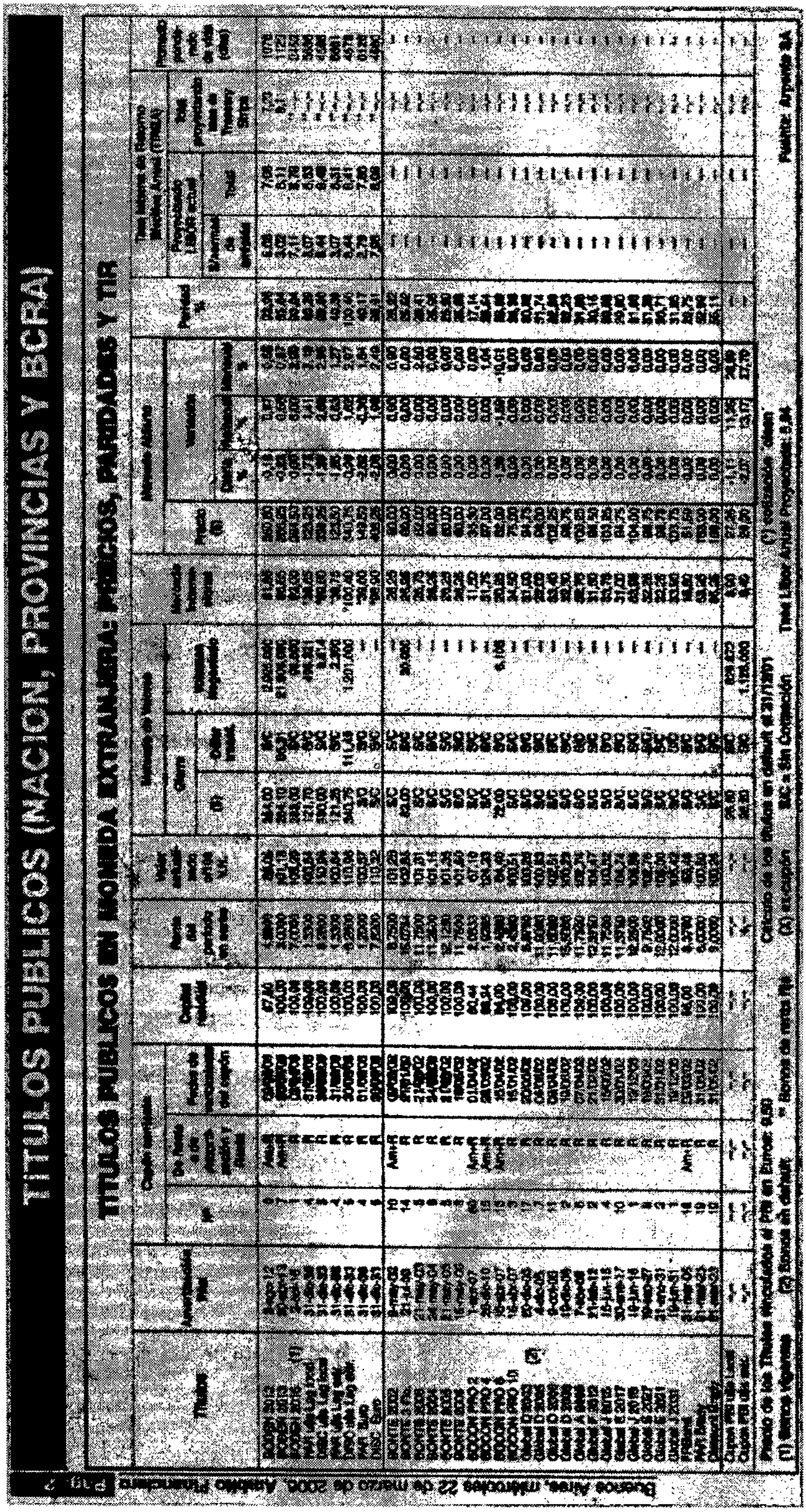
$$Duration = \sum_{t=1}^{n} k . \frac{\frac{c_k}{(1+TIR)^k}}{PM}$$

En un eje de tiempo podríamos expresar los elementos del bono



El precio de mercado es igual al valor actual de los cupones futuros al momento de valuación a esa TIR.




TITULOS PUBLICOS (NACION, PROVINCIAS Y BCRA)
TITULOS PUBLICOS EN MONEDA EXTRANJERA: PRECIOS, PARIDADES Y TIR

Riesgos asociados a la inversión en títulos:

Una inversión en bonos de renta fija está expuesta a los siguientes riesgos:

- ❒ **Riesgo en el tanto de Interés**: aplicable para cualquier título, sin interesar su calificación. Hay indicadores, tales como "Duration" y "Convexity" que pueden medir este tipo de riesgo sistemático que ya hemos visto se compone del dos clases de riesgo:
  - **Riesgo de Precio:**
    El valor de un activo financiero de renta fija es una función decreciente del tipo de interés i, es convexa del tipo de interés i de mercado.
  - **Riesgo de Reinversión:**
    Asociado a los cupones que el inversor va cobrando y no los puede colocar en el mercado a la tasa de interés (TIR), afecta entonces el rendimiento interno calculado ex ante.
  - Están exentos de dicho riesgo los Bonos Cupón Cero por no tener flujos de fondos intermedios.

- ❒ **Riesgo de pérdida del poder adquisitivo**: el tanto de interés requerido y el tanto de inflación esperada están correlacionados.
  En mercados como el norteamericano se lanzaron Bonos antiinflación o T.I.P.S. (Treasury Inflation Protection Securities): emitidos a 5, 10 y 30 años de plazo con cláusula de ajuste por inflación (costo de vida) para paliar este riesgo.
  En nuestro mercado argentino hace tiempo se lanzaron los BARRA, TACAM, TIDOL,... bonos ajustables que luego fueron dados de baja.

- ❒ **Riesgo de Devaluación:**
  De nuestra moneda local que, al tener un traslado en los precios, provoca el riesgo de pérdida del poder de compra.

- ❒ **Riesgo de Default** (Riesgo de Insolvencia o Riesgo de Crédito): es la incertidumbre acerca de que el emisor cumpla con sus compromisos de pago.
  El mercado norteamericano nunca ha incumplido el pago de los títulos de deuda y son considerados por el mercado como los más confiables. Dichos bonos, entre otros son:
  - ***Treasury bills (T-bill)***: estos títulos de deuda son emitidos a corto plazo menor a 1 año.
    El inversor paga un menor precio al VN y al vencimiento cobra dicho VN. Sólo existe una inversión hoy para cobrar en el futuro un valor único.
  - ***Treasury notes (T-notes)***: estos títulos de deuda se emiten a mediano plazo: 2 a 10 años. Pagan cupones con servicios financieros periódicos.

- *Treasury bonds (T-bondes)*: estos títulos de deuda se lanzan a largo plazo: >10 años. Los denominados "bono largo" se emitieron a 30 años.
- *Bonos Cupon Cero (Zero cupon bonds o discount bond)*: Hay dos tipos de bonos del Tesoro Norteamericano cupón cero.
    - *Strips*: bonos emitidos originariamente como cupón cero del Tesoro estadounidense, y se realizan al descuento a partir de su valor nominal.
    - *Bonos cupón cero creado a partir de un T-bond*, en el cual se realiza individualmente cada uno de sus cupones futuros en forma aislada de su bono original.

Debemos distinguir:

❒ **Riesgo País: por la deuda soberana**
En cualquier diario financiero se puede monitorear la evolución de un indicador así titulado. Sabemos que el *Spread* es la *diferencia de tasas:* El riesgo país es la sobretasa de los bonos argentinos sobre los bonos de Estados Unidos, generalmente medido en "puntos básicos" (1 punto básico = 0.01%). Si el riesgo país es de 2.500 p.b (puntos básicos), significa que un título argentino genera un rendimiento de 25% por encima de uno similar norteamericano.
Incluye el riesgo político entre otros.

❒ **Riesgo Privado**: formado por el riesgo financiero, el de la generación de los resultados, su capacidad de gestión, entre otros.

Calificación de los bonos:

➢ "Investment grade": inversiones calificadas

➢ "Speculative grade": inversiones especulativas

➢ "Junk Bonds": bonos basura

❒ **Riesgo de Rescate (Call Risk)**: si hay un período de tiempo en la vida del título en que no puede haber rescate, esta cláusula de rescate es la denominada *call protection*. En las condiciones contractuales del bono se prevé cómo será el valor de rescate y a partir de qué momento se puede producir. El Valor de Rescate generalmente es el Valor Técnico.

❒ **Riesgo liquidez del bono.**

❒ **Riesgo sobre cláusulas impositivas.**

Aplicaciones

1) Determinar para un bono de VN$ 10.000 con intereses del 2% de T.N.A. pagadero semestralmente y cancelación del capital a los 3 años que ha sido comprado 3 años antes de su vencimiento en su lanzamiento con un rendimiento del 3,5% semestral:
   a) el valor de mercado;
   b) el valor técnico;
   c) la paridad;
   d) si la tasa de rendimiento interno del título hubiese sido= 1,5% nominal anual, cuál hubiese sido el precio de mercado y su paridad.
   e) Si el precio de mercado=$ 8667,90, calcule su TIRE Semestral y grafíquela.
   f) Posteriormente compare TIR modificada o TIR ex post del bono (TIR*) suponiendo que a medida que se van cobrando los cupones que genera, éstos se reinvierten a una tasa de colocación del:
      f.1) el 3,5% semestral;
      f.2) 1% semestral;
      f.3) no se pudieron colocar. Entonces i=0.

Rta.: a) 8.667,9; b) 10.000; c)86,68%; d)10.146,14 y101,5%; e) 3,5% semestral; El) 0,035; f.2) 0,03435; f.3) 0,0341.

Perfil temporal del título

PM	100	100	100	100	100	10.100

En primer lugar, armamos el flujo de fondos representado por la inversión inicial y los derechos que emanan de ella o sea por los cupones. En este caso como se trata de un Bono denominado "Bullet" calculamos los servicios financieros que periódicamente deberá cobrar el inversor calculados con la tasa contractual que en este caso es del 2% nominal anual capitalizable semestralmente y al vencimiento el cupón de amortización única.

a) Si la TIR es aquella tasa que anula el Valor Actual Neto (VAN=0). Entonces en esa ecuación financiera de la TIR si definimos a esa tasa como la que iguala el Valor Actual de la Inversión con el Valor Actual de los cupones actualizados, estaríamos expresando que el Valor Actual de los cupones actualizados a esa TIR no es otra cosa que el Valor de Cotización.

$$\text{Entonces: } PM = 100 \cdot a(1;6;0{,}035) + \frac{10000}{(1+0{,}035)^6} \rightarrow \underline{VA = 8.667{,}90}$$

Si el bono se compró sabiendo que deberá rendir el 3,5% semestral el precio que debió abonarse fue de $ 8.667,90.
Debemos aclarar que este rendimiento se denomina "TIR ex-ante" pues es la que corresponde al momento de evaluación de compra. No

sabemos si se mantiene dicho rendimiento a lo largo de la vida del título por los riesgos asociados a este tipo de inversión.

b) $VT = 100 \,.\, a(1;6;0{,}01) + \dfrac{10000}{(1+0{,}01)^6}$ → $\underline{VT = 10.000}$

- Si no hay intereses corridos y el título todavía no tuvo cancelaciones (amortización), entonces el valor técnico es el valor nominal.
- En el Valor Técnico incorporamos el concepto de Devengamiento visto en el Capítulo respectivo. En tal sentido, si observamos el eje de tiempo dentro de un semestre el inversor percibirá un cupón financiero de $100 (10.000 * 0,01). Recordemos que los cupones se calculan en función a las condiciones del contrato, a la tasa contractual que es el TNA del 2%.

Pero ese cupón día a día va devengando y por ende el valor técnico va incrementándose diariamente. La información financiera de los Bonos es diaria y por lo tanto el devengamiento es diario. Ese devengamiento es el denominado "Cupón Corrido" que refleja cuánto del cupón financiero a percibir en el próximo vencimiento ya le corresponde al inversor. El devengamiento se realiza por convención, siguiendo el criterio exponencial.

Es decir que del 1% semestral de tasa contractual a percibir por período vencido calculo la tasa diaria equivalente a ese tanto, tomando como raíz del exponente la cantidad de días del semestre que nos ocupa, para ir acrecentando nuestro derecho 1, 2, 3... días hasta llegar al último día del semestre con un número de días igual al del exponente. Así, al vencimiento del cupón el exponente fraccionario es 1 y nos da exactamente el valor de la tasa del 0,01. Pues si arrojase diferencia no tiene sentido ya que el emisor pagará el 0,01 calculado sobre el Valor Residual del título.

En fórmula tenemos:

a) Si el Bono paga TNA considerando año=365 días	b) Si el Bono paga TNA considerando año=360 días
$CC_1 = VR.\left[\left(1+\frac{TNA.m}{365}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right]$	$CC_1 = VR.\left[\left(1+\frac{TNA}{n}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right]$
$CC_2 = VR.\left[\left(1+\frac{TNA.m}{365}\right)^{\frac{2}{m}}-1\right]$	$CC_2 = VR.\left[\left(1+\frac{TNA}{n}\right)^{\frac{2}{m}}-1\right]$
$CC_t = VR.\left[\left(1+\frac{TNA.m}{365}\right)^{\frac{t}{m}}-1\right]$	$CC_t = VR.\left[\left(1+\frac{TNA}{n}\right)^{\frac{t}{m}}-1\right]$
$CC_m = VR.\left[\left(1+\frac{TNA.m}{365}\right)^{\frac{m}{m}}-1\right] = VR.\frac{TNA.m}{365}$	$CC_m = VR.\left[\left(1+\frac{TNA}{n}\right)^{\frac{m}{m}}-1\right] = VR.\frac{TNA}{n}$

En donde:

m= cantidad de días del período en curso que se está evaluando.
n = frecuencia de capitalización a la que se refiere la tasa nominal anual
TNA = tasa nominal anual que capitaliza cada m días
VR= Valor Residual del título

Los Bonos que por ejemplo pagan la tasa LIBO para el cálculo del cupón corrido al día t del período en curso se considera año de 360 días. En nuestro ejemplo la tasa nominal del 2% la proporcionamos considerando la frecuencia de capitalización igual a 2, pues se trata de 2 semestres. Si usamos la fórmula con 360 días de arriba, entonces observemos que el cupón corrido al último día del semestre alcanza el valor VR.0,01 que es el cupón totalmente devengado y al que ya tengo derecho a percibir.

c) $P = \frac{PM}{VT} = \frac{8667,90}{10.000} \rightarrow \underline{P = 0,8668}$

El título se negocia con un desagio del 13,32%, pues es (1-P)=desagio.

d) Si $TIR_{semestral} = 0,0075$

En la ecuación de valor del Precio de Mercado actualizamos los cupones a la TIR del 0,75% semestral.

$$PM = 100 \cdot a(1;6;\tfrac{0,015}{2}) + \frac{10000}{\left(1+\frac{0,015}{2}\right)^6} = 584,56+9.561,58 \rightarrow \underline{PM = 10.146,14}$$

Calculamos la Paridad:P

$P = \frac{PM}{VT} = \frac{10146,14}{10.000} \rightarrow \underline{P = 1,015}$

Prima= P-1 = 1,015-1= 0,015

El título se vende con prima del 1,5%, por ser el PM (Precio de Mercado) > VT (Valor Técnico).

Por ello, se está negociando sobre la par con una paridad del 101,5%.

e) Ecuación de valor de la TIRE Semestral y gráfico

$$8667,90 = 100 \cdot a(1;6;TIR) + \frac{10000}{(1+TIR)^6}$$

Recordemos que el VAN es:

$$VAN = -8667,90 + \left[100.a(1;6;i) + \frac{10.000}{(1+i)^6}\right]$$

	VAN(i)
0	1932
0,01	1332
0,015	1047
0,02	772
0,025	506
0,03	249
0,035	0
0,04	-241
0,045	-473

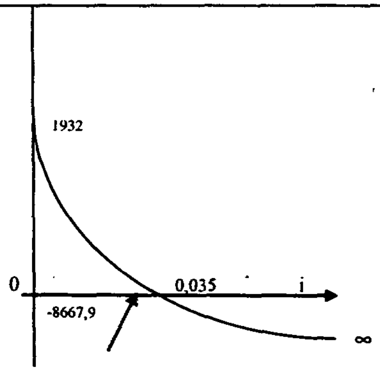


Gráfico del V.A.N.

La TIR que arrojaría la inversión si se mantiene hasta el vencimiento y se reinvierten los cupones a medida que los mismos se van percibiendo a ese mismo tanto, será del 3,5% semestral para el caso de comprar el título a un precio de $ 8.667,90.

f) Cálculo de la TIR Semestral ex post pues el supuesto de reinversión de los cupones puede no mantenerse a través del tiempo. Entonces calculamos la TIR ex post que resulta de distintos escenarios:

f.1) la tasa de colocación de los cupones= 3,5% semestral. Se reinvierten a la TIR.

Valor final de la reinversión: 100 . s(1;6;0,035) + 10000 = 10.655,01

Cálculo de la TIR —ex post— (TIR)* $$\left(\frac{10.655,01}{8667,90}\right)^{\frac{1}{6}} - 1 = TIR^*$$

TIR* = 0,035 semestral

f.2) la tasa de colocación de los cupones = 1% semestral. La reinversión de los mismos en el mercado fue a una tasa menor a la TIR calculada ex ante.

Valor final de la reinversión: 100 . s(1;6;0,01) + 10000 = 10.615,20

Cálculo de la TIR —ex post— (TIR)* $$\left(\frac{10.615,20}{8667,90}\right)^{\frac{1}{6}} - 1 = TIR^*$$

TIR* = 0,03435 semestral

f.3) la tasa de colocación de los cupones = 0, es decir que no se reinvierten; podemos asimilarlo para el caso en que a medida que se van cobrando se atesoran en la caja de seguridad. Puede ocurrir que por el tamaño de los mismos, no es posible volver a colocarlos en el mercado sino hasta volver a reunir una cuantía tal que permita la reinversión.

Valor final de la reinversión: 100 . s(1;6;0) + 10000 = 10.600

Cálculo de la TIR —ex post— (TIR)* $\left(\frac{10.600}{8667,90}\right)^{\frac{1}{6}} - 1 = TIR*$

TIR* = 0,0341 semestral

– La diferencia no es mucha entre la TIR *ex ante y ex post* porque las cuantías involucradas en la reinversión sólo eran cupones financieros y el cupón de amortización que tiene un peso significativo por su cuantía se genera al final del plazo.

2) Con fecha 20.01 se emitió un título de V.N. u$S 1500 que se amortizará mediante 3 cuotas trimestrales, cuya amortización es constante y la tasa libo es del 1,3% trimestral. El primer servicio de interés y amortización operó el 20.04. *Si* con fecha 20.06 —del mismo año— Ud. tomó la decisión de adquirir ese bono conociendo que la paridad a ese día es del 82%.
Determinar:
a) el valor técnico;
b) en caso de desear una rentabilidad del 0,6% mensual, ¿compraría ese título?

Rta.: a) 1008,65; b) sí.

Perfil temporal: **FV=20/06.**

```
20/01    20/04        <>          20/07        20/10
/_______/_____//__/__//_______/______/
                     PM           c            c
          L________J
          CC= 2 meses
          L_____________________J
          Período en Curso= 3 meses
```

a) VT = 1000 [$(1 + 0.013)^{2/3}$] = <u>VT = 1.008,65</u>
VT=1000 +1000. [$(1 + 0.013)^{2/3}$-1] = 1000 + 8,65 = 1.008,65

Para hallar el Valor Técnico capitalizamos el VR: valor residual (VN neto de amortizaciones); o bien sumamos al VR el CC: cupón corrido.

b) PM = 1008,65 * 0.82

PM = 827,09.

Armaremos para una mejor visualización el cuadro de marcha con las obligaciones del emisor y los derechos para quien compra un título desde el día de lanzamiento para una lámina de estas características. Interceptaremos la fecha de valuación en el cuadro para reconocer cuáles son los flujos que se considerarán para los cálculos. Lo anterior a la fecha de compra no nos interesa.

Fecha	k	V_k	I_k	t_k	c_k	T_k
20/1/x	0	1500	-	-	-	-
20/4/x	1	1500	19,50	500	519,50	500
Fecha de Valuación = 20/06/x						
20/7/x	2	1000	13,00	500	513,00	1000
20/10/x	3	500	6,50	500	506,50	1500

c)

FV=20/06

20/01 20/04 <> 20/07 20/10

/________/____//___/___//_______/________/

VN=1500 PM t= 500 t= 500

I= 13 I= 6,5

c= 513 c= 506,5

$$VA = \frac{513}{(1+0.006)} + \frac{506{,}50}{(1+0.006)^4}$$

VA = 1004,46

VAN = - 827.09 + 1004,46 = 177,37

<u>V.A.N. > 0</u> → conviene comprar.

Compraría ese título pues estoy dispuesto a pagar $ 1.004,46, cuando en realidad su precio es menor. Es lo mismo decir que compraría el título ya que el Valor Actual Neto es mayor que cero. El valor de la inversión de $ 827,09 neto del valor actual del flujo de fondos de $ 1004,46 genera un VAN positivo de $ 177,37. Representa un incremento para el patrimonio de quien adquiere un Bono de estas características.

3) El 30.11.X se emite un empréstito por un plazo total de 2 años. La tasa de interés nominal anual es del 9%. Los servicios de renta son pagaderos el 30.05 y 30.11 de cada año. El primer servicio se produjo el 30.05.X+1. Las amortizaciones son anuales y el primer vencimiento se produce el 30.11.X+1. Valor nominal de la lámina $ 500.

Dicho título se ajusta por un índice cuya evolución es la siguiente:

Indice al 30.11.X .... 7.
Indice al 30.09.X+1 ....14.

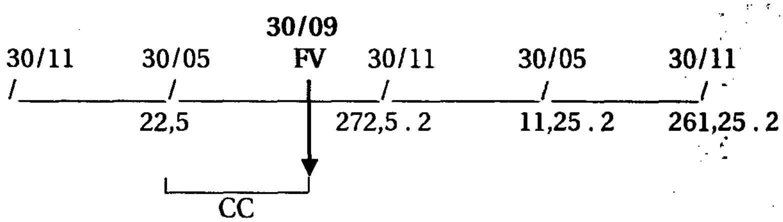
Determinar:

a) El valor técnico al 30.09.X+1.
b) El valor del cupón corrido al 30.09.X+1.
c) El precio de mercado si se conoce que el desagio operado en el título es del 13%.
d) El flujo de fondos.
e) La ecuación del valor para la determinación de la T.I.R.

Rta.: a) VT=1029,78; b) CC= 29,78; c) PM=895,91.

Perfil temporal de la inversión y armado de los flujos con el cuadro de marcha, en donde interceptamos la fecha de valuación.

Fecha	k	V_k	I_k	t_k	c_k
Valores Nominales (sin Ajustar)					
30/11/x	0	500	-	-	-
30/5/x+1	1	500	22,50	-	22,50
Fecha de Valuación=30/09/x+1					
30/11/x+1	2	500	22,50	250	272,50
30/5/x+2	3	250	11,25	-	11,25
30/11/xx2	4	250	11,25	250	261,25



Para un título de VN $100

a) $VT = 500 * 14/7 * (1 + 0.045)^{4/6}$ VT= 1029.78

b) $CC = 500 * 14/7 * [(1+ 0.045)^{4/6} - 1]$.
$CC = 29,78$.

c) P = PM / VT.
P = 1 - desagio.
P = 0.87.
0.87 = PM / 1029.78.
PM = 895.91.

d)

		F.V.			
30/11	30/05	30/09	30/11	30/05	30/11
	----	P.M.	272,50 . 2	11,25 . 2	261,25 . 2

Flujo de fondos a valores corrientes, considerando el ajuste hasta el momento de valuación.

e) Ecuación del valor. Actualizamos cada uno de los flujos al momento de valuación.

$$895{,}91 = \frac{272{,}5\ .\ 2}{(1+TIREM)^{2}} + \frac{11{,}25\ .\ 2}{(1+TIREM)^{8}} + \frac{261{,}25\ .\ 2}{(1+TIREM)^{14}}$$

La "TIR" tiene que estar por encima de la tasa pactada por cotizar bajo la par. Sólo sise comprase a la par la TIR del título coincidiría con la tasa contractual —según condiciones de emisión— que es utilizada para el cálculo de los servicios financieros.

4) Si en el día de hoy ha decidido evaluar la alternativa de comprar un título VN. $ 5.000. El mismo paga cupones de servicios financieros semestrales con una TNA del 6%. Amortización única o rescate íntegro a su vencimiento dentro de 5 años. Cotiza a $ 4915,56. a) Plantee la ecuación para la determinación de la tasa interna de retorno semestral ; b) verifique si esa tasa es menor al 3,5% semestral y c) Grafique el V.A.N.

$$4.915{,}56 = 5.000 * 0{,}03\ a(1;10;TIR) + 5000\ (1+TIR)^{-10}$$

Si resolvemos esta ecuación de grado 10 y buscamos la TIR semestral será del 3,2%.

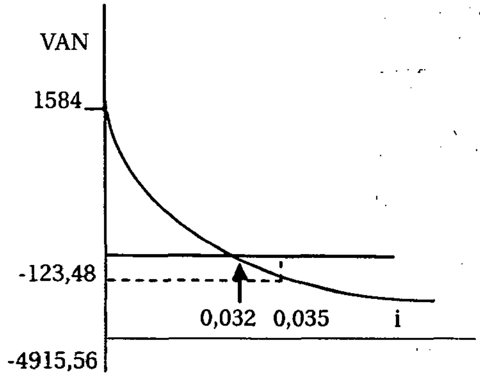
Si la tasa que debemos probar es del 3,5%:

$$4.915{,}56 = 5.000 * 0{,}03\ a(1;10;0{,}035) + 5000\ (1+0{,}035^{-10}$$
$$150\ .\ 8{,}316605323 + 3544{,}59 = 4.792{,}08$$

Como el valor actual de los retornos esperados es menor al precio de mercado, significa que la tasa de actualización no es 3,5% sino debe ser más chica para que cada valor actual sea más grande.

Se expone gráficamente en la página siguiente:

i	VAN
0	1584,44
0,032	0
0,035	-123,48
∞	- 4915,56



5) En el día de la fecha Ud. está evaluando la posibilidad de adquirir un título de VN. $ 1.000. El mismo paga cupones de servicios financieros con periodicidad trimestral, TNA del 9%. Sabiendo que el título se rescatará al 102% de su VN al vencimiento que sucederá dentro de 2 años y hoy su TIREA es del 14,97%. ¿Cuál es el precio de cotización del título si no hay corrido intereses devengados pues inicia un nuevo cupón?

Rta.: PC = 929,26.

$PC = 1.000 * (0,09/4)\ a(1;8;TIR) + 1000\ .1,02\ (1+TIR)^{-8}$

$TIR_{90} = (1+0,1497)^{90/365} - 1 = 0,035$

$PC = 22,50\ a(1;8;0,035) + 1020\ (1+0,035)^{-8}$

$PC = 154,66 + 774,60$

$PC = 929,26$

ESTUDIO DE UN CASO INDIVIDUAL DE BONOS

Observe la información correspondiente al primer bono del cuadro del título.

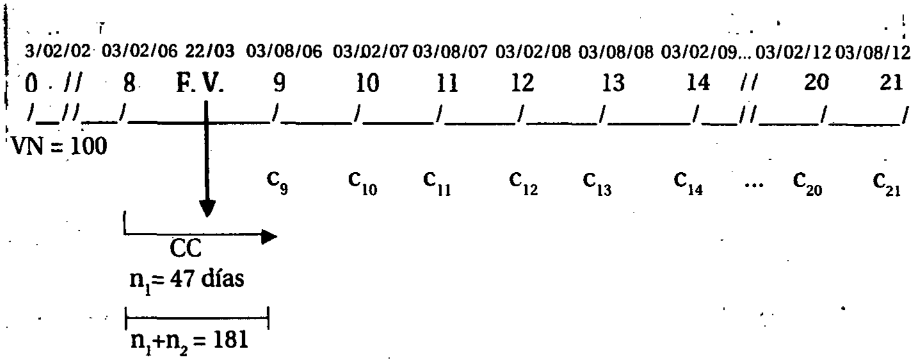
Consiga la s condiciones de emisión de dicho empréstito. Vuélquelas en un cuadro y arme los valores del cuadro.

- Se trata de un BODEN 2013

Condiciones de emisión del Bono.

BONOS DEL GOBIERNO NACIONAL EN DOLARES ESTADOUNIDENSES LIBOR – 2012 SIGLA RG 12	
Fecha de Emisión	3/02/2002
Plazo	10 ½ años
Fecha de Vencimiento	3/08/2012
Moneda de Emisión/Pago	Dólares
Servicios Financieros	• Interés: devengan intereses a partir de la Fecha de de Emisión calculados a la tasa para los depósitos en dólares a 6 meses de plazo del mercado intercambiario de Londres. Pagadera por semestre vencido. • Fecha del 1° vencimiento: 5/08/2002
Amortización	• 8 cuotas anuales y consecutivas del 12,5% • Fecha del 1° vencimiento: 03/08/2005
Orígenes del bono	Una opción para los titulares de depósitos a plazo fijo en dólares pesificados, los tenedores de depósitos a la vista entre otros.

Con las condiciones de emisión armamos el flujo de fondos que resulta de las condiciones de emisión, recordamos que el análisis se hará el 22/03/2006 —nuestra Fecha de Valuación—.



Cálculo del Valor Técnico

- Se conoce que la T.N.A. para el período en curso es del 4,889%.

• Tal como observamos toda la información financiera se expone para un título de VN= 100. Por tal razón, procedemos a realizar este análisis siguiendo el mismo VN.

$$VT = VR + C.C.$$
$$VT_{22/03/06} = 87{,}50 + 87{,}5 \left[\left(1+\frac{0{,}04889}{2} \right)^{47/181} - 1 \right]$$
$$VT_{22/03/06} = 87{,}50 + 0{,}55$$
$VT_{22/03/06}$ = 88,05 ➔ Importe de la columna "Valor Actualizado c/ 100VN")

En el cálculo del cupón corrido se devengaron intereses a la tasa contractual del Bono por un plazo de 47 días del total de 181 días que contiene el período semestral en curso.

Ese saldo de deuda que analizamos en "Préstamos", es el valor de la deuda si se cancela al 100%, es decir a la par.

También contractualmente es el Valor de Rescate en el caso de retiro del bono antes de su vencimiento por parte del deudor.

Armado del cuadro

Tasa Contractual		TNA= 4,889%			TNA PROYECTADA= 5,04%			
		V(p)	I(p)	t(p)	c(p)	n(j)	c(p)/(1+TIREA)n(J)/365	
fecha		1	2= 1 * i	3	4= 2+ 3	5	6	7=5 * 6
22/03/2006	= Fecha de Valuación							
03/08/2006	**9 A+R**	**87,50**	2,14	12,50	14,64	134,00	14,25	1909,05
03/02/2007	10 R	75,00	1,89		1,89	318,00	1,77	563,50
03/08/2007	11 A+R	75,00	1,89	12,50	14,39	499,00	13,01	6489,76
03/02/2008	12 R	62,50	1,58		1,58	683,00	1,37	936,63
03/08/2008	13 A+R	62,50	1,58	12,50	14,08	865,00	11,81	10216,66
03/02/2009	14 R	50,00	1,26		1,26	1049,00	1,02	1068,54
03/08/2009	15 A+R	50,00	1,26	12,50	13,76	1230,00	10,72	13189,64
03/02/2010	16 R	37,50	0,95		0,95	1414,00	0,71	1003,21
03/08/2010	17 A+R	37,50	0,95	12,50	13,45	1595,00	9,73	15520,14
03/02/2011	18 R	25,00	0,63		0,63	1779,00	0,44	781,43
03/08/2011	19 A+R	25,00	0,63	12,50	13,13	1960,00	8,82	17296,57
03/02/2012	20 R	12,50	0,32		0,32	2144,00	0,20	437,30
03/08/2012	21 A+R	12,50	0,32	12,50	12,82	2326,00	8,00	18601,35
			======	======	======		======	======
sumas			15,37	87,50	102,87		**81,85**	**88013,77**
				Promedio Ponderado de Vida				**1076**

Para armar este cuadro:

✓ Hemos buscado la T.N.A. contractual para el período en curso= 4,889%.

✓ Como solamente nos intereses los cupones que cobraría en el caso de comprar el título, entonces hemos construido el cuadro con los cupones restantes, desde el cupón N° 9 hasta el último cupón N° 21.

- ✓ El cupón adherido al título es el N° 9 y los restantes, es decir que por la compra hoy día 22/03/2006 tengo derecho a cobrar desde el cupón 9 en adelante (un total de 13 cupones).

- ✓ El sistema de préstamo es de amortización fija pero con una periodicidad diferente al de los intereses que se deben calcular sobre saldos de deuda.

- ✓ En función a los datos que surgen de las condiciones de emisión armamos la cuantía de cada cupón o cuota del título. Corresponde a nuestra columna 4 denominada c(p).

- ✓ Como desconocemos la TNA del semestre siguiente y las restantes, utilizamos como supuesto en el cálculo la TNA proyectada en la información, pero "es un supuesto". La única tasa cierta es la del período en curso que se conoce un poco antes del inicio de ese cupón.

- ✓ Si la fecha de valuación —EV.— es la que señalamos entonces para el cálculo de la TIR necesitamos considerar cuántos días restan al vencimiento de cada cupón contados desde hoy 22/03/2006. Vemos que los vencimientos son escalonados, por lo tanto los n(j) van creciendo en la cantidad de de días que tiene el siguiente semestre. Es la columna 5 que llamamos n(j).

Ya armado el flujo de fondos de la columna 4 y teniendo el plazo n(j) de la columna 5 resta calcular la TIR.

- ✓ Como ya hemos visto la parte de más difícil cálculo es la tasa. Por eso, podemos validar la información del cuadro expuesto y procedemos a considerar como dato la TIREA total según normas de emisión= 7,68% y así calculamos el Precio de Mercado.

- ✓ Comprobamos que dado el flujo de fondos asociados a esa inversión inicial de Dls. 81,85 la TIREA es efectivamente del 7,68%.

De los cálculos realizados podemos extraer simples conclusiones:

- ✓ Los cupones calculados, salvo el del período en curso, son cupones estimativos pues fue estimativa la TNA proyectada para el cálculo de cada cupón financiero.

- ✓ La TIREA es estimativa y significa considerar que el título se mantiene hasta el vencimiento y por lo tanto los cupones estimativos que se van cobrando hasta la expiración del mismo se van reinvirtiendo a la misma tasa interna de retorno.

Un simple recálculo en la Planilla que a continuación transcribimos asumiendo que los cupones financieros se determinan a la misma tasa del período en curso, es decir del 4,889%. Los resultados también estimativos hubieran sido:

Tasa Contractual = 4,889%			TNA PROYECTADA=tasa contractual = 4,8889%							
							V.A.N. = $c(p)/(1+TEA)^{n(j)/365}$			
		V(p)	I(p)	I(p)	c(p)	n(j)	TEA=0,0768	TEA=0,075	TEA=0,07535	
fecha		1	2=1*i	3	4=2+3	5	6	7	8	9=8*5
22/03/06	= Fecha de Valuación						-81,85	-81,85	-81,85	
03/08/06	**9 A+R**	**87,50**	2,14	12,50	14,64	134	14,25	14,26	14,25	1909,99
03/02/07	10 R	75,00	1,83		1,83	318	1,72	1,72	1,72	547,26
03/08/07	11 A+R	75,00	1,83	12,50	14,33	499	12,95	12,98	12,98	6476,14
03/02/08	12 R	62,50	1,53		1,53	683	1,33	1,33	1,33	910,86
03/08/08	13 A+R	62,50	1,53	12,50	14,03	865	11,77	11,82	11,81	10214,97
03/02/09	14 R	50,00	1,22		1,22	1049	0,99	0,99	0,99	1040,55
03/08/09	15 A+R	50,00	1,22	12,50	13,72	1230	10,69	10,75	10,74	13213,32
03/02/10	16 R	37,50	0,92		0,92	1414	0,69	0,69	0,69	978,24
03/08/10	17 A+R	37,50	0,92	12,50	13,42	1595	9,71	9,78	9,77	15578,93
03/02/11	18 R	25,00	0,61		0,61	1779	0,43	0,43	0,43	763,01
03/08/11	19 A+R	25,00	0,61	12,50	13,11	1960	8,81	8,89	8,88	17397,[illegible]3
03/02/12	20 R	12,50	0,31		0,31	2144	0,20	0,20	0,20	427,56
03/08/12	21 A+R	12,50	0,31	12,50	12,81	2326	7,99	8,08	8,06	18747,95
			======	======	======		======	======	======	======
sumas			14,97	90,50	102,47					88205,93
						V.A.N.	-0,32	0,08	0,00	
			Promedio Ponderado de Vida							1078,00

En este caso, considerando que los cupones financieros son calculados a la misma tasa del período en curso, la TIREA pasó del 7,68% al 7,54%.

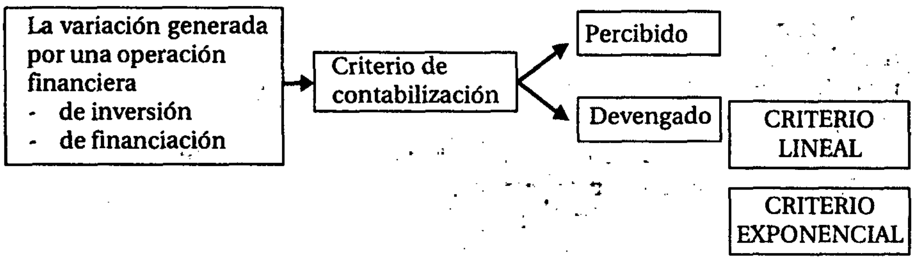
Capítulo XI

Devengamiento de capitales

Objetivo

Distribuir en el tiempo las variaciones cuantitativas que generan las operaciones financieras.

Red de conceptos



Normativa Contable

Las Normas Contables Profesionales reconoce el "Devengamiento" en donde los efectos patrimoniales de las transacciones y otros hechos deben reconocerse en los períodos en que ocurren, con independencia del momento en el cual se produjeron los ingresos y egresos de fondos relacionados (Resolución Técnica N° 17). Razón por la cual utilizaremos este criterio. Dejamos de lado el criterio de lo Percibido.

Concepto de devengamiento

Se tratará la imputación de los intereses totales de una operación activa (préstamo) o pasiva (depósito) en el balance mensual de una entidad; es decir como efectuar la apropiación de los resultados en cada uno de los períodos mensuales.

Normativa de aplicación específica para entidades financieras

La Comunicación "A" 92 de Banco Central establece que el devengamiento de ajustes e intereses de capital implica la distribución económica por el tiempo de vigencia de la operación de las sumas acumuladas a los capitales iniciales efectivamente entregados al cliente (operación activa) o recibidos del cliente (operación pasiva) por una entidad financiera.

Bases para el cálculo del deuengamiento

Para el cómputo de los días, los intereses se contarán desde el día de la efectivización hasta el día anterior al del vencimiento. Tal como se establece en las Comunicaciones OPASI y OPRAC sobre la forma de contar los días.

La forma de determinación sigue el criterio exponencial, admitiéndose el lineal en casos como: operaciones en $ —con cláusula de ajuste de capital—; operaciones en moneda extranjera; operaciones en las que los tantos de interés se encuentren previamente concertados por un plazo total de vigencia no superior a 92 días; depósitos en caja de ahorro yen cuenta corriente, siempre que los plazos de capitalización de esos intereses no superen los 92 días.

Es necesario a efectos de la uniformidad que una entidad al optar por la distribución lineal de los resultados de un tipo de operación, el mismo criterio deberá ser aplicado en todas aquellas de esa característica.

La partida contable es "Intereses por Depósitos" - Capítulo Resultados del Rubro: Egresos Financieros; para el caso de las pérdidas devengadas por intereses sobre los capitales efectivamente recibidos correspondientes a Depósitos.

O bien, la otra cuenta "Intereses por Préstamos" - Capítulo Resultados - Rubro Ingresos Financieros; en concepto de las ganancias devengadas por intereses sobre los capitales efectivamente entregados correspondientes a Préstamos.

Como vemos, es una simple aplicación de capitalización de operaciones financieras simples o de un único capital.

Por lo tanto, las fórmulas a utilizar responden al siguiente esquema:

Fórmulas de aplicación

Uno de los métodos para el cálculo de la distribución de los intereses en función al tiempo transcurrido es hallar los intereses acumulados desde el inicio de una operación hasta el momento k de valuación. Si registramos mensualmente cada momento k de valuación es el cierre de mes. El interés a contabilizar como resultado del mes será la diferencia entre el acumulado a ese mes y el acumulado al mes anterior.

Las tres fórmulas siguientes determinan el Interés Acumulado desde que se origina hasta el momento de valuación de:

- un Capital Unico C(o) colocado a una tasa de interés con reinversión de intereses.
- un Capital Unico C(o) colocado a una tasa de interés con retiro de intereses.
- de Capitales Múltiples.

Aclaramos que una entidad financiera configura dichas fórmulas dentro de los dos grandes grupos de operaciones: Operaciones Pasivas, en el caso de capital único colocado con reinversión o bien con retiro, y Operaciones Activas, en el caso de préstamos. Si bien las Operaciones de Pago Integro se encuentran bajo el título de Operaciones Pasivas, ello no impide que se aplique para el caso de un devengamiento de un Préstamo que reúne las mismas características de una Operación Pasiva.

Operaciones pasivas - Operaciones de pago Integro

¿Existe capitalización subperiódica de intereses?

SI

NO

$$I_k = C(o)\,\{\,[\,\prod_{j=1}^{l} (1+i)^{k_j}\,] - 1\,\}$$

$$I_k = C(o)\,\sum_{j=1}^{l}\,[\,(1+i)^{k_j} - 1\,]$$

Operaciones activas - Reembolsables en cuotas

$$I_k = \sum_{j=1}^{l} V_j \,.\, [\,(1+i)^{k_j} - 1\,]$$

I_k : Intereses devengados desde el inicio de la operación hasta el momento k.

V_j : Saldo de deuda de la operación al inicio del período j-ésimo- correspondiente a la tasa i(d) vigente durante el período j.

i (d): Tanto de interés equivalente diario, en tanto por uno, vigente en el período j. k : Número de días que se mantiene vigente la tasa i(d). Se sabe que:

$$\sum_{j=1}^{l} k_j = k$$

l: Número de tasas vigentes hasta los k días de valoración.

k: Número de días transcurridos desde la fecha de iniciación de la operación. El máximo valor de k es el plazo de la operación expresado en días.

Interés a devengar en cada período mensual

$$I_{k;k-p} = I_k - I_{k-p}$$

$I_{k;\,k-p}$: Intereses a devengar en una operación de Saldo \$ V_j que se contabilizarán a fin de cada mes, por los p días a contar desde la fecha del anterior devengamiento.

p: Número de días corridos desde el anterior devengamiento. Por lo general, será entre 28 y 31 días.

DEVENGAMIENTO EN CAPITALES ÚNICOS

Si bien es considerado para las operaciones que significan efectiva recepción de fondos para la entidad financiera y por tal razón las denominamos "operaciones pasivas". El método de cálculo se aplica también para un Préstamo "operación activa" que se reintegra mediante una Contraprestación Unica que incluye el capital y los intereses, o bien mediante contraprestaciones sucesivas que comprenden solamente los intereses periódicos y la última contraprestación formada por el reintegro del capital tomado en préstamo. Así planteadas dichas operaciones activas se las pueden enmarcar dentro de las leyes financieras a interés compuesto e interés simple, respectivamente.

Aplicaciones en Operaciones Pasivas

1) Efectuar el devengamiento de intereses de la siguiente operación de Depósito:
   Depósito: \$ 1.000.
   Fecha de constitución: 27.03.
   Tasa de interés contractual anual p/el plazo de 90 ds: 94%. Plazo de la operación: 90 días

   a) *Cálculo del Interés total de la operación.*

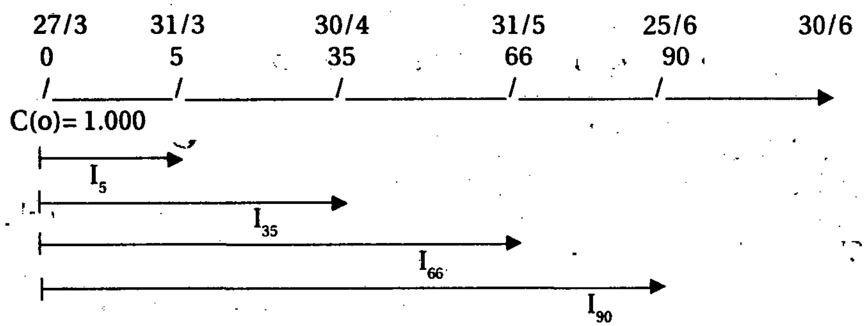
   $$I(0;90) = \frac{1000 * 0.94 * 90}{365} = 231.78.$$

Esta operación de inversión generó un incremento de capital de \$ 231,78 que si seguimos el criterio de lo percibido estaríamos registrando el resultado en el momento en que lo cobramos, es decir el 25/06. Pero, sabemos que los resultados se fueron devengando desde el día de imposición, entonces ese derecho que tenemos sobre la entidad es un incremento que se va generando diariamente.

Lo lógico es ir registrando ese derecho en los resultados de cada mes, si consideramos que la entidad o la empresa confecciona balances mensuales, y ello resulta válido para un Balance Anual pues éste debería reflejar aquellos resultados en donde soy acreedor y serían los devengados hasta el cierre, correspondiendo el resto para el año siguiente.

Así pues el criterio que se utiliza es el de "Devengado" y en este caso lo veremos considerando que una empresa presenta informes mensuales o en el caso concreto de una entidad financiera que está obligada a presentar a su ente rector Balances de Publicación Mensual, y por tal razón hacer un corte en sus resultados.

Eje de tiempo de la operación



b) *Determinación de la tasa de interés diaria para el criterio exponencial de devengamiento:*

$$i(d) = \left(1+ \frac{0{,}94 * 90}{365}\right)^{1/90} - 1 \qquad \therefore \; i(d) = 0{,}0023189$$

c) *Determinación de los Intereses devengados acumulados —Ik a fin de cada mes—.*

$$I_k = C(0) * \sum_{j=1}^{l} [1+ i(d)]^{kj} - 1$$

Esta operación de depósito se realiza por un solo período de capitalización de 90 días. Si seguimos el criterio exponencial de devengamiento el interés acumulado surge de incrementar día a día a la tasa diaria equivalente al tanto equivalente de 90 días. De forma tal que cuando llego al fin del plazo devengué el total de intereses de la operación.

Este método expuesto en la Comunicación de Banco Central constituye una forma de determinar esos intereses correspondientes al mes es por diferencia entre el acumulado del mes de referencia y el acumulado del mes anterior. Así lo resolveremos:

c.1: Al 31.03

$$I_5 = 1000 \{ [1 + i(d)]^5 - 1 \}$$
$$I_5 = 1000 * 0.0116484 = 11.65$$

c.2: Al 30.04

$$I_{35} = 1000 * \{ [1 + i(d)]^{35} - 1 \}$$
$$I_{35} = 1000 * 0.0844441 = 84.44$$

c.3: Al 31.05

$$I_{66} = 1000 * \{[1 + i(d)]^{66} - 1\}$$
$$I_{66} = 1000 * 0.1651738 = 165.17$$

c.4: Al 25/06

$$I_{90} = 1000 * \{[1 + i(d)]^{90} - 1\}$$
$$I_{90} = 1000 * 0.2317789 = 231.78$$

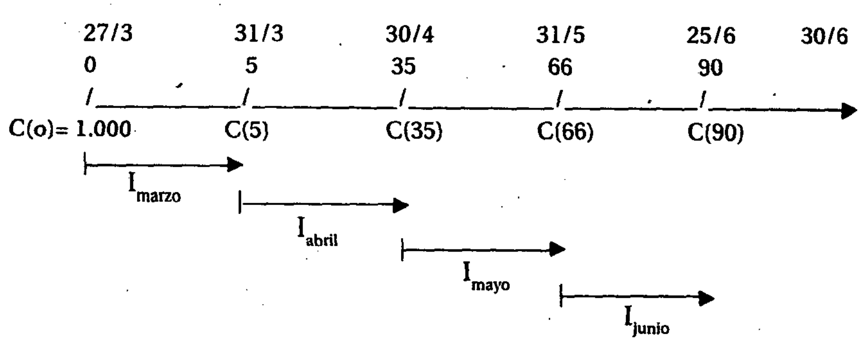
Método directo

A través del mismo, se determinan directamente los Intereses del mes que se contabilizan en los resultados.

1°) Calculo el valor final al cierre del mes anterior al de cálculo.

2°) Determino los intereses del mes.

Eje de tiempo de la operación



- *Intereses de marzo*

$$I_{marzo} = 1000 * \{ [1 + i(d)]^5 - 1 \}$$
$$I_{marzo} = 1000 * 0.011648484 = 11,65$$

- *Intereses de abril*

$$I_{abril} = 1000\,[1+i(d)]^5 * \{\,[\,1 + i(d)\,]^{30} \;-\; 1\,\}$$
$$I_{abril} = 1011{,}65 \;*\; 0.071958106 = 72{,}79$$

- *Intereses de mayo*

$$I_{mayo} = [1+i(d)]^{35} * \{[\,1 + i(d)\,]^{31} \;-\; 1\}$$
$$I_{mayo} = 1084{,}44 \;*\; 0.074443888 = 80{,}73$$

- *Intereses de junio*

$$I_{junio} = [1+i(d)]^{66} * \{\,[\,1 + i(d)\,]^{24} \;-\; 1\,\}$$
$$I_{junio} = 1165{,}18 * 0.057163719 = 66{,}61$$

Resumiendo este camino:

- Si observamos cada uno de los meses en que se cargan los resultados se determina para el mes de cálculo el interés unitario $\{[1 + i(d)]^{k}_{j} - 1\}$ siendo k_j = cantidad de días que tiene el mes j que estamos calculando.

- Dicho interés unitario se aplica sobre el Valor final al inicio. Dicho valor final es el producto del capital inicial y el factor de capitalización calculado para los días ya transcurridos desde el origen de la operación hasta el cierre del mes anterior al de cálculo. $C_0 . [1+i(d)^s]$.

  - La suma de los días que están contenidos en el exponente del factor de capitalización y el del interés unitario debe ser igual al número de días desde el inicio de la operación hasta la fecha de cierre del mes en que se está devengando.

d) Cuadro síntesis de la operación, detallando intereses devengados acumulados e intereses a devengar en cada Balance mensual.

Fecha	Concepto	Días transc.	I_k	$I_{k:k-p}$
27.03	Constit. Depósito	-	--	--
31.03	Balance Mensual	5	11.65	11.65
30.04	Balance Mensual	35	84.44	72.79
31.05	Balance Mensual	66	165.17	80.73
25.06	Balance Mensual	90	231.78	66.61
				231.78

Así nos queda distribuido el incremento de la operación de $ 231,78 en $11,65 en concepto de intereses devengados desde el inicio —27/03— hasta el 31/03; luego $ 72,79 en concepto de intereses devengados por el mes de abril, $ 80,73 por el mes de mayo y $ 66,61 por los 24 días del mes de junio.

2) Efectuar el devengamiento de la operación que se describe:
Depósito: \$ 1.000.
Fecha de constitución: 27.03.
Capitalización mensual.
Tasa de interés contractual anual pactada p/el plazo de 30 días:.
del 27.03 al 25.04 .... 94%.
del 26.04 al 25.05 .... 92%.
del 26.05 al 24.06 .... 86% .

a) Cálculo del Interés total de la operación que deberá ser distribuido mensualmente

$$I(0;30) = \frac{1000 * 0.94 * 30}{365} = 77.26.$$

$$I(30;60) = \frac{1077.26 * 0.92 * 30}{365} = 81.46.$$

$$I(60;90) = \frac{1158.72 * 0.86 * 30}{365} = \underline{81.90}$$

$$\underline{\mathbf{240.62}}.$$

b) *Cálculo de la tasa equivalente diaria necesaria para la distribución*

$$i(d) = \left(1+\frac{0.94 * 30}{365}\right)^{1/30} - 1. \qquad i(d) = 0.0024838.$$

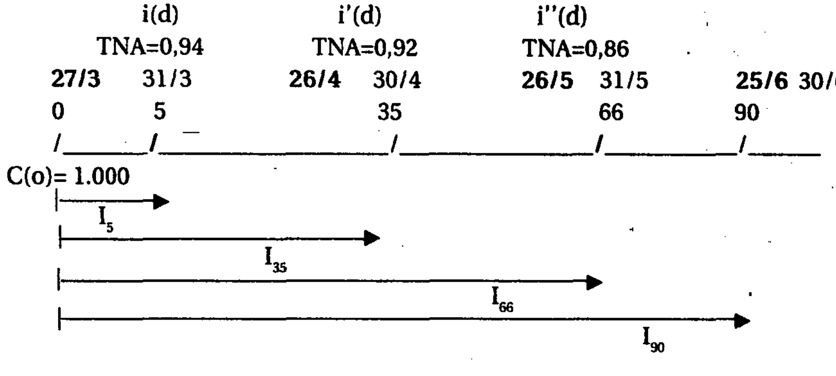
$$i(d)' = \left(1+\frac{0.92 * 30}{365.}\right)^{1/30} - 1. \qquad i(d)' = 0.0024328.$$

$$i(d)'' = \left(1+\frac{0.86 * 30}{365.}\right)^{1/30} - 1. \qquad i(d)'' = 0.0022792.$$

c) *Determinación de los Intereses devengados acumulados —Ik— a fin de cada mes.*

$$I_k = C(o) * \{\prod_{j=1}^{l} [1+i(d)]^{kj.} - 1\}.$$

Eje de tiempo de la operación



c.1 : Al 31.03

$$I_5 = 1000 \; [1 + i(d)]^5 - 1.$$

$$I_5 = 1000 * 0.0276637 = 12.48.$$

c.2: Al 30.04

$$I_{35} = 1000 * \{[1 + i(d)]^{30} \; [1 + i(d)']^5 - 1\}.$$

$$I_{35} = 1000 * 0.0904285 = 90.43.$$

c.3: Al 31.05

$$I_{66} = 1000 * \{[1+i(d)]^{30} \; [1+i(d)']^{30} \; [1+i(d)'']^6 - 1\}.$$

$$I_{66} = 1000 * 0.1746575 = 174.66.$$

c.4: Al 25/06

$$I_{90} = 1000 * \{[1+i(d)]^{30} \; [1+i(d)']^{30} \; [1+i(d)'']^{30} - 1\}.$$

$$I_{90} = 1000 * 0.2406248 = 240.62.$$

Método directo

- *Intereses de marzo:* días acumulados desde el inicio=5

$$I_{marzo} = 1000 * \{[1 + i(d)]^5 - 1\}$$

$$I_{marzo} = 1000 * 0.012480748 = 12{,}48$$

- *Intereses de abril:* días acumulados desde el inicio=35

$$I_{abril} = 1000 \; [1+i(d)]^5 * \{[1 + i(d)]^{25} [1 + i'(d)]^5 - 1\}$$

$$I_{abril} = 1000 * 1{,}012480748 * [1{,}63980995 * 1{,}012223087 - 1]$$

$$I_{abril} = 1000 * 1{,}012480748 * 0{,}076986126 = 77{,}95$$

- *Intereses de mayo:* días acumulados desde el inicio=66

$$I_{mayo} = 1000 \; [1+i(d)]^{30} . [1 + i'(d)]^5 . \{[1 + i'(d)]^{25} * [1 + i''(d)]^6 - 1\}$$

$$I_{mayo} = 1000 . 1{,}077260273 . 1{,}012223087 . [1{,}062627846 . 1{,}013753433 - 1]$$

$$I_{mayo} = 1000 . 1{,}09042772 . 0{,}077242627 = 84{,}23$$

- *Intereses de junio:* días acumulados desde el inicio=90

$$I_{junio} = 1000[1+i(d)]^{30} . [1 + i'(d)]^{30} . [1 + i''(d)]^6 * \{[1 + i''(d)]^{24} - 1\}$$

$$I_{junio} = 1000 . 1{,}077260273 . 1{,}075616438 . 1{,}013753433 * 0{,}056159117$$

$$I_{junio} = 1000 . 1{,}17465522 * 0{,}056159117 = 65{,}96$$

d) Cuadro síntesis de la operación, detallando intereses devengados acumulados e intereses a devengar en cada Balance mensual.

Fecha	Concepto	Días transc.	I_k	$I_{k;k-p}$
27.03	Constit. depósito	-	--	--
31.03	Balance Mensual	5	12.48	12.48
30.04	Balance Mensual	35	90.43	77.95
31.05	Balance Mensual	66	174.66	84.23
25.06	Balance Mensual	90	240.62	65.96
				240.62

3) Efectuar el devengamiento de la operación que se describe:
Depósito: $ 1.000.
Fecha de constitución: 27.03.
Tasa de interés contractual anual pactada p/el plazo de 30 días:
del 27.03 al 25.04 .... 94%.
del 26.04 al 25.05 .... 92%.
del 26.05 al 24.06 .... 86%.
Existe retiro periódico Mensual de intereses.

a) Cálculo del Interés total de la operación, conociendo que se retiran los intereses mensualmente.

$$I(0;30) = \frac{1000 * 0.94 * 30}{365} = 77.26.$$

$$I(30;60) = \frac{1000.00 * 0.92 * 30}{365} = 75.62.$$

$$I(60;90) = \frac{1000.00 * 0.86 * 30}{365} = \underline{70.68}$$

$$\underline{223.56}.$$

b) Cálculo de la tasa equivalente diaria

$$i(d) = \left(1 + \frac{0.94 * 30}{365}\right)^{1/30} - 1. \qquad i(d)' = \left(1 + \frac{0.92 * 30}{365}\right)^{1/30} - 1.$$

$$i(d) = 0.0024838. \qquad i(d)' = 0.0024328.$$

$$i(d)'' = \left(1 + \frac{0.86 * 30}{365}\right)^{1/30} - 1.$$

$$i(d)'' = 0.0022792.$$

c) Determinación de los Intereses devengados acumulados —Ik—.

$$I_k = C(0) * \sum_{j=1}^{l} \{[1 + i(d)]^{kj} - 1\}$$

El eje de tiempo es similar al del ejercicio anterior, pues lo que cambia en este es la el retiro de intereses cada 30 días.

c.1: Al 31.03

$I_5 = 1000\,[\,1 + i_{(d)}]^{5} - 1\,.$

$I_5 = 1000 * 0.01248 \quad = 12.48.$

c.2: Al 30.04

$I_{35} = 1000 * \{\ [\,(1 + i_{(d)})^{30} \quad -1] + [(1 + i_{(d)}')^{5} - 1\,]\,\}.$

$I_{35} = 1000 * 0.0894842 = 89.48.$

c.3: Al 31.05

$I_{66} = 1000 * \{\ [(1+i_{(d)})^{30} - 1] + [(1+i_{(d)}')^{30} - 1] + [\,(1+i_{(d)}'')^{6} - 1]\,\}$

$I_{66} = 1000 * 0.1666323 = 166.63.$

c.4: Al 25.06

$I_{90} = 1000 * \{\,[1+i(d)]^{30} - 1\} + \{[1+i(d)']^{3} - 1\} + \{\,[1+i(d)]^{30} - 1\}.$

$I_{90} = 1000 * 0.22356 = 223.56.$

Siguiendo el otro método de interés del mes:

- *Intereses de marzo*

$I_{marzo} = 1000 * \{\,[\,1 + i(d)\,]^{5} - 1\,\}$

$I_{marzo} = 1000 * 0.012480748 = 12{,}48$

- *Intereses de abril*

/..........TNA=0,94............./...............TNA=0,92............./........TNA=0,86

	i(d)		i'(d)		i''(d)
27/3	31/3	26/4	30/4	26/5	
0	5		35		66

/_____/_______________________/_____________________//

C(o)= 1.000 $\longrightarrow$ I_{abril}

$I_{abril} = 1000\,[1+i(d)]^{5} * \{\,[\,1 + i(d)\,]^{25} - 1\,\} + 1000\,\{\,[\,1 + i'(d)\,]^{5} - 1\,\}$

$I_{abril} = 1000.\ 1{,}012480748 * 0{,}063980995 + 1000 * 0{,}012223087$

$I_{abril} = 1012{,}48 * 0{,}063980995 + 1000 * 0{,}012223087 = 64{,}78 + 12{,}22 = 77{,}00$

- *Intereses de mayo*

/.........TNA=0,92 ..../.............TNA=0,86.............../

			i'(d)		i''(d)	
27/3	31/3	26/4	30/4	26/5	31/5	25/6
0	5		35		66	90

/_____/_______________/______________________/__________/

C(o)= 1.000 $\longrightarrow$ I_{mayo}

$I_{mayo} = 1000.[1+i'(d)]^5 * \{[1+ i'(d)]^{25} - 1\}+1000* \{[1 + i''(d)]^6 - 1\}$

$I_{mayo} = 1000.1,012223087* 0,062627845+1000.*0,013753433$

$I_{mayo} = 63,40+13,75=77,15$

- *Intereses de junio*

/.............TNA=0,86............/

i'(d) i''(d)

27/3 31/3 26/4 30/4 26/5 31/5 25/6

0 5 35 66 90

C(o)= 1.000

I_{junio}

$I_{junio} = 1000\,[1+i''(d)]^6 * \{[1 + i''(d)]^{24} - 1\}$

$I_{junio} = 1000\,.\,1,013753433 * 0,056159117$

$I_{junio} = 1000\,.\,0,056931497 = 56,93$

d) *Cuadro síntesis de la operación, detallando intereses devengados acumulados e intereses a devengar en cada Balance mensual.*

Fecha	Concepto	Días transc.	I_k	$I_{k:k-p}$
27.03	Constit. Depósito	-	--	--
31.03	Balance Mensual	5	12.48	12.48
30.04	Balance Mensual	35	89.48	77.00
31.05	Balance Mensual	66	166.63	77.15
25.06	Balance Mensual	90	223.56	56.93
				223.56

4) Un depósito constituido el 6.08 por $ 8.700 por 20 días renovable íntegramente por 2 períodos más de 20 días cada uno, siendo la tasa de interés nominal anual para el plazo de 20 días del 42%.
Determinar los intereses que la entidad financiera debe imputar en su balance mensual correspondiente al mes de septiembre.

Rta.: 311

a) *Determinación de la tasa de interés diaria:*

$$i(d) = \left(1 + \frac{0,42 * 20}{365}\right)^{1/20} - 1 = 0,0011383$$

b) Cuantificación de los intereses de septiembre:

I) * Intereses a imputar en el Balance Mensual de Agosto

$I_{26} = 8700\ [1+i(d)]^{26} - 1 =$ 261,18

- Intereses a imputar en el Balance Mensual de Septiembre

$I_{56} = 8700\ [\ 1 + i(d)\ ]^{56} - 1 =$ 572,29

- Intereses de Septiembre

I sept = I(56) - I(26) = 572,29-261,18 = <u>311</u>

II) Otra forma sería el cálculo directo para el mes, sin arrastrar intereses acumulados.

$I\ sept = 8700\ [1+i(d)]^{26} * \{\ [\ 1 + i(d)\ ]^{30} - 1\ \}$

I sept = 8961,18 * 0,0347187 = <u>311</u>

5) Calcular qué porcentaje de intereses han sido contabilizados en los resultados del mes de abril en relación a los resultados totales devengados por un depósito de $ 25.000 constituído el 3.03, con vencimiento el 14.05 en el que se le reconoce un interés efectivo mensual del 4%.

Rta.: 42,09%

Plazo de la operación: 72 días $I(0;72) = 25000 * [\ (1+0,04)^{72/30} - 1\ ] =$ 2467,56

Tasa Nominal anual pactada para el plazo de 72 días (si se calcula) es el 50,03%.

I) $I\ abril = 25000 * (\ 1 + 0,04)^{29/30} . \{[1 + i(d)\ ]^{30} - 1\} = 25966,03 * 0,04 =$ 1038,64

II) $I\ abril = I\ (59) - I(29) = 25000[\ (1+ 0,04)^{59/30} - 1] - 25000\ [\ (1+0,04)^{29/30} - 1]$

I abril = 2004,67 - 966,03 = 1038,64

$$\text{Participación} = \frac{1038,64}{2467,56} . 100 = 42,09\%$$

6) Un depósito de $ 12.500 colocado el 16.05 por 35 días renovable por otros 35 días, a una tasa nominal anual para ese plazo del 40,50% y en la renovación del 36%. Existe retiro periódico de intereses. Determi-

nar los intereses a imputar en el Balance Mensual correspondiente a julio en concepto de resultados y los intereses totales de la operación.

Rta: a) 916,95; b) 297,45.

Intereses totales de la operación

$$I(0;70) = 12500 * \left(\frac{0,405 \cdot 35}{365} + \frac{0,36 \cdot 35}{365} \right)$$

$$I(0;70) = 12500 * 0,0388356 + 0,0345205 = 916,95$$

Intereses del mes de julio

$$i(d) = (1 + 0,0388356)^{1/35} - 1 = 0,0010892$$

$$i''(d) = (1 + 0,0345205)^{1/35} - 1 = 0,0009701$$

$$I \text{ julio} = I(70) - I(46)$$

$$I(70) = 12500 * \{ [(1 + 0,0010892)^{35} - 1] + [(1 + 0,0009701)^{35} - 1] \} = 916,95$$

$$\underline{I(46)} = 12500 * \{ [1 + 0,0010892)^{35} - 1] + [(1 + 0,0009701)^{11} - 1] \} = \underline{619,50}$$

I(24) Intereses de julio $\underline{297,45}$

DEVENGAMIENTO EN CAPITALES MÚLTIPLES

Operaciones activas

Aplicaciones

1) Efectuar el devengamiento —sistema lineal y exponencial— de la siguiente operación financiera:
   - Préstamo concertado el 11 de marzo por $ 100.000.
   - Plazo: 120 días.
   - Tasa de interés anual contractualmente aplicada: 365% para el plazo de 30 días.
   - Reembolsable en 4 cuotas mensuales, iguales y consecutivas que incluyen interés y amortización de capital. Sistema de amortización progresivo sobre saldos.

A los fines de su resolución, como primer ejercicio efectuaremos sin omitir pasos intermedios, todos los cálculos, con el siguiente método:

a) Cálculo de la tasa equivalente diaria, lo que me permitirá calcular el devengamiento diariamente.

b) Cálculo de la cuota mensual que se pagará por término vencido. En este caso se trata de 4 cuotas iguales, consecutivas y equidistantes cronológicamente valuadas a la tasa de interés pactada.
c) Cálculo del interés total de la operación de financiación.
d) Cuadro de marcha de toda la operación.
Verificación de que la columna totalizadora de los intereses incluidos en cada cuota coincida con el cálculo del punto c).
e) Determinación del devengamiento mensual.
f) Comparación entre ambos métodos de devengamiento.

a) Cálculo de la tasa equivalente diaria

a) $i(30) = \dfrac{3{,}65 * 30}{365} = 0.30.$

$i(d) = (1+0.30)^{1/30} - 1 = 0.0087838$

b) Cálculo de la cuota mensual

b) $c = 100.000 * \dfrac{(1+0{,}30)^4 * 0.3}{(1+0{,}30)^4 - 1}$

$\therefore c = 46162.92.$

c) Cálculo del interés total de la operación de financiación

c) $I(0,4) = c * n - V(0) = 46162{,}92 * 4 - 100000 \rightarrow I(0,4) = 84.651{,}68$

d) Cuadro de marcha

No.	Fecha	V(k)	I(k)	t(k)	c(k)	T(k)
0	11.03	100.000	0	0	0	0
1	10.04	100.000	30.000	16.162,92	46.162,92	16.162,92
2	10.05	83.837,08	25.151,12	21.011,8	46.162,92	37.174,72
3	9.06	62.825,28	18.847,58	27.315,34	46.162,92	64.490,06
4	9.07	35.509,94	10.652,98	35.509,94	46.162,92	100.000

e) Cálculo del devengamiento

e.1) Sistema Exponencial

Recordaremos que para la determinación de los intereses devengados acumulados desde el inicio de la operación hasta el momento k se utilizar la siguiente fórmula.

$$I_k = \sum_{j=1}^{J} V_j \left[(1+i_d)^{k_j} - 1 \right]$$

en donde:

I_k: Intereses devengados desde el inicio de la operación hasta el momento k.

V_j: Saldo de deuda de la operación al inicio del período j-simo correspondiente a la tasa $i(d)_j$ vigente durante el período j.

$i(d)_j$: Tasa de interés equivalente diaria, en tanto por uno, vigente en el período j.

k_j: Número de días que se mantiene vigente la tasa $i(d)_j$. Se sabe que: j

$$\sum_{j=1}^{l} k_j = k$$

l: Número de tasas vigentes hasta los k días.

k: Número de días transcurridos desde la fecha de iniciación de la operación.
El máximo valor de k es el plazo de la operación expresado en días.

Interés a devengar en cada período mensual:

$I_{k;k-p} = I_k - I_{k-p}$

$I_{k;k-p}$: Intereses a devengar en una operación de Saldo \$ V. que se contabilizarán a fin de cada mes por los p días a contar desde la fecha del anterior devengamiento.

p: Número de días corridos desde el anterior devengamiento. Por lo general será entre 28 y 31 días.

Determinación de los intereses devengados acumulados

Al 31.03:
$I_{21} = 100000\ [\ (1 + 0.0087838)^{21} - 1\ ].$
$I_{21} = 20160.05.$

Al 30.04:
$I_{51} = 100000\ [\ (1 + 0.0087838)^{30} - 1] + 83837.08\ [(1+0.0087838)^{21} - 1\ ].$
$I_{51} = 46901.49.$

Al 31.05:
$I_{82} = 100000[\ (1+0.0087838)^{30} - 1\ ] + 83837.08\ [\ (1 + 0.0087838)^{30} - 1] +$
$62825,28\ [(1+0,0087838)^{22} - 1]$
$I_{82} = 68479.62.$

Al 30.06:
$I_{112} = 100000\ [\ (1+0.0087838)^{30} - 1] + 83837.08\ [\ (1+0.0087838)^{30} - 1] +$
$+ 62825.28\ [(1+0.0087838)^{30} - 1\ ] + 35509.94\ [(1+0.0087838)^{22} - 1].$
$I_{112} = 81532.04.$

Al 9.07:

$$I_{120} = 100000\,[(1+0.0087838)^{30} - 1] + 83837.08\,[(1+0.0087838)^{30} - 1] + 62825.28\,[(1+0.0087838)^{30} - 1] + 35509.94\,[(1+0.0087838)^{30} - 1]$$

$$I_{120} = 84651.68.$$

e.2 Sistema Lineal

Determinación de los intereses devengados acumulados.

La comunicación del Banco Central dispone que se podrán distribuir intereses linealmente cuando los del sub-período de capitalización, calculados previamente en forma exponencial (tal cual se efectuara en el cuadro de marcha) no sea mayor a 92 días.

Al 31.03:

$$I_{21} = \frac{30000 * 21}{30}$$

$$I_{21} = 21000.$$

Al 30.04:

$$I_{51} = 30000 + \frac{25151.12 * 21}{30}$$

$$I_{51} = 47605.78$$

Al 31.05:

$$I_{82} = 30000 + 25151.12 + \frac{18847.58 * 22}{30}$$

$$I_{82} = 68972.68$$

Al 30.06:

$$I_{112} = 30000 + 25151.12 + 18847.58 + \frac{10652.98 * 22}{30}$$

$$I_{112} = 81810.88.$$

Al 9.07:

$$I_{120} = 30000 + 25151.12 + 18847.58 + 10652.98.$$

$$I_{120} = 84651.68.$$

f) Comparación entre ambos métodos de distribución

Como se observa al finalizar el plazo total de la operación el monto de los intereses imputados a resultados es el mismo, no así la porción de los mismos que mensualmente se cargan a la cuenta "Intereses por préstamos". A continuación, se presenta un Cuadro resumen.

Fecha	Concepto	k	I_k		$I_k - I_{k-p}$	
			Exponenc.	Lineal	Exponenc.	Lineal
11.03	Otorgam. prést.	--	--	---	---	---
31.03	Balance Mensual	21	20.160,05	21.000	20.160,05	21.000
30.04	Balance Mensual	51	46.901,49	47.605,78	26.741,44	26.605,78
31.05	Balance Mensual	82	68.479,62	68.972,68	21.578,13	21.366,9
25.06	Balance Mensual	112	81.532,04	81.810,88	13.052,42	12.838,2
		120	84.651,68	84.651,68	3.119,64	2.840,8
			84.651,68	84.651,68	84.651,68	84.651,68

2) Efectuar el devengamiento de intereses mensuales para el caso de un Préstamo a tasa fija cuyas condiciones son:
   - Préstamo otorgado el 25-6 por $ 10.000
   - T.E.M. pactada: 5%
   - Cronograma de cancelación:
     25-7 $ 3.000
     24-8 $ 2.875
     23-9 $ 2.750
     23-10 $ 2.625

   Para ello realice:
   a) El cálculo del tanto equivalente diario necesario para devengar.
   b) El cuadro de marcha de la operación de préstamo
   c) El diagrama temporal
   d) Un cuadro de evolución de los intereses acumulados utilizando los datos del ejercicio y deduciendo la fórmula a aplicar para el cálculo del devengamiento
   e) Verifique que la distribución de los intereses en cada Balance Mensual arroje un acumulado igual al la suma de intereses contenidos en las n cuotas que cancelan el préstamo.

Recordemos que la registración contable para contabilizar las ganancias devengadas por intereses sobre los capitales correspondientes a préstamos es "Intereses por Préstamos"- Capítulo Resultados del Rubro Ingresos Financieros.

a) Cálculo del tanto equivalente diario

$$i_d = (1 + i_{30})^{1/30} - 1$$
$$i_d = (1 + 0{,}05)^{1/30} - 1 = 0{,}001627662$$

b) Cuadro de marcha

Valoración de los intereses a distribuir en los Balances Periódicos Mensuales

Para mejor ilustración del problema, confeccionamos el cuadro de marcha, el que nos proporcionará los intereses contenidos en cada cuota p-ésima y el saldo de deuda luego de abonada esa cuota, datos necesarios para armar el devengamiento.

