COLECCIÓN: EL NÚMERO DE ORO DIRECTOR:
Act. Alberto Landro

Álgebra para estudiantes de Ciencias Económicas
Alejandro E. García Venturini – Axel Kicillof

Análisis Matemático I para estudiantes de Ciencias Económicas
Alejandro E. García Venturini – Axel Kicillof

Análisis Matemático II para estudiantes de Ciencias Económicas
Alejandro E. García Venturini – Axel Kicillof

Los matemáticos que hicieron la historia
Alejandro E. García Venturini

Análisis de Series de Tiempo, univariadas y multivariadas
Heriberto Urbisaia – Juana Brufman

Decisión Estadística Bayesiana, a modo de introducción
Emma Fernández Loureiro de Pérez

Estadística no Paramétrica, a modo de introducción
Emma Fernández Loureiro de Pérez

Teoría de los Conjuntos Borrosos, a modo de introducción
Emma Fernández Loureiro de Pérez

Estadística: Herramientas de Inferencia
Gabriela Kurincic

Estadística: Probabilidades y Distribuciones
Gabriela Kurincic

Los Métodos Cuantitativos en las Ciencias Sociales
Alejandro E. García Venturini – Federico Castelli

Aplicaciones del Análisis Matemático a la Economía
Blanca R. Vitale

Modelos para el Análisis de Series de Tiempo
Juan Carlos Abril

Análisis Matemático I para estudiantes de Ingeniería
Alejandro E. García Venturini – Mónica Scardigli

Cálculo Financiero
Juan R. Garnica Hervás - Esteban O. Thomasz - Romina P. Garófalo

Elementos de Econometría de los fenómenos dinámicos
Alberto H. Landro – Mirta L. González

ACERCA DE LA PROBABILIDAD

Parte I

LA INTERPRETACIÓN DEL CONCEPTO DE AZAR Y LA DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD

Del mismo autor

Elementos de econometría de los fenómenos dinámicos

CENTRO DE INVESTIGACIONES EN ECONOMETRÍA
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

ALBERTO H. LANDRO

ACERCA DE LA PROBABILIDAD

Parte I

LA INTERPRETACIÓN DEL CONCEPTO DE AZAR Y LA DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD

EDICIONES COOPERATIVAS

Ediciones Cooperativas es un emprendimiento cooperativo de docentes de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires para difundir sus trabajos e investigaciones.

Landro, Alberto H.
Acerca de la Probabilidad: Parte I: La interpretación del concepto de azar y la definición de probabilidad / - 1a ed. - Buenos Aires: Ediciones Cooperativas, 2010.
343 p. ; 26x19 cm.

ISBN 978-987-652-056-0

1. Probabilidades. I. Título
CDD 315

Tucumán 3227 (1189)
Buenos Aires – Argentina
☎ (54 011) 3528-0466 / (15) 4937 6915
http://www.edicionescoop.org.ar
info@edicionescoop.org.ar

1º edición, Febrero 2010

Colección: *El número de oro*
Director: *Act. Alberto H. Landro*

Hecho el depósito que establece la ley 11.723

Impreso y encuadernado por:
Imprenta Dorrego. Dorrego 1102, C.A.B.A.
1ª. ed. Tirada: 100 ejemplares. Se terminó de imprimir en Febrero 2010.

IMPRESO EN ARGENTINA – PRINTED IN ARGENTINA

Editorial asociada a:
CÁMARA ARGENTINA DEL LIBRO

A la "*streghetta del 76*"

Prólogo a la primera versión

> *"No puede haber sino borradores. El concepto de texto definitivo no corresponde sino a la religión o al cansancio".*
>
> (J.L. Borges, Prefacio al cementerio marino de Valéry)

En la primavera de 1979 el profesor de Finetti fue invitado a dictar un seminario para graduados y docentes del Istituto di Alta Matematica de la Università di Roma ("La Sapienza"). El espíritu del mismo está evidenciado en sus palabras introductorias: "*El curso, designado con el título voluntariamente genérico de 'Acerca de la probabilidad', tratará sobre los problemas conceptuales y las controversias existentes en temas de probabilidad: problemas que es necesario resolver a fin de que el desarrollo de los razonamientos no se reduzca a un mero juego formal sobre expresiones matemáticas o a enunciados pseudo-filosóficos o pretendidamente prácticos, vacíos y simplistas*".

En el presente trabajo he pretendido seguir estos lineamientos teóricos, intentando realizar un tratamiento unitario sobre la probabilidad, más desde un punto de vista conceptual que matemático. Es así que en esta "parábola sobre la incertidumbre" he considerado principalmente cuestiones como: ¿cuál es el modo en que se debe pensar el concepto de probabilidad?, ¿cuál es la razón por la que la probabilidad puede ser traducida en cálculo?, ¿por qué un indicio es tal que hace que a un fenómeno de resultado eventual, un individuo le asigne una determinada probabilidad de ocurrencia?, estructurando las respuestas a partir de dos principios: **i)** que la matemática no constituye el argumento más importante para comprender la función que cada noción desempeña en el esquema de razonamiento de los individuos, aún en aquéllos no iniciados en la teoría de la probabilidad y **ii)** que la naturaleza y la filosofía de la probabilidad no pueden ser analizadas sino en función de la historia de las disciplinas estadístico-probabilísticas.

El resultado de la aplicación de estas premisas es este compendio en el que la evolución de la teoría del azar surge como la justificación del proceso de formación de la inferencia inductiva.

A,H.L. (1999)

Prólogo a la segunda versión

"*Yo tampoco leí todos los libros,*
pero abrí muchos libros como puertas que daban a circulares laberintos de puertas.
¿No cambia cada página el eco de otras páginas y lo envía más lejos
y es el mismo y es otro cuando vuelve?"

(O. Orozco: "*Allá lejos ¿para qué?*")

Profundizando los lineamientos teóricos que rigieron el desarrollo de la primera versión de este trabajo se intentó esta segunda edición, reflexionar sobre algunas paradojas no resueltas respecto de la evolución de la teoría del azar y de las interpretaciones de la noción de probabilidad, que surgieron asociadas al devenir de sus aplicaciones y que produjeron lo que se podría denominar la "revolución probabilística".

Se procuró, además, realizar un examen más detallado de conceptos fundamentales como los de independencia y convergencia estocásticas y sus implicaciones en la explicación del comportamiento de variables económicas.

Asimismo, se incorporó el tratamiento detallado de un número apreciable de distribuciones de probabilidades relacionadas fundamentalmente con la resolución de problemas econométricos y actuariales.

El resultado de todos estos esfuerzos es esta segunda versión de "*Acerca de la probabilidad*", que cree ser conceptualmente enriquecida, cuidadosamente corregida y apreciablemente aumentada con respecto a la primera,.

A.H.L. (2002)

Prólogo a la tercera versión

"*Bisogna che il nostro dir sia inteso: dirlo chiarozzo chiarozzo, acciò che chi ode ne vada contento e illuminato*".

(San Bernardino da Siena)

Como resultado de un largo período de estudio y reflexión sobre los problemas fundamentales de la teoría del azar surge esta tercera versión de "*Acerca de la probabilidad*", cuya pretensión es corregir algunas ideas incluidas en las versiones anteriores, especialmente aquéllas referidas a los efectos que ejercieron las distintas interpretaciones de la probabilidad sobre el desarrollo de la inferencia inductiva y revisar la participación que realmente tuvo la teoría de la medida sobre las axiomáticas asociadas a dichas interpretaciones.

Con este fin se ha intentado elaborar un texto que contribuya a conformar una nueva cultura y, por qué no, una nueva poética de la aleatoriedad, a partir de desarrollos formales pensados desde una perspectiva principalmente subjetivista, en el convencimiento que la concepción subjetivista de los fenómenos de resultado eventual genera una caracterización matemática de la probabilidad diferente de la aproximación obtenida de la aplicación estricta de la teoría de la medida pero que, indudablemente, es eminentemente matemática y formalizable.

Dado el aumento de volumen provocado por la incorporación de nuevos temas, la tercera versión de "*Acerca de la probabilidad*" será editada en tres partes. La primera, de carácter esencialmente filosófico-conceptual, dedicada a especulaciones sobre la naturaleza del azar, el concepto de probabilidad y las axiomáticas, la segunda referida a la teoría general de las variables aleatorias y la tercera vinculada con los teoremas en el límite y el teorema de Bayes como elementos fundamentales en el proceso de formación de la inferencia inductiva.

Como probablemente esta tercera versión de "*Acerca de la probabilidad*" sea la última, lo único que me queda es despedirme dándoles la bienvenida a este universo aleatorio y disipativo dominado por el principio de incertidumbre. Una incertidumbre que, de acuerdo con Baudrillard, puede producir exaltación o angustia según se logre o no hacer de dicho principio una regla de juego capaz de liberar a todo proceso del "*servilismo de la finalidad*".

A.H.L. (2010)

Agradecimientos

Este trabajo fue elaborado en el ámbito del Centro de Investigaciones en Econometría, dependiente de la Sección Investigaciones en Matemática, Estadística y Econometría del Instituo de Investigaciones en Administración, Contabilidad y Matemática de la Facultad de Ciencias Económicas (UBA), por lo que quiero agradecer, en primer lugar, a sus directoras profesoras Juana Z. Brufman y María Teresa Casparri y a su Subdirector, Profesor Heriberto L. Urbisaia por sus eternas recomendaciones.

Vaya también mi reconocimiento al Profesor Roberto Escuder Vallés, Director del Departamento de Economía Aplicada de la Universidad de Valencia, por sus atinadas y oportunas correcciones.

Finalmente quiero agradecer a "*Espero infinito*" por facilitarme graciosamente su imaginario, a los poetas Jorge Lazarof y Olga Orozco por permitirnos el atrevimiento de tomar prestada su pluma en forma inconsulta para aliviar mi pobreza de lenguaje y a la "*streghetta del 76*" por oficiar (involuntariamente) de musa inspiradora.

A.H.L.

INDICE

Parte I: La interpretación del concepto de azar y la definición de probabilidad

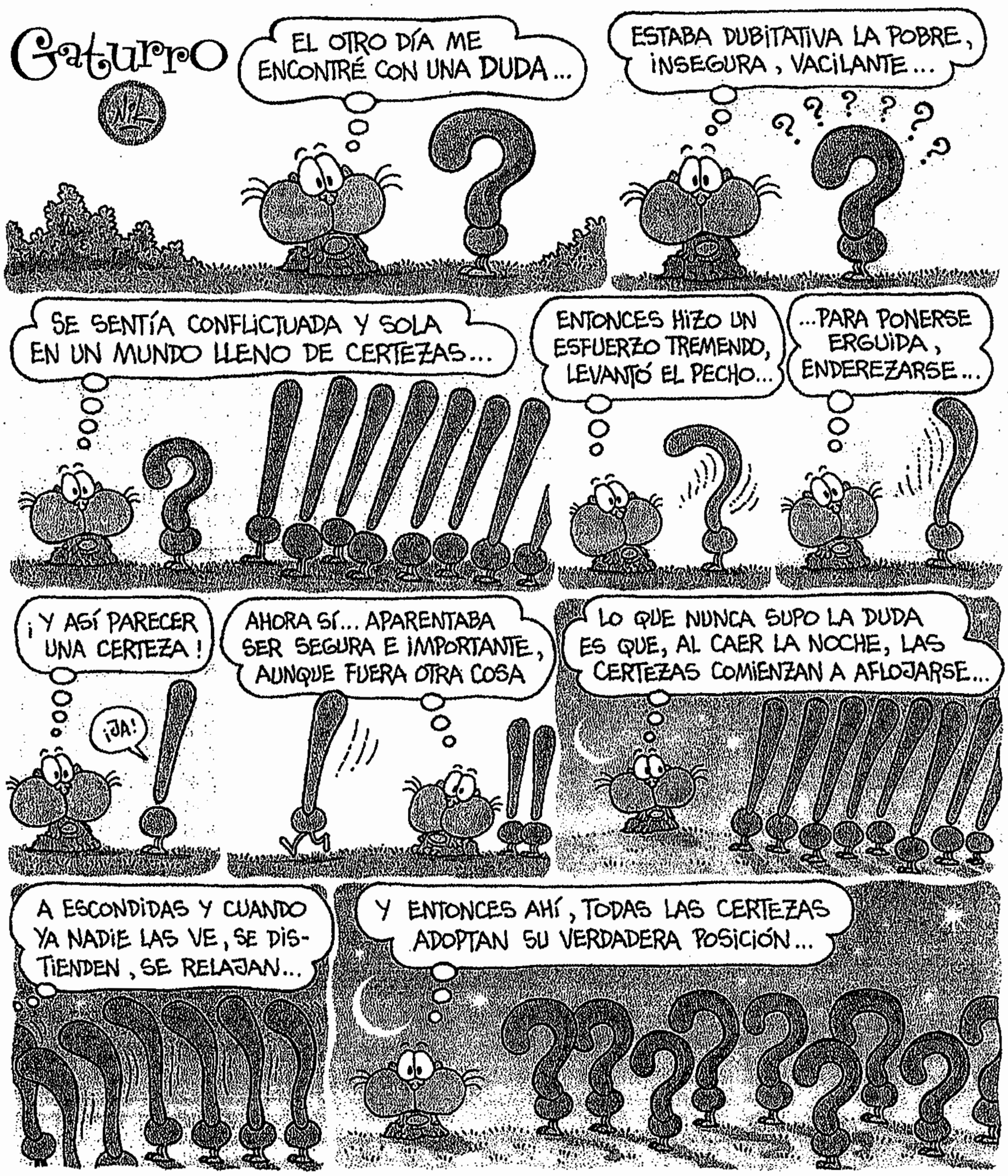
Capítulo 1: Algunas consideraciones sobre la naturaleza del azar y la inferencia inductiva

Capítulo 2: Las interpretaciones de la noción de probabilidad

Capítulo 3: Las axiomáticas y los teoremas asociados: un análisis comparativo

A modo de síntesis
(una síntesis tan profunda que todo el libro puede ser considerado un mero pie de página)

Nik



Capítulo 1.- Acerca de los fundamentos de la teoría del azar y de la inferencia inductiva

"Todo es producto del azar y la casualidad...pero por favor...las cosas que hay que escuchar. Mejor me pongo el piyama y me voy a dormir. Irma, si me llaman, deciles que estoy deprimido".

(*Chivo "Chibo" Tenutti*, del imaginario de "*Espero infinito*").

1.1.- Introducción

A partir de la segunda mitad del siglo XVI la introducción de nociones probabilísticas en cuestiones referidas al comportamiento de ciertos fenómenos relacionados con las ciencias fácticas (como la economía, la física de campo, la demografía y la ciencia actuarial) en general y a la resolución de los problemas relacionados con los juegos de azar en particular, originó el desarrollo de toda una estructura teórica, que en sus comienzos se conoció como **teoría del azar** y que a fines del siglo siguiente modificó su denominación por la menos afortunada de **teoría de la probabilidad.**

El estudio racional de estos problemas condujo al planteo de tres cuestiones fundamentales, a saber:

- ¿Qué cosa es la probabilidad?

- ¿Cómo se estiman las probabilidades?

- ¿Cómo se transforman las probabilidades?

La búsqueda de las respuestas a estos interrogantes dio origen a otras tantas disciplinas que analizan los aspectos filosófico, inductivo y deductivo de la probabilidad: la filosofía de la probabilidad -que es la encargada de estudiar la naturaleza del azar y, por lo tanto, de definir su medida; la inferencia inductiva -que se ocupa de los métodos para la estimación de los valores de las probabilidades elementales[1]- y el cálculo de probabilidades -que trata de los procedimientos por los cuales es posible pasar de valores de probabilidad de eventos simples a valores de probabilidad de eventos complejos relacionados con los primeros[2].

Si bien los avances obtenidos por estas dos últimas especialidades contribuyeron a la profundización de las reflexiones acerca de la naturaleza del azar, el problema de los fundamentos aún no ha logrado resolverse debido a la imposibilidad de definir un modelo exclusivamente deductivo que explique el papel que juega el azar en el comportamiento de los fenómenos de la naturaleza.

Como consecuencia de esto las probabilidades han sido consideradas, en general, a partir de bases axiomáticas, casi exclusivamente como simples objetos de cálculo, como entes matemáticos definidos en el plano formal, relegando a un papel marginal su función de medidas de ese algo denominado azar que aparece inevitablemente en la visión que todo observador posee acerca del comportamiento de todo fenómeno.

1.2.- Acerca de la naturaleza del azar: "azar-ignorancia" versus "azar-absoluto"

La conceptualización del azar surgió asociada a la idea de falta de información suficiente acerca de la estructura causal que determina el comportamiento de los fenómenos fácticos: el observador cuenta con una información -sea ésta de carácter objetivo o consista en el conocimiento de datos de múltiples características y orígenes que constituyen su experiencia personal (subjetiva) sobre el fenómeno- que, debido a esa suerte de solidaridad universal que relaciona a los procesos y que hace que su naturaleza aparezca como infinitamente complicada, resulta incompleta motivando, en consecuencia, que las razones de una parte del comportamiento del fenómeno permanezcan ignoradas para sí[3]. Y si se tiene en cuenta que, para este observador, la información infinita es indiscernible de la ininteligibilidad, se puede concluir que, aún en una situación ideal en la que contara con un conjunto de información de tamaño infinito, el problema de la inexplicabilidad

---

1. El calificativo inductivo es utilizado aquí como opuesto a deductivo. Se dice que un proceso es deductivamente válido cuando la conclusión surge estrictamente de sus premisas en el sentido que, si las premisas son verdaderas, la conclusión no puede ser falsa. En una inferencia por inducción existe una probabilidad no-nula de que, a partir de premisas verdaderas, se arribe a una conclusión falsa. En otros términos, lo que distingue a los razonamientos inductivos de los deductivos es que estos últimos dan lugar a conclusiones necesariamente verdaderas, en tanto que los primeros producen conclusiones afectadas por cierto grado de aleatoriedad.

2. Dado un fenómeno Y cuyo valor en un momento dado no puede ser predicho en forma determinística, se define como **evento** (E) a todo suceso cuya ocurrencia está supeditada al resultado que produzca la realización de dicho fenómeno. Esta definición incluye como casos particulares al **evento cierto** -que se verifica cualquiera sea la realización asumida por el fenómeno Y - y el **evento imposible** -que, obviamente, es aquél que no se verifica no importa cual sea la realización asumida por dicho fenómeno (se conservará en el texto esta denominación a pesar de entender que las expresiones "*evento cierto*" y "*evento imposible*", introducidas por A.N. Kolmogorov, encierran una evidente paradoja, en el sentido que ni uno ni otro poseen la propiedad esencial de eventualidad). Se entiende por evento complejo aquél que resulta de la combinación de dos o más eventos simples.

3. Poincaré, H.(1902): "*Somos ignorantes y, sin embargo, debemos actuar. Para actuar no tenemos tiempo de remitirnos a una información suficiente como para disipar nuestra ignorancia; debe tenerse en cuenta que una información semejante exigiría un tiempo infinito*".

del comportamiento de los fenómenos fácticos permanecería[4].

Esta noción Tomista de azar-ignorancia -durante mucho tiempo la única aceptada por la teología moral- implica una concepción determinística del mundo exterior al observador fundada en ciertas premisas de orden metafísico[5]: **i)** que el mundo al que pertenecen los fenómenos es real; **ii)** que existen leyes objetivas (leyes de la naturaleza) que rigen el comportamiento de los mismos y **iii)** que estas leyes son inherentes a los fenómenos, racionales y asintóticamente cognoscibles[6].

Esta concepción determinística, que dominó el panorama de la filosofía de la ciencia hasta la formulación de la mecánica cuántica a principios de este siglo[7], tuvo su auge en el siglo XVIII con la consagración de las leyes de la mecánica clásica de Isaac Newton y de la electrodinámica de James Clerk Maxwell. En la formulación Newtoniana -concebida en un período de monarquía absoluta y estructurada a partir de la hipótesis de un Dios todopoderoso que garantizaba la racionalidad absoluta- el tiempo constituía una variable irrelevante en la evolución de los fenómenos (una trayectoria no tiene principio ni fin), de modo que el conocimiento completo de todo su comportamiento -pasado y futuro- se suponía resumido en el conocimiento de su estado en un instante dado (indiferente al sentido del tiempo)[8].

Este ideal de perfección, conocido en la nomenclatura de Gottfried Wilhelm Leibniz[9] ("*De incerti æstimatione*" (1678)), como el "*principio de la razón suficiente*", enuncia la "*...equivalencia*

---

4. Thomas Hobbes ("*Leviathan*" (1660)): "*Si bien se ha observado que, hasta hoy, el día y la noche siempre se han sucedido el uno a la otra, no se puede concluir que, en el futuro, este fenómeno seguirá comportándose de esa forma, ni que dicho comportamiento se repetirá eternamente (...) la experiencia no permite arribar a conclusiones universales. Si un resultado ocurre 20 veces por cada no-ocurrencia, una persona puede realizar una apuesta de 20 a 1 por la ocurrencia de este evento, pero no puede expresar conclusiones acerca de su veracidad*". Como se verá en este capítulo y en los siguientes, este ejemplo del "amanecer" será utilizado repetidamente en los siguientes 200 años.

5. A las cuales no es posible atribuir ningún fundamento (ni deductivo, ni inductivo) y que, en la interpretación de David Hume ("*An inquiry concerning human understanding*", 1718), constituyen "*...una necesidad psicológica, un precepto casi involuntario instituido por la caritativa naturaleza para compensar las deficiencias de la razón humana*" (ver Daston, L. (1988)).

6. Sirva como expresión sintetizadora de esta noción de azar-ignorancia el siguiente texto debido a Poincaré, H. (1905): "*Todo fenómeno, por mínimo que sea, tiene una causa, y un espíritu infinitamente potente, maravillosamente bien informado de las leyes de la Naturaleza, lo hubiera podido prever desde el comienzo de los siglos. (...) Para él la palabra azar no tendría ningún sentido, o mejor dicho, no habría azar. Es a causa de nuestra debilidad y de nuestra ignorancia que el azar existe para nosotros. (...) El azar no es más que la medida de nuestra ignorancia. Los fenómenos fortuitos son, por definición, aquellos de los que ignoramos sus leyes*".

7. Particularmente en la obra de autores tan prestigiosos como Niels Bohr (1924), Max Born (1926) y Werner Heisenberg (1927).

8. Este ideal de naturaleza totalmente determinada por su pasado probablemente deba su origen al hecho que, dado el impulso innato del ser humano por tratar de comprender las regularidades en el comportamiento de los fenómenos, por descubrir leyes detrás de sus complejidades, de extraer orden del caos, la epistemología clásica se desarrolló sobre el estudio de fenómenos periódicos. (Prigogine, I.; Stengers, I. (1986): "*Nosotros no debemos la creación de nuestros esquemas conceptuales únicamente a nuestra inteligencia, sino al hecho que, en este mundo complejo, algunos 'objetos' se destacan naturalmente y han captado la atención de los hombres, suscitando el desarrollo de técnicas y la creación de lenguajes que hacen inteligible su regularidad*").

9. Los datos biográficos de los principales autores vinculados de alguna forma a la teoría de la probabilidad que se citan en el texto pueden ser consultados en el Apéndice 3.

entre la causa 'plena' y el efecto 'total'"[10]: Si el observador pudiera definir estos dos elementos, su conocimiento sería equivalente al conocimiento que Dios posee del mundo. Un dios como el de Henri Poincaré, un dios que rige una naturaleza "*...en la que no hay lugar para lo no formalizable*", según René Thom[11], un dios que no juega a los dados, según A. Einstein, un dios que conoce simultáneamente la posición y la velocidad de una partícula, según Max Planck, o un demonio capaz de calcular el pasado y el futuro del Universo a partir de la observación de uno cualquiera de sus estados instantáneos, según Pierre Simon Laplace[12], un demonio capaz de invertir la evolución irreversible asociada al crecimiento de la entropía a partir de la acción sobre cada molécula en particular, según J.C. Maxwell[13].

La insuficiencia del método clásico para explicar "*...un mundo inestable que conocemos a través de una ventana finita*"[14], en el que una modificación infinitesimal en el conocimiento del observador -a pesar de contar con ecuaciones determinísticas- conduce de una realización del fenómeno a otra cualquiera de su infinito conjunto de realizaciones posibles, en el que la irreversibilidad es la regla y la reversibilidad la excepción, dio origen a una nueva formulación -aleatorista-, cuya diferencia con la dinámica clásica radicó esencialmente en la postulación del concepto de **estado del proceso en un instante dado** como resultante de una evolución orientada en el tiempo. Esta nueva interpretación se originó a principios del siglo XIX (el siglo del evolucionismo), en las obras de Charles Darwin en biología, de Georg Friederich Wilhelm Hegel en filosofía, y de Jean-Joseph Fourier y Nicolas Leonard Sadi Carnot en física.

En particular, las contribuciones de J.J. Fourier (1811) y Sadi Carnot ("*Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance*" (1824)) dieron lugar al nacimiento del concepto de termodinámica y, consecuentemente, a la incorporación de dos elementos: el tiempo y la historia, en un universo que Newton y los físicos clásicos habían supuesto eterno[15]. En 1850, Rudolf J.E. Clausius ("*On the motive power of heat, and on the laws which can be deduced from it for the theory of heat*") introdujo las leyes de la termodinámica, la primera de las cuales establece que, en un sistema cerrado, la cantidad de energía permanece constante y la segunda afirma que, en dicho sistema, existe una función de los estados (asimilada, en general, a la

---

10. Todo ocurre por alguna razón. Si un fenómeno es verdadero, debe ser verdadero por alguna razón. Sin embargo, no se puede ignorar que existe una infinidad de proposiciones respecto de las cuales no existe ninguna teoría capaza de demostrar por qué son verdaderas. Estas proposiciones son lógicamente irreducibles y, de acuerdo con el principio de la razón insuficiente, la única forma de admitir su veracidad es incorporándolas como axiomas (ver Apéndice 2).

11. Prefacio al "*Essai philosophique sur les probabilités*" de Laplace, P.S. (Edición de 1986).

12. El "*Essai philosophique sur les probabilités*" (1814) de Laplace proporciona una de las descripciones más esclarecedoras de la concepción del determinismo universal: "*Entonces debemos considerar el estado presente del universo como el efecto de su estado anterior y como la causa de su estado siguiente. Supóngase por un instante una inteligencia que pudiera comprender todas las fuerzas que animan a la naturaleza y la situación respectiva de los entes que la componen (...) una inteligencia suficientemente vasta como para analizar estos datos, resumiría en la misma fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del universo y aquéllos del átomo más ligero; para esta inteligencia nada sería incierto y tanto el futuro como el pasado estarían presentes ante sus ojos*".

13. El inventor de este singular personaje, conocido hoy como el demonio de Maxwell fue, en realidad, el físico Ruggiero Giuseppe Boscovich ("*De spatio et tempore, ut a nobis cognoscontur*" (1755), reimpreso como apéndice a su libro de texto "*Theoria philosophiæ naturalis*" (1758)). La expresión "*demonio de Maxwell*" se debe al físico inglés William Thompson.

14. Prigogine, I.; Nicolis, G. (1977).

15. I. Newton ("*Principia mathematica*" (1687)): "*El tiempo absoluto, verdadero y matemático, por sí mismo y por su propia naturaleza, fluye libremente sin niguna relación con el exterior y es llamado 'Duración'*".

entropía S) que varía en forma monótona aproximándose a un estado final (de máxima entropía), conocido como del equilibrio termodinámico[16]. En términos formales, este segundo principio puede ser expresado como $\frac{dS}{dt} \geq 0$.

En "*Illustrations of the dynamical theory of gases*" (1860) -obra considerada hoy como de fundamental importancia en la filosofía de la ciencia- J.C. Maxwell introdujo la idea de que las leyes de la termodinámica son más bien generalizaciones estadísticas que leyes en sentido absoluto. De acuerdo con esta interpretación, no hay en la segunda ley nada que impida que las moléculas de aire contenidas en una habitación se concentren en un rincón. Si bien debe reconocerse que la probabilidad a asignar a la ocurrencia de este evento es infinitamente próxima a cero, este mínimo margen de improbabilidad hizo que la segunda ley no pudiera ser considerada como una verdad absoluta y que el determinismo estricto fuera sustituido por la predicción probabilística[17]. Esta explicación estadístico-termodinámica procuró -fundamentalmente a través de la obra de M. Planck y Ludwig Eduard Boltzmann- definir la naturaleza en términos de devenir, dando un sentido intrínseco a la *"flecha del tiempo"*[18], cambiando la interpretación de tiempo dinámico entendido como *"tiempo de caída de los graves"* por la de "*tiempo termodinámico*" (según la nomenclatura de Serres, M. (1975))[19].

Paralelamente a esta interpretación aleatorista de la noción de azar, cabe mencionar el **indeterminismo por novedad** de Gustav Theodor Fechner, basado en el principio que, si bien en la evolución de los fenómenos dinámicos se generan nuevas condiciones iniciales que, de acuerdo con una ley general, conducen a efectos no ocurridos previamente y, por lo tanto, no permiten la recurrencia de comportamientos idénticos, cada conjunto de dichas condiciones iniciales conserva alguna similitud con los anteriores de modo que, aún cuando sea posible adjudicar cierto grado de aleatoriedad a esta evolución, su comportamiento no puede ser considerado completamente aleatorio. Esta interpretación intermedia (determinística-aleatorista) de aleatoriedad-con-causalidad considera que ese conjunto de condiciones iniciales intrínsecamente nuevas constituye una nueva causa que genera, en función de una ley causal preexistente, un efecto novedoso y que esas causas son, en sí mismas, no-causadas.

A modo de resumen de las consideraciones anteriores, se puede concluir que aceptar la concepción clásica -determinística- es equivalente a suponer que todo fenómeno es explicable, en la hipótesis que, en el límite, dicho fenómeno constituye la consecuencia necesaria de un conjunto infinito de factores que definen su estructura-causal. Por el contrario, aceptar la noción de aleatoriedad parcial objetiva de Fechner o la interpretación termodinámica -aleatorista- implica sustituir el concepto clásico de azar-ignorancia (epistemológico) por el de azar-absoluto

---

[16]. El concepto de entropía está relacionado aquí con la incertidumbre asociada a las posibles realizaciones de un suceso de resultado eventual. La palabra **entropía** fue introducida por Clausius a partir del término griego que significa transformación.

[17]. Ver Gardner, M. (1979).

[18]. Expresión debida a Eddington, J. (1935).

[19]. J.C. Maxwell ("*Trait's 'Thermodynamics*" (1887)): "*Es imposible reducir la segunda ley de la termodinámica a una forma tan axiomática como la primera, por lo que tenemos razones para creer que, aunque verdadera, su verdad no es del mismo orden que la de la primera ley (...) La verdad de la segunda ley es, por consiguiente, estadística, no matemática porque depende del hecho que los cuerpos con los que tratamos constan de millones de moléculas, y que nunca podemos analizar moléculas simples*".

(ontológico), sustituir la afirmación el observador nunca puede saber por la afirmación ni el observador ni la naturaleza nunca pueden saber.

MÁXIMO

1.3.- Los comienzos de la teoría de la probabilidad

Como se mencionó en la Sec. 1.1 de este capítulo, el desarrollo de la teoría de la probabilidad está relacionado fundamentalmente con el tratamiento de problemas económico-actuariales como el de la valuación de contratos aleatorios -es decir, con la determinación de la suma cierta a pagar hoy para recibir una retribución aleatoria si se verifican ciertas condiciones de carácter eventual.

En muchos casos las soluciones se obtuvieron asimilando las características metodológicas de estos problemas a cuestiones inherentes a los juegos de azar, lo que hizo que posteriormente los autores, en general, asociaran -en forma equivocada- el desarrollo de la teoría de la probabilidad principalmente al incremento del interés por los juegos de azar en la sociedad europea del siglo XVII[20], y adjudicaran muchos de los importantes avances producidos en esa época, en esta materia,

20. Esta hipótesis de que los juegos de azar (si bien representaron un rol metodológica y pedagógicamente relevante) no constituyeron el único -ni, quizás, el más importante- estímulo al desarrollo de la teoría de la probabilidad, de que, en realidad, la atención de los analistas se dirigió a los juegos de azar sólo después de que problemas asimilables a ellos surgieran en otros ámbitos de la actividad humana, permite arriesgar una respuesta sobre la cuestión -muy discutida y nunca

a una supuesta conjunción entre el ingenio de algunos matemáticos y el excepcional espíritu de observación de algunos jugadores, quienes postulaban que, si bien los resultados se revelaban como individualmente aleatorios, en conjunto parecían observar ciertas regularidades[21]. A partir de esta circunstancia, surgió la hipótesis de lo que podría interpretarse como una suerte de competencia entre teóricos y prácticos, en la que los primeros estaban convencidos de poder explicar todas las presuntas regularidades mediante la utilización de argumentos teóricos o matemáticos, y los segundos suponían que los resultados de los juegos incluían algo secreto, inasible para cualquier método de cálculo[22]. Como consecuencia de esta hipótesis, si bien se reconocen algunos intentos previos, los autores coincidieron -y, en general, coinciden- en asociar el punto de partida de la teoría clásica de la probabilidad con la discusión entre quien podría ser considerado como el más hábil de los prácticos, Antoine Gombaud, Chevalier de Méré y el más sutil de los teóricos de su tiempo, Blaise Pascal.

Esta circunstancia se vio avalada por el rol de ferviente jugador y personaje mundano atribuido históricamente -en forma errónea- a este Chevalier de Méré[23]. En realidad A. Gombaud fue un filósofo y hombre de letras que ocupó cargos prominentes en la corte de Luis XIV y que, si bien no fue un matemático profesional[24], mantuvo correspondencia con casi todos los matemáticos importantes de su tiempo -entre los que se encontraba Pascal[25]- y participó activamente en la resolución de varios problemas. Estas consideraciones parecerían indicar que el planteo de de Méré a Pascal no fue a partir de su experiencia como jugador, sino como resultado de una reflexión puramente teórica[26]. Los problemas considerados por Gombaud dieron origen a la hoy famosa

aclarada- de por qué la influencia sistemática de estos juegos (fundamentalmente los juegos de dados, cuya existencia data de varios siglos antes de Cristo) en el desarrollo de la teoría de la probabilidad se produjo recién en el siglo XVII. La literatura ha atribuido esta circunstancia a distintas razones, por ejemplo, a las imperfecciones en la construcción de los dados que no permitían la detección de las necesarias regularidades (ver David, F.N. (1955)), a la inexistencia de un álgebra combinatoria (en realidad, de ideas combinatorias), a la superstición de los jugadores, a la inexistencia de una noción de fenómeno aleatorio o , mejor dicho, a la existencia de impedimentos religiosos o morales para el desarrollo de la idea de aleatoriedad (ver Kendall, M.G. (1956)). Todas consideraciones muy atendibles, pero ninguna concluyente.

21. Ver Sambursky, S. (1963).

22. Geymonat, L. (1954): "*Las divergencias entre los más prestigiosos estudiosos con respecto a la naturaleza del cálculo de probabilidades son, aún hoy, tan profundas que conducen a la sospecha de que éste encierra algún misterio inalcanzable para la mente humana*".

23. De acuerdo con una carta de Siméon Denis Poisson, "*El origen del cálculo de probabilidades puede situarse en un problema propuesto por un hombre de mundo a un austero Jansenista*" (ver Keynes, J.M. (1921)). Debe tenerse en cuenta que (como se comenta en el Apéndice 3) el austero Jansenista al cual se refiere Poisson, desde el fallecimiento de su padre, ocurrido en 1651, hasta la conversión religiosa, ocurrida la famosa "nuit de feu" el 23 de noviembre de 1654, disfrutó de una vida disoluta en la que los juegos de azar desempeñaron un papel importante.

24. En la segunda carta dirigida por Pascal a su coterráneo el matemático Pierre de Fermat se puede hallar el siguiente comentario de Pascal acerca de su encuentro con Gombaud: "*El Sr. de Méré es un 'bon esprit', pero no es 'géomètre' (y esto, como usted sabe, es un gran defecto) y aún no comprende que una recta puede ser dividida 'ad infinitum' y cree que está compuesta por un número finito de puntos, y yo no he sido capaz de apartarlo de esta idea. Su usted pudiera lograrlo lo haría parecer perfecto*" (Bertrand, J. (1889)).

25. Ver Ore, O. (1960).

26. Carta de Gombaud a Pascal: "*Usted sabe que he descubierto cosas tan raras en matemáticas que los más conocedores entre los mayores nunca las han discutido, y han sorprendido a los mejores matemáticos de Europa. Usted ha escrito sobre mis descubrimientos al Señor Huygens, al Señor de Fermat y a muchos otros*" (ver Ore, O. (1960)). Carta de Pascal a de Fermat: "*He visto a distintas personas obtener la solución para el dado, entre las cuales se encuentra el Señor de Méré, quien fue el primero en proponer estos problemas al Señor de Roverbal y a mí*" (ver Ore, O. (1960)).

correspondencia entre Pascal y P. de Fermat[27]. Esta correspondencia -que consta de siete cartas intercambiadas entre julio y octubre de 1654 y una carta enviada por Pascal a de Fermat en 1656- contiene el germen de lo que hoy constituye la teoría de la probabilidad[28]. En ella se encuentra, además de la solución al mencionado problema de Gombaud, las respuestas a algunas cuestiones que ya en el siglo XVII eran clásicas, como la solución de ciertos casos particulares de las que más tarde se denominarían probabilidades binomiales[29] (generalizados luego, en el "*Traité du triangle arithmetique*" de Pascal, concluido a fines de 1654 y publicado en forma póstuma, en 1665) y el planteo del problema conocido aún hoy como de la ruina de los jugadores[30].

Es así que Pascal es considerado el fundador de la teoría de la probabilidad, aún cuando, como se mencionó en la página precedente, no fue el primero en investigar estos temas ni los resultados por él obtenidos fueron, en principio, más interesantes que los logrados por algunos de sus contemporáneos (en particular, de la comentada correspondencia con de Fermat se puede concluir que éste había logrado en muchos asuntos una mayor profundidad en lo que hace a la interpretación filosófica de la teoría del azar). El mérito de Pascal radicó en la comprensión de la riqueza que encerraba el razonamiento probabilístico a partir del cual construyó los fundamentos de una visión moderna de la ciencia, según la cual lo máximo a que el investigador puede aspirar

---

27. Desafortunadamente la primera carta de Pascal a de Fermat se perdió. El famoso problema de Gombaud está contenido en la segunda carta fechada el miércoles 29 de Julio de 1654: "*No he tenido tiempo de enviarle la demostración de un problema que preocupa al Sr. De Méré (...) Me comunica que ha hallado la siguiente falacia en la teoría de números: si el evento consiste en obtener el resultado 6 al arrojar un dado, la ventaja de lograr este resultado en 4 pruebas es como 671 a 625. Si el evento consiste en obtener 2 veces el resultado 6 al arrojar 2 dados en 24 pruebas, se genera una desventaja. Sin embargo 24 es a 36 (que representa el número de pares de 'caras' de los dos dados) como 4 es a 6 (que representa el número de 'caras' de un dado). Este resultado lo contrarió mucho y concluyó que las proposiciones no son consistentes y que la aritmética es auto-contradictoria*". de Fermat obtuvo la solución a este problema urilizando el "*método combinatorio*" (esencialmente el mismo que, como se verá inmediatamente, utilizara Galileo en la solución de un problema similar).

28. El siglo XVII fue muy fecundo para las ciencias exactas en general y, como se desprende de lo comentado en el texto, para la teoría de la probabilidad en particular, no sólo por la aparición de algunas figuras excepcionales, sino por el notable incremento en el número de investigadores menores. Todo este proceso de creación exponencialmente creciente requirió el desarrollo de formas de difusión que pusieran en contacto a los estudiosos de cada materia. Este vehículo estuvo fundamentalmente integrado por la correspondencia epistolar (que asumió el papel de lo que hoy se conoce como las comunicaciones preliminares y que, como se podrá observar, ocupó muchos volúmenes de las obras completas de los más grandes científicos de este siglo) ejercida por los llamados "informadores", es decir, personas que se encargaban de recoger y difundir noticias sobre trabajos científicos en curso de elaboración. Entre estos cabe destacar a Marin Mersenne, Pierre de Carcavi y Antoine Gombaud en Francia y Heinrich Oldenburg y John Collins en Inglaterra. Este método de difusión fue sustituido a fines del siglo XVII por las publicaciones científicas periódicas (el *Journal des Sçavants* (1665) en Francia, el *Giornale dei Letterati* (1668) y el *Giornale de'Letterati di Italia* (1668) en Italia, el *Acta Eruditorum* (1682) en Alemania, la *Bibliothèque Germanique*, el *Journal Littéraire de l'Allemagne* y la *Nouvelle Bibliothèque Germanique* en Prusia).

29. Denominadas así porque al ser generadas a partir de una serie de ensayos independientes repetidos en igualdad de condiciones, que admiten sólo dos resultados posibles: "éxito" y "fracaso" (ensayos binomiales), resultan proporcionales a los términos del desarrollo del binomio $(p+q)^n$, donde n denota el número de ensayos de la serie, y p y q denotan, respectivamente, las probabilidades de obtener "éxito" o "fracaso" en un ensayo dado (ver Cap. 7). Algunos de estos problemas ya habían sido resueltos por G. Cardano. Fueron Pascal y de Fermat quienes utilizaron por primera vez el cálculo combinatorio en sus soluciones. Sus métodos fueron posteriormente empleados por Jakob Bernoulli, Pierre Remond de Montmort y A. de Moivre (ver Cap. 4).

30. Sean A y B dos jugadores que cuentan, respectivamente, con a y b fichas. Sean p y $q=1-p$, respectivamente, las probabilidades de A y B de ganar una partida. Supóngase que al cabo de cada partida el perdedor debe pagar al ganador una ficha. ¿Cuál es la probabilidad de que el juego dure, como máximo, n partidas? (este problema será tratado con detalle en la Sec. 3.1.5.4).

es a la definición de modelos que describan aproximadamente los fenómenos observados, sin poder demostrar en forma definitiva si estos estos constituyen o no la representación de supuestas realidades objetivas subyacentes[31].

En la obra de Pascal y de Fermat se unifican, por primera vez, las dos raíces -matemática y filosófica- de la teoría de la probabilidad, conjugando los dos movimientos intelectuales más importantes del siglo XVII: el surgimiento de un nuevo racionalismo pragmático con el consiguiente abandono de los ideales tradicionales de certeza (religiosa y filosófica) y el intento de aplicar la matemática a nuevos dominios de la experiencia.

Debido a las necesidades planteadas por el contexto económico-legal de los ya mencionados contratos aleatorios (relacionados, por un lado, con los seguros y las rentas vitalicias y, por otro, con los juegos de azar, especialmente las loterías), en realidad ni Pascal, ni de Fermat, ni sus contemporáneos razonaron en términos de probabilidades, sino en términos del concepto de expectativa o esperanza matemática -entendida como la relación entre un presente cierto y un futuro incierto, entre una cantidad cierta (apuesta) a pagar para recibir una cantidad aleatoria si un evento dado se verifica-, generando de esta forma una teoría basada en reglas generales que expresaban en forma cuantitativa la relación entre el riesgo y la ganancia en un contrato aleatorio equitativo. Reglas que, como ya se comentó, estaban fundadas en una interpretación determinística que suponía a los fenómenos como estrictamente gobernados por leyes invariables que podían ser expresadas en función de un número finito de variables.

La conocida como **apuesta de Pascal** es un ejemplo típico de cómo el razonamiento mediante expectativas constituyó un sinónimo de este nuevo racionalismo imperante en la primera mitad del siglo XVII, en cuyo esquema el espíritu religioso parece basarse más "*...en el interés temporal individual que en un dogmatismo racional o en un entusiasmo místico*"[32]: "*...establezcamos las proposiciones: 'Dios existe' y 'Dios no existe' ¿Hacia cuál de las dos nos inclinaremos? La razón no puede determinar nada acerca de esta cuestión: un caos infinito nos separa de la respuesta correcta. En el extremo de esa distancia infinita, se plantea un juego cuyo resultado será 'cara' o 'cruz' ¿A qué apostaremos? (...) Dos cosas se pueden perder: la verdad y el bien, y dos cosas se pueden comprometer: nuestra razón y nuestra voluntad, nuestro conocimiento y nuestra beatitud; y de dos cosas debe huir nuestra naturaleza: del error y de la miseria (...) Pesemos la ganancia y la pérdida considerando 'cara' que 'Dios existe'. Analicemos estos dos casos: si ganamos, ganamos todo; si perdemos, no perdemos nada. Apostemos, pues, sin vacilar a que Dios existe (...) Hay aquí, como ganancia, un infinito de vida infinitamente feliz, una probabilidad de triunfo contra un número infinito de probabilidades de pérdida, y lo que comprometemos en el juego es finito. Esto suprime toda apuesta: siempre que interviene lo infinito y cuando no hay infinidad de probabilidades de pérdida contra la probabilidad de triunfo, no hay que vacilar, hay que arriesgarlo todo (...) Pues de nada sirve decir que la ganancia es incierta y que el riesgo es cierto, y que la infinita distancia que media entre la certeza de lo que se arriesga y la incertidumbre de la ganancia iguala el bien finito que se arriesga en forma cierta con el infinito que es incierto. No es así. Todo jugador arriesga con certeza para ganar con incertidumbre y, sin embargo, sin pecar por ello contra la razón, arriesga con certeza lo finito para ganar con incertidumbre lo finito. No hay una distancia infinita entre esa certeza de lo que arriesga y la*

---

31. Todhunter, I. (1949): "*Dejando de lado las sugerencias sin importancia que pueden hallarse en trabajos previos, podemos decir que la teoría de la probabilidad comenzó con Pascal y Fermat, y sería difícil encontrar dos nombres a quienes se pudiera atribuir mayor prestigio en la materia*".

32. Daston, L. (1988).

incertidumbre del triunfo (...) Hay, en verdad, una distancia infinita entre la certeza de ganar y la certeza de perder. Pero la incertidumbre de ganar es proporcional a la certeza de lo que se arriesga, según la proporción de las probabilidades de ganar y perder. Y de esto resulta que, si hay probabilidades iguales de un lado y del otro, la partida consiste en jugar igual contra igual y, entonces, la certeza de lo que se arriesga es igual a la incertidumbre de la ganancia (...) Nuestra proposición encierra una fuerza infinita, en la medida que se arriesga lo finito, en un juego en el que hay probabilidades iguales de ganar y perder y la ganancia es infinita"[33].

Obviamente nunca el inicio de un desarrollo teórico se produce en forma tan abrupta que pueda ser fechado con precisión absoluta. Con relación a los intentos de cuantificación de la probabilidad previos a los trabajos de Pascal y de Fermat mencionados al comienzo de esta sección (y que, en gran medida, constituyen sus antecedentes), si bien se conocen ensayos aislados anteriores, es recién a partir del siglo XV que la formalización del concepto de probabilidad observó un desarrollo continuado. El período que se extiende hasta comienzos del siglo XVI -caracterizado por la solución de problemas individuales mediante la utilización de argumentos elementales de cálculo- es mencionado por muchos autores como la prehistoria de la probabilidad[34]. El primer libro que trata problemas de juegos de azar desde un punto de vista matemático es la "*Summa di arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità*" de Fra Lucas de Burgo -llamado "il Pacioli"-, impreso en 1494. En él figura por primera vez el ya mencionado problema de la división de apuestas[35].

Contemporánea a esta obra cabe mencionar "*De talorum tesserarum ac calculorum ludis ex more veterum*" de Celio Calcagnini, por la influencia que ejerció sobre los trabajos de G. Cardano.