Fecha	No	V(p)	I(p)	t(p)	c(p)	T(p)	V'(p)
25/6	0	10000					10000
25/7	1	10000	500	2500	3000	2500	7500
24/8	2	7500	375	2500	2875	5000	5000
23/9	3	5000	250	2500	2750	7500	2500
23/10	4	2500	125	2500	2625	10000	0
			1250	10000	11250		

c) Diagrama temporal

		B.M.			B.M.		B.M.		B.M.			B.M.
Fecha	25/6	30/6	1/7	25/7	31/7	24/8	31/8	23/9	30/9	22/10	23/10	31/10
momento:	0 ...	5	...	30	36	... 60	... 67	90	97		120	-
cómputo de días:	1 ...	6	...	31	37	... 61	... 68	91	98 -	120	120	120

V'(0) **V'(1)** **V'(2)** **V'(3)** **V'(4)**

Intereses Acumulados

•-- I(0;6)->

•--------------I(0;37)-------->

•------------------------I(0;68)----------->

•------------------------------------I(0;98)----------------->

•--I(0;120)------------------------>

Intereses Periódicos

$I_{junio} = I(0;6)$

$I_{julio} = I(6;37)$

$I_{agosto} = I(37;68)$

$I_{sept} = I(68;98)$

$I_{octubre} = I(98;120)$

d) Evolución de los intereses acumulados devengados —I(0;k)—

Ver cuadro en página siguiente.

	k	Concept	Intereses acumulados devengados Importe	I (0,k) Fórmula
25/6	0	Préstam	0	
30/6	6	B.Mes 6	$I(0,6) = 10000\ [\ (1+i_d)^6 - 1\ ] =$ $10000 * 0{,}009805798 = 98{,}06$	$I(0,6) = V'_0\ [(1+i_d)^6 - 1\ ]$
31/7	37	B.Mes 7	$I(0,37) = 10000 * i_{30} + 7500\ [\ (1+i_d)^7 - 1\ ]$ $10000*0{,}05+7500\ 0{,}0144942=$ $500+ 85{,}87 = 585{,}87$	$I(0,37) = V'_0 * i_{30} + V'_1\ [(1+i_d)^7 - 1\ ]$
31/8	68	B.Mes 8	$I(0,68) = 10000 * i_{30} + 7500 * i_{30} + 5000 *\ [\ (1+i_d)^8 - 1\ ]$ $10000*0{,}05+7500 *0{,}05 + 5000 * 0{,}013095718=$ $500+ 375+ 65{,}48 = 940{,}48$	$I(0,68) = V'_0 * i_{30} + V'_1 * i_{30} + V'_2\ [(1+i_d)^8 - 1\ ]$
30/9	98	B.Mes 9	$I(0,98) = 10000 * i_{30} + 7500 * i_{30} + 5000 * i_{30} + 2500\ [\ (1+i_d)^8 - 1\ ]$ $10000*0{,}05+7500 *0{,}05+5000 * 0{,}05 +2500 * 0{,}013095718=$ $500+375+250+32{,}74=1157{,}74$	$I(0,98) = V'_0 . i_{30} + V'_1 . i_{30} + V'_2 . i_{30} + V'_3\ \ [(1+i_d)^8 - 1\ ]$
23/10	120	Venc.de Préstam	$I(0,120) = 10000 * i_{30} + 7500 * i_{30} + 5000 * i_{30} + 2500 * i_{30}$ $10000*0{,}05+7500 *0{,}05+5000 * 0{,}05 +2500 * 0{,}05=$ $I(0,120) = 500+375+250+125= 1250$	$I(0,120) = V'_0 . i_{30} + V'_1 . i_{30} + V'_2 . i_{30} + V'_3 .\ i_{30}$
31/10	-	B.Mes 10	**$I(0,120)=1250$**	

Del presente cuadro, surge la fórmula general:

$$\boxed{I(0;k) = \sum_{j=1}^{l} V'_j\ [\ (1 + i_d)^{kj} - 1\ ]}$$

Los resultados a imputar en el Balance de cada mes, se determinan en el cuadro siguiente:

Fecha	k	Concepto	Intereses del mes t Importe		$I_t = I(0;k) - I(0;k-p)$ Fórmula
25/6	0	Otorgam.Préstam	0		
30/6	6	Bce del Mes 6	$I_{junio} = I(0,6) =$	98,06	$I_{junio} = I(0,6)$
31/7	37	Bce del Mes 7	$I_{julio} = 585{,}87 - 98{,}06 =$	487,81	$I_{julio} = I(0,37) - I(0,6)$
31/8	68	Bce del Mes 8	$I_{agosto} = 940{,}48 - 585{,}87 =$	354,61	$I_{agosto} = I(0,68) - I(0,37)$
30/9	98	Bce del Mes 9	$I_{septiembre} = 1157{,}74 - 940{,}48 =$	217,26	$I_{septiembre} = I(0,98) - I(0,68)$
23/10	120	Cancel. del Prést.	$I_{octubre} = 1250 - 1157{,}74 =$	92,26	$I_{octubre} = I(0,120) - I(0,98) =$
31/10		Bce del Mes 10		---	---
			Total de intereses imputados =	1250,00	

Del cuadro, se desprende la fórmula:

$$\boxed{I_t = I(0;k) - I(0;k-p)}$$

Por el método más simplificado los cálculos son:

$I_{junio} = I\,(0{,}6) = \quad 10000\,[\,(1+\acute{i}_d)^6 - 1\,] = \quad 10000 * 0{,}009805798 = 98{,}06$

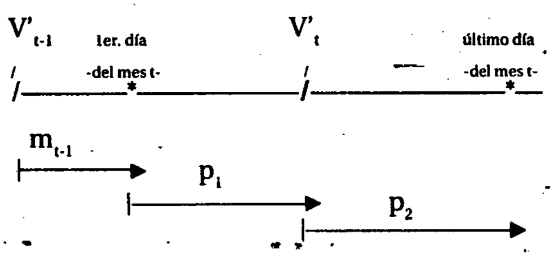
$I_{julio} = I\,(6{,}37) = \quad 10000\,(1+\acute{i}_d)^6\,[\,(1+\acute{i}_d)^{24} - 1\,] + 7500\,[(1+\acute{i}_d)^7 - 1\,]$
$10098{,}06 * 0{,}039803893 + 7500 * 0{,}01144942$
$401{,}94 + 85{,}87 = 487{,}81$

$I_{agosto} = I\,(37;68) = 7500\,(1+\acute{i}_d)^7\,[\,(1+\acute{i}_d)^{23} - 1\,] + 5000\,[(1+\acute{i}_d)^8 - 1\,]$
$7585{,}87 * 0{,}038114194 + 5000 * 0{,}013095717$
$289{,}13 + 65{,}48 = 354{,}61$

$I_{septiembre} = I\,(68;98) = \quad 5000\,(1+\acute{i}_d)^8\,[\,(1+\acute{i}_d)^{22} - 1\,] + 2500\,[(1+\acute{i}_d)^8 - 1\,]$
$5065{,}48 * 0{,}036427241 + 2500 * 0{,}013095717$
$184{,}52 + 32{,}74 = 217{,}26$

$I_{octubre} = I\,(98;120) = \quad 2500\,(1+\acute{i}_d)^8\,[\,(1+\acute{i}_d)^{22} - 1$
$2532{,}74 * 0{,}036427241 = 92{,}26$

$I(0;120) = 1250$



$$I_t = V'_{t-1}\,(1+i_d)^{m_{t-1}}\,[\,(1+i_d)^{p1} - 1\,] + V'_t\,[\,(1+i_d)^{p2} - 1\,]$$

e) Cuadro síntesis de la operación de préstamo reembolsable en cuotas.

Fecha	días transc. -k-	Concepto	I(0;k)	I_t = I(0;k) - I(0;k-p)
25/6	0	Préstamo	0	
30/6	6	Balance del Mes	98,06	98,06
31/7	37	Balance del Mes	585,87	487,81
31/8	68	Balance del Mes	940,48	354,61
30/9	98	Balance del Mes	1157,74	217,26
23/10	120	Venc. del Prést.	1250,00	92,26
			Total	1250,00

3) Realizar el devengamiento de intereses mensuales para el caso del mismo préstamo anterior siguiendo el criterio lineal. Luego, confeccione el cuadro de valores con ambos criterios.

El cálculo del devengamiento del mes siguiendo la ley financiera a interés simple resulta muy sencilla, pues es un mero cálculo de proporciones. En el caso de las operaciones reeembolsables en cuotas, basta proporcionar directamente el total de intereses cobrados en cada cuota, que surge de la columna pertinente en el cuadro de marcha del préstamo, y en el caso de operaciones de pago único es la simple proporción de los intereses generados por el depósito, considerando solamente los días.

Veamos a continuación, el ejemplo del préstamo del Punto 2.1.3.1.

Diagrama temporal

		B.M.			**B.M.**			**B.M.**		**B.M.**		
Fecha	25/6	**30/6**	1/7	25/7	**31/7**		24/8	**31/8**	23/9	**30/9**		23/10
momento:	0 ...	5	...	30	36	...	60	... 67	90	97		
cómputo de días:	1 ...	**6**	...	31	**37**	...	61	... **68**	91	**98**	-	**120**
		c_1			c_2			c_3		c_4		

I(0;30)=500 I(30;60)=37 I(60,90)=250 I(90,120)=125

Intereses Acumulados
•I(0;6)->
•---------I(0;37)----------->
•-----------------I(0;68)------------------>
•--------------------------I(0;98)--------------------------->
•--I(0;120)-------------------->

Intereses Periódicos

$I_{junio} = I(0;6)$

$I_{julio} = I(6;37)$

$I_{agosto} = I(37;68)$

$I_{sept} = I(68;98)$

$I_{octubr} = I(98;120)$

Evolución de los intereses acumulados devengados - I(0;k)

Fecha	k	Concepto	Intereses acumulados devengados Importe	I (0,k) Fórmula
25/6	0	Préstamo	0	
30/6	6	B.Mes 6	I (0,6)= 500 * 6/30 = 100	I(0,6)= I(0,30) *6/30
31/7	37	B.Mes 7	I (0,37)=500 + 375*7/30 = 587,50	I (0,37)= I(0,30) + I(30;60)*7/30
31/8	68	B.Mes 8	I (0,68)= 500 + 375+ 250*8/30 = 941,67	I (0,68)= I(0,30) + I(30;60) + I(60;90) *8/30
30/9	98	B.Mes 9	I (0,98)= 500+375+ 250+ 125*8/30 = 1158,33	I (0,98)=I(0,30) + I(30;60) + I(60;90) +I(90;120) *8/30
23/10	120	Venc.Prést	I (0,120)= 500+375+250+125= 1250	I (0,120)= I(0,30) + I(30;60) + I(60;90) + I(90;120)
31/10	-	B.Mes 10	**I (0,120)=1250**	

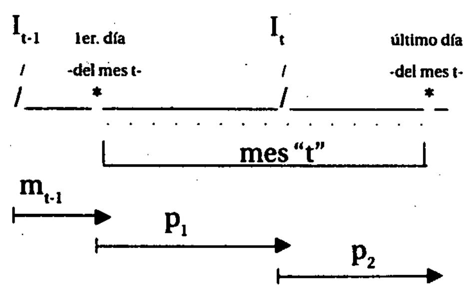
Los resultados a imputar en el Balance de cada mes, se determinan en el cuadro siguiente:

Fecha	k	Concepto	Intereses del mes t Importe		I_t = I(0;k) - I(0;k-p) Fórmula
25/6	0	Otorgam.Préstam	0		
30/6	6	Bce del Mes 6	I_{junio}= I(0,6)	100,00	I_{junio} = I(0,6)
31/7	37	Bce del Mes 7	I_{julio} = 587,50-100=	487,50	I_{julio} = I (0,37) - I (0,6)
31/8	68	Bce del Mes 8	I_{agosto} = 941,67 - 587,50 =	354,17	I_{agosto} = I (0,68) - I (0,37)
30/9	98	Bce del Mes 9	$I_{septiembre}$ = 1158,33 - 941,67 =	216,66	$I_{septiembre}$ = I (0,98) - I (0,68)
23/10	120	Cancel. del Prést.	$I_{octubre}$ = 1250- 1158,33 =	91,67	$I_{octubre}$ = I (0,120) - I (0,98)=
31/10		Bce del Mes 10	---		---
			Total de intereses imputados=	1250,00	

Del cuadro, se desprende la fórmula:

$$\boxed{I_t = I(0;k) - I(0;k\text{-}p)}$$

Por el método simplificado los cálculos son:



I_{junio}= I(0;6) = I(0;30) * 6/30 = 100

I_{junio}= I_{junio} * 6/30 = 100

I_{julio}= I(6;37) = I(0;30) * 24/30 + I(30;60)* 7/30 = 500 * 24/30+375*7/30= 400 + 87,5 = 487,50

$I_{julio} = I_{junio} * 24/30 + I_{julio} * 7/30 = 100$

I_{agosto}= I(37;68) = I(30;60) * 23/30 + I(60;90) 8/30 = 375*23/30 + 250*8/30= 287,50+ 66,67 = 354,17

I_{sept}= I(68;98) = I(60;90) .22/30 + I(90;120) * 8/30 = 250 * 22/30 + 125*8/30= 183,33+33,33 = 216,66

$I_{sept} = I_{agosto} * 22/30 + I_{sept} * 8/30$

I_{oct}= I(98;120) = I(90;120) . 22/30 = 125 * 22/30 = 91,66

$I_{oct} = I_{sept} * 22/30$

Entonces para el mes "t" la fórmula es la siguiente:

$$\boxed{I_t = I_{t-1} * p_1 + I_t * p_2}$$

Cuadro síntesis de la operación de préstamo reembolsable en cuotas.

Fecha	días transc. -k-	Concepto	I(0;k)	I_t = I(0;k) - I(0;k-p)
25/6	0	Préstamo	0	
30/6	6	Balance del Mes	100	100
31/7	37	Balance del Mes	587,50	487,5
31/8	68	Balance del Mes	941,67	354,17
30/9	98	Balance del Mes	1158,33	216,66
23/10	120	Venc. del Prést..	1250,00	91,67
			Total	**1250,00**

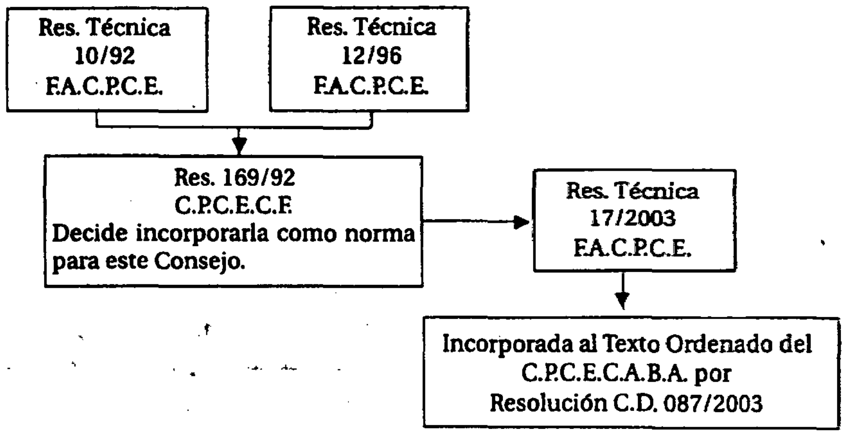
Cuadro comparativo de devengamiento
Convención lineal y exponencial

			Lineal	Exponencial	Lineal	Exponencial
Fecha	k	Concepto	I(0;k)		I_t = I(0;k) - I(0;k-p)	
25/6	0	Préstamo	0	0	0	
30/6	6	Balance Mens	100,00	98,06	100,00	98,06
31/7	37	Balance Mens	587,50	585,87	487,50	487,81
31/8	68	Balance Mens	941,67	940,48	354,17	354,61
30/9	98	Balance Mens	1158,33	1157,74	216,66	217,26
23/10	120	Venc del Prést.	**1250,00**	**1250,00**	91,67	92,26
					1250,00	**1250,00**

Lo importante a tomar en cuenta es que, como ya se mencionara anteriormente, una vez elegido un método de devengamiento deberá seguirse el mismo, de forma tal de no alterar los resultados finales.

DEVENGAMIENTO EN INVERSIONES A LARGO PLAZO
VALUACIÓN Y EXPOSICIÓN DE INVERSIONES

Normativa y antecedentes



La Resolución Técnica N° 17 sobre Normas Contables Profesionales de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires establece en el punto 5.7.1 como criterio general de valuación de las "Inversiones en títulos de deuda a ser mantenidos hasta su vencimiento y no afectados por coberturas" que la medición contable de estos activos se efectuará considerando:

a) La medición original del activo.

b) *La porción devengada de cualquier diferencia entre ella y la suma de los importes a cobrar a sus vencimientos, calculada exponencialmente con la tasa interna de retorno determinada en el momento de la medición inicial sobre la base de ésta y de las condiciones oportunamente pactadas.*

c) Las cobranzas efectuadas.
Establece en su punto 5.7.2 como condiciones para aplicar el criterio general de valuación que el tenedor de los títulos los haya comprado con un propósito distinto al de cobertura de los riesgos inherentes a determinados pasivos; *que haya decido conservarlos hasta su vencimiento,* aunque antes de él se presentaren coyunturas favorables para la venta; tenga la capacidad financiera para hacerlo y no haya contratado instrumentos derivados que actúen como cobertura de las variaciones del valor de los títulos, atribuibles al riesgo de tasa de interés.

Sus antecedentes se remontan a las Resoluciones Técnicas N° 10/92 y 12/96 de la Federación Argentina de Consejos Profesionales de Ciencias Económicas (F.A.C.P.C.E) y la Resolución del C.P.C.E.C.F. N° 169/92 que aceptó para Capital la aplicación de normas contables especiales relativas a valuación y exposición de las *"Inversiones en títulos de deuda públicos o privados con cotización en bolsas o mercados de valores" que reúnen determinadas características.*

Retornando a los orígenes, las resoluciones técnicas citadas —N° 10 y 12— en su punto 3.12 establecían la siguiente valuación para las *"Inversiones no corrientes en títulos de deuda públicos o privados con cotización en bolsas o mercados de valores":*

"...Cotización a la fecha de cierre neta de los gastos estimados de venta (valor neto de realización). Cuando el ente ha decidido mantener estas inversiones en el activo *hasta su vencimiento y tiene la capacidad financiera para* poder hacerlo deberá *valuarlas al costo acrecentado en forma exponencial en función de su tasa interna de retorno* al momento de su incorporación al activo y del tiempo transcurrido desde ese momento. Si se trata de títulos con tasa de interés variable, para el cálculo de la referida T.I.R. no se deberá considerar la incidencia de los intereses, los cuales deberán ser devengados en cada período en función de la tasa vigente. Adoptado este criterio de valuación, se aplicará también para la porción corriente de estas inversiones, la cual deberá ser expuesta como tal. En nota a los estados contables deberá informarse el valor neto de realización de estas inversiones y la diferencia con el valor contabilizado".

Es decir que aquellos bonos que las compañías mantengan en cartera hasta su expiración y tienen la capacidad financiera para hacerlo serán valuados al momento "k" de la siguiente forma:

Valuación al momento "k"
• El bono aún no generó flujos de fondos → al valor de costo más intereses devengados.
• El bono ya generó flujos de fondos → valor de costo neto de flujos de fondos generados por el bono, más los intereses devengados.

Los intereses corridos se determinarán entonces, en función a la T.I.R. encontrada en el momento de la compra, valor único de la inversión pues no resultará modificado por las oscilaciones de los precios de mercado ya que es condición que el mismo deba mantenerse y tampoco se verá modificado por la variación en la cuantía de los servicios financieros, ya que también queda establecida dicha valuación para el caso de bonos de renta fija. Sin embargo, muchos de ellos, resultan ser de renta variable pero perfectamente cuantificable al ser dicha renta previamente establecida en los propios contratos de emisión.

Esta norma también se aplica para entidades financieras quienes por Comunicación "A" 3278 del 29/05/2001 del Banco Central de la República Argentina deben valuar las "Tenencias de títulos valores en cuentas de inversión" "...al valor de costo acrecentado hasta el vencimiento de cada servicio, en forma exponencial en función de su tasa interna de retorno y del tiempo transcurrido desde su incorporación a esas cuentas". Establece la citada norma que este criterio de contabilización se aplicará también sobre las tenencias de títulos incorporadas a estas cuentas con anterioridad al 1/06/01, considerando como base el valor registrado al 31/05/2001 resultante de la utilización de los procedimientos de valuación hasta entonces admitidos y la tasa interna de retorno que surja al 31/05/2001 para dichos títulos.

Metodología para la valuación:

a) Esquema del flujo de fondos que genera la inversión, considerando:
   - el primer flujo negativo al representar el desembolso efectuado por la compañía y
   - los flujos netos futuros son los retornos generados por la inversión, los que comprenden servicios de amortización y de interés conjuntamente o no.

b) Planteo de la ecuación de determinación de la tasa interna de retorno —TIR—.

c) Cuadro de valuación del activo en función de la evolución periódica de los flujos. A partir del mismo, se determinarán fórmulas generales.

   Seguramente el momento en que necesitamos valuar el mismo no coincide con el cuadro de evolución del activo; razón por la cual confeccionaremos un cuadro en donde se exponen con intervalos, generalmente más pequeños los valores contables. Una buena contabilidad obligaría a llevar un devengamiento diario. Nosotros efectuaremos un devengamiento mensual y por procedimiento manual ajustaremos al día en que necesitamos la valuación. En una planilla de cálculo resulta rápida y fácil la construcción de una tabla de valores.

d) Cálculo del valor contable al momento "p" determinado a partir del cuadro anterior.

Aplicación

1) Un bono emitido por el Gobierno el 17/9 del año 0 en las siguientes condiciones:
   V.N.: U$s 50.000
   Plazo: 2 años
   Amortización: semestral, constante. Alícuota fija del 50%. Primer pago: 17/3 del año 2 .
   Servicio financiero: semestral TNA=8% para ese plazo. Primer pago: 17/3 del año 1.
   La compañía XX adquiere este bono de renta fija con fecha 17/9/del año 1, inmediatamente después de haberse pagado el cupón N° 2, por un precio de U$s 48.510.
   Determinar el valor del activo para cada uno de los momentos.

Resolución:

a) *Esquema del flujo de fondos.*

17/9/00		17/9/01	17/3/02	17/9/02
/	//	/	/	/
		F.V.		
			25000	25000
			2000	1000
			27000	26000

b) *Determinación de la T.I.R.*

El Valor Técnico es el Valor Residual más el Cupón Corrido yen nuestro ejemplo, al momento de valuación -17/9/01— el valor residual coincide con el Nominal, pues no tiene cupón corrido ni amortización pagada. En el caso de compra del bono a la par, la tasa interna de rentabilidad —TIR— será la tasa establecida en el contrato —i—. Como el Precio de Mercado resulta inferior a su valor técnico, ello significa que el titulo se negoció bajo la par con un desagio del 2,98% = (1 - P.M./VT) * 100.

Para ello, planteamos la ecuación del valor de la TIR, sabiendo que TIR > i

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{c\ (k)}{(1+i)k}$$

En nuestro ejemplo, tenemos:

$$-48510 + \frac{27000}{(1+TIR^{*}_{180})^{1}} + \frac{26000}{(1+TIR_{180})^{2}} = \qquad TIR_{180} \doteq 0{,}0615$$

$$TIR_{180} > 0{,}04$$

$$i^{*}_{30} = (1 + 0{,}0615) \quad - 1 = 0{,}01$$

O bien,

$$-48510 + \frac{27000}{(1+TIR_{30})^{6}} + \frac{26000}{(1+T1R_{30})^{12}} = \qquad TIR_{30} = 0{,}009997 \approx 0{,}01$$

c) *Cuadro de evolución del activo en función a la periodicidad de los flujos de fondos*

				Flujos de fondos reales			
Fecha	k	V(k)	I(k)	I(k)	t(k)	c((k)	V'(k)
17/9/01	0	48510	0	0	0	0	48510
17/3/02	1	48510	2984	-2000	-25000	-27000	24494
17/9/02	2	24494	1506	-1000	-25000	-26000	0

Hallaremos las fórmulas que corresponden a los activos, en función de la periodicidad de los retornos que generan los mismos. En donde:

$V_0 = V'_0$; $V_1 = V'_0$; $V_2 = V'_1$ $\rightarrow$ $\boxed{V_k = V'_{k-1}}$

$V'_0 = V_0$
$V'_1 = V_1 + I_1 - c_1$
$V'_1 = V_1 + V_1 * TIR - c_1$ $\qquad V'_1 = 48510+48510*0{,}0615-27000=24494$
$V'_1 = V_1 (1 + TIR) - c_1$ $\qquad V'_1 = 48510(1+0{,}0615) \quad -27000=24494$
$V'_1 = V_0 (1 + TIR) - c_1$

$V'_2 = V_2 + I_2 - c_2$
$V'_2 = V_2 + V_2 * TIR - c_2$ $\qquad V'_2 =24494+24494*0{,}0615-26000=24494$
$V'_2 = V'_1 (1 + TIR) - c_2$ $\qquad V'_2 =24494(1+0{,}0615)-26000=0$
$V'_2 = [V_0 (1 + TIR) - c_1] (1 + TIR) - c_2$
$V'_2 = V_0 (1 + TIR)^2 - c_1 (1 + TIR) - c_2$

o sea que para un período "k" determinado en forma recurrente nos queda:

$$V'_k = V'_{k1} (1+TIR) - c_k$$

0 1 k k+1 k+2 n-1 n
/______/____//___/________/__________/___//____/________/
c_1 ... c_k c_{k+1} c_{k+2} c_{n-1} C_n

V'_k

De otra forma:

- método retrospectivo:

$$V'_k = V_0 (1 + TIR)^k - c_1 (1 + TIR) - ... - c_k$$

$$V'_k = V_p (1 + TIR)^k - \sum_{p=1}^{k} c_p (1 + TIR)^{k-p}$$

-método prospectivo:

$$V'k = \sum_{p=k+1}^{n} \frac{c_p}{(1 + TIR)^{p-k}}$$

d) *Los valores contables de los activos —V(k)— son:* $ 48.510 al 17-9-01, o sea al costo en el momento de la incorporación y posteriormente $ 24.494 al 17-3-02 luego de cobrado el cupón respectivo y con valor cero al 17-9-02 pues el título con el último cupón se extinguió.
Pero, ¿qué sucede si necesitamos valuar en otro momento, por ejemplo fin de cada mes? Por lo menos las entidades financieras tienen

como se expuso anteriormente, la obligación de presentar balances mensuales y esta norma también resulta aplicable para los activos financieros que las entidades mantengan en su cartera como Cuentas de Inversión (Investment Account).

Por lo tanto, confeccionaremos en función de la TIREM el cuadro de evolución mensual del activo y posteriormente interpolaremos los resultados para determinar las cuantías al último día de cada mes.

Evolución mensual de los valores contables de los activos

Independientemente de la frecuencia con que retornan los cupones generados por la inversión, la necesidad de disponer con información mensual nos obliga a confeccionar el cuadro con dicha periodicidad. A partir del mismo, a posteriori se determinarán los valores contables a fin de mes. En realidad, si disponemos de una Planilla de Cálculo, lo más práctico es confeccionar un cuadro de evolución diaria, utilizando la tasa interna diaria equivalente a la tasa interna de retorno. De esta forma contamos con los valores contables a cada día del mes. En la columna **V'(k+ f_k)** se vuelcan los valores a fin de mes.

	mes			Flujos de fondos de la operac				días		
Fecha	k	V(k)	I(k)	I(k)	t(k)	c((k)	V'(k)	f_k	**V'(k+ f_k)**	
17/9/01	0	48510					48510			
30/9/01								14	**48736**	$48510 * (1+i_d)^{14} = 48736$
17/10/01	1	48510	485				48995			
31/10/01								15	**49239**	$48995 * (1+i_d)^{15} = 49239$
17/11/01	2	48995	490				49485			
30/11/01								14	**49715**	$49485 * (1+i_d)^{14} = 49715$
17/12/01	3	49485	495				49980			
31/12/01								15	**50244**	$49980 * (1+i_d)^{15} = 50244$
17/1/02	4	49980	499				50479			
31/1/02								15	**50731**	$50479 * (1+i_d)^{15} = 50479$
17/2/02	5	50479	505				50984			
28/2/02								12	**51187**	$50984 * (1+i_d)^{12} = 51187$
17/3/02	6	50984	510	-2000	-25000	-27000	24494			
31/3/02								15	**24616**	$24494 * (1+i_d)^{15} = 24616$
17/4/02	7	24494	245				24739			
30/4/02								14	**24853**	$24739 * (1+i_d)^{14} = 24853$
17/5/02	8	24739	247				24986			
31/5/02								15	**25111**	$24986 * (1+i_d)^{15} = 25111$
17/6/02	9	24986	250				25236			
30/6/02								14	**25353**	$25236 * (1+i_d)^{14} = 25353$
17/7/02	10	25236	252				25488			
31/7/02								15	**25615**	$25488 * (1+i_d)^{15} = 25615$
17/8/02	11	25488	255				25743			
31/8/02								15	**25871**	$25743 * (1+i_d)^{15} = 25871$
17/9/02	12	25743	257	-1000	-25000	-26000	0		**0**	

Del cuadro precedente, surge la fórmula de valuación a un momento dado de una inversión en bonos:

siendo f_k: número de días transcurridos desde la valuación en el mes k hasta fin de mes.

$$V'(k+f_k)=V'_k\,(1+TIR_d)^{f_k}$$

Capítulo XII

Depreciación de activos

Objetivo

- ➢ Determinar los cargos en concepto de depreciación que periódicamente se registran en las cuentas de resultados y en la del activo tangible con el nombre de "Amortizaciones" reconociendo algún método.
- ➢ Confeccionar los cuadros de valores contables de depreciación periódica y acumulada.
- ➢ Crear otros métodos de amortización de acuerdo a las características del activo y en función a las normativas contables y fiscales.

Concepto

Depreciación: es la disminución del valor o del precio de un bien.

La vida útil de un bien, por la acción del tiempo y el uso que se le va dando cambia. El bien va perdiendo su valor por deterioro físico normal, fatiga propia del uso y por antigüedad u obsolescencia. Si bien algunos los llaman "Activos Fijos" debemos excluir los Terrenos por no amortizarse pues su vida útil es indefinidamente larga y por otro lado, debemos incluir los Rodados que son amortizables y no son activos fijos.

También están sujetos a depreciación aquellos activos que reflejan un valor relacionado con la posibilidad futura de generar ganancias, tales como Patentes, Llave de Negocio.

La obsolescencia se observa por ejemplo en los equipos de computación como en los programas o Software utilizados.

Excluimos los bienes sujetos a "agotamiento" y no depreciación. Ellos son los Recursos Naturales (minas, yacimientos de petróleo, gas, entre otros.) que son aquellos bienes sujetos a "agotamiento", ya que se van consumiendo a medida que se siguen explotando y por lo tanto, van perdiendo progresivamente su valor.

Depreciación es el proceso contable en donde el coste de los activos se distribuyen —por algún método— a lo largo de su vida útil transformándose en cuenta de resultados.

A título informativo, se aclara que antiguamente se contabilizaba con el término de "Amortización" entendiéndola como el proceso de contrarrestar el el efecto de la depreciación del bien.

La recuperación del bien y su reposición depende en gran medida de la eficiencia del método de depreciación.

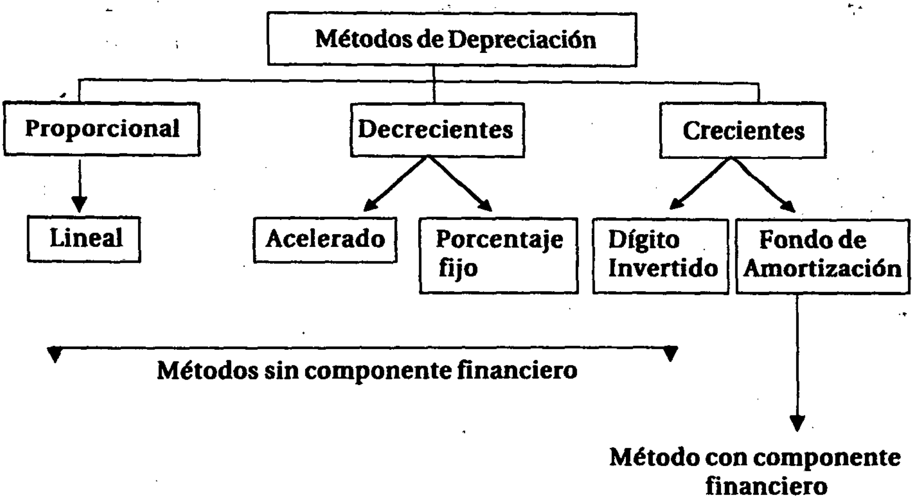
Bienes sujetos a depreciación	
✧ **Rubro Bienes de Uso son:** ✧ *"Bienes Tangibles"* · Maquinarias · Instalaciones · Edificios · Muebles · Rodados	✧ **"Activos Intangibles"** · Bienes Inmateriales · Cargos diferidos

Podemos por ejemplo citar la Resolución técnica N° 17 sobre "Normas Contables profesionales", entre otras, Texto Ordenado por Resolución C.D. n° 087/2003 del C.P.C.A.B.A.que establece en su punto 5.13.3 "Depreciaciones" que:

"La depreciación se asignará *a los períodos de la vida útil del bien sobre una base sistemática que considere la forma en que se consumen los beneficios producidos por el activo.* Si esto no fuese posible, se aplicará el método de línea recta".

En el caso de "Costos de Organización y costos pre-operativos" dispone la norma citada que para calcular las depreciaciones, se presume sin admitir prueba en contrario, que su vida económica no es superior a los 5 años".

Veremos los siguientes métodos de depreciación:



Nomenclatura:

C: Coste original del bien

VR: Valor residual, valor de salvamento, valor de rescate del bien al fin de su vida útil.

n: vida útil del bien, expresada en años

W: valor de uso del bien. Se interpreta como la diferencia entre el coste y el valor residual

$$W = C - VR$$

d(p): Depreciación periódica, generalmente es el Cargo por depreciación anual

D(p): Depreciación acumulada hasta el período p.

D(n): Depreciación acumulada total

$$D(0;n) = W$$

VC(p): Valor contable hasta el período p. Representa el valor en libros pendiente de depreciación.

DEPRECIACIONES SIN COMPONENTE FINANCIERO

a) Sistema de depreciaciones lineal o uniforme o de la línea recta o directo

El cargo periódico por depreciación es una cuantía constante a distribuir periódicamente a lo largo de la vida útil del bien; prescindiendo de cuánto sea utilizado el activo.

Entonces:

La depreciación periódica se obtiene de la misma forma que la amortización periódica en el sistema de préstamo con cuotas de capital o amortización constante (sistemas de préstamo alemán, directo, alemán promedio) o sea dividiendo por la cantidad de años de vida útil estimada del bien —n— el valor de uso del bien —W—

$$d(p) = \frac{W}{n} = \frac{C - VR}{n}$$

La depreciación acumulada hasta el período p, resulta ser p veces la depreciación de un período, como la amortización acumulada en los sistemas de préstamos mencionados. Representa una progresión aritmética.

$$D(p) = p \cdot d(p) = p \cdot \frac{W}{n} = p \cdot \frac{(C - VR)}{n}$$

El **valor contable** surge como diferencia entre el valor de costo y la depreciación acumulada.

$$VC(p) = C - D(p) = C - p \cdot \frac{W}{n} = C - p \cdot \frac{(C - VR)}{n}$$

$$VC(n) = C - D(n) = C - n \cdot \frac{W}{n} = C - n \cdot \frac{(C - VR)}{n} = VR$$

Sistema de depreciaciones variables

b) Método acelerado o de la suma de dígitos

Es un método decreciente, más comúnmente denominado método de la suma de dígitos o suma de las cifras de los períodos o años de vida.

El cargo periódico por depreciación es una cuantía variable, decreciente que se reparte en una fracción mayor en los primeros años.

Como se observará, cada cálculo en este método se realiza sobre el valor W =(C – Cn) siendo el valor residual nuestra base fija de cálculo.

Entonces:

La **depreciación periódica —d(p)—** es una fracción del valor de uso del bien. Cada fracción como años de vida útil tenga el activo sujeto a depreciación se obtiene de la siguiente forma:

Primero, para ir formando la fracción que representa la depreciación periódica para un bien de $1 de valor de uso, se numera cada año del activo hasta llegar a n:

$$1; 2; \ldots ; n-2 ; n-1; n.$$

Luego se reordena la serie en orden decreciente.

Cada uno de estos dígitos numerados de n a 1, forman el *numerador* de la fracción:

$$n; n-1 ; n-2; \ldots ; 2; 1$$

Luego se suman estos dígitos. Esta suma dará un valor determinado que constituye el *denominador* de la fracción y que se puede hallar mediante la fórmula de la suma de una progresión aritmética.

$$S = \frac{(1+n)\,n}{2}$$

$$S = \frac{n+n^2}{2}$$

Así tenemos las siguientes fracciones que representan las distintas alícuotas de depreciación o cada una de las depreciaciones periódicas, para un bien de una unidad monetaria.

	1er. año	2do. año	p-ésimo año...	anteúlt. año	último año
Depreciación periódica:	$\dfrac{n}{\frac{n+n^2}{2}}$;	$\dfrac{n-1}{\frac{n+n^2}{2}}$;...	$\dfrac{n-p+1}{\frac{n+n^2}{2}}$;... ...	$\dfrac{2}{\frac{n+n^2}{2}}$;	$\dfrac{1}{\frac{n+n^2}{2}}$

Observemos que se trata de una sucesión aritmética decreciente con una razón igual al último término de la sucesión.

Para un bien cuyo valor de uso sea distinto a una unidad monetaria, solo habrá que multiplicar cada fracción por el valor de uso del bien.

$$d(p) = W \cdot \frac{(n-p+1)}{\frac{n+n^2}{2}}$$

D(p) = La **depreciación acumulada** hasta el período p, considerando un valor de uso de una unidad monetaria

W=1	0	1	2	...	p-1	p	...	n-2	n-1	n
		$d(1)$	$d(2)$	...	$d(p-1)$	$d(p)$	...	$d(n-2)$	$d(n-1)$	$d(n)$
		$\frac{n}{\frac{n+n^2}{2}}$	$\frac{n-1}{\frac{n+n^2}{2}}$	...	$\frac{n-p}{\frac{n+n^2}{2}}$	$\frac{n-p+1}{\frac{n+n^2}{2}}$	...	$\frac{3}{\frac{n+n^2}{2}}$	$\frac{2}{\frac{n+n^2}{2}}$	$\frac{1}{\frac{n+n^2}{2}}$

D(p)

Para calcular la depreciación acumulada hasta el período "p" resolvemos la suma de p términos, utilizando la fórmula de suma de una progresión aritmética.

si $S = (a_1 + a_m)\frac{m}{2}$

En nuestro caso, tenemos que $a_1 = \frac{n}{\frac{n+n^2}{2}}$ $\quad m = p \quad a_m = \frac{n-p+1}{\frac{n+n^2}{2}}$

$$D(p) = \frac{p}{2} \cdot \left[\frac{n}{\frac{n+n^2}{2}} + \frac{n-p+1}{\frac{n+n^2}{2}} \right]$$

$$D(p) = \frac{p}{2} \cdot \left[\frac{(2n-p+1)}{\frac{n+n^2}{2}} \right]$$

$$D(p) = p \quad \frac{(2n-p+1)}{n+n^2}$$

Si el valor de uso es W, entonces la depreciación acumulada será:

$$D(p) = W \cdot p \cdot \frac{(2n-p+1)}{n+n^2} \qquad \text{siendo } W = C - VR$$

El **valor contable** surge como diferencia entre el valor de costo y la depreciación acumulada.

$$VC(p) = C - D(p) = C - \left[(C - VR) \cdot p \cdot \left(\frac{2n - p + 1}{n + n^2} \right) \right]$$

c) Método de suma de dígitos invertido

Este es una variante del método tradicional comúnmente denominado "de la suma de dígitos o suma de las cifras de los períodos o años de vida". Se diferencia en el numerador de la fracción que representa la carga por depreciación, el que en este caso es creciente y en el método tradicional es decreciente.

En este caso entonces, el año de depreciación representa el numerador de la fracción.

Como se observará, igual que en el método anterior, cada cálculo se realiza sobre el valor W =(C – VR) siendo el valor residual nuestra base fija de cálculo.

Podemos definir:

La **depreciación periódica —d(p)—** como una fracción del valor de uso del bien. Cada fracción como años de vida útil tenga el activo sujeto a depreciación se obtiene de la siguiente forma:

Primero, para ir formando la fracción que representa la depreciación periódica para un bien de $1 de valor de uso, se numera cada año del activo hasta llegar a n:

$$1;\ 2;\ \ldots\ ;\ n-2\ ;\ n-1;\ n$$

Cada uno de estos dígitos numerados de 1 a n , forman el *numerador* de la fracción.

Luego se suman estos dígitos. Esta suma dará un valor determinado que constituye el *denominador* de la fracción y es igual a $\frac{n + n^2}{2}$.

Así obtenemos cada una de las fracciones que representan las distintas alícuotas de depreciación o cada una de las depreciaciones periódicas, para un bien de una unidad monetaria.

	1er. año	2do. año	p-ésimo año...	anteúlt. año	último año
Depreciación periódica:	$\frac{1}{\frac{n+n^2}{2}}$;	$\frac{2}{\frac{n+n^2}{2}}$;...	$\frac{p}{\frac{n+n^2}{2}}$;...	$\frac{n-1}{\frac{n+n^2}{2}}$;	$\frac{n}{\frac{n+n^2}{2}}$

Para un bien cuyo valor de uso sea distinto a una unidad monetaria, solo habrá que multiplicar cada fracción por el valor de uso del bien.

$$d(p) = W \cdot \frac{p}{\frac{n+n^2}{2}}$$

D(p) = La **depreciación acumulada** hasta el período p, considerando un valor de uso de una unidad monetaria.

0	1	2		p-1	p		n-2	n-1	n
W=1									
	d(1)	d(2)	...	d(p-1)	d(p)	...	d(n-2)	d(n-1)	d(n)
	$\frac{1}{\frac{n+n^2}{2}}$	$\frac{2}{\frac{n+n^2}{2}}$	...	$\frac{p-1}{\frac{n+n^2}{2}}$	$\frac{p}{\frac{n+n^2}{2}}$	...	$\frac{n-2}{\frac{n+n^2}{2}}$	$\frac{n-1}{\frac{n+n^2}{2}}$	$\frac{n}{\frac{n+n^2}{2}}$

$\underbrace{\hspace{6cm}}_{D(p)}$

Para calcular la depreciación acumulada hasta el período "p" resolvemos la suma de p términos, utilizando la fórmula de suma de una progresión aritmética.

En nuestro caso, tenemos que $a1 = \frac{1}{\frac{n+n^2}{2}}$ $\quad m = p \quad$ $a_m = \frac{p}{\frac{n+n^2}{2}}$.

$$D(p) = \frac{p}{2} \cdot \left[\frac{1}{\frac{n+n^2}{2}} + \frac{p}{\frac{n+n^2}{2}} \right]$$

$$D(p) = \frac{p}{2} \cdot \left[\frac{(p+1)}{\frac{n+n^2}{2}} \right]$$

$$D(p) = p \left(\frac{p+1}{n+n^2} \right)$$

Si el valor de uso es W, entonces la depreciación acumulada será:

$$D(p) = W \cdot p \cdot \left(\frac{p+1}{n+n^2} \right) \qquad \text{siendo } W = C - VR$$

Si se busca el Total Depreciado al final del plazo de su vida útil:

$$D(n) = W \cdot n \cdot \left(\frac{n+1}{n+n^2} \right) \qquad \text{siendo } W = C - VR \text{ aplicando distributiva}$$

$$D(n) = W$$

El **valor contable** surge como diferencia entre el valor de costo y la depreciación acumulada.

$$VC(p) = C - D(p) = C - \left[(C - VR) \cdot p \cdot \left(\frac{(p+1)}{n+n^2} \right) \right]$$

d) Método de variación geométrica o por porcentaje constante

El cargo periódico por depreciación es una cuantía variable a distribuir periódicamente a lo largo de la vida útil del bien; prescindiendo de cuánto sea utilizado el activo. El porcentaje de depreciación constante se calcula en función a tres elementos y lo denominaremos β —tasa de depreciación en tanto por uno—:

- la vida útil estimada del bien: n
- el coste del bien —C—
- el valor residual —VR—

Sobre el valor contable del período anterior se aplica esa tasa de depreciación β.

Entonces:

Para el cálculo de la **depreciación periódica** buscaremos en qué tasa β debe ir decreciendo el activo para llegar a un valor residual VR. En el caso de que un activo no tenga valor de recupero, debería asignársele un valor representativo de 1 para encontrar solución a la ecuación de valor.

$C \, .[\,1 - \beta\,]^n = VR$, despejamos y queda:

$$\boxed{\beta = 1 - \left(\frac{VR}{C}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

Ahora sí podemos hallar la depreciación periódica —d_p—

$d(1) = VC(0)\,.\,\beta$ como $V(o)=C$

$d(1) = C\,.\,\beta$

$d(2) = VC(1)\,.\,\beta$

$d(3) = VC(2)\,.\,\beta$

$d(4) = VC(3)\,.\,\beta$

$\boxed{d(p) = VC(p-1)\,.\,\beta}$

La **depreciación acumulada** hasta el período p, resulta ser p veces la depreciación de un período y representa una progresión geométrica como se verá:

$D(p= = d(1) + d(2) + d(3) + \ldots\ d(p)$

$D(p)= VC(0).\,b + VC(1)\,.\,b + VC(2)\,.\,b + \ldots + VC(p-1)\,.\,\beta$ siendo $VC(0)=C$

$D(p)= C\ \beta + C.[1-\beta\,]\,.\,\beta + C\,.[1-\beta]^2\,.\,\beta + \ldots\ C\,.[1-\beta)\,]^{p-1}\,.\,\beta$

Podemos extraer factor común $C.\,\beta$

$D(p)= C\,.\,\beta\ [\,1+ (1-\beta) + (1-\beta)^2 + \ldots + (1-\beta)^{\,p-1}\,]$

$$D(p) = C.\beta\frac{1-(1-\beta)^p}{1-(1-\beta)}$$

$$\boxed{D(p) = C.\left[1-(1-\beta)^p\right]}$$

El **valor contable** surge como diferencia entre el valor de costo y la depreciación acumulada

$VC(1) = C - D(1) = C - C.\beta = C[1-\beta]$
$VC(2) = VC(1) - D(2) = VC(1) - VC(1).\beta = VC(1)\ [1-\beta]$
$VC(2) = C[1-\beta][1-\beta] = C.[1-\beta)]^2$
$VC(3) = VC(2) - D(3) = VC(2) - VC(2).\beta = VC(2)\ [1-\beta]$
$VC(3) = C[1-\beta]^2[1-\beta] = C.[1-\beta]^3$
...

$$\boxed{VC(n) = C.(1-\beta)^n}$$

Aplicación:

Un equipo cuyo valor de coste es de $ 11.000 con un valor residual estimado de $ 1.000 dentro de cuatro años. Determinar:
a) el cargo periódico anual de depreciación;
b) el cargo acumulado de depreciación;
c) el valor contable;
d) confeccionar el gráfico de Depreciación Acumulada.

Resolverlo considerando el método de depreciación:
- lineal
- acelerado
- suma de dígitos invertido
- variación geométrica en porcentaje fijo.

a) Sistema lineal o uniforme o de la línea recta o directo

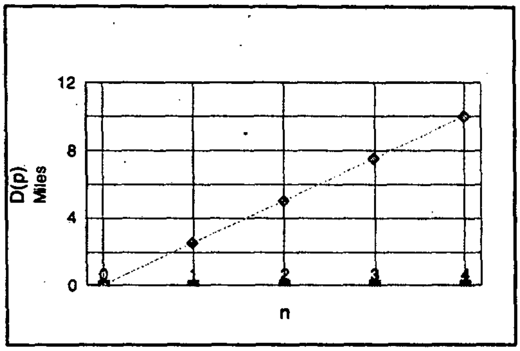
años de uso	d(p)	D(p)	VC(p)
0	-	-	11000
1	2500	2500	8500
2	2500	5000	6000
3	2500	7500	3500
4	2500	10000	1000

$$a)\ d(p) = \frac{W}{n} = \frac{C - VR}{n} = \frac{11000 - 1000}{4} = 2500$$

b) D(p) = p . d(p)
D(1) = 2.500
D(2) = 2. 2500 = 5.000
D(3) = 3. 2500 = 7.500
D(4) = 4 .2500 =10.000

c) VC(p) = C - D(p)
ej. VC(n=4) = C - D(4) = 11000 - 10000 = 1000

La representación gráfica es:



Sistemas variables

b) *Método acelerado*

años de uso	d(p)	D(p)	VC(p)
0	-	-	11000
1	4000	4000	7000
2	3000	7000	4000
3	2000	9000	2000
4	1000	10000	1000

a) $$d(p) = W \frac{(n-p+1)}{\frac{n+n^2}{2}}$$

$$d(1) = 10000 * \frac{4}{10} = 4000$$

$$d(2) = 10000 * \frac{3}{10} = 3000$$

$$d(3) = 10000 * \frac{2}{10} = 2000$$

$$d(4) = 10000 * \frac{1}{10} = 1000$$

b) $D(p) = \Sigma.\ d(p)$

$$D(1) = 10000 . \left(\frac{2 * 4 - 1 + 1}{4 + 4^2}\right) = 10000 * 1 * \frac{8}{20} = 4000$$

$$D(2) = 10000 . 2 . \left(\frac{2 * 4 - 2 + 1}{4 + 4^2}\right) = 10000 * 2 * \frac{7}{20} = 7000$$

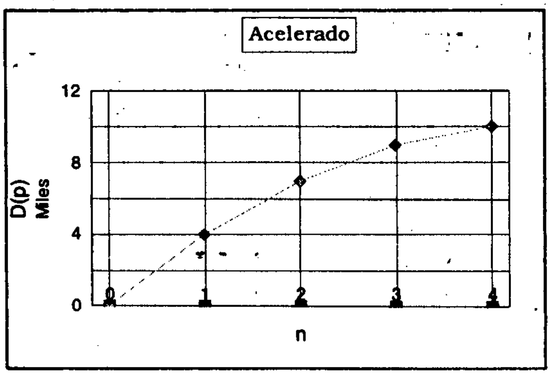
$$D(3) = 10000 . 3 . \left(\frac{2 * 4 - 3 + 1}{4 + 4^2}\right) = 10000 * 3 * \frac{6}{20} = 9000$$

$$D(4) = 10000 . 4 . \left(\frac{2 * 4 - 4 + 1}{4 + 4^2}\right) = 10000 * 4 * \frac{5}{20} = 10000$$

c) $VC(p) = C - D(p)$

$Vc(1) = 11000 - 4000 = 7000$
$VC(2) = 11000 - 7000 = 4000$
$VC(3) = 11000 - 9000 = 2000$
$VC(n{=}4) = C - D(n) = 11000 - 10000 = 1000$

La representación gráfica es:



c) *Método de suma de dígitos invertido*

años de uso	d(p)	D(p)	VC(p)
0	-	-	11000
1	1000	1000	10000
2	2000	3000	8000
3	3000	6000	5000
4	4000	10000	1000

a) $d(p) = W \dfrac{p}{\frac{n + n^2}{2}}$

$$d(1) = 10000 * \frac{1}{10} = 1000$$

$$d(2) = 10000 * \frac{2}{10} = 2000$$

$$d(3) = 10000 * \frac{3}{10} = 3000$$

$$d(4) = 10000 * \frac{4}{10} = 4000$$

b) $D(p) = \Sigma.\ d(p)$

$$D(1) = 10000 .\ 1\ .\frac{(1+1)}{4+4^2} = 10000 * 1 * \frac{2}{20} = 1000$$

$$D(2) = 10000 .\ 2\ .\frac{(2+1)}{4+4^2} = 10000 * 2 * \frac{3}{20} = 3000$$

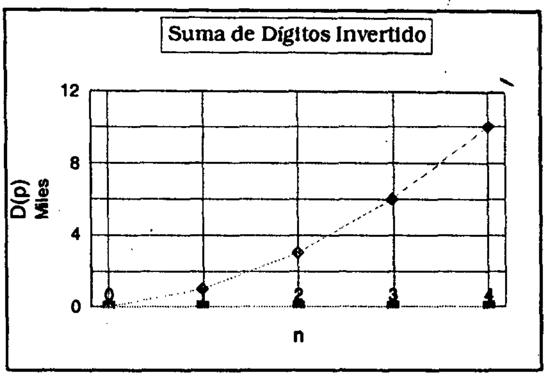
$$D(3) = 10000 .\ 3\ .\frac{(3+1)}{4+4^2} = 10000 * 3 * \frac{4}{20} = 6000$$

$$D(4) = 10000 .\ 4\ .\frac{(4+1)}{4+4^2} = 10000 * 4 * \frac{5}{20} = 10000$$

c) $VC(p) = C - D(p)$

$VC(1) = 11000 - 1000 = 10000$
$VC(2) = 11000 - 3000 = 8000$
$VC(3) = 11000 - 6000 = 5000$
$VC(n=4) = C - D(n) = 11000 - 10000 = 1000$

La representación gráfica es:



d) *Método de variación geométrica o por porcentaje constante*

años de uso	d(p)	D(p)	VC(p)
0	-	-	11000
1	4960	4960	6040
2	2723	7683	3317
3	1496	9179	1821
4	821	10.000	1.000

a) $11.000\ [1-\beta]^4 = 1000$

Despejamos $\beta = 0{,}4509$ $\qquad \beta = 1-\left(\frac{1.000}{11.000}\right)^{\frac{1}{4}} = 0{,}4509$

El activo va a ir decreciendo en un 45,09% pues $\beta = 0{,}4509$ —en tanto por uno—.

d(1) = 11.000 . 0,4509= 4.960
d(2) = 6.040 . 0,4509= 2.723
d(3) = 3.317 . 0,4509= 1.496
d(4) = 1.821 . 0,4509= 821

b) $D(p) = C.\left[1-(1-\beta)^p\right]$

$D(1) = 11.000.\left[1-(1-0{,}4509)\right] = 11000.0{,}4509$
D(1)= 4960

$D(2) = 11.000.\left[1-(1-0{,}4509)^2\right] = 11000.0{,}6985$
D(2) = 7683

$D(3) = 11.000.\left[1-(1-0{,}4509)^3\right] = 11000.0{,}8344$
D(3)=9179

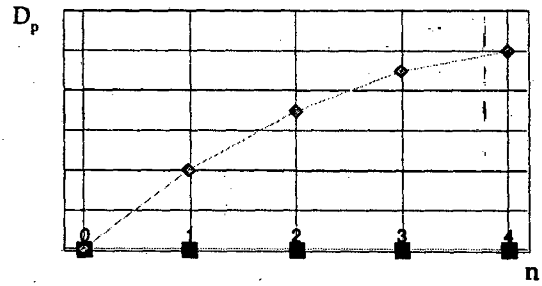
$D(4) = 11.000.\left[1-(1-0{,}4509)^4\right] = 11000.0{,}9091$
D(4) =10.000

$\boxed{VC(n) = C\,.\,(1-\beta)^n}$

$VC(1) = 11.000\ (1-0{,}4509) = 6.040$
$VC(2) = 11.000\ (1-0{,}4509)^2 = 3.317$
$VC(3) = 11.000\ (1-0{,}4509)^3 = 1.821$
$VC(4) = 11.000\ (1-0{,}4509)^4 = 1.000$

Método de depreciación del porcentaje fijo

d) La representación gráfica



DEPRECIACIONES CON COMPONENTE FINANCIERO

e) Método del fondo de amortización

El cargo periódico por depreciación es una cuantía variable, creciente.

Se supone que cada uno de dichos cargos —d_p— se van reservando en un fondo que gana intereses, cuyo destino es la reposición de ese activo que se está depreciando. De forma tal, que al momento de expirar su vida útil, al cabo de n períodos, dicho fondo logró reunir un monto equivalente al necesario para reemplazar el activo.

Cuánto más grande sea el plazo de amortización, más pequeña es la depreciación frente a un método como el lineal por la incidencia financiera.

Entonces:

La **depreciación periódica —d(p)—** se forma por la **depreciación periódica pura** —c— y los intereses que genera —I(p-1;p)—.

$$d(p) = c + I(p-1;p)$$

Primero calculamos la **depreciación periódica pura -c** que significa hacer el siguiente planteo: qué cuota anual constante durante n anualidades permite lograr una imposición de cuantía equivalente al valor útil del activo, sabiendo que el fondo gana intereses anuales i:

$$c = W \cdot s^{-1}(1;n;i) = (C - VR)\ s^{-1}(1;n;i)$$

En nuestro ejemplo, suponiendo una tasa de interés efectiva anual del 10%.

$c = 10000 * s^{-1}(1;4;0,10)$
$c = 10000 * 0,215470803 = 2154,71$

Observamos que $n * c < W$, pues la diferencia se encuentra en los intereses totales que generan las cuotas. A mayor tasa que gane el fondo menor será la cuota —c—.

Recordemos que $s^{-1}(1;n;i)$ se denomina "factor del fondo de acumulación" o "sinking found".

Segundo, la **depreciación periódica —d(p)—** responde al esquema ya visto en la unidad de préstamos:

La depreciación del primer período —c— asimilable al fondo amortizante, así llamado cuando vimos préstamos.

Acá $d(1) = c$

La depreciación del segundo período $d(2) = c + c.\,i = c\,(1+i)$

La depreciación del tercer período $d(3) = d(2) * (1+i) = c\,(1+i)\,(1+i) = c\,(1+i)^2$

La depreciación del período p es el factor de acumulación por un período menos —(p-1)— de la depreciación del primer período de vida del bien —cuota base—. Nos recuerda a la amortización o servicio de capital, en el sistema de préstamo francés, para un período p.

$$d(p) = d(p-1)\,(1+i)$$

$$d(p) = d(1)\,.\,(1+i)^{p-1}$$

D(p) = La **depreciación acumulada** hasta el período p, considerando un valor de uso de una unidad monetaria. En el eje de tiempo exponemos en paralelo las cuotas para asimilarlo a las amortizaciones del sistema de préstamo francés ya visto.

W=1	0	1	2		p-1	p		n-2	n-1	n
		d(1)	d(2)	...	d(p-1)	d(p)	...	d(n-2)	d(n-1)	d(n)
		c	$c(1+i)^1$	...	$c(1+i)^{p-2}$	$c(1+i)^{p-1}$	...	$c(1+i)^{n-3}$ ...	$c(1+i)^{n-2}$	$c(1+i)^{n-1}$

$$\underbrace{d(1) + \dots + d(p)}_{D(p)} \qquad \underbrace{d(1) + \dots + d(n)}_{D(n)}$$

$$D(p) = \sum_{k=1}^{p} c\;(1+i)^{k-1}$$

$$D(p) = c\,[\,1 + (1+i)^1 + (1+i)^2 + \dots (1+i)^{p-2} + (1+i)^{p-1}\,]$$

$$D(p) = c\;s\,(1;p;i)$$

Reemplazando c por la fórmula de cuota base, nos queda:

$$D(p) = W \quad s^{-1}(1;n;i) \;*\; s(1;p;i)$$
$$D(p) = W \frac{s(1;p;i)}{s(1;n;i)}$$

Desarrollando los factores de capitalización de la fórmula anterior:

$$D(p) = W \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}$$
$$D(0;n) = W$$

El valor contable surge como diferencia entre el valor de costo y la depreciación acumulada.

$$VC(p) = C - D(p) =$$

$$VC(n) = C - W \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}$$

$$VC(n) = C - \left[(C - VR) \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Aplicación del método del fondo de amortización o de intereses sobre el activo:

Siguiendo el mismo ejemplo del equipo cuyo valor de coste es de $ 11.000 con un valor residual estimado de $ 1.000 dentro de cuatro años, si la T.E.A. es del 10%, determinar:

a) el cargo periódico anual de depreciación;
b) el cargo acumulado de depreciación;
c) el valor contable.

años de uso	d(p)	D(o;p)	VC(p)
0	-	-	11000
1	2154,7	2154,7	8845,3
2	2370,2	4524,90	6475,1
3	2607,2	7132,1	3867,9
4	2867,9	10000,0	1000,0

a) $d(1) = 10.000\ s^{-1}\ (1; 4; 0{,}10) = \mathit{2154{,}70}$
$d(2) = 2154{,}70 \;*\; (1 + 0{,}10) = 2370{,}20$
$d(3) = 2154{,}70 \;*\; (1 + 0{,}10)^2 = 2607{,}20$
$d(4) = 2154{,}70 \;*\; (1 + 0{,}10)^3 = 2867{,}90$

b) $D(1) = d(1) = 2154{,}70$

$D(2) = d(1)\ s(1; 2; 0{,}10) = 4524{,}90$

$D(3) = d(1)\ s(1; 3; 0{,}10) = 7132{,}10$

$D(4) = d(1)\ s(1; 4; 0{,}10) = 10000$

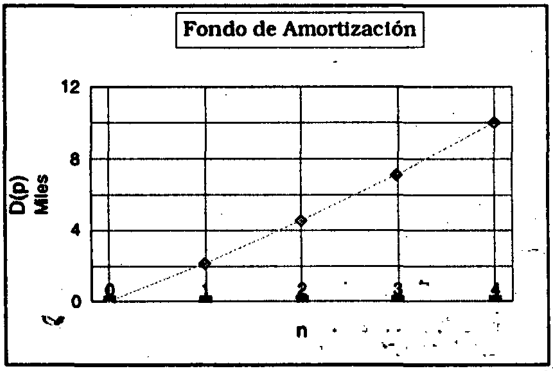
c) VC (1) = 11000 - 2154,70 =8845,30

VC (2) = 11000 - 4524,90 = 6475,10

VC (3) = 11000 - 7132,10 = 3867,90

VC (4) = 11000 - 10000 = 1000,00

La representación gráfica:



CUADRO RESUMEN DE LAS DEPRECIACIONES PERIÓDICAS Y ACUMULADAS EN CADA MÉTODO

	Lineal		Acelerado		Dígito Invertido		Porcentaje Fijo		Fondo de Amortización	
	d(p)	D(p)	d(p)	D(p)	d(p)	D(p)	d(p)	D(p)	d(p)	D(p)
1	2500	2500	4000	4000	1000	1000	4960	4960	2155	2155
2	2500	5000	3000	7000	2000	3000	2723	7683	2370	4524
3	2500	7500	2000	9000	3000	6000	1496	9179	2607	7132
4	2500	10000	1000	10000	4000	10000	821	10000	2868	10000

VENTAJAS E INCONVENIENTES DE CADA MÉTODO DE DEPRECIACIÓN

Métodos de depreciación o amortización	**Ventajas**	**Inconvenientes**
SISTEMA LINEAL o UNIFORME o DE LA LINEA RECTA o DIRECTO	• Su simplicidad • Su aceptación impositiva	• La distribución de los cargos por depreciación en forma uniforme no se correlaciona con gastos que serían irrelevantes en la primera etapa. Serviría para activos que van sufriendo un deterioro proporcional al tiempo de vida útil sin tener en cuenta el uso que se les da. • No se consideran los intereses sobre el fondo de reserva.
METODO ACELERADO	• Diferimiento de la carga fiscal.	• No se consideran los intereses. • La distribución de cargos por depreciación es variable decreciente y no se correlacionaría con los gastos irrelevantes —en general— al inicio de vida de los activos.
METODO de SUMA DE DIGITOS INVERTIDO	• La distribución de cargos por depreciación en forma creciente se correlacionaría con los gastos, los que serían más significativos en los últimos períodos de vida de los activos	• No se consideran los intereses.
METODO DEL PORCENTAJE FIJO	• Diferimiento de la carga fiscal.	• No se consideran los intereses. La distribución de cargos por depreciación en forma decreciente no se correlacionaría con los gastos, si éstos son mas significativos en los últimos periodos de vida
METODO del FONDO DE AMORTIZACION	• Considera los intereses sobre el fondo de reserva. • Incrementa la depreciación siguiendo una progresión geométrica, con un factor de crecimiento constante durante la vida útil del bien. Cuando el activo se encuentra con gastos y costos de mantenimiento mayores al final de su vida útil el cargo por depreciación también es mayor.	• *No presenta.*

Los valores hallados de Depreciación periódica y acumulada son las reservas que se detraen del Coste para hallar el valor contable. Es decir, que para hallar ese valor contable del período p: al Coste le restamos la Depreciación Acumulada o bien por recurrencia al valor contable del período anterior le restamos la depreciación del período. Procedimiento análogo al de sistemas de préstamos para armar el saldo de deuda.

Normativa:

Complementando lo ya expuesto al inicio del capítulo, en las normas contables —Resolución Técnica N° 17 del C.P.C.E.C.A.B.A.— se establece que "La medición contable de los activos se efectuará al costo original menos la depreciación acumulada". Y para el cómputo de las depreciaciones entre otras cosas, se considerará para cada bien:

- ✓ su capacidad de servicio en función a su propia naturaleza;
- ✓ la política de mantenimiento;
- ✓ la posible obsolescencia;
- ✓ la posibilidad de que algunas partes importantes del bien sufran desgaste o agotamiento distinto.
- ✓ Se aclara que los activos incorporados mediante un arrendamiento financiero se deprecian totalmente a lo largo del plazo que figura en el contrato o bien por el plazo según su capacidad de servicio, el período que fuere menor.

Por eso, se pueden contemplar otros métodos de depreciación no vistos ,cuyos cálculos no dependen de esa vida útil periódica proporcional o progresiva, que consideran alguna unidad de medida relacionada con la capacidad productiva estimada del activo, ejemplo medido en horas de actividad en toda su vida útil que sigue siendo un método proporcional pues la depreciación periódica será una proporción de horas de trabajo insumida por período o cantidad de unidades de producción periódicas sobre el total de horas de trabajo o unidades de producción que se estiman de vida útil de ese bien. Estos métodos comentados tienen la desventaja de tener depreciaciones nulas si por determinada circunstancia el activo no estuvo funcionando; por otro lado el valor del mismo no pudo mantenerse constante.

Concluimos diciendo que el método a adoptar será el que mejor se adapte a la realidad y deberá tener en cuenta estas consideraciones, persiguiendo que los valores se aproximen a los de mercado. La aproximación a la realidad es requisito de toda información contable-financiera. Por otro lado, dentro de esta marco se deberán respetar y reconocer todas las regulaciones vigentes para cada tratamiento contable o fiscal teniendo presente que la *finalidad de la depreciación justamente es la recuperación del bien y su reposición.*

Capítulo XIII
Evaluación de proyectos

Objetivo:

- Utilizar las herramientas financieras de valuación para evaluar proyectos de inversión o financiación.
- Comprender los supuestos y limitaciones que conlleva cada criterio de evaluación.
- Interpretar los resultados.

Proyectos de Inversión	**Proyectos de Financiación**
La persona o la empresa debe tomar decisiones sobre:	
Cuánto y en qué proyecto se evalúa invertir	Cuánto y cómo obtiene esa asistencia
Diagrama temporal de los flujos de fondos —tradicional— en los "Proyectos simples"	
0 1 2 3 n-1 n /___/___/___/___//___/___/ $-C_0$ c_1 c_2 c_3 ... c_{n-1} c_n	0 1 2 3 n-1 n /___/___/___/___//___/___/ C_0 $-c_1$ $-c_2$ $-c_3$ ... $-c_{n-1}$ $-c_n$
Es un proyecto de inversión simple pues hay un solo cambio de signo en la secuencia de flujos de fondos Si lo representamos a través de un vector de flujos: P. Inversión= $[-C_0; c_1; c_2; c_3; ...; c_{n-1}; c_n]$ Para homogeneizar todos los flujos asociados a la inversión (flujo del momento 0) debemos valuarlos a un momento común: por ejemplo el momento 0., utilizando una tasa "i". ***Análisis matemático de F(i)*** $\boxed{F(i)=-c_0+\sum_{j=1}^{n} c_j.(1+i)^{-j}}$ $f'(i)=\dfrac{d\left[-c_0+\sum_{j=1}^{n} c_j.(1+i)^{-j}\right]}{di}$ $f'(i)=c_j.(-1)\sum_{j=1}^{n} j.(1+i)^{-j-1}$ $f'(i)=c_j.(-1)\sum_{j=1}^{n} j.(1+i)^{-(j+1)}$ $f'(i)=-c_j\sum_{j=1}^{n} j.v^{j+1}<0$ =>F. decreciente	Es un proyecto de financiación simple pues hay un solo cambio de signo en la secuencia de flujos de fondos. Si lo representamos a través de un vector de flujos: P. Financ= $[C_0; c_1; -c_2; -c_3; ...; -c_{n-1}; -c_n]$ Para homogeneizar todos los flujos asociados a la financiación (flujo del momento 0) debemos valuarlos a un momento común: por ejemplo el momento 0, utilizando una tasa "i". ***Análisis matemático de F(i)*** $\boxed{F(i)=c_0-\sum_{j=1}^{n} c_j.(1+i)^{-j}}$ $f'(i)=\dfrac{d\left[c_0-\sum_{j=1}^{n} c_j.(1+i)^{-j}\right]}{di}$ $f'(i)=-c_j.(-1)\sum_{j=1}^{n} j.(1+i)^{-j-1}$ $f'(i)=c_j.\sum_{j=1}^{n} j.(1+i)^{-(j+1)}$ $f'(i)=c_j.\sum_{j=1}^{n} j.v^{j+1}>0$ => F. creciente

PROYECTOS DE INVERSIÓN

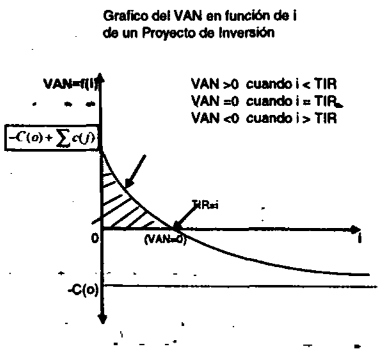
$$f''(i)=\frac{d^2\left[-c_0+\sum_{j=1}^{n}c_j.(1+i)^{-j}\right]}{di}$$

$$f''(i)=(-1)c_j.\sum_{j=1}^{n}j.(-j-1)(1+i)^{-j-2}$$

$$f''(i)=(-1)c_j.(-1)\sum_{j=1}^{n}j.(j+1)(1+i)^{-(j+2)}$$

$$f''(i)=c_j.\sum_{j=1}^{n}j.(j+1).v^{j+2}\rangle 0\rightarrow F.cóncava$$

Su asíntota es la paralela al eje de la abcisa por $(0;-c_0)$
Gráfica de la función VAN de un P. de Inversión.



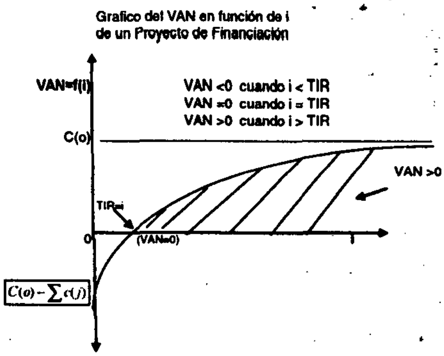
PROYECTOS DE FINANCIACIÓN

$$f''(i)=\frac{d^2\left[c_0-\sum_{j=1}^{n}c_j.(1+i)^{-j}\right]}{di}$$

$$f''(i)=c_j.\sum_{j=1}^{n}j.(-j-1)(1+i)^{-j-2}$$

$$f''(i)=-c_j.\sum_{j=1}^{n}j.(j+1)v^{j+2}\langle 0\rightarrow F.convexa$$

Su asíntota es la paralela al eje de la abcisa por $(0;c_0)$
Gráfica de la función VAN de un P. de Financiación.



Aplicación de Proyecto de Inversión:

0	1	2
-100	60	55

Valuación al momento 0:

$$-100+\frac{60}{(1+TIR)}+\frac{55}{(1+TIR)^2}=0$$

Valuación al momento n:

$$-100(1+TIR)^2+60(1+TIR)+55=0$$

El polinomio de 2° grado es de la forma: P(x) =0
$a.x^2+b.x+c=0$ y su resolución es:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$$

En nuestro caso x=(1+TIR)

$$x=\frac{-60\pm\sqrt{60^2-4.(-100).55}}{2.(-100)}$$

x= -0,50
x= 1,10
Nos interesa el valor de x=1,10 ==> TIR=0,10
Pues el valor i>0 para que tenga sentido financiero.

Aplicación de Proyecto de Financiación:

0	1	2
-100	60	55

Valuación al momento 0:

$$100-\frac{60}{(1+TIR)}-\frac{55}{(1+TIR)^2}=0$$

Valuación al momento n:

$$100(1+TIR)^2-60(1+TIR)-55=0$$

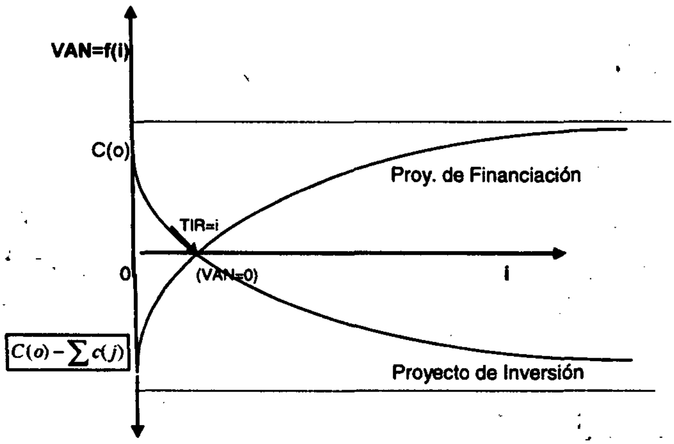
Al igual que en el proyecto de inversión reemplazamos los valores, sabiendo que x=(1+TIR)

$$x=\frac{-(-60)\pm\sqrt{(-60)^2-4.100.(-55)}}{2.100}$$

x= 1,10
x= -0,50

Nos interesa el valor de x=1,10 ==> TIR=0,10
Pues el valor i>0 para que tenga sentido financiero.

Grafico del VAN en función de i



Del análisis del gráfico vemos que se produce una simetría en la representación del Proyecto de Inversión y el Proyecto de financiación.
- Desde el punto de vista del colocador de fondos, del inversor, del acreedor: < tasa de colocación >V.A.N.
- Desde el punto de vista del tomador de fondos, del deudor: > tasa de financiación >V.A.N.

Determinación de i* (la tasa implícita de la operación, tasa intrínseca o endógena)
Toda ecuación de grado n, tendrá n raíces y según el Teorema de Descartes el polinomio P(x) puede tener tantas raíces reales y positivas como cambios de signo presente ese polinomio.

El polinomio es de la forma $-c_0+c_1.x+c_2.x^2+...+c_n.x^n=0$ en Proyectos de Inversión y

$c_0-c_1.x-c_2.x^2-...-c_n.x^n=0$ en Proyectos de Financiación

En donde $x=\frac{1}{(1+TIR)}=(1+TIR)^{-1}$

Para que tenga sentido financiero los valores encontrados deben ser soluciones reales y positivas en x o sea que $x\leq 1$. Ejemplo: si x= 1,06 significa que TIR=-0,057; si x= 1 significa que i=0 y si x= 0,94 significa que TIR=0,064

No podemos considerar soluciones con x real y negativa pues estaríamos reconociendo una tasa TIR negativa.

DIAGRAMA TEMPORAL DE LOS FLUJOS DE FONDOS PARTICULARES EN LOS "PROYECTOS NO SIMPLES"

Ej.: 0 1 2 3 n-1 n /___/___/___/___//___/___/ $-C_0$ c_1 c_2 $-c_3$ ... c_{n-1} c_n Es un proyecto de inversión no simple pues hay más de un cambio de signo en la secuencia de flujos de fondos netos Si lo representamos a través de un vector de flujos tenemos: P.Inversión= $[-C_0; c_1; c_2; -c_3; c_4; ...; c_{n-1}; c_n]$	Ej.: 0 1 2 3 n-1 n /___/___/___/___//___/___/ C_0 $-c_1$ $-c_2$ c_3 ... $-c_{n-1}$ $-c_n$ Es un proyecto de financiación no simple pues hay más de un cambio de signo en la secuencia de flujos de fondos netos Si lo representamos a través de un vector de flujos tenemos: P.Financ= $[C_0; -c_1; -c_2; c_3; -c_4 ...; -c_{n-1}; -c_n]$

En el caso de estos flujos particulares, la cantidad máxima de soluciones reales y positivas en x es la cantidad de cambios de signos del polinomio y se van diferenciando en un número par. Por ejemplo: el proyecto no simple del renglón anterior presenta 3 cambios de signos y por lo tanto puede tener 3 ó 1 solución real y positiva en x.

Otro ej. P.Inversión= $[-C_0; c_1; -c_2; c_3; ...; -c_n]$ Acá tenemos que el polinomio presenta 4 cambios de signos y por lo tanto puede tener 4;2 ó ninguna solución real y positiva en x.

Un caso muy conocido de Lorie y Savage: proyecto en una bomba de petróleo cuyos flujos son

0 1 2
/_________/_________/
-1600 10.000 -10.000

Es una ecuación de grado 2, tiene 2 cambios de signos. Puede tener 2 o ninguna solución real y positiva en x. En este caso los valores de i que satisfacen esa ecuación son:

i= 0,25

i = 4

Debido a que este proyecto tiene dos tasas endógenas tan diferenciadas entre sí, se torna difícil tomar decisiones si el coste de oportunidad está comprendido entre esos dos valores.

Criterios de evaluación: VAN TIR

Criterio V.A.N.	*Criterio T.I.R.*
Mide la rentabilidad del proyecto en términos absolutos —en unidades monetarias—. El valor hallado es un incremento o una disminución del capital. Es una variación absoluta.	Mide la rentabilidad del proyecto en términos relativos. El valor hallado es un tanto de interés. Es una variación relativa.
El tipo de interés planteado en la ecuación es un estándar de rentabilidad para ese proyecto. Es una "**tasa exógena o extrínseca**" que debe introducir el evaluador. Es **explícita**. Es el coste de oportunidad del capital. Es la tasa que se renuncia por no entrar en ese proyecto. Como tasa de interés esperada de rentabilidad que ofrecen otras inversiones de igual riesgo.	El tipo de interés hallado en la ecuación es el que resulta de los flujos de fondos del proyecto Es una "**tasa endógena o intrínseca**" que surge de la ecuación de valor. Es **implícita**. Denominada Tasa Interna de Retorno (T.I.R.) o bien IRR (Internal Rate of Return).
Regla de aceptación de un proyecto de inversión: Se acepta si: VAN >0 ==> Incremento del capital. **Regla de aceptación de un proyecto de financiación:** Se acepta si: VAN >0 ==> No descapitalizarse por conseguir fondos. **En conclusión:** En proyectos simples el criterio VAN tiene la misma regla de aceptación para un Proyecto de Inversión o bien de Financiación. Siempre acepto el proyecto de invertir o endeudarse cuando el VAN sea positivo.	**Regla de aceptación de un proyecto de inversión:** Se acepta si TIR>i ==> La colocación de fondos se realizó a una tasa mayor a la de mercado. **Regla de aceptación de un proyecto de financiación:** Se acepta si TIR<i ==> La obtención de fondos se realizó a una tasa menor a la de mercado. **En conclusión:** En proyectos simples el criterio TIR no tiene la misma regla de aceptación para el caso de un Proyecto de Inversión que de Financiación.

Inconvenientes:

- Explicitar el tipo de interés para actualizar los flujos de fondos sean simples o no simples.
- **Supuesto fuerte**: los ingresos de caja (flujos positivos) se reinvierten inmediatamente a la tasa"i" que es es coste de oportunidad, tasa de corte y los egresos de caja (flujos negativos) se financian con capital cuyo coste es también esa misma tasa "i".

Una forma de salvar el supuesto fuerte es suponer una tasa diferente a la utilizada para calcular el VAN para financiar los egresos de caja y otra para invertir los ingresos de caja de ese proyecto. De tal forma me encuentro con un VAN modificado.

- **Diferente duración del proyecto**: No podemos comparar Proyectos excluyentes de distinta duración. La solución para subsanarlo es: a) trasladar el proyecto de menor vida a la duración del otro proyecto de forma tal que la duración de uno sea múltiplo de la duración del otro; o bien b) valuar el proyecto considerando un duración común: $n \rightarrow \infty$. Para ello en proyectos simples:

1°) Hallamos el VAN correspondiente a la vida útil de cada proyecto $VAN = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_K}{(1+i)^k}$

respetando los signos de cada flujos de fondos pues si se trata de un proyecto de inversión el flujo inicial es negativo.

2°) Calculamos cuál será el flujo de caja periódico promedio que se necesita para producir ese valor actual neto. Es decir $VAN = \bar{c} \cdot a(1;n;i)$; $\bar{c} = VAN \cdot a^{-1}(1;n;i)$

3°) Conociendo i y $\bar{c}$ hallamos el VA de un VAN perpetuo.

$$VAN(\infty) = \frac{\bar{c}}{i}$$

Si reemplazamos el valor de $\bar{c}$ en función de VAN

$$VAN(\infty) = \frac{VAN.a^{-1}(1;n;i)}{i}$$

$$VAN(\infty) = VAN\frac{i}{(1-v^n)i} = VAN\frac{1}{(1-v^n)}$$

$$VAN(\infty) = VAN\frac{1}{1-(1+i)^{-n}} = VAN\frac{1}{1-\frac{1}{(1+i)^n}}$$

Inconvenientes:

- Calcular el tipo de interés implícito que tiene resolución sencilla en los proyectos simples. En proyectos no simples se presenta un gran defecto pues éstos pueden generar múltiples tasas o ninguna tasa.
- **Supuesto fuerte**: los ingresos de caja (flujos positivos) se reinvierten inmediatamente al *tipo de rendimiento "i*" que es la TIR y los* egresos de caja (flujos negativos) se financian con capital cuyo coste es también TIR:

Una forma de salvar el supuesto fuerte es suponer una tasa diferente a la TIR hallada para financiar los egresos de caja y otra para invertir los ingresos de caja de ese proyecto. De tal forma me encuentro con una TIR modificada.

- **Diferente duración del proyecto**: No presenta problemas

Jerarquización de Proyectos excluyentes: Pueden dar diferente ranking por medir aspectos diferentes de la inversión. Pueden originar contradicciones al jerarquizar los proyectos según el criterio utilizado: VAN o TIR.

Condición suficiente para que ambos criterios conduzcan a igual jerarquización de proyectos excluyentes:

En el 1° cuadrante del gráfico no puede existir ninguna intersección. Se llama intersección de Fisher. Caso contrario es una situación conflictiva que el evaluador deberá resolver.

Origen de la situación conflictiva que podría jerarquizar distinto según el criterio utilizado de evaluación:
Se presentan generalmente en el caso de: a) racionamiento del capital, situación que siempre se da pues no existe un tamaño de inversión ilimitado ya que el dinero es limitado y b) inversiones excluyentes.

- **Desplazamiento temporal de los flujos de caja:**

Una distribución no uniforme de los flujos de caja podría jerarquizar diferente los proyectos según el criterio utilizado.

- **Cuantía de la inversión que demanda el proyecto :**

Al medir aspectos diferentes de la inversión el criterio VAN y el criterio TIR pueden contradecir el ranking.

Conclusión: Ambos criterios son COMPLEMENTARIOS y NO SUSTITUTIVOS

Aceptar la dinámica en todo pensamiento económico-financiero: "si cambian los supuestos, entonces también cambiarán las conclusiones".

Aplicaciones

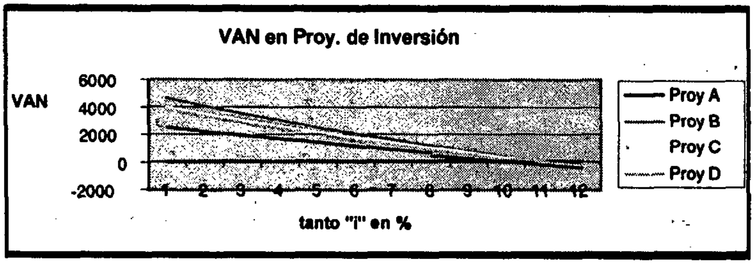
1)

Proyecto de Inversión **Jerarquizar las alternativas considerando ambos criterios de selección**
Suponer tasa de mercado del 8%

mom	Proy A	Proy B	Proy C	Proy D
0	-10000	-10000	-10000	-10000
1	0	1000	3154,7	3500
2	0	1000	3154,7	3250
3	0	1000	3154,7	3000
4	14641	11000	3154,7	2750

Cálculo del VAN y gráfico

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,11	0,12	0,13
Proy A	4641	4069,71	3526	3008,3	2515	2045	1597	1170	761,6	372,1	0	-355,5	-695,4	-1020
Proy B	4000	3511,77	3046,2	2602	2178	1773	1386	1016	662,4	324	0	-310,2	-607,5	-892,3
Proy C	2618,84	2309,57	2012,3	1726,4	1451	1186	931,4	685,7	448,8	220,4	0	-212,7	-418	-616,4
Proy D	2500	2205,78	1922,7	1650,3	1388	1135	891,5	656,6	429,9	211,2	-0	-204	-401,1	-591,7



Criterio TIR Los 4 proyectos presentan igual tasa interna de retorno del 10%

Criterio VAN Los 4 proyectos jerarquizan diferente según la tasa de interés (Ver Cuadro)

2) Dado el siguiente perfil temporal de un proyecto de inversión

0	1	2	3	4
-10.000	3154,71	3154,71	3154,71	3154,71

- La T.I.R. de este proyecto es el 10%.
- El V.A.N. considerando el coste de oportunidad de la inversión que es del 6% es $ 931,40.
- Considerando que cada ingreso de caja se reinvierte a la misma tasa nos queda:

Criterio TIR

Este criterio supone que: Los flujos se reinvierten a igual tasa (T.I.R.).

$$VF = 3154,71.s(1;4;0,10) = 14.641,01$$

$$10.000 = \frac{14641,01}{(1+i)^4}$$

$$i = \left(\frac{14641,01}{10.000}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,10$$

El valor final obtenido por la reinversión de los ingresos de $ 3.154,71 es 14.641,01 frente a la inversión producida por $ 10.000 arroja un rendimiento interno del 10%.

Consideremos distintos supuestos de tasas de reinversión desde i=0 (es decir que quedan los ingresos en la caja de seguridad del inversor) hasta un valor más alto que la TIR del proyecto.

Tasa de reinversión de los flujos de caja	*Cálculo del rendimiento interno*
i=0	$TIR^* = 0,0599 = \left[\frac{3154,71.s(1;4;0)}{10.000}\right]^{\frac{1}{4}} - 1$
i=0,01	$TIR^* = 0,0639 = \left[\frac{3154,71.s(1;4;0,01)}{10.000}\right]^{\frac{1}{4}} - 1$
i=0,06	$TIR^* = 0,0839 = \left[\frac{3154,71.s(1;4;0,06)}{10.000}\right]^{\frac{1}{4}} - 1$
i=0,10	$TIR^* = 0,10 = \left[\frac{3154,71.s(1;4;0,10)}{10.000}\right]^{\frac{1}{4}} - 1$
i=0,12	$TIR^* = 0,1081 = \left[\frac{3154,71.s(1;4;0,12)}{10.000}\right]^{\frac{1}{4}} - 1$

Criterio V.A.N.

Los flujos se reinvierten a igual tasa del 6%.

Tasa de reinversión de los flujos de caja	*Cálculo del nuevo VAN**
i=0	$VAN^{*}=-4,7=\left[-10000+\frac{3154,71.s(1;4;0)}{(1+0,06)^{4}}\right]$
i=0,01	$VAN^{*}=-146,2=\left[-10000+\frac{3154,71.s(1;4;0,01)}{(1+0,06)^{4}}\right]$
i=0,06	$VAN^{*}=931,4=\left[-10000+\frac{3154,71.s(1;4;0,06)}{(1+0,06)^{4}}\right]$
i=0,10	$VAN^{*}=1597,1=\left[-10000+\frac{3154,71.s(1;4;0,10)}{(1+0,06)^{4}}\right]$
i=0,12	$VAN^{*}=1942,7=\left[-10000+\frac{3154,71.s(1;4;0,12)}{(1+0,06)^{4}}\right]$

Según vimos, el escenario de inversión arrojará diferentes VAN.

Por lo expuesto, cualquiera sea el criterio utilizado en la evaluación del proyecto es necesario considerar luego del cálculo del valor tradicional del VAN o de la TIR el nuevo VAN o la nueva TIR como consecuencia de reinvertir los ingresos de caja a la tasa que se estime y financiar los egresos a la tasa de financiación.

3)

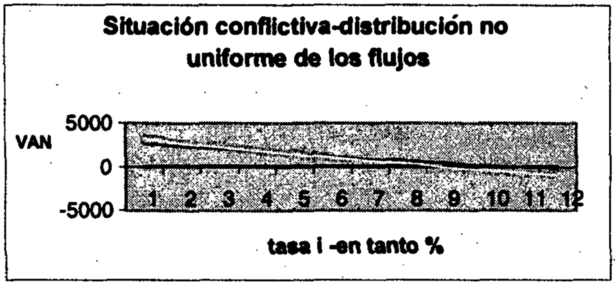
Proyecto de Inversión Jerarquizar las alternativas considerando ambos criterios de selección
Suponer tasa de mercado del 3%.Graficar el VAN

mom	Proy X1	Proy X2
0	-10000	-10000
1	3154,7	800
2	3154,7	800
3	3154,7	800
4	3154,7	10800

Cálculo del VAN y gráfico

V.A.N.=f(i)

VAN/i	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,11	0,12	0,13
Proy X1	2618,84	2309,57	2012,3	1726,4	1451	1186	931,4	685,7	448,8	220,4	0	-212,7	-418	-616,4
Proy X2	3200	2731,38	2284,6	1858,5	1452	1064	693	338,7	0	-324	-633,97	-930,7	-1215	-1487



Resultados obtenidos del flujo de fondos

Criterio TIR	El proyecto X1 tiene una TIR del 10% El proyecto X2 tiene una TIR del 8%	Acepto el Proyecto X1
Criterio VAN	El proyecto X1 tiene una VAN (0,03)= 1726 El proyecto X2 tiene una VAN (0,03)= 1859	Acepto el Proyecto X2

Podemos observar en el cuadro de valores del VAN que la jerarquización cambia de un proyecto a otro dependiendo de la tasa utilizada por el evaluador.

El evaluador debe considerar que cada flujo que genere el proyecto para que rinda lo que dice la TIR se deberá reinvertir a esa tasa, caso contrario el rendimiento interno del proyecto termina siendo menor.
El VAN también generará el incremento de capital que se calculó siempre que los flujos se reinviertan a la tasa especificada por el evaluador.

Del análisis del cuadro de valores del VAN y del gráfico vemos que las curvas de de los proyectos se cruzan, es decir que a esa tasa de interés se igualan los VAN
Para calcular esa tasa podemos netear los flujos de fondos de ambos proyectos encontrando una tasa que se denomina "tasa de corte" o " tasa de rentabilidad de la inversión incremental"

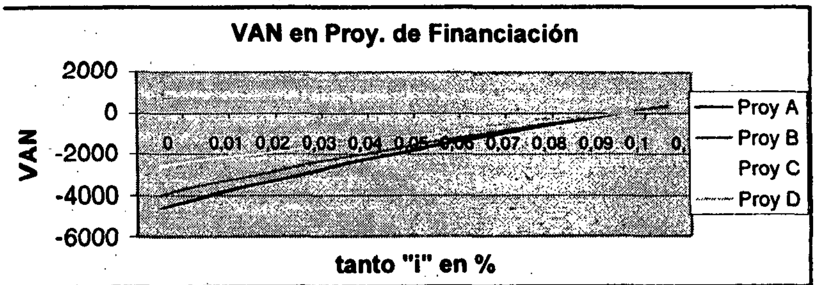
	0	1	2	3	4	
Proy X1	-10000	3155	3155	3155	3155	TIR = 10%
Proy X2	-10000	800	800	800	10800	TIR = 8%
Proy X2-Proy X1	0	-2355	-2355	-2355	7645,3	TIR = 4%

4)
Proyecto de Financiación Jerarquizar las alternativas considerando ambos criterios de selección
Suponer tasa de mercado del 11%

mom	Proy A	Proy B	Proy C	Proy D
0	10000	10000	10000	10000
1	0	-1000	-3154,71	-3500
2	0	-1000	-3154,71	-3250
3	0	-1000	-3154,71	-3000
4	-14641	-11000	-3154,71	-2750

Calculo del VAN y grafico

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,11	0,12	0,13
Proy A	-4641	-4069,71	-3526,02	-3008,3	-2515	-2045	-1597	-1170	-761,6	-372,1	0	355,5	695,4	1020
Proy B	-4000	-3511,77	-3046,18	-2602	-2178	-1773	-1386	-1016	-662,4	-324	0	310,2	607,5	892,3
Proy C	-2618,8	-2309,57	-2012,28	-1726,4	-1451	-1186	-931,4	-685,7	-448,8	-220,4	-0	212,7	418	616,4
Proy D	-2500	-2205,78	-1922,71	-1650,3	-1388	-1135	-891,5	-656,6	-429,9	-211,2	0	204	401,1	591,7



Criterio TIR Los 4 proyectos presentan igual tasa interna de retorno

Criterio VAN Los 4 proyectos jerarquizan diferente según la tasa de interés

Parte II

Operaciones financieras en un escenario de variaciones del poder adquisitivo de la moneda

OBJETIVOS

- Comprender diferentes conceptos para determinar la tasa de interés real.
- Poder analizar en términos reales cualquier operación financiera, y también trabajar con proyectos a valores constantes.
- Utilizar distintos tipos de coeficientes de indización para la corrección monetaria de las operaciones financieras.
- Conocer la metodología de cálculo en la construcción de coeficientes tales como el C.E.R.
- Construir cualquier coeficiente de corrección proyectando una base financiera o económica.

RED DE CONCEPTOS

Valores Corrientes

Valores constantes

Variaciones relativas

Tasa aparente

Tasa de variación de precios

Tasa real de interés

CAPÍTULO XIV

TASA REAL DE INTERÉS

Quien realiza una operación financiera de inversión puede estar posponiendo hoy el consumo de algo que representa un determinado bien o un conjunto o canasta de bienes o servicios que espera concretar en el futuro y para ello, debe pensar en términos de que su dinero mantenga el poder adquisitivo.

Para ello, es necesario analizar los componentes de una operación: C_0; n ;i. Una operación al cabo de n períodos genera un monto. Por otro lado, el nivel general de los precios en la economía durante igual período de análisis pudo haber sufrido modificaciones. Ello genera que el poder de compra existente en el momento de la operación pueda ser diferente al finalizar el plazo. Con respecto a la tasa de interés, ésta en general incluye el componente inflacionario pero lo interesante es poder trabajar con tasas reales es decir libres de inflación, que en definitiva son los indicadores de perdida o ganancia de una operación en términos reales.

Si la contabilidad de una empresa sigue el principio de valuación a *"Valores Corrientes"* y el lector de dichos estados contables decide realizar estados comparativos entre un período y otro podría sacar conclusiones erróneas pues los valores allí expuestas también están reflejando el contenido inflacionario incluido en las partidas.

Un criterio razonable y válido es trabajar a *"Valores Constantes"* y resulta necesario eliminar, filtrar dicho componente inflacionario.

Tasa aparente o tasa nominal

En un sentido amplio se la define como la tasa activa o pasiva de mercado que no está corregida por la inflación.

Por lo tanto, no da idea de rendimiento o coste financiero real de una operación sea de inversión o financiación pues no la mide en términos reales, es decir en términos de poder adquisitivo.

Es la tasa que transforma un capital inicial corriente al cabo de uno o varios periodos en un monto o capital final corriente.

$$i_{0;1} = \frac{C_1}{C_0} - 1$$

Tasa de Inflación

Es el incremento en los precios de los bienes y servicios y por lo tanto representa la pérdida del poder adquisitivo. Siempre se relacionan dos momentos cualesquiera y según sea la base considerada podremos llegar a conclusiones diferentes. Varían con respecto al período anterior y por lo tanto van produciendo una variación que es acumulativa a interés compuesto. Quien otorga un préstamo cobrará un interés más alto a los fines de paliar la pérdida del valor de su capital.

Hablamos de deflación en el caso en que se produzca lo contrario: una disminución en los precios.

El organismo encargado de difundir dichas variables de la economía es el I.N.D.E.C (Instituto Nacional de Estadísticas y Censos).

La variación de precios de un período dado surge del cociente entre el Indice de Precios de un período y el Indice de Precios del período anterior.

$$\varphi_{0;1} = \frac{IP_1}{IP_0} - 1$$

INDICES DE PRECIOS

	Precios al consumidor			Precios mayoristas (IPIM)												Costo de construcción en el Gran Buenos Aires			IPC Nacional	
				Nivel general			Manufac. y Ener.eléct.			Importados			Agropecuario							
Período	Indice	var.(%) mensu	var.(%) Anual	Indice	var(%) mensu	var(%) anual	Indice	Var(%) mensu	Var.(% anual	Indice	var.% mensu	Var.% anual	Indice	Var. % mensual	Var.% anual	Indice	Var. % mensu	Var. % anual	Indice	Var. % mensual
Abr.05	158,16	0,50	8,80	248,78	1,50	9,20	235,02	0,40	9,40	255,25	-0,54	5,90	200,36	-1,10	-6,39	179,30	2,40	14,30	-,-	-,-
May.05	159,11	0,60	8,60	248,60	-0,10	7,70	236,03	0,40	8,30	254,59	-0,38	3,60	199,50	-0,43	-5,40	181,30	1,10	14,70	-,-	-,-
Jun.05	160,57	0,90	9,00	249,19	0,20	7,70	236,60,	0,20	7,70	250,72	-1,52	0,50	205,70	3,10	-0,30	182,00	0,40	13,10	-,-	-,-
Jul.05	162,18	1,00	9,60	252,31	1,20	8,10	237,77	0,50	7,60	250,40	-0,12	0,10	213,83	4,00	6,40	182,70	0,40	13,40	-,-	-,-
Ago.05	162,89	0,40	9,70	255,46	1,30	6,90	239,39	0,70	5,90	250,42	s/v	-1,97	214,88	0,49	5,00	184,10	0,80	13,80	-,-	-,-
Sep.05	164,79	1,20	10,30	260,29	1,90	8,00	240,81	0,60	6,40	249,83	-0,23	-1,65	216,00	0,52	7,00	185,50	0,70	13,40	115,90	-,-
Oct.05	166,07	0,80	10,70	263,22	1,10	9,20	243,43	1,10	7,60	254,40	1,82	0,39	218,01	0,93	11,30	191,50	3,20	17,01	116,13	0,8
Nov.05	168,08	1,20	12,00	263,43	0,10	10,70	246,44	1,20	8,60	257,73	1,30	1,20	219,81	0,82	14,55	193,10	0,80	17,50	118,26	1,2
Dic.05	169,95	1,10	12,30	265,79	0,90	10,60	248,04	0,60	8,30	259,43	0,70	0,60	214,99	-2,10	13,10	197,00	2,00	19,20	119,45	1
Ene.06	172,12	1,30	12,10	269,40	1,40	13,20	248,64	0,20	7,70	261,35	0,70	1,90	218,86	1,80	16,40	200,80	1,90	18,20	-,-	-,-
Feb.06	172,80	0,40	11,50	273,04	1,40	13,50	250,21	0,60	8,00	264,99	1,40	4,20	223,05	1,90	15,70	202,90	1,00	19,00	-,-	-,-

Fuente: INDEC, IPC Base 1988 = 100, IPIM y ICC 1993 = 100

DETERMINACIÓN DE LA TASA REAL DE INTERÉS

Si una persona posee en el momento 0 "q_0" cantidad de un bien o servicio o canasta de bienes o servicios y decide realizarlas, es decir venderlas en el mercado al precio "p_0" obtendrá un Capital inicial a valores corrientes de C_0 equivalente al producto de $q_0 \cdot p_0$

Supongamos que la cuantía C_0 se coloca en el circuito financiero para que genere interés, a una tasa de interés nominal o aparente i. Al final del plazo considerado su valor final será de $C_1 = C_0 \cdot (1+i)$

En un eje de tiempo queda expuesto de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 1 \\ / & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & / \\ C_0 = q_0 \cdot p_0 & & C_1 = C_0 \cdot (1+i) \\ & & C_1 = (q_0 \cdot p_0) \cdot (1+i) \end{array}$$

En el momento 1 retira el montante obtenido y vuelve al mercado de bienes y servicios para comprar aquello que no había consumido en el momento 0 por haber sido invertido. En el momento 1 el precio es p_1 y compra una cantidad q_1 al precio p_1 hasta agotar C_1.

Es decir: $q_1 = \dfrac{C_1}{p_1}$

De la relación entre p_1 y p_0 podemos hallar otra variación relativa que es la tasa de aumento o disminución en los precios a la que denotaremos como φ.

$$\varphi = \frac{p_1}{p_0} - 1 \qquad \varphi = \frac{p_1 - p_0}{p_0}$$

Si:

$\varphi > 0$ ➔ aumentaron los precios desde el momento 0 a al momento 1

$\varphi < 0$ ➔ disminuyeron los precios desde el momento 0 al momento 1

$\varphi = 0$ ➔ los precios se mantuvieron constantes desde el momento 0 a 1.

Recordemos que:

$$i = \frac{C_1}{C_0} - 1 \qquad i = \frac{C_1 - C_0}{C_0}$$

Cabe preguntarnos ahora si la variación absoluta representada entre C_1 y C_0 representa en realidad una ganancia o no. Si ahora en el momento 1 podemos comprar más de lo que podíamos en el momento inicial y para ello hacemos:

$$r = \frac{q_1}{q_0} - 1$$

Si:

$r > 0$ ➔ la operación generó una ganancia de poder adquisitivo

$r < 0$ ➔ la operación generó una perdida de poder adquisitivo.

$r = 0$ ➔ la operación no generó ni perdida ni ganancia de poder adquisitivo, pues puedo comprar lo mismo hoy que ayer.

El valor "r" representa la mayor o menor o igual cantidad de bienes que puedo comprar al momento 1 con respecto al momento inicial; según sea $r>0$; $r<0$ y $r=0$, respectivamente.

Reemplazando los valores de q_0 y q_1 en función del capital nos queda:

$$r=\frac{q_1}{q_0}-1=\frac{\frac{C_1}{p_1}}{q_0}-1=\frac{\frac{q_0.p_0.(1+i)}{p_1}}{q_0}-1=\frac{p_0.(1+i)}{p_1}-1$$

si $\frac{p_1}{p_0}=1+\varphi$ entonces: $\frac{p_0}{p_1}=\frac{1}{1+\varphi}$ nos queda:

$\boxed{r=\frac{1+i}{1+\varphi}-1}$ y si sacamos denominador común: $\boxed{r=\frac{i-\varphi}{1+\varphi}}$

Observando la primera fórmula de tasa real de interés vemos que se trata de la relación entre el capital financiero logrado al cabo del período y el capital económico (el necesario para comprar la misma canasta de bienes).

La tasa real de interés "r" mide el poder adquisitivo de la operación al final del periodo, es decir el mayor o menor número de bienes o servicios o canasta que puedo adquirir al finalizar el período.

En un caso concreto tenemos que calcular la tasa real de interés que surge de los siguientes valores del cuadro:

k	*Ck* \$ Valores corrientes	*Pk* \$ Valores corrientes	*qk* Unidades	*Ik* Valor del Indice de Precios
0	*1.000*	*5*	*200*	*100*
1	*1.080*	*6*	*180*	*120*
Pérdida de poder adquisitivo			*(-20)*	
$r=\frac{-20u.}{200u.}=-0,10$				

Vista la fórmula, la podemos calcular directamente:

Conociendo todas las variaciones relativas

$$i=\frac{C_1}{C_0}-1=\frac{1080}{1000}-1=0,08$$

$$\varphi=\frac{p_1}{p_0}-1=\frac{6}{5}-1=0,20$$

$$r=\frac{1+i}{1+\varphi}-1=\frac{1+0,08}{1+0,20}-1=-0,10$$

$$r=\frac{i-\varphi}{1+\varphi}=\frac{0,08-0,20}{1+0,20}-1=\frac{-0,12}{1,20}-0,10$$

La pérdida del poder adquisitivo fue del 10%.

Con los datos del cuadro también podemos hacer:

$$r = \frac{q_1}{q_0} - 1 = \frac{180}{200} - 1 = 0,90 - 1 = -0,10$$

Definición de Tasa Real de Interés

Es la tasa de interés pura, es decir libre del efecto inflacionario y representa la mayor o la menor cantidad de bienes o servicios que se adquieren al cabo de un periodo determinado en relación a otro.

Si la T.E.M. activa para préstamos a Pyme es del 2,8% y la variación de precios de ese mes es del 2% denota que para quien otorga préstamos tiene una tasa real de interés del 0,7843% y al ser positiva representa una ganancia en su poder adquisitivo.

$$r = \frac{(1+0,028)}{(1+0,02)} - 1 = 0,007843$$

¿Cuál será la T.E.M. pasiva para un pequeño inversor si pretende obtener una tasa real de interés anual del 1% y se estima que la variación de precios en el año será del 8%?

$$0,01 = \frac{(1+i)}{(1+0,08)} - 1 \qquad \text{Entonces} \qquad i = (1+0,01).(1+0,08)-1$$

$$i=0,0908$$

La tasa aparente anual será del 9,08% y se interpreta como una tasa efectiva anual.

$$TEM = (1+0,0908)^{30/365} - 1 = 0,00717$$

Es importante considerar que en el caso de una medición en un tiempo mayor a un período, el valor hallado de la tasa real será siempre con un único signo, sea positivo o sea negativo, cuando en realidad es probable que cada uno de ellos que forman el acumulado vayan arrojando independientemente tasas reales positivas y negativas indistintamente. Veamos:

$$(1+r_{1\ldots j}) = \prod_{j=1}^{n}(1+r_j)$$

Caso de aplicación para el caso de tasas reales de diferente signo.

Supongamos los siguientes valores:

$i_0 = 0,12$	$\varphi_0 = 0,13$
$i_1 = 0,10$	$\varphi_1 = 0,085$

Si determinamos los tantos reales de interés periódicos tenemos:

$$r_0 = \frac{(1+0,12)}{(1+0,13)} - 1 = 0,991150442 - 1 = -0,0088495575$$

$$r_1 = \frac{(1+0,10)}{(1+0,085)} - 1 = 1,013824885 - 1 = 0,013824885$$

La tasa real de interés en los dos períodos será:

r_{0+1} = (1-0,0088495575)(1+0,013824885)-1 = 0,00485298

O bien:

$$r_{0+1} = \frac{(1+0,12)}{(1+0,13)} \cdot \frac{(1+0,10)}{(1+0,085)} - 1 = 0,00485298$$

Podemos observar que si bien en un período la tasa real fue negativa en el otro tuvo un comportamiento inverso y por la naturaleza de sus valores el resultado en ambos periodos concluyó "positivo".

La tasa real de interés promedio periódica "r_j" será:

Si $(1+r)^n = \prod_{j=1}^{n}(1+r_j)$

Entonces: $r = \left[\prod_{j=1}^{n}(1+r_j)\right]^{\frac{1}{n}} - 1$

En nuestro caso será:

r = [(1-0,0088495575) . (1+0,0138248851)] ^{½} -1
r= (1,00485298)$^{1/2}$ –1 = 0,00242355

También podemos hablar de "Salarios Nominales". Ejemplo: si una persona cuyo ingreso mensual de $ 1.000 se vio beneficiado por un aumento del 6%, su salario nominal será de $1.060. Habría que analizar cuál es su salario real, es decir, si con el incremento que es un tanto aparente le permite cubrir la variación de precios de su canasta representada por los bienes y servicios, así obtener su salario real pues si la misma se ve afectada por un incremento en los precios del 8,2% tiene una pérdida de poder adquisitivo del 2,03% y su salario real sería de $979,7 (1000 * (1-0,0203). Queda evidente que deberá consumir menos unidades de bienes o servicios. De otra forma lo podemos ver representado en el eje de tiempo:

0		1	
/_________		_/	
1.000	(1+0,06)	1.060	$ Salario Nominal
1.000	(1+0,082)	1.082	$ Canasta de Bienes o Servicios
1		-22	$ Pérdida del momento 1
1.000	(1-0,0203)	979,7	Salario real

Otra forma es hablar de Valores corrientes y valores constantes, en donde el salario nominal está representado en valores corrientes, pues contiene la tasa de aumento en los haberes, y trabajar a Valores constantes es considerar el salario real, es decir, libre del efecto inflacionario para medir justamente si el incremento en los haberes cubre el efecto de los precios en la canasta de bienes y servicios.

La pérdida de $ 22 del momento 1 = $1000.(1+0,082).(-0,0203)$

Características de la tasa real de interés

- ✓ La tasa real de interés es negativa si la tasa de interés nominal o aparente es menor a la tasa de inflación.
- ✓ La tasa real de interés es positiva si la tasa de interés nominal o aparente es mayor a la tasa de inflación.
- ✓ La tasa real de interés es nula si la tasa de interés nominal o aparente coincide con la tasa de inflación.
- ✓ La tasa de interés nominal o aparente no puede ser negativa, porque pierde su sentido financiero.
- ✓ Si hay deflación entonces la tasa real de interés será necesariamente positiva.
- ✓ La tasa real de interés no es igual a la diferencia entre las tasas aparente y la de inflación.

Veamos las fórmulas utilizadas.

Si $r = \dfrac{i-\varphi}{1+\varphi}$; $r.(1+\varphi) = i - \varphi$ $\quad r + r\varphi + \varphi = i$

$$\boxed{i = r + \varphi + r.\varphi}$$

Como valor aproximado, podríamos considerar en el caso de que se tratase de tantos muy pequeños depreciar el último término: $r.\varphi$ de la expresión anterior. Se trataría de ún cálculo sencillo y aproximado admitido para valores pequeños.

Aplicaciones

1) El sector "Determinación de Tasas Activas" de la entidad X necesita establecer la tasa de interés del mes siguiente de modo tal que la tasa real de interés se mantenga constante, si en el momento actual la tasa activa es del 7% mensual y el incremento de precios es del 5,6% mensual y se espera para el mes siguiente un incremento de precios del 6,5% mensual.

   Rta.: i = 0,0791193.

$$r = \frac{(1+0{,}07)}{(1+0{,}056)} - 1 = 0.0132575.$$

$$0{,}0132575 = \frac{1+i}{1+0.065} - 1, \text{ despejando } i = 0{,}0791193$$

2) Se recibe un préstamo al 4,2% mensual. Si la inflación anual es del 62%. ¿Qué tasa de interés activa anual podría abonarse por un crédito al que se le aplica corrección monetaria?

Rta.: $r_{365} = 0{,}0182995.$

$$i_{365} = (1+0{,}0422)^{365/30} - 1.$$
$$i_{365} = 0{,}6496453.$$
$$r_{365} = \frac{1+0{,}6496453}{1+0{,}62} - 1.$$
$$r_{365} = 0{,}0182995.$$

3) Se obtiene un préstamo cuyo capital será cancelado dentro de un año. Los intereses devengados se convienen pagarse cada 60 días, siendo la tasa activa del 48% nominal anual vencido para el plazo de 60 días. El deudor solicita reemplazarlo con otro con ajuste al 5,8% nominal anual con pago bimestral.
Determinar cuál debe ser la tasa anual de inflación esperada.

Rta.: $\varphi_{365} = 0{,}4982.$

$$i = \left(1+\frac{0{,}48 * 60}{365}\right)^{365/60} - 1 = 0{,}587251169.$$

$$r = \frac{0{,}058 * 60}{365} = 0{,}009534247$$

$$r(365) = [1+r(60)]^{365/60} - 1 = 0{,}059423884.$$

Entonces:

$$\varphi_{365} = \frac{(1+0{,}587251169)}{(1+0{,}059423884)} - 1$$

$$\varphi_{365} = 0{,}4982.$$

4) Se desea conceder un préstamo al que no se le puede aplicar factores de ajuste. Dicha operación será reintegrada mediante cuotas mensuales. Cuál sería la tasa de interés mensual a aplicar, si se desea obtener una tasa real de interés del 4% mensual y se prevé una inflación del 40% anual.

Rta.: 0,0696.

$\varphi_{30} = (1 + 0{,}40)^{1/12} - 1 = 0{,}0284362.$
$r_{30} = 0{,}04.$

$i^{30} = (1 + 0{,}04) * (1 + 0{,}0284362) - 1.$
$i^{30} = 0{,}0696$

La tasa i_{30} hallada es la tasa aparente que contiene un 2,84% de componente inflacionario.

5) Si la tasa de interés durante el mes de mayo fue del 32% mensual, en tanto que la de inflación fue del 25,1%. Para junio se espera una tasa de inflación del 30%. Cuál debe ser la tasa de interés para ese mes, de modo tal que la tasa real permanezca constante.

Rta.: $i_{junio} = 0{,}3717.$

$$r = \frac{(1 + 0{,}32)}{(1 + 0{,}251)} = 0{,}05515.$$

$$0{,}05515 = \frac{(1 + i)}{(1 + 0.3)} - 1 = 0{,}3717.$$

Existe otro camino y es utilizar una fórmula directa. Para ello se parte de $r = \frac{i - \varphi}{1 + \varphi}$; despejamos i:

$i = r\,.\,(1+ \varphi) + \varphi$

Si:
$$i_1 = r\,.\,(1+ \varphi_1) + \varphi_1$$
$$i_0 = r\,.\,(1+ \varphi_0) + \varphi_0$$
$$\Delta i = r\,.\,(1+ \varphi_1) + \varphi_1 - [r\,.\,(1+ \varphi_0) + \varphi_0]$$
$$\Delta i = r + r.\,\varphi_1 + \varphi_1 - r - r.\,\varphi_0) - \varphi_0$$
$$\Delta i = r.\,(\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_1 - \varphi_0)$$
$$\Delta i = r\,.\,\Delta\varphi + \Delta\varphi$$
$$\Delta i = \Delta\varphi\ (1 + r).$$
$$\Delta i = (0{,}30 - 0{,}251)\ (1 + 0{,}05515) = 0{,}05170.$$

En donde Δ = variación relativa —incremento o decremento—.
Entonces: $i_{junio} = 0{,}32 + 0{,}0517 = 0{,}3717.$

6) Determinar la tasa real de interés, en el caso de un depósito que se coloca a comienzos del mes de septiembre por un capital de $ 5.000 renovando al vencimiento —mensual— hasta fines de noviembre. La tasa de interés pactada fue del 6,5% mensual —septiembre—, 5,5% para octubre y 6% para el mes de noviembre.

La evolución del índice de precios al consumidor publicado por el INDEC alcanzó los siguientes valores:

Agosto.............100.165,53.
Septiembre.....102.164,18.
Octubre...........104.152,74.
Noviembre......106.619,62.

Rta.: $r_{trim} = 0{,}1188943$.

$$r_{trimestral} = \frac{(1+0{,}065)\,.\,(1+0{,}055)\,.\,(1+0{,}06)}{\dfrac{106619{,}62}{100165{,}53}} - 1$$

7) Calcular la tasa real de interés pasiva correspondiente al mes de mayo, al de junio, la del bimestre y la promedio mensual resultante, sabiendo que los valores del Indice de precios y las T.N.A. para el plazo de 30 días pagadas para operaciones de depósitos en pesos fueron los siguientes:

Mes	*I.P.C.*
Abril 2004	*145,43*
Mayo 2004	*146,50*
Junio 2004	*147,32*

Mes	*T.N.A.(365/30)*
Mayo 2004	*2,50%*
Junio 2004	*2,62%*

Rta.: $r_{mayo} = (-0{,}005264)$; $r_{junio} = (-0{,}003425)$; $r_{bimestral} = (-0{,}0086706)$ y $r_{mensual} = (-0{,}0044)$.

$$r_{mayo} = \frac{\left(1+\dfrac{0{,}025.30}{365}\right)}{\dfrac{146{,}50}{145{,}43}} - 1 = (-0{,}005264)$$

$$r_{junio} = \frac{\left(1+\dfrac{0{,}0262.30}{365}\right)}{\dfrac{147{,}32}{146{,}50}} - 1 = (-0{,}003425)$$

$$r_{mensual} = [\,1 + (-0{,}0086706)]^{1/2} - 1 = (-0{,}0044)$$

$$\frac{\left(1+\dfrac{0{,}025.30}{365}\right).\left(1+\dfrac{0{,}0262.30}{365}\right)}{\dfrac{147{,}32}{145{,}43}} - 1 = r_{60} \qquad r_{60} = (-0{,}0086706)$$

C.E.R.

COMO INDEXAR CONTRATOS

CER (Base 2/02/02 = 1)

Fecha	Indice	Fecha	Indice
07/03	1,7628	23/03	1,7664
08/03	1,7630	24/03	1,7666
09/03	1,7633	25/03	1,7668
10/03	1,7635	26/03	1,7671
11/03	1,7637	27/03	1,7673
12/03	1,7639	28/03	1,7675
13/03	1,7642	29/03	1,7677
14/03	1,7644	30/03	1,7680
15/03	1,7646	31/03	1,7682
16/03	1,7648	01/04	1,7684
17/03	1,7651	02/04	1,7687
18/03	1,7653	03/04	1,7689
19/03	1,7655	04/04	1,7691
20/03	1,7657	05/04	1,7694
21/03	1,7660	06/04	1,7696
22/03	1,7662		

CVS (Base 4° Trim. 2001 = 100)

Fecha	Indice	Fecha	Indice
Ago '02	99,57	Jun '03	101,97
Set. '02	99,73	Jul. '03	104,30
Oct. '02	99,75	Ago. '03	106,90
Nov. '02	100,24	Set. '03	109,49
Dic. '02	100,56	Oct. '03	112,27
Ene. '03	102,23	Nov. '03	114,32
Feb. '03	102,47	Dic. '03	116,80
Mar. '03	101,15	Ene. '04	119,38
Abr. '03	101,41	Feb. '04	121,86
May. '03	101,48	Mar. '04	123,01

Fuente: BCRA/INDEC

El "Coeficiente de Estabilización de Referencia" es creado a través del Decreto N° 214/02 del Poder Ejecutivo Nacional cuando convirtió a pesos las obligaciones en dólares u otra moneda extranjera de dar sumas de dinero.

La Resolución N° 47 del año 2002 del Decreto 214/02 del Ministerio de Economía de fecha 7 de febrero de ese año establece la metodología de cálculo de este indicador el que se elabora diariamente.

En Anexo se informan los valores del CER desde su origen.

El "Coeficiente de Estabilización de Referencia" refleja la tasa de variación diaria obtenida de la evolución mensual del Indice de Precios al Consumidor (I.P.C) publicado por el Instituto Nacional de Estadística y Censos (I.N.D.E.C.).

$$CER_t = F_t \,.\, CER_{t-1}$$

La fecha base u origen del CER es el 02/02/02 cuyo valor es 1 y diariamente este indicador se irá incrementando en función de la tasa de variación diaria equivalente a la variación mensual de los precios reflejados en el I.P.C.

Mientras que las Series Estadísticas elaboradas por B.C.R.A. cuyas bases son un indicador financiero, el CER tiene como base un indicador de la economía. Le compete su elaboración y publicación al Banco Central de la República Argentina. Las Series difunden una variación relativa acumulada desde un momento dado —en %— y el CER un monto de una unidad desde un momento dado.

Se publica mensualmente los valores del CER a partir del día 7 y hasta el día 6 del mes siguiente con periodicidad diaria y, como todo índice, el mismo se construye a partir de una variación relativa con cierto desfase. Acá debemos observar que hay dos tramos para su construcción:

- a partir del día 7 de cada mes y hasta el último día del mes
- a partir del día 1 del mes y hasta el día 6 del mismo mes

Esquemáticamente:

Información del CER en el: Mes "j" Mes "j+1"

Del día: 6 7 8 9 30 1 2 3 4 5 6

$$F(t)=\left(\frac{IPC_{j-1}}{IPC_{j-2}}\right)^{\frac{1}{k_j}} \qquad F(t)=\left(\frac{IPC_{(j+1)-2}}{IPC_{(j+1)-3}}\right)^{\frac{1}{k_{j+1}}}$$

denominando:

F(t) = Factor de corrección monetaria del día "t"

$IPC_{(j-1)}$ = Indice de Precios al Consumidor publicado por el I.N.D.E.C. correspondiente al mes (j-1)

k_j = cantidad de días del mes "j" en que estoy construyendo el índice.

Supongamos que debemos armar el C.E.R. para el mes de abril, sabemos que cada período de construcción inicia el día 7 del mes j y llega al día 6 del mes (j+1). En nuestro ejemplo comprende el tramo 7-04 al 06-05.

La base para armar el coeficiente es la tasa de variación de precios del mes anterior, pues para el primer tramo que inicia el 7 hasta el último día del mes, necesitamos el cociente entre el Indice de Precios al Consumidor (IPC) de marzo (si j=4, entonces j-1=3) y el del es de febrero, por ende el coeficiente hallado es (1+inflación de marzo) pues no nos olvidemos que los Indices publicados por el INDEC son a fin de cada mes.

Luego, para armar los primeros 6 días del mes (j+1), es decir mayo, necesitamos el cociente entre I(j+1)-2/ I(j+1)-3 , o sea I(5)-2=3/ I(5)-3=2, es decir nuevamente utilizamos el mismo coeficiente (1+inflación de marzo).

Para hallar la tasa diaria de variación tendremos que ver el exponente fraccionario de la fórmula cuya raíz representa la cantidad de días que tiene el mes j y el mes (j+1), respectivamente. Por tal motivo, el coeficiente de variación diario será diferente según el tramo que contiene j o el tramo que contiene (j+1). Salvo en casos en que los meses sucesivos tenga igual cantidad de días, tales como julio y agosto o diciembre y enero; pues para construir el CER para el período 7-12 al 06-01; proyectamos la inflación diaria equivalente a la inflación del mes de noviembre con raíz=31, para el cálculo de la tasa diaria equivalente de inflación tanto para el mes de diciembre de proyección como de enero pues ambos meses contienen 31 días. Situación similar ocurre para el período del CER 7-07 al 6-08 cuyos valores reflejan la tasa diaria de inflación del mes de junio hallada mediante raíz=31 pues 31 días tiene el mes de julio y el de agosto en que se elabora el CER.

Concluimos que el CER del día 7 del mes j hasta el día 6 del mes (j+1) refleja la tasa de variación diaria equivalente a la tasa de variación mensual del Indice de Precios al Consumidor del mes j-1 publicado por el iNDEC. Para determinar la tasa diaria de variación el exponente de la fórmula tomará "el número de días que contiene el mes en que se elabora el C.E.R".

Aplicación

Reconstruir los valores del CER

	I.P.C.
Diciembre	137,57
Enero	139,38
Febrero	140,17
Marzo	140,99

Fecha	CER_t
6/4	1,4357
7/4	1,4360
8/4	1,4363
9/4	1,4365
30/4	1,4424
1/05	14427
...	...
06/05	1,4440

$$CER_{7;4} = 1,4357.\left(\frac{140,99}{140,17}\right)^{\frac{1}{30}} = 1,4360$$

$$CER_{8;4} = 1,4357.\left(\frac{140,99}{140,17}\right)^{\frac{2}{30}} = 1,4363$$

$$CER_{9;4} = 1,4357.\left(\frac{140,99}{140,17}\right)^{\frac{3}{30}} = 1,4365$$

...

$$CER_{30;4} = 1,4357.\left(\frac{140,99}{140,17}\right)^{\frac{24}{30}} = 1,4424$$

$$CER_{1;5} = 1,4424.\left(\frac{140,99}{140,17}\right)^{\frac{1}{31}} = 1,4427$$

$$CER_{6;5} = 1,4424.\left(\frac{140,99}{140,17}\right)^{\frac{6}{31}} = 1,4440$$

Observamos que el exponente fraccionario contiene 30 y 31 como raíz, pues hasta el día último del mes que se está proyectando la variación de precios se considera 30 días por ser la cantidad que tiene el mes de abril, luego como debemos confeccionar el coeficiente para el mes de mayo que tiene 31 días, la raíz es 31. Es decir que el C.E.R. refleja la tasa diaria equivalente que surge de la inflación utilizando como raíz en el cálculo la cantidad de días del mes que se informa.

Aplicaciones del CER

Todas las obligaciones que se encontraban expresadas en moneda dólar o cualquier moneda extranjera y que fueron transformadas en pesos a partir de la Ley N° 25.561 o posteriormente se les aplica este Coeficiente de Estabilización de Referencia. Se establecieron excepciones, para que no produzca el impacto que podía generar dicha norma a personas que hubieran contraído entre otros:

- Préstamos dentro del mercado financiero institucionalizado con garantía hipotecaria hasta Dólares 250.000.
- Préstamos personales hasta Dólares 12.000 o bien hasta Dólares 30.000 con garantía prendaria.
- Contratos de locación de inmuebles celebrados con anterioridad a la sanción de la Ley 25.561 cuyo locatario fuere una persona física que lo destina a vivienda única familiar y de ocupación permanente.
  En cuyo caso en vez de ser de aplicación el CER se utiliza otro coeficiente cuya base no sea la variación de los precios al consumidor sino la variación de salarios. Este coeficiente se denomina C.V.S. (Coeficiente de Variación Salarial).

La llamada pesificación asimétrica obedecía a que los depósitos en dólares o moneda extranjera en el sistema financiero fueron convertidos a pesos, considerando \$1,40= 1 dólar. Por otro lado, los préstamos otorgados en el sistema financiero en dólares o moneda extranjera fueron convertidos a pesos considerando \$1 = 1 dólar. El C.E.R. se aplicaría a todas las operaciones celebradas con anterioridad al Decreto 214 del 2002.

Otras aplicaciones

Se necesita conocer el CER del día 30 de septiembre y 6 de octubre del 2005 conociendo el CER del día 6 de septiembre= 1,6609. Además el Indice de Precios al consumidor reflejó los siguientes valores:

I.P.C.	
Junio 2005	160,57
Julio 2005	162,18
Agosto 2005	162,89

$$CER_{30} = 1,6609.\left(\frac{162,89}{162,18}\right)^{\frac{24}{30}} = 1,6667$$

$$CER_{6} = 1,6667.\left(\frac{162,89}{162,18}\right)^{\frac{6}{31}} = 1,6681$$

Si el C.E.R. al 13/03/02 reflejó el valor 1,0295 = 1,03 y al 27/03/02 1,044. ¿Cuál es la tasa de variación mensual proyectada y de qué mes?

$$CER_{27} = CER_{13}.(1+\varphi)^{\frac{14}{31}}$$

$$1,044 = 1,0295.(1+\varphi)^{\frac{14}{31}}$$

$$\varphi = \left(\frac{1,044}{1,0295}\right)^{\frac{31}{14}} - 1 = 0,0314$$

La tasa de variación mensual que se utilizó para confeccionar el CER desde el día 7 de marzo hasta el día 6 del mes siguiente fue el 3,14% que se corresponde con la inflación del mes de febrero. Si observamos los valores del I.P.C. ellos reflejan:

I.P.C de febrero 2002 = 102,97

I.P.C. de enero 2002 = 99,84

$$\varphi_{febrero} = \frac{102,97}{99,84} - 1 = 0,0314$$

C.V.S.

Este indicador es elaborado por el Instituto Nacional de Estadística y Censos, sustituyendo al C.E.R. en virtud de lo dispuesto por el Decreto N° 762/02. Para ello se elabora el Indice de Salarios y a partir de dicho índice se construye el C.V.S.

Refleja las variaciones de los salarios del sector público y del sector privado, los que son ponderados por sectores, de cuyo relevamiento surge:

- *Sector privado registrado*: de una encuesta que se realiza a empresas sobre la base de la información del Sistema Integrado de Jubilaciones y pensiones.
- *Sector privado no registrado*: es una estimación sobre la base de la información que se obtiene a través de la Encuesta Permanente de Hogares (E.P.H).
- *Sector público*: quienes deberán informar por puesto de trabajo considerado como normal y habitual.

Para la construcción del Indice de Salarios se ponderan los sectores de la siguiente forma:

- Sector Privado registrado:	50,16%
- Sector Privado no registrado:	19,93%
- Sector Público :	20,91%
	100,0%

El C.V.S. también de publicación diaria refleja la tasa diaria de variación salarial equivalente a la tasa de variación mensual de salarios del mes anterior. O sea:

$$C.V.S._{t} = \left(\frac{I.S._{J-1}}{I.S._{J-2}} \right)^{\frac{1}{K}}$$

en donde:

k : es el número de días que tiene el mes en que se construye el índice.

ANEXO

COEFICIENTE DE ESTABILIZACIÓN DE REFERENCIA (CER)

El CER es informado por el Banco Central de la República Argentina (Res.Nº 47/2002)

2002	Ener	Febrer	Marz	Abr	May	Jun	Jul	Agost	Set	Oct	Nov	Dic
1		----	1,019	1,049	1,089	1,191	1,251	1,297	1,339	1,373	1,393	1,399
2		1	1,019	1,05	1,091	1,195	1,253	1,299	1,341	1,374	1,394	1,399
3		1	1,02	1,051	1,092	1,199	1,254	1,3	1,342	1,375	1,395	1,399
4		1	1,021	1,052	1,093	1,203	1,256	1,302	1,344	1,376	1,395	1,399
5		1	1,022	1,054	1,095	1,207	1,257	1,303	1,345	1,377	1,396	1,399
6		1	1,022	1,055	1,096	1,211	1,259	1,305	1,346	1,378	1,397	1,4
7		1,001	1,023	1,056	1,1	1,212	1,26	1,306	1,347	1,378	1,397	1,4
8		1,002	1,024	1,057	1,103	1,214	1,262	1,307	1,349	1,379	1,397	1,4
9		1,002	1,025	1,059	1,107	1,216	1,263	1,309	1,35	1,38	1,397	1,4
10		1,003	1,026	1,06	1,11	1,217	1,265	1,31	1,351	1,38	1,397	1,4
11		1,004	1,028	1,062	1,114	1,219	1,266	1,311	1,352	1,381	1,397	1,401
12		1,005	1,029	1,063	1,117	1,22	1,268	1,313	1,353	1,381	1,397	1,401
13		1,006	1,03	1,064	1,121	1,222	1,269	1,314	1,354	1,382	1,397	1,401
14		1,006	1,031	1,066	1,124	1,224	1,271	1,315	1,355	1,383	1,397	1,401
15		1,007	1,032	1,067	1,128	1,225	1,272	1,317	1,356	1,383	1,397	1,402
16		1,008	1,033	1,068	1,132	1,227	1,274	1,318	1,357	1,384	1,398	1,402
17		1,009	1,034	1,07	1,135	1,228	1,275	1,319	1,358	1,384	1,398	1,402
18		1,01	1,035	1,071	1,139	1,23	1,277	1,321	1,359	1,385	1,398	1,402
19		1,011	1,036	1,073	1,143	1,232	1,278	1,322	1,36	1,386	1,398	1,403
20		1,011	1,037	1,074	1,146	1,233	1,279	1,323	1,361	1,386	1,398	1,403
21		1,012	1,038	1,075	1,15	1,235	1,281	1,325	1,362	1,387	1,398	1,403
22		1,013	1,039	1,077	1,154	1,236	1,282	1,326	1,363	1,387	1,398	1,403
23		1,014	1,04	1,078	1,157	1,238	1,284	1,327	1,364	1,388	1,398	1,403
24		1,015	1,041	1,08	1,161	1,24	1,285	1,329	1,365	1,389	1,398	1,404
25		1,015	1,042	1,081	1,165	1,241	1,287	1,33	1,366	1,389	1,398	1,404
26		1,016	1,043	1,082	1,168	1,243	1,288	1,331	1,367	1,39	1,399	1,404
27		1,017	1,044	1,084	1,172	1,245	1,29	1,333	1,369	1,39	1,399	1,404
28		1,018	1,045	1,085	1,176	1,246	1,291	1,334	1,37	1,391	1,399	1,405
29		----	1,046	1,087	1,18	1,248	1,293	1,335	1,371	1,392	1,399	1,405
30		----	1,047	1,088	1,183	1,25	1,294	1,337	1,372	1,392	1,399	1,405
31			1,048	----	1.187	----	1,296	1,338	---	1,393	----	1,405
2003	**Ener**	**Febrer**	**Marz**	**Abr**	**May**	**Jun**	**Jul**	**Agost**	**Set**	**Oct**	**Nov**	**Dic**
1	1,406	1,409	1,425	1,434	1,443	1,445	1,4402	1,438	1,444	1,4448	1,445	1,453
2	1,406	1,409	1,425	1,435	1,443	1,445	1,44	1,438	1,444	1,4448	1,445	1,453
3	1,406	1,409	1,426	1,435	1,443	1,445	1,4398	1,438	1,444	1,4448	1,445	1,453
4	1,406	1,409	1,426	1,435	1,444	1,445	1,4396	1,438	1,444	1,4448	1,445	1,453
5	1,406	1,409	1,427	1,435	1,444	1,445	1,4395	1,438	1,444	1,4448	1,445	1,454
6	1,407	1,409	1,428	1,436	1,444	1,445	1,4393	1,438	1,445	1,4448	1,446	1,454
7	1,407	1,41	1,428	1,436	1,444	1,4447	1,439	1,4383	1,445	1,445	1,446	1,454
8	1,407	1,411	1,428	1,436	1,444	1,4445	1,439	1,4385	1,445	1,445	1,446	1,454
9	1,407	1,411	1,428	1,437	1,444	1,4443	1,439	1,4387	1,445	1,445	1,446	1,454
10	1,407	1,412	1,429	1,437	1,444	1,4441	1,439	1,4389	1,445	1,445	1,447	1,454
11	1,407	1,413	1,429	1,437	1,444	1,4439	1,439	1,4391	1,445	1,445	1,447	1,455
12	1,407	1,413	1,429	1,437	1,444	1,4437	1,439	1,4393	1,445	1,445	1,447	1,455
13	1,407	1,414	1,429	1,438	1,444	1,4436	1,439	1,4395	1,445	1,445	1,447	1,455
14	1,407	1,415	1,43	1,438	1,444	1,4434	1,439	1,4397	1,445	1,445	1,448	1,455
15	1,408	1,415	1,43	1,438	1,444	1,4432	1,439	1,4399	1,445	1,445	1,448	1,455
16	1,408	1,416	1,43	1,439	1,444	1,443	1,439	1,4401	1,445	1,445	1,448	1,455
17	1,408	1,417	1,43	1,439	1,444	1,4428	1,439	1,4403	1,445	1,445	1,449	1,455
18	1,408	1,417	1,431	1,439	1,444	1,4426	1,439	1,4405	1,445	1,445	1,449	1,455
19	1,408	1,418	1,431	1,439	1,444	1,4424	1,439	1,4407	1,445	1,445	1,449	1,455
20	1,408	1,419	1,431	1,44	1,444	1,4422	1,439	1,441	1,445	1,445	1,449	1,456
21	1,408	1,419	1,432	1,44	1,444	1,4421	1,439	1,4412	1,445	1,445	1,45	1,456
22	1,408	1,42	1,432	1,44	1,445	1,4419	1,439	1,4414	1,445	1,445	1,45	1,456

23	1,408	1,421	1,432	1,441	1,445	1,4417	1,439	1,4416	1,445	1,445	1,45	1,456
24	1,408	1,421	1,432	1,441	1,445	1,4415	1,439	1,4418	1,445	1,445	1,451	1,456
25	1,408	1,422	1,433	1,441	1,445	1,4413	1,439	1,442	1,445	1,445	1,451	1,456
26	1,408	1,423	1,433	1,441	1,445	1,4411	1,439	1,4422	1,445	1,445	1,451	1,456
27	1,409	1,423	1,433	1,442	1,445	1,4409	1,438	1,4424	1,445	1,445	1,451	1,456
28	1,409	1,424	1,433	1,442	1,445	1,4407	1,438	1,4426	1,445	1,445	1,452	1,457
29	1,409	----	1,434	1,442	1,445	1,4405	1,438	1,4428	1,445	1,445	1,452	1,457
30	1,409	----	1,434	1,442	1,445	1,4404	1,438	1,443	1,445	1,445	1,452	1,457
31	1,409	----	1,434	----	1,445	----	1,438	1,4432	----	1,445	----	1,457

2004	Ener	Febrer	Marz	Abr	May	Jun	Jul	Agost	Set	Oct	Nov	Dic
1	1,457	1,4601	1,466	1,468	1,475	1,487	1,499	1,508	1,515	1,52	1,529	1,536
2	1,457	1,4602	1,466	1,468	1,476	1,488	1,499	1,508	1,515	1,52	1,529	1,536
3	1,4571	1,4603	1,466	1,468	1,476	1,488	1,499	1,508	1,515	1,521	1,53	1,536
4	1,4573	1,4604	1,466	1,468	1,476	1,489	1,5	1,508	1,515	1,521	1,53	1,536
5	1,4574	1,4605	1,467	1,468	1,477	1,489	1,5	1,509	1,516	1,521	1,53	1,537
6	1,4575	1,4606	1,467	1,468	1,477	1,49	1,5	1,509	1,516	1,521	1,531	1,537
7	1,4576	1,4608	1,467	1,468	1,477	1,49	1,501	1,509	1,516	1,521	1,531	1,537
8	1,4577	1,461	1,467	1,469	1,478	1,49	1,501	1,509	1,516	1,522	1,531	1,537
9	1,4578	1,4612	1,467	1,469	1,478	1,491	1,501	1,51	1,516	1,522	1,531	1,537
10	1,4579	1,4615	1,467	1,469	1,479	1,491	1,502	1,51	1,517	1,522	1,532	1,537
11	1,458	1,4617	1,467	1,47	1,479	1,491	1,502	1,51	1,517	1,523	1,532	1,537
12	1,4581	1,4619	1,467	1,47	1,479	1,492	1,502	1,51	1,517	1,523	1,532	1,537
13	1,4582	1,4621	1,467	1,47	1,48	1,492	1,502	1,51	1,517	1,523	1,532	1,537
14	1,4583	1,4623	1,467	1,471	1,48	1,493	1,503	1,511	1,517	1,524	1,532	1,537
15	1,4584	1,4625	1,467	1,471	1,481	1,493	1,503	1,511	1,517	1,524	1,533	1,537
16	1,4585	1,4627	1,467	1,471	1,481	1,493	1,503	1,511	1,518	1,524	1,533	1,537
17	1,4586	1,4629	1,467	1,471	1,481	1,494	1,503	1,511	1,518	1,524	1,533	1,537
18	1,4587	1,4631	1,467	1,472	1,482	1,494	1,504	1,512	1,518	1,525	1,533	1,537
19	1,4588	1,4634	1,467	1,472	1,482	1,494	1,504	1,512	1,518	1,525	1,533	1,537
20	1,4589	1,4636	1,467	1,472	1,483	1,495	1,504	1,512	1,518	1,525	1,534	1,537
21	1,459	1,4638	1,467	1,473	1,483	1,495	1,505	1,512	1,518	1,526	1,534	1,537
22	1,4591	1,464	1,467	1,473	1,483	1,495	1,505	1,512	1,519	1,526	1,534	1,537
23	1,4592	1,4642	1,468	1,473	1,484	1,496	1,505	1,513	1,519	1,526	1,534	1,537
24	1,4593	1,4644	1,468	1,473	1,484	1,496	1,505	1,513	1,519	1,527	1,534	1,537
25	1,4594	1,4646	1,468	1,474	1,485	1,497	1,506	1,513	1,519	1,527	1,535	1,537
26	1,4595	1,4648	1,468	1,474	1,485	1,497	1,506	1,513	1,519	1,527	1,535	1,537
27	1,4596	1,4651	1,468	1,474	1,485	1,497	1,506	1,514	1,52	1,528	1,535	1,537
28	1,4597	1,4653	1,468	1,475	1,486	1,498	1,506	1,514	1,52	1,528	1,535	1,537
29	1,4598	1,4655	1,468	1,475	1,486	1,498	1,507	1,514	1,52	1,528	1,535	1,537
30	1,4599	-	1,468	1,475	1,487	1,498	1,507	1,514	1,52	1,529	1,536	1,537
31	1,46	-	1,468	-	1,487	-	1,507	1,514	-	1,529	-	1,537

2005	En	Febr	Marz	Abr	May	Jun	Jul	Ag	Sept	Oct	Nov	Dic
1	1,5367	1,5476	1,5686	1,5849	1,6078	1,6183	1,6278	1,6418	1,6581	1,6669	1,6844	1,6986
2	1,5367	1,5480	1,5694	1,5854	1,6086	1,6186	1,6281	1,6423	1,6586	1,6671	1,6851	1,6990
3	1,5367	1,5485	1,5701	1,5859	1,6093	1,6189	1,6284	1,6428	1,6592	1,6674	1,6857	1,6994
4	1,5367	1,5490	1,5709	1,5864	1,6101	1,6191	1,6287	1,6433	1,6598	1,6676	1,6864	1,6998
5	1,5367	1,5494	1,5716	1,5869	1,6109	1,6194	1,6290	1,6438	1,6603	1,6678	1,6870	1,7003
6	1,5367	1,5499	1,5724	1,5874	1,6117	1,6196	1,6293	1,6443	1,6609	1,6681	1,6877	1,7007
7	1,5371	1,5507	1,5728	1,5882	1,6120	1,6200	1,6298	1,6448	1,6611	1,6687	1,6881	1,7013
8	1,5376	1,5515	1,5733	1,5890	1,6122	1,6203	1,6303	1,6453	1,6613	1,6693	1,6885	1,7020
9	1,5380	1,5523	1,5738	1,5898	1,6125	1,6206	1,6308	1,6459	1,6616	1,6700	1,6890	1,7027
10	1,5384	1,5532	1,5743	1,5907	1,6127	1,6210	1,6312	1,6464	1,6618	1,6706	1,6894	1,7033
11	1,5388	1,5540	1,5748	1,5915	1,6130	1,6213	1,6317	1,6469	1,6621	1,6712	1,6898	1,7040
12	1,5392	1,5548	1,5752	1,5923	1,6133	1,6216	1,6322	1,6474	1,6623	1,6718	1,6903	1,7047
13	1,5396	1,5556	1,5757	1,5931	1,6135	1,6219	1,6327	1,6480	1,6626	1,6725	1,6907	1,7053
14	1,5400	1,5564	1,5762	1,5939	1,6138	1,6223	1,6332	1,6485	1,6628	1,6731	1,6911	1,7060
15	1,5405	1,5572	1,5767	1,5947	1,6140	1,6226	1,6336	1,6490	1,6630	1,6737	1,6916	1,7066
16	1,5409	1,5581	1,5772	1,5955	1,6143	1,6229	1,6341	1,6496	1,6633	1,6743	1,6920	1,7073
17	1,5413	1,5589	1,5777	1,5963	1,6145	1,6232	1,6346	1,6501	1,6635	1,6750	1,6925	1,7080
18	1,5417	1,5597	1,5781	1,5972	1,6148	1,6236	1,6351	1,6506	1,6638	1,6756	1,6929	1,7086
19	1,5421	1,5605	1,5786	1,5980	1,6150	1,6239	1,6356	1,6512	1,6640	1,6762	1,6933	1,7093
20	1,5425	1,5613	1,5791	1,5988	1,6153	1,6242	1,6360	1,6517	1,6642	1,6768	1,6938	1,7100

21	1,5430	1,5621	1,5796	1,5996	1,6155	1,6245	1,6365	1,6522	1,6645	1,6775	1,6942	1,7106
22	1,5434	1,5630	1,5801	1,6004	1,6158	1,6248	1,6370	1,6528	1,6647	1,6781	1,6946	1,7113
23	1,5438	1,5638	1,5805	1,6012	1,6160	1,6252	1,6375	1,6533	1,6650	1,6787	1,6951	1,7119
24	1,5442	1,5646	1,5810	1,6021	1,6163	1,6255	1,6380	1,6538	1,6652	1,6794	1,6955	1,7126
25	1,5446	1,5654	1,5815	1,6029	1,6166	1,6258	1,6385	1,6543	1,6655	1,6800	1,6960	1,7133
26	1,5450	1,5663	1,5820	1,6037	1,6168	1,6261	1,6389	1,6549	1,6657	1,6806	1,6964	1,7139
27	1,5455	1,5671	1,5825	1,6045	1,6171	1,6265	1,6394	1,6554	1,6659	1,6812	1,6968	1,7146
28	1,5459	1,5679	1,5830	1,6053	1,6173	1,6268	1,6399	1,6559	1,6662	1,6819	1,6973	1,7153
29	1,5463	-	1,5834	1,6061	1,6176	1,6271	1,6404	1,6565	1,6664	1,6825	1,6977	1,7159
30	1,5467	-	1,5839	1,6070	1,6178	1,6274	1,6409	1,6570	1,6667	1,6831	1,6981	1,7166
31	1,5471	-	1,5844	-	1,6181	-	1,6414	1,6575	-	1,6838	-	1,7173

2006	Ene.	Febr.	Marz.	Abr.
1	1,7179	1,7374	1,7590	1,7684
2	1,7186	1,7381	1,7597	1,7687
3	1,7193	1,7388	1,7604	1,7689
4	1,7199	1,7394	1,7611	1,7691
5	1,7206	1,7401	1,7619	1,7694
6	1,7213	1,7408	1,7626	1,7696
7	1,7219	1,7416	1,7628	
8	1,7225	1,7424	1,7630	
9	1,7231	1,7432	1,7633	
10	1,7237	1,7440	1,7635	
11	1,7243	1,7448	1,7637	
12	1,7250	1,7456	1,7639	
13	1,7256	1,7464	1,7642	
14	1,7262	1,7471	1,7644	
15	1,7268	1,7479	1,7646	
16	1,7274	1,7487	1,7648	
17	1,7280	1,7495	1,7651	
18	1,7287	1,7503	1,7653	
19	1,7293	1,7511	1,7655	
20	1,7299	1,7519	1,7660	
21	1,7305	1,7527	1,7657	
22	1,7311	1,7535	1,7662	
23	1,7317	1,7543	1,7664	
24	1,7324	1,7551	1,7666	
25	1,7330	1,7559	1,7668	
26	1,7336	1,7567	1,7671	
27	1,7342	1,7575	1,7673	
28	1,7348	1,7583	1,7675	
29	1,7355	-	1,7677	
30	1,7361	-	1,7680	
31	1,7367	-	1,7682	

Observamos que están publicados los valores del CER con un formato de 3 y 4 decimales según sea el año.

SERIES ESTADÍSTICAS DE INDICADORES FINANCIEROS DEL B.C.R.A.

INDICES FINANCIEROS DEL BCRA					
Fecha	Caja de ahorros común acumulada 1.4.91 %	Tasa de crédito Ley 23.370 %	Serie tasas de interés p/créditos		Tasa Comunicado A14.290
			Actualización préstamo consolidado	Restantes operaciones %	
12/03/06	75,3518	319,2146	16.924,9478	2.776,9478	274,0319
13/03/06	75,3559	319,2913	16.939,335	2.778,9535	274,0705
14/03/06	75,3600	319,3680	16.953,7343	2.779,7452	274,1079
15/03/06	75,3641	319,4447	16.968,1458	2.781,1458	274,1527
16/03/06	75,3682	319,5215	16.982,5695	2.782,7308	274,1876
17/03/06	75,3723	319,5983	16.997,0053	2.784,2248	274,2250
18/03/06	75,3764	319,6751	17.011,4533	2.785,7196	274,2636
19/03/06	75,3805	319,7519	17.025,9136	2.787,2151	274,3022
20/03/06	75,3846	319,8287	17.040,3861	2.788,7114	274,3408
21/03/06	75,3893	319,9069	17.054,9238	2.790,2175	274,3856
Fuente: BCRA.					

Estas series estadísticas reflejan diariamente los intereses devengados por cada cien unidades monetarias, en general desde el 1.04.91. Están expresadas en tanto por ciento. Simplemente es el interés acumulado en tanto por ciento desde un momento origen hasta la fecha informada. Serán difundidas por Banco Central en una comunicación "B" de publicación mensual con los resultados de la encuesta diaria de las tasas de interés y la serie estadística resultante para cada uno de los días del mes.

En la dinámica de formación de estas variaciones se sigue una ley de capitalización exponencial con periodicidad diaria y cuyo parámetro "i" resulta ser en esencia una tasa de interés pasiva la que puede estar referida a uno o varios segmentos de la cartera de una entidad —caja de ahorro, plazo fijo...—, cuyo valor puede resultar incrementado en algún margen o coeficiente, o bien corregido por la exigencia de encaje.

Es decir que la elaboración de estas series diarias, tiene en su base un indicador financiero, representado por un tanto de interés correspondiente, en general, a dos días hábiles anteriores al de información. Como dicho tanto debe resultar representativo del sistema financiero, el Banco Central procede a establecer una tasa promedio en función a datos que recoge según encuesta diaria a un conjunto de entidades que participan en la encuesta de tasas de interés —consideradas como muestra de todo el sistema—. Dichos datos, entre otros, comprende: saldo de depósitos en caja de ahorro común, captación de depósitos a plazo divididos en dos tramos: entre 30 y 59 días de plazo y entre 60 y más días de plazo, clasificados por períodos de concertación, etc.

En el punto 5.1. "Criterios generales" de la Sección 5 "Series Estadísticas vinculadas a la tasa de interés" de la Comunicación "A" 3052 del 23/12/99 "Tasas de interés en las operaciones de crédito" establece que para elaborar la serie, sólo se consideraran las tasas de las imposiciones que sean recibidas por las entidades financieras sin recurrir a incentivos especiales para su captación, adicionales a tasa de interés.

Otro aspecto importante, es que al ser de publicación diaria, los valores para los días que no son hábiles se calculan tomando como base para el cálculo de la capitalización la tasa diaria equivalente a la tasa equivalente mensual de la última encuesta diaria que disponga.

Es importante, señalar que la Ley 23.928 —Ley de Convertibilidad— derogó todas las normas legales o reglamentarias que establecen o autorizan la indexación por precios, actualización monetaria, variación de costos u otra forma de repotenciación de deudas, impuestos, precios o tarifas de bienes, obras o servicios. Además, modificó el artículo 623 del Código Civil admitiendo el anatocismo —al referirse a capitalización de intereses sobre intereses; percepción de intereses sobre intereses— con la salvedad que "las partes tienen que acordar la periodicidad de la capitalización".

En efecto, el artículo 623 Cód. Civ. expresamente establece: "no se deben intereses de los intereses, sino por convención expresa que autorice su acumulación al capital con la periodicidad que acuerden las partes; o cuando liquidada la deuda judicialmente, con los intereses, el juez mandase pagar la suma que resultare y el deudor fuese moroso en hacerlo. *Serán válidos los acuerdos de capitalización de intereses que se basen en la evolución periódica de la tasa de interés de plaza*".

A su vez el B.C.R.A. con fecha 25.4.91 emitió la Comunicación "A"1827 con motivo de la sanción de la Ley 23.928 y el D.R. 529/91 titulada "Supresión de cláusulas de corrección de capital", en donde se dispuso:

Dejar sin efecto a partir del 1.4.91 las disposiciones del B.C.R.A. que autorizan la aplicación de cláusulas de corrección monetaria,... Tal como lo dispone en su art. 1° el D.R. 529/91 para el importe actualizado a esa fecha se tomará el índice del día o período que hubiera correspondido considerar si el 1.4.91 se efectuara el pago efectivo de la operación.

En las operaciones de pagos periódicos, para la percepción de la retribución deberá tenerse en cuenta el flujo financiero previsto al concertar los contratos, por lo que, en su caso, *corresponderá la capitalización parcial de los intereses que se devenguen.*

El B.C.R.A. publicará y elaborará diariamente series estadísticas vinculadas con la tasa de interés de caja de ahorro común. Las entidades podrán utilizar estas series sólo a efectos metodológicos como simples auxiliares de cálculo para determinar el componente de interés que devenguen sus operaciones.

Se devengarán intereses que se capitalizarán diariamente calculadas a la tasa diaria equivalente a la tasa de interés de caja de ahorro común —según encuesta del B.C.R.A.— corregido o no por la exigencia —según se haya convenido—, incrementada en el margen adicional pactado.

Recuerda lo previsto en el art. 623 del Cód. Civ. en el sentido que podrán concertarse operaciones en las que se establezca la acumulación al capital de intereses en función de la evolución periódica de la tasa de interés de caja de ahorro común según la encuesta que publica B.C.R.A., corregida o no por la exigencia de efectivo mínimo incrementada en el margen adicional que se pacte. Es decir que se admitió el anatocismo siempre y cuando las partes acuerden la periodicidad de la capitalización.

Recordemos que en el Código de Comercio (art. 569) ya estaba prevista la capitalización, al disponer que en los contratos de mutuo los intereses vencidos pueden producir intereses, sea por demanda judicial —siempre y cuando los intereses se adeuden por lo menos un año— o por convención especial. Agrega el citado artículo que producen igualmente intereses los saldos líquidos de las negociaciones concluidas al fin de cada año.

En la cuenta corriente bancaria los intereses se capitalizan por trimestre, salvo estipulación expresa en contrario (art. 795 del Cód. de Comercio) y por otro lado en la cuenta corriente mercantil (art. 788 del Cód. de Comercio) las partes podrán capitalizar los intereses en período que no baje de tres meses.

La Comunicación "A"1828 establecía la forma de elaboración de la serie de tasa de interés; en donde las diferentes cláusulas de capitalización utilizadas y que son definidas como nuevas pautas de ajuste de acuerdo a la Ley de Convertibilidad (Ley Nº 23.928- DR 529/91), mediante la cual se suprimieron mecanismos de corrección monetaria en las operaciones activas y pasivas a partir del 1.04.91 (Comunicación "A" 1827), se detallan a continuación y en el cuadro resumen.