El "*Liber de Ludo Aleæ*" de G. Cardano, escrito (según el propio testimonio del autor) alrededor de 1526 y publicado en forma póstuma en 1663, constituye el primer tratado extensivo dedicado exclusivamente a la teoría de la probabilidad. En esta obra se introduce como concepto de probabilidad "a priori" el cociente entre el número de "*casos favorables*" y el número de "*casos*

---

[33]. "*Pensées*" (1669, pasaje nº 418 en la numeración de Lafuma y 233 en la de Brunschvicg). En realidad Pascal no fue el creador de este famoso ejemplo de apologética religiosa de la teología natural. Un argumento bastante parecido se encuentra en "*La logique ou l'art de penser*" (1662) de Antoine Arnauld y Pierre Nicole, los lógicos de Port Royal y en "*Wisdom of being religious*" (1664) de John Tillotson. A partir de las ideas contenidas en "*Theologiæ christianæ principia mathematica*" (1699) de John Craig, pero utilizando sus propios argumentos probabilísticos y basándose en el criterio de que la vida eterna (o el infinito número de vidas felices) prometida por las Sagradas Escrituras no tenía una probabilidad finita, Laplace criticó la conclusión de Pascal: "*La expresión para la probabilidad del testimonio de las Escrituras es infinitamente pequeña. Al multiplicar esta cantidad por el infinito número de vidas felices prometidas, en la esperanza matemática resultante, el infinito desaparece, lo cual destruye el argumento de Pascal*" ("*Essai philosophique sur les probabilités*" (1814)).

[34]. Ver Maistrov, L.E. (1974).

[35]. Sean A y B dos jugadores que convienen en jugar una serie de partidas que finalizará cuando uno de los dos gane en n oportunidades. ¿De qué forma deberán dividirse las apuestas si, por alguna causa accidental, la serie se interrumpe cuando A ha vencido n_A partidas y B n_B partidas? Este problema, que será analizado con detalle en la Sec. 3.1.5.1, fue tratado por Pascal en su correspondencia con de Fermat. Distintos intentos de solución al mismo habían sido desarrollados previamente por G. Cardano ("*Pratica arithmeticæ et mensurandi singularis*" (1539)), Niccolò Fontana -"il Tartaglia", "sic enim eum nominare solent"- ("*General trattato di numeri e misure*" (1556)), Giovanni Battista Peverone ("*Due brevi e facili trattati, il primo d'arithmetica, l'altro di geometria*" (1558)) y Luigi Forestani ("*Pratica d'arithmetica e geometria*" (1603)).

posibles" (que, luego, como se verá en la Sec. 2.2, constituyó la definición clásica)[36]. En él se menciona también, por primera vez, la posibilidad alternativa del cálculo de probabilidades "a posteriori" de la realización de observaciones empíricas, con la condición necesaria de que éstas se efectúen en igualdad de condiciones, planteando de esta forma, una aproximación al concepto de regularidad estadística y a la ley de los grandes números[37]. En 1539 se publica "*Practica aritmeticæ et mensurandi singularis*", obra en la que Cardano continúa con el tratamiento del problema de la división de apuestas iniciado por "il Pacioli" y, en 1570, "*Opus novum de proportionibus numerorum*", que puede ser considerada como una continuación del "*General Trattato di numeri et misure*" (1556-1560) de N. Tartaglia, en el tratamiento de problemas relacionados con la teoría de la probabilidad y el cálculo combinatorio (debe tenerse en cuenta que, hasta la incorporación del cálculo diferencial e integral, el cálculo combinatorio constituyó la herramienta básica de la teoría de la probabilidad, por lo que su desarrollo ejerció una influencia fundamental en su progreso, especialmente en su etapa inicial).

El trabajo inmediatamente siguiente a los de Cardano en lo que se podría llamar la literatura clásica sobre probabilidades que merece ser mencionado, es "*Sopra le scoperte dei dadi*" de Galileo Galilei, escrito presumiblemente entre 1613 y 1623 y publicado, junto con el resto de su obra sobre probabilidades en 1718, bajo el título "*Considerazioni sopra il gioco dei dadi*". El mismo está dedicado a la resolución del siguiente problema planteado por un jugador anónimo: Si al arrojar tres dados, las sumas 9 y 10 pueden ser obtenidas sólo de seis formas distintas (126, 135, 144, 225, 234 y 333 para el resultado 9, y 136, 145, 226, 235, 244 y 334 para el resultado 10), ¿por qué los jugadores "*... consideran al resultado '10' como más ventajoso que el resultado '9'?*"[38].

Cabe mencionar que, más allá de esta cuestión puntual, el principal aporte de Galileo está relacionado con el desarrollo de la inferencia inductiva y consistió en la aplicación de la teoría de la probabilidad a la estimación de la distibución de los errores no-sistemáticos en las observaciones astronómicas. En este sentido, si bien no obtuvo una solución cuantitativa analítica del problema[39], muchas de sus contribuciones ejercieron una gran influencia también en el desarrollo de las nociones básicas de la teoría de la probabilidad[40].

---

36. Debe tenerse en cuenta que inicialmente existió una diferenciación entre la noción de chance, calculada como un cociente e incluida en el ámbito del álgebra, y la de probabilidad considerada como un concepto epistemológico no-numérico. Fue en el siglo XVI que la probabilidad comenzó a ser definida en forma numérica, y es recién en la segunda mitad del siglo XVII que ambos términos aparecen tratados en la literatura como sinónimos. Como una excepción a esta regla debe considerarse la interpretación logicista de John Maynard Keynes, según la cual las relaciones de probabilidad entre conjuntos de proposiciones no siempre son cuantificables (ver Sec. 2.4).

37. Ver Sec. 2.3.

38. Los problemas relacionados con dados fueron los que más rápidamente atrajeron la atención de los científicos. Los primeros intentos de solución que se conocen datan del siglo XI. En particular, la primera aproximación conocida para el caso de tres dados figura en el poema latino "*De vetula*" (en principio atribuido a Ovidio y hoy generalmente reconocido como perteneciente al Canciller de la catedral de Amiens, Richard De Fournival): "*...Si los tres números son iguales, hay seis posibilidades; si dos son iguales y el otro distinto, hay treinta casos, ya que el par puede ser elegido en seis formas y el otro en cinco formas; y si los tres son diferentes, hay veinte formas, ya que treinta veces cuatro es igual a ciento veinte, pero cada posibilidad aparece en seis formas. Hay cincuenta y seis posibilidades. Pero si los tres son iguales hay una sola forma por cada número; si dos son iguales y uno diferente, hay tres formas; y si todos son diferentes, hay seis formas*".

39. Ver Cap. 14.

40. Como caso curioso de la literatura del siglo XVII referida a la teoría del azar y al concepto de incertidumbre, cabe mencionar "*Of the nature and use of lots*" (1619), obra en la que el Reverendo Thomas Gattiker intentó rebatir el principio -muy arraigado en la época- de que los resultados de las loterías y de los juegos de dados debían ser interpretadas como una

Contemporáneo a la correspondencia Pascal-de Fermat es el ya mencionado pequeño tratado titulado "*Van Rekeningh in Spelen van Geluck*" del matemático flamenco Christiaan Huygens, publicado en 1656 y cuya versión definitiva en latín: "*De ratiotiniis in ludo aleæ*" apareció un año más tarde (como apéndice del volumen titulado "*Exercitationum mathematicarum*" de su maestro Francis Van Schooten)[41]. Esta obra contiene tres teoremas (en los que se introduce el concepto de "*esperanza matemática*" tal como hoy se lo conoce) y once problemas, conocidos en conjunto como las catorce proposiciones de Huygens[42].

Debido posiblemente a que la comunidad matemática estaba dedicada casi con exclusividad al desarrollo del cálculo y que, a excepción de los seguros de vida, no se habían hallado aplicaciones científicas de importancia para la teoría de la probabilidad, la segunda mitad del siglo XVII (más precisamente, el período que media entre los ya mencionados trabajos de Pascal, de Fermat y Huygens, y la aparición de las obras de de Pierre Remond de Montmort (1708) y Jakob (I) Bernoulli (1713)), se caracterizó por la ausencia de grandes tratados.

Las publicaciones de este período están referidas fundamentalmente a la teoría matemática del riesgo originada en el ya mencionado régimen económico-legal de los contratos aleatorios, es decir, a las aplicaciones de la teoría de la probabilidad al análisis de la mortalidad y a la ciencia actuarial.

Cabe destacar que la aceptación de esta teoría del riesgo en la solución de problemas actuariales en general y en la práctica aseguradora en particular, requirió de un arduo proceso de transición conceptual[43], que incluyó la aceptación del ya mencionado principio de estabilidad estadística en el comportamiento de fenómenos eventuales en el largo plazo y la diferenciación, en lo que se refiere a su tratamiento teórico, del riesgo incluido en los juegos de azar -en los que las probabilidades pueden ser calculadas "a priori", a partir de la supuesta simetría de los resultados posibles- y del riesgo inherente a los contratos de seguro -en los que las probabilidades deben ser estimadas "a posteriori" de la observación de las frecuencias de ocurrencia de los eventos.

---

manifestación de los designios de Dios. Con este fin, y partiendo de una lógica interpretación determinística del comportamiento del fenómeno, estableció un criterio según el cual, a pesar de que sus causas fueran desconocidas, estos eventos debían ser considerados como determinados por una ley natural.

41. Si se tiene en cuenta que los trabajos de G. Cardano y G. Galilei, si bien elaborados con anterioridad, recién fueron aditados en 1663 y 1718, respectivamente, se puede decir que este tratado constituye, en realidad, la primera publicación dedicada exclusivamente a la teoría de la probabilidad.

42. En general, en la literatura de la historia de la probabilidad, se tiende a sobreestimar el rol de Pascal y de Fermat en desmedro de la contribución de Huygens. Debe tenerse en cuenta que "*De ratiotiniis in ludo alæ*" fue fundamental en el desarrollo de la teoría de la probabilidad debido a la influencia que ejerció sobre los trabajos de Jakob Bernoulli, P.R. de Montmort y A. de Moivre. Se transformó inmediatamente en el libro de texto obligado sobre teoría de la probabilidad y continuó siéndolo durante los siguientes 50 años, aún después de la publicación del "*Traité du triangle arithmetique, avec quelques autres petits traités sur la même matière*" (1665) de B. Pascal, cuyos alcances son mucho más generales. Quizás esto último se haya debido a que la obra de Huygens fue escrita en latín -idioma científico oficial de la época-, en tanto que la de Pascal lo fue en francés. Recién en 1692 se publicó una traducción al inglés del tratado de Huygens, debida a J. Arbuthnott, con el título "*Of the laws of chance, or a method of calculations of the hazards of game, plainly demostrated, and applied to games as present most in use*".

43. Como se verá más adelante en esta misma sección, este proceso de trasición abarcó un período -que se podría denominar pre-probabilístico-, que se extendió entre el primer contrato de seguro del que se tiene conocimiento, en 1328, en Marsella y mediados del siglo XVIII-, en el que la cuantificación del riesgo, materializada en las primas de los seguros, las cuotas de las rentas vitalicias y las apuestas de los juegos de azar, no estaba necesariamente basada en intuiciones probabilísticas y, menos aún, en cálculos sobre datos observados.

Es por esta razón que estas publicaciones se caracterizan por un principio de asimilación de las estadísticas de mortalidad a probabilidades. Entre ellas cabe destacar en forma especial "*Natural and political observations mentioned in a following index and made upon the bills of mortality*" (1662) en la que John Graunt intentó resolver una cuestión de gran importancia desde el punto de vista político: la determinación del número de hombres residentes en Londres, aptos para la guerra (es decir, el número de individuos varones con edades comprendidas entre los 16 y los 56 años). Esta obra (un pequeño volumen de 85 páginas) -concebida como una continuación del "*Novum organum, sive indicia vera de interpretatione naturæ et regno hominis*" (1620) de Francis Bacon- se basa en un método de razonamiento no-probabilístico[44] y, dada la insuficiencia de la información disponible en la época, fue elaborada fundamentalmente a partir de especulaciones teóricas y no de la observación empírica[45], su influencia sobre los matemáticos europeos de ese período[46] en lo que respecta a la aplicación de la teoría de la probabilidad al proceso de evolución de las poblaciones y, en consecuencia, a la teoría matemática del riesgo fue de capital importancia[47].

A partir de estos resultados, en 1669, Ch. Huygens desarrolló una interpretación probabilística de la tabla de mortalidad de Graunt. Definió la probabilidad de que una persona de edad x sobreviva t años como el cociente entre los tamaños de las poblaciones de sobrevivientes de edad $x+t$ y de edad x de la población inicial (ℓ_0), $p_{x,t} = \dfrac{\ell_{x+t}}{\ell_x}$ y la probabilidad contraria (de que un individuo de edad x fallezca en el intervalo $(x, x+t)$) $q_{x,t} = 1 - p_{x,t} = \dfrac{\ell_x - \ell_{x+t}}{\ell_x}$ (para describir la distribución de probabilidades Huygens utilizó el cociente $\dfrac{q_{x,t}}{p_{x,t}}$, en vez de $p_{x,t}$ como se acostumbra en la actualidad). Consideró, asimismo, el caso particular en el que las probabilidades de fallecimiento antes o después de t años fueran iguales y, resolviendo la ecuación $\ell_{x+t} = \dfrac{1}{2}\ell_x$ con respecto a t, introdujo la noción de "*duración probable de la vida*" y, con la colaboración de

---

44. Su desarrollo parecería indicar que Graunt no conocía el "*De ratiotiniis in ludo aleæ*" de Huygens.

45. Los registros de defunciones clasificadas por causa para la ciudad de Londres se remontan a 1604 pero, dado que su clasificación por edades no fue registrada hasta 1728, la definición de la distribución por edades de la población encarada por Graunt requirió inevitablemente de supuestos adicionales, por ejemplo, que 36% de los fallecimientos se debían a enfermedades que, en general, atacaban a individuos menores de 6 años (es decir que sólo el 64% de los nacidos vivos superaban esa edad) y que la proporción de individuos con edades mayores a 76 años era del 1%. Para calcular las proporciones correspondientes a los intervalos de edades comprendidos entre 6 y 76 años, utilizó una especie de multiplicador (o "*proporción media*" de acuerdo con su nomenclatura) aproximadamente igual a 0,6, pero no explica la forma en que fue calculado. Según Ptouka, M. (1938) lo habría obtenido de la expresión $\dfrac{64-1}{100} = 0.63$; según Glass, D.V. (1950) habría empleado técnicas de interpolación con respecto a las diferencias de los valores $\ell_0 = 100$, $\ell_1 = 64$ y $\ell_{76} = 1$.

46. Entre los que cabe mencionar a los ingleses William Petty, George King y Charles Davenant, al francés Sébastien le Preste de Vauban, al alemán Johann Süssmilch y, muy especialmente, a los holandeses Ch. Huygens, Jan de Witt y Jan Hudde.

47. Como se verá más adelante en esta misma sección, fue Jakob Bernoulli ("*Ars conjectandi*" (1713)) quien, en el marco de la discusión acerca de las estadísticas de mortalidad, estableció el nexo entre la definición de probabilidad y el ámbito de las observaciones.

su hermano Lodewijk, el concepto de "*esperanza de vida*" de un individuo[48].

En 1671 se publicó "*Waerdye van Lyf-Renten*", en la que Jan de Witt, aplicando la noción de esperanza matemática de Huygens al cálculo de las rentas vitalicias, obtuvo la siguiente expresión para una renta vitalicia correspondiente a un individuo de edad x [49]:

$$a_x = E\left(a_{(T_x)}\right) = \frac{1}{\ell_x} \sum_{t=1}^{w-x-1} a_{(x)} d_{x+t}$$

donde: **i)** T_x denota la variable aleatoria "duración de la vida para un individuo de edad x ", cuya distribución de probabilidades es de la forma $\frac{d_{x+t}}{\ell_x}(t = 0,1,2,...)$, siendo $d_x = 0$ para $x \geq w$, y $\ell_x = d_x + d_{x+1} + ... + d_{w-1}$ (en términos intuitivos una variable aleatoria, según la nomenclatura de B. de Finetti, es un número unívocamente definido pero no conocido, o no conocido aún, ver Sec. 2.5); **ii)** d_x denota el número de fallecimientos con edades comprendidas en el intervalo $(x, x+1)$ y **iii)** $a_{(t)}$ está definida por $a_{(t)} = \sum_{j=1}^{t} (1+i)^{-j}$.

A partir de los mismos fundamentos, de Witt obtuvo la siguiente solución para la esperanza de vida de un individuo de edad x :

$$e_x = E(x) = \sum_{t=1}^{w-x-1} t \frac{d_{x+t}}{\ell_x}$$

En 1693 se dio a conocer "*An estimate on the degrees of mortality of mankind drawn from the curious tables of the births and funerals at the city of Breslau; with an attempt to ascertain the price of annuities upon lives*", de Edmond Halley, en el que figura la primera tabla de mortalidad por edades (calculada a partir de los datos proporcionados por un destacado científico y pastor evangelista, el Reverendo Caspar Neumann)[50] y su aplicación a la determinación del precio

---

48. Número esperado de años a vivir por un individuo de edad x .

49. Para la expresión de la fórmula de de Witt se utilizó notación moderna. Ya en 1652 se había presentado en Amsterdam una forma elemental de renta vitalicia -ideada por un banquero napolitano llamado Lorenzo Tonti- conocida como "*tontina*". Este sistema funcionaba de la siguiente forma: El estado emitía acciones de un cierto monto, las cuales eran vendidas entre un conjunto de personas de aproximadamente la misma edad. Luego este fondo era distribuido en partes iguales en forma de anualidad constante, a una tasa de interés dada, entre los sobrevivientes del grupo original, hasta la desaparición del último de sus integrantes. Dada una tasa de interés anual i y suponiendo que el grupo original estuviese compuesto por ℓ_x personas de edad x, la tasa de interés del fondo para el año t -ésimo después de su fundación sería $\frac{i\ell_x}{\ell_{x+t}}$.

50. En Breslau (Silesia) se llevaban registros de nacimientos y defunciones clasificados por sexo y edad desde fines del siglo XVI. Desde 1687 el Rev. Neumann utilizó estos datos para combatir ciertas supersticiones populares acerca de la influencia de las fases de la luna y de las edades climatéricas (edades divisibles por 7 y por 9) sobre la salud. En 1689 envió el resultado de sus investigaciones a Leibniz y éste informó sobre el particular a la Royal Society, la cual le encargó a Halley la construcción de la tabla de mortalidad a la que se hace mención en el texto. De esta tabla se podría decir que, al menos desde un punto de vista teórico, hizo que el seguro de vida fuera posible.

equitativo de las rentas vitalicias. La fórmula de Halley para el valor actual de una renta vitalicia correspondiente a un individuo de edad x, utilizando notación moderna, puede ser escrita de la siguiente forma:

$$a_x = \sum_{t=1}^{w-x-1} (1+i)^{-t} \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}$$

Obviamente la esperanza de vida se obtiene haciendo en esta expresión $i = 0$ [51].

Como ya se comentó, a pesar de su importancia teórica, hasta mediados del siglo XVIII la influencia de estas obras (y otras posteriores pertenecientes a A. de Moivre, Nicolaas Struyck, Thomas Simpson y Antoine Deparcieux) con respecto a la valuación del riesgo inherente a los contratos de seguro, fue prácticamente nula. Una prueba de ello es la total ignorancia de los postulados de la teoría de la probabilidad que revela la política de fijación de primas de las tres instituciones más importantes dedicadas al seguro de vida en Inglaterra, en el siglo XVIII, The Amicable Society, The Royal Exchange y The London Assurance.

La primera -fundada por el Obispo de Oxford, Sir Thomas Allen, en 1706- ofrecía seguros de largo plazo, admitiendo a todo individuo de buena salud con edad comprendida entre 12 y 45 años (hasta 2000 miembros), mediante el pago de una cuota fija anual. El monto anual recaudado era luego dividido en partes iguales entre los beneficiarios de los socios fallecidos en el transcurso del año. The Royal Exchange y The London Assurance, por el contrario, ofrecían pólizas de corto plazo (comúnmente anuales) a una tasa única del 5%, independientemente de la edad del asegurado[52].

La primera institución en aplicar -con extraordinario suceso- la teoría de la probabilidad y las estadísticas de mortalidad a la práctica del seguro, de acuerdo con el asesoramiento del matemático James Dodson ("*First lecture on insurances*" (1771)), fue The Society for Equitable Insurance on Lives and Survivorships a la cual le cabe también el mérito de la creación de una imagen del seguro de vida diametralmente opuesta a la de un juego de azar, cuya diferenciación -como se mencionó en páginas anteriores- hasta entonces no había sido clara[53].

---

[51]. Después de la publicación de este trabajo tan importante, Halley no retornó sobre estas cuestiones demográficas y actuariales. Esto quizás se haya debido a que, dada su función como editor de las Philosophical Transactions de la Royal Society (cargo que ejerció hasta 1678) y a la consecuente necesidad de contar con publicaciones de calidad en ámbitos variados de la ciencia, se vio en la necesidad de aprovechar su reconocida versatilidad y trabajar en temas tan alejados de sus campos habituales de investigación, como la astronomía y la geofísica.

[52]. Como una excepción -parcial- a esta regla de determinación de primas en forma quasi arbitraria merecen ser consideradas las sociedades formadas para adjudicar rentas vitalicias a viudas en el período 1750-70, en Holanda e Inglaterra.

[53]. A la muerte de Dodson, acaecida en 1757, lo sucedió como asesor de The Equitable el Reverendo Richard Price ("*Observations on revisionary payments*" (1771)) quien, en 1764, descubrió y editó en forma póstuma "*An essay toward solving a problem in the doctrine of chances*" de T. Bayes (ver Cap. 13). En 1775, al cabo de dos años de estudio sobre matemática del seguro bajo la dirección de su tío (R. Price), fue nombrado como actuario de The Equitable, William Morgan -a quien puede considerarse como el primero en desempeñar este cargo en forma estable como funcionario de una empresa aseguradora y en transformar el rol del actuario de empleado administrativo en experto matemático. Su trabajo "*Probability of survivorship*" (1783) le valió la medalla de oro de la Royal Society y su inmediata elección como miembro de dicha institución. La segunda generación de actuarios de la Equitable estuvo formada por Charles Babbage y el probabilista -nieto de Dodson- Augustus De Morgan ("*An essay on probabilities, and on their application of life contingencies and insurance offices*" (1838)).

Como únicas excepciones a esta corriente dedicada a las aplicaciones actuariales de la segunda mitad del siglo XVII pueden ser consideradas las siguientes publicaciones:

i) "*Cursus mathematicus*" (1670) de Juan Caramuel, cuatro tomos dedicados en gran parte a la historia y la filosofía de la matemática, de los cuales dos, titulados "*Mathesis biceps vetus et nova*", están dedicados al estudio de sistemas de numeración con base distinta de 10, al perfeccionamiento del sistema logarítmico Neperiano y al cálculo combinatorio. Contiene, además, una versión del "*De ratiotiniis in ludo aleæ*" de Huygens (pero atribuido al astrónomo danés Christiaan Longmontanus) y algunos intentos de solución de problemas sobre juegos de azar que no superan los resultados de Huygens.

ii) "*De legibus nature disquisitio philosophica*" (1672) de Richard Cumberland, escrito principalmente para refutar lo que denominó "*...ciertos conceptos errados en la filosofía de Thomas Hobbes*". En sus fundamentos sostiene (revelando un profundo conocimiento del contenido de la obra de Huygens) que, en la vida, las decisiones se basan siempre en el principio de utilidad esperada y que, en consecuencia, a partir de la enumeración pertinente del conjunto de los casos posibles y de acuerdo con las reglas de la teoría de la probabilidad, se pueden cuantificar los efectos aleatorios de las acciones humanas[54].

iii) "*A short treatise of combinations, elections, permutations and composition of quantities. Illustrated by several examples, with a new speculation of the differences of the power of numbers*" (1678) de Thomas Strode, el cual puede ser considerado como el primer tratado sobre teoría de la probabilidad en inglés y el último tratado clásico del siglo XVII. Aproximadamente la tercera parte de esta obra (que pasó totalmente desapercibida para sus contemporáneos) está referida al análisis combinatorio y el resto está dedicado a problemas relacionados con juegos de dados. A este respecto, los resultados de Strode referidos a la distribución de la suma de los resultados de un número arbitrario de dados con un número arbitrario de caras, fueron más avanzados que los de cualquiera de sus predecesores (debe tenerse en cuenta que los desarrollos de Cardano nunca fueron más allá del cálculo para 2 ó 3 dados, que los resultados de Galileo nunca alcanzaron un grado apreciable de generalidad y que, además, fueron publicados recién en 1718 y que, si bien en ciertos aspectos Pascal y de Fermat habían obtenido resultados de mayor importancia, su correspondencia no se publicó sino hasta 1679).

iv) "*Theologiæ christianæ principia mathematica*" (1699) de J. Craig, en la que (influido profundamente por el "*Essay on human understanding*" de J. Locke) se trata la ya comentada teoría de la credibilidad de los testimonios en función del número de intermediarios sucesivos, del período de tiempo y de la distancia de la ocurrencia del evento en cuestión[55].

En 1708 se publicó el "*Essai d'analyse sur les jeux de hazard*" de P.R. de Montmort. Este

---

[54]. Como se verá en la Sec. 2.4, este principio fue cuestionado por Keynes, J.M. (1921).

[55]. La fórmula "*perfectamente arbitraria*" (Pearson, K. (1978)) proporcionada por Craig mide la credibilidad de un testimonio mediante la probabilidad $p = x + (m-1)s + \frac{kT^2}{t^2} + \frac{qD^2}{d^2}$, donde x denota la probabilidad de que el primer testigo transmita el testimonio; m denota el número de testigos en la cadena; s denota la desconfianza que genera la transmisión; t denota el intervalo de tiempo transcurrido desde la primera transmisión; d denota la distancia del evento y k, T, q y D son constantes (cuyos valores también son arbitrarios). Otro trabajo, contemporáneo al de Craig, sobre el mismo tema es "*A calculation of the credibility of human testimony*", publicado en forma anónima y atribuido (según Pearson, K. (1978)) a G. Hooper.

ensayo, inspirado en el "*Ars conjectandi*" de J. Bernoulli[56], representó un considerable avance con respecto a los tratados de Ch. Huygens y B. Pascal y ejerció una importante influencia sobre "*De usu artis conjectandi in jure*" (1709) en el que Nikolaus (I) Bernoulli introdujo la aplicación de la teoría de la probabilidad al seguro marítimo y sobre el "*Treatise of annuities on lives*" (1725), en el que A. de Moivre -siguiendo los razonamientos de Graunt, de Witt y Halley- obtuvo importantes avances en la aplicación de la teoría del riesgo a las rentas vitalicias[57].

En el "*Essai d'analyse sur les jeux de hazard*" se tratan por primera vez las distribuciones de probabilidades que hoy se conocen como multinomial e hipergeométrica multidimensional[58], y se introduce el concepto de "*expectativa de un jugador*" como el producto entre la apuesta total y su probabilidad de ganar un juego. A partir de esta relación de Moivre[59] desarrolló el concepto de juego equitativo (fair play) como aquél en el cual el cociente entre las apuestas de los dos jugadores es igual al cociente de sus probabilidades de ganar, definiendo como "*ventaja de un jugador*" a la diferencia entre su expectativa y su apuesta[60]. La segunda edición de esta obra (publicada en 1713) contiene además la correspondencia intercambiada por de Montmort con Nikolaus (I) y Johann (I) Bernoulli entre 1710 y 1713, en la que figura la solución de distintos problemas clásicos sobre juegos de azar entre los que cabe mencionar el problema de Waldegrave[61], el hoy conocido como problema de San Petersburgo[62] y el ya mencionado problema de la duración del juego o de la ruina de los jugadores. En su correspondencia con de Montmort, N. Bernoulli expone su aplicación de los resultados obtenidos por su tío Jakob al problema de la estabilidad de la proporción entre el número de nacimientos masculinos y femeninos en Londres, que le permitió desarrollar una generalización

---

56. Si bien el "*Ars conjectandi*" se publicó en 1713, en Francia ya se tenía referencia sobre los trabajos de J. Bernoulli a través de los comentarios de Jakob Hermann -uno de sus discípulos, encargado por Leibniz para ordenar sus manuscritos- y por obra de Bernard Le Bovier Fontenelle y Joseph Saurin quienes, en 1705, publicaron un "*Ëloge de Monsieur Bernoulli*".

57. Este fue el primer tratado sobre teoría del riesgo dedicado exclusivamente a las rentas vitalicias.

58. Estas distribuciones de probabilidades serán tratadas con detalle en el Cap. 7.

59. "*The doctrine of chances*" (1718).

60. Sea un juego que admite dos contendientes, A y B. Sean a, b, p y $q = 1 - p$, respectivamente, las apuestas y las probabilidades de ganar de cada uno de los jugadores. El juego se considerará equitativo cuando se verifique que $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$. La ventaja de A estará dada por $p(a+b) - a = bp - aq$. Obviamente, si el juego es equitativo esta ventaja será nula. Una interpretación subjetivista de la equitatividad en función del cociente de las apuestas será analizada en la Sec. 2.5.

61. Sean n jugadores $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Supóngase que jueguen A_1 y A_2, pagando el perdedor una recompensa a un fondo común y quedando fuera del juego hasta que jueguen todos los demás jugadores. El vencedor juega con A_3, pagando el perdedor la recompensa al fondo común, y así sucesivamente. El juego finaliza cuando el vencedor del primer juego vence a todos los demás jugadores, recibiendo como premio el monto acumulado en el fondo común. Hasta que esto ocurra el juego vuelve a comenzar.¿Cuál es la probabilidad de cada jugador de ganar el fondo común? ¿Cuál es el valor esperado del juego para cada jugador? ¿Cuál es la probabilidad de una duración dada del juego? (las soluciones a estos problemas proporcionadas por N. Bernoulli y el mismo Waldegrave dieron origen al principio de "minimax" en la teoría de los juegos de estrategia, desarrollada recién a partir de 1920 en los trabajos de Emile Borel, John von Neumann y, fundamentalmente, en "*Theory of games and economic behavior*" (1944) de J. von Neumann y Oskar Morgenstern).

62. Sea A un jugador que arroja sucesivamente un dado "clásico" (es decir, tal que la probabilidad a asignar a cada uno de sus resultados posibles es la misma), pagando al jugador B la suma 2^{x-1}, si el resultado "seis" se da por primera vez en la x-ésima tirada ($x = 1,2,\ldots$). ¿Cuál es el valor esperado del juego para A ? (las distintas soluciones que generó este problema se encuentran tratadas con detalle en el Apéndice 1).

de la ley de los grandes números[63].

En 1713 -en forma póstuma-, como recopilación de sus trabajos inéditos sobre teoría de la probabilidad de los 20 años anteriores -y por obra de su sobrino Nikolaus (I)-, se publicó el "*Ars conjectandi*" de Jakob (I) Bernoulli[64]. Una obra que, por su tratamiento absolutamente novedoso de la evidencia empírica, modificó los fundamentos del cálculo de probabilidades a tal punto que, para muchos autores, debe ser considerada como el verdadero punto de partida de la teoría de la probabilidad y la culminación del proceso de formación del concepto de probabilidad[65].

La contribución fundamental de J. Bernoulli -incluida en la "*Pars quarta: Fradens usum et applicationem procedentis doctrinæ in civilibus, moralibus et œconomicis*" del "*Ars conjectandi*"[66]- consistió en: **i)** proporcionar la primera definición subjetiva de probabilidad en un contexto matemático: "*...probabilitas enim est gradus certitudinis & ab hac differt ut pras à toto*"; **ii)** a partir del tratamiento cualitativo formal del principio postulado por los apologistas ingleses de la teología natural del siglo XVII[67] de que se podía aprender a partir de la experiencia, de que cuanto mayor fuera la cantidad de información con que contara el observador más aproximada sería su estimación del verdadero valor[68], demostrar que este aprendizaje era cuantificable a través de un proceso de inversión de la probabilidad (paradójicamente, poco después de la publicación del "*Ars conjectandi*", esta definición que trasladaba el eje central del razonamiento de las expectativas a las probabilidades, de los resultados posibles equiprobables a las medidas de incertidumbre, desapareció del ámbito de la teoría matemática de la probabilidad) y **iii)** en consecuencia, asumiendo

---

63. A pesar de sus méritos, el "*Essai d'analyse sur les jeux d'hazard*" nunca pudo alcanzar la popularidad de los tratados de Jakob Bernoulli y de Moivre, debido quizás a que se trataba de la obra de un "*amateur*" y no de un matemático de renombre. Esta circunstancia hizo también que sus contribuciones -igual que las de N. Bernoulli (por ejemplo, "*De usu artis conjectandi in jure*" (1709))- fueran subestimadas por muchos autores de la época.

64. La familia Bernoulli puede ser considerada la más sobresaliente de la historia de la matemática. Entre 1650 y 1800 contó con ocho excelentes matemáticos entre los que se destacan Jakob I, su hermano Johann I, dos de los hijos de este último, Nikolaus I y Daniel, y Nikolaus II, hijo de Nikolaus I (ver Apéndice 3).

65. Según se puede concluir de su correspondencia con G. W. Leibniz, si bien muchos de los desarrollos que figuran en al "*Ars conjectandi*" ya se encontraban en sus "*Meditationes*" (1684-1690), J. Bernoulli trabajó en esta obra (quizás la más importante en el ámbito de la teoría del azar hasta la aparición de la "*Théorie analytique des probabilités*" (1812-1820) de P.S. Laplace) durante los dos últimos años de su vida, es decir que estaba fundamentalmente concluida en 1705. Después de su fallecimiento sólo fue sometida a ligeras modificaciones pero, debido a disputas familiares, no fue publicada hasta 1713.

66. El "*Ars conjectandi*" consta de cuatro partes, la primera contiene comentarios y generalizaciones de las demostraciones del "*Ratiotiniis in ludo aleæ*" de Huygens, la segunda está referida al cálculo combinatorio, la tercera utiliza los resultados de las partes anteriores en la resolución de problemas sobre juegos de azar y la cuarta, en la que figura su famoso teorema (conocido hoy como ley débil de los grandes números) está dedicado a la noción de probabilidad.

67. El avance en el conocimiento de los fenómenos naturales durante el siglo XVII redujo en forma drástica el lugar que tradicionalmente la religión cristiana había adjudicado a su explicación por medio de la Divina Providencia y los milagros (debe destacarse, en este proceso, la influencia de la filosofía mecánica de René Descartes). Como consecuencia de este movimiento muchos científicos -a la vez que devotos protestantes- miembros de la Royal Society (entre los que merecen ser mencionados Joseph Granvill, John Wilkins, Marin Mersenne, Pierre Gassendi, Hugo Grotius, John Tillotson y Robert Boyle) consideraron el estudio de la naturaleza como parte de su deber religioso de poner de manifiesto la armonía del mundo creado por Dios a partir de la definición de fundamentos racionales para el cristianismo. Este proceso condujo al surgimiento de una teología natural o racional que dejaba muy poco espacio a la componente espiritual original de la religión cristiana.

68. Algunas sugerencias sobre este principio también pueden ser halladas en las ya mencionadas "*De incerti æstimatione*" (1678) de Leibniz y "*La logique ou l'art de penser*" (1662) de A. Arnauld y P. Nicole. En realidad, Bernoulli consideró al" "*Ars conjectandi*" como una extensión del "*Ars cogitandi*" de Arnauld y Nicole.

ciertas hipótesis de simplicidad y regularidad, establecer el nexo entre las probabilidades "a priori" (definidas a partir de un razonamiento de las causas a los efectos, es decir, de la simetría de los resultados posibles al concepto de equiprobabilidad) y las probabilidades "a posteriori" (definidas a partir de un razonamiento de los efectos a las causas que iba de las ya mencionadas estadísticas sobre mortalidad introducidas por Graunt a la probabilidad de fallecimiento)[69].

Esta demostración formal del principio asociacionista de Locke[70] de que la incertidumbre disminuía en la medida en que se incrementaba el número de observaciones y la cuantificación de dicho proceso -conocida luego como la primera ley (débil) de los grandes números-, constituyó el primer teorema límite de la teoría de la probabilidad[71]. Este teorema puede ser considerado como el primer paso en el proceso de la inversión de la probabilidad, cuya culminación se encuentra en "*An essay toward solving a problem in the doctrine of chances*" (1764) de Thomas Bayes[72].

En 1733, el "*Hugonote refugiado Abraham de Moivre*"[73], continuando la línea teórica encarada por N. Bernoulli en el ya mencionado problema de los sexos en los nacimientos de la ciudad de Londres, obtuvo la definición de la función Normal como una nueva aproximación a la distribución binomial[74]. Este resultado, al cual de Moivre asignó gran importancia, fue publicado bajo el título de "*Approximatio ad summam terminorum binomii (a+b)ⁿ in seriem expansi*" y constituyó el primer teorema central del límite[75]. La obra de de Moivre -la cual contiene los únicos progresos en el desarrollo de la teoría de la probabilidad producidos entre 1718 y 1738- consta fundamentalmente de tres tratados[76]:

i) "*The doctrine of chances: or a method of calculating the probability of events in play*" (1718),

---

69. Para el desarrollo de esta interpretación (que se encuentra en la correspondencia intercambiada con Leibniz entre octubre de 1703 y abril de 1704), Bernoulli utilizó un modelo elaborado a partir de una probabilidad "a priori" calculada en base a extracciones con reposición de una urna con bolillas de diferentes colores que representaban enfermedades mortales. Las hipótesis sobre las cuales se basó su razonamiento eran: **i)** que, de la misma forma que la urna se encuentra llena de bolillas en una proporción estable, el cuerpo humano está "*lleno*" de enfermedades y **ii)** que "*la naturaleza observa los comportamientos más simples*".

70. Mencionado en la Sec. 2.4 y analizado con más detalle en la Sec. 2.7.

71. Como ya se mencionó, la forma más rudimentaria de la ley de los grandes números es atribuible a G. Cardano, quien demostró ("*Practica aritmeticæ et mensurandi singularis*" (1539)) que el número de ocurrencias de un resultado, en una "*larga serie*" (n) de repeticiones independientes de un fenómeno de comportamiento eventual (X), es aproximadamente igual a np (donde p denota la probabilidad "a priori" de ocurrencia de dicho resultado en una repetición determinada). Una idea similar puede hallarse en E. Halley ("*An estimate on the degrees of mortality of mankind drawn from the curious table of the births and funerals at the city of Breslau*" (1693)) y, según se vio, en A. Arnauld y P. Nicole ("*La logique ou l'art de penser*" (1662)).

72. Ver Cap. 13.

73. De acuerdo con la calificación de Shafer, G. (1990).

74. Las distribuciones de probabilidades binomial y Normal serán tratadas con detalle en el Cap. 7.

75. La demostración de este teorema, así como su papel en la formación del proceso de inferencia, serán tratados en el Cap. 12.

76. Schneider, I. (1968): "*Entre el 'De ratiotiniis in ludo aleæ" de Huygens y la primera edición de la "Doctrine of chances" de de Moivre, la complejidad de los problemas y la consiguiente sofisticación de los métodos matemáticos habían avanzado de los simples cálculos de la expectativa mediante la utilización de un mínimo ingrediente de álgebra, a los cálculos sobre la duración de un juego utilizando métodos que, para la época, implicaban técnicas avanzadas de análisis*".

que es una versión ampliada de una memoria publicada en 1711 bajo el título de "*De mensura sortis, seu, de probabilitate eventuum in ludis casu fortuito pendentibus*".

ii) "*Annuities upon lives: or the valuation of annuities upon any number of lives; as also of reversions. To which is added an appendix concerning the expectations of life, and probabilities of survivorship*" (1725) que, si bien -como ya se comentó- no influyó demasiado sobre la valuación del precio de las rentas vitalicias, se convirtió en la referencia obligada de los matemáticos del siglo XVIII que abordaron problemas actuariales[77] y, como tal, en una obra representativa de la evolución de los conceptos y métodos relacionados con las aplicaciones de la teoría de la probabilidad a los problemas de mortalidad[78]. En esta obra se plantea, en particular, una definición de esperanza de vida en términos "*...del tiempo que una persona de una edad dada puede esperar continuar con vida*", como opuesta al método que consideraba la suma total de los años vividos por toda la población dividido por el número de individuos de dicha población[79].

iii) "*Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*" (1730), en la que figuran importantes demostraciones sobre series recurrentes (en particular la aproximación a $\log(n!)$) que le permitieron llegar al umbral mismo de la definición de la función Normal y cuya expresión definitiva obtuvo después del desarrollo de la hoy conocida como fórmula de de Moivre-Stirling.

Entre el creciente número de matemáticos que en la segunda mitad del siglo XVIII intervinieron en el desarrollo de la teoría de la probabilidad, cabe mencionar los aportes realizados por D. Hartley y Leonhard Euler. En su "*Observations on man, his frame, his duty and his expectations*" (1749), Hartley proporcionó los fundamentos matemáticos a la ya mencionada doctrina de la asociación de ideas de Locke, la cual, como se verá en la Sec. 2.7, permitió la relacionar las interpretaciones cualitativa y cuantitativa de la evidencia y vincularlas con la interpretación subjetivista de la probabilidad.

En lo que se refiere a Euler, la mayor parte de su obra en el ámbito de la teoría de la probabilidad (en la que se destacan las memorias "*Solution d'une question très difficile dans le calcul des probabilités*" (1753), "*Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre*" (1753), "*Sur la probabilité des séquences dans la lotterie Génoise*" (1763), "*Solutio quarundam quœstionum*

---

77. Entre los que cabe destacar a N. Struyck ("*Calcul des rentes viagères*" (1740)), Thomas Simpson ("*The doctrine of annuities and reversions, deduced from general an evident principles: With useful tables, shewing the values of single and joint lives, etc. at different rates of interest*" (1742), "*The valuation of annuities for single and joint lives, with a set of new tables for more extensive than any extant*" (1752)), A. Deparcieux ("*Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine*" (1746)), J. Dodson ("*First lecture on insurances*" (1756)) y R. Price ("*Observation on revisionary payments*" (1771)).

78. Esta obra de de Moivre y los manuales de Struyck, Simpson y Deparcieux está elaborados sobre bases aritméticas muy simples (debe tenerse en cuenta que, en sus orígenes, la tarea del actuario estaba vinculada más a cuestiones contables y administrativas que a problemas matemáticos). Habitualmente las reglas algebraicas estaban expresadas en forma literal y las demostraciones estaban relegadas a los apéndices. En general, a fin de facilitar los cálculos, incluían numerosas tablas sobre rentas vitalicias calculadas por edades, por número de cabezas y por tasas de interés. A pesar de todos estos recaudos, como se mencionó en páginas anteriores, su impacto sobre la práctica del mercado asegurador fue, hasta su adopción en 1762 por The Equitable Society for the Assurance of Lives (1762), prácticamente nula.

79. Posiblemente en esta disparidad de opiniones sobre la mejor forma de calcular la esperanza de vida -que dividió a los escritores del siglo XVIII-, en la controversia acerca de la validez de ciertos supuestos simplificadores y en la consecuente desconfianza en los datos proporcionados por las diferentes tablas de mortalidad, se hallen las causas principales de la resistencia de las compañías inglesas de seguro sobre la vida a aplicar la teoría de la probabilidad al cálculo de las primas.

difficiliorum in calculo probabilium" (1785)) está referida al estudio de los problemas relacionados con la conocida como lotería genovesa (o "*loterie de l'École Militaire*", según la denominación de P.S. Laplace en la "*Mémoire sur les suites récurro-récurrentes et sur leurs usages dans la théorie de hazard*" (1774))[80].

Otros importantes trabajos de Euler se refieren a las aplicaciones de la teoría de la probabilidad a problemas que posteriormente constituyeron los fundamentos de la demografía matemática ("*Sur la multiplication du genre humain*" (1750-1755), "*Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain*" (1767)) y al desarrollo de la ciencia actuarial[81].

En su memoria "*Mensura sortis ad fortuitam successionem rerum naturaliter contingentium applicata*" (1770-1771) Daniel Bernoulli desarrolló una nueva forma de obtención de la función Normal como aproximación a las probabilidades binomiales e introdujo la idea de aplicar el cálculo diferencial a problemas de probabilidades[82]. No obstante, su trabajo más conocido en el ámbito de la teoría de la probabilidad es "*Specimen theoriæ novæ de mensura sortis*" (1738), en el que trata el ya mencionado "problema de San Petersburgo" e introduce el concepto de "*esperanza moral*" como alternativo al de esperanza matemática[83].

---

80. Aunque proscriptas por la Iglesia (debe tenerse en cuenta que, en general los juegos de azar fueron interpretados, en general, como una profanación del método de expresión de la voluntad divina), las loterías fueron conocidas en Europa occidental desde el siglo XV, pero alcanzaron su más alto grado de popularidad a fines del siglo XVII especialmente en Holanda e Inglaterra. Las más conocidas fueron la Glückshafen (o tómbola) de los Habsburgo (1470), la de Lovaina (1520), la de Brujas (1538) y las creadas por Francisco I de Francia e Isabel I de Inglaterra en 1538 y 1566, respectivamente. La lotería genovesa fue creada a comienzos del siglo XVII. En 1749, Federico II de Prusia decidió incorporarla como medio para incrementar los fondos públicos y, con este fin, consultó a Euler respecto de sus aspectos técnicos. Previos a los trabajos de Euler, merecen ser citadas las siguientes publicaciones sobre el cálculo de las probabilidades de la Lotería Genovesa "*Mathesis biceps, vetus et nova*" (1670) de Juan Caramuel, "*Abregé des combinaisons*" (1729) de Bernard Frenicle de Bessy (este autor falleció en 1675, de modo que su trabajo debe ser muy anterior a la fecha de su publicación), "*Ludus serio expensus*" (1700) de G.M. Stampa y "*De usu artis conjectandi in jure*" (1709) de N. Bernoulli.

81. Gran parte de sus aportes en este ámbito fueron editados y comentados por su discípulo (y yerno), el matemático suizo Nikolaus Fuss ("*Eclaircissements sur les établissemente publics en faveur tant des veunes que des morts avec la description d'une nouvelle espèce de tontine aussi favorable au public qu'utile á l'état, calculés sous la diréction de Monsieur L. Euler*" (1776)).

82. Muchos autores consideran que la influencia que ejerció este trabajo sobre la obra de Laplace es comparable a la ejercida por los trabajos de A. de Moivre (ver Sheynin, O.B. (1970)).

83. Ver Apéndice 1.

Capítulo 2.- Las interpretaciones de la noción de probabilidad

"*Rumiando alguna fórmula que salve lo poco que le queda, agotados los métodos que salven, extinguidos los plazos, no importa: hoy juega, juega hoy, hoy se la juega. Los últimos metálicos subsisten, resabios de una deuda. Extenuados los últimos contactos, los últimos mangazos no importa; hoy juega, juega hoy, hoy se la juega. Si lo mordió un perro el 45, inundaciones el 02, lo pisó una aplanadora el 57, lo miró una morocha mirá vos; si soñó con focas el 25, si perdió una mano el 03, se cayó de un zepelín el 17, se tragó un ladrillo el 10; si una planta le crece el 26, si un planta no le crece el 33; dá buena suerte y fortuna la pluma del caburé. Y si no le alcanza toda esa cábala infalible, recurre a textos científicos especializados e imprescindibles, redactados y compaginados por matemáticos y astrólogos ilustres y que se encuentran en todas las librerías posibles. Qué cosa bárbara es la cultura, ¿no le parece?*"

(J. Lazarof: "*Ley de probabilidades*")

2.1.- Introducción

Esa aleatoriedad (epistemológica u ontológica) analizada en el capítulo precedente que, en todos los casos, impide al observador definir una estructura capaz de explicar de una manera completa el comportamiento de un fenómeno, genera en él un sentimiento de incertidumbre cuya representación cuantitativa formal está dada por la probabilidad[84].

Esta definición de probabilidad como lógica inferencial del conocimiento incierto da origen a dos cuestiones fundamentales que serán motivo de análisis en este capítulo: **i)** ¿Cómo puede ser caracterizado un sentimiento de incertidumbre mediante una probabilidad definida numéricamente?

---

84. Debe tenerse en cuenta que, aún en una concepción completamente determinística, las probabilidades no pueden ser inherentes a los fenómenos en forma objetiva, sino relativas a la ignorancia del observador. Laplace, P.S. (1814): "*La curva descripta por una simple molécula de aire o vapor está regulada de una forma tan cierta como las órbitas planetarias; la única diferencia entre ellas se debe a nuestra ignorancia. La probabilidad es relativa, en parte a esta ignorancia, en parte a nuestro conocimiento. Sabemos que de tres o más eventos uno debe ocurrir, pero nada nos induce a creer que uno de ellos ocurrirá con más frecuencia que los otros. En este estado de indecisión nos es imposible predecir su ocurrencia con certeza*".

y **ii)** ¿Se puede asegurar que todo sentimiento de incertidumbre es representable por una probabilidad numérica?

A fines del Renacimiento los distintos supuestos a que dieron lugar estas cuestiones originaron una noción de probabilidad objetiva basada en el concepto de **expectativa** y, posteriormente, en una interpretación esencialmente dual que asimiló la probabilidad, ya sea a una expresión deductiva basada en la simetría de la aleatoriedad inherente a algunos eventos -interpretación clásica-, ya sea a la frecuencia con la que se verifican ciertos fenómenos -interpretación frecuencista. En el primer caso la probabilidad queda determinada por los modos posibles de presentarse los resultados de un fenómeno, en el segundo por las frecuencias observadas de dichos resultados.

Apenas un poco más tarde -y siempre con la finalidad de aproximarse cada vez más a su noción intuitiva- surgió una tercera interpretación (logicista) que asimila la probabilidad a una relación lógica indefinida entre una proposición y un cuerpo de conocimiento. El agregado a la conceptualización logicista de la inevitable intervención en el proceso de inducción del individuo-evaluador como mecanismo transformador de la información, dio origen a una definición subjetiva (personalista) más general de probabilidad.

Ante el fracaso en el intento de hallar una definición universal de la noción de probabilidad mediante una fórmula más o menos compleja, se planteó la posibilidad de un retorno a una interpretación en cierta forma objetivista, a partir de definiciones menos estrictas basadas en una variante del logicismo conocida como teoría de las propensiones, que asocia el concepto de probabilidad al de las posibilidades potenciales.

Esta diversidad de planteos parece sugerir "*... que la probabilidad contiene algo de proteiforme, bastante difícil de precisar*"[85]: por una parte aparece como un concepto "a priori" independiente de cualquier prueba o verificación experimental y, por otra, aparece relacionada con la experiencia y su asociación con los grados de creencia asumidos por el observador.

Como se verá, asociada al desarrollo de la teoría del azar existió una marcada insistencia en cada una de estas interpretaciones por obtener una definición explícita de la probabilidad, una axiomática consistente en sí misma y una consecuente estructura inferencial asociada. Esta última pretensión constituye una prueba del dogmatismo que tiñó a cada una de las aproximaciones (y que afectó a los fundamentos mismos de la inferencia)[86], consistente en suponer que la probabilidad posee un significado único y bien definido, y que cualquier conceptualización diferente a la asumida debe ser considerada como errónea[87].

En las secciones siguientes se analizarán los principios filosóficos que dieron lugar a las distintas interpretaciones de la noción de probabilidad, las definiciones que cada una de éstas

---

[85]. Costantini, D.; Geymonat, L. (1982).

[86]. Resulta realmente paradójico que la historia de la teoría de la probabilidad, cuyo núcleo central es el estudio de la incertidumbre, esté impregnada de una dosis tan alta de dogmatismo.

[87]. A pesar de que este planteo puede ser hallado en forma explícita en autores anteriores, se lo conoce como **dogmatismo Laplaciano**. Si bien, para Laplace y los probabilistas clásicos la definición de probabilidad constituyó una condición quasi-necesaria para el desarrollo tanto de la inferencia como de la teoría de la probabilidad, la posición de Laplace no es plenamente dogmática: es recién en el siglo XX que el dogmatismo Laplaciano se convierte -con muy pocas excepciones- en el modo preferido para analizar los fundamentos de la inferencia inductiva (ver Sec. 3.3.10).

generó, sus aciertos y sus limitaciones.

2.2.- La interpretación clásica

Existe un tipo muy especial de eventos que se presentan en aplicaciones referidas a ramas muy particulares de la ciencia y, fundamentalmente, en problemas relacionados con la teoría de los juegos de azar, que se caracterizan porque el mecanismo físico que genera la aleatoriedad incluye en forma simétrica a todos los resultados posibles, lo cual permite la determinación "a priori" de sus probabilidades de ocurrencia a partir de consideraciones exclusivamente deductivas.

Si bien, como se mencionó en la Sec. 1.1, las necesidades que constituyeron el punto de partida fueron muy distintas (problemas referidos a fenómenos de las ciencias económicas y actuariales), fue precisamente su asimilación a los juegos de azar la que originó el desarrollo de los estudios sobre la probabilidad que conformaron lo que luego se dio en llamar la escuela clásica. La conocida como definición clásica expresa que, dado un fenómeno particular, la probabilidad de ocurrencia de un resultado eventual (E) que posee un atributo $S \in \Omega$, donde Ω denota el conjunto de sus posibles resultados, está dada por el cociente entre el número m de resultados que satisfacen el atributo S (resultados "favorables" al atributo S) y el número total n de resultados posibles, suponiendo que estos n resultados posibles sean mutuamente excluyentes, formen un conjunto finito y, como se expresó más arriba, sean todos igualmente probables[88]:

$$p(E) = \frac{m}{n}$$

La literatura crítica de los siglos XIX y XX ha tratado largamente la tautología que encierra el supuesto de equiprobabilidad de los resultados posibles de la definición clásica y sobre todo su intento de justificación a partir del principio Laplaciano (subjetivista) de la razón insuficiente, según el cual "*La teoría de la probabilidad consiste en reducir todos los eventos de la misma clase a un cierto número de casos igualmente posibles, es decir, tales que podamos estar igualmente indecisos acerca de su ocurrencia*"[89]. Desde la perspectiva histórica de estos comentaristas se concluye en forma inmediata que, si la expresión "*igualmente posibles*" es considerada como sinónimo de igualmente probables entonces, excepto que el concepto de equiprobable pueda ser definido en forma independiente del concepto de probable, la circularidad de la definición es innegable. Por otra parte, dado que el principio de indiferencia[90] genera paradojas que impiden proporcionar valores de probabilidad únicos, es obvio que no sirve como argumento contra dicha circularidad[91] (debe tenerse en cuenta que, como se verá en la Sec. 3.1.1, para autores como Cournot, A.A. (1843), Chuprov, A.A. (1910), Markov, A.A. (1912), Hadamard, J. (1922), Lévy, P.P. (1925), Slutsky, E.

---

88. Esta definición aparece mencionada por primera vez en el "*Liber de ludo aleae*" de Gerolamo Cardano. Esta obra, escrita alrededor de 1526 y publicada en 1663, resume los resultados de un siglo y medio de trabajosas investigaciones sobre el tema.

89. Laplace, P.S. (1814).

90. Keynes, J.M. (1921): "*El principio de indiferencia sostiene que, si no existe ninguna 'razón' conocida para privilegiar una alternativa con respecto a otras entonces, con relación a nuestro conocimiento, las afirmaciones sobre cada una de las alternativas poseen la misma probabilidad*".

91. Ver Keynes, J.M. (1921). Como se verá en la Sec. 2.4, von Kries, J. (1886) y Stumpf, C. (1892), a partir de una interpretación logicista de la probabilidad, intentaron (en vano) evitar este problema de la circularidad.

(1925) y Kolmogorov, A.N. (1933), si bien la equiprobabilidad es una condición matemática no verificable empíricamente, constituye el fundamento de la teoría de la probabilidad).

Con respecto a este problema de la circularidad de la definición clásica debe tenerse en cuenta que, como se mencionó en la Sec. 1.3, en virtud del contexto económico-legal de los contratos aleatorios en el que se desarrolló la probabilidad clásica, los probabilistas de los siglos XVI y XVII no razonaron en términos de probabilidades sino en términos del concepto de expectativa o esperanza matemática[92], entendida como la relación entre un presente cierto y un futuro incierto, entre una cantidad cierta (apuesta) a pagar hoy para recibir una cantidad aleatoria futura si un evento dado se verifica. Es decir, en términos de precios equitativos[93].

Ya en el siglo XVI los contratos aleatorios constituían una categoría en el derecho civil, la cual incluía no sólo los seguros sino también las rentas vitalicias, las expectativas de herencia, las loterías y, en general, las inversiones sobre operaciones comerciales sujetas a riesgo (es decir, contratos en los que el riesgo era considerado como un bien con valor comercial)[94]. La legislación estaba dirigida a asegurar a todas las partes del contrato la máxima ecuanimidad o igualdad en los términos del mismo, es decir, a determinar el valor actual (cierto) de una ganancia futura (incierta) que preservara el principio de equidad[95].

En general, la pretensión de los juristas de los siglos XVI y XVII[96] consistía en igualar la ganancia a obtener sobre ciertas inversiones de resultado incierto que no implicaban trabajo, con las sumas pagadas por tareas realizadas o por servicios prestados y evitar así las proscripciones de la Iglesia contra la usura[97]. En gran medida esta cuestión estaba relacionada con la figura del socio que asumía el "péril des deniers" (es decir, que emitía la póliza de seguro sobre la operación) y la necesidad de definir su parte en el resultado del negocio (conocida como precio del riesgo), es decir, de determinar "*¿Cuál es el precio que debería ofrecerse a quienes se hacen cargo de los riesgos*

---

92. Interpretada como una noción primitiva, no como un elemento derivado del concepto de probabilidad tal como hoy se puede hallar en la literatura (ver Cap. 4).

93. Pascal y Fermat no utilizaron el término probabilidad en su correspondencia. Fue George Hooper quien introdujo por primera vez la palabra probabilidad en la literatura matemática en una memoria publicada a fines del siglo XVII (ver Shafer, G. (1986)).

94. Con respecto a la diversidad de la naturaleza de los contratos considerados como aleatorios, debe tenerse en cuenta que hasta comienzos del siglo XIX la distinción entre los juegos de azar y el seguro (entre la actitud de los "*...jugadores que pagan para asumir riesgos innecesarios*" y los "*...compradores de seguros que pagan para evitar las consecuencias de riesgos necesarios*" (Daston, L.J. (1988)) como dos aproximaciones a la teoría del riesgo, no fue muy clara. Es más, el seguro de vida -identificado con una apuesta sobre la vida de una tercera persona- fue considerado un posible promotor de crímenes y, como tal, considerado ilegal en la mayoría de los países europeos hasta principios del siglo XIX. "*... porque los hombres no están incluidos dentro de los términos del comercio, porque los hombres libres no pueden ser comprados ni vendidos, y porque un hombre libre no puede ser valuado según una cantidad de dinero*" (N. Magens: "*An essay on insurances*" (1755)).

95. El surgimiento de la noción de probabilidad como un concepto radicalmente nuevo, fue contemporáneo a la transición de Europa de una organización feudal a la organización social de la era mercantilista.

96. Entre los que cabe destacar a Charles Du Moulin ("*Summaire du livre analytique des contratz usures, rentes constituées, interestz & monnoyes*" (1554)), Francois Grimaudet ("*Paraphrase des droits des usures pignoratifs*" (1583)), R.P.E. Bauny ("*Somme des pechez qui se commettent en tous les états*" (1646)), Samuel Pufendorf ("*Le droit de la nature et des gens*" (1682)) y Jean Domat ("*Les loix civiles dan leur ordre naturel*" (1689-94)).

97. En realidad, los intentos de los juristas en diferenciar el seguro de la usura, la cual podía ser interpretada como asociada al concepto de riesgo, se remontan a la decretal "*Navigati*" dictada por el Papa Gregorio IX en el siglo XIII. En el siglo XVI a este problema se agregó el de la justificación de los montos surgidos de la valuación del riesgo.

y otros eventos fortuitos a los cuales todo está sujeto en el comercio y, en especial, el dinero? ¿Cuál es la cantidad, proporcional a una ganancia incierta e indefinida, que actúa como respaldo en una sociedad mercantil?"[98]

Como respuesta a este problema los probabilistas clásicos tomaron el concepto de expectativa como punto de partida y lo definieron cuantitativamente en términos del "*principale fundamentun in alea*"[99]: la equitatividad. Entendida ésta como el principio según el cual el riesgo al cual están sometidas las partes de un contrato aleatorio debe observar una justa proporción con su aporte[100].

En la medida que basaron sus desarrollos en este concepto primitivo (y no estrictamente definido) de equitatividad, se puede concluir que la (irritante) cuestión de la equiprobabilidad careció de sentido para los probabilistas del siglo XVII y que, en consecuencia, el problema de la tautología, para ellos, no existió.

La definición clásica[101] es la única definición de probabilidad que figura en la "*Théorie analytique des probabilités*" (1812-1820)[102]. Si bien Laplace considera, en esta obra, probabilidades de eventos que no están estrictamente relacionados con los juegos de azar, es decir, eventos para los cuales no se puede asegurar que todos los resultados tengan la misma probabilidad de verificarse, lo hace en forma indirecta, sin indicar en ningún caso el método a utilizar para determinar dichas probabilidades[103] (como se verá en la Sec. 3.1.2, la relación entre la definición clásica y el mundo de la experiencia se basa fundamentalmente en el principio determinístico de Cournot, A.A. (1843) que sostiene que un evento con probabilidad muy pequeña o nula no ocurrirá). A partir de esta relación establece, implícitamente, su pretensión dogmática de fundamentar toda la inferencia inductiva sobre dicha definición clásica. Fue precisamente esta intención de hacer del concepto clásico la única representación válida de la verdadera naturaleza de la probabilidad la que puso en evidencia sus falencias, fundamentalmente la ya mencionada circularidad y la imposibilidad de su aplicación fuera del ámbito de la teoría de los juegos de azar en el cual se había originado[104].

Entre las nuevas aplicaciones a las que se pretendió extender las nociones probabilísticas cabe mencionar las propuestas por Karl Friederich Burdach al pensamiento epigénetico en

---

98. R.P.E. Bauny: "*Somme des pechez qui se commettent en tous les états*" (1646).

99. G. Cardano: "*Liber de ludo aleæ*" (1663).

100. "*El mismo riesgo de ganar o perder*" (S. Pufenforf: "*Le droit de la nature et des gens*" (1682)). En la nomenclatura de los juegos de azar este principio podría ser expresado de la siguiente forma: para que un juego pueda ser considerado equitativo, las esperanzas matemáticas de todos los jugadores deben ser iguales.

101. Conocida también como **fórmula de Laplace**.

102. Debe tenerse en cuenta que la obra de Laplace ejerció, en su tiempo, una enorme influencia y la interpretación clásica dominó el panorama de la teoría de la probabilidad al menos por un siglo.

103. Como se verá más adelante, estas probabilidades pueden ser aproximadas mediante la aplicación del teorema de Bayes (ver Sec. 3.3.8).

104. Como se verá en el Cap. 14, los trabajos de Laplace y Carl Friederich Gauss, en particular la obtención de su célebre curva y el descubrimiento de que ésta era aplicable a los ámbitos más dispares, ejerció tal influencia sobre los investigadores del siglo XIX y comienzos del siglo XX, que hizo que todos los métodos de inferencia inductiva que no se basaban en la teoría clásica desaparecieran de los tratados sobre probabilidad.

biología[105], por G.T. Fechner a la relación entre lo físico y lo psíquico, entre lo corporal y lo espiritual[106], por L. Boltzmann a la reformulación de la segunda ley de la termodinámica[107], por J.C. Maxwell a la teoría cinética de los gases[108] y por Francis Galton[109] y Karl Pearson[110] a la teoría Darwiniana de la herencia.

Esta extensión de la teoría de la probabilidad al ámbito de la física, la biología, la psicología y la sociología trajo aparejados cambios radicales en los métodos de investigación de dichas ramas de la ciencia[111]. Pero, a su vez, este cambio en el pensamiento científico generó una nueva interpretación de la noción de probabilidad y su reconocimiento, en el dominio de la epistemología, como una herramienta fundamental en la investigación científica. En particular, condujo al traslado progresivo del concepto de probabilidad "a priori" clásica, basado en el supuesto de equiprobabilidad de los resultados, al de probabilidad "a posteriori" física, definida a partir de la "frecuencia relativa" que se obtiene como resultado de la observación repetida de un fenómeno en igualdad de condiciones[112].

2.3.- La interpretación frecuencista

La interpretación frecuencista -que, aunque sin una formalización rigurosa, ya figuraba en los tratados de los siglos XVII y XVIII- es apta sólo para calcular las probabilidades de ocurrencia de aquellos fenómenos considerados repetibles (es decir, observables repetidamente en igualdad de condiciones). No tiene sentido, en el contexto frecuencista, hablar de la probabilidad de ocurrencia de un fenómeno único o de la probabilidad de que una proposición sea verdadera o falsa. Las probabilidades calculadas a partir de esta interpretación son objetivas y, por lo tanto, independientes de la opinión del individuo-evaluador.

A partir de los trabajos de Siméon Denis Poisson (1837), Antoine Agustin Cournot (1838)(1843), Robert Leslie Ellis (1849), John Venn (1866) y del principio de asociación de ideas

---

105. "*Die Persönliche Besonderheit*" (1842).

106. "*Elemente der Psychophysik*" (1860).

107. "*Über die Beizehungen zwischen dem zweiten Hauptsätze der mechanischen Wärmetheorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung*" (1877).

108. "*Illustration of the dynamical theory of gases*" (1890).

109. "*Natural inheritance*" (1889).

110. "*Contributions to the mathematical theory of evolution*" (1893,1895,1896).

111. A comienzos del siglo XIX se incorpora a la interpretación clásica la **probabilidad geométrica** en la cual, sin modificar la definición original, el recuento de los casos igualmente probables es sustituido por la medida de su extensión geométrica (su área o su volumen). Como se verá en la Sec. 3.1.1.1, la formalización de esta generalización se debe a Cournot, A.A. (1843) y se mantuvo sin variantes cuando E. Borel y H. Lebesgue ampliaron la clase de conjuntos que admitía una definición de su extensión geométrica.

112. La distinción entre probabilidades "a priori" y probabilidades "a posteriori" obtenidas a partir de la observación, se debe a Jakob Bernoulli. Su "*Ars Conjectandi*" (1713) es el primer tratado de teoría de la probabilidad en el que se plantea no sólo la idea de que se puede aprender a partir de la experiencia sino que ese aprendizaje es cuantificable. Como se vio en la Sec. 1.3, durante el siglo XVII se generó una suerte de contraposición entre las actitudes de los observadores prácticos y las de los matemáticos, que se tradujo en diferentes interpretaciones de las probabilidades "a posteriori" y "a priori".

de John Locke -consistente en igualar experiencia, creencia y probabilidad- y como una reacción del empirismo británico contra el racionalismo continental de Laplace y sus seguidores, la escuela frecuencista intentó generar una interpretación que conciliara la teoría de la probabilidad con los principios del indeterminismo fundado por el físico y filósofo alemán Gustav Theodor Fechner a mediados del siglo XIX.

Fechner -a quien se reconoce como el creador de la psico-física[113] y el primer "*indeterminista universal*"[114]-, en una revisión de los principios de la mecánica clásica y, en particular, de la concepción determinística de la causalidad que rigió el pensamiento científico en el siglo XIX, desarrolló una variante de indeterminismo -objetivo y parcial- que lo llevó a postular que la naturaleza posee una cierta cantidad de aleatoriedad (indeterminación) que "*...depende de la 'libertad*'" y no "*...de nuestra ignorancia de las condiciones*"[115], y determinó la declinación del paradigma Laplaciano (que había dominado el panorama de la ciencia durante más de medio siglo) y la reformulación de la interpretación frecuencista de la probabilidad desarrollada por los autores de los siglos XVII y XVIII[116].

Los antecedentes del pensamiento de Fechner y, en general, de los filósofos y fisiólogos alemanes de la segunda mitad del siglo XIX, se encuentran en las ideas en biología y en filosofía de la historia imperantes en Alemania en la primera mitad del siglo XIX y en su reacción contra las especulaciones metafísicas del tardío idealismo alemán en filosofía de la ciencia[117]. La principal consecuencia de esta reacción, en lo que hace a la teoría del azar, fue la aplicación de métodos de investigación empíricos a la psicología (debe tenerse en cuenta que, en este contexto, esta disciplina abarcaba, además de asuntos como las emociones, las percepciones y las voliciones, la formación del concepto y la inferencia lógica, de modo que la probabilidad quedaba incluida en su ámbito).

En "*Über das Causalgesetz*" (1842)) a fin de demostrar la compatibilidad de las leyes causales con "*...la libertad y la indeterminación*"[118], Fechner introdujo la ya mencionada noción de "*indeterminación por novedad*" basada en el siguiente principio: En la evolución de los fenómenos dinámicos se van generando nuevas condiciones iniciales las cuales, de acuerdo con una ley general, conducen a efectos no ocurridos previamente y, por lo tanto, no permiten la recurrencia de comportamientos idénticos. Pero, no obstante, cada conjunto de dichas condiciones conserva alguna similitud con los anteriores por lo que, si bien todo fenómeno fáctico posee cierta dosis de

113. "*...la teoría exacta de la relación funcional o de la dependencia entre el cuerpo y el alma o, en términos más generales, entre lo corporal y lo espiritual, entre los mundos físico y psíquico*" ("*Elemente der Psychophysik*" (1860)).

114. Heidelberger, M. (en Krüger, L.; Daston, L.J.; Heidelberger, M. (eds.)(1987)).

115. "*Elemente der Psychophysik*" (1860).

116. Kamlah, A. (en Krüger, L.; Daston, L.J.; Heilderberger, M. (eds.)(1987)): "*Cuando los axiomas de la teoría de la probabilidad fueron derivados a partir de la definición de probabilidad como frecuencia relativa, y cuando se concluyó que los métodos para estimar cantidades físicas y distribuciones de probabilidades convertían en superfluo el principio de Bayes, entonces la teoría Laplaciana de la probabilidad murió*".

117. De autores como Christian Hermann Weisse, Immanuel Hermann Fichte y Hermann Lotze.

118. A partir de una clase especial de neo-Spinozismo según la cual lo espiritual y lo material constituyen dos aspectos bajo los cuales puede aparecer una misma cosa y, por lo tanto, la libertad del espíritu también debe manifestarse en el mundo físico, Fechner ("*Zend-Avesta, oder über die Dinge des Himmels und des Jenseits*" (1851)) concluyó que, si bien lo físico y lo psíquico están estrictamente coordinados, no existe ninguna relación causal entre ellos, que las leyes que los vinculan más que de interacción o sucesión, son de coexistencia.

aleatoriedad objetiva, su comportamiento no es completamente libre[119].

A partir de 1853 y hasta el final de su vida, la obra de Fechner -contenida fundamentalmente en "*Die mathematische Behandlung organischer Gestalten und Processe*" (1849) y en "*Kollektivmasslehre*" (1897)[120]- estuvo dirigida a desarrollar un lenguaje matemático-probabilístico-estadístico para su interpretación de la aleatoriedad en los fenómenos fácticos. Para ello se basó en la llamada **estadística moral** del astrónomo belga Adolphe Quetelet[121], en los estudios de Moritz Wilhelm Drobisch[122] sobre la relación entre dicha estadística moral y la libertad y en la teoría de los errores de observación no-sistemáticos desarrollada por los matemáticos C.F. Gauss, Johann Franz Encke, Friederich Wilhelm Bessel y K.F. Hauber[123].

Fechner tomó de Quetelet la idea de la analogía entre el modelo de Laplace sobre mecánica celeste y una física de la sociedad humana, es decir, de la asimilación de las leyes gravitacionales a las causas constantes que gobiernan la sociedad, en la que, al igual que las perturbaciones que afectan a los fenómenos físicos, las diferencias entre los individuos que la componen (las cuales no deben ser interpretadas como desvíos aleatorios del verdadero valor, sino como "*...la forma libre de reacción del individuo ante un estímulo*")[124] se distribuyen de acuerdo con una función de probabilidades[125] y se vuelven despreciables si se considera un número suficientemente grande de individuos. Estos postulados condujeron a Fechner al concepto de "*objeto colectivo*" ("*Kollektivgegenstand*") o "*serie colectiva*" ("*Kollektivereihe*") al que definió como un conjunto de

---

119. Entre las influencias de los idealistas alemanes merece una mención particular la ejercida sobre Fechner por K.F. Burdach, que se evidencia en el siguiente párrafo de su "*Die persönliche Besonderheit*" (1842): "*La naturaleza con sus leyes y sus fuerzas es eternamente inmutable: los elementos son siempre los mismos en todo lugar; descansando sobre el mismo fundamento aparecen fenómenos similares en todo lugar y en todo tiempo; y lo que ha agitado las emociones de una persona para quien el sol brilló por primera vez, también agitará el corazón de quien viva para ver cómo el sol alumbrará la tierra en el fin de los tiempos. Pero la sensación es que siempre volverá a ocurrir algo similar, no algo idéntico. La mayoría de los elementos admite una multiplicidad de combinaciones y, a través de la coincidencia de tales conexiones, surge un número infinito de series de circunstancias. La fuerza creativa del mundo es infinita en su esencia y, por lo tanto, es infinita en sus manifestaciones: inagotable en sus combinaciones, la naturaleza produce sólo novedades por toda la eternidad; no tolera la uniformidad ni admite que una ley la gobierne con rigidez estricta, sino que atempera su severidad mediante la interferencia de otra ley*".

120. Fechner no llegó a concluir esta obra. A instancias de la Royal Saxony Academy of Sciences, fue completada por Gottlob Friederich Lipps y publicada en 1897.

121. "*Sur l'homme et le développment de ses facultés*" (1835) (la segunda edición de esta obra, publicada en 1869, fue titulada como "*Essai de physique sociale*"), "*Sur la statistique morale et les principes qui doinent en former la base*" (1848).

122. "*Beiträge zur Orientierung über Herbart's System de Philosophie*" (1834), "*Moralische Statistik*" (1849), "*Die moralische Statistik und die menschliche Willensfreiheit*" (1867).

123. Ver Cap. 14.

124. Heidelberger, M. (en Krüger, L.; Daston, L.J.; Heidelberger, M. (eds.)(1987)).

125. Una propuesta revolucionaria incluida en la "*Kollektivmasslehre*" con respecto a los postulados imperantes en la teoría de la aproximación estadística del siglo XIX, fue el principio de la habitualidad de las distribuciones asimétricas en los fenómenos fácticos. Debe tenerse en cuenta que, si bien en 1838 F.W. Bessel ("*Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler*") había puntualizado que era posible hallar distribuciones de probabilidades de errores aleatorios asimétricas y que, por lo tanto, la distribución Normal no podía ser considerada válida en todos los casos, fue sólo después de la publicación de "*The grammar of science*" (1892), "*Asymetrical frequency curves*" (1893) y "*Contribution to the mathematical theory of evolution*" (1893-95) de K. Pearson, que la distribución Normal perdió su preeminencia.

individuos heterogéneos que varían aleatoriamente con respecto a un atributo común[126] (en particular, un atributo cuantificable)[127], regido por leyes de naturaleza probabilística. En su expresión más simple el "*Kollektiv*" puede ser considerado como una sucesión de resultados obtenidos de una serie de observaciones repetidas en igualdad de condiciones, cada una de las cuales admite sólo dos alternativas posibles. Es decir, como se verá en forma inmediata, matemáticamente, el colectivo puede ser considerado como aproximable por una serie binaria infinita[128].

El concepto de "*Kollektivgegenstand*" experimentó un resurgimiento con el florecimiento del empirismo desarrollado por el Círculo de Viena en la obra, entre otros, del filósofo y psicólogo G.F. Lipps[129] y los astrónomos Georg Helm[130] y Heinrich Bruns[131] quienes fueron los primeros en postular que la teoría de los objetos colectivos no era sino una versión de la teoría del azar, con una probabilidad definida como una frecuencia relativa (inevitablemente condicionada por la definición del colectivo) y tuvo su culminación en la reformulación realizada por Hans Reichenbach y Richard Martin Elder von Mises del concepto de probabilidad[132] "*...a fin de reemplazar o complementar la rígida estructura causal de la teoría clásica*"[133].

Como se verá en las secciones 2.4 y 2.5, en la interpretación logicista, la probabilidad es considerada como una rama de la lógica, como una extensión de la lógica deductiva al ámbito inductivo y en la interpretación subjetivista se la considera asociada a grados de creencia de observadores individuales. En contraste con estos puntos de vista, en la interpretación frecuencista la teoría de la probabilidad es considerada como una rama de la matemática[134].

Con respecto a los fenómenos repetibles que constituyen la razón de ser de la interpretación frecuencista de la probabilidad, von Mises reconoce tres categorías: **i)** los juegos de azar; **ii)** los fenómenos relacionados con estadísticas biológicas y **iii)** ciertos fenómenos vinculados con la física de campo. Como se mencionó más arriba, asociado a cada uno de estos fenómenos es posible definir

---

126. Fechner, G.T. ("*Zur experimentalen Ästhetik*" (1871)). Este concepto de colectivo es similar al introducido por el estadístico Gustav Rümelin en "*Zur Theorie der Statistik*", en 1863, con el único -y fundamental- agregado de la condición de variación aleatoria.

127. La traducción literal de "*Kollektivmasslehre*" es "*doctrina de los objetos colectivos cuantificables*".

128. Ver von Mises, R. (1928).

129. "*Über Fechner's Collectivmasslehre und vie Vertheilungsgesetze der Collectivgegestände*" (1898), "*Die Theorie der Collectivgegestände*" (1901), "*Die Betimmung der Abhängigkeit zwischen den Merkmalen eines Gegenstándes*" (1905).

130. "*Die Wahrscheinlichkeitslehre als Theorie der Kollektivbegriffe*" (1902).

131. "*Über die Darstellung von Fehlergesetzen*" (1897), "*Zur collectiv-Masslehre*" (1898), "*Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehere*" (1905), "*Das Gruppenschema für zufällige Ereignisse*" (1906).

132. "*Über die Grundbegriffe der Kollektivmasslehre*" (1912), "*Fundamentalsatze de Wharscheinlichkeitsrechnung*" (1919), "*Grundlagen der Wharscheinlichkeitsrechnung*" (1919), "*Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*" (1928). En esta última obra von Mises realizó una exposición de su teoría en términos no-matemáticos y un notable análisis de sus consecuencias filosóficas. En "*Mathematica theory of probability and statistics*" y "*Selecta II*" (editadas en forma póstuma por su viuda Hilda Geiringer) figura una recopilación de sus últimas reflexiones sobre la teoría de la probabilidad.

133. von Mises, R. (1921).

134. von Mises, R. (1928): "*La nueva idea, surgida alrededor de 1919 (como una extensión anticipada por A.A. Cournot en Francia, John Venn en Inglaterra y Georg Helm en Alemania) consistió esencialmente en considerar a la teoría de la probabilidad como una ciencia del mismo orden que la geometría y la mecánica teórica*".

un conjunto de atributos considerados "a priori" como posibles y que forman lo que von Mises denominó el "*espacio de los atributos*" (Ω)[135] (estrictamente hablando el conjunto Ω está formado por atributos elementales, de modo que es posible particionarlo en subconjuntos tales que cada uno defina un atributo o resultado posible).

En cuanto a los colectivos, von Mises, R. (1928) considera la necesidad de distinguir entre "*colectivos empíricos*" (que pueden se hallados en el mundo real que, por lo tanto, son observables y que, en consecuencia, están formados por un número finito de elementos)[136] y "*colectivos matemáticos*" (formados por una sucesión infinita de elementos)[137]. De la comparación de estas dos definiciones surge, en forma inmediata, que un colectivo matemático consiste en una sucesión ordenada, en tanto que un colectivo empírico no observa ningún orden natural.

Basándose en una circunstancia que se verifica habitualmente en física y considerando que las sucesiones infinitas son abstracciones matemáticas o idealizaciones de la realidad empírica necesarias para obtener una representación matemática admisible de la realidad, von Mises estableció el principio (muy discutible) según el cual un colectivo empírico finito puede ser representado en términos analíticos por un colectivo matemático infinito. Debe tenerse en cuenta que von Mises fue un empirista y que su análisis se basó siempre en una filosofía operacionalista según la cual los principios teóricos de una ciencia debían ser definidos en términos de fenómenos observables con las características de un colectivo empírico. Según esta interpretación operacionalista la naturaleza de los fenómenos repetibles es tal que: **i)** es posible, por abstracción, obtener ciertos conceptos matemáticos que permiten formular las leyes empíricas que rigen su comportamiento; **ii)** recurriendo nuevamente a la abstracción y, a partir de dichas leyes empíricas, es posible definir los axiomas de la teoría matemática asociada a dicho comportamiento y **iii)** a partir de esta teoría matemática es posible descubrir consecuencias que permiten la explicación y predicción de otros fenómenos repetibles.

De acuerdo con von Mises, R. (1928), los colectivos empíricos obedecen a dos principios fundamentales: **i)** la "*ley de estabilidad de las frecuencias estadísticas*"[138] y **ii)** la "*ley de irregularidad*", que postula la aleatoriedad absoluta en la proyección de los atributos sobre los elementos del colectivo.

Sea $E \subseteq \Omega$ un atributo asociado a un colectivo. Supóngase que en los primeros n elementos del colectivo el atributo E se presentó $n(E)$ veces, de modo que la frecuencia relativa del atributo E al cabo de las n observaciones queda definida por $\frac{n(E)}{n}$. La ley de estabilidad de las frecuencias estadísticas establece que, a medida que n crece, la frecuencia relativa se aproximará indefinidamente a un valor fijo[139].

---

135. Esta denominación fue sustituida con el tiempo por la menos afortunada de **espacio muestral**.

136. Que dan origen a lo que algunos autores han denominado **frecuencismo finito**.

137. Que dan origen al llamado **frecuencismo hipotético**.

138. Esta denominación se debe a Keynes, J.M. (1921). Von Mises, R. (1928) definió a este principio como el "*fenómeno primario*" ("*Urphänomen*") de la teoría de la probabilidad.

139. De acuerdo con von Mises, R. (1928), la ley de estabilidad de las frecuencias se verifica en todos los juegos de azar. En particular, se refiere al caso del caballero de Méré (mencionado en la Sec. 1.3). En su interpretación, el problema

Como se verá en la Sec. 3.2, a partir de estos dos principios, mediante un proceso de abstracción (o idealización), es posible establecer los axiomas de la teoría matemática de la probabilidad aplicables a colectivos matemáticos de la forma $C = \{w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots\}$ (donde $w_n \in \Omega$ $(n = 1,2,\ldots)$).

Una de las principales objeciones a esta definición radica en lo restringido de sus aplicaciones, dado que en muchos casos prácticos es imposible definir un colectivo empírico[140]. Por el contrario, von Mises (a partir de una posición monista en la definición de la probabilidad) considera que esta circunstancia, lejos de ser una crítica, constituye un argumento a favor de su teoría, en la que sólo se pueden introducir probabilidades en un sentido matemático o cuantitativo si existe un conjunto suficientemente grande de eventos repetibles[141]: "*Primero el colectivo-entonces la probabilidad*"[142].

En defensa de los argumentos de von Mises, debe tenerse en cuenta que, al momento de la publicación de su teoría, el único método existente para evaluar probabilidades estaba vinculado con el principio de indiferencia y que, como se verá en la Sec. 2.4, este principio conduce a paradojas irresolubles. Recién en los años 1930-1931 aparecieron los primeros trabajos sobre una nueva aproximación subjetiva, en la que las probabilidades podían ser medidas a partir de grados de creencia y cuyos axiomas derivaban de la **condición de coherencia**. Estos nuevos resultados no invalidaban los de von Mises y permitían demostrar que era posible extender el ámbito de las probabilidades cuantitativas y del cálculo matemático a muchos casos que no admitían la definición de colectivo[143].

von Mises, adoptando una postura que podría denominarse "definicionista", parte de la tesis de que todos los conceptos de una ciencia matemática deben se introducidos mediante definiciones explícitas. Este criterio presenta el inconveniente que, excepto en el caso que ciertas nociones básicas sean asumidas como ideas primitivas, puede conducir a una regresión infinita, dado que la definición de un concepto siempre debe ser expresada en términos de otros conceptos[144]. En

---

de de Méré involucra a dos colectivos, C_1 y C_2. Los elementos de C_1 consisten en 4 tiradas de un dado y el atributo (E_1) es obtener por lo menos una vez el resultado "6". Los elementos de C_2 consisten en 24 tiradas de 2 dados y el atributo (E_2) es obtener por lo menos dos veces el resultado "6". de Méré concluyó, a través de la observación empírica, que la frecuencia relativa de E_1 en C_1 convergía a un valor mayor que $\frac{1}{2}$, en tanto que la frecuencia relativa de E_2 en C_2 convergía a un valor menor que $\frac{1}{2}$.

140. Keynes, J.M. (1921) refiriéndose a la versión de Venn de la interpretación frecuencista escribió: "*Pienso que parte de la debilidad de la teoría frecuencista deriva de los restringidos límites de su aplicabilidad*".

141. von Mises, R. (1928): "*Nuestra teoría de la probabilidad no tiene nada que ver con preguntas tales como: ¿existe alguna probabilidad de que alguna vez Alemania se encuentre involucrada en una guerra con Liberia?*"

142. von Mises, R. (1928). Como se verá en la Sec. 2.7, existen definiciones pluralistas según las cuales el cálculo probabilístico admite distintas interpretaciones de acuerdo con el área o el contexto de su aplicación.

143. Ver Sec. 2.5.

144. Por ejemplo, Cramér, H. (1946), de acuerdo con un moderno tratamiento impuesto por Hilbert, D. (1898) en la geometría, asume a la probabilidad como una noción primitiva y la caracteriza mediante los axiomas de la teoría: "*Algunos autores tratan de introducir un sistema de axiomas basados directamente sobre las propiedades de los cocientes de*

particular, como en este caso la teoría de la probabilidad es interpretada como una rama de una ciencia fáctica, es necesario introducir estas nociones básicas mediante definiciones operacionalistas en términos de elementos observables[145].

El operacionalismo-positivista de las ideas de von Mises se debe fundamentalmente a la influencia de la obra de Ernst Mach[146]. Su desarrollo de la teoría de la probabilidad siguió el mismo esquema que el desarrollo que Mach hizo de la mecánica: introdujo la ley de estabilidad de las frecuencias estadísticas (que supuso válida a partir de la observación) y sobre ella basó su definición de probabilidad (la definición de un concepto teórico, la probabilidad, en términos de un concepto observable, la frecuencia relativa), pero no proporcionó ninguna vinculación entre observación y teoría más allá de la muy controvertida utilización de los límites de una sucesión finita[147] y su justificación a partir de la aplicación del concepto de límite en la física teórica[148].

El operacionalismo, que tuvo su mayor difusión en la década de 1920, fue posteriormente muy criticado por los filósofos de la ciencia. La alternativa que prevaleció consideró que los términos teóricos de una ciencia natural podían ser introducidos como primitivos no-definidos y relacionados con la experiencia no en forma directa mediante una definición operacionalista, sino en forma indirecta. Como se verá en la Sec. 3.1.1, este planteo formalista concuerda con el tratamiento matemático de la probabilidad basado en la axiomática de Kolmogorov.

En concordancia con esta corriente de pensamiento, en la actualidad muchos probabilistas abandonaron el supuesto de que los conceptos teóricos deberían ser definidos directamente en términos de elementos observables. En la Sec. 2.6 se analiza un método no-operacionalista para vincular conceptos de las ciencias naturales con la observación y la experimentación y se demuestra cómo esta aproximación conduce a una definición de probabilidad distinta de la de von Mises, a partir de una interpretación propensionalista[149].

---

frecuencias. El máximo exponente de esta escuela es von Mises (...) quien define a la probabilidad como el 'límite de la frecuencia' $\frac{v}{n}$ *de dicho evento, cuando n tiende a infinito. La existencia de este límite, en un sentido estrictamente matemático, es postulado como el primer axioma de la teoría. Si bien, indudablemente, una definición de este tipo a primera vista parece muy atractiva, incluye ciertas dificultades matemáticas que la despojan de su aparente simplicidad. Por otra parte, la definición de probabilidad así propuesta incluiría una mezcla de elementos empíricos y teóricos que las teorías axiomáticas modernas intentan evitar. Sería, por ejemplo, comparable a la definición de un punto geométrico como el límite de una figura de dimensiones infinitamente decrecientes, método que no es utilizado habitualmente en la geometría axiomática moderna*".

145. R. von Mises, en el prefacio de la tercera edición alemana de "*Probability, statistics and truth*" (1950), proporciona una muestra clara de su criterio operacionalista: "*La frecuencia relativa de la repetición es la 'medida' de la probabilidad, de la misma forma que la longitud de una columna de mercurio es la 'medida' de la temperatura*".

146. En particular, la influencia de "*The science of mechanics: A critical and historical account of its development*" (ver von Mises, R. (1938)).

147. La ya comentada objeción acerca de la representación de los colectivos empíricos finitos por las sucesiones infinitas de los colectivos matemáticos.

148. von Mises, R. (1928): "*Los resultados de una teoría basada en la noción de colectivo infinito puede ser aplicada a sucesiones finitas de observaciones en una forma que no es definible lógicamente pero que, no obstante, es suficientemente exacta en la práctica. La relación teoría-observación es, en este caso, esencialmente la misma que en todas las demás ciencias físicas*".

149. Para un análisis de las consideraciones críticas a la definición de Mach y un comentario detallado acerca de la relación Mach-von Mises, ver Gillies, D.A. (1972a)(1973).

Entre las numerosas modificaciones a que se sometió a la interpretación frecuencista a fin de eliminar las falencias mencionadas precedentemente, la más importante fue, indudablemente, la debida a Reichenbach, H. (1935), quien procuró obtener una definición de probabilidad por una vía axiomática y justificar el significado intuitivo de la misma. Con respecto a la primera cuestión Reichenbach intentó una solución basada exclusivamente en la teoría de conjuntos y en las operaciones lógicas, obteniendo una definición de probabilidad (puramente formal) expresada como una relación entre dos clases de proposiciones.

En lo que hace al papel que desempeña la intuición en el análisis filosófico de la probabilidad objetiva, tomando como punto de partida el supuesto (contrario a la propuesta de von Mises) de que la interpretación frecuencista de la probabilidad podía ser generalizable a todas las aplicaciones del término probable, Reichenbach intentó ampliar sus alcances a eventos no-repetibles, mediante la definición de lo que denominó **clases de referencia** formadas por eventos similares al analizado, y consideró a la teoría de la probabilidad como la disciplina que calcula probabilidades desconocidas de **colectivos derivados** a partir de probabilidades conocidas de **colectivos originarios**. Pero esta generalización tropezó con la dificultad insalvable que significa la imposibilidad de la determinación de reglas de selección objetivas universalmente aceptadas de los eventos que deben integrar dichas clases de referencia.

Con respecto a la ya mencionada interpretación analítica de la convergencia, Reichenbach postuló que la frecuencia límite no poseía nada de empírico, sino que constituía un concepto matemático definible en el ámbito de las llamadas **sucesiones de probabilidad**, las cuales se caracterizan porque la frecuencia con la que se presenta cualquier resultado posible en las primeras n pruebas tiende a valores límite bien precisos cuando n aumenta indefinidamente. Este resultado lo condujo a establecer que las únicas sucesiones de pruebas a las cuales resultaba aplicable el concepto intuitivo de probabilidad eran las que pertenecían a la clase de "... *series necesariamente protegidas en el futuro*" y a asimilar, en consecuencia, el tratamiento del problema de la inferencia inductiva al estudio de tales series (a postular la equivalencia entre el problema de determinar una probabilidad y el de expresar conclusiones sobre el futuro en base a información sobre el pasado). Su justificación del principio inductivo puede ser expresada de la siguiente forma: dado el conjunto de los n primeros términos de una sucesión de eventos, a partir de los cuales se obtiene, para el resultado E, una frecuencia relativa $h_E^{(n)} = \frac{n_E}{n}$ y, suponiendo que no se conoce nada acerca de la probabilidad de la tendencia de dicha frecuencia a evolucionar hacia un valor límite prefijado λ, entonces, a medida que aumente la sucesión, dicha frecuencia tenderá a un límite λ, tal que $h_E^{(n)} - \varepsilon \leq \lambda \leq h_E^{(n)} + \varepsilon$, donde ε denota un infinitésimo positivo tan pequeño como se desee. Este nuevo enunciado del principio frecuencista se distingue del de von Mises porque constituye un juicio sobre el conjunto de los eventos, no sobre cada uno de ellos en particular: contrariamente a la formulación de von Mises del principio de inducción, que supone que todos los eventos observados deben ser iguales entre sí y que dicho postulado es extensible a todos los eventos futuros de la misma sucesión, Reichenbach, a partir de la hipótesis más general de que la frecuencia asume un valor $h_\varepsilon^{(n)}$ y suponiendo la permanencia de la misma en toda la sucesión, elabora su juicio sobre el conjunto de los eventos futuros[150].

[150]. Lazs propuestas de Reichenbach, en la medida que no pudieron justificar la posibilidad de enunciar proposiciones fundadas sobre el comportamiento de eventos futuros, no lograron resolver las consideraciones de Hume, D. (1739) sobre la no-logicidad del principio de inducción.

De todo lo anterior se deduce que, tanto la definición de von Mises como la de Reichenbach, a fin de evitar cualquier tipo de regularidad en las sucesiones de eventos que constituyen su fundamento, intentaron proporcionar a la relación de probabilidad un contenido estrictamente matemático mediante la imposición de complicadas condiciones que, inevitablemente, restringían el concepto de aleatoriedad total y demostraban que era imposible dar un carácter matemáticamente preciso a la noción de "*irregularidad absoluta*" (ver Apéndice 2)[151].

Luego se puede concluir que, si bien una de las principales objeciones de von Mises a la interpretación clásica era la de ser una teoría matemática que no trataba con eventos concretos, el planteo frecuencista también constituye una teoría puramente matemática que, en vez de tratar con resultados favorables y resultados posibles, trata con límites que son entidades matemáticas abstractas y en la cual las demostraciones de los teoremas se obtienen, a partir de la definición de probabilidad, exclusivamente mediante la utilización de métodos lógico-matemáticos.

Otras críticas importantes de von Mises a la definición clásica se refieren: **i)** a la cuestión de la equiprobabilidad, en particular a la expresión de Laplace, P.S. (1812-1820): "*No hay ninguna razón para creer que uno de estos casos debería tender a ocurrir más frecuentemente*"[152] y, en consecuencia, **ii)** a las formulaciones de J. Bernoulli, Siméon Denis Poisson y Pafnuty Lvovich Chebychev del teorema conocido como ley de los grandes números[153]. Con respecto a la primera cuestión objeta que "*...a menos que aceptemos que está afectada por un círculo vicioso, la definición clásica de la probabilidad implica la reducción de todas las distribuciones al caso más simple de las distribuciones uniformes*"[154]. En lo que hace a la segunda cuestión, de acuerdo con von Mises, R. (1928), "*Las deducciones matemáticas de Bernoulli, Poisson y Tschebysheff, en la*

---

151. Borel, E. (1939): "*La objeción esencial que creo se puede hacer a la teoría del colectivo y a cualquier otra teoría análoga es la siguiente: al espíritu humano no le es posible imitar en forma perfecta la aleatoriedad, es decir, sustituir el método empírico que consiste en realizar una serie indefinida de pruebas repetidas (por ejemplo, de tiradas a 'cara' o 'cruz') por un mecanismo racional. Existe una diferencia fundamental entre el cálculo de probabilidades y la geometría; cuando sustituimos la recta empírica e imperfecta por la recta ideal de los geómetras, conservamos las propiedades realmente fundamentales y eliminamos sólo las accidentales; en este caso, es posible sustituir la definición empírica por una definición axiomática extremadamente simple, a partir de la cual se podrán deducir todas las propiedades de las figuras formadas por rectas, no importa cuán complejas fueren. Por el contrario, cualquiera sea el procedimiento mediante el cual se puede definir una serie de elementos, reducidos a las cifras 0 y 1 a fin de simplificar el ejemplo, esta serie no poseerá todas las propiedades de una serie 'definida' por el azar, salvo que haya sido obtenida por sorteos sucesivos o métodos análogos; de no ser así, existirá algún defecto que permitirá a un observador sagaz afirmar que la serie fue construida racionalmente y no al azar*". Ver Gnedenko, B.V. (1950), Khinchin, A.Y. (1952)(1961).