El punto 5.6 de la Comunicación "A" 3052 establece con relación al uso de las series y la capitalización de intereses que las entidades podrán concertar operaciones en donde se estipulen cláusulas de capitalización de intereses a base de la evolución periódica de la tasa de interés, incrementada en el margen adicional que se pacte. Utilizando para el cálculo los valores que se obtengan de las series estadísticas de los puntos 5.2 y 5.5 de la referida comunicación.

Observemos al inicio del capítulo el cuadro publicado por diarios financieros quienes lo titulan "Indices Financieros del B.C.R.A.", con los valores de estas series financieras de intereses acumulados. No podemos trabajarlo como un índice, en el sentido de que el cociente entre dos Indices de Precios nos da $(1+\varphi)$ o dos Indices Financieros nos da $(1+i)$, este indicador justamente nos está dando el valor de una tasa i en porcentajes.

❑ I. Base Caja de Ahorro Común

• ***Base Caja de ahorro y a plazo fijo***

$$S_{t;k} = \left\{ \left(1 + \frac{S_{t-1}}{100} \right) . \left[\left(1 + i_{t-2} \right) \right] - 1 \right\} .100$$

Tal es el caso de la serie de tasa de interés de caja de ahorro establecido por la Comunicación "A" 1828, punto 1 y el comunicado Nº 14.290 para uso de la justicia —supletorio del ajuste por Indice de precios Mayoristas Nivel General con la Ley de Convertibilidad—.

Posteriormente, contemplada en el punto 5.2. "Serie de tasa de interés en caja de ahorro" y punto 5.5. "Serie de tasa de interés de caja de ahorros y a plazo fijo y para uso de la justicia " de la Comunicación "A" 3052 del 23.12.99.

Como observamos en la fórmula esta serie refleja diariamente la capitalización de la tasa diaria equivalente a la T.E.M. de interés promedio ponderada de los depósitos en caja de ahorro y a plazo fijo impuestos en pesos correspondiente al 2° día hábil anterior a la fecha en que se informa la serie.

❑ II. Base Caja de Ahorro Común con más un margen del x%

$$S_{t;k} = \left\{ \left(1 + S_{t-1} \right) . \left[\left(1 + i_{t-2} \right) \left(1 + x \right)^{30/365} \right]^{\frac{1}{30}} - 1 \right\} .100$$

Se encuentra contemplada en el punto 5.3 "Serie de tasa de interés de los créditos comprendidos en la Ley 23.370" de la comunicación "A2 3052 del 23.12.99.

Esta serie refleja diariamente la capitalización de la tasa diaria equivalente a la T.E.M. de interés promedio ponderada de los depósitos en caja de ahorros, correspondiente al 2° día hábil anterior a la fecha en que se informa la serie más un margen del 6% efectivo anual.

❑ III. Base Caja de Ahorro Común multiplicada por un coeficiente k incrementada en un valor m.

$$S_{t;k} = \left[\left(1 + \frac{St-1}{100} \right) . \left(1 + i_{t-2} . k + m \right)^{1/30} - 1 \right] 100.$$

Actualmente punto 5.4. "Serie de tasa de interés de los créditos cuyo costo se encuentra vinculado al establecido por ell uso del préstamo consolidado (Sublímite clientela general) y para restantes operaciones" de la Comunicación "A" 3052 del 23.12.99.

Esta serie refleja diariamente la capitalización de la tasa diaria equivalente a la T.E.M. de interés promedio ponderada de los depósitos en caja de ahorros, correspondiente al 2° día hábil anterior a la fecha en que se informa la serie; multiplicada por una constante k=0,95 e incrementada en 2,5% ó 1,5% efectivo mensual según sea Sublímite Clientela General o Restantes Operaciones, respectivamente, o sea que:

m= 0,025 para Sublímite Clientela General
o bien 0,015 para Restantes Operaciones.

❑ IV. Otros modelos de series que han sido utilizados:

- ***Base Caja de Ahorro Común Corregida.***

$$S_{t;k} = \left\{ \left(1 + \frac{S_{t-1}}{100}\right) . \left((1 + \frac{i_{t-2}}{1-e} \right)^{\frac{1}{30}} - 1 \right\} .100$$

Establecida en la Comunicación "A" 1828, punto 2.

- ***Base Caja de Ahorro Común y Dep. a Plazo corregido por la exigencia de efectivo mínimo de esas colocaciones incrementada en un valor m.***

$$S_{t;k} = \left[(1 + \frac{S_{t-1}}{100}) . (1 + \frac{i_{t-2}}{1-e_{t-2}} + s)^{1/30} - 1 \right] 100.$$

Según se trate de la Comunicación "A" 1845 el valor de s= 0.009 y por Comunicación "A" será 0,005.

Metodología aplicada para la cuantificación de los intereses generados por los títulos valores "Bonos de Inversión y Crecimiento —1991— 5ª serie y en el segundo caso por los Bonos de Consolidación Económica 3ª serie. En el caso de la Comunicación "A" 1864 el margen resulta nulo, pero se encuentra contemplado en la referida circular.

- ***Base Caja de Ahorro Común y Dep. a Plazo corregido por la exigencia de efectivo mínimo de esas colocaciones multiplicada por un coeficiente k incrementada en un valor m.***

$$S_{t;k} = \left\{ \left(1 + \frac{S_{t-1}}{100}\right) . \left[\left(1 + \frac{i_{t-2}}{1-e} + k + m \right) \right]^{\frac{1}{30}} - 1 \right\} .100$$

Establecida por la Comunicación "A" 1828, puntos 4 y 5.

Además, el punto 5.6 de la Com. "A" 3052 contempla la posibilidad para establecer en los contratos cláusulas de capitalización de intereses a base de la evolución periódica de la tasa de interés incrementada en "el margen adicional que se pacte" a los valores de las series estadísticas.

Simbología:

S_t :	Interés acumulado generado por 100 unidades monetarias, desde el momento origen de la serie hasta el día t del mes k. Para t= 1;2;3;...28;29;30;31; constituyendo el máximo valor de t el ultimo día del mes k.
i_{t-2} :	Tasa de Interés efectiva mensual, en tanto por uno —según encuesta de B.C.R.A.— correspondiente al segundo día hábil anterior al de información. Podrá ser el de caja de ahorro o bien el promedio ponderado de depósitos en caja de ahorro y plazo fijo.
E :	Exigencia de efectivo mínimo del día t-2; t-3 —según se trate— del mes k que debe guardar la colocación considerada.
X :	Constante. Es el margen anual en tanto por uno establecido por el B.C.R.A. Inicialmente es del 6% efectivo anual.
k :	Constante. Establecido según Comunicación "A" 1636 en un valor = 0,95.
m :	Incremento en tanto por uno al costo financiero captación equivalente a 2,5 ó 1,5 puntos porcentuales; según se trate de sublímite Clientela General o Restantes Operaciones - puntos 4 y 5 Com. "A" 1828.
S :	Margen efectivo mensual en tanto por uno en que se incrementa el costo financiero de captación.

SERIES ESTADISTICAS (Sus orígenes)	**COMUNIC. "A" 1828 (actualmente "A" 3052)**	**1.Caja de Ahorro Común**	Tasa de interés correspondiente al 2do día hábil anterior	1.04.91
		2. Caja de Ahorro Común Corregida	Tasa de interés correspondiente al 2do día hábil anterior, multiplicada por un coeficiente k = 1/1-e	1.04.91
		3. Créditos Ley 23.370	Tasa de interés de caja de ahorro común correspondiente al 2do. día hábil anterior; más un margen del 6% efectivo anual	1.04.91
		4. Créditos Préstamo Consolidado Sublímite Clientela General	Tasa de interés de caja de ahorro común correspondiente al 2do día hábil anterior, multiplicada por un coeficiente k = 0,95/1-e, e incrementada en un 2,5% efectivo mensual	1.04.91
		5. Créditos Préstamo Consolidado - Restantes operaciones	Tasa de interés de caja de ahorro común correspondiente al 2do día hábil anterior, multiplicada por un coeficiente k = 0,95/1-e, e incrementada en un 1,5% efectivo mensual	1.04.91
	COMUNIC. "A" 1845	Costo financiero de captación, es decir la tasa de interés de caja de ahorro y plazo fijo —corregida por la exigencia de efectivo mínimo de cada depósito e incrementado en 0,9% efectivo mensual correspondiente al 3er. día hábil anterior—.		1.05.91
	COMUNIC. "A" 1864	Tasa de interés de caja de ahorro común y a plazo fijo multiplicada por un coeficiente c= 1/1-e, correspondiente al 3er. día hábil anterior incrementada en el margen adicional que se pacte.		1.05.91
	COMUNICADO LEY 14.290	Tasa de interés de caja de ahorro común y a plazo fijo correspondiente al 2do. día hábil anterior.		1.04.91
	COMUNIC. "A" 1888	Costo financiero de captación, es decir la tasa de interés de caja de ahorro común y plazo fijo correspondiente al 2do. día hábil anterior —corregida por la exigencia de efectivo mínimo, e incrementada en 0,5% efectivo mensual—.		10.10.91

Una demanda laboral por la suma de $ 18.000 al 29.04 resulta liquidada el 31.07, pactándose el ajuste de acuerdo a la tasa de interés para uso de la justicia difundida por Banco Central. Se conoce que la serie estadística de tasa de interés para uso de la justicia capitalizada desde el 1.04.91 registró los siguientes valores:

29.04......... 1,423%.
31.07......... 6,398%.
Determinar el monto de la liquidación.

Rta.: 18.883.

$$C(n) = 18000 \frac{(1 + 0.06398)}{(1 + 0.01423)} = 18.883$$

Capítulo XV

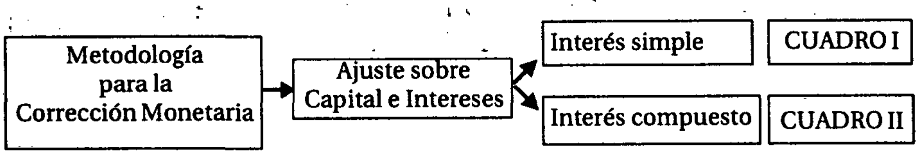
Operaciones indizadas

Objetivo

- Indizar operaciones financieras por efecto de corregir monetariamente las mismas.
- Trabajar con diferentes "Coeficientes de Corrección" o "Coeficientes de Ajuste" o simplemente "Factores de ajuste o corrección".

Capital único

Red de conceptos



Cuadro I
Ajuste sobre capital e interés calculados sobre capital ajustado

Los intereses se calculan siempre sobre el capital ajustado.

El capital se ajusta periódicamente sobre el capital ajustado del período anterior, sin los intereses, pues éstos se retiran ajustados periódicamente.

k	Concepto	Importe	Fórmula
0	Depósito inicial	10.000	$C_{(0)}$
1	Capital ajustado	11.000= 10000 (1+0,10)	$C'_{(1)}= C_{(0)}\,(1+\varphi_1)$
1	Intereses Ajustados	220=11.000 . 0,02	$I'_{(1)} = C'_{(1)}.i$
1	Monto ajustado	11.220=11.000+220	$C''_{(1)}= C'_{(1)} +I'_{(1)} = C_{(0)}\,(1+\varphi_1)$ $C''_{(1)}= C_{(0)}\,(1+\varphi_1)+ C_{(0)}\,(1+\varphi_1).i$ $C''_{(1)}= C_{(0)}\,(1+\varphi_1)\,(1+i)$
2	Capital ajustado	12.100 = 11.000 (1+0,10)	$C'_{(2)}=C'_{(1)}\,(1+\varphi_2)= C_{(0)}\,(1+\varphi_1)\,(1+\varphi_2)$

k	Concepto	Importe	Fórmula
2	Intereses Ajustados	242= 12.100 * 0,02	$I'_{(2)} = C'_{(2)}.i$
2	Monto ajustado	12.562= 12.100+220+242	$C''_{(2)}= C'_{(2)} + I'_{(1)} + I'_{(2)}$ $C''_{(2)} = C'_{(2)} + C'_{(1)}.i + C'_{(2)}.i$ $C''_{(2)} = C_{(o)}(1+\varphi_1)(1+\varphi_2) + C_{(o)}(1+\varphi_1).i + C_{(o)}(1+\varphi_1)(1+\varphi_2)i$ $C''_{(2)} = C_{(o)}\Pi(1+\varphi_j) + C_{(o)}(1+\varphi_1).i + +C_{(o)}(1+\varphi_1)(1+\varphi_2)i$ $C''_{(2)} = C_{(o)}\prod_{1}^{2}(1+\varphi_j) + C_{(o)}\, i\,[(1+\varphi_1) + (1+\varphi_1)(1+\varphi_2)]$
3	Capital ajustado	13.310 = 12.100 (1+0,10)	$C'_{(3)} = C'_{(2)}(1+\varphi_3)$ $C'_{(3)} = C_{(o)}(1+\varphi_1)(1+\varphi_2)(1+\varphi_3)$
3	Intereses Ajustados	266,20= 13.310 * 0,02	$I'_{(3)} = C'_{(3)}.i$
3	Monto ajustado	14038,20=13.310+220+242+266,2	$C''_{(3)} = C'_{(3)} + I'_{(1)} + I'_{(2)} + I'_{(3)}$ $C''_{(3)} = C'_{(3)} + C'_{(1)}.i + C'_{(2)}.i + C'_{(3)}.i$ $C''_{(3)} = C_{(o)}(1+\varphi_1)(1+\varphi_2)(1+\varphi_3) + C_{(o)}(1+\varphi_1).i + C_{(o)}(1+\varphi_1)(1+\varphi_2)i + C_{(o)}(1+\varphi_1)(1+\varphi_2)(1+\varphi_3)i$ $C''_{(3)} = C_{(o)}\Pi(1+\varphi_j) + C_{(o)}(1+\varphi_1).i + +C_{(o)}(1+\varphi_1)(1+\varphi_2)i + C_{(o)}(1+\varphi_1)(1+\varphi_2)(1+\varphi_3)i$ $C''_{(3)} = C_{(o)}\prod_{1}^{3}(1+\varphi_j) + C_{(o)}i\,[(1+\varphi_1) + (1+\varphi_1)(1+\varphi_2) + (1+\varphi_1)(1+\varphi_2)(1+\varphi_3)]$

Se desprende que:

$$\boxed{C'' = C_{(o)}\prod_{j=1}^{n}(1+\varphi_j) + \sum_{j=1}^{n} C'_j .i} \text{ en donde:}$$

$$C'_j = C_{(0)}.\prod_{p=1}^{j}(1+\varphi_j)$$

Se puede observar en la fórmula que el monto ajustado en cualquier momento "n" es la suma de los intereses periódicos ajustados y el capital inicial ajustado.

Con respecto al capital inicial, éste se ajusta hasta el momento n, y con respecto a los intereses periódicos ajustados, éstos se ajustan desde el origen hasta el momento en que cada uno de ellos se va retirando. Es decir: el Interés ajustado del período 1 es el Interés $C_0.i$ que debemos ajustar hasta el momento 1, luego el Interés ajustado del período 2 es el mismo Interés sin ajustar $C_0.i$ (si la tasa es la misma) que debemos ajustar hasta el momento 2, y así sucesivamente. Por eso, en la fórmula de arriba el segundo término de la ecuación es: $\sum_{j=1}^{n} C'_j .i$

y representa la suma de todos los intereses periódicos ajustados desde el 1º hasta n, en donde cada interés periódico ajustado es el producto de la tasa de interés periódica y el capital ajustado a cada momento j=1,2,...n.

La fórmula final de monto ajustado puede escribirse así:

$$\boxed{C''_n = C_{(o)}\prod_{j=1}^{n}(1+\varphi_j) + C_{(o)}.i\sum_{j=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(1+\varphi_j)}$$

Cuadro II
Ajuste sobre capital e interés

Los intereses se calculan siempre sobre el monto ajustado. Pues los intereses ajustados se incorporan o reinvierten y no se retiran hasta el vencimiento de la operación, momento en que se retira el capital y sus intereses, todos ajustados.

k	Concepto	Importe	Fórmula
0	Depósito inicial	10.000	$C_{(0)}$
1	Capital ajustado	11.000= 10000 (1+0,10)	$C'_{(1)}= C_{(o)}\,(1+\varphi_1)$
1	Intereses Ajustados	220=11.000 . 0,02	$I'_{(1)} = C'_{(1)}.i$
1	Monto ajustado	11.220=11.000+220	$C''_{(1)}= C'_{(1)} + I'_{(1)}$ $C''_{(1)}= C_{(o)}(1+\varphi_1)+ C_{(o)}\,(1+\varphi_1).i$ $C''_{(1)}= C_{(o)}(1+\varphi_1)\,(1+i)$
2	Capital ajustado	12.342 = 11.220 (1+0,10)	$C'_{(2)}=C''_{(1)}(1+\varphi_2)= C_{(o)}(1+\varphi_1)\,(1+\varphi_2)(1+i)$
2	Intereses Ajustados	246,84= 12.342 * 0,02	$I'_{(2)} = C'_{(2)}.i$
2	Monto ajustado	12.588,84= 12.342+246,84	$C''_{(2)}= C'_{(2)} + I'_{(2)}$ $C''_{(2)}= C'_{(2)} + C'_{(2)}.i=C'_{(2)}(1+.i)$ $C''_{(2)}=C_{(o)}(1+\varphi_1)\,(1+\varphi_2)(1+i)^2$ $C''_{(2)}=C_{(o)}[\prod_{1}^{2}(1+\varphi_j)](1+i)^2$
3	Capital ajustado	13.847,72=12588,84 (1+0,10)	$C'_{(3)}=C''_{(2)}(1+\varphi_3)$ $C'_{(3)}= C_{(o)}(1+\varphi_1)\,(1+\varphi_2)\,(1+\varphi_3)(1+i)^2$
3	Intereses Ajustados	276,95= 13.847,72 * 0,02	$I'_{(3)} = C'_{(3)}.i$
3	Monto ajustado	14124,67=13847,72+276,95	$C''_{(3)}= C'_{(3)} + I'_{(3)}$ $C''_{(3)}= C'_{(3)} + C'_{(3)}.i$ $C''_{(3)}= C_{(o)}(1+\varphi_1)(1+\varphi_2)(1+\varphi_3)(1+i)^2(1+i)$ $C''_{(3)}=C_{(o)}[\prod_{1}^{3}(1+\varphi_j)](1+i)^3$

$$\boxed{C'' = C_{(o)}[\prod_{j=1}^{n}(1+\varphi_j)].(1+i)^n}$$

Aplicaciones

1) Suponiendo que en el sistema financiero se permiten constituir depósitos ajustables por C.E.R. En el caso de un capital de $ 6000 depositado el 1 de junio. T.N.A. = 7,3% para el plazo de 30 días. Determine el valor final al 1/09, considerando:
   a) Retiro periódico mensual de intereses ajustados.
   b) Reinversión periódico mensual de intereses ajustados

Período	*C.E.R.*
1/06	*1,1910*
1/07	*1,2510*
1/08	*1,2971*
1/09	*1,3394*

Rta.: C(n) = 6865,12 y 6971,05.

a) *Planteo de la fórmula general: Retiro periódico de intereses ajustados*

$$C''(n) = [C(o) . \prod_{j=1}^{n} (1+ \Psi_j)] + C(o) . \quad i . \quad [\sum_{j=1}^{n} . \prod_{j=1}^{n} (1+ \Psi_j)] \}$$

$$C''_3 = \left[6000 \bullet \frac{1,3394}{1,1910}\right] + 6000 \bullet \frac{0,073 \cdot 30}{365}\left[\frac{1,2510}{1,1910} + \frac{1,2971}{1,1910} + \frac{1,3394}{1,1910}\right] = 6865,12$$

b) *Planteo de la fórmula general: Reinversión periódica de intereses ajustados*

$$C''(n) = C(o) [. \prod_{j=1}^{n} (1+ \Psi_j)] (1 + i)^n \rightarrow I.C$$

$$C''_3 = \left[6000 \bullet \frac{1,3394}{1,1910} \cdot \left(1 + \frac{0,073 \cdot 30}{365}\right)^3\right] = 6.971,05$$

2) Un capital pesificado al 6/02/02 en $10.000: determine el total pagado hasta el 6/10/02 por todo concepto si: a) pago con periodicidad mensual de intereses ajustados por CER; b) si se pagan al vencimiento —6/10/02— tanto el capital como sus intereses ajustados por CER. Tasa nominal anual p/el plazo de 30 días: 10,95%.
Los valores del CER son:

Fecha	Valores del CER
6/02/02	1,00
6/03/02	1,0223
6/04/02	1,0546
6/05/02	1,0961
6/06/02	1,2108
6/07/02	1,259
6/08/02	1,3046
6/09/02	1,3464
6/10/02	1,3778

Rta.: a) 14.648,44 y b) 14.801,83.

a) *Régimen de Capitalización a Interés simple para los intereses generados*

$$C"8 = \left[10000 \bullet \frac{1,3778}{1}\right] + 10000 \bullet \frac{0,1095 \cdot 30}{365}\left[1,0223 + 1,0546 + 1,0961 + 1,2108 + 1,2590 + 1,3046 + 1,3464 + 1,3778\right]$$

$$C''_8 = 13778 + 870,44 = 14648,44$$

b) *Régimen de Capitalización a Interés compuesto para los intereses generados*

$$C''8 = \left[10000 \bullet \frac{1,3778}{1} \cdot \left(1+\frac{0,1095 \cdot 30}{365}\right)^{8}\right] = 14.801,83$$

2) Un depósito ajustable de $ 6200 a 4 meses de plazo, con retiro periódico mensual de intereses ajustados arroja un valor final neto de $ 6974,8. Si el ajuste tiene un tanto del 1,2% mensual acumulativo y estas colocaciones sufren en cada renovación una retención del 4% sobre los intereses ajustados. Determinar la tasa nominal anual para el plazo de 30 días aplicada en la operación.
Confeccionar el cuadro de marcha para comprobar los valores.

Rta.: $j_{(365/30)} = 0,2340$

a) *Planteo de la fórmula general*:

$$C''(n) = C(o)\,[\prod_{j=1}^{n} (1+\Psi_j)] + C(o)\,.\ i\ .\ [\sum_{j=1}^{n} . \prod_{j=1}^{n} (1+\Psi_j)]\}$$

b) Caso particular, despejamos $j_{(365/m)}$ de la fórmula planteada con la retención b=0,04.

$$C''(n) = C(o)\,.[\prod_{j=1}^{n} (1+\Psi_j)] + C(o)\,.\ i\ .(1-b)\ [\sum_{j=1}^{n} . \prod_{j=1}^{n} (1+\Psi_j)]\}$$

$$6974,78 = 6200.\,(1+0,012)^4 + 6200\,.\frac{j(30)\,.30}{365}.(1-0,04)\,.[1,012+1,012^2+1,012^3+1,012^4]$$

despejando nos queda $j_{(365/m)} = 0,2340$

k	Concepto	Importe
0	Depósito inicial	C(0) = 6200
1	Capital ajustado	C'(1) = 6200 * (1+0,012)= 6274,40
1	Intereses ajustados	$I'(0;1) = C'(1) * \frac{0,2340 * 30}{365} . (1-0,04) =$ **115,85**
1	Monto Neto	C"(1) = 6274,40+115,85 =6390,25
2	Capital ajustado	$C'(2) = 6274,4\ (1+0,012) = 6349,69$ o bien $6200.\ (1+0,012)^2$
2	Intereses ajustados	$I'(1;2) = C'(2) * \frac{0,2340 * 30}{365}\ (1-0,04) =$ **117,23**
2	Monto Neto	C"(2) = 6349,69+115,85+117,23 = 6582,78
3	Capital ajustado	$C'(3) = 6349,69*(1+0,012) = 6425,89$ o bien $6200.\ (1+0,012)^3$
3	Intereses ajustados	$I'(2;3) = C'(3) * \frac{0,2340 * 30}{365} . (1-0,04) =$ **118,65**
3	Monto Neto	C"(3) = 6425,89+115,85 +117,23+118,65 =6777,61
4	Capital ajustado	$C'(4) = 6425,89\ (1+0,012) =$ **6503** o bien $6200.\ (1+0,012)^4$
4	Intereses ajustados	$I'(3;4) = C'(4) * \frac{0,2340 * 30}{365}\ (1-0,04) =$ **120,07**
4	Monto ajustado	C"(4) = 6503+115,85+117,23+118,65+120,07 = 6974,8

3) Un depósito ajustable de \$ 12.500 con reinversión periódica de intereses, siendo el ajuste del 2% mensual arroja un valor final de \$13.817.06 luego de 4 meses. Si los intereses ajustados sufren una retención del 3,8% en cada renovación de la operación, determine la tasa de interés mensual promedio aplicada considerando reinversión periódica de intereses ajustados y la correspondiente T.N.A. para el plazo de 30 días.
Halle la tasa de interés mensual aplicada si se hubiese tratado de retiro periódico de intereses arrojando para el mismo capital inicial el mismo valor final de \$ 13.817,06.

Rta.: $i_{(30)} = 0.005463$ y 0.0056704 $TNA_{(365/30)} = 0,0665$

a) *Planteo de la fórmula:*
Caso particular, se produce una retención de b = 0,038

$$C''(n) = C(o)\,[\,\prod_{j=1}^{n} (1+\Psi_j)\,]\;[1+i\,(1-b)\,]^{n} \quad \rightarrow \text{I.C.}$$

$$13817{,}06 = 12500.\,(1+0{,}02)^4\,.[\,(\,1+\ i\,(1-0{,}038)]^4$$

despejando $i(30) = 0{,}005463$

$$J_{\frac{365}{30}} = \frac{0{,}005463.365}{30} = 0{,}0665$$

$$C''(n) = C(o)\,.[\,\prod_{j=1}^{n} (1+\Psi_j)\,] + C(o)\,.\,i\,.\,(1-b)\;[\,\sum_{j=1}^{n}\,.\prod_{j=1}^{n}\,(1+\Psi_j)\,]\,\}\,. \rightarrow \text{I.S.}$$

$$13817{,}06 = 12500.\,(1+0{,}02)^4 + 12500\,.i(1-0{,}038)\,.[1{,}02+1{,}02^2+1{,}02^3+1{,}02^4]$$

despejando $i(30) = 0{,}0056704$

4) El 1.04 se efectuó un depósito ajustable de \$ 5.000 con retiro periódico de intereses —mensual—. La tasa de interés nominal anual para el plazo de 30 días es del 15%, renovándose hasta el 31/05 a igual tasa. Se ajustará con base financiera: esas tasas para el "ajuste financiero" mensual a aplicar —constante— surgirá de una media geométrica de las tasas de interés pagadas por esa entidad en el mes de marzo y de abril, las que seguidamente se detallan:

Período	T.E.M. —base 30 días—
1.3 al 15.03	2,0%
15.3 al 22.3	1,2%
22.3 al 31.03	3,6%
31.3	1,4%
1.4	1,6%
2.4 al 17.4	1,9%
17.4 al 1.5	3,0%

Determinar:
a) Los índices de ajuste y los coeficientes de corrección monetaria.
b) El montante reunido al cabo de 2 meses – al 31/05.
c) Confeccionar un cuadro de evolución del depósito.

✔ *Determinación del tanto de interés medio del mes de marzo i(m) y de abril i(a)*

$$i(m) = [(1+0,02)^{14/30}\ (1+0,012)^{7/30}\ (1+0,036)^{9/30}\ (1+0,014)^{1/30} - 1] = 0,0233669$$

$$i(a) = [(1+0,016)^{1/30}\ (1+0,019)^{15/30}\ (1+0,03)^{14/30} - 1] = 0,024018$$

$$i = \{[1+i(m)]\ [(1+i(a)]\}^{1/2} - 1 = 0,0236924$$

✔ *Confección del índice de ajuste*

$$I(0) = I_{1/4} = 100$$

$$I(1) = I_{1/5} = 102,3692 = 100\,(1 + 0,0236924)$$

$$I(2) = I_{31/5} = 104,7946 = 102,36924\,(1 + 0,0236924)$$

✔ *Determinación del coeficiente de corrección —constante—*

$$\frac{I(1)}{I(0)} = \frac{I(2)}{I(1)} = (1 + \varphi) = (1 + 0,0236924)$$

✔ *Monto de la operación*

$$C''(2) = 5000 * \frac{104,7946}{100,00} + 5000 * \frac{0,15 * 30 *}{365} \left[\frac{102,3692}{100,00} + \frac{104,7946}{100,00}\right]$$

$$C''(2) = 5239,73 + 5000 * 0,0123287 * 2,071638$$

$$C''(2) = 5239,73 + 127,70 = 5367,43$$

✔ ***Cuadro de Evolución del Depósito***

K	*Fecha*	*Concepto*	*Importe*
0	01/04	Depósito inicial	$C(0) = 5000$
1	01/05	Capital ajustado	$C'(1) = 5000 * \frac{I(1)}{I(0)} = 5000 * \frac{102,3692}{100,00} = 5118,46$ $C'(1) = 5000\ (1 + f) = 5000 * 1,023692 = 5118,46$
		Intereses ajustados	$I'(0;1) = C'(1) * \frac{0,15 * 30}{365} = 5.118,46 * \frac{0,15 * 30}{365} = 63,10$
		Monto ajustado	$C''(1) = 5116,50 + 63,10 = 5181,56$
2	31/5	Capital ajustado	$C'(2) = 5000 * \frac{I(2)}{I(o)} = 5000 * \frac{104,7946}{100,00} = 5239,73$ $C'(2) = 5000 * (1 + f) = 5000 * 1,047946 = 5239,73$
		Intereses ajustados	$I'(1;2) = C'(2) * \frac{0,15 * 30}{365} = 5.239,73 * \frac{0,15 * 30}{365} = 64,60$
		Monto ajustado	$C''(1) = 5239,73 + 63,10 + 64,60 = 5367,43$

CAPITALES MÚLTIPLES

Sistema de préstamos indizados

Objetivo:

- Utilizar cualquier Factor de Corrección en las operaciones financieras con base económica o bien financiera.

1) Efectuar el cuadro de marcha de un préstamo de $ 7.000 otorgado el 5/10 y a devolver en 2 cuotas que incluyen un interés del 2% mensual. Sistema alemán.

Período	Valor del Indice
30/09	200,00
31/10	228.00
30/11	239,40
31/12	253,76

a) *Construcción del índice diario*

$$I_{5;10} = \left(\frac{228}{200}\right)^{\frac{5}{31}} .200 = 204,27 \qquad I_{5,11} = \left(\frac{239,40}{228}\right)^{\frac{5}{30}} .228 = 229,86$$

$$I_{5,12} = \left(\frac{253,76}{239,40}\right)^{\frac{5}{31}} .239,40 = 241,66$$

Determinación de los Factores de ajustes:

$$1+\varphi_1 = \frac{229,86}{204,27} = 1,1252753$$

$$1+\varphi_2 = \frac{241,66}{229,86} = 1,051335$$

b) *Cuadro de marcha*

K	Fecha	V(k)	I(k)	t(k)	c(k)	V'(k)	Fc.Ajuste	V''(k)
0	5/10	7000,00	0	0	0	7.000	1,1252753	7876,93
1	5/11	7876,93	157,54	3.938,47	4.096,01	3938,46	1,051335	4140,64
2	5/12	4140,64	82,81	4140,64	4.223,45			

2) Una persona solicitó un préstamo de $ 5.000 a devolver en 40 mensualidades que incluyen una tasa de interés contractual anual del 6% capitalizable mensualmente y será reajustado por el Indice de Pre-

cios cuyos valores a continuación se transcriben. Fecha de contratación del préstamo: 27/06 del año x: 1° vencimiento al mes siguiente de contratado el préstamo mediante el sistema alemán ajustable. Se estima que la inflación por el período comprendido entre el 27/10 y el 27/12 del año siguiente (x+1) sea del 15% bimestral.

Período	Valor del Indice
27/06/x	529,038
27/07/x	578,053
27/10/(x+1)	1490,773

Integre el cuadro de marcha para el período comprendido entre el 27/10 y el 27/12 del año (x+1). Halle el valor del índice correspondiente al 27/11 y 27/12 del año (x+1).

a) *Construcción del índice a las fechas pedidas*

$$I_{27;11} = 1490,773\ (1+0,15)^{1/2}$$

$$I_{27;11} = 1490,773 \,.\, 1,0723805 = 1598,676$$

$$I_{27;12} = 1598,676\ (1+0,15)^{1/2}$$

$$I_{27;12} = 1598,676 .\ 1,0723805 = 1714,389$$

Si el factor de ajuste es el cociente entre dos índices y teniendo el valor de j mensual no resulta necesario trabajar con los índices.

b) *Saldo antes de abonar la cuota 16 – V(16)*

$$V(16) = \left[5000 - \frac{5000}{40} \,.\, 15\right] \frac{1490,773}{529,038} = 3.125 \,.\, \frac{1490,773}{529,038} = 8805,92$$

c) *Saldo luego de abonada la cuota 16 –V'(16)*

$$V'(16) = 5000 \,.\, \frac{1490,773}{529,038} \,.\, \frac{40-16}{40} = 8453,682$$

d) Cuadro de marcha

k	Fecha	V(k)	I(k)	t(k)	c(k)	V'(k)	Fc.Ajuste	V''(k)
0	...			0	0	5000		
16	27/10	8805,92	43,43	352,24	395,66	8453,68	1,0723805	9065,56
17	27/11	9065,56	44,71	377,73	422,44	8687,83	1,0723805	9316,66
18	27/12	9316,66	45,95	405,07	451,02	8911,59		

e) *Determinación de la deuda –V'(18)*

$$V'(18) = 5000 \,.\, \frac{1714,389}{529,038} \,.\, \frac{(40-18)}{40} = 8911,592$$

- Para determinar la cuota ajustada y la amortización ajustada a cualquier momento k se puede partir de los valores sin ajustar al que se le aplica el Factor de ajuste $\frac{I_k}{I_0} = (1+\varphi)$ para reexpresarlo desde el origen hasta el momento de valuación —k—.

- Para el cálculo de los Intereses ajustados al momento k es el simple producto de los factores $V_{(k)}^{ajustado} * i$.

- Para hallar el saldo de deuda ajustado podemos calcular el saldo de deuda nominal al que le aplicamos el factor de ajuste desde el inicio de la operación hasta el momento de valuación.

3) Con fecha 6/07 un deudor ha decidido cancelar una deuda. Datos: Préstamo otorgado el 6/05 por $ 9.000 ajustable por el "Indice Financiero" a reembolsar en 15 mensualidades.
Indice Base 6/05 ....10.795,60
Vencimiento de cada cuota: día 6 de cada mes. Cumplió con el pago del 6/06.
Tasa de interés aplicada sobre saldos: 1% mensual. Amortización creciente.
Calcular el monto que deberá abonar a los fines de rescindir el contrato si se acepta la cancelación anticipada.
El Sector Financiero suministra los siguientes datos, informando que el índice refleja una variación igual al valor de la tasa diaria equivalente a la tasa de interés efectiva mensual pasiva según encuesta incrementada en 1,5 puntos correspondiente a dos días anteriores.

Día	Indice Financiero	TEM encuesta
3/05	10700,23	8,5%
4/05	10720,15	10,7%
5/05	10754,25	11,6%
6/05	....	11,4%
4/06	12020,12	8,7%
5/06	12058,34	9,3%
6/06	....	
4/07	13125,12	10,7%
5/07	13174,80	11,3%

$$I_{6;5} = 10754{,}25 \,.\, (1+0{,}107+0{,}015)^{1/30} = 10795{,}60$$

$$I_{6;6} = 12058{,}34 \,.\, (1+0{,}087+0{,}015)^{1/30} = 12097{,}44$$

$$I_{6;7} = 13174{,}80 \,.\, (1+0{,}107+0{,}015)^{1/30} = 13225{,}45$$

$$1+\varphi_1=\frac{12097,44}{10795,60}=1,1205898$$

$$1+\varphi_2=\frac{13225,45}{12097,44}=1,0932436$$

Estos índices los utilizamos para determinar los coeficientes de ajuste. Amortización ajustada correspondiente a la cuota 1 (el fondo amortizante).

$$t^{\varphi}_1=9.000.\frac{12.097,44}{10.795,60}.s^{-1}(1;15;0,01) \qquad t^{\varphi}_1=V_0.\frac{I_1}{I_0}.s^{-1}(1;n;i)$$

$$t'_1=9.000.1,12058987.0,06212378$$

$$t'_1=10.085,31.0,06212378$$

$$t^{\varphi}_1=626,54$$

Para el cálculo de cada amortización periódica ajustada se puede partir de la amortización sin ajuste incluida en la cuota k y se procede a corregir desde el origen hasta k multiplicando por: $\frac{I_k}{I_0}$

$$t^{\varphi}_k=V_0.\frac{I_k}{I_0}.s^{-1}(1;n;i).(1+i)^{k-1}$$

- Cálculo de la cuota ajustada

$$c^{\varphi}_1=9.000.\frac{12.097,44}{10.795,60}.a^{-1}(1;15;0,01) \qquad c^{\varphi}_1=V_0.\frac{I_1}{I_0}.a^{-1}(1;n;i)$$

$$c^{\varphi}_1=9000\,.\,1,12058987\,.\,0,07212378$$

$$c^{\varphi}_1=10.085,31\,.\,0,07212378$$

$$c^{\varphi}_1=727,39 \qquad c^{\varphi}_k=V_0.\frac{I_k}{I_0}.a^{-1}(1;n;i)$$

- Cálculo del saldo de deuda ajustado

También sirve para la determinación de los intereses ajustados, pues al aplicarse la tasa sobre el saldo ya ajustado el interés determinado se encuentra ajustado. Para simplificar utilizaremos el método prospectivo, pudiéndose utilizar cualquier método.

$$V^{\varphi}_1=9.000.\frac{12097,44}{10765,60}.a^{-1}(1;15;0.01).a(1;15;0,01)=10.085,31$$

$$V^{\varphi}_1=V_0.\frac{I_1}{I_0}.a^{-1}(1;n;i).a(1;n;i)$$

$$V^{\varphi}_2=9.000.\frac{13.225,45}{10.795,60}.a^{-1}(1;15;0,01).a(1;15-2+1;0,01)$$

$$V^{\varphi}_2=V_0.\frac{I_2}{I_0}.a^{-1}(1;n;i).a(1;n-2+1;i)$$

$$V_2^{*} = 9.000\ .\ 1,2250778\ .\ 0,07212378\ .\ 13,00370304 = 10.340,74$$

$$V_k^{*} = V_0 . \frac{I_k}{I_0} . a^{-1}(1;n;i).a(1;n-k+1;i)$$

K	Fecha	V(k)	I(k)	t(k)	c(k)	V'(k)	Fc.Ajuste	V''(k)
0	06/05	9000	0	0	0	9000	1,1205898	10085,31
1	06/06	10085,31	100,85	626,54	727,39	9458,77	1,0932436	10340,74
2	06/07	10340,74	103,41					

10.444,15 ➔ Importe de rescisión

4) Un préstamo de $ 6.000 a devolver en 4 mensualidades consecutivas, primer pago al mes siguiente, es pactado con "Ajuste" utilizando el Indice XX Base= 112,0. T.E.M.= 0,5%.
Si los valores de los índices fueron los informados en el cuadro de abajo:
   a) Confeccione el cuadro de marcha considerando el sistema de préstamo francés ajustable.
   b) Confeccione el cuadro de marcha si se tratase del sistema de préstamo alemán ajustable.
   c) Determine el coste financiero mensual resultante de dicho flujos de fondos.
   d) Considerando una TEM igual al doble de la anterior. Realice los mismos cuadros de marcha y halle el correspondiente CFM aparente.

a) SISTEMA DE PRESTAMO FRANCES AJUSTABLE

Préstamo de: 6000,0	*Indice mom.0* 112,0	*Indice mom.3* 119,0	
Cant.cuotas 4,0	*Indice mom.1* 115,0	*Indice mom.4* 125,0	
T.E.M. 0,005	*Indice mom.2* 117,0		

K	V(k)	I(k)	t(k)	c(k)	V'(k)	Fc.Aj	V''(k)	Fluj. corrientes
0	6000,0	0,0	0,0	0,0	6000,0	1,0268	6160,7	-6000,0
1	6160,7	30,8	1528,7	1559,5	4632,0	1,0174	4712,6	1559,5
2	4712,6	23,6	1563,0	1586,6	3149,6	1,0171	3203,4	1586,6
3	3203,4	16,0	1597,7	1613,7	1605,7	1,0504	1686,7	1613,7
4	1686,7	8,4	1686,7	1695,1	0,0		0,0	1695,1
							C.F.M.=	2,9479%

b) SISTEMA DE PRESTAMO ALEMAN AJUSTABLE

Préstamo de: 6000,0	*Indice mom.0* 112,0	*Indice mom.3* 119,0	
Cant.cuotas 4,0	*Indice mom.1* 115,0	*Indice mom.4* 125,0	
T.E.M. 0,005	*Indice mom.2* 117,0		

K	V(k)	I(k)	t(k)	c(k)	V'(k)	Fc.Aj	V''(k)	Fluj.corrientes
0	6000,0	0,0	0,0	0,0	6000,0	1,0268	6160,7	-6000,0
1	6160,7	30,8	1540,2	1571,0	4620,5	1,0174	4700,9	1571,0
2	4700,9	23,5	1567,0	1590,5	3133,9	1,0171	3187,5	1590,5
3	3187,5	15,9	1593,8	1609,7	1593,8	1,0504	1674,1	1609,7
4	1674,1	8,4	1674,1	1682,5	0,0		0,0	1682,5
							C.F.M.	2,9472%

c) SISTEMA DE PRESTAMO FRANCES AJUSTAB LE

Préstamo de:	6000,0	*Indice mom.0*	112,0	*Indice mom.3*	119,0
Cant.cuotas	4,0	*Indice mom.1*	115,0	*Indice mom.4*	125,0
T.E.M.	0,010	*Indice mom.2*	117,0		

k	V(k)	I(k)	t(k)	c(k)	V'(k)	Fc.Aj	V*(k)	Fluj.corrientes
0	6000,0	0,0	0,0	0,0	6000,0	1,0268	6160,7	-6000,0
1	6160,7	61,6	1517,3	1578,9	4643,4	1,0174	4724,2	1578,9
2	4724,2	47,2	1559,1	1606,3	3165,1	1,0171	3219,2	1606,3
3	3219,2	32,2	1601,6	1633,8	1617,6	1,0504	1699,2	1633,8
4	1699,2	17,0	1699,2	1716,2	0,0		0,0	1716,2

C.F.M.= 3,4594%

d) SISTEMA DE PRESTAMO ALEMAN AJUSTAB LE

Préstamo de:	6000,0	*Indice mom.0*	112,0	*Indice mom.3*	119,0
Cant.cuotas	4,0	*Indice mom.1*	115,0	*Indice mom.4*	125,0
T.E.M.	0,010	*Indice mom.2*	117,0		

k	V(k)	I(k)	t(k)	c(k)	V'(k)	Fc.Aj	V*(k)	Fluj. corrientes
0	6000,0	0,0	0,0	0,0	6000,0	1,0268	6160,7	-6000,0
1	6160,7	61,6	1540,2	1601,8	4620,5	1,0174	4700,9	1601,8
2	4700,9	47,0	1567,0	1614,0	3133,9	1,0171	3187,5	1614,0
3	3187,5	31,9	1593,8	1625,6	1593,8	1,0504	1674,1	1625,6
4	1674,1	16,7	1674,1	1690,8	0,0		0,0	1690,8

CFM== 3,4581%

5) Una deuda luego de abonada la cuota del período p es de $ 43.268,9. A partir de allí se modifica la tasa de interés al 0,6% y se ajusta por CER. Restan abonar 6 cuotas. Los valores del CER son los siguientes:

Mom.	Valor del CER
p	1,4262
p+1	1,4528
p+2	1,4689
p+3	1,4554
p+4	1,4789
p+5	1,5275
p+6	1,6089

a) Calcule y arme el cuadro de marcha por las cuotas restantes considerando el sistema de prestamo francés y alemán. Determine el coste financiero mensual resultante en cada sistema de préstamo.

SISTEMA DE PRESTAMO FRANCES AJUSTABLE

Deuda	43268,9	*Cuotas pend*	6,0	*T.E.M =*	0,006

k	V(k)	I(k)	t(k)	c(k)	V'(k)	Fc.Aj	V*(k)	Flujos corrientes
0	43268,9	0,0	0,0	0,0	43268,9	1,0187	44075,9	-43268,9
1	44075,9	264,5	7236,6	7501,0	36839,3	1,0111	37247,6	7501,0
2	37247,6	223,5	7360,7	7584,1	29886,9	0,9908	29612,3	7584,1
3	29612,3	177,7	7336,8	7514,4	22275,5	1,0161	22635,2	7514,4
4	22635,2	135,8	7500,0	7635,8	15135,2	1,0329	15632,6	7635,8
5	15632,6	93,8	7792,9	7886,7	7839,7	1,0533	8257,4	7886,7
6	8257,4	49,5	8257,4	8307,0	0,0		0,0	8307,0

C.F.M.= 2,0199%

CFM Real.=0,6%

SISTEMA DE PRESTAMO ALEMAN AJUSTABLE

	Deuda	43268,9		*Cuotas pend*		6,0 *T.E.M =*	0,006	
k	V(k)	I(k)	t(k)	c(k)	V'(k)	Fc.Aj	V"(k)	Flujos corrientes
0	43268,9	0,0	0,0	0,0	43268,9	1,0187	44075,9	-43268,9
1	44075,9	264,5	7346,0	7610,4	36729,9	1,0111	37137,0	7610,4
2	37137,0	222,8	7427,4	7650,2	29709,6	0,9908	29436,5	7650,2
3	29436,5	176,6	7359,1	7535,8	22077,4	1,0161	22433,9	7535,8
4	22433,9	134,6	7478,0	7612,6	14955,9	1,0329	15447,4	7612,6
5	15447,4	92,7	7723,7	7816,4	7723,7	1,0533	8135,3	7816,4
6	8135,3	48,8	8135,3	8184,1	0,0		0,0	8184,1
							C.F.M .=	2,0177%
							CFM Real.=0,6%	

6) El 14.06 se otorga un préstamo de $ 8.000 a devolver en 3 cuotas ajustables según la serie acumulada que informa la tasa de interés de caja de ahorro común, con un interés del 0,5% mensual. Las amortizaciones serán del 30% el primer mes, 25% el segundo y el último del 45%.

Los valores de esta serie de base financiera son los siguientes:

14.06........... 2,6686%.
14.07........... 3,9490%.
14.08........... 5,3717%.
14.09........... 6,20%.

Efectuar el cuadro de marcha.

a) *Determinación de los coeficientes de ajuste.*

$$(1 + aj(0,1)) = \frac{1 + 0.039490}{1 + 0.026686} = 1.0124711.$$

$$(1 + aj(1,2)) = \frac{1 + 0.053717}{1 + 0.039490} = 1.0136865.$$

$$(1 + aj(2,3)) = \frac{1 + \ 0.062}{1 + 0.053717} = 1.0078607.$$

b) *Cuadro de marcha*

Fecha	k	V(k)	I(k)	t(k)	c(k)	V'(k)	Fc.Aj.	V"(k)
14/6	0	8.000	0	0	0	8.000	1.0124711	8.099,7
14/7	1	8.099,7	40,5	2.429,93	2.470,43	5.669,84	1.0136865	5.747,44
14/8	2	5.747,44	28,74	2.052,66	2.081,4	3.694,78	1.0078607	3.723,82
14/9	3	3.723,82	18,62	3.723,82	3.742,44	0	0	0

$$t_1^{\varphi} = 8.000.0,30.\frac{(1+0,03949}{(1+0,026686}$$

$$t_1^{\varphi} = 8.000.0,30.1,0124711 = 2.429,93$$

$$t_2^{\varphi} = 8.000.0,25.1,0124711.1,0136865 = 2.052,66$$

$$t_3^{\varphi} = 8.000.0,45.1,0124711.1,0136865.1,0078607 = 3.723,82$$

De otra forma utilizando los valores de las tasas acumuladas informadas:

$$t_3^{\varphi} = 8.000.0,45.\frac{\left(1+\frac{6,20}{100}\right)}{\left(1+\frac{2,6686}{100}\right)} = 3.723,82$$

Así seguimos ajustando cuota, saldo de deuda.

Parte III

Operaciones aleatorias (no ciertas)

CAPÍTULO XVI

TASA DE INTERÉS CON RIESGO

Definición

El riesgo es cualquier variación en un resultado.

Una persona acreedora no sabe a ciencia cierta si cobrará lo que se le debe. Toda operación tiene incertidumbre. El tema está en que se pueda estimar la probabilidad de recupero.

De todas formas existen en general dos tipos de riesgo:

- El riesgo mercado que afecta a las operaciones en su conjunto. El problema del riesgo mercado está representado por las amenazas que en el conjunto de la economía de un país o por efecto de la globalización pueden arrastrar a nuestra operación.

- El riesgo inherente a la operación individual, es un riesgo único o propio específico de cada operación. Si estamos tomando en consideración el riesgo de no pago por la otra parte podemos cubrirnos con una prima de riesgo que incrementa el tanto de interés.

Objetivo

En este capítulo sólo trabajaremos con el coeficiente de riesgo como componente de la tasa de interés transformando una operación cierta en aleatoria, ya que decisiones en contexto de riesgo e incertidumbre es tema de administración financiera.

Elementos a considerar en la operación

Si C_0 = Capital colocado como Operación de Inversión
i = Tasa de interés para una determinada operación "sin riesgo"
i^r = Tasa de interés que contiene el componente "riesgo" para una determinada operación
p = Probabilidad de recuperar ese capital colocado como Operación de Inversión $p = (1-q)$.
q = Probabilidad de perder ese capital colocado como Operación de Inversión $q= (1-p)$.
w = Coeficiente de recupero de ese capital colocado como Operación de Inversión.

Nuestro disparador es una operación cierta, sin riesgo con una T.E.M es del 0,8%. ¿Qué recargo debería aplicarse a este tanto de interés sin riesgo, considerando que la probabilidad de recuperar ese capital es del 75%?

	0	1
En nuestro ejemplo:	$C_0 = 1$	$C_1 = C_0 \cdot (1+0,008)$
Op. de Inversión "sin riesgo"	$C_0 = 1$	$C_1 = C_0 \cdot (1+i)$

Es decir, que si se trata de un capital de $ 1.000 colocado a la T.E.M. —sin riesgo— del 0,8% obtengo un valor final cierto de $ 1.008.

Si de estudios efectuados se determina que la operación está condicionada a una probabilidad de recuperar la unidad de capital invertido es un 75%, denominamos p= 0,75 —en tanto por uno—. De otra forma, significa que la probabilidad de perder la unidad de capital invertido es del 25%. Es decir q=0,25 —en tanto por uno—.

	0	1
En nuestro ejemplo:	$C_0 = 1$	$C_1 = C_0 \cdot (1+0,008)$
En nuestro ejemplo:	$C_0 = 1$	$C_1 = C_0 \cdot (1+i^r)0,75$

Planteamos la equivalencia entre Tasa sin Riesgo (i) y Tasa con Riesgo (i^r).

$$(1+i) = (1+i^r).p$$

$$(1+0,008) = (1+i^r)0,75$$

$$i^r = \frac{(1+0,008)}{0,75} - 1 = 0,344$$

Si ese mismo capital de $ 1.000 lo coloco a la T.E.M. —con riesgo— del 34,4% obtendría un valor final de $ 1344; pues hicimos: 1000 * (1+0,344) =1344. Si se cumple esa probabilidad de pérdida del 25% del capital, significa que perdería $ 336 (1334 . 0,25) quedando un valor final neto de $ 1.008, tal como en la operación sin riesgo.

Como nos piden el recargo que deberá hacerse a la tasa de interés libre de riesgo para conformar la tasa de interés que incluye el componente riesgo, hacemos: (1+0,008) (1+R) = (1+0,344)

En forma general: $(1+i) .(1+R) = (1+i^r)$

Despejamos y vemos que la tasa con riesgo:

$i^r = (1+i)\ (1+R)\ -1$; siendo i= tasa libre de riesgo y R= prima por riesgo o recargo. Si queremos hallar en cuánto se ha recargado la tasa libre despejamos R:

$$\boxed{R = \left[\frac{1+i^r}{1+i}\right] - 1}$$ Prima por riesgo en tanto por uno.

Siguiendo con el ejemplo: $R = \left[\frac{1+0,344}{1+0,008}\right] - 1 = 0,333$

Considerando el disparador anterior, pero el capital que se pierde no es el todo sino una porción: entonces la equivalencia planteada es otra y nos queda de la siguiente manera:

	0	1
Op.de Inversión "sin riesgo":	$C_0 = 1$	$C_1 = C_0 .(1+i)$
Op.de Inversión "con riesgo":	$C_0 = 1$	$C_1 = C_0 .[(1+i^r)p + (1+i^r)w.q]$

Es decir: $C_0 . (1+i) = C_0 .[(1+i^r)p + (1+i^r)w.q]$

$$C_0 . (1+i) = C_0 .[(1+i^r)p + (1+i^r)w.(1-p)]$$

Despejamos la tasa de interés con el componente riesgo "i^r":

$$C_0.(1+i) = C_0.\left[p + i^r.p + w + w.i^r - p.w - p.i^r.w\right]$$

$$(1+i) = \left[i^r.(p+w-p.w) + p + w - p.w\right]$$

$$i^r = \frac{(1+i)-(p+w-p.w)}{(p+w-p.w)}$$

$$\boxed{i^r = \frac{(1+i)}{(p+w-p.w)} - 1}$$ *Tasa de interés con prima de riesgo en función de "p"*

Si (1-q)=p entonces reemplazamos en la formula anterior y queda:

$$i^r = \frac{(1+i)}{(1-q)+w-(1-q).w} - 1$$

$$i^r = \frac{(1+i)}{(1-q)+w-w+qw} - 1$$

$$\boxed{i^r = \frac{(1+i)}{(1-q)+qw} - 1}$$ *Tasa de interés con prima de riesgo en función de "q"*

Caso particular de análisis:

a) p=1 w=1 ➔ Certeza de recuperar el capital. La probabilidad de cobrar es el 100% de todo el capital. Se trata de una Operación Financiera cierta.

$$i^r = \frac{(1+i)}{(p+w-p.w)} - 1 = \frac{(1+i)}{(1+1-1)} - 1 = i$$

La tasa con riesgo coincide a la tasa libre de riesgo.

b) q=1 w=0 ➔ Certeza de no recuperar el capital.

$$i^r = \frac{(1+i)}{1-q+w.q} - 1 = \frac{(1+i)}{(1-1+0)} - 1 = \infty$$

En estas condiciones no tiene sentido financiero prestar un capital que sabemos no vamos a cobrar.

Aplicaciones

1) Determinar la tasa de interés activa que deberá aplicarse en la línea de Préstamos Personales-Tarjetas, si la tasa sin riesgo es del 4,5% mensual y se estima un riesgo del 40% de perder todo el capital (o bien del 60% de recuperar todo el capital). Luego, calcular el recargo aplicado —R—.

Rta.: i'= 74,17% R = 66,67%

i = 0,045
q = 0,40 —probabilidad de perder el capital—
w = 0 —coeficiente de recuperación del capital—

$$(1+i) = (1+i^r)\,p + (1+i^r)\,w\,q$$

en función a "q" despejando queda:

$$i^r = \frac{1+i}{1-q+w\,q} - 1$$

$$i^r = \frac{1{,}045}{1-0{,}40+0.\,0{,}40} - 1 = \frac{1{,}045}{1-0{,}40} - 1 = 0{,}7417$$

$$R = \frac{1+i^r}{1+i} - 1 = \frac{1+0{,}7417}{1+0{,}045} - 1 = 0{,}6667$$

En el caso de tratarse de una operación cierta el monto de $ 100 inicial es $ 1045, suponiendo que la tasa aplicada en una operación aleatoria es del 74,17% el valor final sería $ 1741,7 y si se cumple con la estimación de q=0,40 se estaría perdiendo el 40% (1741,7*0,4= $ 696,7) y arribamos a un valor final neto de \$1.045. El tema de análisis será la viabilidad de una alta tasa de interés a la que se vería expuesta una operación de este tipo.

Comprobación: la tasa con riesgo será:
$i^r = (1+i) \cdot (1+R) - 1$
$i^r = (1+0{,}045) \cdot (1+0{,}6667) - 1 = 0{,}7417$

2) Calcular la tasa de interés activa que contenga el componente riesgo que deberá cobrarse en una línea de Préstamos Personales si la tasa activa sin riesgo es del 4,5% mensual y se considera una probabilidad del 60% de recuperar sólo el 55% de la inversión (o bien probabilidad del 40% de perder el 45% de la inversión). Determinar el recargo R.

Rta.: $i' = 0{,}2744$ $R = 21{,}95\%$.

$i = 0{,}045$
$p = 0{,}60 \rightarrow q = (1-p) = 0{,}40$
$w = 0{,}55$ —coeficiente de recuperación del capital—

$$(1+i) = (1+i^r)\,p + (1+i^r)\,w\,q$$
$$(1+0{,}045) = (1+i^r)\,0{,}60 + (1+i^r)\,.0{,}55\,.\,0{,}40$$

en función a "p" despejando queda:

$$i^r = \frac{1+i}{p+w-w\,p} - 1$$

$$i^r = \frac{1{,}045}{0.60 + 0.55 - 0.55.0.60} - 1 = \frac{1{,}045}{0.82} - 1 = 0{,}2744$$

De otra forma:

$$i^r = \frac{1+i}{1-q+w\,q} - 1$$

$$i^r = \frac{1{,}045}{1 - 0.40 + 0.55.0{,}40} - 1 = \frac{1{,}045}{0.82} - 1 = 0{,}2744$$

$$R = \frac{1+i^r}{1+i} - 1 = \frac{1+0{,}2744}{1+0{,}045} - 1 = 0{,}2195$$

En este caso el capital financiero logrado con una tasa de interés libre de riesgo para una inversión supongamos de \$ 1 es \$ 1,045.

0 ——————————— 1

Op.de Inversión "sin riesgo": $C_0 = 1$ *$C_1 = C_0 .(1+i)$*
Op.de Inversión "sin riesgo": $C_0 = 1$ $C_1 = 1.(1+0{,}045) = 1{,}045$

Op. de Inversión "con riesgo" $C_0=1$ $\quad C_1= C_0 . [(1+i^r)\, p + (1+i^r)\, w.\, q]$

Op. de Inversión "con riesgo" $C_0=1$ $\quad C_1=1.[(1+0{,}2744)0{,}60+(1+0{,}2744)\, 0{,}55.0{,}40]$

$C_1= 1{,}2744 .0{,}60 + 1{,}2744 . 0{,}55.0{,}40$

$C_1= 0{,}76464 + 0{,}280368 = 1{,}045$

Comprobamos que a una tasa sin riesgo del 4,5% el valor final cierto generado por un capital de $ 1.000 es de $ 1045.
Pero si la operación es aleatoria y aplicamos una tasa del 27,44% el valor final aleatorio de este capital inicial de $ 1.000 es de $ 1.274,40. De generarse la pérdida —base del cálculo— estimada en la probabilidad del 40% de perder el 45% de la inversión, estaríamos cuantificándola en $ -229,4 (1274,40 * 0,40 * 0,45) quedando un valor final neto de $ 1.045 (1274,4 – 229,4). Nadie me puede asegurar que ello ocurra. Es un cálculo de probabilidades basado en estimaciones.

3) Calcular la tasa de interés activa que deberá cobrarse en la línea de Préstamos Personales si la tasa sin riesgo es del 4,5% mensual y se considera una probabilidad del 85% de recuperar sólo el 55% de la inversión (o bien probabilidad del 15% de perder el 45% de la inversión). Determinar el recargo R.

Rta.: i'= 12,06% R= 7,2%.

$i = 0{,}045$
$p = 0{,}85$
$w = 0{,}55$

$$(1 + i) = (1 + i^r)\, p + (1 + i^r)\, w\, q$$

en función a "p" despejando queda:

$$i^r = \frac{1 + i}{p + w - w\,p} - 1$$

$$i^r = \frac{1{,}045}{0.85 + 0.55 - 0.55.0.85} - 1 = \frac{1{,}045}{0.9325} - 1 = 0{,}1206$$

en función a "q" despejando queda:

$$i^r = \frac{1 + i}{1 - q + w\,q} - 1$$

$$i^r = \frac{1{,}045}{1 - 0{,}15 + 0.55 .0{,}15} - 1 = \frac{1{,}045}{0.9325} - 1 = 0{,}1206$$

$$R = \frac{1 + i'}{1 + i} - 1 = \frac{1 + 0{,}1206}{1 + 0{,}045} - 1 = 0{,}072$$

4) Calcular la tasa de interés activa que deberá cobrarse en la línea de Préstamos Personales si la tasa sin riesgo es del 4,5% mensual y se considera una probabilidad del 85% de recuperar sólo el 5% de la inversión (o bien probabilidad del 15% de perder el 95% de la inversión). Determinar el recargo R.

Rta.: i' = 21,87% R = 16,62%.

i = 0,045
p = 0,85
w = 0,05

$$(1+i) = (1+i^r)\,p + (1+i^r)\,w\,q$$

en función a "p" despejando queda:

$$i^r = \frac{1+i}{p+w-w\,p} - 1$$

$$i^r = \frac{1{,}045}{0.85 + 0.05 - 0.05{*}0.85} - 1 = \frac{1{,}045}{0{,}8575} - 1 = 0{,}2187$$

$$R = \frac{1+i'}{1+i} - 1 = \frac{1+0{,}2187}{1+0{,}045} - 1 = 0{,}1662$$

5) Calcular la tasa de interés activa que deberá cobrarse en la línea de Préstamos Personales si la tasa sin riesgo es del 4,5% mensual y se considera una probabilidad del 10% de recuperar sólo el 5% de la inversión (o bien probabilidad del 90% de perder el 95% de la inversión). Determinar el recargo R.

Rta.: 621% (sin sentido financiero); R = 589,95%.
i = 0,045
p = 0,10
w = 0,050

$$(1+i) = (1+i^r)\,p + (1+i^r)\,w\,q$$

en función a "p" despejando queda:

$$i^r = \frac{1+i}{p+w-w\,p} - 1$$

$$i' = \frac{1{,}045}{0.10 + 0.05 - 0.05.0.10} - 1 = \frac{1{,}045}{0.145} - 1 = 6{,}21$$

$$R = \frac{1+i'}{1+i} - 1 = \frac{1+6{,}21}{1+0{,}045} - 1 = 6{,}8995$$

No tiene sentido financiero.

El planteo sería que del valor final aleatorio de \$ 7,21 como pierdo el 90% del 95% de 7,21, es decir estimé la pérdida en \$ 6,165 (7,21*0,95*0,90= 6,165) se obtendría un neto de \$ 1,045.

6) Qué tasa debe aplicarse siendo la tasa sin riesgo del 3% y se considera:
   a) probabilidad del 80% de recuperar sólo el 70% de la inversión.
   b) probabilidad del 90% de recuperar sólo el 40% de la inversión.
   c) probabilidad del 10% de perder el 60% de la inversión.

Rta.: a) 11,17%; b) 11,17%; c) 11,17%.

a) $$i^r = \frac{1+i}{p+w-pw} - 1 = \frac{1+0{,}045}{0{,}80+0{,}70-0{,}80 \cdot 0{,}70} - 1 = 0{,}1117$$

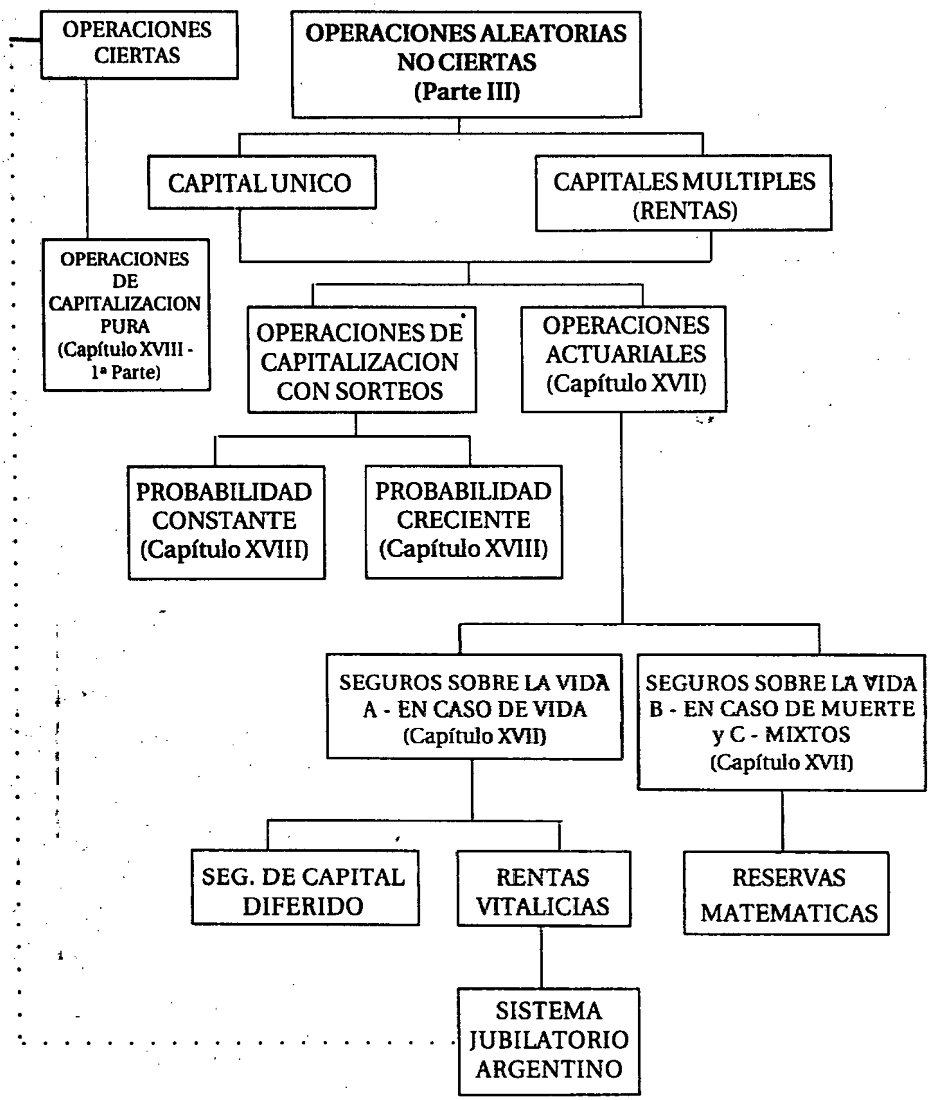
b) $$i^r = \frac{1+i}{p+w-pw} - 1 = \frac{1+0{,}045}{0{,}90+0{,}40-0{,}90 \cdot 0{,}40} - 1 = 0{,}1117$$

c) $$i^r = \frac{1+i}{1-q+qw} - 1 = \frac{1+0{,}045}{1-0{,}10+0{,}10 \cdot 0{,}40} - 1 = 0{,}1117$$

A continuación integramos en un cuadro valores de la tasa de interés con riesgo resultante según los tantos que se aplican de p y w; algunos de los cuales surgen de los ejercicios anteriores.
Vemos que a medida que la probabilidad de recupero del capital disminuye, entonces la tasa con riesgo aumenta. De la misma manera si el coeficiente de recuperación del capital es más bajo, indefectiblemente será más alta la tasa de interés con riesgo.
Es decir: $i^r = f(p;w)$.

i= tasa libre de riesgo ir=tasa con riesgo p= probabilidad de recupero del capital w=coeficiente de recuperación del capital			
i	p	w	ir
0,045	1		0,0450
0,045	0,9	0,9	0,0556
0,045	0,9	0,8	0,0663
0,045	0,9	0,7	0,0773
0,045	0,9	0,6	0,0885
0,045	0,9	0,5	0,1000
0,045	*0,9*	*0,4*	*0,1117*
0,045	0,9	0,3	0,1237
0,045	0,9	0,2	0,1359
0,045	0,9	0,1	0,1484
0,045	*0,85*	*0,55*	*0,1206*
0,045	*0,85*	*0,05*	*0,2187*
0,045	*0,8*	*0,7*	*0,1117*
0,045	*0,6*	*0,55*	*0,2744*
0,045	0,1	0,9	0,1484
0,045	0,1	0,5	0,9000
0,045	*0,1*	*0,05*	*6,2069*

Esquema de operaciones aleatorias (no ciertas)



CAPÍTULO XVII

OPERACIONES ACTUARIALES

Objetivos

- ➢ Manejar una tabla de mortalidad.
- ➢ Reconocer y poder clasificar una renta vitalicia.
- ➢ Aplicar las funciones actuariales en casos concretos del mundo real.
- ➢ Deducir primas puras únicas y periódicas para cualquier operación de seguro de vida sobre la vida se trate de capital único o de capitales múltiples.
- ➢ Utilizar las funciones actuariales aplicándola en el caso del sistema previsional argentino.

Nociones preliminares

En este cuadro exponemos los elementos de una función financiera y una función actuarial.

Funciones financieras	*Funciones actuariales*
- Capitales y tiempos ciertos	- Capitales disponibles y tiempos asociados a la supervivencia, por cuanto se refieren a la duración de la vida de un individuo. Por ello, se utilizarán para su valuación ***funciones biométricas que miden la vida y funciones financieras.***

Los seguros sobre la vida se valúan utilizando tablas con las funciones biométricas, es decir tablas que miden la vida (*bio*: vida y *métrico*: medida) y con las funciones financieras. Según el tipo de seguro que valuemos tendremos distintas tablas a utilizar. Por ejemplo: tablas para mujeres y tablas para hombres por tener esperanzas de vida diferente.

Tabla de Mortalidad

Definición

La tabla de mortalidad es un resumen de los registros de vida de un grupo representativo de individuos *suficientemente grande*. Se llama también tabla de eliminación pues contiene la ley de eliminación de los elementos de ese conjunto.

Representa el instrumento que mide la probabilidad de vida y la probabilidad de muerte de las personas. De su eficiencia depende la eficiencia de las primas cobradas por la compañía.

Las compañías de seguro utilizan estas estadísticas de marcha a lo largo de la vida que las tiene compiladas en forma tabular con el nombre de tabla de mortalidad.

Concluimos con la definición de González Galé "La tabla de mortalidad es un modelo matemático idóneo para el cálculo de probabilidades de vida y de muerte que se presenta como la *evolución* —monodecreciente, pues el elemento básico de dicha tabla es decreciente— de un *colectivo* —conjunto de vidas *cerrado de vidas homogéneas*—; todas las vidas se encuentran sometidas a la muerte —e *independientes*—; la probabilidad de vida de una persona no está sujeta a la probabilidad de vida de otra persona con puntos anuales discretos de eliminación y basada en la hipótesis de que la mortalidad es solo función de la edad alcanzada.

Componentes de la tabla actuarial:

- **Factor financiero:** por la existencia de una tasa técnica o también denominada interés técnico. Es el factor de descuento sobre las primas de los seguros sobre la vida.
- **Factor biométrico:** por la existencia de una tabla biométrica

Elementos básicos de una tabla de mortalidad

Columna 1	**x**	*Representa la edad en años y es entero. Se encuentra comprendido entre 0 y w.* *x = 0 ➔ es la "base" o "raíz de la tabla. Allí nace la tabla. Corresponde a sucesos pasados y no actuales y coexistentes.* *x = w (letra griega omega)➔ edad final de la tabla de mortalidad, en donde ya no hay sobrevivientes. Edad que no es alcanzada por ninguna persona.* *Siendo (w-1) la última edad con sobrevivientes.*
Columna 2	**l(x)**	*l(x) living: viviente* *Es el número de personas que de un grupo inicial dado, alcanzan exactamente la edad x. Son los sobrevivientes a la edad x.* *Función decreciente, pues el grupo en el transcurso del tiempo va disminuyendo por las bajas naturales.* *La probabilidad de sobrevivir hasta la edad x es mayor que la probabilidad de sobrevivir hasta la edad x+t* *Representa la función central de cualquier tabla de mortalidad.*
Columna 3	**d(x)**	*d(x) dying agonizante, moribundo.* *Es el número de personas del grupo que mueren luego de cumplir la edad x y antes de cumplir la edad (x+1).* $d(x) = l(x) - l(x+1)$
Columna 4	**p(x;1)**	Probabilidad de que una persona de edad x viva un año más, es decir que alcance la edad (x+1). Es un factor biométrico.
Columna 5	**d(x;1)**	Probabilidad de que una persona muera entre la edad x y la edad (x+1): es decir que esta persona de edad x no viva un año más. Es un factor biométrico.

A partir de los datos o funciones de la tabla podemos determinar los siguientes factores biométricos:

p (x ; 1): Probabilidad de que una persona de edad x sobreviva al menos un año, es decir que alcance la edad (x+1).

$$\boxed{p(x;1) = \frac{l(x+1)}{l(x)}}$$

q (x; 0; 1): Probabilidad de que una persona de edad x muera antes de alcanzar la edad x+1. Es la probabilidad del suceso contrario al anterior. Es un factor biométrico.

$$q\,(x;0;1) = 1 - p(x;1) = 1 - \frac{l(x+1)}{l(x)}$$

$$q\,(x;0;1) = 1 - \frac{l(x+1)}{l(x)} = \frac{l(x) - l(x+1)}{l(x)} = \frac{d(x)}{l(x)}$$

$$q\,(x;0;1) = \frac{d(x)}{l(x)}$$

q (x; 0; s): Probabilidad de que una persona de edad x muera entre 0 y s.

$$q\,(x;0;s) = \frac{l(x) - \underline{l(x+s)}}{l(x)}$$

Debemos tener en cuenta la condición de probabilidades. La suma entre la probabilidad de supervivencia de n años para una persona de edad x y la probabilidad de muerte para la misma persona y en el mismo plazo debe ser igual a uno.

Veremos que a partir de estos elementos principales de la tabla de mortalidad se desprenden otras columnas importantes para realizar los cálculos que luego seguiremos.

Si vemos la tabla de mortalidad utilizada en la Argentina para el cálculo de la jubilación en el sistema de capitalización suministrada por la SAFJP, observamos que nos informa sólo la columna titulada q(x) —el número de bajas— para cierta población que nosotros denominamos d_x. A partir de allí, habrá que ir construyendo el resto de los elementos y en una planilla de cálculo el resultado es sencillo.

Las aplicaciones están resueltas en función a la tabla de mortalidad extraída del material de estudio para Cálculo Financiero con aplicación de nuevas tecnologías anexa. Debemos dejar indicado que cualquier otra tabla nos llevará a valores diferentes, pero lleva la misma metodología de cálculo.

Ejercicios de aplicación para utilizar la tabla de mortalidad

1) De 10.0000.000 personas que forman la raíz de la tabla:
a) ¿Cuántas llegarán a la edad de 40 años?
b) ¿Cuántas personas de 35 años morirán antes de llegar a los 36 años?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de 24 años de edad muera antes de cumplir los 25?

Rta.: a) l(40) = 9.487,662; b) d(35) = 15.900; c) q(24) = 0,127%.

$$q\,(x;0;1)=\frac{d(x)}{l(x)}$$

$$q(24;0;1) = \frac{l(24) - l(25)}{l(24)} = \frac{9727{,}552 - 9715{,}198}{9727{,}552} = \frac{12{,}354}{9727{,}552} = 0{,}127$$

Observemos el valor en tabla de 12354 que corresponde a d_{24}.

d) Calcular la probabilidad de que un hombre de 28 años de edad viva un año más.

Rta.: 99,865%.

e) ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre de 28 años de edad no alcance a cumplir los 29?

Rta.: 0,135%.

$$q(28;0,;1) = \frac{d(28)}{l(28)} = \frac{13{,}064}{9677{,}067} = 0{,}00135$$

f) Calcular la probabilidad de que un individuo de 45 años de edad llegue a cumplir los 46.