152. Debe tenerse en cuenta que el "*Essai philosophique sur les probabilités*" de Laplace incluye un capítulo titulado "*Acerca de las desigualdades desconocidas que pueden existir entre las chances que se suponen iguales*". En sus desarrollos matemáticos considera un caso en el que la probabilidad de obtener el resultado "cara" al arrojar una moneda es $\frac{1+\alpha}{2}$ y, en consecuencia, la probabilidad de obtener el resultado "ceca" es $\frac{1-\alpha}{2}$, y elabora sus cálculos posteriores a partir de estas cantidades, sin agregar ninguna justificación conceptual. Este procedimiento implica el reconocimiento de la existencia de una probabilidad objetiva y posiblemente desconocida de obtener el resultado "cara" al arrojar una moneda, lo cual parecería contradecir su interpretación de la probabilidad como una consecuencia exclusiva de la ignorancia del observador y, en consecuencia, permitiría concluir que la teoría matemática empleada por Laplace no se compadece con sus fundamentos filosóficos.

153. Este teorema -que será tratado en detalle en el Cap. 11- fue el primer teorema límite de la teoría de la probabilidad y constituyó el primer intento de solución del problema de la inversión de la probabilidad. Analiza la convergencia-en probabilidad de la frecuencia relativa de un resultado eventual hacia su probabilidad teórica, a medida que el número de observaciones realizadas en igualdad de condiciones sobre el mismo aumenta indefinidamente.

154. von Mises, R. (1928).

medida que se basan sobre una definición de probabilidad que no tiene nada que ver con la frecuencia de ocurrencia de los eventos en una sucesión de observaciones, no pueden ser utilizada para realizar predicciones relativas a los resultados de tales sucesiones. Por lo tanto, no poseen ningún tipo de vinculación con la regla empírica general formulada por Poisson en la introducción de su libro"[155].

A pesar de las consideraciones realizadas en esta sección y en defensa de los argumentos frecuencistas se debe reconocer que los individuos están mejor preparados para procesar información relacionada con frecuencias de eventos que con probabilidades de eventos singulares, que el fundamento de un comportamiento predictivo no es la estimación de la probabilidad, sino un registro en la memoria de las frecuencias pasadas de los eventos (Estes, W. (1976): "*Claramente, los individuos son extremadamente eficientes en la incorporación de información relacionada con los frecuencias relativas de eventos*"). Por lo que la importancia de la definición frecuencista, en lo que hace a la ampliación del ámbito de aplicación de la teoría de la probabilidad, resulta innegable.

Por su parte, Borel, E. (1939) demostró que existen operaciones mentales de naturaleza especial que son totalmente diferentes de la simple observación de las frecuencias, descalificó la afirmación de que el cálculo "a posteriori" de la probabilidad de ocurrencia de un fenómeno sólo podía ser justificado mediante la repetición de observaciones realizadas en igualdad de condiciones y el correspondiente análisis estadístico de los resultados, y concluyó que precisamente la noción de probabilidad de ocurrencia de un fenómeno único es la que constituye el fundamento de la teoría de la probabilidad.

Como se verá en la Sec. 2.6, esta falencia de la interpretación frecuencista relacionada con la imposibilidad de proporcionar probabilidades objetivas de ocurrencia de fenómenos singulares ("*probabilidades singulares*"), condujo a Keynes, J.M. (1921) y a Popper, K.R. (1934)(1957b) a proponer nuevas interpretaciones objetivas de la probabilidad basadas en la teoría lógica del vínculo parcial y en la teoría de las propensiones, respectivamente.

2.4.- La interpretación logicista

La extensión de la definición de probabilidad "a posteriori" de la interpretación frecuencista propuesta por la denominada interpretación logicista[156], condujo a una noción general de probabilidad, la cual se traduce en un grado de creencia racional o idea similar acerca de la ocurrencia de un fenómeno determinado, que es función -exclusivamente- de un cierto estado de conocimiento definido por un conjunto de argumentos intrínsecos o extrínsecos a dicho fenómeno[157]. Una probabilidad, $p(A / B)$, definida como una relación (indefinida) entre una proposición (A) y un cuerpo de conocimiento (B), entre una "... *afirmación y otra afirmación (o conjunto de*

---

155. Obsérvese que en el texto, von Mises utiliza la transcripción fonética francesa del apellido Чебышев, que en su transliteración sajona es Chebychev o Chebyshev.

156. En realidad, la denominación de "*probabilidad lógica*" es muy anterior al surgimiento de la escuela logicista y se debe a S.D. Poisson. En "*Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*" (1837) Poisson distingue entre "*probabilidad física*" (calculada a partir de las frecuencias relativas) y "*probabilidad epistémica*", subdividiendo a esta última en "*subjetiva*" (personal) y "*lógica*".

157. Ramsey, F.P. (1931): "*De acuerdo con esta interpretación, la teoría de la probabilidad es considerada como una rama de la lógica, la lógica de la creencia parcial y del argumento no-concluyente*" (ver Sec. 2.6).

afirmaciones) que representa la evidencia"[158], condicionada por la verdad de dicha evidencia. Donde el evento A puede ser representado mediante un subconjunto $A \subset \Omega$ formado por los elementos w para los cuales una proposición S es verdadera, $A = \{w / S(w) \text{ es verdadera}\}$, de modo que a cada evento le corresponde un único conjunto A y viceversa, es decir, a cada proposición $S(w)$ del espacio proposicional le corresponde un conjunto A en el espacio de eventos y viceversa[159].

La interpretación logicista se basó en los aportes realizados por los miembros de la Sociedad de los Apóstoles de Cambridge (Augustus de Morgan, John Venn, Harold Jeffrey y, en particular, John Maynard Keynes) en la llamada "era Eduardiana"[160], continuados por los miembros del Círculo de Viena (Bernard Bolzano, Ludwig Wittgenstein, Frederich Waismann y, en particular, Rudolf Carnap y Karl Popper)[161].

Keynes ingresó al King's College en 1902. Cuando, en Febrero de 1903, fue iniciado en los secretos de la Sociedad de los Apóstoles, sus miembros más distinguidos eran Bertrand Russell y G.E. Moore, cuyas respectivas obras, "*The principles of mathematics*" (1903) y "*Principia ethica*" (1903), como se verá inmediatamente, influyeron radicalmente sobre su pensamiento probabilístico[162].

De acuerdo con Skidelsky, R. (1983), fue la **teoría de la conducta correcta** desarrollada por G.E. Moore en su "*Principia ethica*" la que impulsó a Keynes a dedicarse al estudio de los

---

[158]. Kyburg, H.E.; Smokler, H.E. (1980). Ver también Savage, L.J. (1962).

[159]. De acuerdo con la interpretación de Johann von Kries ("*Die Principen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*" (1886)) y Carl Stumpf ("*Über de Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit*" (1892)), si a la interpretación logicista se agrega una teoría física (T), entonces queda establecida una versión de "*probabilidad física*" ($p[A / (B \wedge T)]$). Según Stumpf, "*Dada una teoría (T) -no necesariamente conocida-, es posible definir una sucesión de conjuntos de circunstancias mutuamente excluyentes $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ consistentes con B, de los cuales los conjuntos $\{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$ serán también consistentes con A. Si no existe ninguna razón para que un conjunto cualquiera sea más esperado que otro (es decir si, a partir de B, no podemos llegar a ninguna conclusión que nos permita conocer más acerca C_i que de C_j), entonces será $p(A / B) = \frac{m}{n}$* ". Con esta definición Stumpf pretendió (en vano) evitar el problema de la circularidad Laplaciana comentado en la Sec. 2.2. Por otra parte, la restricción que "*...a partir de B no podamos llegar a ninguna conclusión*" respecto de C_i y C_j podría implicar no conocer nada acerca de si $(C_i \vee C_{i+1})$ es más probable que C_{i+2} y, en consecuencia, no poseer ningún tipo de argumento para cualquier estimación comparativa de $p(A)$. Esta objeción conduce a la paradoja de von Kries-Bertrand (ver von Kries, J. (1886), Bertrand, J.L.F. (1888)).

[160]. Como "era Eduardiana" (denominada también "era de las paradojas") la literatura considera el período que va desde los comienzos del siglo XX hasta el estallido de la primera guerra mundial el cual, obviamente, no coincide con el reinado de Eduardo VII que se desarrolló entre 1901 y 1910.

[161]. L. Wittgenstein, el filósofo más prestigiosos de Cambridge, también fue elegido miembro de los Apóstoles en Noviembre de 1912, pero sólo asistió a una de sus sesiones y renunció, por lo tanto no se lo puede considerar como un integrante cabal de la sociedad. Posteriormente también rechazó la posibilidad de pertenecer al famoso Círculo de Viena. Más allá de esta actitud hostil, no se puede ignorar que su obra refleja la influencia de los intelectuales de Cambridge del período inmediatamente anterior a la primera guerra mundial y del Círculo de Viena (su "*Tractatus logico-philosophicus*" (1921) contiene un esbozo de la interpretación logicista de la probabilidad). Ver Monk, R. (1990).

[162]. Ver Davis, J.B. (1994), Gillies, D.A. (1998b).

fundamentos de la probabilidad[163]. Según Moore, el individuo debía actuar de modo de alcanzar el mayor grado posible de "virtud" pero, en realidad, sólo podía calcular los efectos probables de sus acciones en un futuro inmediato e ignoraba todo acerca de sus consecuencias de largo plazo, con el agravante que estas acciones podían ser tales que invirtieran el resultado de la "virtud" producida por su acción de corto plazo. A partir de estas consideraciones, Moore concluyó que, por lo tanto, el individuo debía, en términos generales, adaptar su conducta a las reglas de moralidad convencionales.

Basándose en el supuesto de que un miembro racional de los Apóstoles debía poder reconocer la existencia de acciones que aún contraviniendo la moral convencional podían ser consideradas como "buenas"[164], Keynes (en su "*Treatise of probabilities*" (1921))[165] discrepó con la conclusión de Moore a la que atribuyó un error de razonamiento derivado de una aplicación equivocada del principio de indiferencia y, en consecuencia, una interpretación equivocada de la noción de probabilidad[166]. Supóngase que un individuo debe seleccionar entre dos cursos de acción (A_1 y A_2), que existen razones para asegurar que en el corto plazo A_1 producirá una "virtud" mayor que A_2 y que el observador no posee ningún conocimiento racional acerca de las consecuencias de las acciones A_1 y A_2 en el largo plazo. Entonces, dado que las posibilidades que la "virtud" producida por la acción A_1 sea, en el largo plazo, mayor que la producida por la acción A_2 son iguales a las posibilidades que se dé el resultado contrario, ambas acciones son indiferentes para el observador y, por lo tanto debería asignarles probabilidades iguales. Pero si el objetivo del observador consiste en maximizar la virtud esperada, obviamente debería preferir la acción A_1. Es decir que la conclusón general de Keynes es que el observador debería preferir la acción que produce más "virtud" en el corto plazo, aún contraviniendo las reglas de la moral convencional (obsérvese que, aunque la conclusión de Keynes es contraria a la de Pascal, su método de razonamiento es similar al desarrollado por éste en la famosa "apuesta" analizada en la Sec. 1.3)[167].

---

163. Skidelsky, R. (1983): "*Si bien las investigaciones de Keynes acerca del significado de la probabilidad ocuparon gran parte de su tiempo libre entre 1906 y 1914, su primera gran discusión sobre el tema data del 23 de junio de 1904, oportunidad en la que dio a conocer a los Apóstoles un trabajo titulado 'Etica en relación con la conducta'. Circunstancia que parecería sugerir que su interés en esta materia surgió en forma directa a partir del fermento intelectual generado por la publicación de los 'Principia ethica'*"

164. Probablemente uno de los casos particulares analizados por Keynes se refiriera a las acciones vinculadas con la homosexualidad.

165. Debe tenerse en cuenta que, si bien el "*Treatise on probability*" de J.M. Keynes fue publicado en 1921, en 1913 se encontraba prácticamente terminado y fue completado después de la publicación de "*The economic consequences of the peace*" (1919) que contiene sus críticas al tratado de Versailles. De modo que, a pesar de la fecha de su edición, puede ser considerada una obra de la era Eduardiana (Skidelsky, R. (1983): "*El 'Treatise' fue un libro de la pre-guerra que refleja la fiolosofía de Cambridge de la pre-guerra*").

166. Keynes, J.M. (1921): "*Si la 'virtud' es aditiva, si poseemos alguna razón para suponer que, dadas dos acciones, una produce más 'virtud' que la otra y si no poseemos ninguna forma de discernir entre estos resultados en un futuro lejano entonces, a partir de una aplicación legítima del principio de indiferencia, podemos suponer que existe una probabilidad a favor de la primera acción. El argumento del Sr. Moore debe ser derivado de la teoría de la probabilidad frecuencista o empírica, de acuerdo con la cual debemos conocer, 'en términos generales', lo que ocurrirá antes de poder asignarle una probabilidad*".

167. Obsérvese que, si en el razonamiento de este "joven" Keynes se sustituye al observador que pretende decidir cuál acción producirá la mayor cantidad de "virtud" por un observador que pretende decidir cuál inversión le proporcionará mayor beneficio (teniendo en cuenta que sólo puede calcular los beneficios de corto plazo y que, en ciertos casos, los beneficios de largo plazo pueden ser de importancia relativa mayor que los de corto plazo), se puede concluir que su argumentación ética se asemeja mucho a sus posteriores consideraciones sobre la inversión. Resulta sumamente curioso

La ya mencionada influencia de B. Russell se manifiesta fundamentalmente en la Parte II del "*Treatise of probability*", en la cual Keynes asimila la teoría de la probabilidad a un sistema de lógica formal[168]. En el período 1903-1910 Russell y A.N. Whitehead[169] desarrollaron un proyecto dirigido a intentar reducir la matemática a la lógica mediante la definición de un sistema deductivo axiomático formal, cuyos axiomas fueran verdades evidentes y dentro del cual fuera posible demostrar cualquier teorema[170]. Los resultados de este programa fueron publicados, entre 1910 y 1913, en esa catedral de la lógica matemática materializada en los "*Principia mathematica*". Por otra parte, en el Cap. IV de su "*Problems of philosophy*" (1912), Russell se dedica al análisis de la inducción y plantea una aproximación probabilística al razonamiento inductivo que constituyó la base del razonamiento empírico que dio origen al sistema Keynesiano.

En el ámbito de la lógica deductiva una conclusión se sigue de las premisas y es cierta o no según la verdad o la falsedad de las premisas que la implican. Supónganse, a modo de ejemplo, las premisas: **i)** todos los cuervos son negros y **ii)** A es un cuervo, se puede asegurar, entonces, en forma cierta que A es negro. Supóngase, ahora, que las premisas surjan de la evidencia proporcionada por n observaciones efectuadas en el universo de los cuervos, habiendo resultado que todos los cuervos observados son negros. Se puede concluir fácilmente que, en este caso, la conclusión "todos los cuervos son negros" (y, en consecuencia, la predicción "la próxima observación corresponderá a un cuervo negro") no constituye una consecuencia lógica (completa) de la evidencia, pero sí (dada la información proporcionada por dicha evidencia) una consecuencia parcial. El punto de partida de la aproximación de Keynes consistió, precisamente, en definir una **teoría del vínculo parcial** como una generalización de la teoría del vínculo total de la lógica deductiva[171] y considerar a la probabilidad como una evaluación de ese vínculo parcial[172], de modo que no es posible hablar de la probabilidad de una hipótesis sino, solamente, de su probabilidad

---

a este respecto que el probabilista Keynes -al igual que los autores que, desde comienzos del siglo XIX y hasta mediados del siglo XX, fundaron y desarrollaron la economía matemática (entre los que cabe mencionar a Antoine Augustin Cournot, William Stanley Jevons, Leon Walras, Francis Ysidro Edgeworth, Alfred Marshall)- no considerara en su "*General theory of employment, interest and money*" (1936) ningún tipo de aproximación probabilística, sobre todo si se tiene en cuenta que, según se vio, la probabilidad fue originalmente concebida como un instrumento para aplicar en las (en ese momento) emergentes ciencias sociales.

168. Keynes, J.M. (1921): "*Indudablemente el lector percibirá en forma inmediata que esta Parte II nunca hubiera podido ser escrita sino bajo la influencia de los 'Principia mathematica' del Sr. Russell*".

169. También perteneciente a la Sociedad de los Apóstoles (ver Monk, R. (1996)).

170. Previamente a éste proyecto, Glottlob Frege (uno de los más brillantes lógicos de Europa y una figura central en el plan de axiomatización de la matemática) había intentado desarrollar un programa similar, que resultó invalidado por la inclusión de una paradoja en el sistema (cuyo primer intento de solución utilizando lo que hoy se conoce como **teoría de los tipos**, fue publicado por Russell en su "*Principle of mathematics*" (1903)). Ver Gillies, D.A. (1982).

171. Keynes, J.M. (1921): "*Así como en ciertas circunstancias podemos juzgar directamente que una conclusión 'se sigue' de una premisa, la hipótesis que sostiene que a veces podemos reconocer que una conclusión 'se sigue parcialmente' de una premisa o se basa en una relación de probabilidad con la misma, constituye una extensión del supuesto original*".

172. Keynes, J.M. (1921): "*Si tenemos en cuenta que, para conocer correctamente una conexión lógica entre un conjunto de proposiciones, a las que denominamos nuestra evidencia y que suponemos conocidas. y otro conjunto formado por las que denominamos conclusiones, debemos asignar a éstas ponderaciones mayores o menores de acuerdo con los fundamentos proporcionados por las primeras (...) no resulta forzado describir este vínculo entre evidencias y conclusión como una relación de probabilidad*".

condicionada por una cierta evidencia vinculada parcialmente con ella[173]. Luego, dado un conjunto h de proposiciones y una conclusión consistente en un conjunto de proposiciones a, si h implica parcialmente a a con un grado α entonces, identificando los grados de vínculo parcial con los grados de creencia racional, Keynes concluye que, dado h, existirá un grado α de creencia racional en a, es decir, una relación de probabilidad de grado α entre a y h. Obsérvese que Keynes asimila la probabilidad a un grado de creencia racional (igual para todos los individuos) no simplemente a un grado de creencia individual[174]. Es decir, considera a las probabilidades como valores fijados objetivamente por el observador los cuales son asimilables a relaciones lógicas conocidas por intuición, pero utilizando un concepto Platónico del término "objetivo", es decir, no referido a "cosas" del mundo material, sino a "algo" en un supuesto mundo Platónico formado por ideas abstractas[175], similar al postulado por los filósofos de Cambridge de la era Eduardiana, que incluía ideas objetivas, cualidades éticas (con la idea de la "virtud" ocupando un lugar prominente) y entes matemáticos[176].

Con respecto al problema general del conocimiento (es decir, a la forma en que se supone que el observador adquiere el conocimiento a partir del cual surge la relación de probabilidad), si bien Keynes adoptó la posición de Russell, según la cual el conocimiento se adquiere, en parte, en forma directa a través de la experiencia y, en parte, por descripción basada en dicha experiencia, considera que se pueden llegar a conocer algunas relaciones de probabilidad mediante la experiencia directa o la intuición lógica inmediata[177] y, en ciertos pasajes del "*Treatise of probability*", considera que todas las relaciones lógicas pueden ser conocidas por experiencia directa (lo cual parece, en principio, convertir en innecesaria la axiomatización de la lógica y de la probabilidad). Si se tiene

---

173. Keynes, J.M. (1921): "*Así como ningún lugar puede ser intrínsecamente distante, ninguna proposición es en sí misma ni probable, ni improbable; y la probabilidad de dicha proposición varía de acuerdo con la evidencia presentada, la cual actúa como si fuera su origen de referencia*".

174. Este razonamiento fue objetado por Popper, K.R. (1959) quien sostenía que, dada una evidencia finita (e) y una generalización (h) que potencialmente podría poseer un número infinito de casos, el grado de vinculación entre e y h es nulo (conclusión compartida con Carnap, R. (1950)). Debe tenerse en cuenta que, de acuerdo con Popper, aunque el grado de vinculación entre una evidencia finita y una generalización universal sea nula, es posible que el observador posea un grado de creencia racional no-nulo en una generalización infinita dada una evidencia finita, de modo que no sería legítimo asimilar los conceptos de grado de vinculación parcial y grado de creencia racional. Popper, R. (1959) asimila el grado de creencia racional a lo que denomina "*grado de corroboración*" ("*A partir de la experiencia podemos aprender más y más acerca de las leyes universales sin aumentar su probabilidad (...) Podemos testear y corroborar mejor algunas de ellas aumentando de este modo su grado de corroboración, sin alterar su probabilidad, cuyo valor permanece nulo*"). Ver Gillies, D.A. (en Parkinson, G.H.R. (ed.) (1988)).

175. Dado que en publicaciones posteriores a su "*Treatise on probability*" (1921), Keynes adoptó el punto de vista de Frank Plumpton Ramsey acerca de que las reglas de probabilidad eran deducciones lógicas a partir del comportamiento propio del individuo-evaluador y no axiomas primitivos, fue considerado por von Mises como un subjetivista. Pero, más allá de algunas imprecisiones, según surge de la parte fundamental de su obra, la posición de Keynes fue indudablemente objetivista.

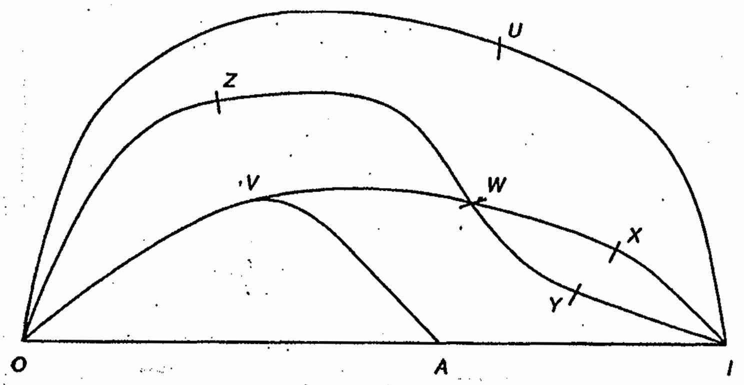
176. Keynes, J.M. (1921): "*...en el sentido que interesa a la lógica, la probabilidad no es subjetiva. Es decir, no está subordinada al capricho humano. Una proposición no es probable porque pensemos que lo es. Una vez producidos los hechos que determinan nuestro conocimiento, lo que es probable o improbable en estas circunstancias queda fijado objetivamente y es independiente de nuestra opinión. La teoría de la probabilidad es lógica y, en consecuencia, se relaciona con el grado de creencia racional y no meramente con las creencias de los individuos particulares, las cuales pueden ser racionales o no*".

177. Keynes, J.M. (1921): "*Pasamos de un conocimiento acerca de la proposición A a un conocimiento acerca de la proposición B a partir de la percepción de una relación lógica entre ellos. Con esta relación lógica poseemos experiencia directa*".

en cuenta que, como se mencionó en páginas anteriores, el objetivo de los "*Principia mathematica*" consistía en tomar como punto de partida axiomas que fueran obviamente correctos de acuerdo con la intuición lógica y deducir, a partir de ellos, resultados que demostraran ser lógicamente válidos pero que no fueran obvios a la intuición lógica, se puede concluir que la aproximación de Keynes al concepto de probabilidad es la misma que la de Russell y Whitehead a la matemática[178].

Como consecuencia de las especulaciones anteriores, Keynes consideró que las relaciones de probabilidad entre conjuntos de proposiciones (h) y conclusiones consistentes en conjuntos de proposiciones (a) no siempre son cuantificables[179] y, en muchos casos ni siquiera son comparables (es decir, no observan un orden lineal)[180]. Para explicar este posible ordenamiento no-lineal utilizó un gráfico de la forma:

Figura 2.1



donde "*O representa la imposibilidad, I la certeza y A una probabilidad intermedia entre O e I numéricamente medible; U, V, W, X, Y y Z son probabilidades no-numéricas, de las cuales V es menor que la probabilidad numérica A y también es menor que W, X e Y. Las probabilidades X e Y son mayores que W y mayores que V, pero no son comparables con ninguna otra ni con A. Las probabilidades V y Z son menores que W, X, e Y, pero no son comparables con ninguna otra; U no es comparable cuantitativamente con ninguna de las probabilidades V, W, X, Y y Z*".

---

178. Keynes, J.M. (1921): "*Como en el caso de muchas otras relaciones lógicas, aún cuando podamos poseer una facultad de reconocimiento directo de muchas relaciones de probabilidad, sucede que algunas pueden ser mucho más reconocibles que otras. El objetivo de un sistema lógico de probabilidad es permitirnos conocer aquellas relaciones que no se pueden percibir fácilmente por medio de otras relaciones que se pueden reconocer con mayor precisión. Convertir un conocimiento vago en un conocimiento más preciso*".

179. de Finetti, B. (1938) juzgó como inaceptable la consideración de probabilidades no-numéricas ("*La posición de Keynes indudablemente no está dirigida al desarrollo de una teoría matemática de la probabilidad y se vincula, en forma dificultosa, con la idea intuitiva de probabilidad*"). Por su parte, Runde, J. (1994) consideró que, en muchos casos, esta aproximación de Keynes a la probabilidad resulta más realista que la aproximación numérica.

180. Keynes, J.M. (1921): "*Yo sostengo que existen pares de probabilidades cuyas magnitudes son incomparables; que respecto a ciertos pares de relaciones de probabilidad, aunque no podemos medir la diferencia entre ellas, podemos asegurar que una es mayor que la otra, y que sólo en un tipo muy especial de casos se puede adjudicar un significado a una comparación numérica de magnitudes*".

De acuerdo con la propuesta de Keynes, J.M. (1921), "*... sólo se puede obtener una medida numérica de la probabilidad en aquellos casos en los cuales es practicable una reducción a un conjunto de alternativas exclusivas, exhaustivas y equiprobables*" y la condición necesaria para esta reducción es la posibilidad de aplicar el **principio de indiferencia**[181]. Pero, históricamente se sabe que el empleo de este principio acarrea el inconveniente de generar algunas paradojas (la primera de las cuales fue publicada por Buffon, G.L. (1733)), entre las que pueden ser mencionadas, a título de ejempo, las siguientes:

1) Supóngase una mezcla de vino y agua (¿soda?) acerca de la cual lo único que se conoce es que contiene como máximo tres veces más de un elemento que del otro. Es decir, la única información con que se cuenta es que $\frac{1}{3} \leq \frac{vino}{agua} \leq 3$. Según el principio de indiferencia se puede concluir que la variable definida por el cociente $\frac{vino}{agua}$ se distribuye de acuerdo con una función uniforme en el intervalo $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$, de modo que, por ejemplo:

$$p\left(\frac{vino}{agua} \leq 2\right) = \frac{2 - \frac{1}{3}}{3 - \frac{1}{3}} = \frac{5}{8}$$

De la misma forma, se puede concluir que la variable aleatoria definida por el cociente $\frac{agua}{vino}$ se distribuye uniformemente en el mismo intervalo pero, operando en forma similar y, a pesar de que los eventos $\frac{vino}{agua} \leq 2$ y $\frac{agua}{vino} \geq \frac{1}{2}$ son el mismo evento, se obtiene el siguiente resultado paradójico:

$$p\left(\frac{agua}{vino} \geq \frac{1}{2}\right) = \frac{3 - \frac{1}{2}}{3 - \frac{1}{3}} = \frac{15}{16} \neq p\left(\frac{vino}{agua} \leq 2\right)$$

2) Supóngase que, a partir de una circunferencia sobre la cual se traza al azar una cuerda (AB), se desea calcular la probabilidad de que la misma sea de longitud mayor que el lado del triángulo equilátero (XYZ) inscripto en la circunferencia, $p(AB > \ell)$. De la **Figura 2.2** se obtiene que $XW = XZ$ y que $OW = r\,sen(30°) = \frac{r}{2}$. Sean la cuerda AB y el radio OW, perpendicular a la misma (ver **Figura 2.3**). AB Será de longitud mayor que el lado del triángulo equilátero inscripto

[181]. Keynes, J.M. (1921). Como una solución al sexto problema de Hilbert, D. (1902), Bernstein, S.N. (1917)(1927) demostró que el fundamento de la teoría de la probabilidad podía estar constituido por axiomas cualitativos para coeficientes numéricos que miden las probabilidades de las proposiciones. Su memoria de 1917 fue incluida por Keynes, J.M. (1921) en su bibliografía, pero permaneció ignorada para el resto de los autores ingleses sobre probabilidad cualitativa.

si se verifica que $OW < \frac{r}{2}$. Dado que W es un punto cualquiera del radio r y que no existe ningún punto de r que pueda ser considerado privilegiado respecto de los demás, de acuerdo con el principio de indiferencia, se puede concluir que la variable que representa la longitud del segmento OW se distribuye de acuerdo con una función uniforme en el intervalo $[0, r]$, de modo que:

$$p(AB > \ell) = p\left(OW > \frac{r}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Sean, por otra parte, el triángulo equilátero inscripto $AA'A''$, la tangente a la circunferencia en el punto A y el ángulo (θ) que forman la tangente y la cuerda AB (ver **Figura 2.4**). La cuerda AB será de longitud mayor que el lado del triángulo equilátero inscripto si se verifica que $60° < \theta < 120°$. Dado que θ puede asumir cualquier valor en el intervalo $[0°, 180°]$ y que no existe ningún valor de dicho intervalo que pueda ser considerado privilegiado con respecto a los demás, de acuerdo con el principio de indiferencia se puede concluir que la variable θ se distribuye de acuerdo con una función uniforme en el intervalo $[0°, 180°]$, de modo que:

$$p(AB > \ell) = p(60° < \theta < 120°) = \frac{1}{3}$$

Sean, ahora, dos círculos con el mismo centro O y radios r y $\frac{r}{2}$, respectivamente (ver **Figura 2.5**). La cuerda AB será de longitud mayor que el lado del triángulo equilátero inscripto si su punto medio w pertenece al círculo de radio $\frac{r}{2}$. Dado que w puede ser cualquier punto del círculo de radio r y que no existe ningún punto de este círculo que pueda ser considerado privilegiado con respecto a los demás, de acuerdo con el principio de indiferencia, se puede concluir que la variable que representa el valor a asumir por el punto w se distribuye uniformemente en el círculo de radio r, de modo que:

$$p(AB > \ell) = \frac{\textit{area del circulo de radio } \frac{r}{2}}{\textit{area del circulo de radio } r} = \frac{\frac{\pi r^2}{4}}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$$

En este caso las tres aplicaciones realizadas del principio de indiferencia condujeron a sendas probabilidades diferentes de la ocurrencia del evento $(AB > \ell)$.

En particular, Jaynes, E.T: (1973), basándose en la consideración que la solución de este problema debe cumplir algunos principios de invariancia (en este caso, invariancia respecto de las medidas de rotación, la escala y las traslación) propuso como único resultado satisfactorio $p(AB > \ell) = \frac{1}{2}$.

Esta paradoja, publicada por Bertrand, J. (1889) pertenece a la familia de las llamadas **paradojas de probabilidad geométrica**, cuyo origen se encuentra en la adopción como cierta de

FIGURA 2.2

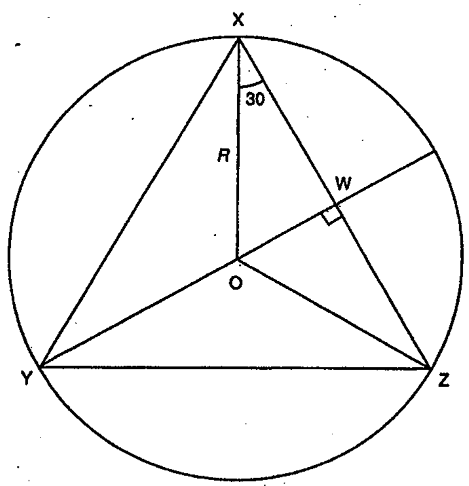


FIGURA 2.3

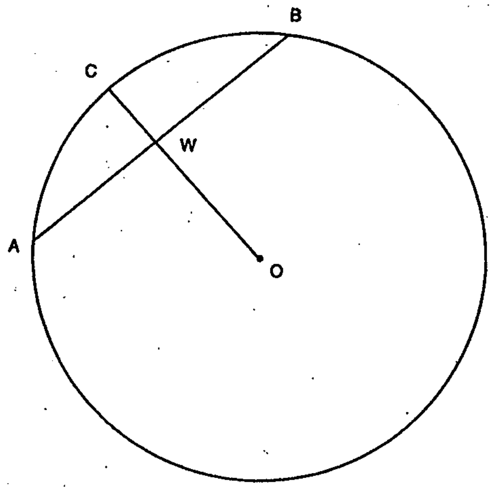


FIGURA 2.4

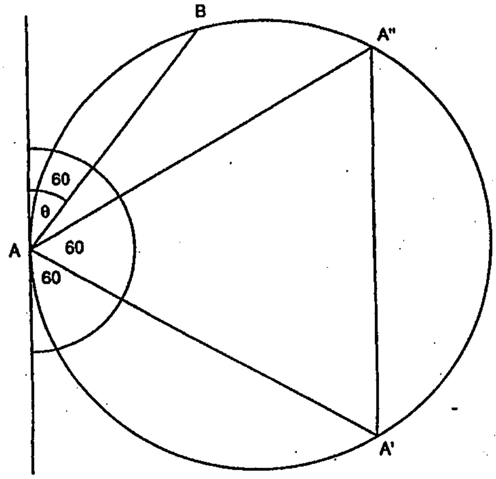
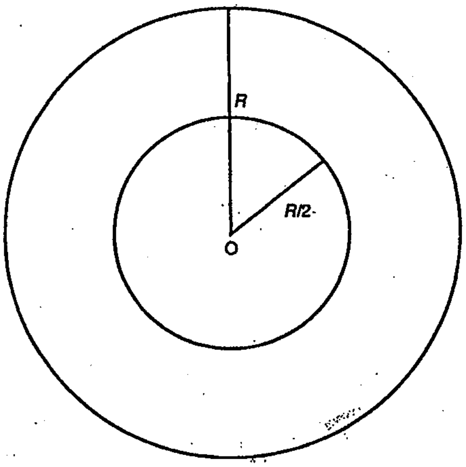


FIGURA 2.5



la siguiente hipótesis: Sean las variables continuas $\theta \in [a,b]$ y $\theta^* = f(\theta)$ (donde $f(.)$ es una función continua definida en el intervalo $[a,b]$), entonces los eventos $a \leq \theta \leq b$ y $f(a) \leq \theta^* \leq f(b)$ son lógicamente equivalentes. Es decir si, en particular, no existe ninguna razón para suponer que θ pueda asumir algún valor con preferencia a los demás puntos del intervalo $[a,b]$, de acuerdo con el principio de indiferencia, se puede concluir que se distribuye uniformemente en el intervalo $[a,b]$ y, como consecuencia, que no existirá ninguna razón para suponer que θ^* pueda asumir algún valor particular con preferencia a los demás puntos del intervalo $[f(a), f(b)]$, de modo que se puede asignar a la variable θ^* una distribución uniforme en el intervalo $[f(a), f(b)]$.

El error que encierra la aceptación generalizada de este supuesto radica en que, dada una variable θ, si la transformación $f(\theta)$ es artificial con respecto a la naturaleza del problema que se está analizando, las probabilidades que se obtengan de aplicar el principio de indiferencia a la variable θ puede diferir de aquéllas que se obtengan de aplicar el principio de indiferencia a la variable $\theta^* = f(\theta)$, lo cual conduciría a una situación paradójica similar a la planteada más arriba. Supóngase, por ejemplo, que la variable θ represente la altura de un sólido, cuyos valores pueden ser obtenidos a partir de observaciones afectadas por un error no sistemático de magnitud ε, de modo que el resultado de cada observación será $\theta \pm \varepsilon$. Si en vez de θ se utilizara la transformación $g = \frac{1}{\theta}$, cada resultado obtenido del proceso de medición, incluyendo el error de observación, sería aproximadamente $g \pm \varepsilon g^2$. Es decir, se obtendría un resultado afectado por un error de observación de magnitud variable con g, que conduciría a paradojas como la de Bertrand. En resumen, se puede concluir que el origen de la generación de las paradojas de probabilidad geométrica se encuentra en la (falsa) hipótesis de no-invariancia de la definición de la probabilidad con respecto a cualquier transformación f.

Un intento de solución a este tipo de paradojas propuesto por Keynes se basa en la consideración de que el principio de indiferencia debe aplicarse solamente en aquellos casos que presentan un número finito de alternativas indivisibles[182], lo cual conduce inevitablemente a la exclusión de la aplicación del principio de indiferencia a los casos en los que la variable θ sea continua. A fin de eliminar esta restricción, Keynes propuso una modificación del principio de indiferencia consistente en dividir el dominio $[a,b]$ de θ en un número finito de subintervalos de igual longitud[183] pero, dado que (en la medida que cada uno de los subintervalos puede, a su vez,

---

[182]. Keynes, J.M. (1921): "*Sean las alternativas* $\phi(a_1), \phi(a_2), \ldots, \phi(a_r)$ *cuya equiprobabilidad tratamos de establecer a partir de la aplicación del principio de indiferencia* h. *La condición necesaria para la aplicación de dicho principio es que, con relación a la evidencia, estas alternativas sean indivisibles y de la forma* $\phi(x)$ ".

[183]. Keynes, J.M. (1921): "*Supongamos, por ejemplo, que un punto cae sobre una recta de longitud* $m\ell$, *podemos considerar la alternativa 'el intervalo de longitud* ℓ *sobre el cual cae el punto es el* x *-ésimo intervalo de esta longitud si nos movemos a lo largo de la recta de izquierda a derecha'* $\equiv \phi(x)$; *y el principio de indiferencia puede ser indudablemente aplicado a las* m *alternativas* $\phi(1), \phi(2), \ldots, \phi(m)$, *siendo el valor de* m *creciente a medida que la*

ser dividido en subintervalos de menor longitud) esta propuesta no respeta la condición de indivisibilidad de las alternativas, no puede considerarse como una solución válida del problema[184].

Debe tenerse en cuenta, por otra parte, que el principio de indiferencia y los argumentos adicionales sobre la invariancia de la definición de la probabilidad son heurísticos y que, en consecuencia, su aplicabilidad no permite establecer su entidad como un principio lógico capaz de demostrar la validez de una hipótesis acerca de la indivisibilidad de las alternativas independientemente de la experiencia[185]. Luego, dado que la logicidad del carácter del principio de indiferencia es condición necesaria para una interpretación que permita admitir la existencia de probabilidades numéricas, se puede concluir que la calidad de heurístico del principio de indiferencia constituye una debilidad fundamental de la interpretación logicista de la probabilidad[186].

Fueron estas dificultades, relacionadas con la imposibilidad de determinar las probabilidades numéricas "a priori" de manera objetiva, las que hicieron que algunos teóricos (entre los que cabe destacar a R.A. Fisher, J. Neyman y K.R. Popper) rechazaran la idea Bayesiana y, ante la imposibilidad de la formulación de una teoría probabilística de la inferencia inductiva, consideraran una nueva interpretación de la probabilidad, conocida como la **teoría subjetivista**[187].

En este ámbito de la interpretación logicista, cabe mencionar el aporte de Rudolf Carnap quien, a partir del reconocimiento en el lenguaje precientífico, de las ya mencionadas nociones de probabilidad "a priori" y "a posteriori", elaboró a nivel científico los conceptos de "*grado de confirmación de una hipótesis a partir de ciertos resultados experimentales*" -que denotó como Pr_1, y de "*probabilidad estadística*" -que denotó como Pr_2 [188]. Carnap desarrolló estos dos conceptos basándose, respectivamente, en la interpretación logicista de Keynes, J.M. (1921), de Wittgenstein, L. (1961) y de F. Waismann (según la cual la probabilidad Pr_1 de una proposición q respecto a una proposición p está dada por la medida del ámbito común a p y a q, respecto de la medida del ámbito de p)[189] y en la interpretación frecuencista de von Mises, R. (1928) y de Reichenbach, H. (1935).

---

longitud de los intervalos disminuye. No existe ninguna razón por la cual ℓ no debería poseer una longitud definida, aunque fuera muy pequeña".

184. Como se verá en el Cap. 13, esta falta de precisión en la definición de la indivisibilidad de las alternativas se presenta también en la utilización implícita del principio de indiferencia que hace Th. Bayes en su memoria de 1763.

185. Debe tenerse en cuenta que, para lograr una justificación de su axiomática, Keynes aplicó la ya comentada y muy objetable teoría de la intuición Platónica.

186. Contrariamente a lo que ocurrió en la lógica inductiva -en cuyo ámbito no se obtuvo ninguna modificación clara del principio de indiferencia que permitiera la solución de todas las paradojas-, en la lógica deductiva el reemplazo del axioma de comprehensión mediante la introducción por Russell, B. (1903) de la teoría de tipos y la consideración de los sistemas axiomáticos de E. Zermelo (y su continuación por T. Skolem y A.A. Fraenkel), J. von Neumann, P. Bernays y el teorema de K. Gödel permitieron eliminar las derivaciones de las paradojas conocidas.

187. Para una análisis detallado de los postulados del teorema de Bayes, ver Cap. 13. La interpretación subjetivista de la probabilidad será tratada en la Sec. 2.5.

188. Si bien, tanto Pr_1 como Pr_2 son funciones de dos elementos (es decir, representan la probabilidad "*...de una cosa con respecto a cualquier otra cosa*") y, si bien ambas pueden asumir valores reales comprendidos en el intervalo $[0;1]$, sus diferencias conceptuales son muy profundas. Sobre este particular, ver Barone, F. (1953).

189. Se define como ámbito de una proposición al dominio determinado por sus condiciones de verdad.

En realidad, Carnap consideró a Pr_2 como secundaria y se dedicó casi con exclusividad a Pr_1, a la que tomó como punto de partida para la construcción de una lógica capaz de describir, a nivel formal, las modalidades con que se asignan los valores de probabilidad a las hipótesis inductivas (H) en base a una evidencia (e): $c(H,e)$. Una relación que Carnap postuló como análoga a las de la lógica deductiva.

La obra de Carnap puede ser dividida en dos períodos: En el primero, que abarca hasta 1952, se encuentra el tratamiento de las interpretaciones de la probabilidad analizadas en las secciones anteriores con relación a la tentativa de cada escuela de formular una definición que, además de aproximarse en la mayor medida de lo posible al concepto intuitivo de probabilidad, permitiera demostrar que toda la teoría de la probabilidad era una consecuencia necesaria de la misma[190]. Los trabajos correspondientes al segundo período contribuyeron a modificar los lineamientos tradicionales de los estudios sobre los fundamentos de la probabilidad, abandonando la pretensión de elaborar una definición de probabilidad y desviando las investigaciones de la cuestión ¿qué cosa es la probabilidad? al problema ¿cómo se calcula la probabilidad? Es decir, trasladando el análisis del problema de los fundamentos de la teoría de la probabilidad al problema de la formulación de un sistema de axiomas que permitiera la evaluación de la probabilidad, considerada ésta como una idea primitiva definida en forma implícita por dicho sistema[191].

El núcleo fundamental de la estructura de la lógica Carnapiana está dado, precisamente, por dicha axiomática, que propone un planteo riguroso de las consideraciones a partir de las cuales se han de evaluar las probabilidades. El primer grupo de axiomas de esta lógica comprende los "*axiomas del cálculo de probabilidades*" cuya aceptación implica que, una vez determinadas, las probabilidades, podrán ser transformadas según los métodos desarrollados por el cálculo de probabilidades. El segundo grupo está integrado por los llamados "*axiomas de invariancia*", los cuales permiten la determinación de la probabilidad en los casos de falta total de información experimental. El tercer conjunto, integrado por los "*axiomas de la relevancia*", establece la imposibilidad de ignorar la existencia de resultados experimentales en la determinación de las probabilidades. El cuarto conjunto de axiomas, conocido como "*de la irrelevancia*", introduce la influencia de la evaluación del observador en la determinación de la probabilidad (además de los mencionados, existen otros dos conjuntos de axiomas relativos a cuestiones eminentemente técnicas del sistema Carnapiano que no revisten mayor importancia para el esquema teórico adoptado en este trabajo)[192].

2.5.- La interpretación subjetivista

Las interpretaciones clásica, frecuencista y logicista están, en general, asociadas a una

---

190. Gran parte de las ideas propuestas por Carnap en este período pueden ser halladas en los ya mencionados trabajos de Keynes, Wittgenstein y Waismann.

191. En realidad, la posición de Carnap fue variando con el tiempo. Hasta alrededor de 1950, era contraria a la de Keynes. Basándose en una interpretación objetivista, sostenía que en cualquier contexto, se podía definir una única función de probabilidades válida. Posteriormente abandonó esta tesis reconociendo que la única forma de determinar una función de probabilidades era admitiendo la presencia de factores subjetivos (ver Sec. 2.7).

192. Estos axiomas constituyen la versión moderna de las consideraciones relativas a la simetría sobre las cuales, como se vio en la Sec. 2.2, se funda la interpretación clásica.

caracterización de la ciencia como un proceso impersonal y escéptico[193] y suponen, desde distintos puntos de vista y a diferentes niveles, que las probabilidades poseen una naturaleza objetiva, es decir que no dependen del observador. Según la definición clásica, la probabilidad está dada por la relación entre las medidas de los conjuntos de los resultados favorables y de los resultados posibles. Para los frecuencistas la probabilidad varía de acuerdo con los resultados de una sucesión de observaciones pero, una vez determinada ésta, la probabilidad queda exclusivamente definida a partir de la misma. En lo que hace a los logicistas, la probabilidad es un hecho lingüístico, es decir, una relación lógica que vincula las hipótesis sobre hechos futuros -o, en términos más generales, desconocidos- con la información disponible[194].

Si a esta conceptualización logicista se agrega la imposibilidad de dejar de considerar en el proceso de inducción, la intervención del individuo-evaluador como fuente de información o como mecanismo transformador de observaciones, surge la definición subjetiva -más general- de probabilidad Bernoulliana, según la cual es comprensible la existencia de evaluaciones de probabilidad no coincidentes entre sí aún para estados de conocimiento similares, ya que, en este contexto, la máxima objetividad a la que se puede aspirar es a una suerte de concordancia de evaluaciones personales, a una cierta intersubjetividad[195]. Esta libertad o personalismo en la evaluación de las probabilidades -que marca la diferencia radical con las escuelas objetivistas tratadas precedentemente (una diferencia de una profundidad tal que, como se comentó en la sección precedente, afecta los fundamentos mismos de la inferencia)- no implica, como se podría pensar equivocadamente, arbitrariedad en el proceso de inferencia: se supone que el individuo-evaluador (excepción hecha de actitudes psicológicas particulares de comportamiento ante la incertidumbre), a partir de un atento, completo y desapasionado examen de la situación concreta, adoptará valores de probabilidad realmente verdaderos para sí mismo[196].

Resulta muy difícil y, en cierta medida arbitrario, definir con precisión el momento del surgimiento de esta nueva interpretación de la probabilidad, cuya separación del logicismo puede ser asociada en sus fundamentos, con el planteo de la diferencia entre el "*grado de posibilidad*" de G.W. Leibniz ("*Nouveaux essais sur l'entendement humain*" (1678)) y el "*grado de certeza*" de J. Bernoulli ("*Ars conjectandi*" (1713)). Como se verá en la Sec. 2.7, la diferencia entre las interpretaciones objetivista y subjetivista que, de acuerdo con los postulados de la doctrina de la asociación de ideas desarrollada por J. Locke, D. Hartley y D. Hume, resultó prácticamente indistinguible en los siglos XVII y XVIII, se volvió cada vez más marcada hasta llegar a constituir una divisoria de aguas en los estudios modernos sobre filosofía de la probabilidad. Fue P.S. Laplace ("*Recherches sur l'intègration des èquations différentielles aux différences finies et sur leur usage dans la théorie des hasards*" (1776)) quien, siguiendo las críticas de Jean Baptiste Le Rond D'Alembert a la teoría de la probabilidad convencional, marcó por primera vez la diferencia entre ambas interpretaciones. Y fueron S.D. Poisson ("*Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*" (1837)) y Antoine Augustin Cournot ("*Mémoire sur les*

---

193. Ese escepticismo Cartesiano que liberó a la investigación científica de la influencia de la Iglesia en la decadencia del escolasticismo.

194. Cabe remarcar que, para las interpretaciones objetivistas, esta información objetiva no es solamente un indicio o una circunstancia que colabora en la formación del concepto de probabilidad, sino que constituye su misma esencia.

195. de Finetti, B. (1972): "*El propósito fundamental de la teoría subjetivista consiste en caracterizar el conjunto de opiniones formalmente admisibles sobre el resultado de un fenómeno, sin tomar en consideración la existencia de razones que puedan hacer aparecer a alguna de éstas como más adecuada que las demás, y seleccionar una entre todas ellas de acuerdo con el criterio del individuo*" (ver Sec. 2.7).

196. Ver Savage, L.J. (1972).

applications du calcul des chances à la statistique judiciaire" (1838), "*Exposition de la thèorie des chances et des probabilités*" (1843)) los primeros en investigar acerca de las implicaciones de esta distinción.

Uno de los aspectos fundamentales de esta controversia que se genera como consecuencia de la dificultad que trae aparejado el análisis de la noción de "objeto" (uno de los problemas fundamentales de la filosofía), se refiere a la terminología utilizada para definir la diferencia entre las interpretaciones objetivista y subjetivista. De acuerdo con Cournot, A.A. (1843), la diferencia entre la "*posibilidad objetiva*" que denota "*...la existencia de una relación que subsiste entre las cosas mismas*" y la probabilidad subjetiva relacionada con "*...nuestra forma de juzgar o de sentir que varía de un individuo a otro*". Daston, L. (1980), empleando una nomenclatura utilizada luego por Popper, K.R. (1934), identificó la interpretación objetivista con la definición frecuencista[197]. El inconveniente que trae aparejada la adopción de esta forma de clasificación radica en que en la interpretación subjetivista quedan incluidas la teoría subjetivista (que identifica a la probabilidad con el grado de creencia) y la teoría logicista (que identifica a la probabilidad con el grado de creencia racional). Es decir, que el calificativo subjetivista es empleado, en este caso, para identificar a una clase general y a una teoría específica en particular. Una objeción similar puede hacerse respecto de la terminología empleada por Gillies, D.A. (1973), quien clasifica a la probabilidad en "*lógica*" y "*científica*". Por su parte, Hacking, I. (1984) propuso clasificar como "*epistemológicas*" o "*epistémicas*" a las interpretaciones que identifican a la probabilidad con el grado de conocimiento o ignorancia o con el grado de creencia o creencia racional. Una insuficiencia de esta clasificación radica, obviamente, en la imposibilidad de discernir si la probabilidad clásica debería ser clasificada como epistemológica u objetiva[198].

Si bien la interpretación subjetivista reconoce sus orígenes en la empirista "filosofía-cum-psicología" de fines del siglo XVII y del siglo XVIII, recién en 1926 con la introducción formal del concepto de "*probabilidad personal*"[199] por parte de Frank Ramsey y Bruno de Finetti, dejó de ser considerada como una mera curiosidad (posteriormente Koopman, B.O. (1940), Good, I.J. (1950), Savage, L.J. (1954) y Schlaifer, R. (1959) consideraron su aplicación al problema de la inferencia).

Más allá de algunos curiosos antecedentes [200], se puede considerar que la teoría subjetiva

---

197. Como se verá en la Sec. 2.6, Popper, K.R. (1957) introdujo una nueva interpretación quasi-objetivista de la probabilidad, conocida como teoría propensionalista.

198. Con respecto a esta diferencia entre probabilidad epistemológica y objetiva, cabe considerar el siguiente ejemplo incluido en Laplace, P.S. (1814): Sea un observador A que cuenta con la información de que una moneda es sesgada, pero no conoce la dirección del sesgo. Interrogado acerca de cuál es la probabilidad de obtener el resultado "cara" al arrojar dicha moneda, si adopta una interpretación epistemológica de la probabilidad, dada su ignorancia acerca de la dirección del sesgo y, en consecuencia, en virtud de la inexistencia de alguna razón que le haga preferir un resultado en particular respecto del otro, su respuesta será $p(C)=\frac{1}{2}$; por el contrario, si adopta una interpretación objetivista, su respuesta será $p(C)=p$ ($0\leq p\leq 1$), donde p es un valor desconocido pero $p\neq\frac{1}{2}$ (Laplace elige como más adecuado el resultado que proporciona la interpretación epistemológica).

199. Denominación más afortunada, quizás, que la de probabilidad subjetiva.

200. Cabe destacar como nota curiosa, en este sentido, la obra del Capitán J.B.J. Liagre (1852) (Secretario Permanente de la Real Academia de Ciencias de Bélgica), la del General J.E.Estienne (1903)(1904) y la del Coronel Pierre van Deuren (1934) (quien fue miembro de la Real Asociación de Actuarios de Bélgica), quienes fundaron una larga tradición subjetivista en la Escuela Militar de Bélgica.

de la probabilidad fue introducida en forma independiente por Ramsey, F.P. (en Braithwaite, R.B. (1931)) y de Finetti, B. (1930a)(1930b)(1930c)(1931a)(1931b)(1937)[201], utilizando tratamientos que difieren tanto en sus detalles formales como en su aproximación conceptual. Ramsey planteó su propuesta -de carácter netamente antilogicista- a partir de una crítica detallada de la interpretación Keynesiana, en tanto que la obra de de Finetti -de carácter netamente antifrecuencista- no evidencia ninguna influencia de J.M. Keynes. De acuerdo con sus propias afirmaciones la primera influencia que motivó a de Finetti a adoptar la posición subjetivista se debe a E. Czuber quien, en su memoria de 1903 y en la segunda edición revisada y aumentada, publicada en 1908-1910, proporcionó una de las mejores exposiciones sobre las paradojas de la probabilidad geométrica (ver Keynes, J.M. (1921)) y concluyó que no existe ninguna necesidad de suponer el cumplimiento de la condición de la razón insuficiente[202].

En realidad, de Finetti no se detuvo a analizar los problemas generados por el principio de indiferencia, sino que simplemente rechazó la interpretación Laplaciana en su totalidad: tanto el determinismo Laplaciano[203] como el valor de la racionalidad del iluminismo, a favor de una mentalidad relativista (debe tenerse en cuenta que esta oposición al iluminismo es una característica del siglo pasado y, especialmente, de la década de 1930 en la que se publicaron los trabajos de de Finetti)[204].

La diferencia entre las posiciones de Ramsey y de Finetti se profundizó con el tiempo: en tanto que Ramsey, en sus últimas publicaciones, renegó del subjetivismo, el subjetivismo de de Finetti se extremó hasta llegar a negar, en una ruptura total con la tesis de von Mises, la existencia

---

201. El trabajo fundamental de F.P. Ramsey, "*Truth and probability*" fue escrito en 1926 y expuesto en el mismo año en el Moral Sciences Club de Cambridge, pero fue publicado (en forma póstuma) recién en 1931 en "*The foundations of mathematics and another logical essays*" de R. Braithwaite (Ramsey falleció en 1930 a la edad de 26 años). La propuesta de de Finetti sobre los fundamentos de la teoría de la probabilidad estaba concluida en Abril de 1928, pero fue publicada en 1930. En sus trabajos de 1931 de Finetti expuso los aspectos filosóficos de la teoría y completó sus fundamentos matemáticos. Todo parece indicar que Ramsey nunca oyó hablar de de Finetti y que éste no tomó contacto con la obra de Ramsey hasta después de 1930 (debe tenerse en cuenta que en su memoria "*Cambridge probability theorists*" de 1938, de Finetti menciona solamente a J.M. Keynes y H. Jeffreys). Lo cual avala el supuesto de que las propuestas de ambos autores fueron completamente independientes.

202. de Finetti, B.: "*Cuando era estudiante, probablemente dos años antes de graduarme, en los primeros párrafos de la "Wahrscheinlichkeitsrechnung" de Czuber encontré bosquejada una exposición resumida de los distintos conceptos de probabilidad. En la actualidad no recuerdo bien sus contenidos. Me parece que mencionaba a De Morgan como representante del punto de vista subjetivo (...) Comparando las distintas posiciones me pareció que todas las otras definiciones carecían de significado. En particular, la definición que se basa en los denominados 'casos igualmente probables' me pareció inaceptable*". No obstante estas afirmaciones, en sus trabajos sobre filosofía de la probabilidad de Finetti no hace referencia ni a Czuber, ni a De Morgan, pero cita a los probabilistas de la escuela francesa Bertrand, Borel, Lévy y, en particular, en lo que se refiere a la probabilidad objetiva como manifestación del resultado de una sucesión suficientemente larga de repeticiones, a H. Poincaré.

203. de Finetti, B. (1931): "*Ciertamente no podemos aceptar el determinismo, no podemos aceptar la 'existencia' de aquel famoso ámbito de oscuridad y misterio de las 'leyes' inmutables y necesarias que rigen el universo y no podemos aceptar esto como verdadero simplemente porque, a la luz de nuestra lógica, carecen de todo significado (...) La naturaleza no se presenta como un monstruoso e incorregiblemente exacto mecanismo de relojería en el que todo lo que ocurre es lo que debe ocurrir porque no puede sino ocurrir, y todo es predecible, si se conoce cómo trabaja dicho mecanismo*".

204. de Finetti, B.: "*La teoría subjetiva de la probabilidad (...) es un ejemplo de la aplicación de la mentalidad relativista a una rama de la matemática de crecimiento tan importante como el cálculo de probabilidades y una parte esencial de la nueva visión de la ciencia que proporciona una forma irracional y, diremos, probabilística*".

de eventos repetibles[205]. En realidad, es posible distinguir, según su grado de radicalidad -es decir, su grado de aceptación o rechazo de los razonamientos intersubjetivos-, varias formas de subjetivismo, las cuales, a medida que se vuelven más radicales[206], resultan más coherentes con la filosofía de Finettiana pero, para muchos autores, menos aceptables[207].

Las principales críticas de Ramsey a la interpretación Keynesiana se refieren a la hipótesis que supone la existencia de relaciones lógicas de probabilidad entre pares de proposiciones y la posibilidad de su percepción por el observador. En su "*Truth and probability*" afirma que "*La crítica fundamental al pensamiento del Sr. Keynes se refiere a que, en realidad, cosas tales como las relaciones de probabilidad que él describe paracen no existir en todos los casos. El supone que pueden ser percibidas de cualquier modo, en todos los casos; pero yo creo que esto no es verdad. Yo no las percibo (...) creo, además, que el resto de las personas tampoco las perciben*". Puntualiza, además que en la teoría lógicista sólo es posible percibir las relaciones lógicas en casos de cierta complejidad, pero que habitualmente su percepción en casos simples es imposible, por lo que se puede concluir que la intuición lógica no es adecuada para establecer la existencia de grados de vinculación parcial ni la satisfacción por parte del mismo del sistema axiomático de Kolmogorov[208].

A fin de lograr una asimilación correcta de la teoría matemática de la probabilidad al grado de creencia (Bernoulliano) del observador es necesario, obviamente, desarrollar un sistema de medición de ese grado de creencia personal[209]. En este sentido, Ramsey, F. (1931) consideró en principio, la posibilidad (virtual) de que la medición "*...pudiera realizarse utilizando un psicogalvanómetro u otro instrumento de características similares*". Posteriormente propuso utilizar una forma de "*instrospección*" para estimar la intensidad de lo que denominó la "*creencia-sensación*" acerca de una proposición, pero inmediatamente se desdijo en función de ciertos argumentos relacionados con el hecho que, en circunstancias normales, no existen "*sensaciones fuertes*" asociadas a la creencia y que, en general, no existe ninguna sensación[210]. La conclusión de

---

205. Posteriormente, el surgimiento de una interpretación constructivista de la probabilidad, en la que el fundamento de su evaluación no es, como en la concepción subjetivista, eminentemente interno al observador, sino que está radicado en la relación entre el evaluador y su entorno originó una forma de cuestionamiento a este subjetivismo puro (ver Shafer, G. (1981), Payne, J.W.; Bettman, J.R.; Johnson, E.J. (1992)).

206. de Finetti, B. (1937): "*...es posible demostrar que existen profundas razones psicológicas que hacen muy natural la concordancia exacta o aproximada que se observa entre las opiniones de distintos individuos, pero que no hay ningún argumento racional, positivo o metafísico que pueda dar a este hecho un significado que vaya más allá de una simple concordancia de opiniones subjetivas*".

207. La probabilidad intersubjetiva será tratada en la Sec. 2.7.

208. Si se tienen en cuenta los resultados obtenidos en la inferencia deductiva, los cuestionamientos de F. Ramsey acerca de la fundamentación de la teoría de la probabilidad en la intuición lógica parecen ser absolutamente justificados. Debe tenerse en cuenta que G. Frege (uno de los más grandes lógicos de todos los tiempos), basándose en su intuición lógica, propuso (coincidiendo con R. Dedekind y G. Peano) el **axioma de comprehensión** que conduce en forma casi inmediata a la paradoja de Russell; que la "*intuición*" de D. Hilbert lo condujo a afirmar que la ley del medio excluido era válida en matemática y que la "*intuición lógica*" de L.E.J. Brower lo condujo a afirmar todo lo contrario. Para un análisis más detallado sobre las críticas de Ramsey a la interpretación Keynesiana, ver Cottrell, A. (1993).

209. El problema de las condiciones para la existencia de una representación cuantitativa de la probabilidad será tratada con mayor detalle en la Sec. 2.6.

210. Ramsey, F. (1931): "*En primer lugar, podemos suponer que el grado de creencia es algo perceptible por el observador; por ejemplo, que las creencias difieren en la intensidad de la sensación por las que van acompañadas, por lo cual podrían ser llamadas creencias-sensación o sensaciones de convicción. Sin embargo, este supuesto no parece muy aceptable ya que no es fácil adjudicar números a las intensidades de las sensaciones. Además me parece falso desde el punto de vista observacional, ya que las creencias que sentimos en forma muy intensa a menudo no son acompañadas*

Ramsey, F. (1931) es que "*...el grado de una creencia es una propiedad causal de ésta, que puede ser expresada vagamente como el límite a partir del cual estamos preparados para actuar sobre dicha creencia*". Esta medida de la intensidad de una creencia a partir del análisis del carácter de la acción a la cual dicha creencia conduce al observador, permite retornar a la interpretación de los probabilistas de los siglos XVI y XVII: la probabilidad de ocurrencia de un evento E podría ser interpretada como el precio (apuesta) p que un individuo estima equitativo pagar a un contrincante por el derecho a recibir de éste un importe unitario, exigible si E se verifica[211] (no obstante debe tenerse en cuenta que la adopción de la apuesta como una medida razonable del grado de creencia, sólo es válida en algunos casos, por ejemplo, no podría ser utilizada como medida de la intensidad de la creencia que posee un observador con respecto a una teoría o a una ley científica)[212].

Cabe recordar que, de acuerdo con la interpretación objetivista, se dice que un evento E tiene una probabilidad de ocurrencia $p(E)$, entendiendo como evento no un caso individual bien determinado, sino a todos los eventos de un cierto tipo (debe tenerse en cuenta que en el contexto objetivista la probabilidad es considerada como una propiedad real de un tipo especial de situaciones físicas, denominadas eventos). Por el contrario, la interpretación subjetivista considera que la probabilidad corresponde siempre a eventos individuales y, cada vez que se asigne una probabilidad, es necesario pensarla como subordinada a la interpretación que hace cada observador de un conjunto de información particular (entendiendo por evento individual un caso que, para un individuo que en ciertas circunstancias no puede asegurar su ocurrencia en forma cierta, es aleatorio)[213].

Como se vio en la Sec. 2.2, la condición de equitatividad implica la indiferencia entre ser uno u otro jugador, entre pagar o cobrar p para cobrar o pagar 1 al verificarse E. Se dice, en ese caso, que la evaluación de la probabilidad es "*coherente*" en cuanto que no coloca a ninguno de los dos jugadores en la situación de ganar con seguridad. Es decir, si p es una evaluación coherente en el sentido de Ramsey-de Finetti[214] de la probabilidad de ocurrencia de un evento E para un individuo, dado que el precio es entendido en este caso como una magnitud lineal, la evaluación de la probabilidad de la no ocurrencia de E (es decir, de la ocurrencia de $\overline{E}$) para dicho individuo,

---

casi por ninguna sensación".

211. Ramsey, F. (1931): "*...esta sección está dedicada fundamentalmente a la apuesta, lo cual resulta razonable en la medida que, durante toda nuestra vida estamos, en cierto sentido, apostando. Cada vez que voy a la estación estoy apostando que pasará un tren y si no tuviera un grado de creencia suficiente en este hecho, declinaría la apuesta y permanecería en mi casa*".

212. "*Truth and probability*" está referido fundamentalmente a la utilización de la probabilidad en lógica como un grado de creencia parcial. Ramsey comenzó a escribir un capítulo adicional acerca de la probabilidad en estádistica y física, pero desafortunadamente, debido a su temprana desaparición en 1930, su trabajo quedó inconcluso. Sólo se conservan algunos fragmentos a partir de los cuales la reconstrucción de su pensamiento sobre este tema se hizo virtualmente imposible. Un cuidadoso estudio sobre estos fragmentos se debe a Galavotti, M.C. (1994)(1999) quien, en su particularmente interesante trabajo de 1999 intentó desarrollar una nueva aproximación a la cuestión a través de una síntesis de las posiciones de Ramsey y de Finetti (ver Gillies, D.A. (1988a)).

213. Ver Cap. 3.

214. Si bien habitualmente se acepta que la noción de coherencia fue introducida por F.P. Ramsey (1926), una idea precursora puede ser hallada en "*On probability*" (1830) de John William Lubbock y John Elliot Drinkwater-Bethune: "*Dado que la suma de las probabilidades de cualquier número de eventos incompatibles es igual a la unidad, poseemos una ecuación de condición sobre las probabilidades y siempre que éstas no satisfagan dicha ecuación, será posible apostar con la certeza de ganar*". La noción de coherencia también puede ser hallada en "*A propos d'un traité de porbabilités*" (1924) de E. Borel. En la obra de de Finetti este concepto aparece por primera vez en "*La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives*" (1937).

debe ser $p(\overline{E}) = q = p(1-E) = 1 - p(E) = 1 - p$.

Como se puede observar en el Apéndice 1, esta condición de linealidad de los precios se verifica en todos los casos para valores de utilidad, pero no siempre es válida para expresiones en valores monetarios. En caso contrario sería posible que existiera una apuesta en su contra que lo colocaría en la posición de perder con prescindencia de la ocurrencia o no de E : Si se verificara que $q < 1 - p$, el individuo-evaluador podría realizar, contemporáneamente, dos apuestas, una de p sobre la ocurrencia de E y otra de q sobre la ocurrencia $\overline{E}$, a cambio de recibir (por cualquiera de las dos apuestas) una cantidad igual a 1. Dado que, en forma cierta, este individuo ganará una (y sólo una) de las apuestas, se encontrará en situación de recibir, con certeza, una cantidad igual a 1 habiendo realizado un gasto de $p + q < 1$, obteniendo, en consecuencia, una ganancia segura igual a $1 - (p + q) > 0$. Si, por el contrario, se verificara que $q > 1 - p$, el individuo-evaluador podría aceptar contemporáneamente dos apuestas, una de p sobre la ocurrencia de E y otra de q sobre la ocurrencia $\overline{E}$, obligándose a pagar a su contrincante una cantidad igual a 1, en caso de ocurrencia de E . Dado que el contrincante ganará, con certeza, una de las dos apuestas, se hallará en la situación de pagar 1, habiendo recibido una cantidad igual a $p + q > 1$, obteniendo, en consecuencia, una ganancia segura igual a $(p + q) - 1 > 0$. Como se verá en la Sec. 3.3, la insistencia de de Finetti en considerar a la coherencia como condición necesaria en la evaluación de la probabilidad, se basó en la necesidad de preservar la relación de dicha evaluación con la probabilidad cuantitativa axiomatizada por Kolmogorov

Obviamente, el valor de la expectativa de recibir un importe monetario disminuirá si está subordinado a una cláusula restrictiva según la cual dicha expectativa será considerada válida a condición de que se verifique un evento E . Es decir, que la expectativa de recibir una cantidad v condicionada a la ocurrencia de un evento E , tendrá un valor (v') menor que v (en la medida que la ocurrencia de E se suponga más probable, la cantidad v' se aproximará más a v y, viceversa, cuanto menos probable se suponga la ocurrencia de E , v' se aproximará más a cero). A partir de estas consideraciones se puede concluir que, en general, un indicador adecuado de la probabilidad de ocurrencia de E podría ser la relación entre v' y v . Como corolario de este razonamiento surge que, haciendo $v = 1$, la probabilidad de ocurrencia de E , que asumirá valores en el intervalo:

$$p(E) = \begin{cases} 1 & si \quad E \\ 0 & si \quad \overline{E} \end{cases}$$

quedará caracterizada como el precio equitativo de la expectativa de recibir 1, en caso de ocurrencia de E .

Si se considera a E como una variable aleatoria que puede asumir los valores 1 ó 0, según que se verifique o no se verifique, $p(E)$ puede ser interpretada como la "*previsión*"[215] o valor

---

215. de Finetti, B. (1995): "*En muchos textos -especialmente en aquellos más antiguos- la 'previsión' es denominada 'esperanza matemática'. La esperanza puede ser positiva o negativa. Cuando es negativa, el término 'esperanza' parece impropio: por ejemplo, la expresión 'esperanza matemática de muerte' es, a la vez, ridícula y fuera de lugar. Por eso prefiero la palabra 'previsión' (...) ya que tiene la misma inicial ' $\wp$ ' que 'probabilidad', de modo que al escribir $\wp(X)$ se puede interpretar (en general) la previsión de X y (en particular) la probabilidad de X , en los casos en que X*

esperado de E ($\wp(E)$), equivalente al precio de una oferta aleatoria igual a E .

El concepto de previsión es más general que el de probabilidad. En el caso precedente la probabilidad coincide con su previsión. En general, la previsión de una variable aleatoria X -que puede asumir los valores x_i $(i = 1,2,...,n)$ - está dada por el precio equitativo del importe aleatorio, $X = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i$, donde E_i representa el evento ($X = x_i$). De acuerdo con esta expresión y teniendo en cuenta la condición de linealidad de los precios, se puede deducir la definición de $\wp(X)$ a partir de su interpretación como precio equitativo [216]:

$$\wp(X) = p\left(\sum_{i=1}^{n} x_i E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i E_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(E_i)$$

(obsérvese que, a partir de esta interpretación de la probabilidad como un caso particular de la previsión, es posible considerar al concepto de previsión como primitivo y al de probabilidad como derivado).

Como se vio en la Sec. 2.2, el valor v' constituye lo que habitualmente se denomina una **apuesta**, por lo que a la relación $\frac{v'}{v}$ se la conoce como **cociente de apuestas**. De acuerdo con la definición dada más arriba, la equitatividad de este cociente, para un observador dado, está dada por su indiferencia en apostar a favor de la ocurrencia de E (en el lenguaje doméstico, comprar una rifa sobre la ocurrencia de E) o apostar contra la ocurrencia de E (en el lenguaje doméstico, vender una rifa sobre la ocurrencia de E) o no apostar. Operar a favor o en contra de la ocurrencia de E determina la llamada **dirección de la apuesta**[217].

A fin de asegurar (al menos en parte) el cumplimiento de la condición de coherencia, de Finetti, B. (1995) postula que el individuo-evaluador debe actuar siempre y solamente de acuerdo a su conveniencia y que, en este contexto, su conveniencia se debe limitar a perseguir el máximo beneficio. Para lograr esta "*evaluación neutral*", propone un mecanismo consistente en solicitar al individuo-evaluador la determinación del valor de una apuesta que se considere aceptable para

---

fuese un evento".

216. De acuerdo con este razonamiento, las operaciones lógicas entre eventos pueden ser definidas como operaciones aritméticas de la siguiente forma $E_1 \cup E_2 = E_1 + E_2 - E_1 E_2 = Max(E_1, E_2)$, $E_1 \cap E_2 = E_1 E_2 = \min(E_1, E_2)$ y $\overline{E} = 1 - E$. Estas operaciones lógicas son aplicables también a variables aleatorias: $X \cup Y = Max(X, Y)$, $X \cap Y = \min(X, Y)$ y $\overline{X} = 1 - X$. De la misma forma, los conceptos de frecuencia absoluta (N_n) y frecuencia relativa (f_n) pueden ser caracterizados en términos de operaciones aritméticas entre eventos de la siguiente forma: $N_n = E_1 + E_2 + ... + E_n$ y $f_n = \frac{n_n}{n} = \frac{1}{n}(E_1 + E_2 + ... + E_n)$.

217. Esta interpretación de la probabilidad como relación entre valores de expectativas se remonta, en realidad a Thomas Bayes quien, en su "*Essay toward solving a problem in the doctrine of chances*", definió a la probabilidad de un evento como "*...la relación entre el valor al cual debe ser calculada una expectativa que depende de la ocurrencia de un evento, y el valor que se espera que aquélla asuma una vez que el evento se haya verificado*" (si bien del texto no resulta claro qué entendía Bayes por "*valor*", la interpretación más aceptable parecería ser la de "precio justo"). Ver Cap. 13.

cualquiera de los dos competidores y dejar a su contrincante -respecto de cuyo comportamiento se suponen la mismas condiciones de conveniencia y de beneficio máximo- la selección de la dirección de la apuesta (un mecanismo según el cual se encarga a un individuo la partición de un bien, por ejemplo, una torta, y a otro la selección de la parte más grande). Pero, se demuestra que este procedimiento no logra resolver las cuestiones referidas a la falta de sinceridad en las asignaciones de probabilidades. Sean dos jugadores, A y B, dispuestos a apostar con respecto a la ocurrencia de un evento E en las siguientes condiciones: el jugador B debe seleccionar una probabilidad p sobre la ocurrencia de E y el jugador A debe seleccionar una apuesta, v (que puede asumir cualquier valor real), de modo que si el evento E ocurre, B le debe pagar a A la cantidad pv, a cambio de v. De acuerdo con estas condiciones, a fin de asegurar una asignación de probabilidades sincera, el jugador B no debería conocer el signo de v. Si B supiera que $v > 0$ (circunstancia correspondiente a apostar a favor de la ocurrencia de E), seleccionaría un valor de p lo más bajo posible y, si supiera que $v < 0$ (circunstancia correspondiente a apostar en contra de la ocurrencia de E), seleccionaría un valor de p lo más alto posible. En ninguno de los dos casos el valor de p coincidiría con una asignación sincera de la probabilidad. Se puede concluir, entonces que, contrariamente a lo supuesto por de Finetti, al individuo-evaluador no siempre le conviene realizar una asignación de probabilidades sincera. Si tuviera la sospecha de que el adversario dispone de una información más completa o, simplemente, de que sus asignaciones de probabilidad son diferentes, no tendría ningún interés en declarar una evaluación de probabilidad "*realmente verdadera para sí mismo*"[218].

Estas falencias de la definición de probabilidad en términos de apuestas -en la que cada evaluación puede verse distorsionada por la consideración de las evaluaciones realizadas por otras personas, haciendo que el precio de indiferencia que postula la condición de coherencia conserve sólo un significado teórico- pueden ser resueltas, en general, mediante la utilización de las conocidas como **reglas de penalización**, cuya definición depende de la asignación de probabilidades efectuada por el observador y de la probabilidad coherente del evento en cuestión. En este esquema de penalizaciones, la más simple es la llamada **regla de Brier** (ver Brier, G.W. (1950)) que puede ser expresada de la siguiente forma: Sean un evento E y su contrario $\overline{E}$, y sean p y $1-p$, respectivamente, las probabilidades efectivamente asignadas sobre la ocurrencia de los mismos por el individuo-evaluador. Supóngase que éste declare un valor de probabilidad π para la ocurrencia de E. Si el evento E ocurre su valor será 1, y si no ocurre será 0 (es decir que, como se vio en páginas anteriores, el valor a asumir por E puede ser interpretado como una variable que puede asumir los valores 1 ó 0 según que E ocurra o no). La penalización (L_π) dependerá del valor de E y del valor de π declarado por el individuo-evaluador de acuerdo con la expresión $L_\pi = (E-\pi)^2$.

El valor esperado de la penalización debe ser calculado utilizando como probabilidad de ocurrencia de E al valor p. Si el valor declarado por el observador es π, el valor esperado de la

218. Si el individuo-evaluador supusiera que su contrincante va a asignar una probabilidad alta a la ocurrencia de un cierto evento que él, por el contrario, considera improbable, efectuaría una evaluación de la probabilidad tomando en consideración la selección que supone que hará su contrincante. Supóngase, por ejemplo, que el individuo-evaluador considere a la cantidad 0,3 como un valor (cierto) equitativo de la promesa de recibir 1 si ocurre el evento E, y supóngase que su contrincante considere equitativo pagar, por la misma promesa, un valor 0,5. Si el individuo-evaluador conociera (o supusiera) la opinión de su contrincante, concluiría que éste estaría dispuesto a "comprar la rifa" por 0,49 y, por lo tanto, declararía este valor como probabilidad de ocurrencia de E.

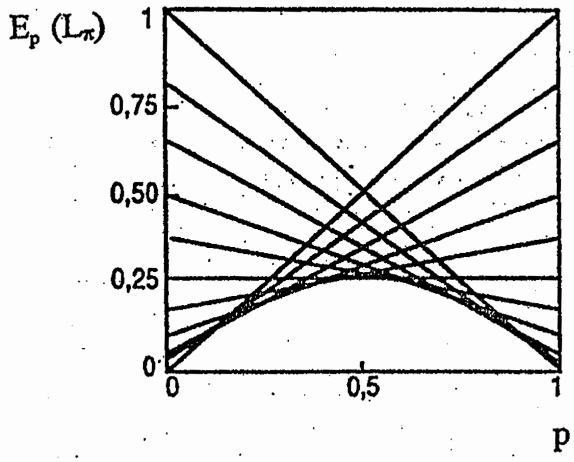
penalización queda definido de acuerdo con la siguiente expresión[219]:

$$E_p(L_\pi) = (0-\pi)^2(1-p) + (1-\pi)^2 p = (1-2\pi)p + \pi^2$$

Esto significa que, una vez fijado el valor de π, la expresión que representa el valor esperado de la penalización en función de p es una recta. De la observación de la **Figura 2.6** se puede concluir que todas las rectas que se obtienen al hacer variar π, son tangentes a la parábola $p - p^2$ (es decir, no hay ninguna recta que pase por debajo de esta parábola).

Para cada valor de p la selección óptima consiste en declarar aquel valor de π que corresponde a la recta cuya ordenada mínima se encuentra en el punto p, es decir, a la recta tangente a la parábola definida más arriba, en el punto p. Ahora bien, la derivada de esta parábola es $1-2p$, lo que demuestra que la recta tangente a la parábola es la recta cuyo coeficiente angular es $1-2p$ (de acuerdo con la definición de $E_p(L_\pi)$, todas las rectas de penalización tienen

Figura 2.6



coeficiente angular $1-2p$). Luego, cuando se verifique que $\pi = p$, el coeficiente angular será $1-2p$ y la recta será, por lo tanto, tangente a la parábola. A todas las otras rectas (para $\pi \neq p$) les corresponderá, en el punto p, una ordenada mayor. Esto demuestra que la mejor selección que puede realizar el individuo-evaluador es declarar el valor p. El resultado de declarar π en vez de p se traducirá en un aumento del valor esperado de la penalización en una cantidad:

$$(\pi^2 + p - 2\pi p) - (p - p^2) = (\pi - p)^2$$

219. El valor esperado de una variable aleatoria X se obtiene como la suma de cada valor de dicha variable por su correspondiente probabilidad (ver Cap. 4).

La penalización esperada aumenta porque la penalización efectiva, L_π, no depende de p : es igual a π^2 o a $(1-\pi)^2$ (esta demostración -debida a de Finetti, B. (1970)- parecería refutar los argumentos de la "fuzzy logic", que utiliza reglas para la asignación de probabilidades en términos de máximos y mínimos exclusivamente)..

Ahora bien, debe tenerse en cuenta que la solución que proporcionan las reglas de penalización no es completa, ya que la probabilidad no es el único factor que debe ser tomado en consideración para determinar el valor de la apuesta. En la psicología del jugador pueden reconocerse dos tendencias opuestas: por un lado, la propensión a apostar maximizando la ganancia (a costa de la probabilidad de ganar) y, por otro, la propensión a maximizar la probabilidad de ganar (a costa del monto de la ganancia). De modo que el valor de la apuesta -"ceteris paribus"- tenderá a ser menor si el individuo-evaluador es adverso al riesgo y, viceversa, tenderá a ser mayor si es propenso al riesgo.

A fin de resolver esta dificultad Daniel Bernoulli, en su "*Specimen theoriæ novæ de mensura sortis*" (1738) propuso una teoría según la cual la actitud de aversión o propensión al riesgo puede ser explicada completamente en términos de la denominada "*curva de utilidad de las ganancias*". Esta propuesta se funda en el supuesto de que el valor subjetivo (o psicológico) del dinero -que es lo que condiciona el comportamiento del apostador- no crece en forma proporcional al importe monetario, sino de acuerdo con una curva que puede variar de un individuo a otro. Si el valor subjetivo de las ganancias creciera más rápidamente que su valor monetario, entonces el valor de la ganancia eventual de la apuesta sería mayor -con relación al valor de la apuesta- que el de su valor monetario (es decir, es como si al ganar la apuesta, el apostador ganara más de lo que implica dicho valor monetario), en consecuencia el apostador estaría dispuesto a comprometer un importe mayor. Viceversa, si el valor subjetivo de las ganancias creciera menos rápidamente que el correspondiente valor monetario, el apostador consideraría como equitativa una apuesta menor. En el primer caso se dice que el apostador tiene propensión al riesgo, en el segundo que tiene aversión al riesgo[220].

A partir de los postulados de la teoría de la curva de utilidad, la definición de probabilidad atribuida a Bayes conservará su validez sólo si los valores de las apuestas v y v' son interpretados no como simples importes monetarios, sino como **valores de utilidad**. Esta circunstancia genera, entonces, el problema de determinar operativamente dichos valores (que son tan subjetivos como las asignaciones de probabilidad). Ramsey, F.P. (1931) propuso, en este sentido, una teoría basada en la determinación simultánea de la probabilidad y la utilidad[221].

Por su parte, Bruno de Finetti consideró una solución teóricamente menos rigurosa, pero operativamente más simple, basada en que la experiencia indica que, cuando los valores monetarios de las apuestas son pequeños en relación al capital de que dispone el apostador, la utilidad -en la

---

[220]. Ver Apéndice 1.

[221]. La propuesta de Ramsey fue continuada luego por Savage, J.L. (1954) y Jeffrey, R.C. (1965). Debe tenerse en cuenta que es virtualmente imposible obtener una medida de utilidad que pueda ser considerada totalmente satisfactoria. El mismo Ramsey, F.P. (1931) considera que "*Si se supone que, en última instancia, un individuo desea 'cosas' y desea, además, que éstas sean cuantificables y aditivas, entonces es posible suponer que, si prefiere una hora de natación a una hora de lectura, preferirá dos horas de natación a una hora de natación y a una hora de lectura. Pero, por supuesto esta comparación resulta absurda, en primer lugar, porque la natación y la lectura no constituyen bienes últimos y porque no podemos imaginar que la segunda hora de natación sea similar a la primera a causa de la fatiga, etc.*".

mayoría de los casos- crece (aproximadamente) en forma proporcional a dichos valores monetarios[222]. De este modo de Finetti concluyó que, en el caso en que las apuestas sean suficientemente pequeñas, el procedimiento basado en apuestas expresadas en importes monetarios proporciona (obviamente, con cierto margen de aproximación) estimaciones aceptables de la probabilidad subjetiva[223]. Curiosamente en su último período de Finetti modificó su criterio y, a partir de los trabajos de L.J. Savage dirigidos a unificar los conceptos de probabilidad y utilidad en el ámbito de la teoría de la decisión, consideró la estimación de la probabilidad basándose en el concepto de utilidad[224] y en sus últimos trabajos abandonó completamente el esquema de apuestas[225].

Una crítica que algunos autores hacen del esquema de apuestas es que produce solamente estimaciones groseras de las probabilidades numéricas. A este respecto de Finetti considera que los grados de creencia numéricamente exactos surgen a partir de una idealización por parte del observador y que esta idealización sólo es de utilidad para simplificar los cálculos matemáticos[226].

Como extensión de la postulación de Finettiana, Lad, F. (1983)(1996), además de una fundamentación de la teoría de la probabilidad similar a la de de Finetti, proporciona una demostración de cómo se puede desarrollar a partir de la interpretación en base a un esquema de apuestas, una teoría estadística (a la cual denomina "*métodos estadísticos operacionalistas subjetivos*"). Considera que "*Una medida definida operacionalmente es un proceso de acción específico el cual, cuando es ejecutado, genera un número*"[227] y concluye que, dado que la medida del grado de creencia mediante cocientes de apuestas puede ser considerada una medida definida operacionalmente, la definición del concepto de probabilidad a partir del cociente de apuestas puede considerarse como una interpretación operacionalista válida de la probabilidad.

Con respecto a la defínción clásica, las críticas de la interpretación subjetivista están relacionadas fundamentalmente con la noción de equiprobabilidad. Como se vio en la Sec. 2.2, el error principal del dogmatismo clásico consistió en considerar que había una única asignación de equiprobabilidad válida para todos los ámbitos de aplicación del cálculo de probabilidades cuando, en realidad, son los resultados experimentales y la interpretación del individuo-evaluador los que confirman la existencia de distintas asignaciones de equiprobabilidad, cada una de las cuales implica la adopción de un método de inferencia diferente[228].

---

222. Resultado que ya había sido considerado por Bernoulli, D. (1738).

223. Para una descripción más detallada acerca de la controversia importes monetarios versus. utilidad, ver Sahlin, N.-E. (1990).

224. En una nota de pie de página de la versión de 1968 de "*La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives*" (1937) escribió: "*Tal formulación podría mejorar, como la de Ramsey, considerando 'utilidades esperadas'*" y en su "*Theory of probability*" de 1970, aunque con cierto inocultable escepticismo, desarrolló una teoría de la utilidad.

225. de Finetti, B. (1981b): "*...estrictamente hablando, el esquema de apuestas no es pertinente a la probabilidad sino a la teoría de los juegos*".

226. de Finetti, B. (1931a): "*...si usted desea aplicar matemáticas, debe operar suponiendo que las magnitudes asumen valores precisos. Como todos saben, esta ficción es muy útil; el hecho que sea solamente una ficción no disminuye su valor en la medida que tengamos 'in mente' que la precisión del resultado será la que deba ser (...) Para pasar de premisas aproximadas a conclusiones aproximadas, con la válida ayuda de las matemáticas, debo utilizar un algoritmo exacto, aún cuando lo considere artificial*".

227. Lad, F. (1996).

228. Ver Sec. 3.3.8.

Como ya se mencionó, de acuerdo con la interpretación subjetivista, la asignación de equiprobabilidad efectuada por diferentes individuos-evaluadores refleja la interpretación -puramente subjetiva- de las circunstancias que pueden influir o no sobre los eventos considerados y depende, por lo tanto, de razones psicológicas que no pueden ser impuestas a nivel racional. De modo que se puede asegurar que no existe niguna razón -ni lógica, ni metafísica- que obligue a los individuos-evaluadores a considerar de la misma forma a las condiciones de contorno que se supone que afectan a los eventos en cuestión y, en consecuencia, a arribar a la misma evaluación de equiprobabilidad (en todo caso esta evaluación debe ser interpretada simplemente como una opinión más, no como un dogma indiscutible)[229].

Obsérvese que el reconocimiento de este carácter personalista de la condición de equiprobabilidad implica una interpretación subjetivista de los conceptos Laplacianos que permitiría evitar la objeción frecuencista de circularidad de la definición clásica[230].

Las críticas subjetivistas a la interpretación frecuencista -originadas en la noción de intercambiabilidad[231]- se refieren fundamentalmente a los supuestos de repetibilidad de los experimentos[232] y, en consecuencia, a la arbitrariedad de la definición de un fenómeno colectivo a partir de un cierto conjunto -incompleto- de sus características. De acuerdo con la interpretación frecuencista, si bien los lanzamientos de una moneda no se realizan todos del mismo modo, se supone que se repiten de forma que, cada vez, la asignación de probabilidades a los resultados "cara" y "ceca" sea la misma (al definir la probabilidad de esta forma, se genera, igual que en la interpretación clásica, una evidente circularidad). En realidad, los probabilistas que adhieren al determinismo metafísico deberían haber arribado a la siguiente conclusión: cuando se afirma que el lanzamiento de una moneda se realiza siempre del mismo modo, no se puede interpretar que se realice exactamente del mismo modo ya que, si así fuera, se debería obtener siempre el mismo resultado. En este sentido, cabe mencionar las objeciones de Lad, F. (1983) a la posición de Gnedenko, B.V. (1950). Desde un punto de vista propensionalista, sostiene que "*El supuesto de la repetibilidad de las condiciones de un experimento es fundamentalmente una manifestación de un modo metafísico de pensamiento (...) Dos experimentos constituyen claramente eventos completamente diferentes, distintos en tiempo o espacio y en otro conjunto infinito de circunstancias. Indudablemente el proceso dialéctico de desarrollo de la naturaleza no admite la posibilidad de repeticiones de las circunstancias idénticas necesarias, en principio, para la*

---

229. de Finetti, B. (1933): "*El juicio de equiprobabilidad (...) refleja una situación de simetría que a menudo resulta traducida objetivamente diciendo que las bolillas deben ser iguales, la moneda y el dado perfectos (físicamente simétricos), etc. A pesar de estas consideraciones el criterio (de equiprobabilidad) permanece fundamentalmente subjetivo, ya que la selección más o menos vaga de requisitos más o menos objetivos a incluir o no en tal concepto de 'igualdad' no puede sino reflejar la distinción subjetiva de cada una de las circunstancias que influyen o no sobre la opinión del observador*".

230. Gigerenzer, G.; Swijtink, Z.; Porter, T.; Daston, L.; Beatty, J.; Krüger, L. (1989): "*Una vez desaparecidos los límites psicológicos entre las probabilidades objetiva y subjetiva y entre el cálculo de probabilidades y el sentido común, la interpretación clásica comenzó a parecer peligrosamente subjetiva e indudablemente no razonable*".

231. Esta "*condición de equivalencia*" (en la primera nomenclatura de de Finetti) no es demostrable y, por lo tanto, su aceptación es subjetiva, de lo que se puede concluir nuevamente que el único subjetivismo coherente es el más radical, el que solamente admite una probabilidad que varía en el tiempo (ver Sec. 3.3.7).

232. Pompilj, G. (1959): "*En este nuestro universo solidario, donde cada fenómeno influye sobre todos los demás y es influido por todos los demás, se podría concebir la repetición de las experiencias suponiendo la constancia de ciertos factores pero, admitida la imposible paridad absoluta de los mismos, no es lícito creer en la igualdad de los resultados. Por otra parte, a pesar de nuestras precauciones, las distintas experiencias se verificarán inevitablemente cada una en condiciones diferentes*".

probabilidad en la construcción de Gnedenko"[233].

En particular estas críticas subjetivistas hacen referencia a la arbitrariedad o, más exactamente, al convencionalismo inherente a la determinación de los criterios en base a los cuales se debe decidir si dos o más eventos son iguales (y, como tales, igualmente probables) y, por lo tanto, aptos para ser reunidos en una misma clase. En términos de la interpretación subjetivista, la expresión evento (de acuerdo con la aplicación del principio de la identidad de los indiscernibles de Leibniz) se utiliza para denotar el caso singular. En el caso de una clase de eventos que presenten alguna analogía, se dice, en el contexto subjetivista, que cada evento de esa clase constituye una prueba del mismo fenómeno (sin plantear ninguna hipótesis sobre la naturaleza de dicha analogía, ni presuponer que la misma relacione a las probabilidades correspondientes a cada una de las pruebas). No se trata, en realidad, de un rechazo al concepto de frecuencia, sino a la necesidad de no confundir el concepto de valor esperado de la frecuencia con el concepto de probabilidad[234].

A este respecto, como se vio en la Sec. 2.3, cabe distinguir dos tipos de frecuencismo: el **finito** y el **hipotético.** Este último considera el principio intuitivo de que la probabilidad de ocurrencia de un evento es asimilable al límite de la frecuencia relativa pero, en las aplicaciones identifica a la probabilidad con la frecuencia obtenida a partir de un conjunto finito de observaciones, interpretada como el valor medio de los **valores de verdad** de dicho evento[235].

Debe tenerse en cuenta que, según se verá en la Sec. 3.2, en la concepción de von Mises, las propiedades de los colectivos no están expresadas con relación a fenómenos reales o a procedimientos de observación efectivos, sino que son consideradas como axiomas, de modo que sus consecuencias se suponen que son deducibles en forma rigurosa. Ahora bien, tales consecuencias serán verdaderas sólo si los axiomas que las originan son verdaderos. En particular, la convergencia de la sucesión de frecuencias (es decir, el traslado del frecuencismo finito al frecuencismo hipotético) es considerada como un axioma, no como una eventualidad que podría ser razonablemente verdadera y, por lo tanto, obliga a reconocer ciertos principios de determinismo metafísico inaceptables en un contexto empiricista como el que propone la interpretación frecuencista (por ejemplo, la existencia de una causalidad "back to the future" de los resultados aún

---

233. B.V. Gnedenko fue uno de los exponentes más distinguidos de la teoría materialista Marxista de la probabilidad, caracterizada por una negación del denominado "*idealismo subjetivo*" (del cual de Finetti y Lad fueron figuras preponderantes). Una reseña interesante de los escritores soviéticos sobre este particular puede ser hallada en Tavanec, P.V. (ed.)(1970). Los trabajos de Nalimov, V.V. (1981a)(1981b) proporcionan una semblanza de las ideas subjetivistas entre los pensadores soviéticos. Para una discusión detallada sobre los principios de la doctrina soviética objetivista de la probabilidad, ver Lad, F. (1983b).

234. de Finetti, B, (1967): "*Se trata de determinar si se debe considerar como un método de valuación apto para dar a la probabilidad un significado objetivo, aquél que consiste en asumir como valor de la probabilidad el de la frecuencia observada (...) Es necesario, ante todo, definir ¿cuál es la probabilidad que se desea evaluar: la probabilidad de un evento (caso singular) bien determinado, o bien aquélla que (desde nuestro punto de vista) no es una probabilidad propiamente dicha, sino una 'probabilidad-promedio', es decir, el promedio aritmético de las probabilidades relativas a un cierto número más o menos bien definido de casos singulares, o sea la previsión de las frecuencias sobre dicho conjunto de casos? Y, además ¿cuál debe ser la 'frecuencia observada' a utilizar? Se contará con datos, detallados o resumidos, relativos a la ocurrencia de eventos más o menos análogos (de acuerdo con diferentes clasificaciones) a aquél (o aquéllos) de los cuales nos interesa evaluar la probabilidad (o la probabilidad-promedio), y (entre las distintas especificaciones de dichas 'analogías') podremos extender estas consideraciones a tiempos más o menos remotos o próximos, a países o regiones más o menos vecinos y homogéneos (si se tratara de hechos atinentes a poblaciones, o de fenómenos variables según factores geográficos, etc.), y así sucesivamente*".