Rta.: 99,643%.

$$p(x;1)=\frac{l(x+1)}{l(x)}$$

$$p(45;1)=\frac{l(46)}{l(45)}=\frac{9322{,}268}{9355{,}668}=0{,}99643$$

g) Hallar la probabilidad de que una persona de 45 años de edad, viva 3 años más y llegue por lo tanto a los 48 años.

Rta.: 98,835%.

$$p\,(x\,;n) = \frac{l(x+n)}{l(x)}$$

$$p(45;3)=\frac{l(48)}{l(45)}=\frac{9246{,}632}{9355{,}668}=0{,}98835$$

h) Hallar la probabilidad de que una persona muera antes de transcurridos 3 años después de cumplidos los 45 años.

Rta.: 1,165%.

$$q(45;0;3) = 1 - p(45;3) = 1-\frac{l(48)}{l(45)} = 1-0{,}98835 = 0{,}01165$$

i) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de 45 años de edad viva hasta alcanzar la edad de 75 años?

Rta.: 56,78%

$$p(x;n) = \frac{l(x+n)}{l(x)}$$

$$p(45;30) = \frac{l(75)}{l(45)} = \frac{5312{,}480}{9355{,}668} = 0{,}56783$$

Magnitudes de las funciones financieras y actuariales

Funciones Financieras Ciertas	***Factor de capitalización financiero*** $(1+i)^n$ *Es el monto que genera un peso colocado en el mercado financiero al cabo de "n" períodos.*	***Factor de actualización financiero*** $(1+i)^{-n}$ *El valor actual de un peso futuro "n" períodos antes de su vencimiento*
	Interés financiero $= (1+i)^n - 1$	***Descuento Financiero*** $= 1-(1+i)^{-n}$
Funciones Biométricas Aleatorias f (probabilid de superviv. con relación a la edad y al plazo.	***Factor de capitalización biométrico*** $p^{-1}(x;n)$ *Si en un momento dado l(x) personas colocan S1 c u de ellas. Luego de n períodos los l(x+n) sobrevivientes se reparten lo que habían recaudado en el momento inicial.* $p^{-1}(x;n) = \frac{l(x)}{l(x+n)} = \frac{1}{\frac{l(x+n)}{l(x)}} = \frac{1}{p(x;n)}$	***Factor de actualización biométrico*** $p(x;n)$ *Es el valor actual de un peso futuro que se pagará a los l(x+n) sobrevivientes dentro de n períodos ; es decir que se paga a los que sobreviven dentro de "n" períodos.* $p(x;n) = \frac{l(x+n)}{l(x)}$ *y es la probabilidad de que una persona de edad x alcance la edad (x+n), es decir que sobreviva*
	El interés biométrico o beneficio de supervivencia -IB- *Es el interés o beneficio que dejan los que ya murieron entre la edad x y la edad (x+n) denominado d(x;n) y que se reparte entre los que sobreviven.. Representa lo que gana sobreviviente gana por la regla de la supervivencia.* $IB = \frac{l(x)}{l(x+n)} - \frac{l(x)}{l(x)} = \frac{l(x)}{l(x+n)} - 1 = \frac{l(x)-l(x+n)}{l(x+n)} = \frac{d(x;n)}{l(x+n)}$	***Descuento biométrico-DB-*** $DB = 1-p(x;n) = 1-\frac{l(x+n)}{l(x)}$ $DB = \frac{l(x)-l(x+n)}{l(x)} = \frac{d(x;n)}{l(x)}$
Funciones actuariales	***Factor de capitalización actuarial:*** $E^{-1}(x;n)=(1+i)^n \cdot p^{-1}(x;n)$ **se considera conjuntamente:** • **el régimen de capitalización financiero ==>** $(1+i)^n$ • **el régimen de capitalización biométrico ==>** $p^{-1}(x;n)$ **Es el valor final que una persona de edad x tiene a la edad (x+n) si sobrevive, sabiendo que hoy a la edad actual x coloca 1 unidad monetaria:**	***Factor de actualización actuarial*** $E(x;n) = p(x;n) \cdot v^n$ **se considera conjuntamente:** • **el régimen de actualización financiero ==>** $(1+i)^{-n} = v^n$ • **el régimen de actualización biométrico ==>** $p(x;n)$ **Es el valor actual de 1 unidad futura de capital pagadera dentro de n años si está con vida a la edad (x+n) esta persona de edad actual x**

SEGURO

Concepto

Integra el conjunto de operaciones que se realizan en el comercio del riesgo y significa la transformación de un valor cierto en un valor eventual.

> Todo Contrato de Seguro sea sobre las personas o sobre las cosas es la unión de varias personas con el fin de afrontar necesidades futuras mediante la acumulación de capitales y la transferencia del riesgo.

Nosotros trabajaremos con los seguros sobre las personas y en particular sobre la vida.

SEGUROS SOBRE LA VIDA

> *Se celebra un contrato de seguro sobre la vida cuando una persona, en adelante* ***asegurador****, promete a otra, el* ***tomador****, a cambio de una prestación llamada* ***prima****, satisfacer a una tercera persona que recibe el nombre de* ***beneficiario*** *cierto beneficio bajo una condición o término que depende de la vida de otra persona a la que se da el nombre de* ***asegurado****.*
>
> *Generalmente tomador y asegurador son dos figuras que se concentran en la misma persona.*

El seguro sobre la vida cubre

el riesgo supervivencia — *el riesgo muerte*

> En donde, tanto en uno como en el otro caso, lo incierto no es la muerte misma —hecho inevitable y fatal— sino el momento en que ella ocurrirá.
> Constituyen rentas inciertas, ya que su cobro o pago depende exclusivamente de la ocurrencia aleatoria en el tiempo de un hecho concreto: la muerte o supervivencia.
> El siniestro es el evento que origina el pago del capital asegurado (total o parcial). Por lo tanto, la prestación del asegurado que es el pago de la prima es un capital cierto.

Seguros en caso de vida
El asegurado recibe la renta en un futuro y el beneficiario será la persona asegurada.

Seguros en caso de muerte
El asegurado muere y el beneficiario será la persona que recibirá la renta.

Seguros Mixtos
Se contrata conjuntamente riesgo de muerte y supervivencia.

A) Seguros sobre la vida - en caso de vida o de sobreviviencia

En un contrato de seguro sobre la vida en caso de vida los compromisos son:

Compromiso del asegurado	*Compromiso de la compañía aseguradora o asegurador*
• Pago de una única prima que denominaremos PPU: Prima Pura Unica. o • Pago de una sucesión de primas periódicas que denominaremos PPP: Prima Periódica Pura.	• Pago al beneficiario que puede ser el asegurado u otra persona (dependiendo de las cláusulas contractuales) de : • Un pago, siempre y cuando esté con vida ==> **Seguro de Capital Unico Diferido** • Una serie de pagos periódicos siempre y cuando esté con vida en cada pago==> **Seguro de Capitales Múltiples**
La prestación del asegurado está representado por el pago de un capital cierto con el objeto de transferir a la compañía aseguradora el riesgo de pagar el compromiso establecido en el contrato.	La contraprestación de la compañía aseguradora es un capital único aleatorio o capitales múltiples aleatorios.

I. Capital único: seguro de capital diferido (dotación de supervivencia)

Es un contrato mediante el cual la compañía aseguradora contrae el compromiso de único pago que debe recibir la otra persona en un cierto momento siempre y cuando esté viva en ese momento. *La condición de pago es la sobrevivencia del asegurado.*

Se pretende buscar la prima de una operación de seguro en la que el asegurador brinda una cobertura al asegurado a cambio de dicho pago —prima—. Las condiciones de equilibrio establecen que las primas recibidas por el asegurador deben satisfacer el pago de las coberturas ofrecidas. Estas condiciones de equilibrio o equivalencia son actuariales, pues ya sabemos que intervienen dos aspectos:

a) *probabilístico o componente aleatorio*: ya que se desconoce si el individuo vivirá o no, en el caso de seguros sobre la vida, al término del período considerado.

b) *financiero*: por existir un diferimiento en el tiempo entre el momento en que el asegurador cobra la prima y eventualmente abona la cobertura.

Deducción de la fórmula del seguro de capital diferido a prima única: la más sencilla de las operaciones de seguro sobre la vida.

Se trata de determinar cuánto vale hoy, o sea qué valor actual tendrá un capital de $1 pagadero dentro de n años por el asegurador, siempre y cuando el asegurado esté con vida a la edad (x+n.)

Este valor actual se denomina **Prima Pura Unica** —PPU—. Es Pura porque se calcula sin considerar los gastos y Unica pues se paga de una sola vez al empezar la operación y se la denota: E(x.; n).

plazos	0	n
edades	x	x + n
capitales ($1)	E(x;n)	1
	PPU	C

O sea que:

E(x;n) es el valor actual de un capital diferido de un peso.

PPU es el valor actual de un capital diferido de C pesos.

$$E(x;n) = v^n \; p(x;n)$$

$$E(x;n) = v^n \; \frac{l(x+n)}{l(x)}$$

Es una función actuarial pues intervienen dos factores, el factor financiero y el biométrico.

Para facilitar los cálculos se utilizan tablas auxiliares, que transforman los cálculos y se denominan Tablas de Conmutación.

Si $D(x) = v^x \; l(x)$

Entonces: $D(x+n) = v^{x+n} \; l(x+n)$

Partimos de la fórmula anterior y multiplicamos por v^x tanto el numerador como el denominador y nos queda:

$$E(x;n) = v^n \; v^x \; \frac{l(x+n)}{v^x \, . \, l(x)} = \frac{v^{x+n} \, . \, l(x+n)}{v^x \, . \, l(x)}$$

$$E(x;n) = \frac{D(x+n)}{D(x)}$$

Resumiendo:

- El compromiso del asegurado es el pago de la prima pura única: PPU.
- El compromiso de la aseguradora es pagarle al asegurado si éste sobrevive dentro de n años el capital asegurado "C".

Aplicaciones

1) Cuál es el valor de la prima única que una persona —el asegurado— de 35 años de edad debe pagar para recibir un capital de $ 50.000 diferido por 15 años, siempre que éste se halle con vida en esa época, sabiendo que la compañia aseguradora calcula al 4% anual de interés.

   Rta.: $ 26.543,3.

Asegurado	Compañía
• x=35 (Edad de contratación del asegurado) • Compromiso Cierto: Pago de una PPU	• Compromiso Eventual: Pago del Capital asegurado= 50.000 por única vez • Condición para pagar la póliza: sobrevivencia del asegurado a la edad en que tiene que cobrar el seguro:50 años.
Tipo de Seguro sobre la Vida en caso de sobreviviencia de Capital Diferido o Dotación de Supervivencia.	

a) *PPU = C . E(x;n)* *siendo:* $E(x;n) = v^n\, p(x;n)$

$$PPU = 50.000 * E(35;15) = 50.000\ (1+0{,}04)^{-15}\ \frac{l(35+15)}{l35}$$

$$PPU = 50.000 * E(35;15) = 50.000 * 0{,}55526 * 0{,}95606 = 26.543{,}3$$

b) $PPU = C*\ E(x;n) = C.\dfrac{D(x+n)}{D(x)}$ utilizando valores de conmutación

$$PPU = 50.000 * E(35;15) = 50.000 * \frac{D(50)}{D(35)} = 26.543{,}3$$

2) Cuál será la prima única que debe pagar una persona de 35 años de edad para recibir cuando cumpla 75 años de edad $ 50.000 sabiendo que la compañía aseguradora calcula al 4% anual de interés.

Rta.: 5776,7

Asegurado	Compañía
• x=35 (Edad de contratación del asegurado) • Compromiso Cierto: Pago de una PPU	• Compromiso Eventual: Pago del Capital asegurado= 50.000 por única vez • Condición para pagar la póliza: sobrevivencia del asegurado a la edad en que tiene que cobrar el seguro: 75 años.
Tipo de Seguro sobre la Vida en caso de sobreviviencia de Capital Diferido o Dotación de Supervivencia.	

a) *PPU = C . E(x;n)* *siendo:* $E(x;n) = v^n\, p(x;n)$

$$PPU = C * E(35;40) = 50.000\ (1+0{,}04)^{-40}\ \frac{l(35+40)}{l(35)}$$

$$PPU = 50.000 * E(35;40) = 50.000 * 0{,}2083 * 0{,}55465 = 5776{,}7$$

b) $PPU = C*\ E(x;n) = C.\dfrac{D(x+n)}{D(x)}$ utilizando valores de conmutación

$$PPU = 50.000 * E(35;40) = 50.000 * \frac{D(75)}{D(35)} = 5776{,}7$$

3) ¿Cuál será la prima única que debe pagar una persona de 35 años de edad para recibir cuando cumpla 85 años de edad $ 50.000 sabiendo que la compañía aseguradora calcula al 4% anual de interés?

Rta.: 1503,70.

Asegurado	Compañía
• x=35 (Edad de contratación del asegurado) • Compromiso Cierto: Pago de una PPU	• Compromiso Eventual : Pago del Capital asegurado= 50.000 por única vez • Condición para pagar la póliza: sobrevivencia del asegurado a la edad en que tiene que cobrar el seguro: 85 años.
Tipo de Seguro sobre la Vida en caso de sobreviviencia de Capital Diferido o Dotación de Supervivencia.	

a) $PPU = C \, . \, E(x;n)$ siendo: $E(x; n) = v^n \; p\,(x;n)$

$$PPU = C * E(35;50) = 50.000 \; (1 + 0,04)^{-50} \frac{l\,(35+50)}{l(35)}$$

$$PPU = 50.000 * E(35;50) = 50.000 * 0,14071 * 0,21373 = 1503,70$$

b) $PPU = C * E(x;n) = C.\dfrac{D(x+n)}{D(x)}$ utilizando valores de conmutación

$$PPU = 50.000 * E(35;50) = 50.000 * \frac{D(85)}{D(35)} = 1503,70$$

4) Usted que tiene 28 años contrata un seguro en el cual la compañía aseguradora se compromete a pagarle $ 25.000 dentro de 30 años, si es que Usted —asegurado— llega con vida a dicha edad.
¿Cuál será el valor de la prima pura única a pagar hoy?

Rta.: 6853,98

Asegurado	Compañía
• x=28 (Edad de contratación del asegurado) • Compromiso Cierto: Pago de una PPU	• Compromiso Eventual : Pago del Capital asegurado= 25.000 por única vez • Condición para pagar la póliza: sobrevivencia del asegurado a la edad en que tiene que cobrar el seguro:58 años.
Tipo de Seguro sobre la Vida en caso de sobreviviencia de Capital Diferido o Dotación de Supervivencia.	

a) $PPU = C \, . \, E(x;n)$ siendo: $E(x; n) = v^n \; p\,(x;n)$

$$PPU = C * E(28;30) = 25.000 \; (1 + 0,04)^{-30} \frac{l\,(28+30)}{l\,(28)}$$

$$PPU = 25.000 * E(28;30) = 25.000 * 0,308319 * 0,8892079 = 6853,98$$

b) $PPU = C * E(x;n) = C.\dfrac{D(x+n)}{D(x)}$ utilizando valores de conmutación

PPU = 25.000 *E(35;15) = 25000 * $\dfrac{D(58)}{D(28)}$ = 6853,98

II. Capitales múltiples: renta vitalicia (*)

Rentas Vitalicias

- **Completas (Plazo Ilimitado)**
  - **II.1 Inmediatas (Riesgo Inmediato)**
  - **II.2 Diferidas (Riesgo Diferido) en más períodos**
  - **II.3 Diferidas (Riesgo Diferido) en 1 período**
- **Temporarias (Plazo Limitado)**
  - **II.4 Inmediatas (Riesgo Inmediato)**
  - **II.5 Diferidas (Riesgo Diferido) en 1 período**
  - **II.6 Diferidas (Riesgo Diferido) en más períodos**

Notación:

- en plazos: C. a(x; ....;.....) = PPU = c a (x;...;...)

1° campo: edad de contratación
2° campo: fecha del 1° pago de la renta vitalicia de $1
3° campo: plazo de la renta vitalicia

- en edades: C. a(x; ....;.....) = PPU = c a (x;...;...)

1° campo: edad del asegurado
2° campo: edad del 1° pago de la renta vitalicia de $1.
3° campo: edad del último pago de la renta vitalicia de $1

Observamos que:

- Si la renta vitalicia no es unitaria multiplicamos por C el factor a(...;...;...) y obtenemos la PPU.
- Es común trabajar con rentas constantes y unitarias en correspondencia a los valores de tabla.

Se puede decir que en el caso del asegurado la prestación tiene la característica de ser un capital cierto pues hoy debe afrontar la PPU para poder tener derecho en el futuro a la contraprestación. En cambio, la contraprestación o contraprestaciones sucesivas que deberá afrontar en el futuro la compañía aseguradora es un capital aleatorio ya que está sujeto a la vida del asegurado.

(*) Ver nota de p. 155.

II.1. Rentas Vitalicias Completas - Inmediatas

✓ *Prima Pura Unica de una Renta Vitalicias Completa o de Plazo Ilimitado y Riesgo Inmediato; Inmediatas o adelantadas o prepagables*

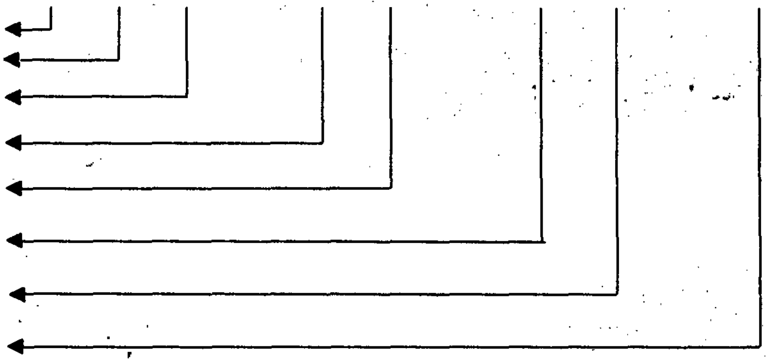
plazos	0	1	2	//	t	t+1	//	n-1	n	//	w-x-1	w-x
edad	x	x+1	x+2	...	x+t	x+t+1	...	x+n-1	x+n	...	w-1	w
capit	1	1	1	...	1	1	...	1	1	1	1	-

P(x;1)= a(x;0;w-x) =a(x;x;w-1)=a_x

La compañía aseguradora le da al asegurado mientras éste vive la cobertura de (w-x) pagos.

Deducción de la fórmula a(x;0;w-x) mediante la suma de los valores actuales actuariales de la cobertura:

plazos	0	1	2	//	t	t+1	//	n-1	n	//	w-x-1	w-x
edad	x	x+1	x+2	...	x+t	x+t+1	...	x+n-1	x+n	...	w-1	w
capit	1	1	1	...	1	1	...	1	1		1	-



a(x;0;w-x)= E(x;0)+ E(x;1) +E(x;2)+... +E(x;t)+ +E(x;t+1)+ ... +E(x;n-1) +E(x;n)+...+E(x;w-x-1)

sabemos que E(x;0)=1

$$a(x;0;w-x)=\sum_{s=0}^{s=w-1-x} E(x;s)$$

recordando que $E(x;s)=\dfrac{D(x+s)}{D(x)}$ entonces reemplazamos en la formula anterior y nos queda:

$$a(x;0;w-x)=\sum_{s=0}^{s=w-x-1}\frac{D(x+s)}{D(x)}=\frac{1}{D(x)}\sum_{s=0}^{s=w-x-1} D(x+s)$$

$$a(x;0;w-x)=\frac{1}{D(x)}.\left[D(x)+D(x+1)+D(x+2)+...D(x+t)...+D(x+n)+...+D(w-1)\right]$$

pues D(w)=0

$$a(x;0;w-x) = \frac{1}{D(x)}.N(x)$$

$$\boxed{a(x;0;w-x) = \frac{N(x)}{D(x)}}$$

Podemos deducir la fórmula de otra manera. De todas formas no lo haremos en todas las rentas.

Deducción de la fórmula a(x;0;w-x) a través del método de la colectividad necesaria: En donde tenemos planteada en la ecuación la equivalencia actuarial entre los compromisos que asumen los l_x a través del pago de la Prima Pura Unica y los compromisos de la compañía aseguradora que es el pago de la renta a cada uno de los sobrevivientes. O sea:

$$l_{(x)} . P(x;1) = l_{(x)} + v. l_{(x+1)} + V^2 .l_{(x+2)} + \dots V^{w-x-1} . l_{(w-1)}$$

$$P(x;1) = \frac{l_{(x)} + v. l_{(x+1)} + v^2 .l_{(x+2)} + \dots v^{w-x-1} . l_{(w-1)}}{l_{(x)}}$$

Si multiplicamos numerador y denominador por v^x y lo distribuimos en todos los términos del numerador, queda:

$$P(x;1) = \frac{v^x l_{(x)} + v^{x+1} . l_{(x+1)} + v^{x+2} .l_{(x+2)} + \dots v^{w-1} . l_{(w-1)}}{v^x .l_{(x)}}$$

Si v^x .l(x)=D(x), entonces:

$$P(x;1) = \frac{D(x)+D(x+1)+D(x+2)+\dots +D(w-1)}{D(x)}$$

Por otro lado, conocemos que N(x)=D(x)+D(x+1)+D(x+2)+...+D(w-1).

$$P(x;1) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

a(x;0;w-x) = Es el valor actual o prima pura única de una sucesión de pagos inmediatos de \$1 c/u en forma adelantada (al inicio de cada período) que realiza la compañía mientras el asegurado se encuentre con vida.
Condición para que la persona de edad x comience a cobrar inmediatamente \$ 1 y siga cobrándolo periódicamente es la SOBREVIVENCIA y por supuesto que haya pagado la PRIMA a la edad x.

$P(x;1) = a(x;0;w-x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ **Renta Vitalicia Completa Inmediata Unitaria**

$PPU = C\, a(x;0;w-x) = C.\frac{N(x)}{D(x)}$ **Renta Vitalicia Completa Inmediata de \$C**

5) Una persona de 68 años de edad compra una renta vitalicia en ese preciso momento en el cual la compañía aseguradora se compromete a pagar $ 12.000 a partir de ahora, mientras esté con vida. ¿Cuánto pagará el asegurado —Usted— hoy en concepto de prima pura única?

Rta.: 118.231.

Asegurado	Compañía
• x=68 (Edad de contratación del asegurado) • Compromiso: Pago de una PPU	• Compromiso: Pago del Capital asegurado= renta vitalicia de 12.000 anuales • Condición para cobrar la póliza: sobrevivencia del asegurado
Tipo de Seguro sobre la vida en caso de sobrevivencia: **Cobertura de Renta vitalicia completa prepagable o adelantada = Renta de plazo ilimitado y riesgo inmediato**	

P(x,1) = C . a(x;0;w-x)

$$P(x;1) = C.\frac{N(x)}{D(x)}$$

$$P(x;1) = 12.000.\frac{N(68)}{D(68)} = 12.000\ .\ (4895{,}9405/496{,}9194) = 12.000 * 9{,}852584745 = 118.231$$

II.2. Rentas Vitalicias Completas – Diferidas en t periodos

✓ *Prima Pura Unica de una Renta Vitalicia Completa o de Plazo Ilimitado, Diferidas en t períodos-Riesgo diferido*

plazos	0	1	2	//	t	t+1	//	n-1	n	//	w-x-1	w-x
edad	x	x+1	x+2	...	x+t	x+t+1	...	x+n-1	x+n	...	w-1	w
capit					1	1		1	1	...	1	-

P(x;1)= a(x;t;w-x-t)

1°campo: edad del asegurado	2° campo: fecha del 1° pago de la renta vitalicia de $1	3° campo: plazo de la renta vitalicia

Deducción de la fórmula a(x;t;w-x-t) mediante la suma de los valores actuales actuariales de la cobertura (ver página siguiente):

plazos	0	1	2	//	t	t+1	//	n-1	n	//	w-x-1	w-x
edad	x	x+1	x+2	...	x+t	x+t+1	...	x+n-1	x+n	...	w-1	w
capit					1	1	...	1	1		1	

a(x;t;w-x-t)= E(x;t)+ +E(x;t+1)+...+ +E(x;n-1) +E(x;n) +...+E(x;w-1-x)

$$a(x;t;w-x-t)=\sum_{s=t}^{s=w-1-x} E(x;s)$$

recordando que $E(x;s)=\dfrac{D(x+s)}{D(x)}$ entonces reemplazamos en la formula anterior y nos queda:

$$a(x;t;w-x-t)=\sum_{s=t}^{s=w-1-x}\frac{D(x+s)}{D(x)}=\frac{1}{D(x)}\sum_{s=t}^{s=w-1-x} D(x+s)$$

$$a(x;t;w-x-t)=\frac{1}{D(x)}.\left[D(x+t)...+D(x+n)+...+D(w-1)\right]$$

$$a(x;t;w-x-t)=\frac{1}{D(x)}.N(x+t)$$

$$\boxed{a(x;t;w-x-t)=\frac{N(x+t)}{D(x)}}$$

a(x;t;w-x-t) = PPU: Es el valor actual o prima pura única de una sucesión de pagos de $1 c/u luego de t períodos de diferimiento a partir de la época de contratación, en forma adelantada (al inicio de cada período) mientras el asegurado se encuentre con vida.
Condición para que la persona de edad x comience a cobrar $ 1 periódicamente es la SOBREVIVENCIA y por supuesto, que haya pagado la PRIMA.

$a(x;t;w-x-t)=\dfrac{N(x+t)}{D(x)}$ **Renta vitalicia completa Diferida Unitaria**

PPU=C. $a(x;t;w-x-t)=C.\dfrac{N(x+t)}{D(x)}$ **Renta Vitalicia completa Diferida de $ C**

6) Con fecha 1/03 Ud. de 18 años de edad contrata un seguro en el cual la compañía aseguradora se compromete a pagar $ 12.000 a partir de

que cumpla los 60 años y lo seguirá pagando en cada cumpleaños futuro siempre que Ud. esté con vida.
¿Cuál es el compromiso que Ud. como asegurado tiene con la compañía, suponiendo que se realiza mediante una prima pura única?

Rta.: 25.282.

Asegurado	Compañía
• x=18 (Edad de contratación del asegurado) • Compromiso Cierto: Pago de una PPU	• Compromiso Eventual: Pago del Capital asegurado : una renta vitalicia de 12.000 anuales • Condición para cobrar la póliza: sobrevivencia del asegurado
Tipo de Seguro sobre la vida en caso de sobrevivencia: **Cobertura de Renta vitalicia completa diferida = Renta de plazo ilimitado y riesgo diferido**	

PPU = C . a(x;t;w-x-t)

$$PPU = C.\frac{N(x+t)}{D(x)}$$

$$PPU = 12.000.\frac{N(60)}{D(18)} = 12.000 \bullet \frac{10.189,8783}{4.836,5118} = 12.000 \bullet 2,106865179$$

PPU= 25.282

II.3 Rentas Vitalicias Completas – Diferidas en un periodo

✓ *Prima Pura Unica de una Renta Vitalicia Completa o de Plazo Ilimitado y Riesgo Diferido en un período. También denominadas Vencidas o Pospagables u Ordinarias.*

plazos	0	1	2	//	t	t+1	//	n-1	n	//	w-x-1	w-x
edad	x	x+1	x+2	...	x+t	x+t+1	...	x+n-1	x+n	...	w-1	w
capit		1	1	...	1	...	1	1...			1	1

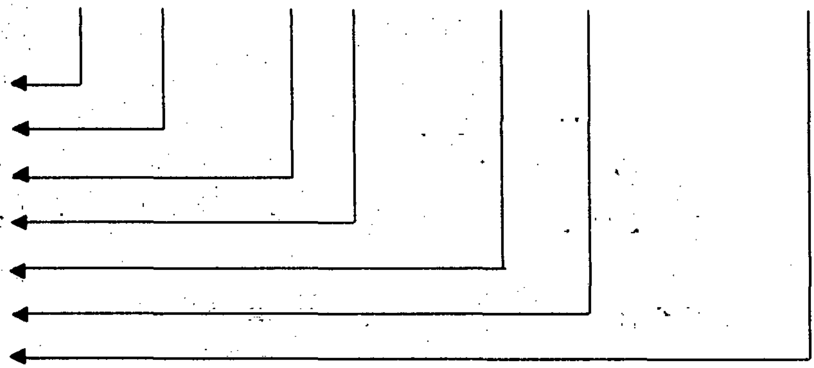
P(x;1)= a(x;1;w-x) =a(x;x+1;w-1)= $\overline{a}_x$

Recordemos que en la edad w no existen más sobrevivientes. Si ponemos en el eje de la renta el capital de $ 1 en el momento w-x no altera los valores pues es de valor nulo.

La compañía aseguradora le da al asegurado mientras este vive la cobertura de (w-x) pagos.

Deducción de la fórmula a(x;1;w-x) mediante la suma de los valores actuales actuariales de la cobertura:

plazos	0	1	2	//	t	t+1	//	n-1	n	//	w-x-1	w-x
edad	x	x+1	x+2	...	x+t	x+t+1	...	x+n-1	x+n	...	w-1	w
capit		1	1	...	1	1	...	1	1		1	1



a(x;1;w-x) = E(x;1) + E(x;2)+... + E(x;t)+ + E(x;t+1)+.. + E(x;n-1)+ E(x;n) + ...
+ E(x;w-x-1)+E(x;w-x)

$$a(x;1;w-x)=\sum_{s=1}^{s=w-x} E(x;s)$$

recordando que $E(x;s)=\dfrac{D(x+s)}{D(x)}$ entonces reemplazamos en la formula anterior y nos queda:

$$a(x;1;w-x)=\sum_{s=1}^{s=w-x}\frac{D(x+s)}{D(x)}=\frac{1}{D(x)}\sum_{s=1}^{s=w-x} D(x+s)$$

$$a(x;1;w-x)=\frac{1}{D(x)}.\left[D(x+1)+D(x+2)+...D(x+t)...+D(x+n)+...+D(w-1)+D(w)\right]$$

sabemos que D(w)=0

$$a(x;1;w-x)=\frac{1}{D(x)}.N(x+1)$$

$$\boxed{a(x;1;w-x)=\frac{N(x+1)}{D(x)}}$$

Deducción de la fórmula a(x;1;w-x) a través del método de la colectividad necesaria:

En donde tenemos planteado en la ecuación la equivalencia actuarial entre los compromisos de los l_x que es el pago de la Prima Pura Unica y los compromisos de la compañía aseguradora que es el pago de la renta a cada uno de los l_x sobrevivientes. O sea:

$$l_{(x)} \cdot P(x;1) = v \cdot l_{(x+1)} + v^2 \cdot l_{(x+2)} + \dots v^{w-x-1} \cdot l_{(w-1)} + v^{w-x} \cdot l_{(w)}$$

$$P(x;1) = \frac{v \cdot l_{(x+1)} + v^2 \cdot l_{(x+2)} + \dots v^{w-x-1} \cdot l_{(w-1)} + v^{w-x} \cdot l_{(w)}}{l_{(x)}}$$

Multiplicamos numerador y denominador por v^x y queda:

$$P(x;1) = \frac{v^{x+1} \cdot l_{(x+1)} + v^{x+2} \cdot l_{(x+2)} + \dots v^{w-1} \cdot l_{(w-1)} + v^{w} \cdot l_{(w)}}{v^x \cdot l_{(x)}}$$

Si $v^x \cdot l(x) = D(x)$, entonces: $P(x;1) = \dfrac{D(x+1)+D(x+2)+\dots+D(w-1)+D(w)}{D(x)}$

Por otro lado, conocemos que $N(x+1) = D(x+1)+D(x+2)+\dots+D(w-1)+D(w)$.

Sabemos que $D(w)=0$

$$P(x;1) = \frac{N(x+1)}{D(x)}$$

a(x;1;w-x) =:Es el valor actual o prima pura única de una sucesión de pagos inmediatos de $1 c/u en forma vencida (al fin de cada período) o bien diferidos en un período, que realiza la compañía mientras el asegurado se encuentre con vida.
Condición para que la persona de edad x comience a cobrar al período siguiente $ 1 y siga cobrándolo periódicamente es la SOBREVIVENCIA y por supuesto que haya pagado la PRIMA.

$P(x;1) = a(x;1;w-x) = \dfrac{N(x+1)}{D(x)}$ **Renta Vitalicia Completa Diferida Unitaria para t=1**

$PPU = C\,a(x;1;w-x) = C.\dfrac{N(x+1)}{D(x)}$ **Renta Vitalicia Completa Diferida para t=1 de $C**

7) Una persona de 68 años de edad compra una renta vitalicia en ese preciso momento en el cual la compañía aseguradora se compromete a pagar $ 12.000 a partir del año siguiente, mientras esté con vida. ¿Cuánto pagará el asegurado —Usted— hoy en concepto de prima pura única?

Asegurado	Compañía
• x=68 (Edad de contratación del asegurado) • Compromiso Cierto: Pago de una PPU	• Compromiso Eventual : Pago del Capital Asegurado que consiste en una Renta vitalicia completa inmediata de $12.000 Condición para cobrar la póliza: sobrevivencia del asegurado
Tipo de Seguro sobre la vida en caso de sobrevivencia: **Cobertura de Renta vitalicia Completa ordinaria o pospagable o vencida=> Renta de plazo ilimitado y riesgo diferido para t=1**	

P(x,1) = C . a(x;1;w-x)

$$P(x;1)=C.\frac{N(x+1)}{D(x)}$$

$$P(x;1)=12.000.\frac{N(69)}{D(68)}$$

12.000 . (4399,0210 / 496,9194) = 12.000 . 8,852584544 = 106231.

Si observamos el factor 8,852584544 y el factor 9,852584544 del ejercicio 5, la diferencia es la unidad del momento inicial que transforma la renta vencida en adelantada.

Resumen de las fórmulas de rentas vitalicias completas de supervivencia

FÓRMULAS DEL VALOR ACTUAL O PRIMA PURA UNICA DE UNA RENTA VITALICIA COMPLETA UNITARIA	
Inmediatas	$\boxed{a(x;0;w-x)=\frac{N(x)}{D(x)}}$
Diferidas t=1	$\boxed{a(x;1;w-x)=\frac{N(x+1)}{D(x)}}$
Diferidas t>1	$\boxed{a(x;t;w\text{-}x\text{-}t)=\frac{N(x+t)}{D(x)}}$

La regla que observamos para encontrar la fórmula de valuación de una renta vitalicia completa es:

$$\boxed{\text{a (edad de contratación; fecha de 1° pago; plazo)} = \frac{\text{N (edad en que se efectúa el 1° pago de la renta)}}{\text{D (edad de contratación)}}}$$

II.4 Rentas Vitalicias Temporarias – Inmediatas

✓ *Prima Pura Unica de una Renta Vitalicia Temporaria o de Plazo Limitado y Riesgo Inmediato. O Inmediatas, adelantadas o prepagables*

Este tipo de renta vitalicia concluye luego del plazo acordado "n" períodos o antes, si el beneficiario fallece. Es decir tiene un plazo máximo de n períodos.

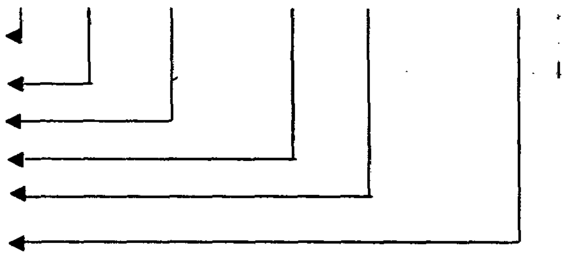
plazos	0	1	2	//	t	t+1	//	n-1	n
edad	x	x+1	x+2	...	x+t	x+t+1	...	x+n-1	x+n
capit	1	1	1	...	1	1	...	1	-

$P(x;1) = a(x;0;n) = a(x;0;n) = \bar{a}_{x:n}$

La compañía aseguradora le da al asegurado mientras éste vive la cobertura de n pagos.

Deducción de la fórmula a(x;0;n) mediante la suma de los valores actuales actuariales de la cobertura:

plazos	0	1	2	//	t	t+1	//	n-1	n
edad	x	x+1	x+2	...	x+t	x+t+1	...	x+n-1	x+n ...
capit	1	1	1	...	1	1	...	1	-



a(x;0;n)= E(x;0)+ E(x;1) +E(x;2)+... +E(x;t)+ +E(x;t+1)+...+ +E(x;n-1)

sabemos que E(x;0)= 1 $\qquad a(x;0;n) = \sum_{s=0}^{s=n-1} E(x;s)$

recordando que $E(x;s) = \dfrac{D(x+s)}{D(x)}$ entonces reemplazamos en la formula anterior y nos queda:

$$a(x;0;n) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{D(x+s)}{D(x)} = \frac{1}{D(x)} \sum_{s=0}^{s=n-1} D(x+s)$$

$$a(x;0;n) = \frac{1}{D(x)} . [D(x) + D(x+1) + D(x+2) + ...D(x+t)... + D(x+n-1)]$$

$$a(x;0;n) = \frac{N(x) - N(x+n)}{D(x)}$$

Deducción de la fórmula a(x;0;n) a través del método de la colectividad necesaria: En donde tenemos planteado en la ecuación la equivalencia actuarial entre los compromisos de los l_x representados por el pago de la Prima Pura

Unica y los compromisos de la compañía aseguradora representados por el pago de la renta temporaria a cada uno de los sobrevivientes en ese plazo: n.

$$l_{(x)} \cdot P(x;1) = l_{(x)} + v.\, l_{(x+1)} + V^2 .l_{(x+2)} + \ldots v^{n-1} . l_{(x+n-1)}$$

$$P(x;1) = \frac{l_{(x)} + v.\, l_{(x+1)} + v^2 .l_{(x+2)} + \ldots v^{n-1} . l_{(x+n-1)}}{l_{(x)}}$$

Si multiplicamos numerador y denominador por v^x queda:

$$P(x;1) = \frac{v^x l_{(x)} + v^{x+1} .\, l_{(x+1)} + v^{x+2} .l_{(x+2)} + \ldots v^{x+n-1} . l_{(x+n-1)}}{v^x l_{(x)}}$$

Si $v^x .l(x)=D(x)$, entonces:

$$P(x;1) = \frac{D(x)+D(x+1)+D(x+2)+\ldots+D(x+n-1)}{D(x)}$$

Por otro lado:

$$N(x)= D(x)+D(x+1)+D(x+2)+\ldots+D(x+n-1)+D(x+n)+D(x+n+1)+\ldots+D(w-1)+D(w)$$

$$N(x+n)= D(x+n)+D(x+n+1)+\ldots \quad +\ldots+D(w-1)+D(w)$$

Sabemos que $D(w)=0$

$$P(x;1) = \frac{N(x)-N(x+n)}{D(x)}$$

a(x;0;n) =:Es el valor actual o prima pura única de una sucesión temporaria de pagos inmediatos de \$1 c/u en forma adelantada (al inicio de cada período)que realiza la compañía mientras el asegurado se encuentre con vida durante ese plazo.
Condición para que la persona de edad x comience a cobrar inmediatamente \$ 1 y siga cobrándolo periódicamente es la SOBREVIVENCIA y por supuesto que haya pagado la PRIMA.

$$P(x;1) = a(x;0;n) = \frac{N(x)-N(x+n)}{D(x)}$$ Renta Vitalicia Temporaria Inmediata Unitaria

$$PPU = C\, a(x;0;n) = C.\frac{N(x)-N(x+n)}{D(x)}$$ Renta Vitalicia Temporaria Inmediata de \$C

II.5 Rentas Vitalicias Temporarias Diferidas en 1 periodo

✓ *Prima Pura Unica de una Renta Vitalicia Temporaria o de Plazo Limitado y Riesgo diferido en un período. O Vencidas o pospagables u ordinarias*

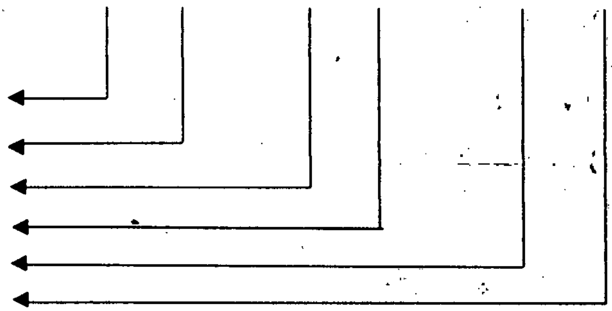
plazos	0	1	2	//	t	t+1	//	n-1	n
edad	x	x+1	x+2	...	x+t	x+t+1	...	x+n-1	x+n
capit		1	1	...	1	1	...	1	1

$$P(x;1)= a(x;1;n) =a(x;1;n)=a_{x:n}$$

La compañía aseguradora le da al asegurado mientras este vive la cobertura de n pagos.

Deducción de la fórmula a(x;1;n) mediante la suma de los valores actuales actuariales de la cobertura:

plazos	0	1	2	//	t	t+1	//	n-1	n
edad	x	x+1	x+2	...	x+t	x+t+1	...	x+n-1	x+n
capit		1	1	...	1	1	...	1	1



a(x;1;n)= E(x;1) +E(x;2)+... +E(x;t)+ +E(x;t+1)+...+ +E(x;n-1)+E(x;n)

$$a(x;1;n)=\sum_{s=1}^{s=n} E(x;s)$$

recordando que $E(x;s)=\dfrac{D(x+s)}{D(x)}$ entonces reemplazamos en la formula anterior y nos queda:

$$a(x;1;n)=\sum_{s=1}^{s=n}\frac{D(x+s)}{D(x)}=\frac{1}{D(x)}\sum_{s=1}^{s=n} D(x+s)$$

$$a(x;1;n)=\frac{1}{D(x)}.\left[D(x+1)+D(x+2)+...D(x+t)...+D(x+n-1)+D(x+n)\right]$$

$$a(x;1;n)=\frac{N(x+1)-N(x+n+1)}{D(x)}$$

Deducción de la fórmula a(x;1;n) a través del método de la colectividad necesaria:

En donde tenemos planteado en la ecuación la equivalencia actuarial entre los compromisos de los l_x que es el pago de la Prima Pura Unica y los compromisos de la compañía aseguradora que es el pago de la renta temporaria a cada uno de los l_x sobrevivientes en ese plazo: n. O sea:

$$l_{(x)} . P(x;1) = v. l_{(x+1)} + V^2 .l_{(x+2)} +...+v^{n-1} . l_{(x+n-1)} + V^n . l_{(x+n)}$$

$$P(x;1) = \frac{v. l_{(x+1)} +v^2.l_{(x+2)}+... v^{n-1}. l_{(x+n-1)} + v^n. l_{(x+n)}}{l_{(x)}}$$

Si multiplicamos y dividimos por v^x podemos trabajar con los valores de conmutación como hemos hecho y nos queda:

$$P(x;1) = \frac{N(x+1) - N(x+n+1)}{D(x)}$$

a(x;1;n) = Es el valor actual o prima pura única de una sucesión temporaria de pagos vencidos de $1 c/u o diferidos en un periodo que realiza la compañía mientras el asegurado se encuentre con vida durante ese plazo.
Condición para que la persona de edad x comience a cobrar inmediatamente $ 1 y siga cobrándolo periódicamente es la SOBREVIVENCIA y por supuesto que haya pagado la PRIMA.

$$P(x;1) = a(x;1;n) = \frac{N(x+1) - N(x+n+1)}{D(x)}$$ Renta Vitalicia Temporaria Unitaria Diferida t=1

$$PPU = C\,a(x;1;n) = C.\frac{N(x+1) - N(x+n+1)}{D(x)}$$ Renta Vitalicia Temporaria Diferida t=1 de $C

II.6 Rentas Vitalicias Temporarias Diferidas en t periodos

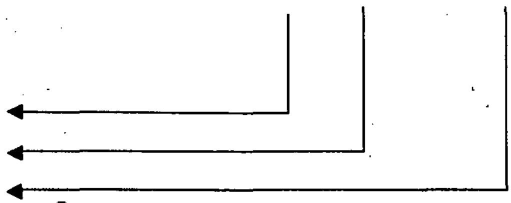
- ✓ *Prima Pura Unica de una Renta vitalicia temporaria o de Plazo limitado y Riesgo Diferido diferidas en t períodos*

plazos	0	1	2	//	t	t+1	//	t+n-1	t+n
edad	x	x+1	x+2	...	x+t	x+t+1	...	x+t+n-1	x+t+n
capit					1	1	...	1	-

P(x;1) = a(x;t;n)

Deducción de la fórmula a(x;t;n) mediante la suma de los valores actuales actuariales de la cobertura:

plazos	0	1	2	//	t	t+1	//	t+n-1	t+n
edad	x	x+1	x+2	...	x+t	x+t+1	...	x+t+n-1	x+t+n
capit	.				1	1	...	1	-



a(x;t;n)= E(x;t)+E(x;t+1)+..+E(x;t+n-1)

$$a(x;t;n) = \sum_{s=t}^{s=t+n-1} E(x;s)$$

recordando que $E(x;s)=\dfrac{D(x+s)}{D(x)}$ entonces reemplazamos en la formula anterior y nos queda:

$$a(x;t;n)=\sum_{s=t}^{s=t+n-1}\frac{D(x+s)}{D(x)}=\frac{1}{D(x)}\sum_{s=t}^{s=t+n-1}D(x+s)$$

$$a(x;t;n)=\frac{1}{D(x)}.\left[D(x+t)...+D(x+t+1)+...+D(t+n-1)\right]$$

$$a(x;t;n)=\frac{N(x+t)-N(x+t+n)}{D(x)}.$$

a(x;t;n) = PPU: Es el valor actual o prima pura única de una sucesión de pagos de $1 luego de t períodos de diferimiento a partir de la época de contratación en forma adelantada (al inicio de cada período) mientras el asegurado se encuentre con vida.
Condición para que la persona de edad x comience a cobrar $ 1 periódicamente es la SOBREVIVENCIA y por supuesto, que haya pagado la PRIMA.

$$a(x;t;n)=\frac{N(x+t)-N(x+t+n)}{D(x)}$$ **Renta Vitalicia Temporaria Unitaria Diferida t períodos**

PPU = C. $a(x;t;n)=C.\dfrac{N(x+t)-N(x+t+n)}{D(x)}$ **Renta Vitalicia Temporaria Diferida t períodos de $C**

Resumen de las fórmulas de rentas vitalicias temporarias de supervivencia

FÓRMULAS DEL VALOR ACTUAL O PRIMA PURA ÚNICA DE RENTAS VITALICIAS TEMPORARIAS	
Inmediatas	$\boxed{a(x;0;n)=\dfrac{N(x)-N(x+n)}{D(x)}}$
Diferidas t=1	$\boxed{a(x;1;n)=\dfrac{N(x+1)-N(x+n+1)}{D(x)}}$
Diferidas t>1	$\boxed{a(x;t;n)=\dfrac{N(x+t)-N(x+t+n)}{D(x)}}$

La regla que observamos para encontrar la fórmula de valuación de una renta vitalicia temporaria es:

a(edad de contratac; fecha de 1° pago; plazo) =

= <u>N(*edad 1°pago de renta*) - N(*edad 1° pago de renta +número de pagos*)</u>
D(*edad de contratación*)

PRIMAS PERIÓDICAS PURAS

A los fines de no resultar tan gravoso el pago que debe afrontar el asegurado: éste en vez de pagar una PPP o P(x;1) denominada Prima Pura Unica, tiene la posibilidad de pagar Primas Puras Periódicas: PPP o P(x;n) desde el inicio del contrato y durante un plazo limitado, mientras esté con vida. De esta forma también estos capitales no son ciertos al igual que los que debe afrontar la compañía. Estas primas periódicas pueden ser anuales o tener cualquier periodicidad.

Ahora plantearemos en el eje para resolver la ecuación de equilibrio actuarial. En vez de una PPU tenemos que distribuir las PPP en forma actuarial por el plazo que se fije contractualmente.

Deducción de la fórmula a(x;t;n)

plazos	0	1	2	//	t	t+1	//	n-1	n
edad	x	x+1	x+2	...	x+t	x+t+1	...	x+n-1	x+n...
	PPU								
	PPP	PPP	PPP	...	PPP	PPP	...	PPP	

PPU = PPP . a(x;0;n)

$$PPU = PPP \cdot \frac{N(x) - N(x+n)}{D(x)}$$

Otras Aplicaciones

8) Una persona de 32 años de edad contrata un seguro de renta vitalicia completa inmediata, de tal manera que percibirá $ 12.000 anuales. Halle:
a) La prima pura única que deberá pagar a la compañía aseguradora.
b) La prima periódica pura anual sabiendo que el asegurado pagará por el plazo de 8 años en forma adelantada desde el momento de contratación.

Rta.: a) PPU = 246,345,93; b) PPA = 35.370,39.

a) *Cálculo de la Prima Pura Unica: PPU de una anualidad vitalicia completa adelantada*

$$PPU = 12000.a(32,0;w-32) = 12000.\frac{N(32)}{D(32)} = 12000.\frac{56311,6948}{2743,0546}$$

$$PPU = 12000.20,52882753 = 246345,93$$

El valor actual de $12.000 anuales pagaderos en forma adelantada al asegurado mientras éste se encuentre con vida es de $ 246.345,93. Es decir que el compromiso del asegurado es pagar ese valor actual denominado Prima Pura Unica y el compromiso de la compañía aseguradora es pagar $ 12.000 anuales mientras esta persona esté con vida.

b) *Cálculo de la Prima Pura Anual=PPA*

$$PPU = PPA.a(x;0;n)$$

$$12000.\frac{N(32)}{D(32)} = PPA.\frac{N(32)-N(40)}{D(32)}$$

$$PPA = 12000.\frac{N(32)}{N(32)-N(40)} = 12000.\frac{56311,6948}{56311,6948-37207,0025} = 35370,39$$

En vez de pagar una prima única de $ 246.345,93 el asegurado puede pagar 8 primas periódicas puras adelantadas de $ 35.370,39 cada una, siempre y cuando esté con vida.

9) Con fecha 1/03 Ud., de 18 años de edad, contrata un seguro en el cual la compañía aseguradora se compromete a pagar $ 12.000 a partir de que cumpla los 60 años y lo seguirá pagando en cada cumpleaños futuro siempre que Ud. esté con vida.
¿Cuál es el compromiso que Ud. como asegurado tiene con la compañía, si puede abonarlo mediante primas puras anuales por el plazo de diferimiento?

Rta.: 1.236,71.

Asegurado	Compañía
• x=18 (Edad de contratación del asegurado) • Compromiso Eventual: Pago de PPAnuales desde la contratación y por el plazo de diferimiento.	• Compromiso Eventual: Pago del Capital asegurado : una renta vitalicia de 12.000 anuales • Condición para cobrar la póliza: sobrevivencia del asegurado.
Tipo de Seguro sobre la vida en caso de sobrevivencia: con primas periódicas anuales. **Cobertura de Renta vitalicia completa diferida en t = 42 años = Renta de plazo ilimitado y riesgo diferido**	

En este caso, el valor de cada una de las primas puras anuales se supeditan a que el asegurado sobreviva; es una equivalencia actuarial: si vive paga, caso contrario no paga.

P.P.U. —Prima Pura única— que deberá pagar el asegurado.

P.P.A. —Prima pura anual— que deberá pagar el asegurado mientras viva.

PPU = PPA . a(x;0;t) ➔se trata de una renta vitalicia temporaria, no completa.

$C.\frac{N(x+t)}{D(x)} = PPA.\frac{N(x)-N(x+t)}{D(x)}$, si despejamos el valor de la P.P.U. nos queda:

$$PPA = C \cdot \frac{N(x+t)}{N(x)-N(x+t)}$$

$$PPA = 12.000 \cdot \frac{N(60)}{N(18)-N(60)}$$

$$PPA = 1236{,}71$$

CÁLCULO DE LA RENTA VITALICIA CON PERIODICIDAD MENSUAL

Si bien para el cálculo de la Prima se considera que la compañía aseguradora abona la renta vitalicia con periodicidad anual, sabemos que esta sucesión de capitales pueden ser abonados con otra periodicidad, tal como la mensual. A los fines prácticos podemos simplificar diciendo que esta renta mensual será la proporcional a la anual. Pero, estamos en condiciones de observar que tal procedimiento de fácil cálculo es incorrecto. En tal sentido, este aspecto es considerado ya por Gonzalez Galé en su libro "Elementos de Cálculo Actuarial", quien introduce un arreglo cuyo cálculo es aproximado y sigue siendo base hoy en día para el cálculo de las rentas vitalicias previsionales. Este punto será tratado a continuación con algunos ejemplos:

10) Si una persona de 32 años de edad que contrata el seguro de renta vitalicia, en vez de percibir la renta en forma anual desea percibir $ 1.000 mensuales en forma de renta vitalicia completa adelantada, halle la prima pura única que deberá pagar a la compañía aseguradora.

Rta.:PPU= 240.845,93.

Cálculo de la Prima Pura Unica de una mensualidad vitalicia completa adelantada

$$P(x;1) = m.a(x;0;w-x;m)$$

En González Galé se encuentra esta fórmula que es una aproximación para calcular la renta vitalicia subperiódica, pues no se consideraron intereses ni mortalidad en esos superíodos de donde se formula:

$$\ddot{a}x^{(m)} = ax + \frac{m+1}{2.m}$$

Es decir que nos quedaría:

$$\ddot{a}_x^{m} = \frac{N(x+1)}{D(x)} + \frac{m+1}{2.m} \qquad \text{o bien:} \qquad \ddot{a}_x^{(m)} = \frac{N_X}{D_X} - 1 + \frac{m+1}{2\,m}$$

si m=12 pues son mensualidades vitalicias quedaría:

$$\ddot{a}_x^m = \frac{N(x)}{D(x)} - \frac{24}{24} + \frac{13}{24} = \frac{N(x)}{D(x)} - \frac{24\text{-}13}{24} = \frac{N(x)}{D(x)} - \frac{11}{24}$$

En definitiva (m-1)= 11 y 2m=2.12=24 para un m=12.

$$\boxed{P(x;1) = m.\left[\frac{N(x)}{D(x)} - \frac{m-1}{2.m}\right]}$$

$$P(x;1) = 12.\left[\frac{56311,6948}{2743,0546} - \frac{12-1}{2.12}\right]$$

$$P(x;1) = 12.\left[20,52882753 - \frac{11}{24}\right] = 12 \bullet 20,0704942$$

P(x;1) =240,86. Es el valor actual que debe pagar el asegurado a la compañía para tener derecho a que ésta le pague una mensualidad vitalicia adelantada de $1.

Si la mensualidad vitalicia pretendida es de $1.000 el valor de la prima pura única será:

PPU=1000 . 12 . 20,0704942= 240.845,93

Otras aplicaciones

11) Una persona de 32 años de edad contrata un seguro de renta vitalicia completa diferida por un período, de tal manera que percibirá $ 12.000 anuales a fin de cada año. Halle:
a) La prima pura única que deberá pagar a la compañía aseguradora.
b) La prima periódica pura anual sabiendo que el asegurado pagará por el plazo de 8 años en forma vencida.

Rta.: a) PPU=234.345,93; b) PPA= 35.054,54.

a) Cálculo de la Prima Pura Unica=PPU de una anualidad vitalicia completa vencida o diferida por 1 mes.

$$PPU = 12000.a(32,1;w-32) = 12000.\frac{N(33)}{D(32)} = 12000.\frac{53568,6403}{2743,0546}$$

$$PPU = 12000.19,52882753 = 234.345,93$$

El valor actual de $12.000 anuales pagaderos en forma vencida al asegurado por la compañía, mientras éste se encuentre con vida es de $ 234.345,93. Es decir que el compromiso del asegurado es pagar ese valor actual denominado Prima Pura Unica de $ 234.345,93 y el compromiso de la compañía aseguradora es pagar $ 12.000 anuales mientras esta persona esté con vida.

Si observamos los valores tenemos que:

a(x;0;w-x) – 1 = a(x;1;w-x)

20,52882753 – 1 = 19,52882753

Es decir, que si la renta vitalicia es vencida al valor actual de la renta vitalicia adelantada le restamos el peso del momento 0 que no está sujeto a ley de probabilidad pues p=1 (certeza) y ni a tasa de interés.

De otra forma, al valor de la prima única pura de $246.345,93 correspondiente al pago de una renta adelantada le restamos justamente el primer pago que hace la compañía de $ 12.000. Nos da el valor de la prima pura única de la renta vencida de este ejercicio que es $234.345,93.

b) *Cálculo de la Prima Pura Anual=PPA*

$$PPU = PPA.a(x;1;n)$$

$$12000.\frac{N(33)}{D(32)} = PPA.\frac{N(33)-N(41)}{D(32)}$$

$$PPA = 12000 \bullet \frac{N(33)}{N(33)-N(41)}$$

$$PPA = 12000 \bullet \frac{53.568,6403}{53.568,6403 - 35.230,8264}$$

PPA= 12.000 * 2,921211906

PPA = 35.054,54

El asegurado, en vez de pagar una prima pura única de $234.345,93, puede pagar 8 primas periódicas puras vencidas de $ 35.054,54 cada una, siempre y cuando esté con vida.

12) Si esta persona de 32 años de edad que contrata el seguro de renta vitalicia en vez de percibir la renta en forma anual desea percibir $ 1.000 mensuales en forma de renta vitalicia completa vencida, halle: la prima pura única que deberá pagar a la compañía aseguradora.

Rta.: PPU = 239.845,93.

a) *Cálculo de la Prima Pura Unica=PPU de una mensualidad vitalicia completa vencida o diferida por un período mensual*

$$P(x;1) = m.a(x;1;w-x;m)$$

En González Galé se encuentra esta fórmula que es una aproximación para calcular la renta vitalicia subperiódica vencida, pues no se consideraron intereses ni mortalidad en esos superíodos de donde surge que:

$$a_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m}$$

Es decir que nos quedaría:

$$a_x^m = \frac{N(x+1)}{D(x)} + \frac{m-1}{2.m}$$

$$a_x^m = \frac{N(x)}{D(x)} - 1 + \frac{(m-1)}{2.m}$$

Recordemos que:

N(x) = D(x) + D(x+1)+D(x+2)+...D(w)

N(x+1)= D(x+1)+D(x+2)+...D(w)

Entonces: N(x) = D(x) + N(x+1) y N(x+1) = N(x) – D(x)

si m=12 pues son mensualidades vitalicias quedaría:

$$a_x^m = \frac{N(x)}{D(x)} - \frac{24}{24} + \frac{11}{24} = \frac{N(x)}{D(x)} - \frac{24-11}{24} = \frac{N(x)}{D(x)} - \frac{13}{24}$$

En definitiva (m+1)=13 y 2m=2.12=24.

$$\boxed{P(x;1) = m.\left[\frac{N(x)}{D(x)} - \frac{m+1}{2.m}\right]}$$

$$P(x;1) = 12.\left[\frac{N(32)}{D(32)} - \frac{12+1}{2.12}\right]$$

$$P(x;1) = 12.\left[\frac{56311{,}6948}{2743{,}0546} - \frac{12+1}{2.12}\right]$$

$$P(x;1) = 12.\left[20{,}52882753 - \frac{13}{24}\right] = 12 \bullet 19{,}98716086$$

P(x;1)=239,85

Es el valor actual que debe pagar el asegurado a la compañía para tener derecho a que ésta le pague una mensualidad vitalicia vencida de $1 o diferida por 1 mes.
Si la mensualidad vitalicia pretendida es de $1.000 el valor de la prima pura única será:

PPU=1000 . 12 . 19,98716086= 239.845,93.

Si observamos los dos valores hallados de PPU que se compromete a abonar cada asegurado para cobrar una RVMensual de $ 1.000 en forma adelantada o vencida son $ 240.845,93 o 239.845,93, respectivamente. La diferencia es $ 1.000 pues en la renta diferida en un período es la mensualidad que no cobra.

13) Una persona de 20 años de edad desearía contar con una anualidad vitalicia de $12.000 a partir de la edad de 60 años inclusive. Para ello, se propuso realizar aportes anuales en una entidad financiera a principios de cada año aceptando una tasa de interés promedio anual del 4% con el propósito de reunir un fondo a la edad de 60 años. A partir de ese momento, a los fines de comprar una renta vitalicia se presenta en una compañía aseguradora. Determine el valor de cada aporte anual que deberá realizar.

Rta.: c= 1.549,15.

Operación en una Entidad Financiera

VF(0;40;0,04) = c . s(0;40;0,04)

Debemos despejar el valor del aporte denominado c que devenga una TEA pasiva del 4%. Pero el dato que nos falta integrar es el fondo acumulado por estos 40 depósitos anuales, ya que conocemos que dicho fondo nos da derecho al cobro de una renta vitalicia adelantada de $ 12.000 anuales que resulta ser comprada a la edad de 60 años. Entonces, determinamos el valor actual de dicha renta vitalicia

Operación con la compañía aseguradora

Cálculo de la Prima Pura Unica:PPU de una anualidad vitalicia completa adelantada

PPU = 12.000 . a(60;0;w-x)

$$PPU = 12.000 \bullet \frac{N(60)}{D(60)} = 12.000 \bullet \frac{10.189,8783}{798,6997}$$

PPU= 12.000 * 12,75808455

PPU = 153.097,01

Volvemos entonces a la determinación del aporte anual que surge de la *Operación con financiera*

VF(0;40;0,04) = PPU

153.097,01 = c . s(0;40;0,04)

153.097,01 s^{-1} (0;40;0,04) = c

$$c = 153.097,01.\left[\frac{(1+0,04)^{40}-1}{0,04}.(1+0,04)\right]^{-1}$$

c= 153.097,01 . 98,828653633^{-1}

c= 153.097,01 . 0,010118739

c= 1.549,15

14) Si la persona de 20 años de edad que deseaba contar con una anualidad vitalicia de $12.000 a partir de la edad de 60 años inclusive, de acuerdo a los cálculos efectuados, proyecta que sólo puede depositar anualmente $1.000 a principios de cada año en la misma entidad financiera, cuya tasa pasiva de interés promedio anual era del 4%, y sabiendo que dichos fondos quedarán depositados hasta que el aportante llegue a la edad de 60 años para destinarlos en ese momento a la compra de una renta vitalicia adelantada en una compañía aseguradora, determine: el compromiso de ambas partes para el cumplimiento del contrato de Renta vitalicia anual y prima pura única.

Rta.: PPU= 98.826,54 y Cuota de la R.V.A= 7.746,18.

Este planteo relacionado con el anterior sólo modifica el aporte que el futuro asegurado deberá realizar en una entidad financiera bajo la forma de una operación financiera cierta.

Un análisis simplificado es determinar: 1°) cuánto representa el nuevo aporte del primero que se había proyectado.

$$\frac{1000}{1549,15} . \ 0,645515$$

2°) La cuota resulta de haber proyectado el fondo acumulado con ese aporte de 1000 anual.

Si VF(0;40;0,04) = 1.549,15 . s(0;40;0,04) = 153.097,01

Entonces VF(0;40;0,04) = 1.000 . s(0;40;0,04) = 0,645515 .153.097,01= 98.826

El valor final proyectado también representa casi el 65%.

3°) Recalculamos el importe de la renta vitalicia anual que en principio era de $ 12.000 y ahora proporcionamos, como hicimos arriba, el valor final de los depósitos que representa el valor de la Prima Pura Unica.

Es decir: Si PPU= 153.097,01 para una R.V.Anual de 12.000

Para PPU= 98.826 la R.V.Anual será 0,645515 . 12.000 = 7746

De todas formas, comprobaremos los resultados haciendo los cálculos considerando que no contamos con los datos del ejercicio anterior.

- *Depósitos anuales ciertos*

VF(0;40;0,04) = 1.000 . s(0;40;0,04)

VF(0;40;0,04) = 1.000 . 98,82653633

VF(0;40;0,04) = 98.826,54

PPU = 98.826,54. Será el valor actual de una *renta anual* vitalicia completa inmediata.

$$98.826,54 = RV.\frac{N(60)}{D(60)}$$

$$98.826,54 = RV.\frac{10.189,8783}{798,6997}$$

$$RV = 98.826,54.\frac{798,6997}{10.189,8783}$$

RV = 98.826,54 .0,078381672

RV= 7.746,18

15) Si a otra persona de 20 años de edad le ofrecen una renta vitalicia de $ 1.000 mensuales en lugar de $ 12.000 anuales a partir de la edad de 60 años inclusive, cuál será el importe de cada depósito anual que deberá hacer a partir de los 20 años a principios de cada mes, asumiendo que la entidad financiera retribuye con una TEA promedio del 4%, sabiendo que dichos fondos quedan depositados como operación financiera cierta hasta que dicho aportante llegue a la edad de 60 años para destinarlos recién en ese momento a la compra de una renta vitalicia adelantada de $ 1.000 mensuales en una compañía aseguradora. Determine: el valor del depósito anual que deberá realizar esta persona desde los 20 años de edad hasta el momento en que retire los fondos para comprar la renta vitalicia en una compañía aseguradora.

Rta.: c=1.493,50.

$$PPU = 12.1000.\left[\frac{N(60)}{D(60)} - \frac{12-1}{2.12}\right]$$

$$PPU = \left[\frac{10.189,8783}{798,6997} - \frac{11}{24}\right]$$

$$PPU = 12000.12,29975122$$

PPU= 147.597,01. Este valor actual o prima pura única de una de una *renta mensual de $1.000* vitalicia completa inmediata o adelantada constituirá el valor final reunido mediante 40 depósitos anuales cuyo importe buscaremos capitalizados al 4% de interés anual.

- Depósitos anuales

VF(0;40;0,04) = PPU = 147.597,01

VF(0;40;0,04) = c . s(0;40;0,04)

c= VF(0;40;0,04) . s^{-1}(0;40;0,04)

c= 147.597,01 . 0,010118739

c = 1.493,5

16) Si la persona de 20 años de edad que deseaba contar con una anualidad vitalicia de $12.000 a partir de la edad de 60 años inclusive, desea que la renta vitalicia sea de $ 1.000 mensuales en lugar de $ 12.000 anuales, cuál será el importe de cada depósito mensual que deberá hacer a partir de los 20 años a principios de cada mes, asumiendo que la entidad financiera retribuye con una TEM equivalente a tasa de interés promedio anual del 4%. Sabiendo que dichos fondos quedan depositados hasta que dicho aportante llegue a la edad de 60 años para destinarlos en ese momento a la compra de una renta vitalicia adelantada de $ 1.000 mensuales en una compañía aseguradora, determine: el valor del depósito mensual que deberá realizar esta persona desde los 20 años de edad hasta el momento en que retire los fondos para comprar la renta vitalicia en una compañía aseguradora.

Rta.: c= 128,42.

Renta mensual vitalicia completa inmediata

$$P(x;1) = m.\left[\frac{N(x)}{D(x)} - \frac{m-1}{2.m}\right]$$

$$PPU = 12.1000.\left[\frac{N(60)}{D(60)} - \frac{12-1}{2.12}\right]$$

$$PPU = \left[\frac{10.189,8783}{798,6997} - \frac{11}{24}\right]$$

$$PPU = 12000.12,29975122$$

PPU= 147.597,01

Este valor actual o prima pura única que debe pagar el asegurado para percibir a partir de ahora en forma de *renta mensual de $1.000* (vitalicia completa inmediata o adelantada) constituirá el valor final reunido mediante 480 depósitos mensuales cuyo importe buscaremos capitalizados a la TEM pasiva equivalente al 4% anual.

- *Depósitos mensuales*

n= 480 = 40 . 1 2

$i_{30} = (1+0{,}04)^{30/365} - 1 = 0{,}003228822$

VF(0;480;0,0032288) = PPU

VF(0;480;0,0032288) = c . s(0;480;0,0032288)

c= VF(0;480;0,0032288) . s^{-1}(0;480;0,0032288)

c= 147.597,01 . 0,0008701

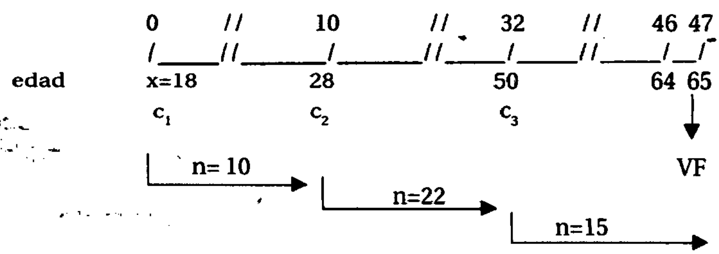
c = 128,42

17) Si a los 18 años usted comienza a ahorrar en una cuenta a tal fin un importe anual que representa el 7,5 % neto de sus ingresos anuales de \$ 18.000, Usted asume que a partir de los 28 años sus ingresos se triplicarán y posteriormente a partir de los 50 años serán dos veces el ingreso inicial. Consideramos que los importes son en valores constantes. La cuenta garantiza una rentabilidad promedio del 4% anual. Cuál será el valor formado a los 65 años de edad, un año después del último aporte que puede usted retirar.

Rta.: 387.961.

Se trata simplemente de una equivalencia financiera y no actuarial.

La cantidad de aportes anuales totales desde los 18 años hasta los 64 años inclusive son 47. Si sumamos cada uno de los n comprendidos en los factores de capitalización de abajo totalizan 47 (10+22+15).



c_1= 18.000 * 0,075 = 1350

c_2= 18.000 * 0,075*3 = 4.050

c_3= 18.000 * 0,075 *2= 2.700

VF(0;47;0,04)=1350 .s (0;10;0,04) $(1+0{,}04)^{37}$ +4050 .s (0;22;0,04) $(1+0{,}04)^{15}$+ 2700 .s (0;15;0,04)

VF(0;47,0,04)= 16.856,57 . $(1+0{,}04)^{37}$+144.252,45 . $(1+0{,}04)^{15}$+56.226,23

VF(0;47;0,04) = 71.945 +259790 +56.226 = 387.961

18) Si con el valor final obtenido usted decide comprar una renta vitalicia en donde la compañía aseguradora le comienza a abonar a partir de hoy la renta, determine cuál será el importe que cobrará anualmente, mientras esté con vida.

Rta.: 35.469 anual.

Asegurado	Compañía
• x=65 (Edad de contratación del asegurado) • Compromiso Cierto: Pago de una PPU=387961	• Compromiso Eventual: Pago del Capital Asegurado que consiste una Renta vitalicia completa inmediata anual. Condición para cobrar la póliza: sobrevivencia del asegurado.
Tipo de Seguro sobre la vida en caso de sobrevivencia: **Cobertura de Renta vitalicia Completa prepagable o anticipada = Renta de plazo ilimitado y riesgo inmediato**	

$$PPU = C \,.\, a(x;0;w\text{-}x)$$

$$PPU = C.\frac{N(x)}{D(x)}$$

$$C = 387.961.\frac{D(65)}{N(65)}$$

$$C = 387.961 \;\; \frac{603,1606}{6597,4306}$$

$$C = 387.961 * 0,091423561 = 35.469$$

19) Una mujer de 62 años cobra un seguro sobre la vida en caso de muerte a raíz del fallecimiento de su marido de 78 años de edad; razón por la cual resulta beneficiaria por $ 240.000. Está evaluando colocar dicha cuantía en mitades iguales con el siguiente destino:

- alquiler de cocheras cuya rentabilidad es del 4% anual vencida.
- comprar una renta vitalicia anual adelantada de plazo ilimitado en la misma compañía de seguro.

Determine el ingreso anual que le generará cada contrato.

Contrato de alquiler

Mediante la compra de cocheras por un valor de $ 120.000 genera un alquiler que el mercado paga en forma adelanta y es de $ 4.615,38.

$$c = 120.000 \,.\, \frac{0,04}{(1+0,04)} = 120.000 * 0,038461538 = 4.615,38$$

Contrato de Seguro de renta vitalicia completa inmediata.

Transfiere a la compañía aseguradora mediante el pago de una prima pura única de $ 120.000 el compromiso de pagarle en forma inmediata una renta anual vitalicia de plazo ilimitado, con la única condición que es su sobrevivencia.

$$120.000 = C \, . \, \frac{8.633,6120}{717,4375}$$

$$120.000 = C \, . \, 12,03395696$$

$$C = 9.971,78$$

Del análisis de ambos contratos cuyos valores actuales son iguales (120.000) y también la tasa de interés que retribuye la operación financiera y la tasa de interés que está implícita en la tabla de mortalidad para valuar la operación de seguro, podemos concluir que:

- La diferencia de ingresos mensuales generados por cada operación de igual inversión (120.000) se encuentra simplemente en la función biométrica y representa el beneficio de sobrevivencia que incrementa la renta anual que recibirá esta señora. Es lo que esta señora gana por la regla de la supervivencia, es decir lo que dejan los que no sobrevivieron.
- Debemos considerar otro aspecto importantísimo y es que en el caso del contrato de alquiler se mantiene la propiedad pues se trata de un usufructo. En tal sentido, se lo puede también ver como una Renta Perpetua.
- En el contrato de alquiler las partes son dos: propietario e inquilino; mientras que en el contrato de seguro las partes son: la compañía, por un lado, y, por el otro, un gran número de personas expuestas al mismo riesgo.
- Mientras que en el contrato de seguro esta señora tiene un plazo que si bien llamamos ilimitado dentro del estudio de rentas actuariales, ese plazo está condicionado a la vida de la mujer y tiene un fin natural y cierto; lo que no es cierto es cuándo, pero de todas formas está acotado. Posteriormente, se pierde todo el capital invertido pues la compañía en este caso bajo esta modalidad no tiene ningún compromiso. Se trata de una Renta Vitalicia.
- Con el aporte de $ 120.000 se extingue la renta vitalicia por la muerte del asegurado. Si bien puede haber un beneficiario en el contrato, ello genera una renta vitalicia de menor cuantía. Igualmente, en algún momento el activo se extingue.
- Con el aporte de $ 120.000 en inversiones en bienes raíces el activo no se extingue, pues ante la muerte de la persona este activo integra el haber hereditario y es transmitido de generación en generación.

ESTUDIO DE CASO

APLICACIONES DE RENTAS VITALICIAS EN NUESTRO MERCADO ARGENTINO

➢ **Seguros de retiro**

➢ **Sistema jubilatorio-Nociones breves**

El sistema actual rige a partir del 15 de julio de 1994 con la Ley N° 24.241 y tiene como finalidad otorgar cobertura a las personas ante las contingencias de:

- vejez: otorgado en la etapa pasiva del individuo
- invalidez: otorgado en la etapa activa del individuo en caso de que a éste le ocurra un siniestro.
- muerte: que puede ocurrir en la etapa activa o pasiva del individuo generando la pensión por fallecimiento.

Nosotros trataremos a continuación la cobertura en caso de vejez. Por resoluciones conjuntas S.S.N. N° 30.170 y SAFJP N° 030/2004 del mes de octubre del año 2004 se establece que "la moneda de los contratos de seguros de Renta Vitalicia Previsional y de Rentas vitalicias derivadas de la Ley 24.557 será de curso legal y forzoso" agregando en su artículo 2 que "se derogan las autorizaciones que se hubieran conferido a las Cías. de Seguro de Retiro para operar en el Seguro de Renta Vitalicia Previsional y de Rentas vitalicias derivadas en Moneda Extranjera". Así con esto, solamente se permiten que estas operaciones sean en pesos.

En la Resolución N° 25.530/97 SSN se informa la tabla de mortalidad que se utilizará para el cálculo de dichas rentas y se acompañan las mismas (Tablas de mortalidad GAM 71). Asimismo se informa que la tasa de interés técnico que se utilizará será del 4%.

En la Argentina, según el Sistema Integrado de Jubilaciones y Pensiones —S.I.J.P.— se presentaron dos regímenes que conviven para el pago de los haberes en la etapa pasiva de las personas que aportaron:

❐ Régimen Previsional Público o de Reparto a cargo del Estado en forma integra, estando a su cargo el pago de:
  - ✓ la Prestación Básica Universal —PBU—;
  - ✓ la Prestación Complementaria —PC— y
  - ✓ la Prestación Adicional por Permanencia —PAP—.

❐ Régimen Mixto ya que el trabajador percibirá haberes del:
  - ✓ Régimen de Capitalización Individual —SCCI— en forma de Jubilación Ordinaria o simplemente el haber que ya hemos calculado en este capítulo.

✓ Régimen de Reparto: a través de la Prestación Básica Universal —PBU— y la prestación compensatoria —PC—. Se excluye la PAP pues en este régimen el aportante dejó de ingresar al Régimen Previsional Público.