235. Frieden, B.R. (1991): "*La palabra 'probabilidad' no es sino una abstracción matemática de la expresión intuitivamente más significativo de 'frecuencia de ocurrencia'*".

no ocurridos sobre las asignaciones de probabilidad presentes).

En este sentido, si se arrojara sucesivamente un dado que se supone perfecto, se debería esperar que cada una de las caras se presentara con una frecuencia similar y en forma irregular[236]. Si, por el contrario, se observaran frecuencias muy distintas de las que sería dable esperar, existiría la tentación de considerar que la hipótesis de independencia de la sucesión es de eventos debería ser considerada falsa[237]. No obstante, debe tenerse en cuenta que, si bien este planteo tiene importancia desde el punto de vista del razonamiento inductivo, no permite ni confirmar ni rechazar las hipótesis de independencia y equiprobabilidad. Si se supone que todas las sucesiones son igualmente probables entonces no importa cuál sea la secuencia observada ya que, desde un punto de vista objetivo, ésta no permitiría obtener ninguna conclusión sobre el resultado de la serie de lanzamientos. Es sólo desde un punto de vista subjetivo que el resultado de los lanzamientos puede ser considerado relevante para la previsión de los resultados sucesivos. De modo que también a la noción de **irregularidad** ("Regellosikeit") se le puede asignar una interpretación subjetiva[238].

Con respecto a la definición operacionalista-positivista de probabilidad de von Mises[239], de Finetti, B. (1937) sostiene que, en lo que hace a la utilización del concepto de límite, existe una diferencia entre la teoría de la probabilidad y las ciencias físicas[240]. La objeción de de Finetti se basa en el principio que, a partir de un modelo estimado empíricamente utilizando un marco teórico determinado, sólo es posible obtener una aproximación al verdadero comportamiento de un fenómeno de resultado eventual. Supóngase, por ejemplo, que se quisiera modelizar el caso que se origina al arrojar repetidamente una moneda simétrica. Se puede deducir fácilmente que, si se produce m veces el resultado "cara" en n repeticiones del evento, la probabilidad de que la proposición:

$$\frac{\frac{m}{n}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}=\left|\frac{m}{n}-1\right|\leq\frac{0.98}{\sqrt{n}}$$

---

236. Debe tenerse en cuenta que, de acuerdo con la interpretación frecuencista, la probabilidad no es aproximadamente igual a la frecuencia relativa, es la frecuencia relativa.

237. Supóngase, por ejemplo, que después de observar un gran número de jugadas de una ruleta un individuo obtuviera que el resultado "cero" ha ocurrido, exactamente, en el 2% de los casos. Si la probabilidad y la frecuencia fuesen la misma cosa, se debería afirmar que la probabilidad de que ocurriera el resultado "cero" es 0,02. Ahora bien, si se atribuyese la probabilidad $\frac{1}{37}$ a la ocurrencia del resultado "cero" en una jugada, se debería esperar que la frecuencia fuese igual a $\frac{1}{37}$, pero, obviamente, es muy difícil que la frecuencia resulte ser, para todos los números, igual a $\frac{1}{37}$. Un ejemplo más dramático aún: de acuerdo con el frecuencismo finito, si se arrojara una moneda un número impar de veces en igualdad de condiciones, por más que se pudiera garantizar su perfecta simetría, la probabilidad de obtener el resultado "cara" nunca podría ser exactamente igual a $\frac{1}{2}$.

238. Ver Sec. 3.2 y Apéndice 2.

239. Ver Sec. 2.2.

240. En el caso particular de la probabilidad, se necesitan algunos supuestos adicionales para relacionar teoría con realidad. Como se verá en la Sec. 2.6, el supuesto requerido es la llamada **regla de falsificación para las afirmaciones de la probabilidad**.

sea verdadera será del 95%. Es decir que, a partir del modelo, no se puede asegurar que la relación frecuencia relativa-probabilidad se verifique con certeza, sino que sólo se verificará con un 95% de probabilidad, de modo que todos los puntos del intervalo $[0;1]$ serán eventos posibles (aún cuando la probabilidad de los puntos que difieran considerablemente de $\frac{1}{2}$ sea muy pequeña)[241]

Otra objeción de de Finetti es la falta de vinculación de la teoría frecuencista con el papel que debe jugar la probabilidad en los procesos de inducción y confirmación. "*Sólo se puede atribuir un valor filosófico esencial a la teoría de la probabilidad si cumple la misión de profundizar, explicar o justificar el razonamiento por inducción. Este objetivo no fue logrado por von Mises*"[242]. La interpretación subjetivista de la probabilidad y de la inferencia inductiva se funda, precisamente, en un corte radical con la concepción empiricista del frecuencismo que considera a la probabilidad y a la inferencia como productos de resultados aproximados acerca de un universo real que existe más allá de la experiencia del observador.

La réplica de von Mises, R. (1950) a esta crítica se basa en que la naturaleza de la objeción de de Finetti es inherente a su interpretación de la probabilidad[243]. Considera que, si bien es innegable que las cuestiones relacionadas con la inducción y confirmación deben ser discutidas, no se puede asegurar que el cálculo de probabilidades sea el argumento adecuado para tratar estos problemas (debe tenerse en cuenta que, por ejemplo, las decisiones acerca de la confirmación de una hipótesis a partir de la evidencia, son más de naturaleza cualitativa que cuantitativa)[244].

Como consecuencia de todo lo expresado en las secciones precedentes se puede concluir que, si bien el frecuencismo no constituye una representación aceptable del concepto de probabilidad, debe reconocerse que interpreta una porción fundamental del pensamiento intuitivo acerca de la probabilidad.

Por otra parte, resulta obvio que la aceptación estricta (monista) de los postulados subjetivistas radicalizados conduciría a la negación de cualquier significado objetivo de la ciencia en su totalidad, dado que toda teoría científica apela siempre a algún tipo de convención. Si bien es innegable que en momentos o lugares diferentes, las infinitas circunstancias que afectan a los

---

241. de Finetti, B. (1937): "*El hecho que la imposibilidad de establecer relaciones precisas entre probabilidades y frecuencias se considere análoga a la imposibilidad práctica de relacionar las nociones abstractas de la teoría y las realidades empíricas que se manifiesta en todas las ciencias experimentales, hace que a menudo se considere que estas objeciones pueden ser obviadas. Desde mi punto de vista, esta analogía es ilusoria: en las otras ciencias se cuenta con una teoría que afirma y predice con certeza y exactitud lo que ocurriría si dicha teoría fuera completamente exacta; en el cálculo de probabilidades es la misma teoría la que nos obliga a admitir la posibilidad de todas las frecuencias. En las otras ciencias la incertidumbre surge de la conexión imperfecta entre la teoría y los hechos; por el contrario, en nuestro caso no se origina en esa relación, sino en el mismo cuerpo de la teoría*".

242. de Finetti, B. (1936).

243. von Mises, R. (prefacio a la tercera edición alemana (1950) de "*Probabiity, statistics and truth*" (1928)): "*De acuerdo al punto de vista básico de este libro, la teoría de la probabilidad en su aplicación a la realidad es en sí misma una ciencia inductiva; sus resultados y fórmulas no sirven para hallar el proceso inductivo como tal, mucho menos para proporcionar valores numéricos capaces de decidir la aceptabilidad de cualquier otra rama de la ciencia inductiva, como por ejemplo, la teoría general de la relatividad*".

244. Ver Sec. 3.3.10.

experimentos varían, es necesario reconocer que muchos de estos factores son irrelevantes y que, como se verá en la Sec. 2.6, tomando los recaudos pertinentes, las observaciones repetidas parecerían poder conducir, en la práctica, a resultados capaces de permitir una estimación de comportamientos futuros, por lo menos a nivel de frecuencias relativas.

Como se verá en la Sec. 2.7, la posición pluralista respecto de la teoría de la probabilidad, por su parte, considera que las nociones subjetivista, clásica y frecuencista conservan su valor, pero no como definiciones, sino como criterios aptos para colaborar en la estimación de ciertas probabilidades "*...porque no se puede fijar el significado 'antes' de saber qué es la probabilidad, porque estas definiciones no aclaran el valor psicológico y, finalmente, porque, independientemente de cualquier razón conceptual, poseen siempre un ámbito de aplicación muy restringido*" (de Finetti, B. (1933)).

2.6.- La interpretación propensionalista

Las consideraciones anteriores parecerían confirmar aquella conclusión según la cual, debido fundamentalmente al conocimiento inevitablemente parcial de los aspectos que la componen, la probabilidad es una noción "*bastante difícil de precisar*". Como se ha visto, las interpretaciones analizadas en las secciones precedentes consideran que la noción de probabilidad es representable mediante una versión más o menos canónica. Si bien su fracaso en obtener una definición universal parecería desmentir dicha hipótesis[245], esto no debería ser considerado como un reconocimiento de la imposibilidad de caracterizar la naturaleza de la probabilidad mediante una fórmula sino, quizás, como la necesidad de recurrir a definiciones menos estrictas a partir de un conjunto difuso de proposiciones[246] (lo cual no debería implicar necesariamente la imposibilidad de su aplicación práctica)[247]. Este principio dio origen a una nueva interpretación objetivista de la probabilidad basada en la teoría de las propensiones[248].

La teoría propensionalista de la probabilidad fue introducida por Popper, K.R. (1957b), desarrollada en sus trabajos de 1959b, 1983 y 1990 y continuada por un grupo de filósofos de la

---

[245]. Como se vio, la rigurosidad que pretenden las definiciones de probabilidad propuestas se basan en la eliminación de todos los aspectos que las mismas no logran abarcar.

[246]. Recurrir a lo que Bachelard, G. (1953) denominó la "*conciencia de lo no-riguroso*".

[247]. El principio que postula que sólo las expresiones rigurosamente definidas son aplicables en la práctica encierra un error atribuible a la generalmente pretendida subordinación de las aplicaciones a la teoría. En realidad, la experiencia parece indicar que habitualmente las investigaciones técnicas precedieron a las científicas y que, en el ámbito de los desarrollos probabilístico-inferenciales, la transferencia de las primeras a las segundas fue más lenta que en otras disciplinas, como por ejemplo, la geometría, la aritmética y la astronomía. Sólo si se pudiera asegurar que la naturaleza está regida por un sistema regulado por leyes precisas e invariables, sería necesaria para su descripción la formulación de teorías estructuradas lógicamente. La idea de que solamente las teorías construidas lógicamente sobre la base de ideas netamente diferenciadas pueden poseer un fundamento objetivo, constituye un prejuicio heredado de la mecánica clásica, pero no posee ninguna justificación racional.

[248]. Miller, D.W. (1994): "*Uno de los principales desafíos de cualquier teoría objetivista del conocimiento científico consiste en proporcionar una comprensión satisfactoria de las probabilidades físicas. Las primeras ideas, que componen la interpretación frecuencista de la probabilidad, deberían ser abandonadas y reemplazadas por un conjunto de proposiciones igualmente difusas, que constituyen la interpretación propensionalista de la probabilidad*".

ciencia entre los que cabe destacar a D.W. Miller y J.H. Fetzer[249].

El problema que dio origen a esta teoría (el cual ya había sido considerado por Popper en su "*Logic of scientific discovery*" (1934)) consistía en decidir sobre la posibilidad de definir probabilidades objetivas "*singulares*" sobre la ocurrencia de eventos individuales[250]. En principio, Popper, K.R. (1934) consideró a un evento individual como un elemento particular de un colectivo de von Mises y sugirió que su "*probabilidad singular*" podía ser asimilada a su probabilidad en el colectivo considerado como una totalidad pero, luego, en sus trabajos de 1957b y 1959b objetó su propia propuesta. Sus argumentos para abandonar la interpretación frecuencista se basan en el siguiente ejemplo: Sean dos dados, uno simétrico y el otro afectado por un sesgo tal que la probabilidad de obtener el resultado "5" sea igual a $\frac{1}{4}$. Supóngase una sucesión consistente casi en su totalidad en tiradas del dado sesgado y una o dos tiradas intercaladas del dado simétrico. Si se considera una de estas tiradas intercaladas, de acuerdo con la primera interpretación de Popper, la probabilidad de obtener el resultado "5" en esa tirada sería igual a $\frac{1}{4}$, dado que la misma es parte de un colectivo para el cual $p(5)=\frac{1}{4}$. Pero, dado que para cualquier tirada del dado regular $p(5)=\frac{1}{6}$, este razonamiento genera una paradoja intuitiva originada en la imposibilidad de modificar el concepto de colectivo (obsérvese que la sucesión de tiradas del dado sesgado con algunas tiradas intercaladas del dado simétrico no constituye un colectivo genuino). De acuerdo con Popper, K.R. (1959b), "*Todo este análisis implica que el teórico frecuencista debe introducir una modificación -aparentemente pequeña- a su teoría. Deberá considerar que una sucesión admisible de eventos (una sucesión de referencia o colectivo) siempre debe ser una sucesión de experimentos repetidos. O, en términos más generales, deberá considerar que las sucesiones admisibles deben ser sucesiones virtuales o reales, caracterizadas por un conjunto de condiciones generatrices -por un conjunto de condiciones cuya realización repetida produce los elementos de la sucesión (...) Si observamos en forma más detallada, podemos concluir que esta modificación aparentemente pequeña implica una transición de la interpretación frecuencista a la interpretación propensionalista*", cuyas condiciones generatrices se consideran como dotadas de una propensión a producir las frecuencias observadas. "*Pero esto significa que debemos interpretar a las condiciones como dotadas de una tendencia o disposición o propensión a producir sucesiones cuyas frecuencias son iguales a las probabilidades; lo cual constituye el núcleo de la interpretación propensionalista*".

De la formulación de la teoría en las publicaciones de 1957b y 1959b se puede concluir que, aunque no lo especifica claramente, existen razones para suponer que Popper se refiere a

---

[249]. Otros aportes significativos a la interpretación propensionalista se deben a Hacking, I. (1965) y Mellor, D.H. (1971) (ver Salmon, W.C. (1979)).

[250]. La denominación "teoría propensionalista"será utilizada aquí para caracterizar a todas las teorías dirigidas a desarrollar una interpretación objetivista, no-frecuencista, de la probabilidad,

sucesiones finitas de eventos[251]. Teniendo en cuenta que la pretensión es plantear una teoría fundamentalmente científica y empírica, se adoptará aquí la interpretación de las sucesiones como "*largas, pero finitas*" y, en consecuencia, se considerará a las condiciones como poseedoras de una propensión a producir frecuencias **aproximadamente** iguales a las probabilidades[252].

Obsérvese que la palabra propensión sugiere un tipo de enumeración ordenada, lo cual marca una diferencia con el punto de vista frecuencista que, como se vio en la Sec. 2.2, se caracteriza porque las probabilidades sólo pueden ser introducidas en situaciones físicas (es decir, en "*ocasiones de manifestación total*", de acuerdo con la nomenclatura de Peirce, C.S. (1910)) respecto de las cuales es posible definir un colectivo. En la teoría propensionalista de Popper es absolutamente legítimo postular la existencia de probabilidades sobre conjuntos de condiciones (y aún de obtener conclusiones testeables sobre dicha postulación), aunque éstas no admitan un número suficientemente grande de repeticiones. Una característica que constituye una ampliación indiscutiblemente significativa del conjunto de situaciones en el que resulta aplicable la teoría de la probabilidad, con respecto a la interpretación frecuencista [253].

Hasta aquí se ha tratado el problema de la asignación de probabilidades para eventos definidos por los resultados de sucesiones de condiciones repetibles. Con respecto a las probabilidades de eventos individuales (que, como se mencionó al comienzo de esta sección, constituyen el problema que dio origen a la teoría propensionalista)[254], deben ser consideradas como dependientes fundamentalmente del conjunto de condiciones a las cuales está referido el evento que del evento mismo[255].

---

[251]. Popper, K.R. (1957b): "*Desde el punto de vista de la interpretación frecuencista, la probabilidad de un evento de cierto tipo -como por ejemplo, obtener el resultado '6' al arrojar un dado particular- no puede ser sino la frecuencia de este tipo de evento en una sucesión extremadamente larga (quizás infinita) de eventos*". Popper, K.R. (1959b): "*...dado que las probabilidades dependen de un orden experimental, pueden ser interpretadas como propiedades de dicho orden. Definen la disposición o la propensión del orden experimental para generar ciertas frecuencias características cuando el experimento es repetido a menudo*".

[252]. Las cuestiones relacionadas con la dificultad de decidir cuándo una sucesión de repeticiones es suficientemente larga o cuáles son los alcances de la expresión "aproximadamente igual", serán tratadas en la Sec. 3.1.2.

[253]. Como se verá en la Sec. 3.1.2, a pesar de su afirmación que "*...el autor se ha basado, en gran medida, en el trabajo de von Mises*", en realidad Kolmogorov, A.N. (1933) adoptó la propuesta de Popper de asociar las probabilidades a los resultados de un conjunto de condiciones ($\Im$) repetibles y no a los colectivos (C) de la interpretación frecuencista. Kolmogorov, A.N. (1933): "*Sea un sistema de condiciones, $\Im$, que admiten sucesiones de repeticiones (...) Si la variedad de los eventos que implican la realización de las condiciones $\Im$ que ocurrieron realmente pertenece a un conjunto A (definido de alguna forma), entonces decimos que el evento A ha ocurrido (...) Bajo ciertas condiciones (...) Podemos suponer que a un evento A, que puede o no ocurrir bajo las condiciones $\Im$, se le asigne un número real $p(A)$ ...*"

[254]. Ver Ayer, A.J. (1963).

[255]. Este planteo también podría ser considerado como una variante del logicismo dirigida a intentar el retorno a una interpretación objetivista, asociando el concepto de probabilidad al de las denominadas **posibilidades potenciales** de V.A. Fock, según las cuales se puede admitir que el conjunto de resultados posibles existe sólo en la mente del observador, pero no como una creación de éste, sino como algo que el observador debe admitir (ver Omelyanoskij, M.E.; Fock, V.A. (1972)). Si bien el concepto de potencialidad puede hallarse asociado desde sus orígenes a denominaciones diferentes (los "*mundos posibles*" de Leibniz, los "*casos igualmente posibles*" de Laplace, los "*fundamentos de verdad*" de Wittgenstein, las "*descripciones de estado*" de Carnap, los "*posibles estados de la naturaleza*" de los teóricos modernos de la teoría de la decisión), es sólo en tiempos recientes que, por obra de K. Popper, fue reconsiderado como un argumento para una

Una aproximación habitual a la solución de este problema, relacionado con las condiciones utilizadas para describir un evento singular, consiste en la definición de una clase de referencia a la cual asignar el evento[256], pero debe tenerse en cuenta que esta aproximación proporciona probabilidades que, aunque basadas en probabilidades objetivas, son subjetivas: dado que la opinabilidad acerca de la clasificación del evento genera un elemento subjetivo[257], las probabilidades de ocurrencia de eventos únicos, aunque sean basadas en probabilidades objetivas, siempre se encuentran en una situación de no-objetividad intrínseca. Como consecuencia de este juicio se puede concluir en forma inmediata que: **i)** algunas probabilidades subjetivas pueden ser consideradas preferibles a otras (pero que esta relación de preferencia no implica la existencia de una probabilidad singular objetiva) y **ii)** el grado de preferencia respecto de las probabilidades subjetivas varía en forma directa con la magnitud de la evidencia en la que se basan.

Sea un evento singular E que puede ser clasificado como un elemento de una sucesión de condiciones, $S_1, S_2, S_3 ....$ tal que $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset ...$. Supóngase que se cuenta con información estadística que permite obtener buenas estimaciones ($p_1, p_2, p_3, ...$) de la probabilidad objetiva sobre la ocurrencia de E con respecto a las condiciones $S_1, S_2, S_3, ...$. Entonces, de acuerdo con las consideraciones anteriores, se demuestra que la probabilidad p_2 es preferible a p_1, que p_3 es preferible a p_2 y así sucesivamente. Si se sustituyen las condiciones S_i por la clase de referencia del conjunto de elementos S, queda definido el llamado **principio de la clase de referencia más restringida** según el cual "*La regla para estimar la probabilidad de que un elemento en particular posea una propiedad dada, consiste en elegir como clase de referencia, entre aquéllas a las cuales pertenezca el elemento, a la más restringida en la cual la propiedad ocurra con una frecuencia extrapolable*"[258].

Un primer problema derivado de la aplicación de este principio se presenta obviamente cuando no existe una única clase de referencia de máxima restricción seleccionable. Pero debe tenerse en cuenta que, aún en el caso en que dicha clase exista, la adopción del criterio consistente en asimilar la probabilidad sobre la ocurrencia de un evento singular a su frecuencia relativa en la clase de referencia más restringida a la cual pertenece el evento, puede conducir según Keynes, J.M. (1921), a una decisión equivocada. Podría suceder que se conocieran circunstancias que no constituyeran datos estadísticos en una clase de referencia pero que, sin embargo, proporcionaran razones considerables para corregir la asignación de probabilidades. En ese caso, la no

---

decisión), es sólo en tiempos recientes que, por obra de K. Popper, fue reconsiderado como un argumento para una interpretación objetivista del concepto de probabilidad.

256. Como se vio en la Sec. 2.3, esta solución mediante la formulación de una clase de referencia es típica de la interpretación frecuencista.

257. Howson, C.; Urbach, P. (1989): "*...las probabilidades para casos individuales (...) no son objetivas. Son probabilidades subjetivas cuyas consideraciones de consistencia, sin embargo, indican que deben ser iguales a las probabilidades objetivas cuando todo lo que se conoce acerca del caso individual es que es un elemento del colectivo relevante. Esto es todo lo que siempre se deseó de una teoría de la probabilidad de los casos singulares: que, en estas condiciones, fueran iguales a probabilidades objetivas. La doctrina incoherente de las probabilidades objetivas de los casos singulares tuvo su origen en el fracaso respecto de la determinación de la sutil diferencia entre los valores de una probabilidad calculada en base a elementos objetivos y los de la probabilidad intrínsecamente objetiva*".

258. Ayer, A.J. (1963).

consideración de dicha evidencia cualitativa puede conducir a asignaciones de probabilidades con una base menos satisfactoria que la que se podría haber obtenido a partir de un análisis total de la evidencia[259].

Entonces, el procedimiento general para asignar probabilidades a eventos singulares debería: **i)** asignar el evento a la clase de referencia más restringida para la cual existen datos estadísticos confiables (suponiendo que exista una clase con estas características) y calcular la frecuencia relativa (r) de la ocurrencia del evento en dicha clase y **ii)** tomar en consideración cualquier información de características no-estadísticas que sea relevante para la ocurrencia del evento en la circunstancia en cuestión y, a la luz de esta información, corregir la frecuencia relativa. En el caso de que existiera más de una clase de referencia de restricción máxima con frecuencias relativas $r_1, r_2, r_3, \ldots$, se deberá seleccionar una frecuencia relativa y corregirla utilizando la información no-estadística. Viceversa, si no existiera ninguna clase de referencia aceptable, la asignación de la probabilidad debería basarse exclusivamente en la información no-estadística.

Si bien este método de asignación de probabilidades parece razonable, es innegable que incluye muchos elementos subjetivos y que, en consecuencia, no resulta adecuado para resolver el problema de obtener una probabilidad objetiva singular, en particular en aquellos casos en los cuales no se cuenta con información estadística obtenida de sucesiones suficientemente largas de observaciones.

Luego se puede concluir que, de acuerdo con la interpretación propensionalista Popperiana, parecería razonable admitir la posibilidad de asignación de probabilidades objetivas sólo a la reducida familia de eventos E que son resultados de conjuntos S de condiciones repetibles y que, aún en estos casos, a veces resulta más razonable considerar a las probabilidades singulares como subjetivas, aceptando la posibilidad de su fundamento, al menos parcial, en probabilidades singulares objetivas. Si bien desde este punto de vista y teniendo en cuenta que su origen se relaciona con la necesidad de permitir la introducción de probabilidades singulares objetivas, se podría considerar que la interpretación propensionalista parece haber fracasado, es necesario reconocer que la propuesta de Popper logró introducir la noción de una teoría objetivista no-frecuencista, que admite una definición no-operacionalista en la que la probabilidad es presentada como un concepto primitivo no-definido, caracterizada por el conjunto de axiomas de Kolmogorov[260] y vinculada con las observaciones de una forma más indirecta que en la definición frecuencista. Como se mencionó en la Sec. 2.3, von Mises consideró a los axiomas como obtenidos mediante un proceso de abstracción o idealización a partir de las leyes (empíricas) de estabilidad de las frecuencias estadísticas y de irregularidad. Por el contrario, en esta interpretación Popperiana de la teoría propensionalista y en la teoría de la innovación conceptual, los axiomas son considerados como

---

259. Keynes, J.M. (1921): "*El segundo axioma de Bernoulli, que reconoce que en el cálculo de una probabilidad todo debe ser tomado en cuenta, es fácilmente olvidado en estos casos de probabilidades estadísticas. El resultado estadístico es tan atractivo en su capacidad de definición, que nos conduce a olvidar las consideraciones más vagas y, sin embargo, más importantes que en un caso dado puede incluir nuestro conocimiento. Para un extraño la probabilidad de que yo envíe una carta al correo sin estampilla puede ser derivada de las estadísticas del servicio de correos; para mi estas cifras no constituyen sino un dato insignificante sobre la cuestión*"

260. Ver Sec. 3.1.1.2. Como se verá inmediatamente, existen versiones de la teoría propensionalista (en particular, la debida a Fetzer, J.H. (1981)(1982)(1988)) en las cuales las propensiones no satisfacen la axiomática de Kolmogorov, sino a sistemas axiomáticos alternativos.

argumentos capaces de explicar y precisar las leyes empíricas. La idea básica de la teoría de la innovación conceptual es que los conceptos nuevos en una teoría pueden ser introducidos como términos indefinidos, caracterizados parcialmente por los supuestos de la misma, con el objetivo de derivar de la teoría hechos o leyes observacionales. Si se obtienen explicaciones satisfactorias de los hechos observados, entonces se puede considerar a la teoría como confirmada y apta para desarrollar métodos dirigidos a cuantificar los valores de los nuevos conceptos en situaciones particulares[261].

En esta interpretación propensionalista el problema de la caracterización de la forma en que la probabilidad (teórica) sobre la ocurrencia de un evento se relaciona con la frecuencia relativa (observable) del mismo, forma parte del problema de la "*falsación*" aplicado por Popper a la probabilidad. De acuerdo con Popper, K.R. (1934), "*Las relaciones entre probabilidad y experiencia todavía necesitan ser clasificadas. La investigación de este problema nos conducirá a lo que parecería ser una objeción insuperable a mi punto de vista metodológico. Aunque las afirmaciones probabilísticas juegan un papel de vital importancia en la ciencia empírica son, en principio, 'impermeables a la falsificación estricta'. No obstante, este aparente inconveniente constituirá la base a partir de la cual testear la validez de mi teoría*"[262].

La solución propuesta por Popper a esta dificultad de no poder arribar a una falsificación estricta consistió en apelar a la noción de "*falsación metodológica*" según la cual, aunque las proposiciones sobre probabilidades no sean estrictamente falsificables, pueden ser utilizadas (y de hecho lo son en las ciencias experimentales) como argumentos falsables mediante la utilización de tests estadísticos[263]. De acuerdo con estos tests, una hipótesis H es refutada si el valor del estadístico correspondiente se ubica en la zona de rechazo, existiendo una probabilidad no-nula de que esto ocurra aún cuando la hipótesis H sea verdadera[264]. Es decir que H puede ser refutada aún cuando desde un punto de vista estrictamente lógico no es refutable, lo cual implica reconocer que H es utilizada como una propuesta falsable aún cuando no es estrictamente falsificable[265].

Surge, entonces, la necesidad de formular una "*regla de falsación para proposiciones probabilísticas*" que implícitamente justifique la práctica de los tests estadísticos. Sean: **i)** una

---

261. Ver Gillies, D.A. (2000).

262. Sea una moneda sobre cuyas características no se posee información y tal que se supone que la probabilidad de obtener el resultado "cara" en una tirada dada es igual a p. Entonces, la probabilidad de obtener m veces el resultado "cara" en una sucesión de n tiradas independientes de dicha moneda estará dada por $p(m/n)=\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}$. De modo que, no importa cuántas tiradas se realicen, ni cuántas veces se obtenga el resultado "cara", la probabilidad $p(m/n)$ será no-nula. Lo cual implica que el supuesto que la probabilidad de obtener el resultado "cara" en una tirada es igual a p no puede ser desestimado como imposible. En otros términos, que este supuesto está "*inmunizado*" respecto de la "*falsificación estricta*" (ver Gillies, D.A. (1990)).

263. Popper, K.R. (1934): "*...un físico se encuentra habitualmente ante la disyuntiva de decidir si una hipótesis probabilística particular debe ser aceptada como 'confirmada empíricamente' o si debe ser rechazada como 'falsificada prácticamente'*".

264. Ver Sec. 3.3.10.

265. Estos tests, aunque basados implícitamente en la falsación metodológica, fueron ampliamente adoptados con independencia (y aún con ignorancia) de la teoría Popperiana.

hipótesis estadística H que se desea contrastar con respecto a una evidencia que consiste en una muestra $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ y **ii)** la variable aleatoria X con una distribución campanular (una "*distribución falsable*" de acuerdo con la nomenclatura de Popper, K.R. (1934)), $f(X)$. Seleccionados los valores a y b que determinan las "colas" de la distribución, la ubicación del estadístico en dichas "colas" implica la falsificación de H, viceversa, su ubicación en el intervalo $a \leq X \leq b$ implica la corroboración de H. Teniendo en cuenta que la interpretación determinística de la ciencia incorpora consideraciones estadísticas sólo cuando sus leyes y teorías deben ser testeadas y que en la interpretación estadística la probabilidad está incorporada en las leyes, se puede concluir que la regla de falsación de Popper constituye una generalización natural de la forma de tratamiento de los errores cuando se contrastan teorías determinísticas. Obsérvese que, a diferencia de lo que ocurre en la teoría frecuencista, en la que el vínculo entre probabilidad y frecuencia está dado por una definición operacional de la probabilidad en términos de frecuencias relativas, en esta interpretación propensionalista Popperiana el vínculo está dado por la regla de falsación mediante la cual, a partir de hipótesis probabilísticas, se pueden obtener resultados sobre las frecuencias y estos pueden ser corroborados por la observación.

De acuerdo con las consideraciones realizadas hasta aquí, es posible postular una clasificación de las teorías propensionalistas en: **i) teorías de repeticiones**, en las cuales las propensiones están asociadas a condiciones repetibles y son capaces de generar, a partir de sucesiones de repeticiones suficientemente largas (pero finitas), frecuencias que pueden ser consideradas como aproximaciones de las probabilidades y **ii) teorías de casos singulares**, en la cuales las propensiones son consideradas como capaces de producir un resultado particular en una situación específica[266]. La propuesta original de Popper que, como se vio, en cierto sentido abarcó ambas clases, varió radicalmente (en particular, en Popper, K.R. (1990)) cuando, en su afán de preservar el concepto de probabilidad objetiva para eventos singulares, abandonó la idea de asociar a las propensiones con las condiciones repetibles. Consideró que a partir de esta asociación era muy difícil trasladar las condiciones repetibles a instancias particulares de las mismas[267].

Esta propuesta modificada de Popper fue desarrollada por Miller, D.W. (1994)(1996), quien conservó las probabilidades singulares objetivas de su primera propuesta pero, en su intención de resolver el problema fundacional de las probabilidades singulares[268], abandonó la asociación de las propensiones con las condiciones repetibles y propuso una asociación con los estados del universo[269], transformando al propensionalismo de una teoría científica en una teoría metafísica

---

[266]. Fetzer, J.H. (1988) postuló una clasificación similar, pero considerando a las teorías de repeticiones como referidas a sucesiones infinitas.

[267]. Ver Runde, J. (1996).

[268]. Miller, D.W. (1994): "*Resulta. inaceptable que (...) intentemos presentar a las propensiones como 'tendencias a producir frecuencias relativas a partir de la repetición de condiciones o circunstancias similares' (...) Las propensiones no están situadas en cosas físicas ni en situaciones locales. Estrictamente, toda propensión (absoluta o condicionada) debe ser referida a la situación completa del universo en un momento dado. Las propensiones dependen de la situación de hoy, no de otras situaciones, aunque sean similares. Solamente de esta forma obtendremos la especificidad requerida para resolver el problema del caso singular*"

[269]. Miller, D.W. (1994): "*La virtud principal de la interpretación propensionalista radica en que, no importa cuál de sus variantes se adopte, a diferencia de la teoría frecuencista, logra transformar en comprensibles tanto a las probabilidades singulares como a las probabilidades en conjuntos y en las sucesiones de eventos repetibles (...) La*

(debe tenerse en cuenta que la asociación de las propensiones a la circunstancia irrepetible definida por la "*situación completa del universo (...) en un momento dado*" impide su testeo)[270].

La crítica fundamental de Miller estuvo dirigida al principio según el cual las propensiones eran propensiones a generar frecuencias. Por el contrario, las consideró como propensiones a la realización de resultados particulares: "*En la interpretación propensionalista la probabilidad de la ocurrencia de un resultado no es una medición de una frecuencia, sino una medición de la inclinación del estado de los eventos para producir dicho resultado*"[271].

A diferencia de la propuesta original de Popper y de la modificación de Miller, Fetzer, J.H. (1982) abandonó la idea de asociar las propensiones a un estado completo del universo y propuso vincularlas a un conjunto completo de condiciones relevantes, de modo que para testear un valor "*conjeturado*" de una propensión se deben plantear "*conjeturas*" acerca de un elenco de dichas condiciones relevantes[272]. Ahora bien, dadas las dificultades que se presentan para formular las conjeturas necesarias y, en consecuencia, para testearlas, se puede concluir que en la teoría de Fetzer las propensiones también observan un carácter más metafísico que científico y que, por lo tanto, su concepto no puede ser extendido en forma general a los casos singulares para los cuales es necesaria una asignación subjetiva a su probabilidad de ocurrencia[273]. No obstante, si el problema de definir el conjunto completo de condiciones relevantes (S_C) correspondiente a un caso singular pudiera ser resuelto, entonces podría ser extendido a sucesiones (finitas o infinitas) generadas por repeticiones de las condiciones S_C y la propuesta de Fetzer proporcionaría una elegante unificación de la teoría.

En su "*World of propensities*" (1990), K. Popper propuso además la idea de interpretar a la propensión como una generalización de la noción de causa: "*La causación no es sino un caso especial de la propensión: es el caso de una propensión igual a 1*". Este planteo está afectado por una dificultad irresoluble: la causalidad implica una dirección temporal definida (si E_1 causa a E_2 y si E_1 ocurre antes que E_2, entonces E_2 no puede ser causa de E_1). En este sentido esta interpretación propensionalista basada en la causalidad general supone un futuro no-determinístico definido por un conjunto de resultados posibles (de naturaleza ontológica, es decir, no relacionado con la ignorancia del observador) medibles a partir de la información empírica, y un pasado formado por un conjunto de elementos que eran contingentes (en el sentido que cada uno de ellos constituía

---

interpretación propensionalista (...) es una interpretación objetivista en la que las probabilidades singulares constituyen el concepto supremo".

270. Miller, D.W. (1996): "*Dado que muchas propensiones son postuladas como no sometibles a una valuación empírica, la interpretación propensionalista de la probabilidad es inevitablemente metafísica*". Popper, K.R. (1990): "*En muchas clases de eventos (...) Las propensiones no pueden ser medidas, su situación relevante varía y no puede ser repetida. Este es el caso referido a diferentes propensiones de algunos de nuestros predecesores en la evolución, a generar chimpancés o generarnos a nosotros mismos, Las propensiones de este tipo son, por supuesto, no-medibles, ya que la situación no puede ser repetida. Es única. Sin embargo, no hay nada que nos impida suponer que dichas propensiones existen, y que pueden ser estimados especulativamente*".

271. Miller, D.W. (1994).

272. Fetzer, J.H. (1982): "*... no debe suponerse que las propensiones a producir resultados (...) dependen, en general, del estado completo del mundo en un momento dado, sino de un conjunto completo de condiciones relevantes (...) las cuales ocurren en ese mundo y en ese momento*"

273. Ver Fetzer, J.H. (1993).

un conjunto de posibilidades potenciales), y hoy ya no son eventos probables, sino resultados observables. Se puede concluir, entonces, que la interpretación propensionalista causal se ubica en una posición intermedia entre la interpretación determinística Laplaciana, que considera que, tanto el pasado como el futuro están determinados y que es la ignorancia la que no permite al observador conocerlos en forma completa y la interpretación subjetivista, que supone que todo conocimiento histórico es sólo probable, es decir, que el pasado no tiene existencia objetiva, que constituye simplemente un conjunto de evaluaciones subjetivas y que atribuirle, por lo tanto, una existencia objetiva implica una afirmación de carácter metafísico (de acuerdo con la interpretación subjetivista, el pasado y el futuro poseen la misma consistencia: no son nada más que estados de ánimo del observador).

Como se verá en la Sec. 3.4.3, las probabilidades poseen una simetría en tanto que, de acuerdo a lo mencionado precedentemente, la causalidad es asimétrica y la no consideración de esta circunstancia genera incongruencias del tipo de la conocida como **paradoja de Humphreys** que, según Salmon, W.C. (1979), en términos de esta formulación propensionalista basada en la causalidad general, puede ser expresada de la siguiente forma[274]: "*Como puntualizó Paul W. Humphreys en una comunicación privada, existe una limitación importante en la identificación de propensiones con probabilidades, en particular para comparar propensiones con probabilidades 'inversas'. Dadas las probabilidades 'directas' podemos, utilizando por ejemplo el teorema de Bayes, calcular la probabilidad de una causa particular de fallecimiento. Supóngase que contamos con un conjunto de probabilidades a partir de las cuales podemos deducir que la probabilidad de que una persona fallezca por haber recibido un disparo en la cabeza es igual a* $\frac{3}{4}$ *. Sería extraño, bajo estas circunstancias, afirmar que este cadáver tenía una propensión (¿tendencia?) igual a* $\frac{3}{4}$ *de que su cráneo hubiera sido perforada por una bala. Yo pienso que la propensión puede ser un concepto causal útil en el contexto de una teoría probabilística de la causación, pero utilizada de cualquier otra forma, parece heredar la restricción de la asimetría de la relación causal*".

La paradoja de Humphreys fue resuelta en el ámbito de la teoría de Fetzer a partir del principio de que no todas las probabilidades de eventos condicionados son propensiones (en el sentido de causas generalizadas). "*...en virtud de su 'dirección causal', las propensiones pueden ser formalizadas como probabilidades 'absolutas' o 'condicionadas' que satisfacen tanto las relaciones de probabilidad directas como inversas*"[275].

---

274. Este problema aparece publicado por primera vez en Salmon, W.C. (1979). La denominación como "*paradoja de Humphreys*" se debe a Fetzer, J.H. (1981). En Humphreys, P. (1985) figura una exposición de la paradoja, discutida críticamente con posterioridad por McCurdy, S.I. (1996).

275. Fetzer, J.H. (1982). Un intento previo de solución a la asimetría de la interpretación causal se produjo en el ámbito de las ya mencionadas posibilidades potenciales de Omelyanoskij, M.E.; Fock, V.A. (1972), en el cual es posible asignar probabilidades a los eventos pasados y a sus distintas posibilidades potenciales. La diferencia entre ambas probabilidades radica en la diversidad de las evidencias sobre las cuales se basan: no es lo mismo estimar la probabilidad del comportamiento de un activo mañana, que estimar la probabilidad del comportamiento de ese mismo activo hace cinco años. La evidencia de que se dispone para la evaluación de esta última probabilidad comprende aquello que se sabe que ha ocurrido hasta hoy, es decir, comprende el conocimiento de eventos que entonces eran futuros. Luego se puede concluir que ésta probabilidad de eventos pasados, en la medida que está relacionada con el conocimiento del observador y no con la realidad, es una probabilidad de naturaleza epistemológica. Por el contrario, la probabilidad de una posibilidad potencial, cuya asignación no está vinculada a la ignorancia del observador, es de naturaleza ontológica.

Dado que en el marco conceptual causal generalizado las propensiones no satisfacen los axiomas de Kolmogorov, Fetzer, J.H. (1981) desarrolló una axiomática alternativa (a la que denominó "*cálculo probabilístico causal*")[276], que podría ser considerado como una "*teoría de la probabilidad no-estándar*" o no Kolmogoroviana (Fetzer, J.H. (1981): "*Quizás esto signifique que la construcción propensionalista debe ser clasificada como una concepción no-estándar de la probabilidad, ¡lo cual no excluye su importancia como una interpretación de la probabilidad! La geometría no-Euclidiana surgió como una concepción no-estándar de la geometría, pero esta circunstancia no disminuyó su importancia. Por lo tanto la construcción propensionalista de la probabilidad podría ser considerada capaz de formular una interpretación no-estándar, así como las construcciones de la geometría no-Euclidiana formularon interpretaciones no-estándar de la geometría, con anterioridad al advenimiento de la relatividad especial y general*")[277]

2.7.- El monismo y el pluralismo en la interpretación de la probabilidad

Un hecho sumamente importante que surge del análisis de los textos de los siglos XVII y XVIII mencionados en el Cap. 1, es que para sus autores no existían definiciones rígidas de la probabilidad (cada uno, en una misma obra, empleó indiferentemente las acepciones clásica, frecuencista y subjetivista), sino distintos métodos de inferencia cuyas características dependían del contexto en el que debían ser utilizadas.

Este fenómeno se debió a que, curiosamente, en los orígenes de la teoría de la probabilidad el contraste entre las interpretaciones objetivista y subjetivista fue menos profundo que en la filosofía de la época[278]. Fue el advenimiento de la llamada **doctrina de la asociación de ideas** -que, a partir de la vinculación de la psicología y la epistemología, intentó explicar los procesos psicológicos subyacentes al comportamiento racional- la que proporcionó el fundamento conceptual que posibilitó las transiciones entre las interpretaciones objetivista y subjetivista[279].

Como ya se mencionó en la Sec. 2.5, los fundamentos de este principio de "*filosofía cum psicología*" de la ciencia fueron establecidos por J. Locke ("*Essay on human understanding*" (1689)) quien asoció las interpretaciones cualitativa y cuantitativa de la evidencia objetiva y las vinculó a la interpretación logicista de la probabilidad (una interpretación casi exclusivamente filosófica, no necesariamente cuantitativa) basada en grados de creencia, generando, de esta forma, una relación del tipo "*experiencia=creencia*". A través de este paralelismo entre las interpretaciones objetivista y subjetivista el asociacionismo logró explicar la relación entre razonabilidad y teoría de la

---

276. Conocido también como **cálculo probabilístico de Fetzer-Nute**.

277. Este problema será tratado con más detalle en la Sec. 3.4.3.

278. Daston, L. (1988): "*Los filósofos aún se cuestionan cómo la probabilidad puede significar, a la vez, un grado de creencia y un número de observaciones repetidas. Christian Huygens, Gottfried Leibniz y otros probabilistas del siglo XVII identificaron ambas interpretaciones sin dudar y sin necesidad de ningún otro tipo de justificación*".

279. Daston L. (1988): "*Desde la perspectiva del siglo XX la interpretación clásica combina un epistémico 'Ars conjectandi' y un frecuencista 'Doctrine of chances' con una arrogante -o saludable, según sea el punto de vista- omisión de las diferencias filosóficas*".

probabilidad postulada por los lógicos de Port Royal y los apologistas ingleses de la Royal Society[280]. La tesis de Locke sostenía que, a partir de la repetida correlación de sensaciones que la mente transformaba en asociación de ideas, la experiencia generaba creencia y, por lo tanto, probabilidad[281]. De modo que, cuanto mayor fuera la frecuencia de la correlación observada, más fuerte resultaría la asociación mental y, por lo tanto, más intenso sería el grado de creencia, la probabilidad y, en consecuencia, la confiabilidad de las generalizaciones inductivas[282].

Además de las inductivas, Locke, J. (1689) consideró un tipo de generalizaciones analógicas (sobre cuestiones que se encontraban más allá del alcance directo de los sentidos) las cuales, en base a la "*...conexion gradual de toda esa variedad de cosas que vemos en el mundo*", generaban una probabilidad "*más débil*" que la anterior: "*La probabilidad es la apariencia de un acuerdo sobre demostraciones falibles. Es suplir el deseo de conocimiento. Nos hace suponer que los casos son verdaderos, antes que sepamos si verdaderamente lo son. Los ámbitos de la probabilidad son dos: la conformidad con nuestra propia experiencia, o el testimonio de la experiencia de los otros. Luego, la probabilidad suple el defecto de nuestro conocimiento y nos guía donde éste falta, siempre sabe acerca de las proposiciones respecto de las cuales no tenemos certeza sino sólo alguna inducción para considerarlas verdaderas. En resumen, sus ámbitos son:* ***i)*** *la conformidad de cualquier cosa con nuestro conocimiento, observación y experiencia y* ***ii)*** *el testimonio de otros que atestiguan sobre su observación y experiencia. En el testimonio de los otros debe considerarse:* ***i)*** *el número;* ***ii)*** *la integridad;* ***iii)*** *la habilidad de los testigos;* ***iv)*** *si el testimonio es extraído de un libro, el designio del autor;* ***v)*** *la consistencia de las partes y circunstancias de la relación y* ***vi)*** *los testimonios opuestos (...) la probabilidad es realidad o especulación*".

Como se mencionó en la Sec. 2.3 y como se verá en el Cap. 11, Bernoulli, J. (1713) no sólo coincidió con Locke y los apologistas ingleses de la teología natural en que se podía aprender a partir de la experiencia sino que, utilizando el principio de la inversión de la probabilidad, planteó la idea de que ese aprendizaje era cuantificable. Posteriormente de Moivre, A. (1730), continuando los trabajos de J. Bernoulli, concluyó que el aprendizaje aumentaba en forma proporcional a la raíz cuadrada del número de observaciones independientes realizadas. Este proceso de inversión de la probabilidad tuvo su culminación en el teorema de Bayes ("*An essay toward solving a problem in the doctrine of chances*" (1764))[283].

Como continuador de la obra de Locke, George Butler ("*Analogy of religion, natural and*

---

[280]. Como un corolario del ya mencionado planteo asociacionista de Locke, el **principio de la probabilidad directa** (conocido también como **principio principal**) establece que, si se conociera que la probabilidad objetiva -física- de un evento (en el sentido de límite de su frecuencia relativa) es π y no se contara con ninguna otra información relevante sobre el particular, el grado de creencia subjetivo apropiado sobre la ocurrencia de dicho evento, debería ser igual a π .

[281]. En otros términos, la psicología asociacionista hizo de la mente un tipo de maquinaria capaz de medir automáticamente frecuencias de eventos pasados y de calcular, en consecuencia, grados de creencia sobre su recurrencia futura.

[282]. Locke, J. (1689): "*El testimonio incuestionable y la experiencia, por lo general, producen confianza. El testimonio justo y la naturaleza de la cosa indiferente también producen una creencia segura. Cuando la experiencia y los testimonios se oponen, los grados de probabilidad varían en forma infinita. En lo que se refiere a los testimoinios tradicionales, cuanto más lejanos, menor será su influencia*".

[283]. Ver Cap. 13.

revealed, to the constitution of nature" (1736)) también consideró, en el marco de la interpretación epistémica de la probabilidad, razonamientos inductivos y analógicos expresados en términos frecuencistas. Coincidió con Locke en que la probabilidad difería de la demostración porque admitía grados "*...desde el más alto de la Certeza moral al más bajo de la Presunción*", equivalentes a los "*grados de convicción*", que aumentaban o disminuían con la experiencia del observador, de modo que la agregación de observaciones sobre la ocurrencia de un fenómeno fáctico realizadas"*...por toda la eternidad por toda la humanidad (...) nos da la absoluta seguridad de su ocurrencia*"[284].