Para el financiamiento de las prestaciones comunes a ambos regimenes el SIJP —sistema Integrado de Jubilación y Pensiones— recibe la contribución patronal del 16% de la remuneración de los trabajadores en relación de dependencia y 16 de los 27 puntos de los aportes de los trabajadores autónomos.

El aporte personal inicial del 11% de la remuneración en caso de trabajadores en relación de dependencia y 11 de los 27 puntos para trabajadores autónomos se aplicarán al régimen elegido por el trabajador, uno u otro.

Actualmente la edad de retiro es 60 años para mujeres y 65 años para hombres.

Para el cálculo de los componentes adicionales a la renta previsional mensual tenemos:

$$\boxed{\bullet\ PBU = 2{,}5\ .\ MOPRE\ .\ (1 + 0{,}01\ .\ a)}$$

Siendo a: la antigüedad en exceso de 30 años a la edad de retiro. $30<a<45$

El MOPRE es el Módulo Previsional que reemplazó al AMPO —Aporte Medio Previsional Obligatorio—. A diferencia del AMPO que se calculaba dividiendo el promedio mensual de los aportes ingresados al régimen de capitalización individual establecido en el art. 39 de la Ley 24.241 por el número total promedio mensual de afiliados que aportaban el MOPRE es un valor fijado de acuerdo a posibilidades presupuestarias. Como vemos es independiente de los ingresos del trabajador (Resol. Conj. 292/00 y 531/00, 5/7/2000, MOPRE=$80).

$$\boxed{\bullet\ PC = 0{,}015\ .\ n\ .\ w\ .}$$

w = salario promedio de los últimos 10 años anteriores al retiro.
n = antigüedad desde los aportes iniciales hasta el 1/7/94.

Acá se reconocen los aportes del trabajador realizados al antiguo régimen previsional hasta la sanción de la Ley 24.241, 1/7/94.

$$\boxed{\bullet\ PAP = 0{,}0085\ .\ m\ .\ w\ .}$$

m= antigüedad entre el 1/7/94 y la edad de retiro.

Esta prestación la reciben solamente las personas acogidas al régimen de reparto, mientras que en régimen mixto este beneficio es reemplazado por la renta vitalicia previsional.

Posteriormente apareció otro cálculo adicional que es la Prestación Suplementaria —PS— calculada de la siguiente forma:

- PS= [10 . MOPRE –(PC+PAP+J.O)] / 3,50

Nos preocupa encarar el tema relacionado al cálculo de la Jubilación Ordinaria enfocado con la forma de renta vitalicia previsional. Allí intervienen dos aspectos:

- El cálculo del Valor Final Acumulado desde el inicio de aportes hasta la edad prevista de retiro.
- El cálculo de la renta vitalicia previsional que resulte en función de la Prima Pura Unica determinada.

La afiliación al S.I.J.P. es obligatoria para aquellas personas mayores de 18 años de edad que realicen actividades en relación de dependencia o como trabajadores autónomos en donde establece que si el trabajador optaba por el Régimen Privado de Capitalización Individual los aportes que hiciese en su etapa activa ingresan a una cuenta individual de capitalización administrada por la A.F.J.P. (Administradora de fondos de Jubilaciones y Pensiones).

El fondo se compone por el número de cuotas aportadas por el valor de la cuota al momento de jubilación. Las cuotas partes son la unidad de medida en que se divide el fondo de jubilación y pensión que es administrado por la AFJP.

En el momento de jubilación que podríamos llamar la "edad prevista de retiro", la administradora traspasa el fondo acumulado de la cuenta a una compañía aseguradora.

La compañía aseguradora es la responsable de restituir el saldo de la cuenta de capitalización al trabajador que ahora reúne los requisitos para jubilarse mediante el pago de una Renta vitalicia previsional, bajo la denominación de "Jubilación Ordinaria".

Entonces, la compañía aseguradora está obligada al pago de la prestación vitalicia al beneficiario y a partir del fallecimiento de éste está obligada al pago de una prestación en forma de pensión a los derechohabientes.

El cálculo de la Jubilación Ordinaria depende de la *Prima Pura Unica*. Este Valor Actual de una renta vitalicia también es el Valor Final Temporario Cierto representado por el Fondo Acumulado que la AFJP traspasa a la compañía de seguro recién en la edad de jubilación y está definido como el valor actuarial inmediato necesario para percibir una renta vitalicia completa. Para el cálculo se utiliza la tabla de mortalidad GAM 71 según Resolución N° 25.530/97 S.S.N.

De allí se desprende que para la formación del fondo acumulado no se utilizan funciones actuariales sino solamente financieras, pues este Fondo es la suma de los aportes capitalizados a una tasa de interés que durante toda la etapa activa realizara el trabajador a través de una renta financiera temporaria. En cambio, los ingresos que reciba por su Jubilación Ordinaria durante su etapa pasiva se calculan a través de una renta actuarial y lo veremos con la forma de una renta vitalicia completa.

Hemos realizado algunos ejemplos en este capítulo, antes de presentar este caso que no es más que un ejemplo más integrado.

La compañía de seguros está obligada a pagar la prestación correspondiente desde el momento en que el trabajador o afiliado suscribió el contrato y hasta su muerte. Y luego a sus derechohabientes si constan en el contrato.

Esta renta vitalicia previsional es "irrevocable", ello significa que una vez elegida este tipo de prestación no podrá seleccionarse otra modalidad; como así tampoco podrá admitirse cambios de aseguradoras.

Se aclara que la ley tiene previsto otras modalidades tales como retiro programado y retiro fraccionario.

Entonces, tenemos que:

Renta vitalicia Previsional= f(Saldo transferido, la edad de los beneficiarios, la edad del grupo de derechohabientes, tabla de mortalidad utilizada que incluye la tasa de interés técnico).

La cuenta de capitalización individual no puede sufrir retiros hasta el momento en que el aportante se jubile, salvo que se produzca alguna contingencia, tal como invalidez o fallecimiento. El fondo acumulado en dicha cuenta depende no solamente de los aportes, sino también de las quitas que sufra la cuenta a través comisiones: gastos administrativos , costo del seguro de invalidez, fallecimiento , calculados como un porcentaje sobre los ingresos sujetos al aporte del empleado y se incrementa por la rentabilidad que la administradora obtuvo justamente por administrar los aportes y aplicarlos en determinados activos financieros tales como títulos, obligaciones negociables, debentures, depósitos a plazo, acciones, cuotas partes de fondos comunes de inversión, cédulas, letras. Es importante mencionar que por Decreto 1495/2001 las administradoras de los fondos de jubilación y pensión no pueden cobrar comisiones fijas.

Ejercicio de Aplicación para el cálculo de la renta previsional vitalicia

Una persona en relación de dependencia quisiera conocer cuál sería su renta vitalicia previsional mensual a la edad de 65 años —edad prevista de retiro— suponiendo que sus ingresos mensuales son de $ 1.000 más el sueldo anual complementario. Este trabajador comenzó a aportar desde el ingreso al sistema —1/08/94— y la fecha de retiro fue el 1/07/2005. Asumimos que la administradora cobra comisiones del 2,9% sobre los ingresos distribuidas en el 1,8% en concepto de costo de seguro y 1,1% en concepto de comisión neta del costo de seguro. Que los aportes al sistema generaron en promedio un 4% efectivo anual.

Aporte:

- 11% de los ingresos: según lo establecido en el artículo 11 de la Ley 24.241.
- 5% de los ingresos: A través del Decreto 1387/2001 en el cual el P.E.N. estableció una reducción del aporte personal de los trabajadores en relación de dependencia por el término de 1 año contando a partir del 2/11/2001.
- 7% a partir de los ingresos de marzo 2003 y continúa vigente hasta la fecha de retiro de este aportante; a pesar de que se había establecido que el aporte personal de los trabajadores en relación de dependencia que había sido reducido al 5% sería restablecido a razón de 2 puntos porcentuales a aplicar el 1° de marzo, 1° de julio y 1° de octubre de 2003 hasta alcanzar el 11% tradicional.

Luego, por Decreto 788/05 del 11/07/2005 se establece que el aporte del 7% se prorroga hasta el 1/07/2006, exceptuando a determinadas personas afiliados al régimen de capitalización como empleados de la Justicia, docentes, diplomáticos, los que deberán abonar el 9%, de donde el 2% se reestablece a ser destinado al régimen previsional público.

Comisiones

Eliminación de la comisión fija que cobra la AFJP. Mediante el Decreto 1495/2001 el P.E.N. estableció que la comisión por la acreditación de sus aportes sólo podrá realizarse como un porcentaje de la base imponible que le dio origen. De todas formas consideraremos para el cálculo el dato del problema.

La tabla de mortalidad utilizada para el cálculo de la renta vitalicia es la "Tabla de Mortalidad GAM71-4%".

REMUNERACION MENSUAL —base imponible—............. $ 1.000
Aportes mensuales a la AFJP(*): • desde el 1/7/94 : 11% de la remuneración.............$ 110 • desde el 2/11/2001: 5% de la remuneración..........$ 50 • desde marzo/2003:7% de la remuneración............$ 70
Comisiones AFJP...........2,9%..................................($ 29) • Costo de seguro 1,8% • Comisión neta 1,1%
Aporte neto que ingresa mensualmente a la AFJP: • Desde el ingreso al sistema hasta Octubre 2001..........$ 81 • Desde Noviembre 2001 hasta Febrero 2003................ $ 21 • Desde marzo 2003 hasta el momento de retiro...........$ 41
S.A.C. genera aportes netos semestrales de: • Desde el ingreso al sistema hasta Octubre 2001......$ 40,50 • Desde Noviembre 2001 hasta Febrero 2003.............$ 10,50 • Desde marzo 2003 hasta el momento de retiro.......$ 20,50

- *Cálculo estimativo del Fondo Acumulado en la Cuenta de Capitalización Individual (CCI)*

1/8/94	1/11/01	1/03/03	E.P.R. 1/7/05
81...	21...	41...	--

Entonces, hallamos la CCI = PPU con los aportes calculados sobre los ingresos mensuales como base imponible: $ 1.000 capitalizados a la tasa de rentabilidad anual 4% cuya $i_{30} = (1+0{,}04)^{30/365}-1 = 0{,}003228822$. Resultan 131 aportes de la siguiente manera:

- 87 aportes de $ 81
- 16 aportes de $ 21
- 28 aportes de $ 41

$$CCI= 81 . s(0;87;i_{30}) . (1+i_{30})^{44} + 21\, s(0;16;i_{30}) . (1+i_{30})^{28} + 41\, s(0;28;i_{30})$$

$$CCI = 81 * 100{,}5869093 *1{,}152391434 + 21*16{,}44628974\ 1{,}094460302 + 41*29{,}34980819$$

$$CCI = 9.389 + 378 +1203= \underline{10.970}$$

+ Al monto de $ 10.970 falta agregar los mayores aportes generados por el Sueldo anual complementario que asumimos fue percibido el de julio y 1 de enero de cada año.

$$CCI= 40{,}5.s(0;14;i_{180}) . (1+i_{30})^{42} + 10{,}5.s(0;3;i_{180}) . (1+i_{30})^{24} + 20{,}5.s(0;4;i_{180}) . (1+i_{30}) + 17{,}08\ (1+i_{30})$$

$$CCI = 40{,}5*16{,}23481413 *1{,}144986 +10{,}5 * 3{,}11871304 * 1{,}080438402 + 20{,}5 *4{,}19915144 . 1{,}0032288$$

$$CCI= 753 + 35 +86+17= \underline{891}$$

$$CCI = 10.970+891= 11.861$$

En la última valuación $17,08 (surge del cálculo del SAC proporcional de $416,66 calculado sobre los 5 últimos haberes de $1.000), constituyendo base imponible que genera el aporte.

El aporte neto se puede calcular como:

Aporte neto mensual= Base Imponible (%de aporte – comisiones)

De todas formas hay que aclarar que en este cálculo a los fines prácticos se consideró:

- ingresos mensuales constantes durante la etapa activa del trabajador;
- comisiones en un porcentaje constante sobre los ingresos, circunstancia que al inicio de este régimen no se daba pues las entidades administradoras podían cobrar comisiones fijas y variables;
- rentabilidad constante del 4%.

La realidad cambiante significa tener en cuenta los siguientes elementos que atentan contra el Fondo Acumulado en la AFJP:

- la volatilidad a veces no deseada en los ingresos incluso la discontinuidad laboral;
- la fluctuación en las comisiones: a mayor comisión menor aporte;
- las inversiones que la AFJP realice con los fondos de los aportantes afectadas por el riesgo mercado, riesgo de incumplimiento; todo ello produce una tasa de capitalización diferente.
- los efectos de la inflación.

Todas consideraciones que en la práctica están sujetas a modificaciones.

Por otro lado, en caso de realizarse proyecciones de rentas vitalicias, debemos tener en cuenta que el cálculo es hecho con los datos de hoy y puede suceder que en el momento de retiro:

- La tasa de interés técnica sea otra.
- La tabla de mortalidad que se utilice sea distinta por efecto de modificaciones en la esperanza de vida.

El fondo acumulado en la cuenta se refleja como cantidad de cuotas partes del Fondo administrado por esa A.F.J.P.

A título ilustrativo exponemos un detalle periódico del Fondo Acumulado. Con los cálculos de arriba para llegar al mismo total utilizando nuestras fórmulas de capitalización vimos que resulta sencillo y rápido.

Planilla de Cálculo con cuadro de marcha de la cuenta de capitalización

La cuenta de capitalización individual totaliza al 1/7/05 $ 11.861 igual que en el cuadro de evolución que a continuación exponemos y que hemos realizado en una Planilla de Cálculo volcando los datos de caso.

mom		Saldo inicial	Int. delFondo al mom.k	Base Impon		Aporte		Comisión	Aporte neto	Renta b. anual	Saldo final
1	01/08/94	0	0,00	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	81,00
2	01/09/94	81,00	81,26	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	162,26
3	01/10/94	162,26	162,79	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	243,79
4	01/11/94	243,79	244,57	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	325,57
5	01/12/94	325,57	326,62	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	407,62
6	01/01/95	407,62	408,94	1500	11%	165	2,90%	-43,5	121,5	0,04	530,44
7	01/02/95	530,44	532,15	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	613,15
8	01/03/95	613,15	615,13	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	696,13
9	01/04/95	696,13	698,38	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	779,38
10	01/05/95	779,38	781,90	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	862,90

11	01/06/95	862,90	865,68	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	946,68
12	01/07/95	946,68	949,74	1500	11%	165	2,90%	-43,5	121,5	0,04	1071,24
13	01/08/95	1071,24	1074,70	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	1155,70
14	01/09/95	1155,70	1159,43	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	1240,43
15	01/10/95	1240,43	1244,43	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	1325,43
16	01/11/95	1325,43	1329,71	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	1410,71
17	01/12/95	1410,71	1415,27	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	1496,27
18	01/01/96	1496,27	1501,10	1500	11%	165	2,90%	-43,5	121,5	0,04	1622,60
19	01/02/96	1622,60	1627,84	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	1708,84
20	01/03/96	1708,84	1714,36	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	1795,36
21	01/04/96	1795,36	1801,15	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	1882,15
22	01/05/96	1882,15	1888,23	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	1969,23
23	01/06/96	1969,23	1975,59	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	2056,59
24	01/07/96	2056,59	2063,23	1500	11%	165	2,90%	-43,5	121,5	0,04	2184,73
25	01/08/96	2184,73	2191,78	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	2272,78
26	01/09/96	2272,78	2280,12	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	2361,12
27	01/10/96	2361,12	2368,75	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	2449,75
28	01/11/96	2449,75	2457,66	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	2538,66
29	01/12/96	2538,66	2546,85	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	2627,85
30	01/01/97	2627,85	2636,34	1500	11%	165	2,90%	-43,5	121,5	0,04	2757,84
31	01/02/97	2757,84	2766,74	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	2847,74
32	01/03/97	2847,74	2856,94	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	2937,94
33	01/04/97	2937,94	2947,42	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	3028,42
34	01/05/97	3028,42	3038,20	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	3119,20
35	01/06/97	3119,20	3129,27	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	3210,27
36	01/07/97	3210,27	3220,64	1500	11%	165	2,90%	-43,5	121,5	0,04	3342,14
37	01/08/97	3342,14	3352,93	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	3433,93
38	01/09/97	3433,93	3445,02	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	3526,02
39	01/10/97	3526,02	3537,40	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	3618,40
40	01/11/97	3618,40	3630,08	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	3711,08
41	01/12/97	3711,08	3723,07	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	3804,07
42	01/01/98	3804,07	3816,35	1500	11%	165	2,90%	-43,5	121,5	0,04	3937,85
43	01/02/98	3937,85	3950,56	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	4031,56
44	01/03/98	4031,56	4044,58	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	4125,58
45	01/04/98	4125,58	4138,90	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	4219,90
46	01/05/98	4219,90	4233,53	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	4314,53
47	01/06/98	4314,53	4328,46	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	4409,46
48	01/07/98	4409,46	4423,70	1500	11%	165	2,90%	-43,5	121,5	0,04	4545,20
49	01/08/98	4545,20	4559,87	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	4640,87
50	01/09/98	4640,87	4655,86	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	4736,86
51	01/10/98	4736,86	4752,15	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	4833,15
52	01/11/98	4833,15	4848,76	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	4929,76
53	01/12/98	4929,76	4945,67	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	5026,67
54	01/01/99	5026,67	5042,90	1500	11%	165	2,90%	-43,5	121,5	0,04	5164,40
55	01/02/99	5164,40	5181,08	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	5262,08
56	01/03/99	5262,08	5279,07	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	5360,07
57	01/04/99	5360,07	5377,38	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	5458,38
58	01/05/99	5458,38	5476,00	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	5557,00
59	01/06/99	5557,00	5574,94	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	5655,94
60	01/07/99	5655,94	5674,20	1500	11%	165	2,90%	-43,5	121,5	0,04	5795,70
61	01/08/99	5795,70	5814,42	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	5895,42
62	01/09/99	5895,42	5914,45	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	5995,45
63	01/10/99	5995,45	6014,81	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	6095,81
64	01/11/99	6095,81	6115,49	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	6196,49
65	01/12/99	6196,49	6216,50	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	6297,50
66	01/01/00	6297,50	6317,83	1500	11%	165	2,90%	-43,5	121,5	0,04	6439,33
67	01/02/00	6439,33	6460,13	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	6541,13
68	01/03/00	6541,13	6562,25	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	6643,25
69	01/04/00	6643,25	6664,70	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	6745,70
70	01/05/00	6745,70	6767,48	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	6848,48
71	01/06/00	6848,48	6870,59	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	6951,59
72	01/07/00	6951,59	6974,03	1500	11%	165	2,90%	-43,5	121,5	0,04	7095,53

73	01/08/00	7095,53	7118,44	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	7199,44
74	01/09/00	7199,44	7222,69	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	7303,69
75	01/10/00	7303,69	7327,27	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	7408,27
76	01/11/00	7408,27	7432,19	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	7513,19
77	01/12/00	7513,19	7537,45	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	7618,45
78	01/01/01	7618,45	7643,05	1500	11%	165	2,90%	-43,5	121,5	0,04	7764,55
79	01/02/01	7764,55	7789,62	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	7870,62
80	01/03/01	7870,62	7896,03	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	7977,03
81	01/04/01	7977,03	8002,79	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	8083,79
82	01/05/01	8083,79	8109,89	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	8190,89
83	01/06/01	8190,89	8217,34	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	8298,34
84	01/07/01	8298,34	8325,13	1500	11%	165	2,90%	-43,5	121,5	0,04	8446,63
85	01/08/01	8446,63	8473,90	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	8554,90
86	01/09/01	8554,90	8582,53	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	8663,53
87	01/10/01	8663,53	8691,50	1000	11%	110	2,90%	-29	81	0,04	8772,50
88	01/11/01	8772,50	8800,82	1000	5%	50	2,90%	-29	21	0,04	8821,82
89	01/12/01	8821,82	8850,31	1000	5%	50	2,90%	-29	21	0,04	8871,31
90	01/01/02	8871,31	8899,95	1500	5%	75	2,90%	-43,5	31,5	0,04	8931,45
91	01/02/02	8931,45	8960,29	1000	5%	50	2,90%	-29	21	0,04	8981,29
92	01/03/02	8981,29	9010,29	1000	5%	50	2,90%	-29	21	0,04	9031,29
93	01/04/02	9031,29	9060,45	1000	5%	50	2,90%	-29	21	0,04	9081,45
94	01/05/02	9081,45	9110,77	1000	5%	50	2,90%	-29	21	0,04	9131,77
95	01/06/02	9131,77	9161,26	1000	5%	50	2,90%	-29	21	0,04	9182,26
96	01/07/02	9182,26	9211,90	1500	5%	75	2,90%	-43,5	31,5	0,04	9243,40
97	01/08/02	9243,40	9273,25	1000	5%	50	2,90%	-29	21	0,04	9294,25
98	01/09/02	9294,25	9324,26	1000	5%	50	2,90%	-29	21	0,04	9345,26
99	01/10/02	9345,26	9375,43	1000	5%	50	2,90%	-29	21	0,04	9396,43
100	01/11/02	9396,43	9426,77	1000	5%	50	2,90%	-29	21	0,04	9447,77
101	01/12/02	9447,77	9478,28	1000	5%	50	2,90%	-29	21	0,04	9499,28
102	01/01/03	9499,28	9529,95	1500	5%	75	2,90%	-43,5	31,5	0,04	9561,45
103	01/02/03	9561,45	9592,32	1000	5%	50	2,90%	-29	21	0,04	9613,32
104	01/03/03	9613,32	9644,36	1000	7%	70	2,90%	-29	41	0,04	9685,36
105	01/04/03	9685,36	9716,63	1000	7%	70	2,90%	-29	41	0,04	9757,63
106	01/05/03	9757,63	9789,14	1000	7%	70	2,90%	-29	41	0,04	9830,14
107	01/06/03	9830,14	9861,88	1000	7%	70	2,90%	-29	41	0,04	9902,88
108	01/07/03	9902,88	9934,85	1500	7%	105	2,90%	-43,5	61,5	0,04	9996,35
109	01/08/03	9996,35	10028,63	1000	7%	70	2,90%	-29	41	0,04	10069,63
110	01/09/03	10069,63	10102,14	1000	7%	70	2,90%	-29	41	0,04	10143,14
111	01/10/03	10143,14	10175,89	1000	7%	70	2,90%	-29	41	0,04	10216,89
112	01/11/03	10216,89	10249,88	1000	7%	70	2,90%	-29	41	0,04	10290,88
113	01/12/03	10290,88	10324,11	1000	7%	70	2,90%	-29	41	0,04	10365,11
114	01/01/04	10365,11	10398,58	1500	7%	105	2,90%	-43,5	61,5	0,04	10460,08
115	01/02/04	10460,08	10493,85	1000	7%	70	2,90%	-29	41	0,04	10534,85
116	01/03/04	10534,85	10568,87	1000	7%	70	2,90%	-29	41	0,04	10609,87
117	01/04/04	10609,87	10644,12	1000	7%	70	2,90%	-29	41	0,04	10685,12
118	01/05/04	10685,12	10719,62	1000	7%	70	2,90%	-29	41	0,04	10760,62
119	01/06/04	10760,62	10795,37	1000	7%	70	2,90%	-29	41	0,04	10836,37
120	01/07/04	10836,37	10871,36	1500	7%	105	2,90%	-43,5	61,5	0,04	10932,86
121	01/08/04	10932,86	10968,16	1000	7%	70	2,90%	-29	41	0,04	11009,16
122	01/09/04	11009,16	11044,70	1000	7%	70	2,90%	-29	41	0,04	11085,70
123	01/10/04	11085,70	11121,50	1000	7%	70	2,90%	-29	41	0,04	11162,50
124	01/11/04	11162,50	11198,54	1000	7%	70	2,90%	-29	41	0,04	11239,54
125	01/12/04	11239,54	11275,83	1000	7%	70	2,90%	-29	41	0,04	11316,83
126	01/01/05	11316,83	11353,37	1500	7%	105	2,90%	-43,5	61,5	0,04	11414,87
127	01/02/05	11414,87	11451,73	1000	7%	70	2,90%	-29	41	0,04	11492,73
128	01/03/05	11492,73	11529,83	1000	7%	70	2,90%	-29	41	0,04	11570,83
129	01/04/05	11570,83	11608,19	1000	7%	70	2,90%	-29	41	0,04	11649,19
130	01/05/05	11649,19	11686,81	1000	7%	70	2,90%	-29	41	0,04	11727,81
131	01/06/05	11727,81	11765,67	1417	7%	99,167	2,90%	-41,083	58,0833	0,04	11823,76
132	01/07/05	11823,76	11861,93			0		0	0	0,04	11861,93

Renta mensual vitalicia completa denominada "renta previsional vitalicia"

Para el cálculo de la renta vitalicia previsional —R.V.M.— formada por 12 prestaciones mensuales y 1 prestación adicional distribuida por mitades semestrales se aplica la fórmula comentada en el punto "Cálculo de la Renta Vitalicia con periodicidad mensual" de este capítulo. En donde:

$$P(x;1) = m.\left[\frac{N(x)}{D(x)} - \frac{m+1}{2.m}\right]$$

La compañía de seguro utiliza dicha fórmula para m=12 a la que se le incorpora para m=2 (asimilando al aguinaldo) un segundo término:

$$RVM\,(12 + 0,5\,.\,12) = \frac{PPU}{12\left[VA + \frac{2\,.\,0,5}{12}\,.\,PAC\right]}$$

$$RVM\,(12 + 0,5\,.\,12) = \frac{PPU}{12\left\{\left[\frac{N\,(x)}{D\,(x)}\right] - \frac{12+1}{24} + \frac{2\,.\,0,5}{12}\,.\left[\frac{N(x)}{D(x)} - \frac{3}{4}\right]\right\}}$$

$$RVM\,(12 + 0,5\,.\,12) = \frac{PPU}{12\left\{\left[\frac{N\,(x)}{D\,(x)} - \frac{13}{24}\right] + \frac{1}{12}\,.\left[\frac{N(x)}{D(x)} - \frac{3}{4}\right]\right\}}$$

$$RVM\,(12 + 0,5\,.\,12) = \frac{PPU}{12\,.\,\frac{N\,(x)}{D\,(x)} - \frac{13\,.\,12}{24} + \frac{N(x)}{D(x)} - \frac{3}{4}}$$

$$RVM\,(12 + 0,5\,.\,12) = \frac{PPU}{12\,.\,\frac{N\,(x)}{D\,(x)} - \frac{13}{2} + \frac{N(x)}{D(x)} - \frac{3}{4}}$$

$$RVM\,(12 + 0,5\,.\,12) = \frac{PPU}{13\,.\,\frac{N\,(x)}{D\,(x)} - \frac{(26+3)}{4}}$$

$$\boxed{RVM\,(12 + 0,5\,.\,12) = \frac{PPU}{13\,.\,\frac{N\,(x)}{D\,(x)} - 7,25}}$$

$$\boxed{RVM\,(12 + 0,5\,.\,12) = \frac{11.861,93}{13\,\frac{N\,(65)}{D\,(65)} - 7,25} = \frac{11.861,93}{13\,\frac{67.219}{5.881} - 7,25} = \frac{11.861,93}{141,3381653} = 83,93}$$

El fondo acumulado de $ 11.861,93 a la edad de retiro (65 años) le permite al trabajador obtener una renta vitalicia mensual vencida constituida por 12 prestaciones mensuales de $ 84 y 2 prestaciones semestrales de $ 42 siempre que esté con vida. El cálculo fue realizado considerando la persona trabajadora sin beneficiario alguno.

Los cálculos han sido realizados utilizando las tablas de mortalidad que están en anexo tituladas "Funciones Actuariales para Argentina 1990-1992" —ambos sexos— cuando deberíamos haber considerado el género, información disponible en página web (SAFJP).

Si interpretamos la última fórmula del recuadro $141,3386153 es el valor actual necesario —VAN— para adquirir una renta vitalicia de $1 mensual vencida durante 12 meses y semestralmente $ 0,50.

Si la renta vitalicia no es unitaria sino que es de $ 83,93 tenemos que el VAN para adquirir esa renta será de 83,93 * 141,3386... =11.861,93.

En el cálculo no se consideró otro beneficiario, es decir que no hay derechohabientes; caso contrario este seguro recae en varias cabezas y para el cálculo del VAN se deberá considerar las probabilidades de vida de cada beneficiario.

SEGUROS DE VIDA

Objetivos:

- ➢ Manejar una tabla de mortalidad
- ➢ Reconocer y poder clasificar los seguros de vida en caso de muerte
- ➢ Deducir primas puras únicas y periódicas constantes o niveladas para cualquier operación de seguro de vida sobre la muerte y seguros mixtos.
- ➢ Calcular las reservas matemáticas y efectuar el cuadro de marcha para un caso específico

B) Seguros sobre la vida - en caso de muerte

Compromiso del asegurado	Compromiso de la compañía aseguradora o asegurador
• Pago de una Unica Prima que denominaremos PPU: Prima Pura Unica o • Pago de una sucesión de primas periódicas que denominaremos PPP: Prima Periódica Pura.	• Pago al beneficiario/s que consta en la Póliza de Seguro a fin del año, una vez producido el fallecimiento del asegurado de: • El pago del Valor Nominal de la Póliza de Seguro o capital asegurado.
Consideramos los cálculos con Primas Netas a las que en la práctica se les adiciona el recargo.	Condición de Pago: la muerte del asegurado de acuerdo al plazo estipulado en el contrato.

Clasificación

Para el cálculo de cada una de las primas que está comprometido a abonar la persona asegurada consideraremos en ese orden, los siguientes tipos de Contratos:

- **I – Seguro de Muerte de Capital Unico Diferido o Seguro de Muerte Temporario o a Término o Seguro de Vida Temporal a 1 año**

Riesgo Inmediato

- **II - Seguro de vida total o Seguro de Vida Entera o Seguro Ordinario de vida.**
- **III - Temporario o a Término o Seguro de Vida Temporal a "n" años**

Riesgo Diferido

- **IV- Seguro de vida total o Seguro de Vida Entera o Seguro Ordinario de vida**
- **V - Temporario o a Término o Seguro de Vida Temporal a "n" años**

Notación:

$$\text{C. } \underbrace{A(x;\ldots;\ldots)}\ = \text{PPU}$$

1°campo: edad de contratación del asegurado
2° campo: momento de inicio del riesgo
3° campo: plazo del seguro que se ha contratado

Determinación de las Primas de un Seguro de Vida en caso de muerte

✓ ***I. Seguro Temporario o a Término o Seguro de Vida Temporal***

Se trata, pues, de establecer cuál será el pago que deberá hacerse hoy en una compañía de seguro en concepto de PPU para que el beneficiario reciba el valor nominal de la póliza o capital asegurado en caso de que el asegurado muera dentro de los n años siguientes a la fecha de emisión de la Póliza de Seguro. Tomaremos el caso particular en donde el n=1. Será nuestro caso 1.

- En el caso de n=1 lo veremos en profundidad al ocuparnos del tema de "Reservas". Esta prima se denomina "Prima Natural".

- **Caso 1: Seguro de Muerte Temporal a 1 año**

A(x;0;1): en donde el 1° campo define la edad de contratación del asegurado "x"
2° campo define momento de inicio del riesgo: 0 - es inmediato
3° campo define plazo del seguro que se contrata: 1 año.

plazos	0	1
edades	x	x + 1
capitales ($1)	A(x;0;1)	1
	PPU	C

O sea que:

PPU es el valor actual de un capital diferidode muerte por 1 año de C pesos.

q(x;0;1) es la probabilidad de que una persona de edad x –el asegurado- muera antes de alcanzar la edad (x+1).

Es decir si:

$$A(x;0;1) = v \quad q(x;0;1)$$
$$A(x;0;1) = v \quad \frac{d(x)}{l(x)}$$

A(x;0;1) es una función actuarial pues intervienen dos factores, el factor financiero y el biométrico.

Para facilitar los cálculos se utilizan tablas auxiliares, que transforman los cálculos y se denominan Tablas de Conmutación.

Si $C(x) = v^{x+1}\ d(x)$
Entonces: $D(x) = v^{x}\ l(x)$

Partimos de la fórmula anterior y multiplicamos por v^x tanto el numerador como el denominador y nos queda determinada la Prima Pura Unica que llamamos A(x;0;1) que debe abonar hoy el asegurado para que su beneficiario cobre $1 al final del plazo, siendo la condición de pago por parte de la compañía aseguradora: que el asegurado muera entre el período 0 y 1.

$$A(x;0;1) = v\ v^x \frac{d(x)}{v^x . l(x)} = \frac{v^{x+1} . d(x)}{v^x . l(x)} = \frac{C(x)}{D(x)}$$

$$A(x;0;1) = \frac{C(x)}{D(x)}$$ Para un valor nominal de $1

$PPU = C . A(x;0;1)$ Para un valor nominal de $C

$$\boxed{PPU = C . \frac{C(x)}{D(x)}}$$

Resumiendo:

- El compromiso del asegurado es el pago de la prima pura única: PPU
- El compromiso de la aseguradora es pagarle al beneficiario elegido por el asegurado si el primero fallece dentro del año el capital asegurado "C"

Este tipo de Seguro será analizado en profundidad en el tema de "reserva matemática."

Aplicación de un Seguro de muerte temporal a 1 año

1) Por una venta a crédito a 1 año de plazo por la suma de $ 12.000 el acreedor decide contratar un seguro. Cuál es el valor de la prima única pura que una persona de 29 años de edad debe abonar por un Seguro sobre la Vida en caso de muerte Temporal a 1 año si el Valor Nominal de la Póliza es de $ 12.000.

Rta.: $ 16,04.

Asegurado	Compañía
• x=29 (Edad de contratación del asegurado) Compromiso Cierto: Pago de una PPU	• Compromiso Eventual: Pago del Capital asegurado al beneficiario= 12.000 por única vez • Condición para pagar la póliza: muerte del asegurado dentro del año de la cobertura.
Tipo de Seguro sobre la Vida en caso de muerte de plazo limitado y Con riesgo Inmediato	

$$PPU = C \cdot \frac{C(x)}{D(x)}$$

$$PPU = 12.000 \cdot \frac{C(29)}{D(29)} = 12.000 \cdot \frac{4,1416}{3098,7763}$$

$$PPU = 12.000 * 0,001336528 = 16,04$$

✓ ***II. Seguro de vida total o Seguro de Vida Entera o Seguro Ordinario de vida Seguro de Riesgo Inmediato***

a) Prima Pura Unica

Si el cálculo del valor actual lo realizamos por el método de la colectividad necesaria, uno de los utilizados en las deducciones en el Capítulo anterior de las rentas vitalicias, el planteo es el siguiente:

Debemos calcular el valor de la PPU que al momento de contratar el Seguro de vida entera cada una de las l_x personas que tienen la edad x, se comprometen a abonar por única vez, para que en oportunidad de la muerte de cada una de ellas, la aseguradora cumpla con su compromiso de pagar a cada uno de los beneficiarios la cantidad de $1 de Valor Nominal de la póliza, produciéndose este pago al final del año en que cada asegurado fallece.

Por ello, para dicha deducción planteamos la equivalencia actuarial entre los compromisos de las personas aseguradas y el compromiso de la aseguradora.

Compromiso de los Asegurados	Compromiso de la Compañía
Pago de la PPU o bien una sucesión de PPP que pueden ser pagaderas mientras viva el asegurado.	Pago futuro del Valor Nominal de la póliza de Seguro a los beneficiarios o herederos de los muertos o fallecidos. Condición de pago al beneficiario: la muerte del asegurado en cualquier momento, pues el plan cubre toda la vida del individuo asegurado hasta su muerte. Tiene cobertura desde la época de contratación hasta el fallecimiento del asegurado. Por lo tanto es un pago cierto para la compañía. Lo incierto es cuándo deba incurrir en ese pago.

Ver en página siguiente el diagrama de la operación.

Diagrama de la Operación

plazos	0	1	2	//	t	t+1	//	n-1	n	//	w-x-1	w-x
edad	x	x+1	x+2	...	x+t	x+t+1	...	x+n-1	x+n	...	w-1	w
capit		1	1	...	1	1	...	1	1	1	1	1
		d(x)	d(x+1)	...	d(x+t-1)	d(x+t)	...	d(x+n-2)	d(x+n-1)	...	d(w-2)	d(w-1)

$P(x;1) = A(x;0;w-x) = A(x) = A_x$

....

....

Donde tenemos planteada en la ecuación la equivalencia actuarial entre los compromisos que asumen los l_x a través del pago de la Prima Pura Unica y los compromisos de la compañía aseguradora que es el pago de \$1 futuro a cada uno de los beneficiarios hasta $d_{(w-1)} = l_{(w-1)}$ pues $l_w = 0$.

$$l_{(x)} \cdot A(x;0;w-x) = v \cdot d_{(x)} + v^2 \cdot d_{(x+1)} + v^3 \cdot d_{(x+2)} + \ldots + v^n \cdot d_{(x+n+1)} + + v^{n+1} \cdot d_{(x+n+2)} + \ldots\ldots v^{w-x} \cdot d_{(w-1)}$$

Pasamos al segundo miembro $l_{(x)}$

$$A(x;0;w-x) = \frac{v \cdot d_{(x)} + v^2 \cdot d_{(x+1)} + v^3 \cdot d_{(x+2)} + \ldots + v^n \cdot d_{(x+n-1)} + + v^{n+1} \cdot d_{(x+n)} + \ldots\ldots v^{w-x} \cdot d_{(w-1)}}{l_{(x)}}$$

Si multiplicamos numerador y denominador del segundo miembro por v^x para obtener los valores de conmutación:

$$A(x;0;w-x) = \frac{v^x \cdot v \cdot d(x) + v^x \cdot v^2 \cdot d(x+1) + v^x \cdot v^3 \cdot d(x+2) + \ldots + v^x \cdot v^n \cdot d(x+n-1) + v^x \cdot v^{n+1} \cdot d(x+n) + \ldots\ldots + v^x \cdot v^{w-x} \cdot d(w-1)}{v^x \cdot l(x)}$$

$$A(x;0;w-x) = \frac{v^{x+1} \cdot d(x) + v^{x+2} \cdot d(x+1) + v^{x+3} \cdot d(x+2) + \ldots + v^{x+n} \cdot d(x+n-1) + v^{x+n+1} \cdot d(x+n) + \ldots\ldots + v^w \cdot d(w-1)}{D(x)}$$

Si
$$C(x) = v^{x+1} \; d(x)$$
$$D(x) = v^x \; l(x)$$

$$A(x;0;w-x) = \frac{C(x) + C(x+1) + C(x+2) + \ldots + C(x+n-1) + C(x+n) + \ldots\ldots + C(w-1)}{D(x)}$$

y $M(x) = C(x) + C(x+1) + C(x+2) + \ldots + C(x+n-1) + C(x+n) + \ldots\ldots + C(w-1)$ hasta el fin de la tabla, pues Cw=0.

$$A(x;0;w-x) = \frac{M(x)}{D(x)}$$ Para un valor nominal de \$1

P(x;1) = A(x;0;w-x): Valor de la Prima Pura Unica que se compromete a abonar la persona de edad x para que su beneficiario cobre al final del año en que fallece un capital de \$1.

Si el capital es de \$C nos queda la siguiente fórmula:

$$PPU = C \,.\, A(x;0;w-x) = C.\frac{M(x)}{D(x)}$$ Para un valor nominal de \$C

2) Una persona de 48 años de edad compra un Seguro de vida total por \$ 50.000 de riesgo inmediato ¿Cuánto pagará el asegurado en concepto de prima pura única?

Rta.: 17.891,93.

Asegurado	Compañía
• x= 48 (Edad de contratación del asegurado) • Compromiso: Pago de una PPU	• Compromiso: Pago del Capital asegurado \$ 50.000 • Condición para que el beneficiario cobre la póliza al fin del año del siniestro: fallecimiento del asegurado
Tipo de Seguro sobre la vida en caso de muerte: Cobertura de Seguro de vida Entera de plazo ilimitado y riesgo inmediato	

$$PPU = C \,.\, A(x;0;w-x)$$

$$PPU = 50.000.\frac{M(48)}{D(48)}$$

$$PPU = 50.000.\frac{M(48)}{D(48)} = 50.000.\frac{503,5824}{1407,2890} = 50.000 * 0,357838652$$

PPU= 17.891,93

Con el pago de \$ 17.892 en concepto de prima pura única una persona de 48 años tendrá un beneficio para su heredero que es el cobro de \$ 50.000 en concepto de Seguro de vida total que este beneficiario recibirá al final del año en que falleció el asegurado que contrató el seguro.

Observamos que la cuantía a desembolsar es importante, razón por la cual estos seguros se conciben bajo la modalidad de primas periódicas.

b) *Prima Pura Periódica*

En este caso la ecuación de equivalencia actuarial será considerando que el valor actual de las primas periódicas puras es equivalente al valor de la prima pura única. Consideraremos que la cantidad de primas periódicas es a lo largo de la vida del asegurado. Si el seguro se contrata, cualquiera fuese la modalidad elegida con m primas será necesario considerar para el cálculo de la PPP dicha circunstancia y la fórmula será otra.

De acuerdo a nuestro planteo inicial:

PPU = PPP a(x;0;w-x)

Recordemos la
Deducción de la fórmula a(x;t;n)

plazos	0	1	2 //	n-1	n	//	w-x-1	w-x
edad	x	x+1	x+2...	x+n-1	x+n	...	w-1	w
	PPU							
	PPP	PPP	PPP...	PPP	PPP	...	PPP – hasta el final	

PPU = PPP a(x;0;w-x)

$$PPP.\frac{N(x)}{D(x)} = PPU$$

Reemplazamos PPU por su equivalente:

$$PPP.\frac{N(x)}{D(x)} = C.\frac{M(x)}{D(x)}$$ despejamos PPP

$$\boxed{PPP = C.\frac{M(x)}{N(x)}}$$

3) Si el seguro anterior que quiere contratar la persona de 48 años de edad conviene en pagarlo a través de primas puras periódicas anuales, ¿cuánto pagará el asegurado en concepto de prima anual?

Rta.: 1071,62.

Asegurado	Compañía
• x=48 (Edad de contratación del asegurado) • Compromiso: Pago de PPP mientras esté con vida.	• Compromiso: Pago del Capital asegurado \$50.000. • Condición para que el beneficiario cobre la póliza al fin del año del siniestro: fallecimiento del asegurado que puede producirse en cualquier momento de la vida del contrato.
Tipo de Seguro sobre la vida en caso de muerte: **Cobertura de Seguro de vida Entera de plazo ilimitado y riesgo inmediato**	

$$PPP = C.\frac{M(x)}{N(x)}$$

$$PPP = 50.000.\frac{M(48)}{N(48)} = 50.000.\frac{503,5824}{23496,3718} = 50.000 * 0,021432347 = 1071,62$$

✓ ***III. Temporario o a Término o Seguro de Vida Temporal a "n" años - Riesgo Inmediato.***

Compromiso de los Asegurados	Compromiso de la Compañía
Pago de la PPU o bien una sucesión de PPP pagaderas durante "m" años.	Pago futuro del Valor Nominal de la póliza de Seguro a los beneficiarios o herederos de los muertos o fallecidos. Condición de pago al beneficiario: siempre y cuando el asegurado muera dentro de los n años posteriores a la contratación del seguro. La cobertura es temporaria por el plazo estipulado en el contrato.

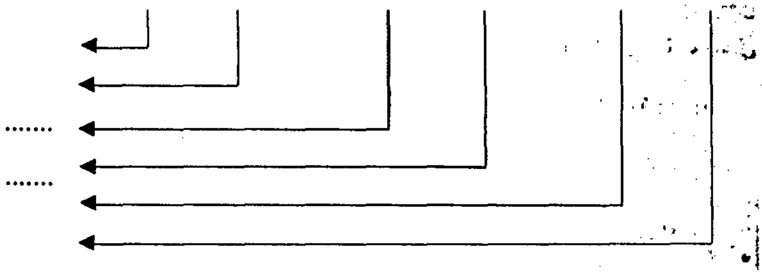
La compañía deberá evaluar en este caso, cuál será el plazo máximo admitido en este tipo de seguro, pues resulta ser función de la edad que tiene el potencial asegurado en el momento de contratar el plan.

a) *Prima Pura Unica*

Diagrama de la Operación

plazos	0	1	2	//	t	t+1	//	n-1	n
edad	x	x+1	x+2	...	x+t	x+t+1	...	x+n-1	x+n
capit		1	1	...	1	1	...	1	1
		d(x)	d(x+1)	...	d(x+t-1)	d(x+t)	...	d(x+n-2)	d(x+n-1)

$P(x;1) = A(x;0;w-x) = A(x) = A_x$



En donde tenemos planteado en la ecuación la equivalencia actuarial entre los compromisos que asumen los l_x a través del pago de la Prima Pura Unica y los compromisos de la compañía aseguradora que es el pago de $1 futuro a cada uno de los beneficiarios al fin del año. Es decir: Si la persona asegurada muere entre la edad de contratación x y la edad (x+1), la compañía le abonará al beneficiario de la misma el valor nominal de la póliza $1 al final del año 1. Si este siniestro ocurre entre la edad (x+1) y la edad (x+2) el beneficiario cobrará de la compañía el valor nominal de la póliza de $1 al fin del 2° año... y si el asegurado muere entre la edad (x+n-1) y (x+n) el beneficiario cobrará ese valor nominal al final del período (x+n).

Considerando la colectividad necesaria para calcular el valor actual de la cobertura que nos ocupa:

$$l_{(x)} . A(x;0;n) = v . d_{(x)} + v^2 . d_{(x+1)} + v^3 .d_{(x+2)} +\ldots + v^{n-1} .d_{(x+n-2)} + v^n .d_{(x+n-1)}$$

Pasamos al segundo miembro $l_{(x)}$

$$A(x;0;n) = \frac{v . d_{(x)} + v^2 . d_{(x+1)} + v^3 .d_{(x+2)} +\ldots + v^n .d_{(x+n-1)}}{l_{(x)}}$$

Si multiplicamos numerador y denominador del segundo miembro por v^x para obtener los valores de conmutación.

$$A(x;0;n) = \frac{v^x.v . d(x) + v^x.v^2.d(x+1) + v^x.v^3.d(x+2) +\ldots + v^x.v^n.d(x+n-1)}{v^x.l(x)}$$

$$A(x;0;n) = \frac{v^{x+1}.d(x) + v^{x+2}.d(x+1) + v^{x+3}.d(x+2) +\ldots + v^{x+n}.d(x+n-1)}{D(x)}$$

Si $\quad C(x) = v^{x+1} \; d(x)$
$\quad D(x) = v^x \; l(x)$

$$A(x;0;n) = \frac{C(x) + C(x+1) + C(x+2) +\ldots + C(x+n-1)}{D(x)}$$

$$\text{Si } \frac{M(x)}{D(x)} = \frac{[C(x)+C(x+1)+C(x+2)+\ldots+C(x+n-1)+C(x+n)+C(x+n+1)+\ldots C(w-1)]}{D(x)}$$

$$\text{Si } \frac{M(x)}{D(x)} = \underbrace{\frac{[C(x)+C(x+1)+C(x+2)+\ldots+C(x+n-1)}{D(x)}}_{A(x;0;n)} + \underbrace{\frac{C(x+n)+C(x+n+1)+\ldots C(w-1)]}{D(x)}}_{\frac{M(x+n)}{D(x)}}$$

Entonces: $A(x;0;n) = \dfrac{M(x) - M(x+n)}{D(x)}$ Para un valor nominal de \$1

$$PPU = C.A(x;0;n) = C.\frac{M(x) - M(x+n)}{D(x)}$$

$PPU = C.\dfrac{M(x) - M(x+n)}{D(x)}$ Para un valor nominal de \$C

4) Una persona de 48 años de edad compra un Seguro de vida Temporario a 20 años por \$ 50.000, ¿cuánto pagará el asegurado en concepto de prima pura única?

Rta.: 6.927,04.

Asegurado	Compañía
• x=48 (Edad de contratación del asegurado) • Compromiso :Pago de una PPU	• Compromiso: Pago del Capital asegurado \$ 50.000 • Condición para que el beneficiario cobre la póliza al fin del año del siniestro: fallecimiento del asegurado dentro de los n años de contratado el seguro temporal
Tipo de Seguro sobre la vida en caso de muerte: **Cobertura de Seguro de vida Entera de plazo limitado a 20 años y riesgo inmediato**	

$$PPU = C.A(x;0;n) = C.\frac{M(x) - M(x+n)}{D(x)}$$

$$PPU = 50.000.\frac{M(48) - M(48+20)}{D(48)} = 50.000.\frac{503,5824 - 308,6140}{1407,2890} = 50.000 * 0,138541834$$

$$PPU = 6.927,04$$

b) *Prima Pura Periódica*

En este caso la ecuación de equivalencia actuarial será considerando que el valor actual de las primas periódicas puras es equivalente al valor de la prima pura única. Es decir:

PPU = PPP a(x;0;n)

Recordemos la
<u>Deducción de la fórmula a(x;t;n)</u>

plazos	0	1	2	//	t	t+1	//	n-2	n-1	n
edad	x	x+1	x+2...		x+t	x+t+1	...	x+n-2	x+n-1	x+n
	PPU									
	PPP	PPP	PPP ...		PPP	PPP	...	PPP		

PPU = PPP a(x;0;n)

$$PPU = PPP \bullet \frac{N(x) - N(x+n)}{D(x)}$$

$PPP.\dfrac{N(x) - N(x+n)}{D(x)} = PPU$ reemplazamos PPU por su equivalente

$PPP.\dfrac{N(x) - N(x+n)}{D(x)} = C.\dfrac{M(x) - M(x+n)}{D(x)}$ despejamos PPP

$$\boxed{PPP = C.\frac{M(x) - M(x+n)}{N(x) - N(x+n)}}$$

5) Si el seguro de vida temporal anterior a 20 años que quiere contratar la persona de 48 años de edad conviene en pagarlo a través de primas puras periódicas anuales durante el plazo del mismo, ¿cuánto pagará el asegurado en concepto de prima anual?

Rta.: 524,10.

$$PPP = C.\frac{M(x) - M(x+n)}{N(x) - N(x+n)}$$

$$PPP = 50.000.\frac{M(48) - M(48+20)}{N(48) - N(48+20)} = 50.000.\frac{503,5824 - 308,6140}{23496,3718 - 4895,9405}$$

$$PPP = = 50.000.\frac{194,9684}{18600,4313} = 50.000 * 0,010481928 = 524,10$$

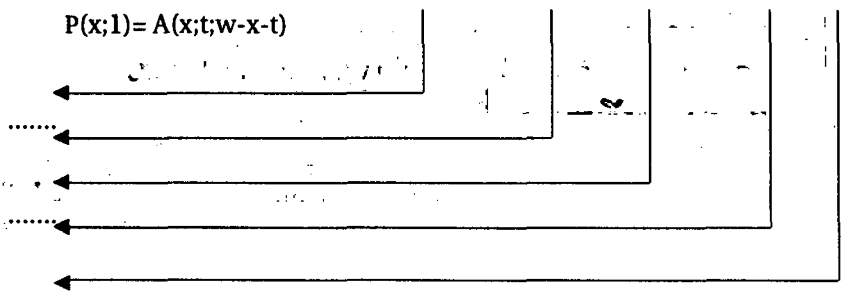
✓ IV. Seguro de vida total o Seguro de Vida Entera o Seguro Ordinario de vida. Riesgo Diferido

Prima Pura Unica

Compromiso de los Asegurados	Compromiso de la Compañía
Pago de la PPU o bien una sucesión de PPP	Pago futuro del Valor Nominal de la póliza de Seguro a los beneficiarios o herederos de los muertos o fallecidos al fin del año del fallecimiento. Condición de pago al beneficiario: llegar con vida a los (x+n) años

Diagrama de la Operación

plazos	0	1	2	//	t	t+1	//	t+n-1	t+n	//	w-x-1	w-x
edad	x	x+1	x+2	...	x+t	x+t+1	...	x+t+n-1	x+t+n	...	w-1	w
capit				...		1	...	1	1	1	1	1
						d(x+t)	...	d(x+t+n-2)	d(x+t+n-1)...		d(w-2)	d(w-1)



Donde tenemos planteado en la ecuación la equivalencia actuarial entre los compromisos que asumen los l_x a través del pago de la Prima Pura Unica y los compromisos de la compañía aseguradora que es el pago de $1 futuro a cada uno de los beneficiarios considerando el riesgo diferido. Estaríamos diciendo que si la persona que contrató el seguro muere entre la edad (x+t) y la edad (x+t+1) su beneficiario cobrará al final, en el período t+1 el valor nominal de la póliza de $1. Si muere entre la edad (x+t+1) y la edad (x+t+2) el beneficiario cobrará en el periodo (t+2) el valor nominal de la póliza de $1. ..Por último si muere entre la edad (w-1) y la edad w el beneficiario cobrará el valor nominal de la póliza en el momento w, momento en el cual no quedaron sobreviviente pues es la edad final de la tabla.

$$l_{(x)} . A(x;t;w\text{-}x\text{-}t) = v^{t+1} . d_{(x+t)} + ... + v^{t+n-1} . d_{(x+t+n-2)} + v^{t+n} . d_{(x+t+n-1)} + ... + v^{w-x-1} . d_{(w-2)} + + v^{w-x} . d_{(w-1)}$$

Pasamos al segundo miembro $l_{(x)}$

$$A(x;t;w\text{-}x\text{-}t) = \frac{v^{t+1} . d_{(x+t)} + ... + v^{t+n-1} . d_{(x+t+n-2)} + v^{t+n} . d_{(x+t+n-1)} + ... + v^{w-x-1} . d_{(w-2)} + + v^{w-x} . d_{(w-1)}}{l_{(x)}}$$

Si multiplicamos numerador y denominador del segundo miembro por v^x para obtener los valores de conmutación.

$$A(x;t;w-x-t) = \frac{v^x.v^{t+1}.d(x+t) + ... + v^x.v^{t+n-1}.d(x+t+n-2) + v^x.v^{t+n}.d(x+t+n-1) + ... + v^x.v^{w-x-1}.d(w-2) + v^x.v^{w-x}.d(w-1)}{v^x.l(x)}$$

$$A(x;t;w-x-t) = \frac{v^{x+t+1}.d(x+t) + ... + v^{x+t+n-1}.d(x+t+n-2) + v^{x+t+n}.d(x+t+n-1) + ... + v^{w-1}.d(w-2) + v^{w}.d(w-1)}{v^x.l(x)}$$

Si $\quad C(x) = v^{x+1} \; d(x)$

$\quad\quad D(x) = v^x \; l(x)$

$$A(x;t;w-x-t) = \frac{C(x+t) + ... + C(x+t+n-2) + C(x+t+n-1) + ... + C(w-2) + C(w-1)}{D(x)}$$

Recordemos que C(w)=0 así que no altera la ecuación, y:

$M(x+t) = C(x+t) + ... + C(x+t+n-2) + C.d(x+t+n-1) + ... + C(w-2) + C(w-1)$ hasta el fin de la tabla.

$$\boxed{A(x;t;w-x-t) = \frac{M(x+t)}{D(x)}}$$ Para un valor nominal de \$1

$$\boxed{PPU = C.A(x;t;w-x-t) = C\frac{M(x+t)}{D(x)}}$$ Para un valor nominal de \$C

6) Una persona de 48 años de edad compra un Seguro de vida total Diferido por 10 años por \$ 50.000. ¿Cuánto pagará el asegurado en concepto de prima pura única?

Rta.: 15.151,11.

<table>
<tr><th>Asegurado</th><th>Compañía</th></tr>
<tr><td>• x=48 (Edad de contratación del asegurado)
• Compromiso: Pago de una PPU</td><td>• Compromiso: Pago del Capital asegurado $ 50.000
• Condición para que el beneficiario cobre la póliza al fin del año del siniestro: fallecimiento del asegurado siempre y cuando llegue con vida a los (x+t) años</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tipo de Seguro sobre la vida en caso de muerte:
Cobertura de Seguro de vida Entera de plazo ilimitado y riesgo diferido por 10 años</td></tr>
</table>

$$P(x;1) = A(x;t;w-x-t) = C.\frac{M(x+t)}{D(x)}$$

PPU = C . A(x;t;w-x-t)

$$PPU = 50.000.\frac{M(48+10)}{D(48)}$$

$$PPU = 50.000.\frac{M(48+10)}{D(48)} = 50.000.\frac{426,4398}{1407,2890} = 50.000*0,303022193$$

PPU = 15.151,11.

Prima Pura Periódica

En este caso la ecuación de equivalencia actuarial será considerando que el valor actual de las primas periódicas puras que se convengan, consideremos m y de allí dependerá la fórmula a utilizar.

PPU = PPP a(x;0;m)

Recordemos la
Deducción de la fórmula a(x;0;m)

plazos	0	1	2 //	m-1	m	//	w-x-1	w-x
edad	x	x+1	x+2...	x+m-1	x+m	...	w-1	w
	PPU							
	PPP	PPP	PPP ...	PPP	-			

PPU = PPP a(x;0;m)

$$PPP.\frac{N(x)-N(x+m)}{D(x)}=PPU$$

Reemplazamos PPU por su equivalente

$$PPP.\frac{N(x)-N(x+m)}{D(x)}=C.\frac{M(x+t)}{D(x)}$$ despejamos PPP

$$\boxed{PPP=C.\frac{M(x+t)}{N(x)-N(x+m)}}$$

7) Si el seguro anterior que quiere contrãtar la persona de 48 años de edad conviene en pagarlo a través de 20 primas puras periódicas anuales adelantadas, ¿cuánto pagará el asegurado en concepto de prima anual?

Rta.: 1146,32.

Asegurado	Compañía
• x=48 (Edad de contratación del asegurado) • Compromiso: Pago de 20 PPP	• Compromiso: Pago del Capital asegurado \$50.000 • Condición para que el beneficiario cobre la póliza al fin del año del siniestro: fallecimiento del asegurado después de transcurridos los períodos de diferimiento. •
Tipo de Seguro sobre la vida en caso de muerte: **Cobertura de Seguro de vida Entera de plazo ilimitado y riesgo diferido por 10 años**	

En este caso tenemos que el plazo de diferimiento "t" es de 10 años y no coincide con el del plan de cuotas de la PPP "m" = 20.

$$PPP=C.\frac{M(x+t)}{N(x)-N(x+m)}$$

$$PPP = C.\frac{M(48+10)}{N(48)-N(48+20)}$$

$$PPP = 50.000.\frac{M(58)}{N(48)-N(68)} = 50.000.\frac{426,4398}{23496,3718-4895,9405} = 50.000*0,022926339 = 1.146,32$$

✓ *V. Temporario o a Término o Seguro de Vida Temporal a "n" años. Riesgo Diferido*

Prima Pura Unica

Compromiso de los Asegurados	Compromiso de la Compañía
Pago de la PPU o bien una sucesión de PPP	Pago futuro del Valor Nominal de la póliza de Seguro o Capital Asegurado a los beneficiarios o herederos de los muertos o fallecidos a fin del año del siniestro. Condición de pago al beneficiario: que el asegurado llegue con vida hasta que inicia la cobertura de muerte diferida y entonces, que la muerte del asegurado se produzca entre las edades (x+t) y (x+t+n)

Diagrama de la Operación

plazos	0	1	2	//	t	t+1	//	n-1	n
edad	x	x+1	x+2	...	x+t	x+t+1	...	x+t+n-1	x+t+n
capit				...		1	...	1	1
						d(x+t)	...	d(x+t+n-2)	d(x+t+n-1)

P(x;1)= A(x;t;n)

.....

Planteamos la ecuación de equivalencia actuarial entre los compromisos que asumen los l_x a través del pago de la Prima Pura Unica y los compromisos de la compañía aseguradora que es el pago de $1 futuro a cada uno de los beneficiarios considerando el riesgo diferido. La compañía aseguradora abonará el valor nominal de esta póliza de $1 al beneficiario del asegurado que fallece entre la edad (x+t) y la edad ((x+t+1) en el momento (t+1) y... así hasta abonar al final del período, es decir (x+t+n) al beneficiario del asegurado que fallece entre la edad (x+t+n-1) y la edad (x+t+n).

$$l_{(x)} . A(x;t;n) = v^{t+1} . d_{(x+t)} +...+v^{t+n-1} .d_{(x+t+n-2)} + v^{t+n} .d_{(x+t+n-1)}$$

Pasamos al segundo miembro $l_{(x)}$:

$$A(x;t;n) = \frac{v^{t+1} . d_{(x+t)} + ... + v^{t+n-1} . d_{(x+t+n+2)} + v^{t+n} . d_{(x+t+n-1)}}{l_{(x)}}$$

Si multiplicamos numerador y denominador del segundo miembro por v^x para obtener los valores de conmutación.

$$A(x;t;n) = \frac{v^x . v^{t+1} . d(x+t) + ... + v^x . v^{t+n-1} . d(x+t+n-2) + v^x . v^{t+n} . d(x+t+n-1)}{v^x . l(x)}$$

$$A(x;t;n) = \frac{v^{x+t+1} . d(x+t) + ... + v^{x+t+n-1} . d(x+t+n-2) + v^{x+t+n} . d(x+t+n-1)}{v^x . l(x)}$$

Si $C(x) = v^{x+1} \; d(x)$
$D(x) = v^x \; l(x)$

$$A(x;t;n) = \frac{C(x+t) + ... + C(x+t+n-2) + C.d(x+t+n-1)}{D(x)}$$

Si $M(x+t) = C(x+t) + ... + C(x+t+n-2) + C.d(x+t+n-1)$ hasta el fin de la tabla

Y $M(x+t+n) = C(x+t+n) + C(x+t+n+1$

Entonces:

$A(x;t;n) . D(x) = M(x+t) - M(x+t+n)$

En consecuencia:

$$A(x;t;n) = \frac{M(x+t) - M(x+t+n)}{D(x)}$$ Para un valor nominal de \$1

$$PPU = C.A(x;t;n) = C.\frac{M(x+t) - M(x+t+n)}{D(x)}$$ Para un valor nominal de \$C

8) Una persona de 48 años de edad compra un Seguro de vida total Diferido cuya cláusula contiene que el beneficiario cobrará el seguro si el asegurado fallece a partir de los 58 años de edad y el beneficio tiene una cobertura por un plazo de 15 años. En la cláusula siguiente se establece el Valor Nominal de la Póliza que es de $ 50.000. ¿Cuánto pagará el asegurado en concepto de prima pura única?

Rta.: 6.920,50.

Asegurado	Compañía
• x=48 (Edad de contratación del asegurado) • Compromiso: Pago de una PPU	• Compromiso: Pago del Capital asegurado $ 50.000 • Condición para que el beneficiario cobre la póliza al fin del año del siniestro: fallecimiento del asegurado a partir de los 58 años de edad • Plazo de la cobertura: n= 15 años a partir de los 58 años de edad del asegurado
Tipo de Seguro sobre la vida en caso de muerte: **Cobertura de Seguro de vida Temporal o de plazo limitado a 15 años y riesgo diferido por 10 años**	

$$PPU=C.A(x;t;n)=C.\frac{M(x+t)-M(x+t+n)}{D(x)}$$

$$PPU=C.A(48;10;15)=50000.\frac{M(48+10)-M(48+10+15)}{D(48)}$$

$$PPU=C.A(48;10;15)=50000.\frac{426{,}4398-231{,}6570}{1407{,}2890}=50000*0{,}138409949=6920{,}50$$

PPU = 6.920,50.

Prima Pura Periódica

En este caso la ecuación de equivalencia actuarial será considerando que el valor actual de las primas periódicas puras que se convengan, consideremos m y de allí dependerá la fórmula a utilizar.

PPU = PPP a(x;0;m)

Recordemos la
Deducción de la fórmula a(x;0;m)

plazos	0	1	2 //	m-1	m
edad	x	x+1	x+2...	x+m-1	x+m
	PPU				
	PPP	PPP	PPP ...	PPP	

PPU = PPP a(x;0;m).

$$PPP.\frac{N(x)-N(x+m)}{D(x)}=PPU$$

Reemplazamos PPU por su equivalente

$$PPP.\frac{N(x)-N(x+m)}{D(x)}=C.\frac{M(x+t)-M(x+t+n)}{D(x)}$$ despejamos PPP

$$\boxed{PPP=C.\frac{M(x+t)-M(x+t+n)}{N(x)-N(x+m)}}$$

9) Si el seguro anterior que quiere contratar la persona de 48 años de edad conviene en pagarlo a través de 20 primas puras periódicas anuales adelantadas inmediatas, ¿cuánto pagará el asegurado en concepto de prima anual?

Rta.: 523,60.

Asegurado	Compañía
• x=48 (Edad de contratación del asegurado) • Compromiso: Pago de 20 PPP inmediatas	• Compromiso: Pago del Capital asegurado \$50.000 • Condición para que el beneficiario cobre la póliza al fin del año del siniestro: fallecimiento del asegurado después de transcurridos los períodos de diferimiento y durante el plazo convenido de 15 años
Tipo de Seguro sobre la vida en caso de muerte: **Cobertura de Seguro Temporal o de plazo limitado a 15 años y riesgo diferido por 10 años**	

En este caso tenemos que el plazo de diferimiento "t" es de 10 años y no coincide con el del plan de cuotas de la PPP "m" = 20.

$$PPP = C.\frac{M(x+t)-M(x+t+n)}{N(x)-N(x+m)}$$

$$PPP = C.\frac{M(48+10)-M(48+10+15)}{N(48)-N(48+20)}$$

$$PPP = 50.000.\frac{M(58)-M(73)}{N(48)-N(68)} = 50.000.\frac{426,4398-231,6570}{23496,3718-4895,9405} = 50.000*0,01047195 = 523,60$$

C)Seguros sobre la vida – mixtos: en caso de vida y de muerte

También denominados "Seguros de Vida Dotal a n años".

Compromiso de los Asegurados	Compromiso de la Compañía
Pago de la PPU o bien una sucesión de PPP	• Pago futuro del Valor Nominal de la póliza de Seguro a los beneficiarios o herederos de los muertos o fallecidos en caso de muerte si el asegurado muere dentro de los n años siguientes a la contratación del Seguro. • Pago futuro del Valor Nominal de la póliza de seguro al asegurado en el momento n si éste sobrevive a este momento Condición de pago: Muera o sobreviva el asegurado la compañía pagará el valor nominal de la póliza o al beneficiario o al propio asegurado. Para la compañía el pago es cierto.

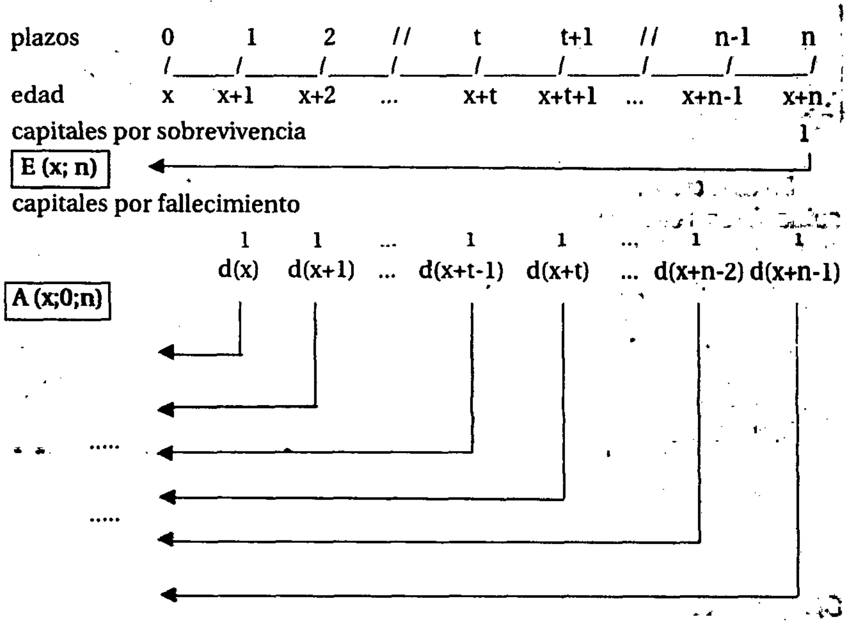
Se trata de una cobertura que la compañía aseguradora brinda al asegurado:

- En caso de vida: riesgo diferido, pues pagará dentro de n años si se cumple la sobrevivencia del asegurado.

- En caso de muerte: riesgo inmediato, por un plazo temporal o limitado: por "n" años si se cumple el fallecimiento en ese plazo.

a) *Prima Pura Unica*

Diagrama de la Operación



PPU= C.E(x;n) + C.A(x;0;n)

$$PPU = C.\left[\frac{D(x+n)}{D(x)} + \frac{M(x)-M(x+n)}{D(x)}\right]$$

$$PPU = C.\frac{D(x+n)+M(x)-M(x+n)}{D(x)}$$

10) Una persona de 48 años de edad contrata un seguro con un plan mixto de sobrevivencia y muerte del asegurado por 20 años cuyo valor nominal de la póliza es de $ 50.000. Determine el valor de la prima neta única.

Rta.: 24.582,29.

$$PPU = C.\frac{D(x+n)+M(x)-M(x+n)}{D(x)}$$

$$PPU = 50.000\frac{D(48+20)+M(48)-M(48+20)}{D(48)}$$

$$PPU = 50.000\frac{496,9194+503,5824-308,6140}{1407,2890}$$

PPU= 50.000 * 0,491645852= 24.582,29.

b) *Prima Pura Periódica*

PPU = PPP a(x;0;n)

Recordemos la
Deducción de la fórmula a(x;t;n)

plazos	0	1	2 //	t	t+1	//	n-2	n-1	n
edad	x	x+1	x+2...	x+t	x+t+1	...	x+n-2	x+n-1	x+n
	PPU								
	PPP	PPP	PPP...	PPP	PPP	...	PPP		

PPU = PPP a(x;0;n)

$$PPU = PPP \bullet \frac{N(x)-N(x+n)}{D(x)}$$

$$PPP.\frac{N(x)-N(x+n)}{D(x)} = PPU$$ reemplazamos PPU por su equivalente

$$PPP.\frac{N(x)-N(x+n)}{D(x)} = C.\frac{D(x+n)+M(x)-M(x+n)}{D(x)}$$ despejamos PPP

$$PPP = C.\frac{D(x+n)+M(x)-M(x+n)}{N(x)-N(x+n)}$$

11) La misma persona de 48 años de edad del ejercicio anterior contrata un seguro con un plan mixto de sobrevivencia y muerte pero con pago de cuotas primas periódicas puras por el plazo del seguro.

Rta.: 1859,87.

$$PPP = C.\frac{D(x+n)+M(x)-M(x+n)}{N(x)-N(x+n)}$$

$$PPP = 50.000\frac{D(48+20)+M(48)-M(48+20)}{N(48)-N(48+20)}$$

$$PPP = 50.000\frac{496,9194+503,5824-308,6140}{23496,3718-4895,9405}$$

PPP= 50.000 * 0,037197406= 1859,87.

Ver en página siguiente, *Cuadro Resumen de Primas de Seguros sobre la Vida en caso de muerte y mixto.*

CUADRO RESUMEN DE PRIMAS DE SEGUROS SOBRE LA VIDA
EN CASO DE MUERTE Y MIXTO

B - SEGURO SOBRE LA VIDA EN CASO DE MUERTE			
Tipo de Seguro	**Riesgo que cubre**	**Prima Pura Unica**	**Prima Pura Periódica**
• Vida Entera II	Inmediato	$PPU = C\,.\,A(x;0;w\text{-}x)$ $PPU = C.\dfrac{M(x)}{D(x)}$	$PPP = C\dfrac{M(x)}{N(x)}$
IV	Diferido	$PPU = C\,.\,A(x;t;w\text{-}x\text{-}t)$ $PPU = C.\dfrac{M(x+t)}{D(x)}$	$PPP = C\dfrac{M(x+t)}{N(x)-N(x+m)}$
• Temporal a n años III	Inmediato	$PPU = C\,.\;A(x;0;n)$ $PPU = C.\dfrac{M(x)-M(x+n)}{D(x)}$	$PPP = C\dfrac{M(x)-M(x+n)}{N(x)-N(x+n)}$
V	Diferido	$PPU = C\;.\,A(x;t;n)$ $PPU = C.\dfrac{M(x+t)-M(x+t+n)}{D(x)}$	$PPP = C.\dfrac{M(x+t)-M(x+t+n)}{N(x)-N(x+m)}$
C -SEGURO SOBRE LA VIDA MIXTO: EN CASO DE VIDA Y DE MUERTE			
• Dotal		$PPU = C\;E(x;n) + C.A(x;0;n)$ $PPU = C.\dfrac{D(x+n)+M(x)-M(x+n)}{D(x)}$	$PPP = C.\dfrac{D(x+n)+M(x)-M(x+n)}{N(x)-N(x+n)}$

RESERVA MATEMÁTICA

Conceptos a considerar

- Reserva
- Fondo Acumulado
- Prima Natural
- Prima Periódica Pura del Seguro Plan..., Prima Nivelada

Introducción

Cuando hemos tratado la Unidad Temática "Reembolso de Préstamos" e inclusive "Bonos" nos preocupaba saber el saldo de deuda o el valor residual o de rescate de los mismos. Ambos conllevan el mismo concepto: pues si el deudor de ese préstamo indiviso o diviso, respectivamente quisiese cancelar en un momento "f" que está ubicado entre la cuota p y la cuota p+1, necesitamos devengar los intereses que se acumulan a la deuda luego de abonada la cuota p y hasta el momento p+f. Ese es el valor financieramente correcto de cancelación.

Pues bien, ese devengamiento por período incompleto llamado Cupón Corrido traslada el Valor Residual del préstamo del momento p al momento (p+f).

El concepto de Reserva Matemática es similar y diferente a la vez. Es similar al concepto de Saldo de Deuda pues representa cuál es el saldo a favor del asegurado que tiene la compañía aseguradora y por ende es una cuenta del rubro "Pasivo" para la compañía aseguradora. Es diferente pues no es un saldo de deuda financiero, sino es algo más, intervienen además, factores biométricos que le dan un sentido diferente. En los casos vistos, tenemos el cálculo de una prima pura anual constante que se mantiene a lo largo de la vigencia del seguro de que se trate y por tal razón, se la conoce en las Pólizas como "prima nivelada".

Al inicio de la operación de Seguro, la situación de equilibrio se da pues al momento de contratar el seguro el compromiso del asegurado es igual al compromiso de la compañía aseguradora. Sin embargo, supongamos una Póliza de Seguro cuyos compromisos son primas periódicas puras anuales, a medida que avanza el tiempo de años póliza, el riesgo a que está sometido ese asegurado se incrementa pero la prima que sigue pagando es siempre la misma. La relación que se produce entre la prima que paga y la que debería pagar en función al riesgo a que está sometido, es decir en función a su probabilidad de vida resulta ser es >1 en la primera etapa de años Póliza, luego su pago resulta inferior. Si queremos conocer cuál es la verdadera prima que debería el asegurado oblar anualmente, ese cálculo lo da la "Prima Natural".

Prima Natural

Se la define como aquella que anualmente debería afrontar el asegurado para tener una cobertura de 1 año, y así año a año ir renovando la cobertura automáticamente en función al riesgo que cubre según la edad que tiene en cada renovación.

La aplicación de esta Prima Natural hace encarecer los valores del Seguro, y por tal razón se utilizan las primas constantes cuyas deducciones hemos desarrollado en todo este capítulo.

De lo expuesto, se desprende que la compañía a medida que va cobrando las primeras primas constantes tiene excedentes pues no resultan totalmente aplicadas al pago de los eventos o siniestros ya que todavía no son de gran importancia, y por tal motivo, ello genera un saldo a favor de los asegurados en la primera etapa.

Cuando los eventos que debe afrontar la compañía aseguradora se hacen mayores por el transcurso del tiempo, ésta tendrá que utilizar dicho capital pues ahora las prestaciones que deberá hacer frente la aseguradora son mayores a los compromisos de sus asegurados que quedaron desfasados en función al riesgo que cubren. En esta segunda etapa de la vida del Contrato el asegurado estaría pagando de menos y el momento a partir del cual se inclina la balanza depende de edad de contratación que esté más o menos cercana a los años en que se producen más bajas naturales.

Al final del contrato no queda nada por pagar ni cobrar, pues si la compañía invirtió los fondos acumulados anuales a la misma tasa de interés técnica que es la que le reconocían a los asegurados no tuvo que haber generado ni pérdidas ni ganancias.

Los cálculos para determinación de primas, reservas o saldos, siempre se hacen con la Prima Pura de la misma manera que en los Préstamos lo hemos hecho con las cuotas puras. Pero, debemos recordar que en el momento de considerar cuánto deberá pagar cada asegurado, a estas primas teóricas o puras entendidas como el coste del servicio en sí, le faltan adicionar los gastos vinculados a esa contratación, y por otro lado aquellos generales de la aseguradora por su propia actividad que realiza. Así llegamos al precio que verdaderamente pagará en concepto de Prima de Tarifa o Prima Comercial —Unica o Anual— dicho asegurado.

Cálculo de la Prima Natural (es decir la Prima de un Seguro Temporal a 1 año)

La prima natural se define como aquella que resulta del cálculo de un Seguro Temporal a 1 año. Es decir, el asegurado contrata un Seguro Temporal a 1 año de plazo y anualmente se va renovando dicho Contrato de Seguro. Esos valores anuales los hemos volcado a continuación en un cuadro titulado

"Prima Natural". Recordemos que tenemos que recalcular las primas anualmente. Por razones de simplicidad hemos volcado los resultados cada 5 años. Pero, debe considerarse el cálculo de la prima año por año.

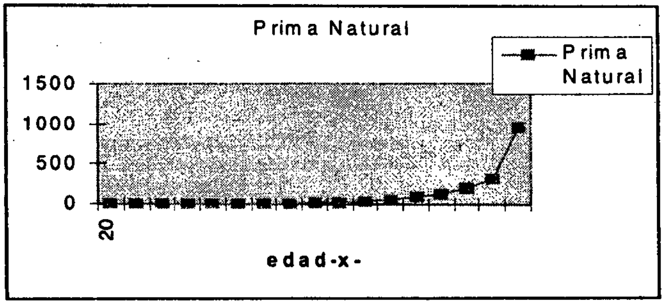
Recordemos que:

Esta PPU denominada "Prima Natural" responde al concepto de la Prima Anual de un Seguro Temporal Anual con renovación automática.

En el cuadro de página siguiente con los cálculos de la Prima Natural podemos observar que refleja un comportamiento creciente a medida que aumenta la edad de contratación y ello es lógico por lo ya comentado, en el sentido que está asociado a la probabilidad de vida humana. Recordemos que la gráfica que representa las probabilidades de muerte es una curva en forma de jota en donde tanto en los primeros años de la tabla como en la senilidad de los individuos es muy pronunciada. En la etapa de juventud y madurez está casi achatada pues son muertes debidas a causas perturbadoras y que por lo tanto, podrían eliminarse.

Prima Natural		
Es el importe que debe pagar anualmente el asegurado para tener cobertura inmediata por un año en caso de muerte, cobrando su beneficiario el valor de la Póliza —su Capital Asegurado— por ejemplo de C=$ 1.000		
	$PPU=C.A(x;0;1)=C_x/D_x$	
Edad	**Cálculo de la PPU de un Seg. Temporal a "1 año"** $PPU= C.A(x;0;1) = C_x/D_x$	**Prima Natural** Para un C=1.000
20	$PPU=1000.A(20;0;1)=1000.\frac{5,1049}{4461,3929}=1,14$	1,14
25	$PPU=1000.A(25;0;1)=1000.\frac{4,5204}{3644,3340}=1,24$	1,24
30	$PPU=1000.A(30;0;1)=1000.\frac{4,0626}{2975,4510}=1,37$	1,37
35	$PPU=1000.A(35;0;1)=1000.\frac{3,8742}{2427,2194}=1,60$	1,60
40	$PPU=1000.A(40;0;1)=1000.\frac{4,4654}{1976,1761}=2,26$	2,26
45	$PPU=1000.A(45;0;1)=1000.\frac{5,4981}{1601,6755}=3,43$	3,43
48	$PPU=1000.A(48;0;1)=1000.\frac{6,2651}{1407,2890}=4,45$	4,45
50	$PPU=1000.A(50;0;1)= 1000.\frac{6,8763}{1288,5275}=5,34$	5,34
55	$PPU=1000.A(55;0;1)=1000.\frac{8,5376}{1024,1186}=8,34$	8,34
60	$PPU=1000.A(60;0;1)=1000.\frac{10,4138}{798,6997}=13,04$	13,04
65	$PPU=1000.A(65;0;1)=1000.\frac{13,1245}{603,1606}=21,76$	21,76
70	$PPU=1000.A(70;0;1)=1000.\frac{15,4968}{430,2378}=36,02$	36,02
75	$PPU=1000.A(75;0;1)=1000.\frac{15,7273}{280,4122}=56,09$	56,09
80	$PPU=100.A(80;0;1)=1000.\frac{14,1772}{159,9861}=88,62$	88,62
85	$PPU=1000.A(85;0;1)=1000.\frac{9,9528}{72,9968}=136,35$	136,35
90	$PPU=1000.A(90;0;1)=1000.\frac{4,8621}{24,0136}=202,47$	202,47
95	$PPU=1000.A(95;0;1)=1000.\frac{1,4862}{4,5553}=326,26$	326,26
99	$PPU=1000.A(99;0;1)=1000.\frac{0,2645}{0,2750}=961,82$	961.82

Observemos el cuadro de valores y el gráfico que representa la Prima Natural, y lo gravoso que resulta a partir de un momento dado para el asegurado.



Por eso, el asegurado mediante el pago de primas en forma de anualidades distribuidas uniformemente no sufre esa carga., pues con ese compromiso uniforme a través de la vigencia de su póliza habrá un período de la misma en que el asegurado abona el excedente y luego es deficitario, pero analizado actuarialmente en su conjunto compensa. Esa Prima Pura Anual que hemos calculado en todo el capítulo según las distintas clases de Seguros que hemos planteado y que constituyen el compromiso del asegurado en el contrato de Seguro se denomina "Prima Nivelada".

La Prima Nivelada es calculada en el momento de contratación a la edad que la persona tenía en ese momento y su valor se mantiene constante a lo largo de toda la vigencia del Seguro.

Para ver las diferencias comentadas, hemos calculado a continuación la Prima Pura anual o Prima Nivelada que resulta de un Seguro de vida entera considerando dos hipótesis: que el asegurado tenga la edad de 20 años y que tenga la edad de 48 años al momento de contratar el Seguro.

Prima Nivelada y Prima Natural

En el caso de un Seguro de Vida Entera

Calculamos la Prima Pura Anual —Prima Nivelada— sabiendo que su cuantía constante durante la vigencia del seguro es calculada al momento de contratación en función a la edad que la persona tenía en ese momento

Si consideramos que la edad de contratación del seguro fue:

- **x=20**

$$PPU = C.\frac{M(x)}{N(x)} = 1000.\frac{M(20)}{N(20)} = 1000.\frac{631,3096}{99582,1643} = 6,34$$

El valor de la prima nivelada es de $ 6,34 —anuales— para un capital asegurado de $1.000 y es el compromiso anual que asume el asegurado de 20 años de edad para estar cubierto de un riesgo inmediato y plazo ilimitado.

- x= 48

$$PPU = C.\frac{M(x)}{N(x)} = 1000.\frac{M(48)}{N(48)} = 1000.\frac{503,5824}{23496,3718} = 21,43$$

El valor de la prima nivelada es de $ 21,43 —anuales— para un capital asegurado de $ 1.000 y es el compromiso anual que asume el asegurado de 48 años de edad para estar cubierto de un riesgo inmediato y plazo ilimitado.

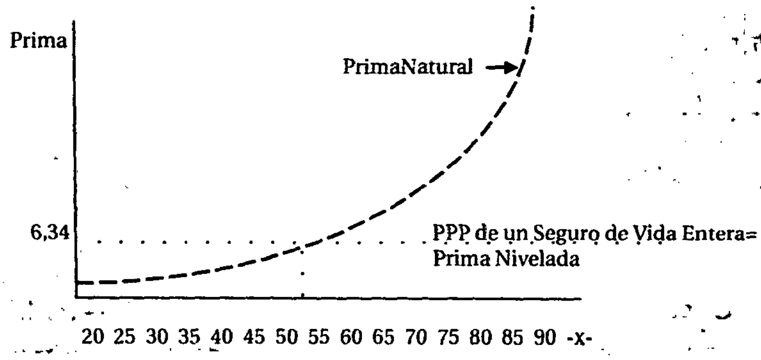
Podemos observar que para tener una cobertura de $1.000 de valor nominal o capital asegurado a ser abonado al beneficiario en oportunidad de producirse la muerte del asegurado éste puede:

- Contratar un Seguro de Vida entera y pagará siempre la misma prima anual —constante—.

- Contratar un Seguro de Vida Temporario a 1 año y pagar anualmente las primas que resultan del cuadro, las que son variables.

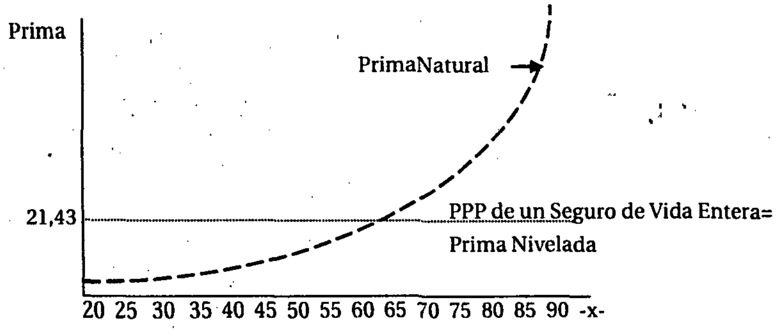
La relación entre ambos seguros lo vemos visualmente en el gráfico:

❒ *Asegurado de edad x=20 años*



En el caso del Seguro de vida entera contratado a los 20 años de edad las primas anuales constantes de $6,34 son mayores a la prima natural que resulte anualmente, hasta que el asegurado tenga una edad entre 50 y 55 años. Es decir que durante más de 30 años el asegurado paga en exceso.

- *Asegurado de edad x=48 años*



En el caso del Seguro de vida entera contratado a los 48 años de edad las primas anuales constantes de $ 21,43 son mayores a la prima natural hasta que el asegurado tenga una edad un poco menor de 65 años. Es decir que por casi 17 años el asegurado paga en exceso.

Componentes de la prima nivelada

Si bien la prima nivelada que es la prima pura anual que se compromete a abonar el asegurado es constante no lo son sus dos componentes:

- componente prima de riesgo: parte de la prima que sirve para hacer frente a los siniestros.
- componente prima de ahorro: parte de la prima que sirve para formar la reserva y ganar intereses.

La Compañía entonces va formando un **Fondo de Reserva** formado por el excedente de la prima natural que el asegurado va pagando anualmente y los intereses devengados por la misma y lo va desafectando en oportunidad de cumplir con sus compromisos con los asegurados cuando ya la prima pura anual no cubre la prima natural que no es otra cosa que el coste del seguro.

Este Fondo de Reserva o simplemente Reserva Matemática contablemente forma parte del Pasivo pues representa el compromiso que tiene asumido la compañía hacia terceros. Como contrapartida dicho pasivo estará aplicado en activos rentables a la tasa de interés técnico con el que se determinó la prima o la reserva matemática. Ya que a una tasa de interés mayor a la técnica la compañía aseguradora obtiene un resultado económico mayor.

Así el fondo de reserva acumula con el superávit que produce las primas y desafecta cuando la diferencia es un déficit para la compañía, y llegamos a una reserva a la edad w-1, en nuestro caso de 99 años de $962 que es el valor actual al 4% de interés técnico de la póliza de 1.000, pues en el período w deberá hacer frente a su compromiso de pagar al beneficiario el VN de 1000, ya que en la edad w no hay sobrevivientes.

Recordemos la fórmula de Prima Unica Temporal a 1 año:

$$A(x;0;1)=\frac{v^{x+1}.d(x)}{v^{x}.l(x)}=\frac{C(x)}{D(x)}$$

Si x=99 años pues w=100 (no hay sobrevivientes).

$$A(99;0;1)=\frac{v^{100}.d(99)}{v^{99}.l(99)}=v\frac{d(99)}{l(99)}=\frac{C(99)}{D(99)}$$

$$A(99;0;1)=(1+0,04)^{-1}\frac{13,357}{13,357}=(1+0,04)^{-1}=\frac{0,2645}{0,2750}=0,962$$

Para un VN de Póliza o Capital Asegurado de $1.000 la PPU= 1000 . 0,962=962.

La diferencia en los cálculos por utilizar o no los valores de conmutación obedece a la aproximación de los resultados en 3 o cuatro decimales según la columna de la tabla de mortalidad. Por ello pusimos 0,962.

Reserva Terminal - Reserva Matemática

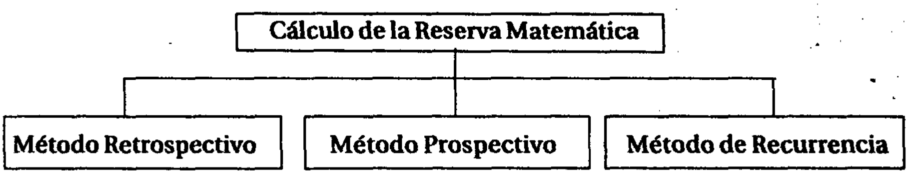
Se denomina "Reserva Terminal" al Fondo de Reserva al final de cualquier año póliza. Es del asegurado mientras esté en vigencia el Contrato de Seguro y por lo tanto el asegurado puede acceder a un préstamo por una cuantía hasta el valor de dicha Reserva, puede aplicarla para la compra de otro Seguro o bien pedir la cancelación o rescisión contractual.

Objetivos de la Reserva Matemática

- Valuación Contable al constituir un Pasivo la Cartera de Contratos en su conjunto y deberá ser expuesto en los Estados contables de la compañía aseguradora.
- Valuación Contable para cesión de cartera.
- Valoración Individual de un Contrato de Seguro por motivos de información, de rescisión contractual, de modificaciones en el contrato, tales como cambios de un plan a otro...

Métodos de determinación de la Reserva Matemática

Tal como lo vimos en Préstamos, existen 3 métodos de valuación.



✓ *Método Retrospectivo:* la reserva individual a un momento dado es igual a:

- Primas Pagadas por el Asegurado capitalizadas al momento de valuación.

Menos:

- Prestaciones realizados por la compañía aseguradora capitalizados al momento de valuación.

✓ *Método Prospectivo*: la reserva individual a un momento dado es igual al:

- Valor Actual de las Prestaciones futuras que está comprometida a cumplir la compañía.

Menos:

- Valor Actual de los primas pendientes de pago que constituyen los compromisos del asegurado.

✓ *Método de Recurrencia*: la reserva global a un momento dado es igual a:

- Reserva del aniversario anterior

Más:

- Prima pagada por los sobrevivientes a principio del año –póliza
- Intereses financieros devengados

Menos:

- Las prestaciones realizadas por la compañía aseguradora: defunciones pagadas en el transcurso del año

Valor de Rescate de la Póliza de Seguro:

Es el importe que la compañía aseguradora debe abonar al asegurado para rescindir la póliza. Es el valor de la "Reserva Terminal" menos gastos.

Aplicación: Cuadro de marcha de la Reserva Matemática.

Se trata de una póliza de seguro dotal o plan mixto a 20 años cuya prima pura única y periódica la determinamos cuando tratamos Seguros Mixtos.

- Edad de contratación: 48 años
- Valor Nominal de la Póliza ó capital Asegurado : $50.000
- Tasa de interés técnica (según Tabla de mortalidad utilizada) 4% anual.

Confeccionar el cuadro de marcha de la Reserva.

Tipo de Seguro: Póliza Dotal a 20 años					Prima Pura Anual: 1859,87					
Edad contratación:48 años					Valor Póliza:50.000					
Edad x	l(x)	Años Póliza	Primas	Fondo Reserv	Interes	Fondo Capitaliz	Beneficios por muerte	Fondo al final año	d(x)	Reserva Individual
1	2	3	4	5	6	7	8	9=7-8	10	Col 9 /l(x+1)
48	9246,632	1	17197533,46	17197533,5	687901,3	17885434,8	2140600,0	15744834,8	42,812	*1711*
49	9203,82	2	17117908,7	32862743,5	1314509,7	34177253,2	2333150,0	31844103,2	46,663	*3478*
50	9157,157	3	17031121,59	48875224,8	1955009,0	50830233,8	2541100,0	48289133,8	50,822	*5303*
51	9106,334	4	16936597,42	65225731,2	2609029,2	67834760,5	2763750,0	65071010,5	55,275	*7189*
52	9051,059	5	16833793,1	81904803,6	3276192,1	85180995,7	3004950,0	82176045,7	60,099	*9140*
53	8990,96	6	16722016,78	98898062,5	3955922,5	102853985,0	3263700,0	99590285,0	65,274	*11158*
54	8925,686	7	16600615,62	116190900,6	4647636,0	120838536,7	3539050,0	117299486,7	70,781	*13247*
55	8854,905	8	16468972,16	133768458,8	5350738,4	139119197,2	3838600,0	135280597,2	76,772	*15411*
56	8778,133	9	16326186,22	151606783,4	6064271,3	157671054,7	4156450,0	153514604,7	83,129	*17655*
57	8695,004	10	16171577,09	169686181,8	6787447,3	176473629,1	4504000,0	171969629,1	90,08	*19985*
58	8604,924	11	16004040	187973669,1	7518946,8	195492615,9	4874700,0	190617915,9	97,494	*22406*
59	8507,43	12	15822713,83	206440629,7	8257625,2	214698254,9	5270350,0	209427904,9	105,407	*24926*
60	8402,023	13	15626670,52	225054575,4	9002183,0	234056758,4	5696550,0	228360208,4	113,931	*27553*
61	8288,091	14	15414771,81	243774980,2	9750999,2	253525979,4	6253350,0	247272629,4	125,067	*30292*
62	8163,024	15	15182163,45	262454792,9	10498191,7	272952984,6	6759000,0	266193984,6	135,18	*33159*
63	8027,845	16	14930748,08	281124732,7	11244989,3	292369722,0	7385600,0	284984122,0	147,712	*36165*
64	7880,132	17	14656021,1	299640143,1	11985605,7	311625748,8	8021950,0	303603798,8	160,439	*39328*
65	7719,693	18	14357625,42	317961424,2	12718457,0	330679881,2	8734850,0	321945031,2	174,697	*42670*
66	7544,996	19	14032711,71	335977742,9	13439109,7	349416852,6	9374650,0	340042202,6	187,493	*46217*
67	7357,503	20	13683999,1	353726201,7	14149048,1	367875249,8	10171750,0	357703499,8	203,435	*50000*
68	7154,068									

- *Columna 1*: edad del asegurado —x—. En nuestro caso es 48 años.

- *Columna 2*: Número de sobrevivientes que alcanzan la edad x. Lo necesitamos para saber cuál es el total que cobra la compañía de primas anuales, pues ellos son los aportantes.
También me sirve para calcular la Reserva Individual a fin del año que resulta del cociente entre el Fondo al final del año —Columna 9— y el número de sobrevivientes al final de ese año que son los que siguen vivos al comienzo del siguiente. Por tal razón el último renglón del cuadro contiene l(68) pues es el número de sobrevivientes al final del año 67 y sirve para calcular la Reserva Individual al fin de ese año —el N° 20 de la póliza—.

- *Columna 3:* Años de Póliza: responde a los contratos con esta modalidad y con este número de años de vigencia.

- *Columna 4*: Primas. Se vuelca el producto de la Prima Pura Anual y la cantidad de asegurados sobrevivientes al período inicial. Es decir que la compañía recauda un importe equivalente a la cantidad de supervivientes al final del período anterior y que coinciden con el período siguiente inicial por el valor de la PPA.

- *Columna 5*: Fondo de Reserva. Al inicio del año: En el primer año de vigencia de este plan, coincide con la prima cobrada. Posteriormente se calcula como el Fondo Acumulado al final del año anterior expresado en la Columna 9 más las primas cobradas al inicio de este año expresadas en la Columna 4.

- *Columna 6*: Es el interés financiero que devengó el fondo calculado a la tasa de interés técnica, que en nuestro caso es el 4% como figura en la tabla de mortalidad.

- *Columna 7*: Fondo Capitalizado. Es el monto del Fondo de Reserva. Por lo tanto es la suma de las Columnas 5 y 6.

- *Columna 8*: Beneficios por muerte. Son los compromisos que debe hacer frente la compañía: es decir el pago de 50.000 de Valor Nominal de la Póliza a los d(x) fallecidos. Por tal razón, necesitamos conocer el número de d(x) que ha sido volcado en la Columna 10.

- *Columna 9*: Fondo al final del año = Reserva Matemática Global. Siguiendo el método por recurrencia :

    - Reserva del aniversario anterior (expresado en la Columna 9).

  Más:

    - Prima pagada por los sobrevivientes a principio del año —póliza— expresado en la Columna 4.
    - Intereses financieros devengados (expresado en la Columna 6).

  Menos:

    - Las prestaciones realizadas por la compañía aseguradora: defunciones pagadas en el transcurso del año expresado en la Columna 8.

- Columna 10: d(x): número de fallecidos luego de cumplir la edad x y no llegan a cumplir 1 año más. Son los que dan lugar al pago del beneficio por parte de las compañías.

- Columna 11: Reserva Matemática Individual al fin del año. Es el cociente entre la Reserva Matematica Global al fin del año y el número de sobrevivientes.

Método prospectivo par la determinación de la Reserva Matemática o Terminal Individual al fin del año "p"

Ahora procederemos, al igual que hemos hecho al estudiar Préstamos, al cálculo de la Reserva Matemática por otro método prospectivo sin necesidad del cuadro que hemos hecho, pero que nos sirve para validar la información y visualizar la operación.

En el *método prospectivo —en función al futuro—* recordemos que la reserva terminal al fin de un año p es *la diferencia entre el valor actual actuarial de las prestaciones futuras que debe hacer la compañía y el valor actual actuarial de las primas puras anuales futuras que debe pagar cada asegurado.*

Algo muy importante para recordar es que aunque estemos calculando la reserva al fin de cualquier período "p" cuando hallamos el valor actual actuarial de las primas puras anuales estas primas son constantes y basadas en la edad que tenía el asegurado en el momento de contratar el Seguro, independientemente de la edad que tenga el asegurado en este momento "p" de valuación y son las denominadas primas niveladas.

Aplicación del cálculo de la reserva matemática por el método prospectivo

Proceda a la determinación de la reserva matemática o terminal individual al fin del periodo "p" a la que denominaremos V_p para los valores de p=1; 2, 3, 4, 5 y 19. Corroborarla con el cuadro de evolución anterior. Luego, plantee la ecuación para la determinación de la reserva global para fin del año 1, 2, 3, 4, 5 y 19 conociendo la reserva individual.

- *V_1 = Reserva Individual al final del año 1 de la póliza.*

Edad del asegurado al final del año 1: 49 años (x+1)
Años de Póliza que aún falta: 19 (n-1)
PPA= Prima Pura Anual —constante— que paga este asegurado desde el 1° año hasta el último año de su Seguro = $ 1859,87.

Valor Actual Actuarial de las prestaciones futuras (1)	Valor Actual Actuarial de las Primas Anuales futuras (2)	V_1 (1) - (2)
Es la Prima Pura Unica de un Seguro Mixto a 19 años de $ 50.000 para una persona de 49 años de edad.	Es la Prima Pura Unica o Valor Presente de primas anuales de $ 1859,87 que constituyen una Renta Vitalicia Inmediata Temporal a 19 años de plazo para una persona de 49 años de edad.	
Fórmula: $PPU = 50000\left[\frac{M(49)-M(49+19)}{D(49)}+\frac{D(49+19)}{D(49)}\right]$ $PPU = 50000\left[\frac{497,3172-308,6140}{1346,8973}+\frac{496,9194}{1346,8973}\right]$ PPU =25.452	Fórmula: $PPU = 1859.87\frac{N(49)-N(49+19)}{D(49)}$ $PPU = 1859.87\frac{22.089,0829-4895,9405}{1346,8973}$ PPU =23.741	25.452 (23.741) 1.711

- *V_2 = Reserva Individual al final del año 2 de la póliza.*

Edad del asegurado al final del año 1: 50 años (x+2)
Años de Póliza que aún falta: 18 (n-2)
PPA= Prima Pura Anual —constante— que paga este asegurado desde el 1° año hasta el último año de su Seguro = $ 1859,87.

Valor Actual Actuarial de las prestaciones futuras (1)	Valor Actual Actuarial de las Primas Anuales futuras (2)	V_1 (1) - (2)
Es la Prima Pura Unica de un Seguro Mixto a 18 años de $ 50.000 para una persona de 50 años de edad.	Es la Prima Pura Unica o Valor Presente de primas anuales de $ 1859,87 que constituyen una Renta Vitalicia Inmediata Temporal a 18 años de plazo para una persona de 50 años de edad	
Fórmula: $PPU = 50000\left[\frac{M(50)-M(50+18)}{D(50)}+\frac{D(50+18)}{D(50)}\right]$ $PPU = 50000\left[\frac{490,7511-308,6140}{1288,5275}+\frac{496,9194}{1288,5275}\right]$ PPU =26.350	Fórmula: $PPU = 1859,87\frac{N(50)-N(50+18)}{D(50)}$ $PPU = 1859,87\frac{20742,1855-4895,9405}{1288,5275}$ PPU =22.872	26.350 (22.872) 3.478

- *V_3 = Reserva Individual al final del año 3 de la póliza.*

Edad del asegurado al final del año 1: 51 años (x+3).
Años de Póliza que aún faltan: 17 (n-3)
PPA= Prima Pura Anual —constante— que paga este asegurado desde el 1° año hasta el último año de su Seguro = $ 1859,87.

Valor Actual Actuarial de las prestaciones futuras (1)	Valor Actual Actuarial de las Primas Anuales futuras (2)	V_t (1) - (2)
Es la Prima Pura Unica de un Seguro Mixto a 17 años de $ 50.000 para una persona de 51 años de edad.	Es la Prima Pura Unica o Valor Presente de primas anuales de $ 1859,87 que constituyen una Renta Vitalicia Inmediata Temporal a 17 años de plazo para una persona de 51 años de edad	
Fórmula: $PPU = 50000\left[\frac{M(51)-M(51+17)}{D(51)}+\frac{D(51+17)}{D(51)}\right]$ $PPU = 50000\left[\frac{483,8748-308.6140}{1232,0924}+\frac{496,9194}{1232,0924}\right]$ PPU =27.278	Fórmula: $PPU = 1859,87\frac{N(51)-N(51+17)}{D(51)}$ $PPU = 1859,87\frac{19453.6581-4895,9405}{1232,0924}$ PPU =21.975	27.278 (21.975) 5.303

- *V_4 = Reserva Individual al final del año 4 de la póliza.*

Edad del asegurado al final del año 1: 52 años (x+4).
Años de Póliza que aún faltan: 16 (n-4).
PPA= Prima Pura Anual —constante— que paga este asegurado desde el 1° año hasta el último año de su Seguro = $ 1859,87.

Valor Actual Actuarial de las prestaciones futuras (1)	Valor Actual Actuarial de las Primas Anuales futuras (2)	V_t (1) - (2)
Es la Prima Pura Unica de un Seguro Mixto a 16 años de $ 50.000 para una persona de 52 años de edad.	Es la Prima Pura Unica o Valor Presente de primas anuales de $ 1859,87 que constituyen una Renta Vitalicia Inmediata Temporal a 16 años de plazo para una persona de 52 años de edad.	
Fórmula: $PPU = 50000\left[\frac{M(52)-M(52+16)}{D(52)}+\frac{D(52+16)}{D(52)}\right]$ $PPU = 50000\left[\frac{476,6837-308.6140}{1177,5131}+\frac{496.9194}{1177,5131}\right]$ PPU =28.237	Fórmula: $PPU = 1859,87\frac{N(52)-N(52+16)}{D(52)}$ $PPU = 1859.87\frac{18821,5656-4895,9405}{1177,5131}$ PPU =21.048	28.237 (21.048) 7.189

- *V_5 = Reserva Individual al final del año 5 de la póliza.*

Edad del asegurado al final del año 1: 53 años (x+5).
Años de Póliza que aún faltan: 15 (n-5).
PPA= Prima Pura Anual —constante— que paga este asegurado desde el 1° año hasta el último año de su Seguro = $ 1859,87.

Valor Actual Actuarial de las prestaciones futuras (1)	Valor Actual Actuarial de las Primas Anuales futuras (2)	V_1 (1) - (2)
Es la Prima Pura Unica de un Seguro Mixto a 15 años de \$ 50.000 para una persona de 53 años de edad.	Es la Prima Pura Unica o Valor Presente de primas anuales de \$ 1859,87 que constituyen una Renta Vitalicia Inmediata Temporal a 15 años de plazo para una persona de 53 años de edad.	
Fórmula: $PPU = 50000\left[\frac{M(53)-M(53+15)}{D(53)}+\frac{D(53+15)}{D(53)}\right]$ $PPU = 50000\left[\frac{469,1657-308,6140}{1124,7062}+\frac{496,9194}{1124,7062}\right]$ PPU =29.229	Fórmula: $PPU = 1859,87\frac{N(53)-N(53+15)}{D(53)}$ $PPU = 1859,87\frac{17044,0525-4895,9405}{1124,7062}$ PPU =20.089	29.229 (20.089) 9.140

...

- V_{19} = *Reserva Individual al final del año 19 de la póliza.*

Edad del asegurado al final del año 1: 67 años (x+19).
Años de Póliza que aún faltan: 1 (n-19).
PPA= Prima Pura Anual —constante— que paga este asegurado desde el 1° año hasta el último año de su Seguro = \$ 1859,87.

Valor Actual Actuarial de las prestaciones futuras (1)	Valor Actual Actuarial de las Primas Anuales futuras (2)	V_1 (1) - (2)
Es la Prima Pura Unica de un Seguro Mixto a 1 año de \$ 50.000 para una persona de 67 años de edad.	Es la Prima Pura Unica o Valor Presente de primas anuales de \$ 1859,87 que constituyen una Renta Vitalicia Inmediata Temporal a 1 año de plazo para una persona de 67 años de edad = a la PPU pues es inmediata: es la única prima pura.	
Fórmula: $PPU = 50000\left[\frac{M(67)-M(67+1)}{D(67)}+\frac{D(67+1)}{D(67)}\right]$ $PPU = 50000\left[\frac{322.7446-308.6140}{531.4920}+\frac{496,9194}{531,4920}\right]$ PPU =48.077	Fórmula: $PPU = 1859,87(pues\frac{N(67)-N(67+1)}{D(67)}=1)$ $PPU = 1859,87(pues\frac{5427.4324-4895.9405}{531,4920}=1)$ PPU =1859,87	48.077 (1860) 46.217

↓

50.000 $(1+0,04)^{-1}$ = 48.077. Es el valor actual al 4 de interés técnico de la Poliza de \$ 50.000.

Observamos que el valor actual de la prestación es el pago al año siguiente del valor nominal de la póliza o también denominado capital asegurado \$50.000. Ya no interesa el riesgo, pues no existe. La compañía tiene un valor cierto a pagar al año siguiente —muera o sobreviva el asegurado— pues de todas formas deberá cumplir con su compromiso de pagar al propio asegurado o a su heredero o derechohabiente, denominado beneficiario.

En conclusión la reserva matemática individual a fin del año p póliza es:

$V_p =$ Valor Actual Actuarial de las prestaciones futuras − Valor Actual Actuarial de las Primas futuras

$$V_p = C\left\{\left[\frac{M_{(x+p)} - M_{[(x+n)]} + D_{[(x+n)]}}{D_{(x+p)}}\right] - \left[\underbrace{\frac{D_{(x+n)} + M_{(x)} - M_{(x+n)}}{N_{(x)} - N_{(x+n)}}}_{\textit{Prima Pura anual}} \cdot \frac{N_{(x+p)} - M_{(x+n)}}{D_{(x+p)}}\right]\right\}$$

Siendo:

V_p = Reserva al final del año p póliza
p = año póliza
n = duración de la póliza —en años—
x = edad de contratación del asegurado
C = Capital asegurado o valor nominal de la póliza

Aplicada en el ejemplo en la reserva matemática individual al fin del año 5 será:

$$V_5 = C\left\{\left[\frac{M_{(48+5)} - M_{[(48+20)]} + D_{[(48+20)]}}{D_{(48+5)}}\right] - \left[\frac{D_{(48+20)} + M_{(48)} - M_{(48+20)}}{N_{(48)} - N_{(48+20)}} \cdot \frac{N_{(48+5)} - M_{(48+20)}}{D_{(48+5)}}\right]\right\}$$

$$V_5 = 50000\left\{\left[\frac{469.1657 - 308{,}6140 + 496{,}9194}{1124{,}7062}\right] - \left[\frac{496{,}9194 + 503{,}5824 - 308{,}6140}{23496{,}3718 - 4895{,}9405} \cdot \frac{17044{,}0525 - 4895{,}9405}{1124{,}7062}\right]\right\}$$

$V_5 = 50.000\ [\ 0{,}584571419 - 0{,}037197406\ .\ 10{,}80114256]$
$V_5 = 50.000\ [\ 0{,}584571419 - 0{,}401774487\ ]$

$V_5 = 50.000\ .\ 0{,}182796932$
$V_5 = 9140$

Reserva Global a fin del año p póliza de la compañía aseguradora $-V_p^{\text{GLOBAL}}$

$V_1^{GLOBAL} = V_1 \cdot l_{(x+1)}$

$V_2^{GLOBAL} = V_2 \cdot l_{(x+2)}$

$V_3^{GLOBAL} = V_3 \cdot l_{(x+3)}$

$V_4^{GLOBAL} = V_4 \cdot l_{(x+4)}$

$V_5^{GLOBAL} = V_5 \cdot l_{(x+5)}$

$V_{19}^{GLOBAL} = V_{19} \cdot l_{(x+19)}$

Si bien realizamos el cálculo en función de este tipo de Seguro Mixto, el desafío se encuentra en poder calcularlo para cualquier modalidad, siguiendo el mismo procedimiento aplicando las fórmulas de valor actual actuarial que resulte del seguro elegido.

TABLA DE MORTALIDAD R.A. (1984) TASA DE INTERES 4% anual

Age	l(x)	d(x)	p(x)	q(x)	e(x)	Age	D(x)	N(x)	C(x)	M(x)
0	10.000.000	47,200	0.99528	0,00472	72,49	0	10.000,0000	239.350,1908	45.3846	794,2234
1	9.952,800	11.645	0,99883	0.00117	71,86	1	9.570,0000	229.350,1908	10.7663	748,8388
2	9.941.155	10.041	0.99899	0,00101	70,94	2	9.191.1568	219.780,1908	8.9260	738.0726
3	9.931.115	9.633	0,99903	0.00097	70,09	3	8.828,7248	210.589,0340	8,2345	729,1465
4	9.921.481	9.227	0.99907	0,00093	68.93	4	8.480.9239	201.760,3092	7.5839	720.9121
5	9.912,254	8.921	0,99910	0,00090	68.04	5	8.147,1507	193.279.3853	7,0504	713.3282
6	9.903,333	8,616	0,99913	0,00087	67,14	6	7.826,7483	185.132,2346	6,5474	706,2777
7	9.894,718	8,312	0,99916	0.00084	66,23	7	7.519,1721	177.305,4863	6,0732	699.7304
8	9.886,406	8.107	0.99918	0,00082	65.30	8	7.223,9000	169.786,3142	5,6958	693,6572
9	9.878,299	8,001	0.99919	0.00081	64,37	9	6.940,3620	162.562,4142	5.4055	687,9614
10	9.870,298	7.995	0.99919	0.00081	63,43	10	6.668.0195	155.622,0522	5.1934	682.5559
11	9.862.303	8,087	0.99918	0.00082	62,48	11	6.406,3638	148.954.0327	5.0512	677.3626
12	9.854,216	8,278	0,99916	0.00084	61.53	12	6.154.9141	142.547.6689	4,9713	672.3114
13	9.845,938	8,664	0,99912	0.00088	60,58	13	5.913,2153	136.392.7548	5.0035	667.3401
14	9.837,274	9,149	0.99907	0.00093	59,64	14	5.680,7805	130.479,5395	5.0799	662,3366
15	9.828.125	9,533	0,99903	0.00097	58,69	15	5.457,2090	124.798,7590	5.0899	657.2567
16	9.818.592	10.113	0.99897	0.00103	57.75	16	5.242.2264	119.341,5501	5.1918	652,1668
17	9.808.479	10,593	0.99892	0.00108	56,81	17	5.035.4105	114.099,3236	5.2291	646.9750
18	9.797,885	11.072	0.99887	0.00113	55,87	18	4.836,5118	109.063.9131	5,2551	641,7459
19	9.786.814	11,353	0.99884	0.00116	54.93	19	4.645,2371	104.227,4013	5,1812	636,4909
20	9.775.461	11,633	0.99881	0,00119	53,99	20	4.461.3929	99.582,1643	5,1049	631,3096
21	9.763.828	11.912	0.99878	0,00122	53.06	21	4.284,6960	95.120.7714	5,0263	626,2048
22	9.751,916	12.092	0.99876	0.00124	52,12	22	4.114.8737	90.836,0754	4.9062	621,1785
23	9.739.824	12.272	0.99874	0,00126	51,19	23	3.951,7031	86.721,2017	4.7876	616.2723
24	9.727.552	12,354	0.99873	0.00127	50.25	24	3.794.9269	82.769,4986	4,6342	611,4847
25	9.715,198	12.533	0,99871	0,00129	49.31	25	3.644,3340	78.974,5717	4,5204	606,8505
26	9.702.665	12,710	0.99869	0,00131	48.38	26	3.499,6469	75.330,2377	4.4082	602,3301
27	9.689,955	12.888	0,99867	0.00133	47,44	27	3.360,6369	71.830,5908	4,2977	597,9219
28	9.677.067	13.064	0,99865	0,00135	46,50	28	3.227,0839	68.469,9539	4.1890	593,6241
29	9.664,003	13,433	0.99861	0,00139	45.56	29	3.098,7763	65.242,8700	4.1416	589.4351
30	9.650.570	13.704	0.99858	0.00142	44,63	30	2.975,4510	62.144,0937	4.0626	585,2935
31	9.636,866	14,070	0.99854	0.00146	43.69	31	2.856,9479	59.168,6427	4.0107	581,2309
32	9.622,797	14.434	0.99850	0.00150	42,75	32	2.743,0546	56.311,6948	3,9563	577,2202
33	9.608,362	14,893	0.99845	0,00155	41.82	33	2.633.5961	53.568,6403	3.9251	573,2638
34	9.593,469	15,445	0,99839	0,00161	40,88	34	2.528.3789	50.935.0441	3,9141	569,3388

35	9.578,024	15.900	0,99834	0,00166	39,95	35	2.427,2194	48.406,6652	3,8742	565,4246
36	9.562,124	17,116	0,99821	0,00179	39,01	36	2.329,9906	45.979,4458	4,0103	561,5504
37	9.545,008	17,563	0,99816	0,00184	38,08	37	2.236,3653	43.649,4551	3,9566	557,5401
38	9.527,445	19,150	0,99799	0,00201	37,15	38	2.146,3946	41.413,0898	4,1483	553,5835
39	9.508,295	20,633	0,99783	0,00217	36,22	39	2.059,6927	39.266,6951	4,2976	549,4352
40	9.487,662	22,296	0,99765	0,00235	35,30	40	1.976,1761	37.207,0025	4,4654	545,1375
41	9.465,366	24,231	0,99744	0,00256	34,38	41	1.895,7039	35.230,8264	4,6663	540,6722
42	9.441,135	26,246	0,99722	0,00278	33,47	42	1.818,1259	33.335,1224	4,8600	536,0058
43	9.414,889	28,433	0,99698	0,00302	32,56	43	1.743,3380	31.516,9965	5,0624	531,1458
44	9.386,456	30.788	0,99672	0,00328	31,66	44	1.671,2241	29.773,6586	5,2708	526,0834
45	9.355,668	33,400	0,99643	0,00357	30,76	45	1.601,6755	28.102,4344	5,4981	520,8126
46	9.322,268	36,264	0,99611	0,00389	29,87	46	1.534,5745	26.500,7589	5,7399	515,3146
47	9.286,005	39,373	0,99576	0,00424	28,98	47	1.469,8125	24.966,1844	5,9923	509,5747
48	9.246,632	42,812	0,99537	0,00463	28,11	48	1.407,2890	23.496,3718	6,2651	503,5824
49	9.203,820	46,663	0,99493	0,00507	27,23	49	1.346,8973	22.089,0829	6,5661	497,3172
50	9.157,157	50,822	0,99445	0,00555	26,37	50	1.288,5275	20.742,1855	6,8763	490,7511
51	9.106,334	55.275	0,99393	0,00607	25,51	51	1.232,0924	19.453,6581	7,1912	483,8748
52	9.051,059	60.099	0,99336	0,00664	24,67	52	1.177,5131	18.221,5656	7,5180	476,6837
53	8.990,960	65,274	0,99274	0,00726	23,83	53	1.124,7062	17.044,0525	7,8513	469,1657
54	8.925,686	70.781	0,99207	0,00793	23,00	54	1.073,5969	15.919,3463	8,1862	461,3144
55	8.854,905	76.772	0,99133	0,00867	22,18	55	1.024,1186	14.845,7494	8,5376	453,1282
56	8.778,133	83,129	0,99053	0,00947	21,37	56	976,1918	13.821,6308	8,8890	444,5906
57	8.695,004	90,080	0,98964	0,01036	20,57	57	929,7570	12.845,4390	9,2618	435,7016
58	8.604,924	97,494	0,98867	0,01133	19,78	58	884,7353	11.915,6820	9,6385	426,4398
59	8.507,430	105,407	0,98761	0,01239	19,00	59	841,0685	11.030,9467	10,0200	416,8013
60	8.402,023	113,931	0,98644	0,01356	18,23	60	798,6997	10.189,8783	10,4138	406,7813
61	8.288,091	125,067	0,98491	0,01509	17,48	61	757,5666	9.391,1786	10,9920	396,3675
62	8.163,024	135,180	0,98344	0,01656	16,74	62	717,4375	8.633,6120	11,4238	385,3755
63	8.027,845	147,712	0,98160	0,01840	16,01	63	678,4199	7.916,1745	12,0028	373,9516
64	7.880,132	160,439	0,97964	0,02036	15,30	64	640,3240	7.237,7546	12,5356	361,9488
65	7.719,693	174,697	0,97737	0,02263	14,61	65	603,1606	6.597,4306	13,1245	349,4133
66	7.544,996	187,493	0,97515	0,02485	13,93	66	566,8376	5.994,2700	13,5441	336,2887
67	7.357,503	203,435	0,97235	0,02765	13,28	67	531,4920	5.427,4324	14,1305	322,7446
68	7.154,068	219,272	0,96935	0,03065	12,64	68	496,9194	4.895,9405	14,6448	308,6140
69	6.934,796	235,298	0,96607	0,03393	12,02	69	463,1624	4.399,0210	15,1107	293,9693
70	6.699,498	250,963	0,96254	0,03746	11,43	70	430,2378	3.935,8587	15,4968	278,8586
71	6.448,535	265,680	0,95880	0,04120	10,85	71	398,1933	3.505,6209	15,7746	263,3617

72	6.182.855	279,032	0.95487	0,04513	10,30	**72**	367.1036	3.107,4276	15.9302	247,5872
73	5.903.823	290.586	0,95078	0.04922	9.76	**73**	337.0541	2.740,3240	15,9517	231,6570
74	5.613.237	300.757	0.94642	0,05358	9.24	**74**	308.1387	2.403,2699	15,8751	215,7053
75	5.312,480	309,877	0.94167	0,05833	8.74	**75**	280.4122	2.095,1312	15,7273	199,8302
76	5.002.603	318.316	0,93637	0.06363	8.25	**76**	253,8997	1.814,7191	15,5343	184,1028
77	4.684.287	326,026	0,93040	0.06960	7,77	**77**	228.6001	1.560.8193	15,2986	168,5686
78	4.358.261	332,840	0,92363	0,07637	7.32	**78**	204,5091	1.332.2193	15.0177	153,2699
79	4.025.420	337.773	0,91609	0.08391	6.88	**79**	181.6258	1.127.7101	14,6541	138,2523
80	3.687.647	339.854	0.90784	0,09216	6,46	**80**	159,9861	946,0844	14,1772	123,5982
81	3.347.794	338,127	0,89900	0,10100	6,07	**81**	139,6556	786.0983	13,5627	109,4210
82	3 009,667	332,327	0.88958	0,11042	5,69	**82**	120.7215	646,4427	12,8174	95,8583
83	2.677.339	322,191	0,87966	0,12034	5,34	**83**	103,2610	525.7212	11,9485	83,0409
84	2.355,148	308,053	0.86920	0,13080	5,00	**84**	87.3409	422,4603	10.9848	71,0924
85	2.047.095	290.278	0,85820	0,14180	4,68	**85**	72,9968	335,1193	9,9528	60,1076
86	1.756.817	269.917	0.84636	0,15364	4,37	**86**	60.2364	262.1225	8,8988	50.1548
87	1.486.899	247.197	0.83375	0,16625	4,07	**87**	49,0209	201,8861	7,8363	41.2560
88	1.239,702	222.663	0,82039	0.17961	3,78	**88**	39,2992	152,8652	6,7870	33,4198
89	1.017.039	197.712	0,80560	0,19440	3,50	**89**	31.0006	113,5660	5,7947	26,6327
90	819,327	172.526	0,78943	0,21057	3,23	**90**	24,0136	82,5654	4,8621	20,8380
91	646,801	148,156	0,77094	0,22906	2.95	**91**	18,2279	58,5518	4,0147	15,9759
92	498.645	124.646	0,75003	0,24997	2.68	**92**	13.5121	40,3239	3,2477	11,9612
93	373.999	102,681	0.72545	0,27455	2.41	**93**	9.7447	26,8117	2,5725	8,7135
94	271,317	82,220	0,69696	0,30304	2,13	**94**	6.7974	17,0670	1,9807	6,1410
95	189,097	64.161	0,66070	0,33930	1.84	**95**	4,5553	10,2696	1,4862	4,1603
96	124,937	48.744	0.60985	0,39015	1,53	**96**	2.8939	5,7143	1,0856	2,6742
97	76,193	36,582	0,51988	0,48012	1,20	**97**	1,6970	2,8203	0,7834	1,5885
98	39,611	26.254	0,33720	0,66280	0.84	**98**	0,8483	1.1233	0.5406	0,8051
99	13,357	13,357	0,00000	1,00000	0,50	**99**	0,2750	0,2750	0,2645	0,2645

SAFJP — Fuente: Serie Estudios Especiales N° 8

Funciones actuariales para Argentina 1990-92

Tasa de interés: 4% — **Ambos sexos**

Edad x	D(x)	N(x)	a(x)	C(x)	M(x)	A(x)	Edad x	D(x)	N(x)	a(x)	C(x)	M(x)	A(x)
0	100.000	2.357.973	23,58	2.385	9.309	0,0931	50	12.672	205.576	16,22	78	4.765	0,3761
1	93.769	2.257.973	24,08	194	6.924	0,0738	51	12.107	192.904	15,93	81	4.688	0,3872
2	89.968	2.164.204	24,06	88	6.729	0,0748	52	11.581	180.797	15,64	84	4.607	0,3985
3	86.420	2.074.236	24,00	50	6.642	0,0769	53	11.032	169.236	15,34	88	4.523	0,4100
4	83.046	1.987.816	23,94	37	6.592	0,0794	54	10.520	158.204	15,04	89	4.436	0,4216
5	79.815	1.904.770	23,86	28	6.555	0,0821	55	10.026	147.683	14,73	93	4.346	0,4335
6	76.718	1.824.955	23,79	25	6.527	0,0851	56	9.547	137.657	14,42	97	4.253	0,4455
7	73.742	1.748.237	23,71	23	6.502	0,0882	57	9.084	128.110	14,10	100	4.156	0,4576
8	70.883	1.674.495	23,62	21	6.480	0,0914	58	8.635	119.026	13,78	102	4.057	0,4698
9	68.136	1.603.611	23,54	20	6.458	0,0948	59	8.201	110.391	13,46	105	3.955	0,4823
10	65.495	1.535.476	23,44	19	6.438	0,0983	60	7.780	102.191	13,14	107	3.849	0,4948
11	62.957	1.469.981	23,35	19	6.419	0,1020	61	7.374	94.411	12,80	108	3.742	0,5076
12	60.516	1.407.024	23,25	20	6.400	0,1058	62	6.982	87.037	12,47	111	3.634	0,5205
13	58.169	1.346.508	23,15	22	6.380	0,1097	63	6.602	80.056	12,13	113	3.523	0,5336
14	55.909	1.288.339	23,04	25	6.358	0,1137	64	6.235	73.454	11,78	114	3.410	0,5469
15	53.734	1.232.430	22,94	29	6.333	0,1179	65	5.881	67.219	11,43	117	3.296	0,5604
16	51.638	1.178.696	22,83	33	6.304	0,1221	66	5.538	61.338	11,07	119	3.179	0,5740
17	49.619	1.127.058	22,71	36	6.271	0,1264	67	5.206	55.799	10,72	123	3.060	0,5878
18	47.675	1.077.438	22,60	39	6.235	0,1308	68	4.884	50.593	10,36	125	2.938	0,6015
19	45.802	1.029.763	22,48	40	6.196	0,1353	69	4.571	45.709	10,00	130	2.813	0,6154
20	44.000	983.961	22,36	41	6.156	0,1399	70	4.265	41.138	9,65	132	2.683	0,6290
21	42.267	939.961	22,24	41	6.115	0,1447	71	3.969	36.873	9,29	135	2.551	0,6427
22	40.600	897.693	22,11	41	6.073	0,1496	72	3.682	32.904	8,94	136	2.416	0,6563
23	38.998	857.093	21,98	40	6.033	0,1547	73	3.405	29.222	8,58	138	2.281	0,6699
24	37.457	818.096	21,84	39	5.992	0,1600	74	3.136	25.818	8,23	136	2.143	0,6833
25	35.977	780.638	21,70	39	5.953	0,1655	75	2.879	22.682	7,88	137	2.007	0,6970
26	34.555	744.661	21,55	39	5.914	0,1711	76	2.631	19.803	7,53	138	1.870	0,7106
27	33.187	710.107	21,40	37	5.875	0,1770	77	2.392	17.171	7,18	139	1.732	0,7240
28	31.873	676.920	21,24	37	5.838	0,1832	78	2.162	14.779	6,84	138	1.594	0,7371
29	30.610	645.046	21,07	37	5.801	0,1895	79	1.941	12.617	6,50	139	1.456	0,7500
30	29.396	614.436	20,90	37	5.764	0,1961	80	1.727	10.676	6,18	137	1.317	0,7623
31	28.229	585.040	20,72	36	5.728	0,2029	81	1.523	8.948	5,87	135	1.179	0,7741
32	27.107	556.810	20,54	36	5.691	0,2100	82	1.330	7.425	5,58	129	1.045	0,7853
33	26.028	529.703	20,35	37	5.655	0,2173	83	1.150	6.095	5,30	124	915	0,7961
34	24.990	503.675	20,15	38	5.618	0,2248	84	982	4.945	5,04	117	791	0,8062
35	23.992	478.685	19,95	39	5.581	0,2326	85	827	3.963	4,79	108	674	0,8156
36	23.030	454.693	19,74	41	5.542	0,2406	86	687	3.136	4,56	99	567	0,8245
37	22.103	431.663	19,53	42	5.501	0,2489	87	562	2.449	4,36	88	468	0,8325
38	21.211	409.560	19,31	44	5.458	0,2573	88	453	1.887	4,17	76	380	0,8398
39	20.351	388.349	19,08	47	5.414	0,2660	89	359	1.434	3,99	65	304	0,8465
40	19.521	367.998	18,85	48	5.367	0,2750	90	280	1.075	3,83	54	239	0,8526
41	18.722	348.477	18,61	50	5.319	0,2841	91	215	794	3,69	44	185	0,8581
42	17.952	329.755	18,37	53	5.269	0,2935	92	162	579	3,56	35	140	0,8629
43	17.208	311.804	18,12	55	5.216	0,3031	93	121	417	3,45	28	105	0,8673
44	16.491	294.596	17,86	58	5.160	0,3129	94	88	296	3,35	21	77	0,8713
45	15.799	278.105	17,60	61	5.102	0,3230	95	64	207	3,26	16	56	0,8747
46	15.130	262.306	17,34	64	5.041	0,3332	96	45	144	3,18	12	40	0,8776
47	14.484	247.176	17,07	67	4.977	0,3436	97	32	99	3,12	9	28	0,8800
48	13.860	232.692	16,79	70	4.910	0,3543	98	22	67	3,07	6	19	0,8819
49	13.256	218.833	16,51	74	4.840	0,3651	99	15	45	3,04	4	13	0,8830

CAPÍTULO XVIII

OPERACIONES DE CAPITALIZACIÓN

Objetivo

- Comprender un contrato de capitalización pura y un contrato de capitalización aleatoria
- Aplicar nociones de probabilidad en el planteo de las equivalencia inicial de los compromisos y distintas formas de cálculo en la probabilidad de salir sorteado: creciente - constante
- Plantear equivalencias para el cálculo de primas únicas o sucesión de primas periódicas
- Conocer las distintas leyes de eliminación en el rescate de los títulos
- Hallar las reservas que deben guardar periódicamente las compañías emisoras.

Nociones

Las entidades que realizan operaciones de capitalización están reguladas en nuestro mercado argentino por la Inspección General de Justicia y por lo tanto deben cumplir con la normativa que dicte dicho ente.

Para una mejor comprensión abordaremos el tema con una operación cierta, conocida como "operación de capitalización pura".

Clasificación de las operaciones de capitalización

- *Operación de Capitalización Pura*
- *Operación de Capitalización Aleatoria –con sorteos*

OPERACIONES DE CAPITALIZACION PURA

Es un contrato mediante el cual:

- *Una persona, en adelante "El Suscriptor" se compromete a abonar:*
  - *una suma de dinero en concepto de "Prima única", o bien*
  - *una sucesión de cuotas periódicas en concepto de "Primas Periódicas Puras"*

  durante un plazo determinado a los fines de integrar un determinado Capital.
- *La otra parte se compromete a reintegrar dicho capital al cabo del plazo estipulado en el contrato.*

Estaríamos hablando de un plan de ahorro y constituye una típica operación financiera de capitalización cierta pues depende del tiempo. Si el suscrip-tor también puede recibir su capital N a través de sorteos que la otra parte realice, se trata de una operación aleatoria de capitalización pues los capitales no sólo están asociados al tiempo sino a una probabilidad de ocurrencia (salir beneficiado en el sorteo) y para ello el contrato debe contener "cláusulas de sorteo".

Elementos de la operación financiera de capitalización

- l_0 = número de personas o suscriptores al Plan.
- N = valor Nominal de cada título de capitalización pura del Plan.
- n = plazo del contrato.
- PPU = importe de la prima pura única que deberá pagar cada suscriptor —compromiso del suscriptor— para que la compañía le abone al vencimiento del contrato el valor N.
- PPP = importe de cada prima periódica que deberá abonar cada suscriptor para integrar un valor N —compromiso del suscriptor—. Al vencimiento del contrato la compañía le abona el valor N.
- p= cantidad de primas periódicas puras. Pudiendo ser $p \leq n$.

Supongamos que existe un número de personas o suscriptores = l_0 cuyo compromiso será abonar una Prima Unica: PPU para recibir dentro de n períodos un título de VN. Nos preguntamos cuál será el compromiso de la compañía: al cabo del plazo establecido, ésta tendrá que pagar al vencimiento ese VN. a cada suscriptor.

Para determinar cuál será el valor de la Prima única que deberá pagar cada suscriptor para recibir dentro de n períodos un VN, debemos plantear la ecuación de equivalencia financiera, en la cual el valor actual de los pagos que realicen los suscriptores será igual al valor actual de de los títulos de VN que deberá pagar a su vencimiento la compañía emisora.

Por lo tanto el cálculo de la prima única pura será: $PPU = N \cdot v^n$ para un título individual de $VN.

Si el valor nominal del título es N=10.000; el plazo n=5 años y la tasa de interés es del 5% significa que cada suscriptor del Plan deberá abonar en concepto de Prima Pura Unica $ 7.835,26.

$$PPU = 10.000 \cdot (1+0,05)^{-5} = 7.835,26$$

El supuesto que llevaremos a cabo en todos los casos y así lo expresamos: es que serán primas puras. Habría que mencionar que a dichas primas se las debe incrementar en la porción de gastos discriminados en únicos y periódicos y son denominadas primas comerciales o de tarifa.

Si consideramos la totalidad de suscriptores habrá que multiplicar por l_0 en la igualdad anterior tanto el primer miembro como el segundo, pues dicha prima la abonan los l_0 suscriptores y la compañía tiene el compromiso de abonar N a l_0 suscriptores.

Ahora, supongamos que cada suscriptor irá haciendo pagos periódicos adelantados para recibir dentro de n períodos igual Valor Nominal. Supongamos que hace n pagos periódicos —PPP— que pueden coincidir o no con el plazo de la operación.

0	1	2	3	//	n-1	n	
PPP	PPP	PPP	PPP	...	PPP	-	← Compromiso de cada suscriptor
						N	← Compromiso de la cía. a c/suscriptor

Entonces la PPU debe ser igual al valor actual de las n PPP —primas puras periódicas—.

Es decir:

- el compromiso de cada suscriptor es $PPU = PPP \cdot a(0;n;i)$.
- el compromiso de la compañía es pagar el valor nominal a cada suscriptor a su vencimiento.

Entonces la equivalencia financiera al momento 0 será:

$PPP \cdot a(0;n;i) = N \cdot v^n$

$PPP \cdot a(0;n;i)\ (1+i)^n = N$

$PPP \cdot s(0;n;i) = N$

$$\boxed{PPP = N \cdot s^{-1}(0;n;i)}$$

En el caso planteado: $PPP = 10.000 \cdot s^{-1}(0;5;0{,}05)$

$PPP = 1.723{,}57$

Siendo PPP de \$ 1.723,57 la prima periódica pura que durante 5 períodos anuales cada suscriptor deberá abonar en forma adelantada para recibir al vencimiento un valor nominal de \$10.000.

La diferencia entre \$ 10.000 que recibe y los 5 pagos de \$ 1.723,57 son los resultados financieros.

Cálculo de la Reserva de la compañía —V_k—

El equilibrio entre los compromisos que tiene la compañía o emisora y los compromisos de los suscriptores hacia la compañía quedan registrados en sus Estados Contables en la Cuenta Reserva Matemática en el rubro del Pasivo y también se afecta la cuenta de Resultados del Estado de Pérdidas y Ganancias.

El cálculo de la reserva a un momento "k" no es otra cosa que el saldo de deuda que tiene en ese momento con los suscriptores y por lo tanto lo podemos calcular por el método prospectivo, el método retrospectivo o el método de recurrencia. Podemos ver en un eje de tiempo cómo quedan planteadas las dos situaciones:

➪ **Caso 1) Situación en que cada suscriptor paga una PPU.**

0 1 2 k n-1 n

$\boxed{V_k}$ ← Reserva del momento k

$PPU=N.v^n$ — — ... — — — ← Compromiso de c/suscriptor

N ← Compromiso de la Cía. para c/suscriptor

• ***Reserva matemática por el método prospectivo —en función del futuro— pues considera los futuros compromisos de las partes***

Datos: si la compañía ya cobró a los suscriptores la PPU en el momento 0, entonces:

Para el cálculo de la reserva que deberá tener la compañía en forma individual, es decir por cada suscriptor y en cada momento "k" de valuación se *hallará el valor actual a ese momento —k— de sus compromisos futuros representados por el valor nominal a ser pagados a cada suscriptor en el momento n.*

En consecuencia, para el cálculo de la reserva total o global sólo habrá que multiplicar la reserva individual por el número inicial de suscriptores l_0. pues todos son integrantes del grupo en cualquier momento; ya que todos cobrarán el VN estipulado en el contrato a su vencimiento.

Seguidamente calcularemos la Reserva total para cada "k" momento recordando nuevamente que una vez cobrada la Prima Unica lo único que tenemos es el valor actual de la obligación de la compañía a cada momento de valuación k.

En líneas generales la Reserva al momento k es la diferencia entre los Compromisos de la Compañía al momento k y los Compromisos de los Suscriptores al momento k. Debemos decir que los suscriptores no tienen ningún compromiso después del momento 0 pues es en 0 el momento en que abonaron todos sus compromisos representados por la PPU.

Seguimos con el ejemplo:

$l_0=100$ $N=10.000$ $i= 0{,}05$ $n=5$

$PPU = 10.000 \ . \ (1+0{,}05)^{-5} = 7.835{,}26$

Cálculo de la Reserva Matemática

Cada uno de los valores hallados podrán ser confrontados para una mejor interpretación en el cuadro de marcha que luego se expone.

k	RESERVA MATEMÁTICA PARA CADA PERÍODO K	
1	$V_1 = l_0 . N . v^{n-1}$	$V_1 = 100 .10.000 . (1+0,05)^{-4}$ $V_1 = 100. 8.227,02 = 822.702$ La Reserva Individual de la compañía valuada al momento 1 es $ 8.227,02. La Reserva Total de la compañía al momento 1 es 100 veces la reserva individual, pues debemos multiplicar la misma por la cantidad de suscriptores $l_0 = 100$, es decir $ 822.702.
2	$V_2 = l_0 . N . v^{n-2}$	$V_2 = 100 .10.000 . (1+0,05)^{-3}$ $V_2 = 100. 8.638,38 = 863.838$ La Reserva Individual de la compañía valuada al momento 2 es $ 8638,38. La Reserva Total de la compañía al momento 1 es 100 veces la reserva individual, pues debemos multiplicar la misma por la cantidad de suscriptores $l_0 = 100$, es decir $ 863.838.
...	...	...
4	$V_{n-1=4} = l_0 . N . v$	$V_4 = 100 .10.000 . (1+0,05)^{-1}$ $V_4 = 100. 9.523,81 = 952.381$ La Reserva Individual de la compañía valuada al momento (n-1)=4 es $ 9.523,81. La Reserva Total de la compañía al momento (n-1) es 100 veces la reserva individual, pues debemos multiplicar la misma por la cantidad de suscriptores $l_0 = 100$, es decir $ 952.381.
5	$V_n = l_0 . N - l_0 N$ $V_n = 0$	$V_n = 100 .10.000 - 100.10000$ $V_n = 0$ La Reserva tanto Individual como Global de la compañía valuada al momento n es cero pues ésta ya canceló todos los títulos de $ 10.000 a los 100 suscriptores.

Del cuadro se desprende:

- Valuación en el momento $k \neq n$

$\boxed{V_k = l_0 . N . v^{n-k}}$ Reserva matemática del período k.

En el momento "n" la compañía ya canceló y por lo tanto:
$V_n = l_0 . N . v^{n-n} - l_0 .N = 0$

- ***Reserva matemática por el método retrospectivo —en función del pasado—***

Otra forma de arribar a iguales resultados, tal como se determina el saldo de deuda en préstamos.

La reserva se calcula como la diferencia entre los compromisos que afrontaron los l_0 suscriptores en el momento 0 —la PPU— capitalizados al momento k de valuación y los compromisos que hizo frente la compañía desde el momento inicial hasta el momento de valuación siendo nulos pues sólo el momento n es el período en que ésta deberá abonar a los l_0 suscriptores el valor nominal del título = N.

Entonces la reserva en este caso de PPU simplemente se traduce como la capitalización a cada momento "k" de valuación de las PPU cobradas por la compañía a los l_0 suscriptores del grupo.

k	RESERVA MATEMÁTICA PARA CADA PERÍODO K	
1	$V_1 = l_0 . N . v^n . (1+i)$ $V_1 = l_0 .N . v^{n-1}$	$V_1 = 100 .10.000 . (1+0,05)^{-5} . (1+0,05)$ $V_1 = 100 .10.000 . (1+0,05)^{-5} . (1+0,05)$ $V_1 = 100. 7.835,26\ (1+0,05)$ $V_1 = 100. 8.227,02 = 822.702$
2	$V_2 = l_0 . N . v^n (1+i)^2 = l_0 . N . v^{n-2}$	$V_2 = 100 .10.000 . (1+0,05)^{-5} . (1+0,05)^2$ $V_2 = 100 .10.000 . (1+0,05)^{-5} . (1+0,05)^2$ $V_2 = 100. 7.835,26\ (1+0,05)^2$ $V_2 = 100. 8.638,38 = 863.838$
...		
n-1	$V_{n-1} = l_0 . N . v^n (1+i)^{n-1} = l_0 . N . v$	$V_4 = 100 .10.000 . (1+0,05)^{-5} . (1+0,05)^4$ $V_4 = 100 .10.000 . (1+0,05)^{-5} . (1+0,05)^4$ $V_4 = 100. 7.835,26\ (1+0,05)^4$ $V_4 = 100. 9.523,81 = 952.381$
n	$V_n = l_0 . N . v^n (1+i)^n - l_0 . N = 0$	$V_n = 0$ En el último período es cuando la compañía rescata los l_0 Títulos de valor nominal N.

Del cuadro se desprende la Valuación en el momento $k \neq n$.

$\boxed{V_k = l_0 . N . v^n (1+i)^k = l_0 . N . v^{n-k}}$ Reserva Matemática del período "k" justo antes de que la compañía cobre la PPU k+1 ésima y antes de rescatar los títulos que son al vencimiento del contrato.

Recordemos que $N . v^n$ es la PPU que afrontó cada suscriptor y la compañía al momento "k" tiene un pasivo de (l_0 . PPU) capitalizadas al momento "k" da: $l_0 .N.v^{n-k}$ pues: $v^n . (1+i)^k = v^{n-k}$

- ***Reserva matemática por el método de recurrencia***

En este caso partiendo de la "Reserva del período anterior" —V_{k-1}— le sumamos las primas que la compañía cobra de los suscriptores del Plan (en nuestro caso no hay cobros periódicos) y le restamos los compromisos de la compañía). Al neto resultante lo capitalizamos un período.

Con prescindencia del método utilizado para la determinación de la reserva llegamos siempre a los siguientes valores.

Cuadro de marcha de 100 títulos de $ 10.000 cada uno:

k	Títulos en vigor (1)	Ingresos por PPP (2)	Reserva Período ant. (3)	Resultados Financieros (4)= (3+4).i	Recursos Capitalizados (5)=(2+3+4)	Títulos Reembolsados (6)	Reserva período k (7)=(5)-(6)
1	10.000	783.526	0	39176	822.702	-.-	**822.702**
2	10.000	-.-	822.702	41.136	863.838	-.-	**863.838**
3	10.000	-.-	863.838	43.192	907.030	-.-	**907.030**
4	10.000	-.-	907.030	45.351	952.381	-.-	**952.381**
5	10.000	-.-	952.381	47.619	1.000.000	1.000.000	**0**

➪ **Caso 2) Situación en que cada suscriptor paga una sucesión de PPP.**

Debemos tener presente en todos los casos que el plan guarda un equilibrio siempre y cuando ambas partes cumplan con todos los compromisos.

Esquema de la operación de capitalización en un eje de tiempo:

0 1 2 $\boxed{k}$ n-1 n

V_k ← V_k Reserva del momento k

PPP PPP PPP ... PPP ... PPP ← Compromiso de suscriptor

N ← Compromiso de la Cía.

En nuestro mismo ejemplo hallaremos el valor de cada una de las n PPP considerándolas adelantadas y que deben ser equivalente al valor de una PPU.

$$\boxed{PPP = N \cdot s^{-1}(0;n;i)}$$

$$PPP = 10.000 \cdot s^{-1}(0;5;0,05)$$
$$PPP = 10.000 \cdot 0,17235695$$
$$PPP = 1.723,57$$

Este es el valor de c/u de las 5 cuotas que deberán abonar al principio de cada período cada uno de los l_0 =100 suscriptores.

Por tal razón, la compañía debe cobrar periódicamente $ 172.357 en concepto de Primas Periódicas Puras adelantadas.

Cuadro de marcha de 100 títulos de $ 10.000 cada uno:

k	Títulos en vigor (1)	Ingresos por PPP (2)	Reserva Período ant. (3)	Resultados Financieros (4)= (3+4).i	Recursos Capitalizados (5)=(2+3+4)	Títulos Reembolsados (6)	Reserva período k (7)=(5-6)
						-.-	
1	10.000	172.357	0	8.617	180.974	-.-	**180.974**
2	10.000	172.357	180.974	17.667	370.998	-.-	**370.998**
3	10.000	172.357	370.998	27167	570.523	-.-	**570.523**
4	10.000	172.357	570.523	37.144	780.024	-.-	**780.024**
5	10.000	172.357	780.024	47.619	1.000.000	1.000.000	**0**

- ***Método prospectivo***

Como la compañía va cobrando periódicamente cada una de las n PPP de los l_0 suscriptores, su reserva al momento k será la diferencia entre el valor al momento —k— de sus compromisos futuros —traducidos en pagar al momento n el valor nominal— y los compromisos futuros de los suscriptores representados por sus primas periódicas aún no pagas.

Por lo expuesto, en líneas generales la Reserva al momento k es la diferencia entre los Compromisos de la Compañía al momento k y los Compromisos de los Suscriptores al momento k.

k	RESERVA MATEMÁTICA PARA CADA PERÍODO K JUSTO ANTES DEL COBRO DE LA PPP (K+1) ÉSIMA	
1	$V_1 = l_0 . N . v^{n-1} - l_0 PPP\ a(0;n-1;i)$	$V_1 = 100 \ . \ 10.000 \ . (1+0,05)^{-4} - 100 \ . \ 1.723,57 \ . \ a(0;4;0,05)$ $V_1 = 100. \ 8.227,02 - 100 \ . \ 1.723,57 \ . \ 3.723248029$ $V_1 = 100. \ 8.227,02 - 100 \ . \ 6.417,28$ $V_1 = 822.702 - 641.728$ $V_1 = 180.974$
2	$V_2 = l_0 . N . v^{n-2} - l_0 PPP\ a(0;n-2;i)$	$V_2 = 100 \ . \ 10.000 \ . (1+0,05)^{-3} - 100 \ . \ 1.723,57 \ . \ a(0;3;0,05)$ $V_2 = 100. \ 8.638,39 - 100 \ . \ 1.723,57 \ . \ 2,859410431$ $V_2 = 100. \ 8.638,39 - 100 \ . \ 4.928,40$ $V_2 = 863.839 - 492.840$ $V_2 = 370.999$
	...	
4	$V_{n-1} = l_0 . N . v - l_0 PPP\ a(0;1;i) =$ $l_0 . N . v - l_0 PPP$	$V_4 = 100 \ . \ 10.000 \ . (1+0,05)^{-1} - 100 \ . \ 1.723,57 \ . \ a(0;1;0,05)$ $V_4 = 100. \ 9523,81 - 100 \ . \ 1.723,57 \ . \ 1$ $V_4 = 100. \ 9.523,81 - 100 \ . \ 1723,57$ $V_4 = 952.381 - 172.357$ $V_4 = 780.024$
n	$V_n = l_0 . N - 0 - l_0 . N = 0$	$V_{n=5} = 0$ Se rescatan los títulos en este período n por eso la reserva es nula.

- Valuación en el momento k (excepto en n que la compañía deberá rescatar la totalidad de los títulos)

$$\boxed{V_k = l_0 \, . \, N \, . \, v^{n-k} - l_0 \, PPP \; a(0;n-k;i)}$$

O bien reemplazamos el valor de PPP

$$V_k = l_0 \, . \, N \, . \, v^{n-k} - l_0 N \, . \, s^{-1}(0;n;i) \, . \, a(0;n-k;i)$$

- ***Método retrospectivo:*** valuando la reserva en función al pasado.

Se calcula como la diferencia entre los compromisos de los l_0 suscriptores conformado por el pago periódico de las PPP desde 0 y los compromisos de la compañía que son nulos pues recién el pago de $ N se da al vencimiento del contrato-n.

En líneas generales la Reserva de la compañía al momento k es la diferencia entre los compromisos afrontados por los suscriptores al momento k y los de la compañía a igual momento.

1	$V_1 = l_0\,PPP.\,s(0;1;i) - 0$	$V_1 = 100.\ 1.723{,}57\,.(1+0{,}05) - 0$ $V_1 = 100\,.1.809{,}74$ $V_1 = 180.974$
2	$V_2 = l_0\,.\,PPP\ .\ s(0;2;i) - 0$	$V_2 = 100.\ 1.723{,}57\,.s(0;2;0{,}05) - 0$ $V_2 = 100\,.1.723{,}57\,.\,2{,}1525$ $V_2 = 100\,.3{,}70999$ $V_2 = 370.999$
n-1	$V_{n-1} = l_0.\ PPP\ .\ s(0;n-1;i) - 0$	$V_{n-1} = 100.\ 1.723{,}57\,.s(0;4;0{,}05) - 0$ $V_{n-1} = 100\,.1.723{,}57\,.\,4{,}52563125$ $V_{n-1} = 100\,.\,7800{,}24$ $V_{n-1} = 780.024$
n	$V_n = l_0.\ PPP.\ s(0;n;i) - l_0\,N$	$V_n = 100.\ 1.723{,}57\,.s(0;5;0{,}05) -$ $100\,.\,10.000$ $V_n = 100\,.1.723{,}57\,.\,5{,}801912813 - 1.000.000$ $V_n = 100\,.\,10.000 - 1.000.000$ $V_n = 0$

- Valuación en el momento k —distinto de n—

$V_k = l_0$ [PPP $(1+i)^k$ + PPP $(1+i)^{k-1}$ +...+PPP $(1+i)$] pues no incluye la PPP

Resolvemos el corchete y nos queda: $\boxed{V_k = PPP\,.\,s(0;k;i).\,l_0}$

También lo podemos expresar como: $V_k = l_0$ [PPP. $a(0;k;i).(1+i)^k$].

Si reemplazamos PPP por su valor: N . $s^{-1}(0;n;i)$ y sabiendo que: $s^{-1}(0;n;i) = V^{n-1}\,.\,a(0;n;i)$

$$V_k = l_0\left[N\,\frac{V^n}{a(0;n;i)}\,.\,a(0;k;i)\,(1+i)^k\right]$$

$$V_k = l_0\,.\,N.\,V^n\,\frac{1-V^k}{1-V^n}\,(1+i)^k = l_0\,.\,N.\,V^{n-k}\,\frac{1-V^k}{1-V^n}$$

$$\boxed{V_k = l_o.N.\frac{v^{n-k}-v^n}{1-v^n}}$$

Cualquiera de las expresiones de V_k son válidas pues llegamos a iguales resultados.

Si aplicamos la fórmula de $V_k = l_o.N.\dfrac{v^{n-k}-v^n}{1-v^n}$

Por ejemplo, en el período 4 nos quedaría:

$$V_{n-1=4} = 100.10.000.\frac{(1+0{,}05)^{-(5-4)}-(1+0{,}05)^{-5}}{1-(1+0{,}05)^{-5}} = 780.024$$

En el momento n

A la fórmula anterior deberá restar la cancelación de l_0 títulos de valor nominal N de la compañía hacia los suscriptores que conforman el grupo inicial: l_o.

- ***Método de recurrencia***

En este caso partiendo de la "Reserva del período anterior" —V_{k-1} — a la que le incorporamos los movimientos y su capitalización llegamos a la Reserva del período siguiente V_k.

$V_k = [V_{k-1} + PPP] \,.\, (1+i)$

$V_4 = (570.523+172.357) \,.\, (1+0,05)$

$V_4 = 780.024$

En el último período habrá que restar la cancelación.