Por su parte, Hume, D. (1739), si bien coincidió con el planteo de Locke de igualar probabilidad, experiencia y creencia[285], reconoció dos dimensiones netamente diferenciadas en su concepción asociacionista-empirista: una psicológica-escéptica y otra matemática-cuantitativa y logró una asimilación sin precedentes hasta entonces entre probabilidades filosóficas y matemáticas. Siguiendo los postulados de la epistemología empirista, distinguió dos fuentes para la asignación de probabilidades: una basada en la chance y otra en las causas (donde el concepto de chance implicaba la "*negación de la causa*", y la existencia de la causa interrumpía el estado de "*indiferencia perfecta*" entre los resultados posibles, equivalente a la garantía de equiprobabilidad en la interpretación clásica)[286] y, a partir de una interpretación eminentemente descriptiva de la probabilidad y con un razonamiento tan escéptico como el que empleó en su tratamiento de la inferencia inductiva, consideró a ambas probabilidades (objetiva y subjetiva) en términos cuantitativos. Por otra parte, en contraste con el pensamiento de Locke, Hume consideró que, si bien la mente procede naturalmente de acuerdo con las probabilidades, no se puede asegurar que esta forma de proceder sea razonable. Rechazó la racionalidad de tales inferencias sobre el futuro en base a una evidencia formada por la suma de repeticiones de eventos idénticos y aceptó la psicología que

---

284. En "*Analogy of religion, natural and revealed, to the constitution of nature*" (en la que la tradición probabilístico-filosófica fundada por los apologistas ingleses de la Royal Society alcanzó su punto culminante), Butler aplicó la interpretación de la probabilidad basada en un gran número de observaciones al evento "que mañana amanezca". Este argumento fue adoptado posteriormente por R. Price en su Apéndice a "*An essay toward solving a problem in the doctrine of chances*" (1764) de Th. Bayes: "*Supongamos el caso de una persona recién llegada a este mundo que deseara comprender, a partir de su observación, el orden y el curso de los eventos que en él ocurren. Probablemente el sol sería el primer objeto que llamaría su atención; pero después de haberlo visto desaparecer la primera noche, se encontraría en una situación de ignorancia total acerca de la posibilidad de verlo nuevamente. Esta persona se encontraría, por lo tanto, en la situación de aquél que está realizando por primera vez un experimento acerca de un evento del cual nada se conoce. Cuando se produzca la segunda aparición, es decir, el primer retorno del sol, surgirá en esta persona una expectativa de un segundo retorno y podría reconocer una probabilidad de 3 a 1 para esta ocurrencia. Como ya se expuso, esta probabilidad aumentaría con el número de retornos que fuera observando. Pero ningún número finito de retornos sería suficiente para generar una certeza absoluta o física. Supóngase que ha visto el retorno del sol a intervalos regulares un millón de veces. Esta circunstancia garantizaría las siguientes conclusiones: existirá una probabilidad de la millonésima potencia de 2 a 1 de que retorne nuevamente al cabo del período habitual. Existirá una probabilidad expresada por 0,5352 de que la probabilidad de esta ocurrencia no fuera mayor que 1.600.000 a 1; y una probabilidad expresada por 0,5105 de que no fuera menor que 1.400.000 a 1*". Este ejemplo del amanecer terminó transformándose en un lugar común de la literatura sobre la inversión de la probabilidad (ver Sec. 3.1.2).

285. Hume, D. (1739): "*Dado que el hábito que genera la asociación surge de la frecuencia en la conjunción de objetos, debe arribar a la perfección en forma gradual y debe adquirir más fuerza con cada caso observado. Con el primer caso poseerá ninguna fuerza o una fuerza muy pequeña; el segundo caso observado la incrementará algo; el tercero la hará aún más sensible. Es a través de este lento procedimiento que nuestro juicio ha de arribar a una seguridad total*".

286. Hume consideraba al "*estado de indiferencia perfecta*" como el "*estado mental natural*".

las hacía inevitables (ver Daston, L.J. (1988))[287].

Si bien el tratamiento filosófico-psicológico de Hume acerca de la relación entre la frecuencia de ocurrencia de un resultado, el grado de creencia y la medida de la probabilidad (quizás el aporte más importante sobre el tema en el siglo XVIII) es, sin duda, más cuantitativo que el de Locke y el de Butler, no hace ninguna referencia explícita al cálculo de probabilidades. Como se mencionó en la Sec. 1.3, fue D. Hartley ("*Observations on man, his frame, his duty and his expectations*" (1749))[288] quien, a partir de la asimilación de las generalizaciones inductiva y analógica de Locke y en base a las consideraciones de de Moivre, A. (1738) sobre las implicaciones del teorema de J. Bernoulli, proporcionó los fundamentos matemáticos al asociacionismo.

Otra etapa importante en este proceso de cuantificación de la vinculación entre creencia, inducción y analogía y probabilidad se debe a George Leclerc Buffon quien, en su "*Essais d'arithmétique morale*" (1777)[289], introdujo consideraciones sobre la probabilidad a partir de una jerarquía de certidumbres que denominó "*matemática*", "*física*" y "*moral*", derivadas respectivamente de argumentos demostrativos, inductivos y analógicos. Buffon, al igual que Butler y que Price, utilizó el ejemplo del amanecer (pero, contrariamente al planteo de Price, no utilizó el concepto de probabilidad inversa). Partiendo del supuesto de que los dos resultados posibles de este fenómeno ("que amanezca" y "que no amanezca") eran equiprobables (obviamente, ambos con probabilidades iguales a $\frac{1}{2}$) y teniendo en cuenta que se había podido observar que, sin excepción, el resultado "amanecer" se había producido todos los días de los últimos 5781 años, concluyó que la probabilidad del evento "que mañana amanezca" era igual a $1-\frac{1}{2^{n-1}}$ (donde n denotaba el total de observaciones diarias realizadas desde la creación de la Tierra)[290] y asimiló esta probabilidad a la certeza física.

Para ilustrar la certeza moral Buffon recurrió a un curioso ejemplo de connotaciones psicologistas, relacionado con la mortalidad: La experiencia cotidiana dice que ningún individuo, sano y razonable, de una edad determinada (por ejemplo, 56 años, para coincidir con el ejemplo de Buffon) pondría en duda su supervivencia por un corto período de tiempo (por ejemplo, 24 horas), a pesar de que exista una probabilidad muy pequeña (pero no-nula) de fallecer en dicho período

---

287. Fue Étienne Bonnot de Condillac ("*Essai sur l'origine des connaissance humaines*" (1746), "*Traité des sensations*" (1754)) quien planteó por primera vez, reparos acerca de la validez de la relación automática "*frecuencia-creencia*".

288. Esta obra -que combina elementos del asociacionismo de Locke con las especulaciones psicológicas referidas a las bases vibratorias de la sensación, contenidas en "*Opticks*" (1730) de I. Newton y con las teorías del Reverendo John Gay ("*Preliminary dissertation concerning the fundamental principle of virtue and morality*" (1731))- revela una influencia muy fuerte de los apologistas ingleses de la Royal Society y, en particular, de la ya mencionada "*Analogy of religion, natural and revealed, to the constitution of nature*" (1736) de J. Butler.

289. Publicado como apéndice de su "*Histoire naturelle*".

290. Debe recordarse que en 1777 la edad atribuida a la Tierra según la cronología del Reverendo James Ussher, obispo de Armagh, era de 5781 años.

(0.0001 de acuerdo con las tablas de la época). A partir de esta experiencia asignó la categoría de "*moralmente cierta*" a toda proposición cuya probabilidad fuera mayor o igual a 0.9999 y, dado que $\left(\frac{1}{2}\right)^{14} < \left(\frac{1}{10}\right)^{4} < \left(\frac{1}{2}\right)^{13}$, concluyó que bastaba que el resultado de un fenómeno eventual ocurriera sucesivamente 13 ó 14 veces para que pudiera ser considerado como moralmente cierto.

Obviamente Buffon no consideró a este método como universalmente aplicable a todos los casos de inferencia de probabilidades, sino como válido solamente en aquellas circunstancias en que las causas del fenómeno en estudio fueran constantes e inaccesibles a la observación directa[291] (debe tenerse en cuenta que la hipótesis fundamental de su razonamiento consistía en suponer que no existían fenómenos genuinamente aleatorios, que aún los "*efectos aleatorios*" se regían por causas naturales "*...heterogéneas, necesariamente variables y tan versátiles como fuera posible. Luego, de la noción de azar se puede concluir que evidentemente no existe ningún vínculo entre sus efectos, de modo que el pasado no puede, de ninguna forma, influir sobre el futuro*")[292].

A partir de la versión de Laplace del teorema de Bayes y fundándose en el principio de uniformidad de la naturaleza, Marie-Jean Nicolas Caritat-Condorcet (introducción a la memoria "*Sur les probabilités*" (1778) de Laplace), en otro intento por cuantificar la influencia de la experiencia histórica sobre el grado de creencia, desarrolló una filosofía de la relación entre el método científico y dicho grado de creencia, basada en la probabilidad inversa. Reconoció a la experiencia histórica como "*la única regla de nuestras opiniones y de nuestras acciones*" y admitió la posibilidad de calcular, en ciertos casos, el incremento en la asignación de la probabilidad asociada a dicha regla a partir de la acumulación de observaciones.

Debe tenerse en cuenta que, más allá de las consideraciones precedentes, la "*Théorie analytique des probabilités*" de Laplace continuó dominando el desarrollo de la teoría de la probabilidad en Europa, hasta alrededor de 1860. Esta prolongación de la persistencia del paradigma clásico es atribuible: **i)** al escaso suceso de "*Recherches sur la probabilité des jugements*" (1837) de S.D. Poisson (quien podría ser considerado como el sucesor natural de Laplace), debido fundamentalmente al categórico rechazo de los filósofos de la primera mitad del siglo XIX a la aplicación de la teoría de la probabilidad a las ciencias morales[293]; **ii)** a la ausencia de competidores serios o sucesores genuinos de Laplace -posteriores a Poisson- hasta bien entrada la segunda mitad del siglo XIX y **iii)** al desarrollo de la teoría del error, que había constituido un tema central de investigación durante el siglo XVIII y que resurgió y ocupó un lugar prominente como consecuencia del éxito obtenido por el método de los cuadrados mínimos de C.F. Gauss[294].

---

291. Obviamente en los casos en que las causas del fenómeno fueran evidentes no será necesario acumular observaciones repetidas para obtener la certidumbre física.

292. Buffon, G.L. (1777).

293. P.P. Royer-Collard ("*Discours prononcés dans la séance publique tenue par l'Académie Française pour la recepction de Monsieur Royer-Collard, le 13 november 1827*"): "*La descripción matemática del cosmos es diferente de la descripción de la ciencia moral, la cual está relacionada con los seres humanos; ésta está basada en principios más complejos y misteriosos, a los que la ciencia matemática no se puede aproximar*".

294. Este tema será tratado con detalle en el Cap. 14.

Según se mencionó al comienzo de esta sección, así como el desarrollo de la teoría de la asociación de ideas vinculó a las interpretaciones objetivista y subjetivista de la probabilidad, su declinación en el siglo XIX profundizó las diferencias entre las mismas hasta tornarlas incompatibles. Es así que, a partir del replanteo en términos de una "*posibilidad objetiva*" que expresaba "*...la existencia de una relación entre las cosas*" y una "*probabilidad subjetiva*" vinculada con "*...nuestra forma de juzgar o sentir, que varía de un individuo a otro*"[295] realizado por Siméon Denis Poisson[296], Antoine Augustin Cournot[297], Robert Ellis[298] y George Boole[299], la comparación de estas interpretaciones se convirtió en el tema central de las discusiones sobre la noción de probabilidad[300].

No obstante esta aparente polarización, debe tenerse en cuenta que, entre las posiciones subjetivista y objetivista pura, existe un espectro de teorías, como por ejemplo la ya mencionada definición de probabilidad intersubjetiva[301]. La cual considera que en la mayoría de los casos los grados de creencia de los individuos evaluadores, en la medida que son asumidos en común por todos o casi todos los miembros de un grupo mediante interacciones en el mismo, se puede considerar que poseen un carácter social[302].

Como se verá en la Sec. 3.3.7, la elección por parte de un grupo social de una probabilidad intersubjetiva o **de consenso**, lo colocará en la posición de poder asegurar que ningún jugador que apostara contra dicho grupo se encontraría en condiciones de obtener una ganancia cualquiera fuere el resultado del juego[303].

---

295. Cournot, A.A. (1843) denominó "*posibilidad*" a la relación entre la probabilidad cuantitativa y la naturaleza de las cosas.

296. "*Recherches sur la probabilité des jugementes*" (1837). Si bien Poisson reconoció profundas diferencias entre las probabilidades objetiva y subjetiva, desarrolló gran parte de su trabajo en el ámbito de la teoría de la probabilidad a partir de la interpretación clásica, pero adoptó la interpretación subjetivista en sus desarrollos sobre la inversión de la probabilidad, en los que tomó en consideración muchos de los supuestos epistemológicos enunciados por Bayes, Laplace y Condorcet (ver Cap. 13).

297. "*Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*" (1838), "*Mémoire sur les applications du calcul des chances à la statistique judiciaire*" (1838), "*Exposition de la théorie des chances et des probabilités*" (1843).

298. "*On the foundations of the theory of probabilities*" (1849).

299. "*An investigation of the law of thought*" (1854).

300. Como se verá en el Cap. 3, Cournot, Ellis y Boole pueden ser considerados los primeros probabilistas que se apartaron definitivamente de la interpretación clásica. De acuerdo con su apreciación, la probabilidad cuantitativa no constituía una medida del grado de creencia, ni siquiera podía ser considerada como "*...la razón para creer*", sino "*...la medida de la posibilidad física*" (Cournot, A.A. (1843)).

301. Ver Sec. 2.5.

302. De acuerdo con Kuhn, T.S. (1962), por ejemplo, los científicos que trabajan en un área específica, en general, adoptan en común un paradigma que contiene un conjunto de teorías y proposiciones empíricas.

303. Ryder, J.M. (1981): "*Los subjetivistas aceptan que individuos diferentes posean diferentes grados de creencia, pero no analizaron con detalle la aplicación del argumento 'Dutch book' a la situación que involucra a más de una persona. Si se consideran dos (o más) personas con grados de creencia diferentes sobre la ocurrencia de un evento simple* E *, puede suceder que se genere un Dutch book en su contra. Lo cual es tan 'desastroso' y 'obviamente arbitrario' como puede serlo para un individuo. Esto significa que los subjetivistas, en realidad, nunca realizaron las apuestas concebidas*

No obstante, podría suceder que, en un grupo social, un subconjunto mayoritario de sus integrantes conviniera en adoptar una probabilidad de consenso y otro subconjunto (minoritario) asumiera probabilidades subjetivas sobre la ocurrencia de un evento distintas de la probabilidad intersubjetiva. Esta circunstancia no modifica el razonamiento precedente y permite concluir que las probabilidades intersubjetivas no deben reemplazar completamente a las probabilidades subjetivas, que ambas son necesarias para una evaluación del grado de creencia de los individuos.

La interpretación intersubjetivista de la probabilidad puede ser considerada como una posición intermedia entre la interpretación logicista de las primeras obras de Keynes y la interpretación subjetivista crítica de Ramsey. Según Keynes existe un grado de creencia racional individual sobre una conclusión C a partir de una evidencia e. Si esta afirmación fuera verdadera, se debería esperar que casi todos los individuos poseyeran dicho grado de creencia racional dada la evidencia e, dado que se puede asegurar que la mayoría de los individuos son racionales. Ahora bien, considerando que inevitablemente en todo grupo social existen individuos cuyos razonamientos son eminentemente intuitivos o cuyos grados de creencia se basan en patrones lógicos no-estándar, se puede concluir que este consenso nunca será completo. Por otra parte en los casos en que, si bien la evidencia e justifica la conclusión C, no se vincula lógicamente con C, distintos individuos pueden arribar a conclusiones diferentes sobre la evaluación del grado de creencia sobre la conclusión C, aún cuando cuenten con el mismo grado de información y de experiencia y suponiendo que actúan racionalmente. De modo que se puede concluir que ese grado de creencia singular Keynesiano compartido a nivel universal es de existencia puramente ideal[304].

A fin de completar el espectro de definiciones de probabilidad, debe tenerse en cuenta que la interpretaciones objetivas pueden se clasificadas en: **i)** aquéllas que son puramente objetivas, relacionadas con elementos independientes del individuo evaluador y **ii)** aquéllas que incluyen algún elemento subjetivo, denominadas **artefactuales**[305].

Los principales autores mencionados en las secciones precedentes, especialmente Keynes, von Mises y de Finetti, adoptaron una posición monista respecto de la definición de probabilidad, es decir consideraron que su interpretación de la probabilidad era aplicable en todos los casos. En particular von Mises consideró que su interpretación frecuencista abarcaba todos los casos en los que la teoría matemática de la probabilidad podía ser aplicada, que si bien existía una noción de probabilidad basada en el sentido común no cubierta por su definición frecuencista, ésta era puramente cualitativa.

En contraste con este punto de vista monista, existen posiciones pluralistas según las cuales el cálculo matemático admite interpretaciones diferentes, cada una de las cuales es válida en un área de aplicación o en un contexto en particular. Entre las posiciones pluralistas cabe mencionar la

---

de acuerdo con el argumento Dutch book. Si lo hubieran hecho, hubieran podido hallar dos o más subjetivistas con grado de creencia diferentes y construir un sistema de apuestas del que hubiera resultado una pérdida cierta para los subjetivistas considerados como un grupo".

304. Probablemente la proposición de Keynes se base en una generalización a un nivel universal del consenso (doméstico) en los grados de creencia racional de los miembros de la Sociedad de los Apóstoles (ver Gillies, D.A. (1991)).

305. Cabría agregar aquí la **interpretación formalista** según la cual la probabilidad es asimilable a un símbolo que juega un papel específico en un sistema de axiomas matemáticos, pero que no posee ningún significado en sí mismo (ver Cap. 3).

conocida como **visión biconceptual** de F.P. Ramsey, que considera que el significado de la probabilidad en lógica (tanto inductiva como deductiva) puede ser diferente de su significado en estadística (Ramsey, F.P. (1931): "*En este ensayo la teoría de la probabilidad es asumida como una rama de la lógica, la lógica de la creencia parcial y del argumento no-concluyente; pero esto no implica sugerir que éste es el único ni siquera el más importante aspecto en esta materia. La probabilidad es de fundamental importancia no sólo en lógica, sino también en estadística y en física y no podemos asegurar de antemano que su interpretación tan útil en lógica será también apropiada en física. Es claro que la diferencia de opinión entre los estadísticos que, en su mayoría, adoptan la teoría frecuencista de la probabilidad y los lógicos que, en general, la rechazan, hace que parezca que las dos escuelas estuvieran discutiendo cosas diferentes y que la palabra 'probabilidad' fuera usada en un sentido por los estadísticos y en otro sentido por los lógicos. Nuestras conclusiones son que el significado de la probabilidad en lógica no debe ser tomado como prejuzgando su significado en física*")[306].

Ramsey, F.P. (1926) propuso dos interpretaciones de la probabilidad, una frecuencista en términos de cocientes de clases y otra como grado de creencia parcial[307] y planteó una forma de relación entre ambas: "*...existen muchas conexiones entre creencias parciales y frecuencias. Por ejemplo, las frecuencias observadas a menudo conducen a los correspondientes grados de creencia y las creencias parciales, de acuerdo al teorema de Bernoulli, conducen a la expectativa de las correspondientes frecuencias. Pero ninguna de éstas es la conexión que deseamos; una creencia parcial, en general, no puede ser relacionada únicamente con la frecuencia real, la conexión siempre se construye tomando la proposición en cuestión como una instancia de una función proposicional. Cuál función proposicional elegir constituye un decisión en cierta forma arbitraria que influirá considerablemente sobre la frecuencia correspondiente. Las pretensiones de algunos exponentes de la teoría frecuencista de que en una proposición frecuencista, la creencia parcial significa creencia total, no es sostenible. Pero hemos hallado que la idea de creencia parcial involucra una referencia a una frecuencia hipotética o ideal; suponiendo que los éxitos sean aditivos, el grado de creencia* $\frac{m}{n}$ *es el tipo de creencia que conduce a la acción óptima si en* n *repeticiones se obtiene que en* m *veces la proposición es verdadera o, en forma resumida, podemos decir que es la clase de creencia más apropiada para un número de ocasiones hipotéticas idénticas en una proporción* $\frac{m}{n}$ *en la cual la proposición es verdadera. Es esta conexión entre la creencia parcial y la frecuencia la que nos permite utilizar el cálculo de las frecuencias como un cálculo de la creencia parcial consistente. Y, en este sentido, podemos decir que las dos interpretaciones constituyen los aspectos objetivo y subjetivo del mismo íntimo significado, así como la lógica formal*

---

306. Como se mencionó en la Sec. 2.4, Carnap, R. (1950) propuso dos conceptos de probabilidad: Pr_1 , utilizado en lógica y Pr_2 , utilizado en estadística y física. Carnap desarrolló estas definiciones basándose, respectivamente, en la interpretación logicista de J.M. Keynes, L. Wittgenstein y F. Waismann y en la interpretación frecuencista de R. von Mises y H. Reichenbach, consideró a Pr_2 como secundaria y se dedicó casi con exclusividad al análisis de la noción correspondiente a Pr_1 .

307. Ramsey, F.P. (1931): "*...al comienzo de este ensayo hemos visto que el cálculo de probabilidades puede ser interpretado en términos de cocientes de clases; ahora hemos hallado que también puede ser interpretado como un cálculo de la creencia parcial consistente. Por lo tanto, resulta natural que supongamos la existencia de una íntima conexión entre estas dos interpretaciones que permita una explicación de la posibilidad de aplicación del mismo cálculo matemático a dos conjuntos de fenómenos diferentes*".

puede ser interpretada objetivamente como un cuerpo de tautologíay subjetivamente como las leyes del pensamiento consistente".

Teniendo en cuenta el ya mencionado problema de la selección de la clase de referencia[308], se podría concluir que la afirmación de Ramsey acerca de que "*...las dos interpretaciones constituyen los aspectos objetivo y subjetivo del mismo íntimo significado*" parece demasiado simplista. Esta sospecha se ve confirmada por la afirmación de Keynes, J.M. (1921) que indica que basar la asignación de la probabilidad sobre la ocurrencia de un fenómeno singular en una frecuencia relativa estadística exclusivamente, a menudo conduce a resultados poco satisfactorios, dado que la no consideración de información no-estadística relevante puede hacer que la evaluación de la probabilidad difiera significativamente del resultado proporcionado por el cálculo frecuencista[309].

De las consideraciones realizadas en esta sección y en las secciones anteriores de este capítulo se puede concluir que: **i)** la interpretación clásica, si bien es satisfactoria para resolver problemas relacionados con juegos de azar, no resulta adecuada en las infinitas aplicaciones restantes de la probabilidad; **ii)** la interpretación logicista, debido a su fundamento en el principio de indiferencia conduce a paradojas respecto de las cuales no se ha logrado hallar un método general de resolución; **iii)** la interpretación frecuencista es probablemente consistente respecto de la matemática clásica y satisface la axiomática de Kolmogorov en el ámbito de la aditividad finita; **iv)** la interpretación propensionalista, basada en una posición no-operacionalista de innovación conceptual, elimina los problemas relacionados con los colectivos matemáticos a partir de la introducción de la regla de falsación para proposiciones estadísticas, proporciona una versión mejorada de la relación entre probabilidad y frecuencia, elimina la separación de los conceptos de aleatoriedad e independencia de la teoría de von Mises reduciendo todo a la condición de independencia y, dado que asume como punto de partida un concepto indefinido, se ajusta mejor a la axiomática de Kolmogorov y a la aproximación matemática a la probabilidad basada en la teoría de la medida y **v)** debido a la identificación del grado de creencia con el cociente de apuestas y con el argumento del "Dutch book", la interpretación subjetivista y su derivación, la interpretación intersubjetivista, pueden ser consideradas como interpretaciones válidas de la teoría matemática de la probabilidad.

Esta breve reseña comparativa que recorre el espectro de las interpretaciones desde el objetivismo puro al subjetivismo más radical considerando su relación con las distintas corrientes de la filosofía del conocimiento demuestra, en cierta forma, la conveniencia de adoptar una posición pluralista basada en las interpretaciones subjetivista, intersubjetivista y propensionalista de la probabilidad[310] entre las cuales "*...debemos suponer la existencia de una íntima conexión que permita una posibilidad de explicación de la posibilidad de aplicación del mismo cálculo matemático a fenómenos diferentes*"[311].

---

[308]. Ver Sec. 2.3.

[309]. Ver Sec. 2.4.

[310]. Obsérvese que estas interpretaciones se corresponden con lo que Fleck, L. (1935) denomina "*Los tres factores implicados en el conocimiento: el individual, el colectivo y la realidad objetiva (la cual es conocida)*".

[311]. Ramsey, F.P. (1926).

Cabe destacar, no obstante, que la aceptación de esta posición pluralista encierra una incongruencia generada por las diferencias radicales en los fundamentos, operacionalista y no-operacionalista, de las interpretaciones subjetivista (e intersubjetivista) y propensionalista, respectivamente[312]. Como una sugerencia a favor de una posición utilitaria pluralista universal, Galavotti, M.C. (1995) hace notar que, en forma independiente y más o menos contemporáneamente, los desarrollos de la probabilidad subjetiva y de la mecánica cuántica se basaron en principios operacionalistas. Pero debe tenerse en cuenta que ni Heisenberg ni Born adoptaron el subjetivismo a ultranza de de Finetti. Lo cual parece sugerir que sería posible adoptar una filosofía operacionalista universal, pero que sería más adecuado utilizar una interpretación operacionalista de la probabilidad en física y una interpretación subjetivista operacionalista en otras áreas. Por otra parte, es necesario destacar que la aceptación de la interpretación objetivista operacionalista de la probabilidad implica la adopción de la teoría frecuencista respecto de la teoría propensionalista, cuya superioridad puede ser deducida del análisis comparativo que figura más arriba[313].

Considerando finalmente, en forma alternativa, una clasificación de las interpretaciones de la probabilidad en epistemológicas y objetivas, se puede concluir que la noción epistemológica resulta apropiada en las ciencias sociales y la noción objetiva resulta apropiada en las ciencias naturales[314]

---

[312]. Ver Lad, F. (1996). Como se vio en la Sec. 2.5, en esta obra Lad apela explícitamente a la filosofía operacionalista como base del desarrollo de los fundamentos de la probabilidad subjetiva y concluye que la formulación subjetivista es la única que admite una interpretación significativa en términos de una definición operacionalista.

[313]. Si bien las definiciones operacionalistas son asociadas a los argumentos del físico Bridgman, P. (1927)(1936), el concepto de operacionalismo se remonta al positivismo francés del siglo XIX y a las ideas de E. Mach en Viena (ver Rappaport, A. (1954), Gillies, D.A.; Ietto-Gillies, G. (1991)).

[314]. Obsérvese que los logicistas-subjetivistas Keynes, Ramsey y de Finetti se dedicaron a aplicaciones de la probabilidad en economía, en tanto que los objetivistas von Mises, Neyman y Popper se dedicaron a aplicaciones de la probabilidad a las ciencias físicas y a la biología. En particular Hicks, J. (1979), contrastando las interpretaciones frecuencista y logicista, sostiene que "*Es la teoría frecuencista la que se volvió ortodoxa, muchos trabajos modernos sobre estadística matemática la asumen como punto de partida. Los líderes de la aproximación epistemológica alternativa han sido Keynes, en su 'Treatise on probability' (1921) y Harold Jeffreys, en su 'Theory of probability' (1939) (...) Resulta significativo que Keynes, el moderno economista que ha incursionado más profundamente en esta materia, fuera quien propuso la teoría alternativa. Yo creo que indudablemente la teoría frecuencista resulta adecuada en las ciencias naturales, pero que no posee la suficiente amplitud, necesaria en las aplicaciones económicas*".

Capítulo 3.- Las axiomáticas y los teoremas asociados: un análisis comparativo

"*Y en una y otra mano se multiplican las semillas de la incertidumbre y a uno y otro pie se anudan las serpientes de la contradicción*".

(O. Orozco: "*Espejo en lo alto*")

3.1.- La axiomática de Kolmogorov y los teoremas asociados

3.1.1.- Los antecedentes de los "*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*"

Los primeros intentos de vinculación de la teoría de la medida de conjuntos e integración de Lebesgue con la cuantificación de la probabilidad fueron propuestos por Borel, E. (1905), iniciando un proceso que culminó con el sistema axiomático contenido en los "*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*" de Andrei Nikolaievitch Kolmogorov.

En 1909a, mediante la formulación de la conocida como ley fuerte de los grandes números[315], Borel logró formalizar esta relación entre la teoría de la medida, una interpretación geométrica de la probabilidad y el concepto de independencia en las sucesiones de eventos repetibles que, como se vio en la Sec. 2.2, constituye el núcleo de la teoría clásica de la probabilidad[316].

No obstante, si bien en su "*Élements de la théorie des probabilités*" (1909b) Borel insiste en la interpretación geométrica de la probabilidad y afirma que su ley de los grandes números puede ser obtenida utilizando la teoría de la medida, en la demostración deja de lado la medida de conjuntos y proporciona una demostración imperfecta basada en generalizaciones a conjuntos numerables de los teoremas de la probabilidad total y de la probabilidad compuesta. Esta decisión

---

[315]. Las leyes de los grandes números serán tratadas en el Cap. 11.

[316]. Como se verá en la Sec. 3.1.4, la diferencia fundamental entre la probabilidad y la teoría de la medida está dada por el concepto de independencia estocástica.

puede ser atribuida a razones filosóficas relacionadas con su rechazo en aceptar la noción de probabilidades numerables, lo cual lo obligó a emplear argumentos que consideraban la derivación de las probabilidades como límites de sucesiones de repeticiones independientes. Fueron Faber, G. (1910) y Hausdorff, F. (1914) quienes enmendaron esta falencia obteniendo demostraciones rigurosas de la ley fuerte de los grandes números utilizando exclusivamente argumentos de teoría de la medida[317].

Las demostraciones de Borel, Faber y Hausdorff fueron generalizadas por Cantelli, F.P. (1916a)(1916b)(1917a)[318]. Posteriomente Kolmogorov, A.N. (1931)(1933) y Prokhorov, Y.V. (1956) establecieron las condiciones necesarias y suficientes para asegurar la validez de la ley de los grandes números[319].

El resultado de todos estos avances fue una ley fuerte de los grandes números interpretable de acuerdo con dos versiones: una relacionada con los números reales y otra con la probabilidad. Siguiendo los cánones de la axiomatización de Sierpińsky de la medida de Lebesgue, Steinhaus, H. (1922)(1923)(1929)(1930a)(1930b)[320] propuso, en sus trabajos sobre los teoremas en el límite, una unificación a esta dualidad mediante una axiomatización de la teoría de Borel de la probabilidad numerable. Denotando por A al conjunto de todas las sucesiones binarias infinitas, Steinhaus postuló los siguientes axiomas para una clase C de subconjuntos de A y una función real p que representa a las probabilidades de los elementos E de C: **i)** $p(E) \geq 0$ para todo $E \in C$; **ii) a)** para toda sucesión binaria finita E^*, el subconjunto E de A formado por todas las sucesiones binarias infinitas que comienzan con E^*, pertenecen a C; **b)** si dos de tales sucesiones binarias finitas, E_1^* y E_2^*, difieren solamente en un elemento, entonces $p(E_1) = p(E_2)$ (donde E_1 y E_2 denotan los subconjuntos de A que comienzan con las sucesiones E_1^* y E_2^*, respectivamente); c) $p(A) = 1$; **iii)** la clase C es cerrada bajo uniones finitas numerables de elementos disjuntos y la función p satisface una aditividad finita y una aditividad numerable; **iv)** si $E_1 \supset E_2$ y $E_1, E_2 \in C$, entonces todo subconjunto de E pertenece a C (debe tenerse en cuenta que, en este caso, cuando se verifica E_2, también se verifica E_1, en otros términos, si no se verifica E_1, E_2 no puede verificarse); **v)** si $E \in C$ y $p(E) = 0$, entonces todo subconjunto de E pertenece a C[321].

---

317. Ver Doob, J.L. (1989)(1994), von Plato, J. (1994).

318. Los resultados obtenido por Cantelli fueron de gran importancia en la medida que impulsaron a otros autores al desarrollo de diferentes conceptos de convergencia estocástica.

319. El desarrollo de las teorías de la medida y de la integración a fines del siglo XIX y comienzos del siglo XX ya ha sido estudiado exhaustivamente (ver, por ejemplo, Hawckins, T. (1970), Pier, J.P. (1994a en Pier, J.P. (ed.))(1994b). Por lo tanto, aquí se intentará solamente una breve reseña de aquellos trabajos que influyeron directamente en el contenido de los "*Grundbegriffe*".

320. Las memorias de 1922 y 1923 dieron origen a la conocida como escuela polaca de funciones independientes, la cual realizó importantes aportes a la teoría de la probabilidad.

321. La axiomática de Sierpińsky, de la cual deriva la axiomática de Steinhaus, incluye los axiomas **i)**, **iii)**, **iv)** y **v)** y un axioma (que Steinhaus demostró que es equivalente a su axioma **ii)**) según el cual el valor $p(J)$ de un intervalo J es su medida (ver Holgate, P. (1997)).

Otro antecedente importante en el proceso de construcción de los "*Grundbegriffe*" y, por lo tanto de la formulación de la axiomática de Kolmogorov, fue el trabajo de Slutsky, E. (1922)[322]. Su propuesta asumió como punto de partida la sustitución del término "probabilidad" por el de "*valencia*" ("лентноть")[323] (en su concepto, la probabilidad sería solamente una interpretación del cálculo de valencias) y la eliminación de la noción de eventos igualmente probables. Sustituyó el concepto de equiprobabilidad por el mero supuesto que, si determinados casos a los cuales se les asigna un número α son subdivididos, los números asignados a los sub-casos deberían sumar α (pudiendo ser los números asignados a los sub-casos iguales o no). De esta forma los teoremas de la probabilidad total y de la probabilidad compuesta pasaron a pertenecer a un cálculo (que no puede ser considerado estrictamente como un cálculo de probabilidades) tan abstracto como la teoría de grupos[324]. Slutsky consideró además que, dado que las sucesiones empíricas de repeticiones independientes poseen propiedades que trascienden la existencia de un límite, la probabilidad no podía ser asimilada al límite de una frecuencia relativa[325].

En su memoria de 1929, Kolmogorov adoptó este planteo de Slutsky consistente en concebir a la probabilidad como un caso particular de una teoría abstracta[326] y propuso una interpretación de la probabilidad relacionada con una función M (a la que denominó "*especificación de la medida*", "*мероопрелеление*") que asigna números no-negativos $M(E)$ (a los que denominó "*medida*", "*мера*") a cada elemento E de una clase de subconjuntos de un conjunto de atributos A y supuso solamente que dados dos elementos E_1 y E_2 disjuntos, entonces la función M asignará un número a dos cualesquiera de los tres conjuntos E_1, E_2 y $E_1 \cup E_2$, de modo que el número a asignar al tercer conjunto queda determinado por añadidura, verificándose que[327]:

$$M(E_1 \cup E_2) = M(E_1) + M(E_2)$$

(donde $(E_1 \cup E_2)$ denota el conjunto definido por la suma lógica $(E_1 \vee E_2)$ que representa el evento que se verificará cuando ocurra al menos uno de los eventos sumandos, siendo E_1 y E_2 eventos incompatibles que se identifican, respectivamente, con las proposiciones S_1 y S_2 de su espacio de atributos).

---

322. Kolmogorov, A.N. (1948): "*Slutsky fue el primero en dar una versión correcta del contenido puramente matemático de la teoría de la probabilidad*".

323. Laemmel, R. (1904) ya había utilizado el término alemán "*valenz*".

324. Slutsky, E. (1922) reconoció tres interpretaciones distintas del cálculo de valencias: **i)** en términos de la probabilidad clásica (con eventos igualmente probables); **ii)** a partir de las sucesiones empíricas finitas (que generan frecuencias relativas) y **iii)** como límite de las frecuencias relativas.

325. Como se vio en la Sec. 2.5, en de Finetti, B. (1967), figura un análisis más detallado de esta posición crítica respecto del comportamiento límite de las frecuencias relativas.

326. Debe tenerse en cuenta que, a partir de su trabajo de 1931 sobre procesos de Markov, Kolmogorov modificó su planteo y adoptó como fundamento de su análisis la teoría de Fréchet.

327. Obsérvese que estas condiciones coinciden con los axiomas **iii)** y **iv)** de Steinhaus, H. (1923).

El hecho de que las operaciones entre eventos pudieran ser identificadas con las operaciones entre conjuntos de tal modo que subsistieran las propiedades formales de estas últimas, permitió quitar a los eventos toda base material y considerarlos como entes matemáticos suceptibles de aplicarles procedimientos, razonamientos y deducciones propios de la lógica matemática. Debe tenerse en cuenta que la representación de los eventos mediante conjuntos constituye un arbitrio útil para facilitar su tratamiento matemático, pero no implica ninguna afirmación acerca de la naturaleza de los mismos. El concepto de evento posee un contenido intuitivo que no puede ser expresado por una estructura matemática.

Con respecto a la probabilidad de ocurrencia de E_2 condicionada por el supuesto de la ocurrencia de E_1, "*...por analogía con el concepto usual*"[328], Kolmogorov propuso la definición[329]:

$$M(E_2 / E_1) = \frac{M(E_1 \cap E_2)}{M(E_1)}$$

(donde $(E_1 \cap E_2)$ denota el conjunto definido por el producto lógico $(E_1 \wedge E_2)$ que representa el evento que se verificará cuando ocurran ambos factores, siendo E_1 y E_2 eventos que se identifican con las proposiciones S_1 y S_2 de su espacio de atributos).

En 1930, como una extrapolación lógica al caso de sucesiones infinitas de eventos, Kolmogorov demostró que las únicas probabilidades que satisfacen los axiomas de Steinhaus son las que se obtienen de un sistema isomórfico con la medida de Lebesgue en el intervalo $[0;1]$. Su extensión del alcance de los axiomas de Steinhaus incluyó a todas las sucesiones de variables aleatorias, aún las variables complejas, pero no trascendió el contexto geométrico y, por lo tanto, no consideró la noción de probabilidad en espacios abstractos. Esta tarea les correspondió a los matemáticos Stanislaw Ulam y Zbigniew Łomnicki[330].

Por su parte, Cantelli, F.P. (1932)(1933)(1935) introdujo su teoría abstracta de la probabilidad, en la cual descarta el empleo de nociones empíricas como las de posibilidad, evento, probabilidad e independencia y que sólo, en cierta forma, conserva las reglas clásicas de la probabilidad total y compuesta. Denotando por $m(E)$ el área de un conjunto E estableció: **i)** que, dados dos subconjuntos E_1 y E_2 disjuntos, se verifica que $m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$; **ii)** que

---

[328]. Kolmogorov, A.N. (1929).

[329]. Esta definición se basa en los resultados de Steinhaus, H. (1923) quien, como se mencionó más arriba ya había formulado una axiomática isomórfica a la de Sierpińsky, W. (1918) para la medida de Lebesgue.

[330]. Estos autores, integrantes del Centro de Investigaciones en Matemática de Lwów, Polonia, dirigido por Steinhaus, demostraron en sus memorias de 1932 y 1934, que M es una medida de probabilidad sobre una σ-álgebra completa y que, a partir de una sucesión numerable de espacios, con dichas medidas de probabilidad se puede construir una medida de probabilidad que satisfaga las mismas condiciones en el espacio producto.

$0 \leq \frac{m(E_1 E_2)}{m(E_i)} \leq 1 \; (i = 1{,}2))$ (en particular, si se verifica que $m(E_1 E_2) = m(E_1)m(E_2)$, consideró que los conjuntos E_1 y E_2 son "*multiplicables*") y **iii)** que aún las leyes de los grandes números de Bernoulli y del logaritmo iterado de Khinchin pueden ser tratadas con el mismo nivel de abstracción. Desarrolló, además, en forma independiente de Kolmogorov, un proyecto de combinación de la interpretación frecuencista de la probabilidad con este sistema axiomático abstracto. En su opinión el cálculo de probabilidades clásico para esa clase particular de eventos observables repetidamente en igualdad de condiciones, debía ser desarrollado (en forma circular) en tres etapas: la primera consistente en estudiar experimentalmente los casos igualmente probables (analizando si ocurren con la misma frecuencia) y de este modo justificar experimentalmente el empleo de las reglas de la probabilidad total y compuesta; la segunda etapa estaba dirigida a desarrollar, sin hacer referencia a su justificación empírica, una teoría abstracta basada exclusivamente en dichas reglas y la tercera consistía en deducir las probabilidades de dicha teoría abstracta y utilizarlas para predecir las frecuencias relativas.

Como una culminación del desarrollo experimentado por la teoría de la medida entre 1900 y 1930 por los aportes de los autores mencionados y fundamentalmente por la obra de Maurice Fréchet[331], se publicó "*Grundbegriffe der Wahrsecheinlichkeitsrechnung*" (1933)[332], cuyo objetivo, de acuerdo a lo mencionado por el autor en el prefacio, era "*...satisfacer una falencia en la literatura sobre la teoría de la probabilidad (incluyendo en dicha literatura el libro de Fréchet, que se encuentra en preparación) y brindar una presentación del sistema en su totalidad, libre de complicaciones superfluas*". La satisfacción de esa "*falencia*" implicaba extender la definición rigurosa de probabilidad también a eventos para los cuales el conjunto de resultados posibles fuera infinito (una generalización que implicaba, por añadidura, una extensión arbitraria del método de inferencia inductiva)[333].

Si se tiene en cuenta que en las 62 páginas de esta memoria (con características más retóricas, conceptuales y filosóficas que matemáticas) Kolmogorov logró introducir toda la matemática, sintetizada fundamentalmente en la obra de P.J. Daniell (en particular en lo relacionado

---

331. Fue Kolmogorov el primer en advertir que los resultados obtenidos por Fréchet constituían una base fundamental para la teoría de la probabilidad. En el prefacio de los "*Grundbegriffe*" (1933) expresa que "*Después de la investigaciones de Lebesgue, las analogías entre la medida de un conjunto y la probabilidad de un evento y la integral de una función y la esperanza matemática de una variable aleatoria quedaron claras. Estas analogías podrían ser extendidas dado que, por ejemplo, muchas propiedades de las variables aleatorias independientes son análogas a las correspondientes propiedades de las funciones ortogonales. No obstante, para basar la teoría de la probabilidad sobre estas analogías era necesario independizar a la teoría de la medida y a la integración de los elementos geométricos que aún figuraban en primer plano en la propuesta de Lebesgue. Este logro fue obtenido por Fréchet*".

332. Sergei Bernstein, Emile Borel, Paul Lévy, Antoni Łomniki, Evgeny Slutsky, Hugo Steinhaus, Richard von Mises y Maurice Fréchet forman el núcleo de la bibliografía de los "Grundbegriffe". A esta lista se deberían agregar los aportes de Henri Lebesgue, Wacław Sierpiński, Constantin Carathéodory, Johann Radon, Otton Nikodým, Percy Daniell y Norbert Wiener, cuya obra constituye la herencia filosófico-matemática que recibió Kolmogorov.

333. Fréchet, M. (1938b): "*El momento en el que se resumieron todos los elementos necesarios para formular explícitamente el cuerpo completo de axiomas de la teoría de la probabilidad (clásica modernizada) fue, precisamente, aquél -en 1909- en que el señor Borel introdujo esta nueva clase de aditividad en el cálculo de probabilidades. No es suficiente poseer todas las ideas 'in mente', se debe estar seguro que esa totalidad de ideas es suficiente, expresarlas en forma conjunta y asumir la responsabilidad de afirmar que no es necesario nada más para construir la teoría. Esto fue lo que hizo el señor Kolmogorov. Este fue su logro*".

con su teorema de consistencia es decir, con la construcción de probabilidades en espacios de infinitas dimensiones) y J. Radon y O, Nikodym (en lo referido a las probabilidades condicionadas y a los valores esperados), puede considerarse que los "*Grundbegriffe*" satisficieron plenamente el objetivo planteado en su prefacio[334].

Como núcleo de los "*Grundbegriffe*", adoptando una posición filosófica muy semejante a la justificación utilizada por Borel, E. (1939b) y Lévy, P. (1925) para la interpretación geométrica de la probabilidad[335] y en respuesta al sexto de la famosa colección de problemas propuestos por Hilbert, D. (1902), según el cual "*Debemos tratar mediante axiomas aquellas ciencias físicas en las cuales las matemáticas juegan un rol importante, en particular, la teoría de la probabilidad y la mecánica*", Kolmogorov formuló lo que, arbitrariamente, muchos probabilistas denominan la axiomática clásica.

3.1.2.- Los axiomas

* **Axioma 1**: Los eventos forman una σ-álgebra s, es decir, una clase cerrada respecto de las operaciones de unión, intersección y negación de conjuntos infinitos numerables de eventos y del límite de sucesiones de eventos, es decir: **a)** si $E_j \in s\,(j = 1,2,\ldots)$, entonces $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in s$ (como se verá en las secciones 3.1.2, 3.2 y 3.3, la condición de que s sea cerrada con respecto a la unión infinita de eventos ha sido muy criticada por muchos probabilistas debido a que no surge de la aplicación de un razonamiento intuitivo); **b)** si $E_j \in s\,(j = 1,2,\ldots)$, entonces $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \in s$ (en realidad, dado que $E \cap E' = (E \cup E') - [(E - E') \cup (E' - E)]$, esta propiedad es una consecuencia del postulado **a)**); **c)** dada una sucesión de eventos $\{E_1, E_2, \ldots\}$, pertenecientes a s, entonces $\lim_{j \to \infty} E_j \in s$.

* **Axioma 2**: $\Omega \in s$

* **Axioma 3**: Asociado a cada evento $E \in s$, existe un número real no-negativo, $p(E)$, al que se denominará **probabilidad de ocurrencia del evento** E.

* **Axioma 4**: La probabilidad de que ocurra al menos uno de los eventos incluidos en el espacio muestral es igual a uno, $p(\Omega) = 1$.

---

334. Tal es la riqueza conceptual de esta memoria que muchos autores consideran que los dos tomos de Fréchet, M. (1937-1938) pueden ser considerados como una nota de pie de página de los "*Grundbegriffe*".

335. Para un análisis de las ideas más importantes sobre la justificación de Kolmogorov de la probabilidad geométrica, ver Knobloch, E. (1987).

*** Axioma 5 (de aditividad):** Sean E_1 y E_2 dos eventos incompatibles, es decir, tales que no pueden presentarse en forma simultánea ($E_1 \cap E_2 = \varnothing$), entonces se verificará que:

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2)$$

(la primera formulación clara de este principio figura en el "*Ars conjectandi*" (1713) de J. Bernoulli).

*** Axioma 6 (teorema de continuidad):** Dada una sucesión monótona de eventos, $E_i \subset E_{i+1}\ (i = 1,2,3,...)$, se puede escribir:

$$E_i = E_1 \cup \left(\overline{E}_1 \cap E_2\right) \cup ... \cup \left(\overline{E}_{i-1} \cap E_i\right) \qquad (i = 2,3,...)$$

De lo que resulta que:

$$p(E_i) = p(E_1) + \sum_{j=2}^{i} p\left(\overline{E}_{j-1} \cap E_j\right) \qquad (j = 2,3,...)$$

Aplicando m. a m. el operador límite, será:

$$\lim_{i\to\infty} p(E_i) = p(E_1) + \sum_{j=2}^{\infty} p\left(\overline{E}_{j-1} \cap E_j\right) = p\left[E_1 \cup \bigcup_{j=2}^{\infty}\left(\overline{E}_{j-1} \cap E_j\right)\right] =$$

$$= p\left\{\lim_{i\to\infty}\left[E_1 \cup \left(\bigcup_{j=2}^{\infty}\left(\overline{E}_{j-1} \cap E_j\right)\right)\right]\right\} = p\left(\lim_{i\to\infty} E_i\right)$$

Lo que demuestra que la probabilidad es una función continua respecto a cualquier sucesión monótona de eventos.