Si realizamos un eje de tiempo y graficamos los valores de las Reservas tenemos:

- *En el caso de una única PPU pagada por el grupo de suscriptores*

0 1 2 3 4 5

/________/________/________/________/________/

PPP=783.526

→ V_1 =822.702

→ V_2 =863.838

→ V_3 =907.030

→ V_4 =952.381

→ 1.000.000

N=(1.000.000)

V_5 =0

- *En el caso de una sucesión de PPP pagadas por el grupo de suscriptores*

0 1 2 3 4 5

/________/________/________/________/________/

PPM=172.357 PPM=172.357 PPM=172.357 PPM=172.357 PPM=172.357

$\xrightarrow{(1+0,05)}$ V_1= 180.974

353.331 $\xrightarrow{(1+0,05)}$ V_2 =370.998

543.355 $\xrightarrow{(1+0,05)}$ V_3=570.523

742.880 $\xrightarrow{(1+0,05)}$ V_4=780.024

952.381 $\xrightarrow{(1+0,05)}$ 1.000.000

N= (1.000.000)

V_5= 0

OPERACIONES ALEATORIAS DE CAPITALIZACIÓN CON SORTEOS

Nociones

Este tipo de plan de capitalización tiene sus orígenes en el continente europeo a mediados del siglo XIX. Paul Verger había fundado una Asociación en Participación en la cual se constituyó un número de 250 individuos con el objeto de integrar un capital. Para ello, hacían aportes semanales y luego se realizaban sorteos en fechas específicas como Pascuas, Navidad en donde el favorecido en el sorteo iba recibiendo el capital.

Así planteado, tiene la particularidad de ser un ahorro cuyo resultado será diferente para algunos adherentes pues aparece el azar como factor característico de una operación aleatoria. Es cierto que va a recibir el capital; lo incierto es cuándo.

Definición

Es un contrato mediante el cual:

- ❑ *Una persona "el Suscriptor" con el objeto de integrar un determinado Capital, se compromete a abonar:*
  - *una suma de dinero en concepto de "Prima única" o bien*
  - *una sucesión de cuotas periódicas en concepto de "Prima Periódica Pura" durante un plazo determinado.*
- ❑ *La otra parte representado por la compañía de capitalización se compromete a reintegrar dicho capital al cabo del plazo estipulado en el contrato o bien en cualquier momento al beneficiado por el sorteo.*
  Debiendo establecer en el contrato el esquema de eliminación, o sea:
  - *cantidad de sorteos*
  - *periodicidad de sorteos*
  - *la forma de determinación de los sorteos.*

Lo interesante es que el suscriptor se puede beneficiar en recibir el Capital nominado en el contrato con fecha anterior al plazo estipulado y aún más: deja de pagar sus futuras primas periódicas en el caso de salir beneficiado en el sorteo.

Operaciones aleatorias de capitalización

De Probabilidad Constante	De Probabilidad Creciente
Se sortea un porcentaje constante de los títulos en circulación, es decir los que siguen vigentes.	*Se sortea un número constante de títulos cada vez.*

Para una mejor comprensión partimos de un ejercicio que será el caso particular y dadas esas condiciones surgirán nuestras fórmulas de valuación, asumiendo que las primas son pagadas por adelantado por el suscriptor y que los sorteos que realiza la compañía son por períodos vencidos.

Se encuentra reglamentada por las R.G. 26/2004, 29/2004 y 8/2005.

1. Operaciones aleatorias, con sorteo con probabilidad constante (Ley exponencial de Sang)

Recordemos que en este caso se sortea un porcentaje constante de los títulos que siguen vigentes, ya que todo título sorteado saldrá del grupo.

Asumiremos para resolver un caso particular que el sorteo se realiza al fin de cada periodo convenido.

Datos:

l_o = cantidad de suscriptores del grupo
l_k = cantidad de suscriptores vigentes en cada periodo k
d_k = cantidad de suscriptores sorteados en cada periodo k
N = Valor Nominal del título
q = probabilidad de beneficiarse en el sorteo —sorteo vencido— y se extrae el contrato
p = probabilidad de permanecer en el grupo p= (1-q) y el contrato sigue vivo
p^n = probabilidad de que el contrato no se extrajo en ningún sorteo y se pague al vencimiento.

Esquema de eliminación:

Debemos determinar:

- la cantidad de suscriptores o títulos que se sortean en cada periodo y se retiran del grupo;
- la cantidad de suscriptores o títulos que permanecen en el grupo después del sorteo.

Razonamos lo siguiente:

Si en el momento 0 hay —l_0— cantidad inicial de suscriptores y el sorteo se hace por período vencido; entonces en el período 1 se sortea un porcentaje constante. Podemos decir que $\boxed{d_1 = l_o \cdot q}$ será la cantidad de suscriptores sorteados en el período 1.

Quedan vigentes entonces después del sorteo:

$$l_1 = l_o - l_o \cdot q = l_o \cdot (1-q) = l_o \cdot p$$

$\boxed{l_1 = l_o \cdot p}$ siendo p = probabilidad de no salir sorteado, es decir de quedar en el grupo.

El segundo sorteo se realiza sobre l_1 y calculamos la cantidad de suscriptores sorteados: d_2

$$\boxed{d_2 = l_o \cdot p \cdot q}$$

Quedan l_2 —cantidad de suscriptores vigentes después del segundo sorteo—.

$l_2 = l_1 - d_2$
$l_2 = l_0 \cdot p - l_0 \cdot p \cdot q$
$l_2 = l_0 \cdot p\,(1-q)$
$l_2 = l_0 \cdot p \cdot p$
$\boxed{l_2 = l_0 \cdot p^2}$

El tercer sorteo se realiza sobre l_2 y calculamos la cantidad de suscriptores sorteados: d_3

$\boxed{d_3 = l_2 \cdot q = l_0 \cdot p^2 \cdot q}$

Quedan vigentes l_3 —cantidad de suscriptores que permanecen en el grupo después del tercer sorteo—.

$l_3 = l_2 - d_3$
$l_3 = l_0 \cdot p^2 - l_0 \cdot p^2 \cdot q$
$l_3 = l_0 \cdot p^2\,(1-q)$
$l_3 = l_0 \cdot p^2 \cdot p$
$\boxed{l_3 = l_0 \cdot p^3}$

Se desprende que:

$\boxed{d_k = l_0 \cdot p^{k-1} \cdot q}$

$\boxed{l_k = l_0 \cdot p^k}$ Lo podemos visualizar mejor en la tabla de abajo.

k	Cant. de suscrip. vigentes en el período k antes del sorteo	Sorteo del período k rescate del período n	Cant. de suscriptores vigentes después del sorteo
0	l_0	------	l_0
1	l_0	$d_1 = l_0 . q$	$l_1 = l_0 - l_0 . q = l_0 .(1-q)$ $l_1 = l_0 . p$
2	$l_0 . p$	$d_2 = l_0 . p . q$	$l_2 = (l_0 . p) - (l_0 . p)\, q = (l_0 . p).(1-q) = (l_0 . p).p$ $l_2 = l_0 . p^2.$
3	$l_0 . p^2$	$d_3 = (l_0 . p^2) . q$	$l_3 = (l_0 . p^2) - (l_0 . p^2)\, q = (l_0 . p^2).(1-q) = (l_0 . p^2).p$ $l_3 = l_0 . p^3.$
...	...	...	...
k	$l_0 . p^{k-1}$	$d_k = (l_0 . p^{k-1}) . q$	$l_k = (l_0 . p^{k-1}) - (l_0 . p^{k-1})\, q = (l_0 . p^{k-1}).(1-q) = (l_0 . p^{k-1}).p$ $l_k = l_0 . p^k.$
...	...	...	...
n-1	$l_0 . p^{n-2}$	$d_{n-1} = (l_0 . p^{n-2}) . q$	$l_{n-1} = (l_0 . p^{n-2}) - (l_0 . p^{n-2})\, q = (l_0 . p^{n-2}.)(1-q) = (l_0 . p^{n-2}).p$ $l_{n-1} = l_0 . p^{n-1}.$
n	$l_0 . p^{n-1}$	$d_n = (l_0 . p^{n-1}) . q$	$l_n = (l_0 . p^{n-1}) - (l_0 . p^{n-1})\, q = (l_0 . p^{n-1}.)(1-q) = (l_0 . p^{n-1}).p$ $l_n = l_0 . p^n$
n	$l_0 . p^n$	$r_n = l_0 . p^n$	--------

Vemos que este tipo de sorteo es de probabilidad constante pues periódicamente la compañía rescatará un porcentaje constante de títulos que denominamos "q". Por lo tanto la probabilidad de salir sorteado es la misma cualquiera sea el momento, pues los casos favorables son los sorteos calculados como q sobre los títulos en circulación y los casos posibles son los títulos vigentes antes del sorteo. Es decir que: la probabilidad de salir en el primer sorteo resulta igual a la probabilidad de salir en el segundo sorteo y así sucesivamente.

$$\frac{q.l_o}{l_o} = \frac{l_o.p.q}{l_o.p} = \frac{l_o.p^2q}{l_o.p^2} ... = q$$ Por tal razón se le dice "probabilidad constante"

Para una aplicación real, es importante destacar que deben guardar relación el valor de q y el de l_0 para que su resultado sea número entero, caso contrario no habría rescate (en todos los períodos).

En la resolución de la aplicación de abajo se armó el cuadro partiendo de cálculos que han mantenido lo ... males a los fines de verificar los resultados, pero que se aparta de la res... ión comentada.

En caso de confeccionar un contrato de esta naturaleza habrá que considerar la relación entre q y el número de suscriptores para que se pueden rescatar por lo menos un título cada vez —un número entero cada vez—.

Aplicación de una Operación de Capitalización con probabilidad constante

Una compañía de capitalización ofrece 100 títulos de VN= $10.000 c/u. Tasa de interés: 1,5% periódico.

Dichos títulos serán reembolsados de la siguiente manera:

- Se sortearán por período vencido el 1% de los títulos vigentes en circulación.
- Aquellos títulos no beneficiados en el sorteo se rescatarán al final del plazo del contrato: dentro de 4 períodos.

Se pide: Calcular cuál es el compromiso asumido en el contrato por el suscriptor, considerando dos alternativas de pago:

a) Prima pura única que deberá pagar cada suscriptor

b) Prima periódica anual adelantada que debería pagar cada suscriptor

Realizar el cuadro de amortización del título para las dos opciones anteriores.

Datos:
l_0= 100 –cantidad de suscriptores
l_k = cantidad de suscriptores vigentes
ii= 0,015
n= 4
N =10.000
q= 0,01 (porcentaje de los títulos en circulación que se sortea cada vez).
p = (1-q) = 0,99

✧ Confeccionamos el diagrama temporal de la operación

Nos ayudará el cuadro anterior (las últimas dos columnas) para exponer en el eje los compromisos de las partes.

0	1	2	3	//	n-1	n	Cantidad de suscriptores
	$l_0.q$	$l_0.p.q$	$l_0.p^2.q$	.....	$l_0.p^{n-2}.q$	$l_0.P^{n-1}.q$:	d_k= sorteados periódicamente
						$l_0.p^n$	r_n = res. cat. final
l_0	$l_0.p$	$l_0.p^2$	$l_0.p^3$	.....	$l_0.p^{n-1}$	—	: l_k= vigentes. en c/período —después del sorteo—

Obligaciones o compromisos que deberán afrontar las partes del contrato:

- el emisor o compañía:
  El pago de cada título sorteado en cada período convenido en el contrato —d_k—.
  El pago de los títulos que quedaron en circulación luego de todos los sorteos los que deben ser rescatados en la fecha convenida contractualmente, siendo en este caso al final del plazo —r_n—.

- cada suscriptor:
  El pago de la prima única o la prima períodica pura que se haya convenido en el contrato.

Cálculo del compromiso del suscriptor

➲ Alternativa a) Situación en que cada suscriptor paga una PPU.

Para calcular cuánto debe pagar cada suscriptor en el momento 0, debemos partir de la ecuación de equivalencia en donde los compromisos de los suscriptores igualan a los compromisos de la compañía emisora. Seguiremos trabajando las fórmulas considerando un título de VN=$1.

En nuestro caso, en el momento 0 todos los suscriptores —l_0— deberán abonar la prima pura única para tener derecho a recibir un título de VN $1 en el momento en que sale sorteado o caso contrario, al finalizar el plazo. Estamos diciendo que el compromiso del suscriptor es pagar la PPU.

Por otro lado la compañía emisora deberá abonar los títulos que salen sorteados en cada período y los restantes que quedan para rescatar al finalizar el plazo de la operación, siendo éste su compromiso.

El cálculo de la Prima Pura (sin gastos) Unica, a la que denotamos como PPU surge de dicha equivalencia, que exponemos en el eje de tiempo a continuación.

0	1	2	3 //	n-1	n
	$l_0.q$	$l_0.p.q$	$l_0.p^2.q$	$l_0.p^{n-2}.q$	$l_0.p^{n-1}.q + l_0.p^n$

Valuando todos los compromisos de las partes al momento 0 la relación de equivalencia será:

$$PPU.l_0 = l_0.q.v + l_0.p.q.v^2 + l_0.p^2.q.v^3 + ... + l_0.p^{n-2}.q.v^{n-1} + l_0.p^{n-1}.q.v^n + l_0.p^n.v^n$$

Sacamos factor común $(l_0.q.v)$ en el segundo miembro:

$$PPU.l_0 = l_0.q.v\,[1 + p.v + p^2.v^2 + ... + p^{n-2}.v^{n-2} + p^{n-1}.v^{n-1}] + l_0.p^n.v^n$$

Simplificamos l_0 que se encuentra en todos los términos del 2° miembro y también en el 1° miembro:

$$PPU = q.v\,[1 + p.v + p^2.v^2 + ... + p^{n-2}.v^{n-2} + p^{n-1}.v^{n-1}] + p^n.v^n$$

Estamos en condiciones de resolver la suma de n términos en progresión geométrica encerrada en el corchete, en donde: 1° término= 1 y razón= p.v.

$$PPU = q.v.\frac{1-(p.v)^n}{1-p.v} + p^n.v^n$$

PPU es la Prima Pura única que cada suscriptor debe pagar hoy —momento 0— para recibir un título de VN=1 en oportunidad de beneficiarse y salir sorteado o en oportunidad del rescate al final del plazo convenido en el contrato.

En nuestro ejemplo con los datos del ejercicio el cálculo será

$$PPU = 0,01.(1+0,015)^{-1}\frac{1-(0,99.1,015^{-1})^4}{1-0,99.1,015^{-1}} + 0,99^4.(1+0,015)^{-4}$$

PPU= 0,03797664+0,90505841.

0	1 //	k	k+1	k+2 //	n-1	n
Rescates futuros		*	$(l_o.p^k.q)$	$(l_o.p^{k+1}.q)$ ...	$(l_o.p^{n-2}.q)$	$(l_o.p^{n-1}.q + l_o.p^n)$
		V_k				

$$l_k.V_{k;PPU} = l_o.p^k.q.v + l_o.p^{k+1}.q.v^2 + ... + l_o.p^{n-2}.q.v^{n-1-k} + l_o.p^{n-1}.q.v^{n-k} + l_o.p^n.v^{n-k}$$

$$l_k.V_{k;PPU} = l_o.p^k.q.v\left[1 + .p.v + ... + p^{n-2-k}.v^{n-2-k} + p^{n-1-k}.v^{n-1-k}\right] + l_o.p^n.v^{n-k}$$

$$l_k.V_{k;PPU} = l_o.p^k.q.v\left[1 + .p.v + ... + (p.v)^{n-2-k} + (p.v)^{n-1-k}\right] + l_o.p^n.v^{n-k}$$

$l_k.V_{k;PPU} = l_o.p^k.q.v.\dfrac{1-(p.v)^{n-k}}{1-p.v} + l_o.p^n.v^{n-k}$ Sabemos que $l_k = l_0 . p^k$, así que simplificamos:

$$V_{k;PPU} = q.v.\frac{1-(p.v)^{n-k}}{1-p.v} + p^{n-k}.v^{n-k}$$

$$\boxed{V_{k;PPU} = q.v.\frac{1-(p.v)^{n-k}}{1-p.v} + (p.v)^{n-k}}$$

$V_{k;PPU}$: es la reserva matemática por suscriptor que deberá tener la compañía para cada título de VN=$1 que deba entregar en el momento del sorteo o al finalizar el plazo.

➩ Alternativa b)Determinación de la Reserva matemática por suscriptor vigente de la compañía en el caso de PPP

Reserva Matemática de la compañía emisora por el Método prospectivo

Sabemos que la reserva es el valor actual al momento "k" de valuación de todos los compromisos que deba hacer frente la compañía neto del valor actual al momento "k" de los compromisos: las PPP que deba hacer frente cada suscriptor.

Plantearemos en un eje de tiempo las obligaciones futuras del emisor para calcular su reserva matemática y las PPP (primas aún no pagadas por los suscriptores)que constituyen los derechos futuros del emisor

	0	1	//	k	k+1	k+2	//	n-1	n
Rescates futuros					$l_o.p^k.q$	$l_o.p^{k+1}.q$ ...		$l_o.p^{n-2}.q$	$l_o.p^{n-1}.q + l_o.p^n$
Primas futuras-PPP-				PPP	PPP	PPP ...		PPP	
Abonan las PPP				l_k	l_{k+1}	l_{k+2}		l_{n-1}	
				V_k					

$$l_k.V_{k,PPP} = \underbrace{\left[l_o.p^k.q.v + l_o.p^{k+1}.q.v^2 + ... + l_o.p^{n-2}.q.v^{n-1-k} + l_o.p^{n-1}.q.v^{n-k} + l_o.p^n.v^{n-k}\right]}_{\text{Es la reserva matemática individual en caso de PPU}} - PPP\left[l_k + l_{k+1}.v + l_{k+2}.v^2 + ... + l_{n-1}v^{n-1-k}\right]$$

$$l_k.V_{k,PPP} = \left[l_o.p^k.q.v + l_o.p^{k+1}.q.v^2 + ... + l_o.p^{n-2}.q.v^{n-1-k} + l_o.p^{n-1}.q.v^{n-k} + l_o.p^n.v^{n-k}\right] - PPP\left[l_k + l_k.p.v + l_k.p^2.v^2 + ... + l_k.p^{n-1-k}v^{n-1-k}\right]$$

$$l_k.V_{k;PPP} = \left[l_o.p^k.q.v + l_o.p^{k+1}.q.v^2 + ... + l_o.p^{n-2}.q.v^{n-1-k} + l_o.p^{n-1}.q.v^{n-k} + l_o.p^n.v^{n-k}\right] - l_k PPP\left[1 + p.v + (p.v)^2 + ... + (p.v)^{n-1-k}\right]$$

así que denominaremos para no confundir $V_{k;PPP}$ y $V_{K;PPU}$ la reserva en caso de una sola prima o bien sucesión de primas a cobrar por la compañía, respectivamente.

$$l_k.V_{k;PPP} = \left[l_k.V_{k;PPU} \right] - l_k PPP \left[1 + p.v + (p.v)^2 + ... + (p.v)^{n-1-k} \right]$$

en cada miembro tenemos en común l_k

$$V_{k;PPP} = V_{k;PPU} - PPP \left[1 + p.v + (p.v)^2 + ... + (p.v)^{n-1-k} \right]$$

resolvemos la sucesión geométrica y queda:

$$V_{k;PPP} = V_{k;PPU} - PPP \frac{1-(p.v)^{n-k}}{1-p.v}$$

$V_{k;PPP}$: es la reserva matemática por suscriptor que deberá tener la compañía para cada título de VN=$1 que deba entregar en el momento del sorteo o al finalizar el plazo.

Esta reserva al momento "k" es antes del cobro de la prima, pues es adelantada y después del sorteo.

En nuestro ejemplo nos queda el siguiente cuadro de marcha:

		CUADRO DE MARCHA CONSIDERANDO EL PAGO DE UNA UNICA						
	Tit.envigor	Ingresos	Res. Año ant	Rec.capitaliz	Tit reembol	Imp.titreem	Reserv.año s	tit. Rescatados
0							0	
1	100	943035	0	957181	1	10000	947181	1
2	99		947181	961388	1	9900	951488	2
3	98,01		951488	965761	1	9801	955960	3
4	97,0299		955960	970299	97	970299	0	100

		CUADRO DE MARCHA CONSIDERANDO EL PAGO DE PRIMAS						
	Tit.envigor	Ingresos	ResAño ant	Rec.capitaliz	Tit reembol	Imp.titreem	Reserv.año s	tit. Rescatados
0							0	
1	100	244650	0	248320	1	10000	238320	1
2	99	242204	238320	487731	1	9900	477831	2
3	98,01	239782	477831	728377	1	9801	718576	3
4	97,0299	237384	718576	970299	97	970299	0	100

Si realizamos un eje de tiempo y graficamos los valores de las Reservas tenemos:

- *En el caso de una única PPU pagada por el grupo de suscriptores*

```
0            1            2            3            4
/____________/____________/____________/____________/
PPP=943.035
└──────►  957.181
     S1 =  (10.000)
     V1 =  947.181
           └──────► 961.388
                S2 =   (9.900)
                V2 =  951,488
                      └──────► 965.761
                           S3 =   (9.801)
                           V3 =  955.960
                                 └──────► 970.299
                                   R4+ S4 = (970.299)
                                             V4 =0
```

- *En el caso de una sucesión de PPP pagadas por el grupo de suscriptores*

```
0            1            2            3            4
/____________/____________/____________/____________/
PPM1=244.650
   ──────►
(1+0,015)        248.320
        S1 =    (10.000)
        V1 =     238.320
        PPM1=    242.204
                 480.524  ──────►  487.731
                        (1+0,015
                          S2 =    (9.900)
                          V2 =    477.831
                       PPM2=      239.782
                                  717.613  ──────►     728.377
                                          (1+0,015
                                              S3 =    (9.801)
                                              V3 =  718.576
                                           PPM3=    237.384
                                                    955.960  ──────►  970.299
                                                           (1+0,015)
                                                    R4 + S4 =  (970.299)
                                                        V4 =       0
```

ANEXO
CUADRO DE RESERVA DE PROBABILIDAD CONSTANTE

k	Cant de suscr. vig despues del sorteo	RESERVA MATEMATICA INDIVIDUAL PARA UN TITULO DE VN=1 después de realizado el sorteo del periodo k y antes del cobro de la PPU –adelantada—. Si los suscriptores abonaron solamente una PPU $V_{k:PPU}=q.v.\frac{1-(p.v)^{n-k}}{1-p.v}+(p.v)^{n-k}$	RESERVA GLOBAL $V^*_{k;PPU}=l_k.N.V_{k;PPU}$
0	l_0 $l_{0=100}$	En el momento inicial –0- los compromisos de ambas partes son equivalentes pues el valor actual de los sorteos y rescate final que debe afrontar la compañía debe ser igual al valor actual de la PPU que paguen los suscriptores y nadie aún pagó. Después de cobrar la prima única el valor actual es: $V_{0;PPU}=0,01.(1+0,015)^{-1}.\frac{1-[0,99.(1+0,015)^{-1}]^4}{1-0,99.(1+0,015)^{-1}}+[0,99.(1+0,015)^{-1}]^4$ $V_{0;PPU}$= 0,94303505 . Para calcular la reserva global $V^*_{0;PPU}$= 943035, hicimos: 100.10000.0,94303505 Pero, recordemos que el cálculo es antes del cobro de la PPU	
1	$l_1=l_0.p$ l_1= 100. (1-0,01) l_1=100 . 0,99 l_1=99	$V_{1;PPU}=0,01.(1+0,015)^{-1}.\frac{1-[0,99.(1+0,015)^{-1}]^{4-1}}{1-0,99.(1+0,015)^{-1}}+[0,99.(1+0,015)^{-1}]^{4-1}$ $V_{1;PPU}$= 0,95674805	$V^*_{1;PPU}$ 99.10000.0.95674805 **$V^*_{1;PPU}$=947181**
2	$l_2=l_0.p^2$. l_2=100.(1-0,01)^2 l_2=100 . 0,9801 l_2=98,01...	$V_{2;PPU}=0,01.(1+0,015)^{-1}.\frac{1-[0,99.(1+0,015)^{-1}]^{4-2}}{1-0.99.(1+0,015)^{-1}}+[0,99.(1+0,015)^{-1}]^{4-2}$ $V_{2;PPU}$=0,97080735	$V^*_{2;PPU}$ 98,01.10000.0,97080735 **$V^*_{2;PPU}$=951488**
3	$l_3=l_0.p^3$. l_3=100.(1-0,01)^3 l_3=100.0,97... l_3= 97,0299= =97,03.	$V_{3;PPU}=0,01.(1+0,015)^{-1}.\frac{1-[0.99.(1+0,015)^{-1}]^{4-3}}{1-0,99.(1+0,015)^{-1}}+[0,99.(1+0,015)^{-1}]^{4-3}$ $V_{3;PPU}$=0,98522167 En cada periodo se puede decir que la reserva global por título de VN=1 es 0,95596 (0,98522167 * 0,970299) y corresponde a la actualización al momento 3 del último sorteo y rescate final.	$V^*_{3;PPU}$ 97,03.10000.0,98522167 **$V^*_{3;PPU}$=955960**
4	l_4=. 0	$V_{0;PPU}=0$	**$V^*_{4;PPU}$=0**
		RESERVA MATEMATICA INDIVIDUAL PARA UN TITULO DE VN=1 después de realizado el sorteo del periodo k y antes del cobro de la prima periódica pura del periodo Los suscriptores pagan periódicamente PPP $V_{k;PPP}=V_{k;PPU}-PPP\frac{1-(p.v)^{n-k}}{1-p.v}$	
0	l_0 $l_{0=100}$	En el momento inicial –0- los compromisos de ambas partes son equivalentes pues el valor actual de los sorteos y rescate final que debe afrontar la compañía debe ser igual al valor actual de la PPP que paguen los suscriptores. Después de cobrar la prima única el valor actual es: $V_{0;PPP}=0,94303505-0,24465005\frac{1-\left[0,99(1+0,015)^{-1}\right]^4}{1-0,99.(1+0,015)^{-1}}$ $V_{0;PPP}$=0	
1	$l_1=l_0.p$ l_1= 100. (1-0,01) l_1=100 . 0,99 l_1=99	$V_{1;PPP}=0,95674805-0,24465005\frac{1-\left[0,99(1+0,015)^{-1}\right]^{4-1}}{1-0,99.(1+0,015)^{-1}}$ $V_{1;PPP}$=0,24072707	$V^*_{1;PPP}$ = =99.10000. 0,24072707 **$V^*_{1;PPU}$=238.320**
2	$l_2=l_0.p^2$. l_2=100.(1-0,01)^2 l_2=100 . 0,9801 l_2=98,01	$V_{2;PPP}=0,97080735-0,24465005\frac{1-\left[0,99(1+0,015)^{-1}\right]^{4-2}}{1-0,99.(1+0,015)^{-1}}$ $V_{2;PPP}$=0,48753311	$V^*_{2;PPP}$ = =98,01.10000. 0,48753311 **$V^*_{2;PPU}$=477.831**
3	$l_3=l_0.p^3$. l_3=100.(1-0,01)^3 l_3=100.0,9703 l_3= 97,03	$V_{3;PPP}=0,98522167-0,24465005\frac{1-\left[0,99(1+0,015)^{-1}\right]^{4-3}}{1-0,99.(1+0,015)^{-1}}$ $V_{3;PPP}$=0,74057162	$V^*_{3;PPP}$ = =97,0299.10000.0,74057162 **$V^*_{3;PPU}$=718576**
4	l_4=0	$V_{4;PPP}$=0	**$V^*_{4;PPP}$=0**

2. Operaciones aleatorias, con sorteo con probabilidad creciente (Ley de Moivre)

Recordemos que en este caso se sortean una cantidad constante de títulos cada vez y resolveremos un caso asumiendo que el rescate se realizará a fin de cada período y al finalizar el plazo se rescatan los títulos restantes.

Esquema de eliminación en el caso de Sorteo con probabilidad creciente

Periódicamente la compañía rescatará un número constante de títulos que denominamos r, por lo tanto la probabilidad de salir sorteado será mayor a medida que transcurre el tiempo, pues los casos posibles definidos como los títulos en circulación son menores a través del tiempo y los casos favorables son siempre los mismos —r—.

Es decir que la probabilidad de salir en el primer sorteo es menor que la probabilidad de salir en el segundo sorteo y así sucesivamente.

$\frac{r}{l_0} < \frac{r}{l_0 - r} < \frac{r}{l_0 - 2r}$ ... Por tal razón se le dice "probabilidad creciente".

k	Cant. de suscript. vigentes en el periodo k antes del sorteo	Sorteo del periodo k rescate del periodo n	Cant. de suscriptores vigente después del sorteo
1	l_0	$d_1 = r$	$l_1 = l_0 - r$
2	$l_0 - r$	$d_2 = r$	$l_2 = (l_0 - r) - r = (l_0 - 2r)$
3	$l_0 - 2r$	$d_3 = r$	$l_3 = (l_0 - 2r) - r = (l_0 - 3r)$
...	...	...	...
k	$l_0 - (k-1)r$	$d_k = r$	$l_k = l_0 - (k-1)r - r = l_0 - kr + r - r = (l_0 - kr)$
...	...	...	...
n	$l_0 - (n-1).r$	$d_n = r$	$l_n = l_0 - nr$
n	$l_0 - nr$	$r_n = l_0 - nr$	--------

Aplicación de una Operación de Capitalización con probabilidad creciente

Una compañía de capitalización ofrece 1000 títulos de VN=10.000 c/u. Dichos títulos serán reembolsados de la siguiente manera:

- El suscriptor de cada título debe abonar una prima al principio de cada mes durante 10 meses, pero cesando su obligación si el título sale sorteado.
- Tasa de interés: 1% anual.

Calcular:

a) El valor de cada prima periódica pura que deberá paga cada suscriptor para recibir un título de VN=$10.000.

b) Hacer el cuadro de amortización del título verificando las reservas a cada período k.

Eje de la operación

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2+976	Cant. de sorteos
1000	998	996	994	992	990	988	986	984	982	980	978	--------	Cant.de suscript
l_0	(l_0-r)	(l_0-2r)	(l_0-3r)	(l_0-4r)	(l_0-5r)	(l_0-6r)	(l_0-7r)	(l_0-8r)	(l_0-9r)				
													Compromisos de:
	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	$r+(l_0-r.n)$	- la cía emisora
PPM_1	PPM_2	PPM_3	PPM_4	PPM_5	PPM_6	PPM_7	PPM_8	PPM_9	PPM_{10}	----	------	-----	-el suscriptor
l_0	(l_0-r)	(l_0-2r)		(l_0-4r)	(l_0-5r)	(l_0-6r)	(l_0-7r)	(l_0-8r)	(l_0-9r)				*cant.de suscript que pagan PPM*

Si = $r = 2$ -cantidad de sorteos mensuales que realiza y paga la cía a fin de mes
$l_0 = 1000$
N = 10.000
$n = 12$ -plazo total de la operación
$p = 10$ - cantidad de PPM que cobra la cía a principios de mes-
976= 2+(1000-2*12)

Cálculo de la PPU

Tenemos que igualar el compromiso de los suscriptores (que consiste en el pago de la prima única que deben realizar al inicio los $l_0 = 1000$ suscriptores) con el compromiso de la emisora de los títulos que consiste en el pago de los títulos que sortea mensualmente r=2 y del rescate final.

$$l_0 .PPU = r\,v + r\,.v^2 + r\,v^3 + \ldots + r\,.v^{n-1} + [\,r + (l_0 - r.\,n)\,]\,v^n$$

$$l_0 .PPU = r\,[\,v + v^2 + v^3 + \ldots + v^{n-1} + v^n\,] + (l_0 - r.\,n)v^n$$

$$l_0 .PPU = r\;a(1;n;i) + (l_0 - r.\,n)v^n$$

$$\boxed{PPU = \frac{r\;a(1;n;i) + (l_0 - r.\,n)v^n}{l_0}}$$

$$PPU = \frac{2\;a(1;12;0{,}01) + (1000 - 2.\,12)\,(1+0{,}01)^{-12}}{1000}$$

$$PPU = \frac{22{,}51015495 + 866{,}150443}{1000}$$

$$PPU = 888{,}660598/1000$$

$$\boxed{PPU = 0{,}8886605988}$$

Cálculo de la Prima Periódica Mensual: PPM

El valor actual de la PPU debe ser igual al valor actual de todas las PPM que están obligados a pagar c/u de los suscriptores; sabiendo que inicialmente pagan l_0 suscriptores la prima PPM, al otro mes pagan $(l_0\text{-}r)$ suscriptores la prima PPM y así sucesivamente, pues pagarán los suscriptores vigentes, los que aún no han sido sorteados.

Si observamos el eje de evolución de la operación nos damos cuenta de que el valor actual de las primas periódicas mensuales adelantadas se calcula mediante el valor actual de la renta variable en progresión aritmética pues:

$$l_0 .PPU = l_0 .PPM + (l_0 - r).PPM\ v + (l_0 - 2r).PPM\ .v^2 + (l_0 - 3r).PPM\ v^3 + \ldots + [l_0 - (p-1)r].PPM\ .v^{p-1}$$

$$l_0 .PPU = PPM \{ l_0 + (l_0 - r)\ v + (l_0 - 2r)\ .v^2 + (l_0 - 3r)\ v^3 + \ldots + [l_0 - (p-1)r]\ .v^{p-1} \}$$

Resolvemos la suma de una progresión geométrica de p términos adelantados.

$$l_0 .PPU = PPM\ .[\ a(=,p;i)\ .(l_0 - r/i)\ \ -(-r)\ p/i\ \ (1+i)^{-(p-1)}]$$

Reemplazamos PPU por su fórmula de arriba y nos queda

$$\boxed{l_o.\frac{r.a(1;n;i)+(l_o-r.n).v^n}{l_0} = PPM\left[a(0;p;i).(l_0-\frac{r}{i})-\frac{(-r).p}{i}.(1+i)^{-(p-1)}\right]}$$

$$\boxed{PPM = \frac{r.a(1;n;i)+(l_o-r.n).v^n}{\left[a(0;p;i).(l_0-\frac{r}{i})-\frac{(-r).p}{i}.(1+i)^{-(p-1)}\right]}}$$

En nuestro ejemplo si r=-2 ; n=12 PPU= 0,8886605988 y p=10 el cálculo de la PPM es igual a:

$$\boxed{PPM = \frac{2.a(1;12;0,01)+(1000-2.12).(1+0,01)^{-12}}{\left[a(0;10;0,01).(1.000-\frac{2}{0,01})-\frac{(-2).10}{0,01}.(1+0,01)^{-(10-1)}\right]}}$$

PPM = 888,66 / 9481,50 =
PPM = 0,093725802

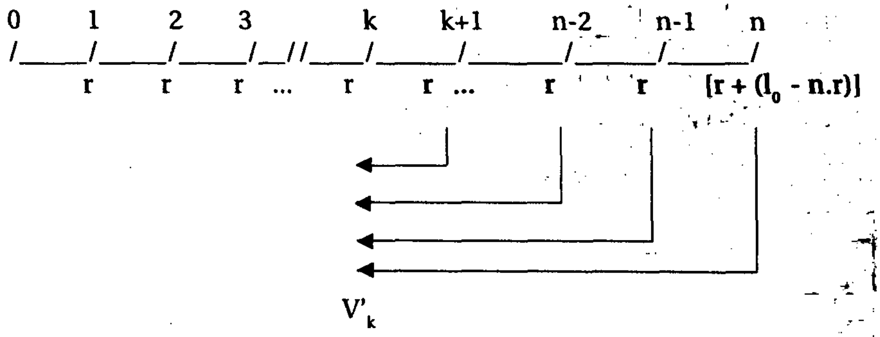
		CUADRO DE MARCHA CONSIDERANDO EL PAGO DE UNA UNICA PRIMA							
	Tit.en vigo	Ingresos	Res. Año ant	Rec.capitaliz	Tit reem	Imp.titreemb	Reserv.año s	tit. Res	Reserv.año s
0							0		
1	1000	8886606	0	8975472	2	20000	8955472	2	1
2	998		8955472	9045027	2	20000	9025027	4	2
3	996		9025027	9115277	2	20000	9095277	6	3
4	994		9095277	9186230	2	20000	9166230	8	4
5	992		9166230	9257892	2	20000	9237892	10	5
6	990		9237892	9330271	2	20000	9310271	12	6
7	988		9310271	9403374	2	20000	9383374	14	7
8	986		9383374	9477207	2	20000	9457207	16	8
9	984		9457207	9551780	2	20000	9531780	18	9
10	982		9531780	9627097	2	20000	9607097	20	10
11	980		9607097	9703168	2	20000	9683168	22	11
12	978		9683168	9780000	978	9780000	0	1000	12

	CUADRO DE MARCHA CONSIDERANDO EL PAGO DE PRIMAS PERIODICAS								
	Tit.en vigo	Ingresos	Res. Año ant	Rec.capitaliz	Tit reen	Imp.titreemb	Reserv.año s	tit. Resc	Reserv.año s
0							0		
1	1000	937258	0	946631	2	20000	926631	2	1
2	998	935383	926631	1880634	2	20000	1860634	4	2
3	996	933509	1860634	2822085	2	20000	2802085	6	3
4	994	931634	2802085	3771056	2	20000	3751056	8	4
5	992	929760	3751056	4727624	2	20000	4707624	10	5
6	990	927885	4707624	5691865	2	20000	5671865	12	6
7	988	926011	5671865	6663855	2	20000	6643855	14	7
8	986	924136	6643855	7643671	2	20000	7623671	16	8
9	984	922262	7623671	8631392	2	20000	8611392	18	9
10	982	920387	8611392	9627097	2	20000	9607097	20	10
11	980	0	9607097	9703168	2	20000	9683168	22	11
12	978	0	9683168	9780000	978	9780000	0	1000	12

Reserva Matemática de la compañía emisora considerando que los suscriptores abonan una prima pura única

Si calculamos la reserva que debe tener la compañía emisora en función al método prospectivo debemos actualizar al momento de valoración —k— el valor de los compromisos que debe afrontar la compañía, es decir los sorteos que debe hacer frente periódicamente y el rescate de los títulos no sorteados que deberá afrontar al final del plazo. En el caso de que los suscriptores se comprometen a pagar primas periódicas, habrá que netear de los compromisos de la compañía el valor actual al momento k de los compromisos que deberán afrontar los suscriptores.

El diagrama temporal del cálculo de la reserva es el siguiente:



De la actualización al momento k de valoración los (n-k) sorteos que la compañía se comprometió a realizar y el rescate final queda la fórmula:

$\boxed{V'_k = r \cdot a(1;n-k;i) + (l_0 - r \cdot n) \cdot (1+i)^{-(n-k)}}$ Reserva Matemática Global para que los suscriptores que quedan vigentes vayan recibiendo un título de VN=$1.

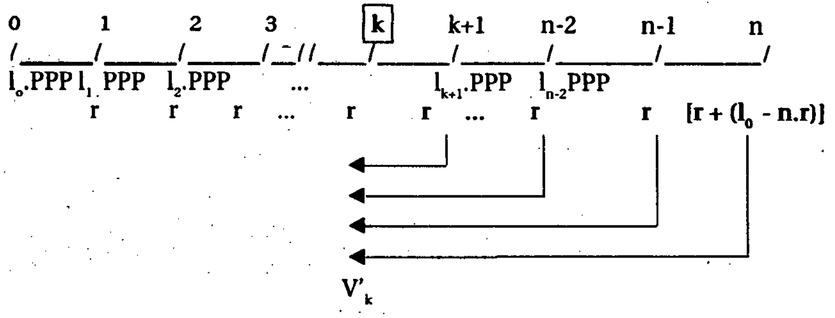
$\boxed{V'_k = N\,[\,r \cdot a(1;n-k;i) + (l_0 - r \cdot n) \cdot (1+i)^{-(n-k)}]}$ Reserva Matemática Global para que los suscriptores que queden vigentes vayan recibiendo un título de VN= N.

Los cálculos en cada momento k son los siguientes:

k		**Reserva Matemática del momento k Luego del rescate del momento k y antes de haber cobrado la prima del momento k**	
		para un título de VN =1	para el título de VN =10.000
0		Al inicio tenemos que los compromisos de ambas partes son equivalentes. Pues el grupo de suscriptores debe afrontar el pago adelantado de las PPU y la compañía periódicamente deberá rescatar según las condiciones del contrato los títulos por sorteos y el remanente al final del plazo Cálculo de la PPU: $PPU=2.a(1;12;0{,}01)+(1000-2.12).(1+0{,}01)^{-12}$ PPU= 888,6606	 PPU= 888,6606 .10000 PPU= 8.886.606
1		$V'_1= 2.a(1;11;0{,}01) + (1000-2.12).(1+0{,}01)^{-11}$ V'_1= 895,5472	V'_1= 895,5472 .10000 V'_1= 8.955.472
2		$V'_2= 2.a(1;10;0{,}01) + (1000-2.12).(1+0{,}01)^{-10}$ V'_2= 902,5027	V'_2= 902,5027 .10000 V'_2= 9.025.027
3		$V'_3= 2.a(1;9;0{,}01) + (1000-2.12).(1+0{,}01)^{-9}$ V'_3= 909,5277	V'_3= 909,5277.10000 V'_3= 9.095.277
4		$V'_4= 2.a(1;8;0{,}01) + (1000-2.12).(1+0{,}01)^{-8}$ V'_4= 916,6230	V'_4= 916,6230 .10000 V'_4= 9.166.230
5		$V'_5= 2.a(1;7;0{,}01) + (1000-2.12).(1+0{,}01)^{-7}$ V'_5= 923,7892	V'_5= 923,7892 .10000 V'_5= 9.237.892
6		$V'_6= 2.a(1;6;0{,}01) + (1000-2.12).(1+0{,}01)^{-6}$ V'_6= 931,0271	V'_6= 931,0271.10000 V'_6= 9.310.271
7		$V'_7= 2.a(1;5;0{,}01) + (1000-2.12).(1+0{,}01)^{-5}$ V'_7= 938,3374	V'_7= 938,3374 .10000 V'_7= 9.383.374
8		$V'_8= 2.a(1;4;0{,}01) + (100 -2.12).(1+0{,}01)^{-4}$ V'_8= 945,7207	V'_8= 945,7207 .10.000 V'_8= 9.457.207
9		$V'_9= 2.a(1;3;0{,}01) + (100 -2.12).(1+0{,}01)^{-3}$ V'_9= 953,1780	V'_9= 953,1780 . 10000 V'_9= 9.531.780
10		$V'_{10}= 2.a(1;2;0{,}01) + (100 -2.12).(1+0{,}01)^{-2}$ V'_{10} =960,7097	V'_{10} =960,7097 . 10000 V'_{10} =9607.097
11		$V'_{11}= 2.a(1;1;0{,}01) + (100 -2.12).(1+0{,}01)^{-1}$ V'_{11}=968,3168	V'_{11}=968,3168 .10000 V'_{11}=9.683.168
12		V'_{12}= 0	V'_{12}= 0

Reserva Matemática de la compañía emisora considerando que los suscriptores abonan m primas periódicas puras.

El diagrama temporal del cálculo de la reserva es el siguiente:



La cantidad de primas periódicas que se convienen —p— puede ser diferente del plazo de la operación, como lo es en este caso.

k	RESERVA MATEMÁTICA	
	Para un título de VN =1	título de VN =10.000
0	Antes de que se inicien los cobros de PPP adelantadas verificamos que los compromisos de la compañía -CC- son equivalentes a la de los suscriptores-CS- CC=> 2.a(1;12;0,01) + (1000–2.12).$(1+0,01)^{-12}$ =888.6606 CS=>0,093725802 [1000+998$(1+0,01)^{-1}$+996$(1+0,01)^{-2}$ +994$(1+0,01)^{-3}$+992$(1+0,01)^{-4}$+990$(1+0,01)^{-5}$+ 988$(1+0,01)^{-6}$ +986$(1+0,01)^{-7}$ +984.$(1+0,01)^{-8}$ +982$(1+0,01)^{-9}$] Resolvemos esta progresión geométrica y queda: CS=>VA(0;10;0,01)=0,093725802 { 1000 a(0;10;0,01)- $\frac{2}{0,01}\left[a(0;10;0,01)-10.(1+0,01)^{-9}\right]$} CS= 888,6606	
1	CC=>2.a(1;11;0,01) + (1000–2.12).$(1+0,01)^{-11}$ =895,5472 CS=>0,093725802 [998+996$(1+0,01)^{-1}$+994$(1+0,01)^{-2}$+992$(1+0,01)^{-3}$+ +990$(1+0,01)^{-4}$+ 988$(1+0,01)^{-5}$+986$(1+0,01)^{-6}$ +984.$(1+0,01)^{-7}$ +982$(1+0,01)^{-8}$] si resolvemos la progresión: CS=>VA(0;9;0,01)=0,093725802 {(1000-2).a(0;9;0,01)- $\frac{2}{0,01}\left[a(0;9;0,01)-9.(1+0,01)^{-8}\right]$} CS=802,8841 V'$_1$= 895,5472 -802,8841=92,6631	V'$_1$= 92,6631 .10000 V'$_1$= 926.631
2	CC=> 2.a(1;10;0,01) + (1000–2.12).$(1+0,01)^{-10}$ =902,5027 CS=>0,093725802[996+994$(1+0,01)^{-1}$+992$(1+0,01)^{-2}$+990$(1+0,01)^{-3}$+ 988$(1+0,01)^{-4}$+986$(1+0,01)^{-5}$ +984.$(1+0,01)^{-6}$ +982$(1+0,01)^{-7}$] CS=>VA(0;8;0,01)=0,093725802 {(1000-2.2) a(0;8;0,01)- $\frac{2}{0,01}\left[a(0;8;0,01)-8.(1+0,01)^{-7}\right]$} = 716,4393 V'$_2$= 902,5027 – 716,4393=186,0634	V'$_2$= 186,0634 .10000 V'$_2$= 1.860.634
3	CC=>2.a(1;9;0,01) + (1000–2.12).$(1+0,01)^{-9}$=909,5277 CS=>-0,093725802[994+992$(1+0,01)^{-1}$+990$(1+0,01)^{-2}$+ 988$(1+0,01)^{-3}$ +986$(1+0,01)^{-4}$ +984.$(1+0,01)^{-5}$ +982$(1+0,01)^{-6}$] CS=>VA(0;7;0,01)=0,093725802 {(1000-3.2). a(0;7;0,01)- $\frac{2}{0,01}\left[a(0;7;0,01)-7.(1+0,01)^{-6}\right]$} = 629,3192 V'$_3$= 909,5277-629,3192=280,2085	V'$_3$= 280,2085.10000 V'$_3$= 2.802.085
4	CC=> 2.a(1;8;0,01) + (1000–2.12).$(1+0,01)^{-8}$=916,6230 CS=>0,093725802[992+990$(1+0,01)^{-1}$+ 988$(1+0,01)^{-2}$+986$(1+0,01)^{-3}$ +984.$(1+0,01)^{-4}$ +982$(1+0,01)^{-5}$] resolviendo la progresión CS=>VA(0;6;0,01)=0,093725802 {(1000-4.2). a(0;6;0,01)- $\frac{2}{0,01}\left[a(0;6;0,01)-6.(1+0,01)^{-5}\right]$} = 541,5174 V'$_4$= 916,6230-541,5174=375,1056	V'$_4$= 375,1056 .10000. V'$_4$= 3.751.056
5	CC=> 2.a(1;7;0,01) + (1000–2.12).$(1+0,01)^{-7}$ =923,7892 CS=>0,093725802[990 + 988$(1+0,01)^{-1}$+986$(1+0,01)^{-2}$+984.$(1+0,01)^{-3}$ +982$(1+0,01)^{-4}$] CS=>VA(0;5;0,01)=0,093725802 {(1000-5.2). a(0;5;0,01)- $\frac{2}{0,01}\left[a(0;5;0,01)-5.(1+0,01)^{-4}\right]$} = 453,0268 V'$_5$= 923,7892-453,0268=470,7624	V'$_5$= 470,7624 .10000 V'$_5$= 4.707.624
6	CC=> 2.a(1;6;0,01) + (1000–2.12).$(1+0,01)^{-6}$ =931,0271 CS=>0,093725802[988+986$(1+0,01)^{-1}$+984.$(1+0,01)^{-2}$ +982$(1+0,01)^{-3}$] resolvemos CS=>VA(0;4;0,01)=0,093725802 {(1000-6.2). a(0;4;0,01)- $\frac{2}{0,01}\left[a(0;4;0,01)-4.(1+0,01)^{-3}\right]$} = 363,8406 V'$_6$= 931,0271-363,8406=567,1865	V'$_6$= 567,1865.10000 V'$_6$= 5.671.865
7	CC=> 2.a(1;5;0,01) + (1000–2.12).$(1+0,01)^{-5}$=938.3374 CS=>0,093725802[986+984.$(1+0,01)^{-1}$+982$(1+0,01)^{-2}$] resolvemos CS=>VA(0;3;0,01)=0,093725802 {(1000-7.2). a(0;3;0,01)- $\frac{2}{0,01}\left[a(0;3;0,01)-3.(1+0,01)^{-2}\right]$} = 273,9519 V'$_7$= 938,3374 –273,9519=664,3855	V'$_7$= 664,3855 .10000 V'$_7$= 6.643.855
8	CC=>2.a(1;4;0,01) + (100 –2.12).$(1+0,01)^{-4}$= 945,7207 CS=>0,093725802.984+0,093725802.982.$(1+0,01)^{-1}$ CS=>VA(0;2;0,01)=0,093725802 {(1000-8.2). a(0;2;0,01)- $\frac{2}{0,01}\left[a(0;2;0,01)-2.(1+0,01)^{-1}\right]$} = 183,3537 V'$_8$= 945,7207 –183,3537= V'$_8$ = 762,367	V'$_8$= 762,367 .10.000 V'$_8$= 7.623.671
9	CC=>2.a(1;3;0,01) + (100 –2.12).$(1+0,01)^{-3}$ =953,1780 CS=> 0,093725802.(1000-9.2) V'$_9$= 953,1780 –92,0387= V'$_9$= 861,1392	V'$_9$= 10000. 861,1392 V'$_9$= 8.611.392
10	CC=>2.a(1;2;0,01) + (100 –2.12).$(1+0,01)^{-2}$=960,7097 Cs=>0 V'$_{10}$ =960,7097	V'$_{10}$ =960,7097 . 10000 V'$_{10}$ =9.607.097
11	CC=>2.a(1;1;0,01) + (100 –2.12).$(1+0,01)^{-1}$=968,3168 Cs=>0 V'$_{11}$=968,3168	V'$_{11}$=968,3168 .10000 V'$_{11}$=9.683.168
12	V'$_{12}$= 0	V'$_{12}$= 0

RESUMEN DE FÓRMULAS PRINCIPALES

RÉGIMEN DE CAPITALIZACIÓN A INTERÉS SIMPLE	
Monto	$C_n = C_0 (1 + i\, n)$
Intereses	$I(0;n) = C_o . i . n$
Tasa de Interés	$i = \dfrac{\left[\dfrac{C_n}{C_0} - 1\right]}{n} = \dfrac{C_n - C_0}{C_0 . n}$
Plazo	$n = \dfrac{\left[\dfrac{C_n}{C_0} - 1\right]}{i} = \dfrac{C_n - C_0}{C_0 . i}$
RÉGIMEN DE CAPITALIZACIÓN A INTERÉS COMPUESTO	
Monto	$C_n = C_0 [(1 + i)^n$
Intereses	$I(0;n) = C_0 [(1 + i)^n - 1]$
Tasa de Interés	$i = \left(\dfrac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$
Plazo	$n = \dfrac{\log C_n - \log C_o}{\log(1+i)}$
RÉGIMEN DE ACTUALIZACIÓN A INTERÉS SIMPLE	
Descuento Comercial	
Valor Actual	$V_n = N (1 - i\, n)$ $V_n = N (1 - d\, n)$
Descuento	$D(0;n) = N . i . n$ $D(0;n) = N . d . n$
Tasa de interés/descuento	$i = \dfrac{N - V}{N . n}$ $d = \dfrac{N - V}{N . n}$
Plazo	$n = \dfrac{N - V}{N . i}$ $n = \dfrac{N - V}{N . d}$
Descuento Racional	
Valor Actual	$V_n = \dfrac{N}{(1 + i . n)}$
Descuento	$D(0;n) = V_n . i . n$
Tasa de interés/descuento	$i = \dfrac{\dfrac{N}{V_n} - 1}{n} = \dfrac{N - V_n}{V_n . n}$
Plazo	$n = \dfrac{\dfrac{N}{V_n} - 1}{i} = \dfrac{N - V_n}{V_n . i}$

RÉGIMEN DE ACTUALIZACIÓN A INTERÉS COMPUESTO		
Valor Actual	$V_n = \frac{N}{(1+i)^n}$	$V_n = N(1-d)^n$
Descuento	$D(0;n) = N.\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]$	$D(0;n) = N[1-(1-d)^n]$
Tasa de interés/descuento	$i = \left(\frac{N}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$	$d = 1 - \left(\frac{N}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}}$
Plazo	$n = \frac{\log N - \log V_n}{\log(1+i)}$	$n = \frac{\log V_n - \log N}{\log(1-d)}$
Relaciones de equivalencia entre factores de capitalización discreta	$(1+i_{365}) = \left(1 + \frac{j_{\left(\frac{365}{m}\right)}.m}{365}\right)^{\frac{365}{m}} = (1+i_m)^{\frac{365}{m}}$	
TEA= f (TNA$_{365/m}$)	$i_{365} = \left(1 + \frac{j_{\left(\frac{365}{m}\right)}.m}{365}\right)^{\frac{365}{m}} - 1$	
TEA= f (i$_m$)	$i_{365} = (1+i_m)^{\frac{365}{m}} - 1$	
TNA= f (TEA)	$j_{\left(\frac{365}{m}\right)} = \left[(1+i_{365})^{\frac{m}{365}} - 1\right] \cdot \frac{365}{m}$	
TNA= f (i$_m$)	$j_{\left(\frac{365}{m}\right)} = \frac{i_m.365}{m}$	
i$_m$ = f (TEA)	$i_m = (1+i_{365})^{\frac{m}{365}} - 1$	
i$_m$ = f (TNA)	$i_m = \frac{j_{\left(\frac{365}{m}\right)}.m}{365}$	
Relaciones de equivalencia entre factores de actualización discreta	$(1-d_{365}) = \left(1 - \frac{f_{\left(\frac{365}{m}\right)}.m}{365}\right)^{\frac{365}{m}} = (1-d_m)^{\frac{365}{m}}$	
TEA= f (TNA$_{365/m}$)	$d_{365} = 1 - \left(1 - \frac{f_{\left(\frac{365}{m}\right)}.m}{365}\right)^{\frac{365}{m}}$	
TEA= f (d$_m$)	$d_{365} = 1 - (1-d_m)^{\frac{365}{m}}$	
TNA= f (TEA)	$f_{\left(\frac{365}{m}\right)} = \left[1 - (1-d_{365})^{\frac{m}{365}}\right] \cdot \frac{365}{m}$	
TNA= f (d$_m$)	$f_{\left(\frac{365}{m}\right)} = \frac{d_m.365}{m}$	
d$_m$ = f (TEA)	$d_m = 1 - (1-d_{365})^{\frac{m}{365}}$	
d$_m$ = f (TNA)	$d_m = \frac{f_{\left(\frac{365}{m}\right)}.m}{365}$	

Relaciones de equivalencia -Factores de capitalización-	$(1+i_{365})=\left(1+\frac{j_{\left(\frac{365}{m}\right)}.m}{365}\right)^{\frac{365}{m}}=(1+i_m)^{\frac{365}{m}}=(1-d_{365})^{-1}=\left(1-\frac{f_{\left(\frac{365}{m}\right)}.m}{365}\right)^{-\frac{365}{m}}=(1-d_m)^{-\frac{365}{m}}$
Relaciones de equivalencia -Factores de actualización-	$(1+i_{365})^{-1}=\left(1+\frac{j_{\left(\frac{365}{m}\right)}.m}{365}\right)^{-\frac{365}{m}}=(1+i_m)^{-\frac{365}{m}}=(1-d_{365})=\left(1-\frac{f_{\left(\frac{365}{m}\right)}.m}{365}\right)^{\frac{365}{m}}=(1-d_m)^{\frac{365}{m}}$
Tasa real de interés	$r=\frac{(1+i)}{(1+\varphi)}-1$

Monto de un capital ajustado e intereses simples ajustados	$C_n=C_o\prod_{j=1}^{n}(1+\varphi_j)+C_o.i.\sum_{j=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(1+\varphi_j)$
Monto de un capital e intereses ajustados	$C_n=C_o\prod_{j=1}^{n}(1+\varphi_j)(1+i)^n$

RENTAS TEMPORARIAS CONSTANTES	
Valor Actual de n cuotas vencidas	$VA(1;n;i)=c.a(1;n;i)=c\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n.i}$
Valor Actual de n cuotas adelantadas	$VA(0;n;i)=c.a(0;n;i)=c.(1+i).\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n.i}$
Valor Actual de n cuotas vencidas, con 1° cuota en el momento (t+1)	$VA(t+1;n;i)=(1+i)^{-t}.\{c.a(1;n;i)\}=(1+i)^{-t}.\left\{c\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n.i}\right\}$
Valor Actual de n cuotas vencidas, con 1° cuota en el momento t	$VA(t;n;i)=(1+i)^{-t}.\{c.a(0;n;i)\}=(1+i)^{-t}.\left\{c.(1+i).\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n.i}\right\}$
Valor Final de n cuotas valuado en el momento de la última cuota	$VF(1;n;i)=c.s(1;n;i)=c\frac{(1+i)^n-1}{i}$
Valor Final de n cuotas valuado un período después de la última cuota	$VF(0;n;i)=c.s(0;n;i)=c.(1+i).\frac{(1+i)^n-1}{i}$

RENTAS TEMPORARIAS VARIABLES EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA	
Valor Actual de n cuotas vencidas	$VA(1;n;i;r)=c.a(1;n;i)+\frac{r}{i}\left[a(1;n;i)-\frac{n}{(1+i)^n}\right]$
Valor Actual de n cuotas adelantadas	$VA(0;n;i;r)=c.a(0;n;i)+\frac{r}{i}\left[a(0;n;i)-\frac{n}{(1+i)^{n-1}}\right]$
Valor Actual de n cuotas vencidas, con 1° cuota en el momento (t+1)	$VA(t+1;n;i;r)=(1+i)^{-t}\left\{c.a(1;n;i)+\frac{r}{i}\left[a(1;n;i)-\frac{n}{(1+i)^n}\right]\right\}$
Valor Actual de n cuotas vencidas, con 1° cuota en el momento t	$VA(t;n;i;r)=(1+i)^{-t}\left\{c.a(0;n;i)+\frac{r}{i}\left[a(0;n;i)-\frac{n}{(1+i)^{n-1}}\right]\right\}$
Valor Final de n cuotas valuado en el momento de la última cuota	$VF(1;n;i;r)=c.s(1;n;i)+\frac{r}{i}[s(1;n;i)-n]$
Valor Final de n cuotas valuado un período después de la última cuota	$VF(0;n;i;r)=c.s(0;n;i)+\frac{r}{i}[s(0;n;i)-n.(1+i)]$

RENTAS TEMPORARIAS VARIABLES EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA	
Valor Actual de n cuotas vencidas	$VA(1;n;i;q)=c.\dfrac{\left(\dfrac{1+q}{1+i}\right)^{n}-1}{q-i}$ VA(1;n;i;q=i)= c.v.n
Valor Actual de n cuotas adelantadas	$VA(0;n;i;q)=c.(1+i).\dfrac{\left(\dfrac{1+q}{1+i}\right)^{n}-1}{q-i}$ VA(0;n;i;q=i)= c.n
Valor Actual de n cuotas vencidas, con 1° cuota en el momento (t+1)	$VA(t+1;n;i;q)=(1+i)^{-t}.c.\dfrac{\left(\dfrac{1+q}{1+i}\right)^{n}-1}{q-i}$ VA(t+1;n;i;q=i)= $(1+i)^{-(t-1)}$. c.n
Valor Actual de n cuotas vencidas, con 1° cuota en el momento t	$VA(t;n;i;q)=(1+i)^{-t}.c.(1+i).\dfrac{\left(\dfrac{1+q}{1+i}\right)^{n}-1}{q-i}$ VA(t;n;i;q=i)= $(1+i)^{-t}$. c.n
Valor Final de n cuotas valuado en el momento de la última cuota	$VF(1;n;i;q)=c.\dfrac{(1+q)^{n}-(1+i)^{n}}{q-i}$
Valor Final de n cuotas valuado un período después de la última cuota	$VF(0;n;i;q)=c.(1+i).\dfrac{(1+q)^{n}-(1+i)^{n}}{q-i}$
RENTAS PERPETUAS CONSTANTES	
Valor Actual de infinitas cuotas vencidas	$VA(1;\infty;i)=c.\dfrac{1}{i}$
Valor Actual de infinitas cuotas adelantadas	$VA(0;\infty;i)=c.\dfrac{1}{d}=c.\dfrac{1}{i}.(1+i)$
Valor Actual de infinitas cuotas vencidas, 1° cuota en mom. (t+1)	$VA(t+1;\infty;i)=c.(1+i)^{-t}.\dfrac{1}{i}$
Valor Actual de infinitas cuotas adelantadas. 1° cuota en mom. t	$VA(t;\infty;i)=c.(1+i)^{-t}.\dfrac{1}{d}=c.\dfrac{1}{i}.(1+i)^{-(t-1)}$
RENTAS PERPETUAS VARIABLES EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA	
Valor Actual de infinitas cuotas vencidas	$VA(1;n;i,r)=\dfrac{1}{i}.\left(c+\dfrac{r}{i}\right)$
Valor Actual de infinitas cuotas adelantadas	$VA(0;n;i,r)=\dfrac{1}{d}.\left(c+\dfrac{r}{i}\right)=\dfrac{1}{i}.(1+i).\left(c+\dfrac{r}{i}\right)$
Valor Actual de infinitas cuotas vencidas, 1° cuota en mom. (t+1)	$VA(t+1;n;i,r)=1+i)^{-t}.\dfrac{1}{i}.\left(c+\dfrac{r}{i}\right)$
Valor Actual de infinitas cuotas adelantadas. 1° cuota en mom. t	$VA(t;n;i,r)=\dfrac{1}{i}.(1+i)^{-(t+1)}.\left(c+\dfrac{r}{i}\right)$
RENTAS PERPETUAS VARIABLES EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA	
Valor Actual de infinitas cuotas vencidas	$VA(1;n;i;q)=\dfrac{c}{i-q}$
Valor Actual de infinitas cuotas adelantadas	$VA(0;n;i;q)=\dfrac{c}{i-q}.(1+i)$
Valor Actual de infinitas cuotas vencidas, 1° cuota en mom. (t+1)	$VA(t+1;n;i;q)=(1+i)^{-t}\dfrac{c}{i-q}$
Valor Actual de infinitas cuotas adelantadas. 1° cuota en mom. t	$VA(t;n;i;q)=(1+i)^{-(t-1)}.\dfrac{c}{i-q}$

REEMBOLSO DE PRÉSTAMOS

Sistemas	V(p)	I(p)	t(p)	c(p)	T(p)
Francés	$V_p = V'_{p-1}$	$I_p = V_p \cdot I$	$t_1 = V_0 \cdot s^{-1}(1;n;i)$ $t_p = t_1 \cdot (1+i)^{p-1}$	$c = V_0 \cdot a^{-1}_{(1;n;i)}$	$T_p = t_1 \cdot s_{(1;p;i)}$
Alemán	$V_p = V'_{p-1}$	$I_p = V_p \cdot i$	$t = \frac{V_0}{n}$	$c_p = V_0 \cdot \left(\frac{1}{n} + i\right) - (p-1)\frac{V_0}{n} i$	$T_p = \frac{V_0}{n} \cdot p$
Alemán Promedio	$V_p = V'_{p-1}$	$I = V_0 . i \frac{(n+1)}{2n}$	$t = \frac{V_0}{n}$	$c = V_0 \cdot \left(\frac{1}{n} + i \frac{(n+1)}{2.n}\right)$	$T_p = \frac{V_0}{n} \cdot p$
Directo	$V_p = V'_{p-1}$	$I = V_0 \cdot i$	$t = \frac{V_0}{n}$	$c = V_0 \cdot \left(\frac{1}{n} + i\right)$	$T_p = \frac{V_0}{n} \cdot p$
Americano	V_0	$I = V_0 \cdot i_a$		$C(i) = V_0 \cdot i_a$ $c(f) = V_0 \cdot s^{-1}(1;n;i_p)$	El préstamo no amortiza hasta su vencimiento

Sistemas	Saldo de Deuda V'_p	Intereses Totales
Francés	$V'_p = V_0 \left[1 - \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}\right]$ $V'_p = c \cdot a(1;n-p;i)$	$\sum_{j=1}^{n} I_p = c.n - V_0$
Alemán	$V'_p = V_0 \frac{n-p}{n}$	$\sum_{j=1}^{n} I_p = \sum_{j=1}^{n} c_j - V_0 = V_0 . i . \frac{(n+1)}{2}$
Alemán Promedio	$V'_p = V_0 \frac{n-p}{n}$	$\sum_{j=1}^{n} I_p = \sum_{j=1}^{n} c_j - V_0 = V_0 . i . \frac{(n+1)}{2}$
Directo	$V'_p = V_0 \frac{n-p}{n}$	$\sum_{j=1}^{n} I_p = c.n - V_0 = V_0 . i . n$
Americano	$V'_p = V_0$ Si consideramos el Desembolso Neto:DN $DN = V_0 - F_p$ siendo $F_p = c_f \cdot s(1;p,i)$	$\sum_{j=1}^{n} I_{p-pagados} = V_0 . i . n$ $\sum_{j=1}^{n} I_{p-cobrados} = V_0 - c_{(f)} . s(1;p;i_p)$

SISTEMA DE PRÉSTAMO AJUSTABLE

$V^{\#}(p)$	$I^{\#}(p)$	$t^{\#}(p)$	$c^{\#}(p)$	$T^{\#}(p)$	$V^{\#}(p)$
$V_p^{\#}$	$I_p = V_p \cdot I$	$t_1^{\#} = t_1 \cdot \frac{I_1}{I_0}$. $t_p^{\#} = t_p \cdot \frac{I_p}{I_0}$	$c_p^{\#} = c_p \cdot \frac{I_p}{I_0}$	$T_p^{\#} = T_p \cdot \frac{I_p}{I_0}$	$V_p^{\#} = V_0 \cdot \frac{I_p}{I_0} - T_p \cdot \frac{I_p}{I_0}$

EVALUACIÓN DE PROYECTOS SIMPLES		
	De Inversión	De Financiación
Ecuación para determinar la T.I.R	$-c_0 + \sum_{K=1}^{n} \frac{c_k}{(1+TIR)^K} = 0$	$c_0 - \sum_{K=1}^{n} \frac{c_k}{(1+TIR)^K} = 0$
Ecuación para determinar el V.AN	$VAN = -c_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(1+i)^k} = 0$	$VAN = c_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(1+i)^k} = 0$

DEPRECIACIONES			
	Depreciación Periódica	Depreciación Acumulada	Valor Contable
• Lineal	$d_p = \frac{C-VR}{n}$	$D_p = p.\frac{C-VR}{n}$	$VC_p = C - p.\frac{C-VR}{n}$
• Acelerado o de la suma de dígitos	$d_p = (C-VR).\frac{(n-p+1)}{\frac{n+n^2}{2}}$	$D_p = (C-VR).p.\frac{(2n-p+1)}{n+n^2}$	$VC_p = C - \left[(C-VR).p.\frac{(2n-p+1)}{n+n^2}\right]$
• Suma de Dígitos Invertido	$d_p = (C-VR).\frac{p}{\frac{n+n^2}{2}}$	$D_p = ((C-VR).p.\frac{(p+1)}{n+n^2}$	$VC_p = C - \left[(C-VR).p.\frac{(p+1)}{n+n^2}\right]$
• Porcentaje constante	$d_p = VC_{p-1}.\beta$ $\beta = 1 - \left(\frac{VR}{C}\right)^{\frac{1}{n}}$	$D_p = C\left[1-(1-\beta)^p\right]$	$VC_p = C.(1-\beta)^p$
• Fondo de amortización	$d_p = (C-VR).s^{-1}(1;n;i).(1+i)^{p-1}$	$D_p = (C-VR).\frac{(1+i)^p-1}{(1+i)^n-1}$	$VC_p = C-(C-VR).\frac{(1+i)^p-1}{(1+i)^n-1}$

A- SEGUROS SOBRE LA VIDA EN CASO DE SOBREVIVENCIA	Prima Pura Unica
• Seguro de Capital diferido de Capital Unico	$PPU = C.E(x;n) = C.v^n.p(x;n) = C.\frac{D(x+n)}{D(x)}$
• Renta Vitalicia Completa Inmediata	$PPU = c.a(x;0;w-x) = c.\frac{N(x)}{D(x)}$
• Renta Vitalicia Completa Diferida 1 período	$PPU = c.a(x;1;w-x) = c.\frac{N(x+1)}{D(x)}$
• Renta Vitalicia Completa Diferida t períodos	$PPU = c.a(x;t;w-x-t) = c.\frac{N(x+t)}{D(x)}$
• Renta Vitalicia Temporaria Inmediata	$PPU = c.a(x;0;n) = c.\frac{N(x)-N(x+n)}{D(x)}$
• Renta Vitalicia Temporaria Diferida 1 período	$PPU = c.a(x;1;n) = c.\frac{N(x+1)-N(x+n+1)}{D(x)}$
• RentasVitalicia Temporaria Diferida t períodos	$PPU = c.a(x;t;n) = c.\frac{N(x+t)-N(x+t+n)}{D(x)}$

B -SEGURO SOBRE LA VIDA EN CASO DE MUERTE			
Tipo de Seguro	*Riesgo que cubre*	*Prima Pura Unica*	*Prima Pura Periódica*
• *Vida Entera* II	*Inmediato*	$PPU = C.A(x;0;w-x)$ $PPU = C.\frac{M(x)}{D(x)}$	$PPP = C\frac{M(x)}{N(x)}$
IV	*Diferido*	$PPU = C.A(x;t;w-x-t)$ $PPU = C.\frac{M(x+t)}{D(x)}$	$PPP = C\frac{M(x+t)}{N(x)-N(x+m)}$
• *Temporal a n años* III	*Inmediato*	$PPU = C.\ A(x;0;n)$ $PPU = C.\frac{M(x)-M(x+n)}{D(x)}$	$PPP = C\frac{M(x)-M(x+n)}{N(x)-N(x+n)}$
V	*Diferido*	$PPU = C\ .A(x;t;n)$ $PPU = C.\frac{M(x+t)-M(x+t+n)}{D(x)}$	$PPP = C.\frac{M(x+t)-M(x+t+n)}{N(x)-N(x+m)}$

C -SEGURO SOBRE LA VIDA MIXTO: EN CASO DE VIDA Y DE MUERTE		
	PPU= C E(x;n) + C.A(x;0;n)	
• ***Dotal o Mixto***	$PPU = C.\frac{D(x+n)+M(x)-M(x+n)}{D(x)}$	$PPP = C.\frac{D(x+n)+M(x)-M(x+n)}{N(x)-N(x+n)}$
	$V_p = C\left\{\left[\frac{M_{(x+p)} - M_{[(x+n)]} + D_{[(x+n)]}}{D_{(x+p)}}\right] - \left[\frac{D_{(x+n)} + M_{(x)} - M_{(x+n)}}{N_{(x)} - N_{(x+n)}} \cdot \frac{N_{(x+p)} - M_{(x+n)}}{D_{(x+p)}}\right]\right\}$	

OPERACIONES DE CAPITALIZACIÓN PURA

Compromiso Individual (de cada suscriptor) para recibir un título de valor nominal=N mediante:		
	Una PPU	Sucesión de PPP durante el plazo total del contrato
• **Prima Pura Unica/Periódica**	PPU $=N.v^n$	PPP$=N.s^{-1}(0;n;i)$
• **Reserva Matemática**	$V_k = N \, . \, v^{n-k}$	$V_k = N.\frac{v^{n-k} - v^n}{1 - v^n}$

OPERACIONES ALEATORIAS DE CAPITALIZACIÓN

Compromiso Individual (de cada suscriptor) para recibir un título de valor nominal=N mediante:		
	Una PPU	Sucesión de PPP durante • el plazo total: n • un plazo limitado: p del contrato
• **Sorteos con Probabilidad constante**	$PPU = N.\left[q.v.\frac{1-(p.v)^n}{1-p.v} + p^n.v^n\right]$	$PPP = \frac{PPU}{\frac{1-(p.v)^n}{1-p.v}}$
• **Sorteos con Probabilidad creciente**	$PPU = N.\left[\frac{r.a(1;n;i) + (l_0 - r.n).v^n}{l_0}\right]$	$PPP = N.\frac{r.a(1;n;i) + (l_0 - r.n).v^n}{a(0;p;i).(l_0 - \frac{r}{i}) - \frac{(-r).p}{i} v^{p-1}}$
Reserva Matemática Individual para recibir un título de VN=N		
• **Sorteos con Probabilidad constante**	$V_{k;PPU} = N.\left[q.v.\frac{1-(p.v.)^{n-k}}{1-pv} + (p.v)^{n-k}\right]$	$V_{k;PPP} = V_{k;PPU} - PPP.\frac{1-(p.v.)^{n-k}}{1-pv}$
• **Sorteos con Probabilidad creciente**	$V_{k;PPU} = N.\left[r.a(1;n-k;i) + (l_0 - r.n).v^{n-k}\right]$	

Bibliografía

- MURIONI, Oscar y TROSSERO, Angel, *Tratado de Cálculo Financiero.* Editorial Tesis. Buenos Aires. 1981.
- MURIONI, Oscar y TROSSERO, Angel. *Manual de Cálculo Financiero.* Editorial Macchi. Buenos Aires. 1993.
- GONZALEZ GALE, José. *Matemáticas financieras, intereses y anualidades ciertas* y *Elementos de Cálculo actuarial.* Ed. Macchi. Bs. As.
- PAGLIANO, Alberto Carlos. *Teoría Elemental del Seguro de vida.* Revista Jurídica Argentina del Seguro, la Empresa y la Responsabilidad N° 7 y 8. Año II. 1985.
- PAGLIANO, Alberto Carlos. *Técnicas actuariales de los seguros sobre la vida para no especialistas.* Ediciones Macchi. Junio 2001.
- ROCA, Raúl José. *Matemática financiera I y II.* Buenos Aires. Ed. Coloquio. 1975.
- DE PABLO, Juan Carlos. *Tasa directa y tasa real de interés.* Revista Administracion de empresas. Tomo II, ps. 403 a 412.
- CISSELL, Robert y CISSELL, Helen. *Matemáticas financieras.* México. Editorial CESCA. 1978.
- LINCOYAN PORTUS GOVINDEN. *Matemáticas Financieras.* Mc. Graw Hill. 1995.
- FORNES RUBIO, Francisco. *Curso de algebra financiera.* Barcelona. Editorial Bosch. 1950.
- GIL PELAEZ, Lorenzo. *Matemática de las Operaciones financieras.* Madrid, Editorial AC. 1987.
- LEVI, Eugenio, *Curso de Matemática Financiera y Actuarial.* Barcelona. Editorial Bosch. 1973.
- BREALEY, Richard A., MEYER,Stewart C. *Fundamentos de Financiación Empresarial.* Madrid. Editorial McGraw Hill. 1993.
- PASCALE, Ricardo. *Decisiones Financieras.* Editorial Macchi. Buenos Aires. 1992.

- SUAREZ, Andrés S. *Decisiones optimas de la inversión y financiación en la empresa.* Madrid. Ediciones Pirámide S.A. 1995.
- STEINBRUM, Hernán A., *Evaluación de proyectos de inversión y de financiación: análisis de los criterios VAN y TIR* - Revista I.A.M.C.
- *Anales de las Jornadas Nacionales de Profesores Universitarios de Matemática financiera.*
- Comunicaciones del Banco Central de la República Argentina.
- Tablas actuariales extractadas del material de Internet *Curso a distancia de Cálculo financiero* de la U.B.A. - Facultad de Ciencias Económicas.