Por otra parte, si dicha sucesión es tal que $E_i \supseteq E_{i+1}\ (i = 1,2,...)$, entonces, se verificará que $\overline{E}_i \subseteq \overline{E}_{i+1}\ (i = 1,2,...)$ y, por lo tanto, dada la existencia del límite de la sucesión de las $p\left(\overline{E}_i\right)$, será:

$$\lim_{i\to\infty} p(E_i) = 1 - \lim_{i\to\infty} p\left(\overline{E}_i\right) = 1 - p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{E}_i\right) = p\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{E}_i\right) = p\left(\lim_{i\to\infty} E_i\right)$$

Dados los cinco primeros axiomas, se demuestra fácilmente que este axioma (o teorema) de continuidad es equivalente a la condición de **aditividad completa** o **aditividad numerable** o σ**-aditividad** (que, obviamente, contiene a la aditividad simple como caso particular): Sea

$\{E_1, E_2, ..., E_n, ...\}$ un conjunto de eventos incompatibles de a pares (es decir, tales que $E_i \cap E_j = \varnothing \ (i \neq j; i, j = 1,2,...)$). Por inducción, se demuestra que:

$$\bigcup_{j=1}^{n+1} E_j = \left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) + E_{n+1}$$

Dado que cualquiera de los eventos $E_j \ (j = 1,2,...)$ y E_{n+1} son incompatibles, será:

$$p\left(\bigcup_{j=1}^{n+1} E_j\right) = p\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) + p(E_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} p(E_j)$$

De la misma forma, se puede escribir:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j\right)$$

y como cada uno de los eventos $E_j \ (j = 1,2,...)$ es incompatible con cada uno de los eventos $E_j \ (j = n+1, n+2,...)$, se verificará que:

$$p\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = p\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) + p\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j\right) =$$

$$= \sum_{J=1}^{n} p(E_j) + p\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} p(E_j) + \lim_{n\to\infty} p\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} p(E_j)$$

Debe tenerse en cuenta que los eventos $\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j\right)$ definen una sucesión decreciente, es decir que $\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} E_j\right) \supset \left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j\right)$. De modo que $\lim_{n\to\infty} \bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j = 0$.

3.1.3.- Los corolarios de los axiomas y los teoremas asociados

De los axiomas anteriores se obtienen en forma inmediata los siguientes corolarios:

1) Dado un evento E y su negación, $\overline{E}$, por definición será $E \cap \overline{E} = \varnothing$ y $E \cup \overline{E} = \Omega$. Luego, aplicando el **Axioma 4,** se verifica que:

$$p\left(E \cup \overline{E}\right) = p(E) + p\left(\overline{E}\right) = p(\Omega) = 1$$

y, por lo tanto, que $p(E) = 1 - p\left(\overline{E}\right)$.

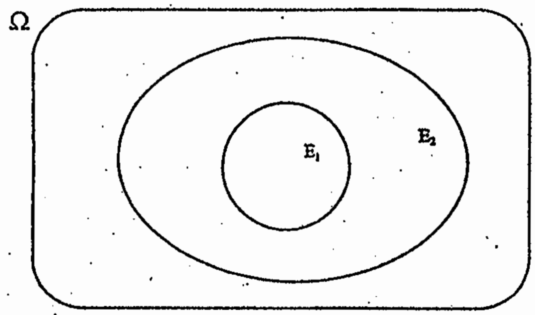
2) Dado que $\Omega \cup \varnothing = \Omega$, por los axiomas **4** y **5** se verifica que:

$$p(\Omega \cup \varnothing) = p(\Omega) = p(\Omega) + p(\varnothing)$$

En consecuencia, será $p(\varnothing) = 0$. A partir de este resultado se concluye inmediatamente que $0 \leq p(E) \leq 1$ (en la literatura sobre teoría de la probabilidad esta condición suele ser mencionada como **regla de convexidad**).

3) Dados dos eventos, E_1 y E_2, tales que $E_1 \subset E_2$ (ver Fig. 3.1), se puede escribir $E_2 = E_1 \cup \left(\overline{E}_1 \cap E_2\right)$. Luego, de acuerdo con el **Axioma 4,** será $p\left(E_2\right) = p\left(E_1\right) + p\left(\overline{E}_1 \cap E_2\right)$, de lo que se deduce, que $p\left(E_2\right) > p\left(E_1\right)$.

Figura 3.1

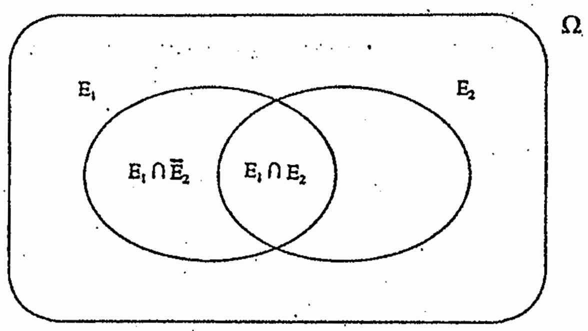


4) Sean dos eventos, E_1 y E_2. Según se observa en la **FIGURA 3.2,** se puede escribir:

$$E_1 \cup E_2 = E_1 \cup \left(\overline{E}_1 \cap E_2\right)$$

(esta relación, la cual es generalizable a cualquier conjunto finito o infinito numerable de eventos, $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup ... = E_1 \cup \left(\overline{E}_1 \cap E_2\right) \cup \left(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap E_3\right) \cup ...$, tiene gran importancia en las aplicaciones, dado que permite la expresión de la unión de eventos cualesquiera como una unión de eventos incompatibles). Por otra parte, se verifica que:

Figura 3.2



$$E_2 = (E_1 \cap E_2) \cup (\overline{E}_1 \cap E_2)$$

(esta relación también puede ser generalizada a cualquier conjunto infinito numerable de eventos $E_j\ (j = 1,2,\ldots)$, tales que $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \Omega$, para los cuales resulta que $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(E \cap E_j\right)$). Ahora bien, los segundos miembros de estas expresiones están formados por sumas de eventos incompatibles, por lo que es posible aplicar el axioma de aditividad:

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(\overline{E}_1 \cap E_2)$$
$$p(E_2) = p(E_1 \cap E_2) + p(\overline{E}_1 \cap E_2)$$

De esta última igualdad se obtiene que:

$$p(\overline{E}_1 \cap E_2) = p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$$

Reemplazando, entonces, en la expresión general, resulta que:

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$$

Relación conocida como **teorema de la suma o de la probabilidad total**[336].

A partir de las relaciones anteriores, se obtiene en forma inmediata que, dados tres eventos, E_1, E_2 y E_3, la probabilidad de su suma puede ser expresada de la siguiente forma:

---

336. Una expresión de este tipo fue usada por Halley, E. (1693) para calcular la probabilidad de supervivencia para dos o tres vidas independientes, y por De Moivre, A. (1711). Los argumentos clásicos que dieron origen a este teorema y al teorema de la probabilidad compuesta perduraron en los libros de texto hasta comienzos del siglo XX, incluso en grandes tratados como los de Poincaré, H. (1896), Markov, A. (1900), Czuber, E. (1903) y Castelnuovo, G. (1919).

$$p(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) -$$
$$- p(E_1 \cap E_2) - p(E_1 \cap E_3) - p(E_2 \cap E_3) + p(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

y, en general, dado un conjunto de eventos, $E_1, E_2, ..., E_n$ para todo n entero finito, se obtiene la conocida como **fórmula de Poincaré**[337]:

$$p(E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n) = \sum_{i=1}^{n} p(E_i) - \sum_{i \neq j} p(E_i \cap E_j) + ... + (-1)^{n+1} p(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n)$$

Del enunciado del teorema de la probabilidad total surge el siguiente corolario: Teniendo en cuenta que:

$$p(E_1 \cup E_2) \leq p(E_1) + p(E_2)$$

y tomando en consideración el corolario **3)** del axioma de aditividad, resulta que:

$$\max[p(E_1), p(E_2)] \leq p(E_1 \cup E_2) \leq p(E_1) + p(E_2)$$

La primera igualdad se verificará en caso de que uno cualquiera de los eventos implique al otro, la segunda, como se vio, si los eventos son incompatibles.

5) Dada una sucesión finita o infinita numerable de eventos, $\{E_i\}$ $(i = 1,2,...)$, y a partir de la relación:

$$E_1 \cup E_2 \cup .E_3 \cup ... = E_1 \cup (\overline{E}_1 \cap E_2) \cup (\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap E_3) \cup ... =$$
$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} (\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap ... \cap \overline{E}_{i-1} \cap E_i)$$

(en la cual los sumandos que figuran en el segundo miembro son eventos incompatibles), de acuerdo con el **axioma 6**, puede escribir $p\left(\bigcup_i E_i\right) = \sum_i (\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap ... \cap \overline{E}_{i-1} \cap E_i)$. Pero, como $\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap ... \cap \overline{E}_{i-1} \cap E_i \supset E_i$, de acuerdo con el ya mencionado corolario **3)**, será:

$$p(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap ... \cap \overline{E}_{i-1} \cap E_i) \leq p(E_i)$$

En consecuencia, se demuestra que:

---

337. Ver Poincaré, H. (1912).

$$p\left(\bigcup_i E_i\right) \leq \sum_i p(E_i)$$

Expresión conocida como **desigualdad de Boole**[338].

3.1.4.- Algunas consideraciones acerca del contenido filosófico de los "Grundbegriffe"

1) Si bien, como se mencionó en la Sec. 3.1.1, respecto de sus contenidos matemáticos fundamentales, las axiomáticas de Kolmogorov y Daniell son coincidentes (obsérvese que los seis axiomas de Kolmogorov pueden resumirse diciendo que $p(\bullet)$ es una función no-negativa, aditiva en el sentido de Fréchet, M. (1937-1938), con el agregado de la condición $p(\Omega) = 1$), desde el punto de vista conceptual presentan profundas diferencias: **i)** contrariamente a la posición de Kolmogorov, Daniell nunca consideró la aplicación de su sistema axiomático a la teoría de la probabilidad (ni Wiener, ni Daniell pensaron, a partir de la formulación de un método general de representación de la teoría de la medida, en una teoría de la probabilidad como una rama conceptualmente independiente de la matemática); **ii)** al menos en términos formales, el resultado obtenido por Kolmogorov, en la medida que considera una cardinalidad arbitraria de los elementos del conjunto, es más general que el de Daniell, que considera una cardinalidad numerable (debe tenerse en cuenta que esta generalización es exclusivamente a nivel conceptual, no implica modificaciones matemáticas significativas, ni resulta relevante en las aplicaciones)[339] y **iii)** Kolmogorov incorporó el concepto de independencia estocástica de los eventos como un factor fundamental de diferenciación entre la probabilidad y la teoría de la medida.

2) Debe tenerse en cuenta que la teoría desarrollada por Kolmogorov, a excepción de los valores triviales 0 y 1, no considera la asignación de valores a las probabilidades. Esto pone en evidencia una característica fundamental de la teoría axiomática de la probabilidad: su capacidad para transformar valores de probabilidad de eventos simples en valores de probabilidad de eventos complejos y su incapacidad para determinar valores de probabilidad no triviales. La asignación de valores de probabilidad no triviales requiere una definición particular de probabilidad. Kolmogorov, a través de un aparente frecuencismo, adoptó una definición acorde con la interpretación propensionalista de K.R. Popper.

Una prueba indiscutible de la adopción de esta interpretación propensionalista por parte de Kolmogorov es su aceptación del principio de Cournot acerca de la aproximación de los resultados de un conjunto de condiciones repetibles al verdadero valor de la probabilidad, como nexo principal de la axiomática con el mundo real.

El conocido como **principio de Cournot** está relacionado con la existencia de eventos

---

338. Ver Boole, G. (1952).

339. Ver Shafer, G.; Vovk, V. (2001)(2005)(2006).

distintos de Ω que también tienen probabilidad igual a uno: son los denominados **eventos quasi-ciertos** o **ciertos-en probabilidad**[340]. La negación de un evento quasi-cierto define un evento que, no coincidiendo con el evento imposible, se comporta como tal en lo que se refiere a su probabilidad, y se denomina **quasi-imposible** o **imposible-en probabilidad**[341]. Estos eventos poseen las siguientes propiedades: **i)** la unión de dos eventos imposibles-en probabilidad es un evento imposible-en probabilidad (propiedad generalizable a cualquier conjunto finito o infinito numerable de eventos); **ii)** sean E_I un evento imposible-en probabilidad y E un evento ni cierto ni imposible, entonces se verifica que $p(E_I \cap E) = 0$ y $p(E_I \cup E) = p(E)$; **iii)** sean E_C un evento cierto-en probabilidad y E un evento ni cierto ni imposible, entonces se verifica que $p(E_C \cap E) = p(E)$ y $p(E_C \cup E) = 1$ (Borel, E. (1912a)(1912b)(1930)(1939b), quien estudió estas probabilidades con especial interés, determinó el límite 10^{-1000} para la existencia de la quasi-imposibilidad).

Estas definiciones derivan de los conceptos de evento **moralmente imposible** y **moralmente cierto** formulados originalmente por Bernoulli, J. (1713)[342]. La **certeza moral probabilística** fue ampliamente discutida en el siglo XVIII. D'Alembert, J.B.L.R. (1761) (1767) planteó la necesidad de distinguir entre eventos "*metafísicamente imposibles*" y "*físicamente imposibles*"[343]. Al respecto, Buffon, G,-L. (1777) consideró que la diferencia entre las certezas moral y física era una cuestión de grado de aproximación, según su apreciación un evento con probabilidad $\frac{9999}{10000}$ es moralmente cierto, en tanto que un evento con una probabilidad mucho mayor puede ser considerado como físicamente cierto[344].

Por su parte, Cournot, A.A. (1843), basándose en el concepto de probabilidad geométrica, planteó una formulación de la ley de los grandes números según el cual se puede asegurar que un evento moralmente imposible no ocurrirá (es matemáticamente posible pero físicamente imposible)

---

340. Markov, A.A. (1912): "*Cuanto más se aproxime a uno la probabilidad de un evento, mayor será la razón para esperar su ocurrencia y no esperar lo opuesto a su ocurrencia. En cuestiones prácticas, estamos obligados a considerar como ciertos aquellos eventos cuya probabilidad se aproxima a 1 y como imposibles a aquellos cuya probabilidad es pequeña. Consecuentemente, uno de los logros más importantes en la teoría de la probabilidad consiste en identificar aquellos eventos cuyas probabilidades son próximas a uno o a cero*".

341. Es decir, un evento cuya probabilidad, si bien no es efectivamente igual a cero, sólo posee un interés puramente metafísico.

342. Ver Sec. 2.6.

343. Ver Daston, L. (1979).

344. Como se mencionó en la Sec. 2.6, Buffon, al igual que Butler y Price, utilizó el ejemplo del "amanecer". Partiendo del supuesto de que los dos resultados posibles, "*que mañana amanezca*" y "*que mañana no amanezca*", eran equiprobables y teniendo en cuenta que el resultado "amanecer" se había producido, sin excepción, todos los días de los últimos 5781 años, concluyó que la probabilidad del evento "que mañana amanezca" era igual a $1-\frac{1}{2^{n-1}}$, donde n denotaba el total de observaciones diarias desde la creación del mundo (debe tenerse en cuenta que, en 1777 y, de acuerdo con la cronología del Reverendo James Ussher, obispo de Armagh, la edad atribuida al planeta tierra era de 5781 años). Ver Loveland, J. (2001).

y como corolario, que es físicamente imposible que, dada una sucesión suficientemente larga de repeticiones, la frecuencia relativa de un evento difiera sustancialmente de su probabilidad.

Cournot consideró que este principio, que asimilaba una probabilidad infinitesimalmente pequeña a la imposibilidad de ocurrencia de un evento, proporcionaba un significado empírico a la probabilidad clásica[345]. Pero, debe tenerse en cuenta que existe una diferencia conceptual muy importante entre la afirmación de que un evento de probabilidad infinitesimal no ocurrirá y el supuesto de que, por sí sola, esa decisión de no-ocurrencia del evento proporcionará a la teoría clásica un significado empírico[346].

Borel, E. (1906)(1909b)(1914)(1930b), utilizando a menudo un estilo más literario que matemático o filosófico, adoptó el tratamiento de los eventos con probabilidad infinitesimal como imposibles y estableció una clasificación de los mismos más refinada que la de Buffon, según la cual una probabilidad de 10^{-6} es despreciable "*a escala humana*", una probabilidad de 10^{-15} es despreciable "*a escala terrestre*" y una probabilidad de 10^{-50} es despreciable "*a escala cósmica*"[347].

En desacuerdo con lo que se podría denominar la filosofía ortodoxa de Laplace, von Kries, J. (1886) sostuvo que los probabilistas Laplacianos y los probabilistas franceses y rusos que constituyeron su sucesión comenzaron asumiendo una interpretación subjetivista intentando luego, a partir de una interpretación equivocada del teorema de Bernoulli y del principio de Cournot[348] establecer la existencia de probabilidades objetivas mediante la aplicación de la ley de los grandes números. Utilizaron, sin una base conceptual válida, los postulados del teorema de Bayes[349] para razonar acerca de las probabilidades objetivas en casos en los que se cuente con un número suficientemente largo de repeticiones[350].

A fin de resolver estos errores de interpretación, von Kries, J. (1886) propuso, como condición necesaria para razonar acerca de probabilidades objetivas, el **principio del "Spielraum"** según el cual las probabilidades objetivas pueden ser calculadas a partir de casos igualmente

---

345. Cournot, A.A. (1843): "*...el evento físicamente imposible es, por lo tanto, aquél al que le corresponde un probabilidad infinitamente pequeña y esta sola observación es suficiente para proporcionar una sustancia objetiva fenomenal a la teoría de la probabilidad matemática*" (la expresión "*objetiva fenomenal*" se refiere a la distinción planteada por Kant entre el "*noumenon*", o cosa-en-sí-misma y el "*phenomenon*" u objeto de la experiencia). Ver Daston, L. (1994).

346. Boltzmann, L. (1866)(1871)(1872)(1877)(1887) utilizó el principio de Cournot para proporcionar una explicación estadística de la segunda ley de la termodinámica (los procesos disipativos son irreversibles porque la probabilidad de un estado con entropía lejos del máximo es infinitamente pequeña). Por su parte Poincaré, H. (1890) postuló en su teorema de recurrencia, que un sistema mecánico aislado limitado a una región acotada de su espacio de fase retornará eventualmente a un estado arbitrariamente próximo a su estado inicial, si dicho estado no es excepcional (es decir, postuló que los estados para los cuales no se verifica la recurrencia son excepcionales, en la medida que están contenidos en subregiones cuyo volumen total es arbitrariamente pequeño).

347. Borel, E. (1939).

348. Para un análisis conceptual de los alcances del teorema de Bernoulli, ver Cap. 11.

349. Este teorema será tratado en el Cap. 13.

350. Al principio que indica que un evento con probabilidad de ocurrencia muy próxima a cero es imposible, von Kries, J. (1886) lo denominó "*el error de D'Alembert*".

probables que cumplan las siguientes condiciones: **i)** las circunstancias que genera cada caso admiten el mismo "*Spielraum*", es decir, el mismo número de arreglos posibles y **ii)** además de éstas no existe ninguna otra circunstancia que afecte las expectativas relativas a cada caso. Con un razonamiento muy atinado von Kries concluye que, aún cuando de acuerdo con estas condiciones, se pueda asegurar que un evento puede poseer una probabilidad objetiva, de ninguna manera se puede asignar a la ley de los grandes números los alcances que le atribuyeron Hadamard y Lévy. Según se verá en el Cap. 11, el teorema de Bernoulli postula solamente que un desvío significativo de la frecuencia relativa de un evento respecto de su probabilidad (suponiendo que, a partir de una interpretación determinística del comportamiento de los fenómenos fácticos, esta probabilidad exista) es simplemente tan improbable como cualquier otro evento improbable, dada una sucesión suficientemente larga de repeticiones[351].

Por el contrario, Hadamard, J. (1922), de acuerdo con una posición netamente determinística, sostiene que las nociones de eventos igualmente probables ("*perfectamente equivalentes*" según su nomenclatura) y de eventos muy improbables constituyen el fundamento de la teoría de la probabilidad y que el hecho que la equivalencia perfecta sea una condición matemática no verificable en la práctica, no debe impedir la aplicación del principio de los eventos muy improbables.

Con respecto a la noción de eventos equiprobables, Lévy, P.P. (1925) coincidió en que puede ser considerada como un fundamento de la matemática de las probabilidades, pero admitió que si se la asume como única base de razonamiento, las probabilidades obtenidas serán meramente subjetivas. Sostuvo, además, que el concepto de evento muy improbable es el único que permite atribuir un significado empírico a los resultados de la teoría matemática[352], que la combinación de esta noción con la ley fuerte de los grandes números[353] permite una interpretación objetiva de la probabilidad como una constante física representada por la frecuencia relativa del evento. Como se verá inmediatamente, se puede concluir que una versión propensionalista de este postulado frecuencista fue adoptada pot Kolmogorov en su "*Grundbegriffe*".

De las consideraciones realizadas precedentemente, se deriva que el principio de Cournot admite dos modalidades que se corresponden con las versiones fuerte y débil de la ley de los grandes números: **i)** una **forma fuerte** o **estricta** que considera que un evento con probabilidad pequeña o nula no ocurrirá en la repetición siguiente y que, combinada con los postulados del teorema de Bernoulli permite concluir que la probabilidad de un evento **siempre** puede ser aproximada por su frecuencia relativa a partir de una serie particular suficientemente larga de de repeticiones independientes y **ii)** una **forma débil** que considera que un evento con probabilidad muy próxima a cero ocurrirá muy raramente en una serie de repeticiones y que, combinada con el teorema de Bernoulli, permite concluir que la probabilidad de un evento **habitualmente** puede ser aproximada por su frecuencia relativa a partir de una serie suficientemente larga de repeticiones independientes.

---

351. Las críticas de von Kries al principio de Cournot ejercieron una notable influencia sobre los probabilistas alemanes, en particular sobre Czuber, E. (1903) (ver Menong, A. (1915), Kamlah, A. (1983)).

352. Debe tenerse en cuenta que, a partir de los trabajos de Wiman, A. (1900)(1901) sobre fracciones continuas, los matemáticos alemanes dirigieron sus esfuerzos a demostrar que existen conjuntos de medida nula y que estos conjuntos son imposibles, lo cual puso en evidencia el abismo que existe entre la probabilidad nula y la probabilidad infinitesimal (ver Bernstein, F. (1912)).

353. Este teorema será tratado en el Cap. 11.

Borel, Lévy y Kolmogorov adoptaron la forma fuerte, Chuprov y Castelnuovo la forma débil[354].

Es necesario destacar que de Finetti, B. (1937), a partir de la negación de las aproximaciones frecuencistas-propensionalistas mencionadas precedentemente, propuso una notable solución al problema de la quasi-imposibilidad, basada en la consideración de una "*jerarquía*" distinta entre las probabilidades nulas. Sean, por ejemplo, dos eventos, E_1 y E_2, ambos de probabilidad nula ($p(E_1) = 0, p(E_2) = 0$), y sea el evento suma ($E_1 \cup E_2$). De acuerdo con la interpretación subjetivista, tendría sentido realizar una evaluación de las probabilidades $p[E_1 / (E_1 \cup E_2)]$ y $p[E_2 / (E_1 \cup E_2)]$ las cuales deberán, de acuerdo con la condición de coherencia, cumplir la condición:

$$p[E_1 / (E_1 \cup E_2)] + p[E_2 / (E_1 \cup E_2)] = 1$$

Lo que permite concluir que una probabilidad nula puede ser "*infinitamente*" más grande o más pequeña que otra probabilidad nula, es decir, que pueden considerarse distintos "*grados de imposibilidad*"[355]. Supóngase un número X representable como un punto sobre una recta. Si a esta representación se le agregara otra dimensión, Y, la identificación del punto X requeriría, obviamente, la definición de dos condiciones, y si se agregara una tercera dimensión, las condiciones serían tres. Se tendrán, así, tres "ceros" ($0, 0^2$ y 0^3), cuya identidad aritmética no es válida desde el punto de vista de la probabilidad (en el primer caso la probabilidad sería 0, en el segundo 0^2 y en el tercero 0^3). La idea intuitiva básica que se desprende de este razonamiento es que, dados n eventos independientes con probabilidad nula, la probabilidad de su ocurrencia conjunta sería $0^n \neq 0$. De la misma forma, supóngase que el observador incorpore a su conjunto de información el conocimiento de la ocurrencia de un evento H al cual, "a priori", le asignaba una probabilidad nula. Dado, entonces, un evento E cualquiera, la probabilidad $p(E / H)$ estará dada por la relación entre el "cero" correspondiente a la probabilidad $p(E \cap H)$ y el "cero" correspondiente a la probabilidad $p(H)$.

3) Si bien es innegable que las propuestas de Lévy, P.P. (1925) y von Mises, R. (1931) y la obra de los probabilistas rusos Chuprov, A.A. (1910), Markov, A.A. (1912) y Slutsky, E. (1925) ejercieron una influencia significativa sobre el pensamiento de Kolmogorov, a partir de su interpretación del principio de Cournot sintetizado en el siguiente párrafo de los "*Grundbegriffe*": "*Es posible asumir que a un evento A de ocurrencia eventual bajo ciertas condiciones 6, que no es nuestra intención analizar aquí, se le puede asignar un número real $p(A)$ que posee las siguientes propiedades: a) puede ser considerado como prácticamente cierto que, si el sistema de*

---

354. En particular, Castelnuovo, G. (1919) ejerció una notable influencia sobre las posiciones adoptadas por Fréchet, M.; Halbwachs, M. (1924), Fréchet, M. (1938a)(1938b) y, por lo tanto, sobre Kolmogorov, A.N. (1933).

355. de Finetti, B. (1937). La nomenclatura utilizada habitualmente no es la más adecuada dado que sugiere que los valores de $p(E_1)$ y $p(E_2)$ son iguales, en la medida que ambas son iguales a cero, cuando, en realidad, de acuerdo con la interpretación subjetivista, puede no tratarse del mismo "cero".

condiciones б se repite un número suficientemente grande de veces (n) y se verifica que el evento A ocurre m veces, entonces el cociente $\frac{m}{n}$ diferirá levemente de $p(A)$; b) si $p(A)$ es muy pequeño, entonces se puede considerar como prácticamente cierto que el evento A no ocurrirá en una repetición individual de las condiciones б", se puede concluir que, a pesar de su afirmación que "*...el autor*" (es decir, Kolmogorov hablando en tercera persona como el Diego) "*...se ha basado, en gran medida, en el trabajo de von Mises*", en realidad, Kolmogorov formuló sus axiomas a partir de una definición propensionalista de la probabilidad basada en la propuesta de Popper, K.R. (1934)(1957b), consistente en asociar las probabilidades a los resultados de un sistema de condiciones б repetibles (no especificadas en el texto) y no a los colectivos de la interpretación frecuencista[356]. Como consecuencia de la adopción de esta interpretación, la vinculación de su axiomática abstracta con el mundo de la experiencia se materializa de acuerdo con principios no-operacionalistas según los cuales los conceptos teóricos fundamentales son asumidos habitualmente como indefinidos y se vinculan con la observación sólo en forma indirecta[357].

4) Si bien, como se expresó anteriormente, de acuerdo con Borel y Lévy, el principio "*...a un resultado A de ocurrencia eventual bajo ciertas condiciones б (...) se le puede asignar un número $p(A)$*" tal que "*a) puede ser considerado como prácticamente cierto que, si el sistema de condiciones б se repite un número suficientemente grande de veces (n) y se verifica que el evento A ocurre m veces, entonces el cociente $\frac{m}{n}$ diferirá levemente de $p(A)$*" puede ser deducido de la consideración conjunta del principio "*b) si $p(A)$ es muy pequeño, entonces se puede considerar como prácticamente cierto que el evento A no ocurrirá en una repetición individual de las condiciones б*" y del teorema de Bernoulli (el cual surge como un corolario de los axiomas), dado que en los "*Grundbegriffe*" el principio **a)** no sólo precede a los axiomas, sino que es utilizado para su formulación y que, por lo tanto, precede al teorema de Bernoulli, es obvio que para Kolmogorov asume un papel independiente. Indudablemente este planteo constituye la esencia del cambio filosófico producido por Kolmogorov en la teoría de la probabilidad: la sustitución de la condición de equiprobabilidad por los resultados de sucesiones de condiciones repetibles (resultados que dan origen al sistema axiomático) y la interpretación propensionalista del principio de Cournot como nexo principal con el mundo real.

5) En el primer capítulo de los "*Grundbegriffe*" Kolmogorov trata el problema de la aditividad finita y, si bien en el segundo capítulo adiciona a los cinco primeros axiomas el teorema de continuidad que, como se vio, introduce la condición de la aditividad numerable[358], dado que (a pesar de que el

---

356. Ver Sheynin, O. (1996).

357. Ver Sec. 2.5.

358. Como se vio en la Sec. 3.1, la aditividad numerable fue introducida en la matemática pura por Borel, E. (1896)(1897)(1898), quien la convirtió en el tema central de la teoría de la probabilidad al demostrar su ley fuerte de los grandes números. Deben reconocerse, además, los aportes de Lebesgue, H. (1901)(1904), Radon, J. (1913), Fréchet, M. (1915a)(1915b)(1930a)(1930b), Daniell, P.J. (1918)(1919a)(1919b)(1920)(1921), Wiener, N. (1920)(1921a)(1921b)(1923)(1924), Steinhaus, H. (1923)(1930a)(1930b) y, obviamente, del mismo Kolmogorov.

argumento empleado por Fréchet para demostrar la σ-aditividad, puede ser deducido de la definición empírica propuesta por Fréchet, M.; Halbwachs, M. (1925)) esta propiedad trasciende lo que puede ser verificado empíricamente, manifiesta algunas reservas sobre su validez. Pero la justifica en virtud de su utilidad en ciertos ámbitos de la investigación: "*Como el nuevo axioma sólo es esencial en ámbitos infinitos de probabilidad, contrariamente a lo que ocurre con los cinco primeros axiomas, es casi imposible intuir su significado empírico. En la descripción de cualquier proceso estocástico observable sólo podemos obtener ámbitos finitos de probabilidad. Los campos infinitos de probabilidad sólo se presentan en modelos ideales de procesos estocásticos reales. No obstante, tomaremos en consideración sólo aquellos modelos que satisfacen el axioma 6, el cual resultó útil en ámbitos de investigación muy variados*"[359].

6) La perspectiva histórica permite concluir que, a pesar de la riqueza conceptual de los "*Grundbegriffe*", la filosofía de Kolmogorov fue menos influyente que sus axiomas, posiblemente debido al fracaso de su intento de generalizarla a los procesos estocásticos[360]. Debe tenerse en cuenta que la primera y fundamental condición en el esquema de Kolmogorov es la repetibilidad ilimitada del sistema de condiciones 6 y que, si bien este precepto se satisface cuando se define un proceso estocástico en términos de sus probabilidades de transición[361], la cuestión se vuelve más comprometida cuando se analiza la distribución de probabilidades para los conjuntos de las trayectorias posibles, es decir, en los casos en los cuales sólo es posible acceder a una definición débil y, por lo tanto, se cuenta con una única trayectoria no repetible del proceso. Kolmogorov logró resolver esta restricción demostrando que, en particular, un proceso de Markov de parámetro discreto[362] puede ser definido a partir de probabilidades simples, pero no logró extender este resultado a procesos continuos en el dominio del tiempo.

3.1.5.- La probabilidad condicionada

Sea E un evento definido por la proposición S, sea Ω su espacio muestral y sea s su álgebra completa de subconjuntos de Ω tales que $E = \{w / S(w) \text{ es verdadera}\}$. Sea $B \in s$ el evento $B = \{w / S'(w) \text{ es verdadera}\}$ y sea Ω' el conjunto de los elementos w para los cuales la proposición S' es verdadera. Se dice que el evento $E \in s$ está **estocásticamente condicionado** por el evento $B \in s$, (E / B), cuando la probabilidad de ocurrencia o no de E depende estocásticamente del resultado supuesto del fenómeno definido por la proposición S' .

Al calificar como estocástica a esta dependencia[363], se pretende distinguirla de otras formas

359. Ver Cifarelli, D.M.; Regazzini, E. (1996).

360. Ver Landro, A.H.; González, M.L. (2009).

361. Ver Kolmogorov, A.N. (1931).

362. Ver Landro, A.H.; González, M.L. (2009).

363. El adjetivo estocástico (del griego "στοχαστικόζ") es utilizado aquí como sinónimo de **en el sentido de la probabilidad.**

de dependencia, fundamentalmente de la dependencia lógica: se dice que un evento (o proposición) E_2 es lógicamente dependiente de un evento (o proposición) E_1 cuando la suposición de que E_1 ha sucedido, transforma a E_2 en un evento cierto o en un evento imposible (es decir, se dice que E_2 es lógicamente dependiente de E_1 si, y sólo si E_2 puede ser definido a partir de E_1 mediante operaciones lógicas).

En el caso finito, de acuerdo con la interpretación de Kolmogorov, el evento B se comporta, con relación a todos los eventos por él condicionados, como si fuera un evento cierto y, dado que la ocurrencia de E depende estocásticamente de B, el evento (E / B) queda definido sólo si se supone que B se ha verificado[364]. En caso contrario, su definición no es posible. Luego, dados B y la clase s de eventos, es posible definir probabilidades relativas a dichos eventos condicionados, verificándose que si $p(B) > 0$, para todo evento condicionado por B, resulta que:

$$p(E / B) = \frac{p(E \cap B)}{p(B)}$$

donde $p(E / B)$ debe ser interpretada como la probabilidad de que se verifique E, suponiendo que B se haya verificado o la probabilidad de ocurrencia de E **condicionada** por la supuesta ocurrencia de B o **relativa** a la supuesta ocurrencia de B (como se verá en la Sec. 3.2, a partir de la interpretación frecuencista permite considerar probabilidades condicionadas por atributos de probabilidad nula).

A partir de esta igualdad se concluye inmediatamente que[365]:

$$p(E \cap B) = p(B)p(E / B) = p(E)p(B / E)$$

ecuación conocida como **fórmula de la probabilidad compuesta**[366].

---

364. Esta suposición de ocurrencia de B reemplaza al hecho que B se haya verificado realmente.

365. En realidad, la notación $p(E)$ utilizada hasta aquí es incompleta en la medida que no toma en consideración el conjunto de información (ω) con que (necesariamente) cuenta el observador para realizar la evaluación de la probabilidad. Es decir, la notación correcta, en todo caso, debería ser $p(E / \omega)$. En el caso que se menciona en el texto, la notación completa sería $p[E / (\omega \cap B)]$. La notación original introducida por Hausdorf, F. (1901) utilizaba el símbolo $p_B(E)$. Esta nomenclatura fue adoptada por Czuber, E. (1903) y Kolmogorov, A.N. (1933) y perduró en la literatura alemana hasta que Jeffreys, H. (1931) propuso su sustitución por la más flexible utilizada en la actualidad.

366. La primera formulación explícita del principio de la probabilidad compuesta para eventos cualesquiera se debe a Th. Bayes (“*An essay toward solving a problem in the doctrine of chances*” (1764)). A partir de la publicación de esta memoria, los principios de la probabilidad total y de la probabilidad compuesta dejaron de ser objeto de discusión a nivel teórico y comenzaron a ser considerados como condiciones necesarias para la definición de una función de probabilidades (el período anterior a esta publicación está caracterizado por el "*Ars conjectandi*" de J. Bernoulli en el cual se admiten como probabilidades funciones aditivas y no-aditivas, ver Cap. 11). Cabe destacar que la primera parte del trabajo de Bayes, dedicada a la derivación de leyes a partir de una definición explícita de probabilidad, constituye lo que se podría considerar el primer ejemplo del ya mencionado dogmatismo Laplaciano (en la segunda parte de la memoria de Bayes figura su

En el caso general, Kolmogorov consideró una función h sobre Ω para toda variable aleatoria que satisfaga la relación[367]:

$$p_{(u\subset\Omega')}(E) = E^*_{(u\subset\Omega')}p_u(E)$$

(para todo conjunto Ω' de valores posibles de u tal que el subconjunto $\{\xi / u(\xi) \in \Omega'\}$ de Ω sea medible y posea probabilidad positiva), donde el primer miembro denota la probabilidad condicionada de E con respecto a u y $E^*_{(u\subset\Omega')}$ denota el valor esperado de una variable Y, condicionado por un valor conocido de u. De acuerdo con el teorema de Radon-Nikodym, esta variable aleatoria define un conjunto de probabilidad nula[368].

A partir de su análisis de la paradoja de Bertrand[369], Kolmogorov arribó a una conclusión que, si bien no reemplaza la explicación de Borel, implica un avance en la filosofía de la probabilidad: "*... la idea de una probabilidad condicionada con respecto a una hipótesis aislada dada con probabilidad nula, es inadmisible*"[370].

El tratamiento realizado aquí de la probabilidad $p(E/B)$ como un concepto primitivo, corolario inmediato del sistema axiomático, corresponde a B. de Finetti quien sostiene el criterio de que es preferible establecer los supuestos importantes como axiomas (o como teoremas derivados de ellos) y, en la medida de lo posible, reservar las definiciones sólo como resúmenes. Su propuesta pretendía mejorar el planteo de Kolmogorov, A.N. (1933) quien presenta a $p(E/B)$ como una mera definición (debe reconocerse que, como se vio en las secciones 2.3, 2.4 y 2.5, en las interpretaciones frecuencista, logicista, y propensionalista, la probabilidad condicionada es un concepto primitivo). Por otra parte, es innegable que el tratamiento de de Finetti genera una cierta simetría elegante entre las fórmulas de la aditividad y del producto, inexistente en la axiomática de Kolmogorov.

A partir de los resultados anteriores, se obtiene que, dados los eventos E_1, E_2 y E_3, su probabilidad compuesta asumirá la forma:

$$\begin{aligned} p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) &= p[(E_1 \cap E_2) \cap E_3] = \\ &= p(E_1 \cap E_2)p[E_3/(E_1 \cap E_2)] = \\ &= p(E_1)p(E_2/E_1)p[E_3/(E_1 \cap E_2)] \end{aligned}$$

---

famoso teorema sobre la inversión de la probabilidad, ver Cap. 13).

367. La nomenclatura utilizada es la correspondiente a Kolmogorov, A.N. (1933).

368. Kolmogorov fue el primero en utilizar este teorema para definir probabilidades condicionadas a partir de probabilidades simples.

369. Ver Sec. 2.4.

370. Kolmogorov, A.N. (1933).

El último factor del segundo miembro debe ser interpretado como la probabilidad de que ocurra E_3, suponiendo que E_1 y E_2 hayan ocurrido. Luego, se puede escribir:

$$p\left[E_3/\left(E_1 \cap E_2\right)\right] = \frac{p\left(E_1 \cap E_2 \cap E_3\right)}{p\left(E_1 \cap E_2\right)} =$$

$$= \frac{\dfrac{p\left(E_1 \cap E_2 \cap E_3\right)}{p\left(E_2\right)}}{\dfrac{p\left(E_1 \cap E_2\right)}{p\left(E_2\right)}} =$$

$$= \frac{p\left[\left(E_1 \cap E_3\right)/E_2\right]}{p\left(E_1/E_2\right)}$$

siendo $p\left(E_2\right) \geq p\left(E_1 \cap E_2\right) > 0$.

En general, será:

$$p\left(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n\right) =$$
$$= p\left[\left(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_{n-1}\right) \cap E_n\right] =$$
$$= p\left(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_{n-1}\right) p\left[E_n/\left(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_{n-1}\right)\right] = ... =$$
$$= p\left(E_1\right) p\left(E_2/E_1\right) p\left[E_3/\left(E_1 \cap E_2\right)\right] ... p\left[E_n/\left(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_{n-1}\right)\right]$$

Del enunciado del **Axioma 6** y de la definición de la probabilidad condicionada surgen los siguientes corolarios:

a) Suponiendo que $p(B) > 0$, se obtiene la siguiente fórmula para la inversión de la probabilidad de un evento condicionado:

$$p(E/B) = \frac{p(E)}{p(B)} p(B/E)$$

expresión que constituye la formulación más simple del Teorema de Bayes[371].

---

[371]. A comienzos del siglo XVIII, como consecuencia del proceso que llevó a los filósofos empiristas al tratamiento de los aspectos cuantitativos de la experiencia, se generó una teoría de la inferencia inductiva aplicable a series de eventos naturalmente idénticos, para los cuales la experiencia adquirida de su observación repetida, se transformaba en expectativa acerca de su comportamiento futuro. Jakob Bernoulli ("*Ars conjectandi*" (1713)) fue el primero en lograr una formalización de ese proceso de inferencia. Los principales tratados de los autores clásicos se referían exclusivamente a la resolución de problemas del tipo: dada una urna que se sabe que contiene a bolillas blancas y c bolillas negras, la probabilidad de

b) Dado que Ω' fue definido como el conjunto de los w para los cuales S' (proposición que define al evento B) es verdadera (de modo que $\Omega' = B$), se verifica que $p(\Omega' / B) = 1$.

c) Si se verifica que $E \subset B$, entonces:

$$p(E / B) = \frac{p(E \cap B)}{p(B)} = \frac{p(E)}{p(B)}$$

Supóngase, además, que $B \subseteq E$, entonces, de acuerdo con el corolario **4)** del axioma de aditividad, se obtiene que $p(B / B) \leq p(E / E)$. Teniendo en cuenta, por otra parte, que:

$$p(B / B) = p[(\Omega \cap B) / B] = p(\Omega / B) = 1$$

será $p(E / B) \geq 1$. Pero, considerando que se trata de una probabilidad, debe ser $p(E / B) = 1$. De lo que se puede concluir que, en este caso, (E / B) define un evento cierto no sólo en probabilidad: la relación $p(E / B) = 1$ se deriva de la implicación lógica y no de las propiedades inherentes a las probabilidades y es válida cualesquiera sean las probabilidades de los eventos implicados (esta propiedad es válida, aún para $p(B) = 0$).

Supóngase, asimismo, que $E \cap B = \varnothing$, debe ser, entonces, $B \subseteq \overline{E}$ y, por lo tanto $p(\overline{E} / B) = 1$. Luego, será $p(E / B) = 0$ (nótese que esta propiedad también es válida aún cuando $p(B) = 0$).

d) Sea $\{E_1, E_2, ..., E_n, ...\}$ un conjunto de eventos incompatibles $((E_i \cap E_j) = \varnothing$, para $i \neq j; i, j = 1,2,....$), si $P(B) > 0$, se verificará que:

$$p\left[\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) / B\right] = \frac{p\left[\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \cap B\right]}{p(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p(E_i \cap B)}{p(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} p(E_i / B)$$

e) Sea $\{E_1, E_2, ..., E_n, ...\}$ un conjunto de eventos incompatibles, tales que $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \supset B$. Como

---

obtener una bolilla blanca al realizar una extracción al azar es $p = \dfrac{a}{a+c}$. J. Bernoulli fue el primero en tratar el esquema inverso: la estimación de los valores a y c basándose en la evidencia empírica que proporcionan los resultados de las extracciones sucesivas. En 1764 ("*An essay toward solving a problem in the doctrine of chances*") apareció la solución propuesta por Th. Bayes al problema de la inversión de la probabilidad a que se hace mención en el texto. Este tema será tratado con detalle en los capítulos 11 y 13.

consecuencia del principio de aditividad numerable y de la fórmula de la probabilidad compuesta, se verifica que:

$$p(B) = p\left[B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)\right] = \sum_{i=1}^{\infty} p(B \cap E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p(E_i) p(B / E_i)$$

(la interpretación subjetivista de esta expresión implica admitir que el grado de creencia en la ocurrencia del evento B es igual a la suma ponderada de los grados de creencia asignados a las distintas formas en que B podría ocurrir).

f) Sea $\{E_1, E_2, ..., E_n, ...\}$ una sucesión monótona de eventos que converge hacia E, $\lim_{n\to\infty} E_n = E$, con $p(E) > 0$. Entonces, será:

$$\lim_{n\to\infty} p(B / E_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{p(B \cap E_n)}{p(E_n)}$$

Ahora bien, por el teorema de continuidad, resulta que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(B \cap E_n)}{p(E_n)} = \frac{p\left[\lim_{n\to\infty}(B \cap E_n)\right]}{p\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right)} = \frac{p(B \cap E)}{p(E)} = p(B / E)$$

Por lo que queda demostrado que:

$$\lim_{n\to\infty} p(B / E_n) = p(B / E)$$

3.1.6.- La relación de independencia estocástica

Como consecuencia de la definición de probabilidad condicionada, se puede concluir que la condición necesaria y suficiente para que los eventos E_1 y E_2 sean estocásticamente independientes es que $p(E_2 / E_1) = p(E_2)$, siendo $p(E_1) > 0$.

Debe tenerse en cuenta que, como se mencionó en la Sec. 3.1.4, para Kolmogorov, la diferencia fundamental entre la probabilidad y la teoría de la medida radica en la formalización y aplicación del concepto de independencia estocástica de los eventos: "*Históricamente la independencia de eventos y de variables aleatorias es la noción matemática que proporciona a la teoría de la probabilidad su característica peculiar*" (Kolmogorov, A.N. (1933)). En realidad, esta noción asume distintas interpretaciones, según cuál sea el concepto de probabilidad adoptado. Como se vio en el Cap.2, la concepción clásica considera a la independencia como una circunstancia válida en casi todos los casos y la interpretación frecuencista la introduce como una propiedad natural de los eventos repetibles. En términos de la interpretación subjetivista la independencia estocástica de E_1 con respecto a E_2 implica que la información acerca de la presunta ocurrencia de E_1 no influye sobre la asignación de la probabilidad correspondiente a la ocurrencia de E_2.

A partir de la fórmula de la probabilidad compuesta, esta propiedad (conocida como **de la independencia de orden-2**) puede ser expresada como:

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1)p(E_2) \; .$$

La expresión natural de la definición de independencia estocástica **de orden-3**, formalmente, sería:

$$p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = p(E_1)p(E_2)p(E_3)$$

Ahora bien -aunque parezca intuitivamente poco aceptable-, que tres eventos satisfagan la relación de independencia no implica necesariamente que dos cualesquiera de ellos sean independientes entre sí (es decir, que la independencia de orden-3 no implica la independencia de orden-2).

La condición de independencia estocástica entre tres eventos implica la verificación simultánea de las relaciones:

$$\begin{aligned}
&p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = p(E_1)p(E_2)p(E_3)\\
&p(E_1 \cap E_2) = p(E_1)p(E_2)\\
&p(E_1 \cap E_3) = p(E_1)p(E_3)\\
&p(E_2 \cap E_3) = p(E_2)p(E_3)
\end{aligned}$$

Debe tenerse en cuenta, por otra parte, que el cumplimiento de las tres últimas igualdades tampoco implica necesariamente la verificación de la primera relación (es decir, que la independencia de orden-2 tampoco implica la independencia de orden-3).

En general, dada una sucesión finita o infinita numerable de eventos, $\{E_1, E_2, ..., E_n, ...\}$, se dice que los eventos componentes son **independientes de orden-k** si, para todo conjunto de $k\,(>1)$ eventos, $\{E_{j1}, E_{j2}, ..., E_{jk}\}$, se verifica que:

$$p(E_{j1} \cap E_{j2} \cap ... \cap E_{jk}) = p(E_{j1})p(E_{j2})...p(E_{jk})$$

De las relaciones precedentes se puede concluir que la independencia estocástica no es una propiedad intrínseca de los eventos, sino que depende, también, en forma esencial, de la asignación de las probabilidades y, por lo tanto, encierra un carácter subjetivo.

Como corolario de las definiciones anteriores se obtiene inmediatamente que, dados dos eventos, E_1 y E_2, estocásticamente independientes, se verificará que:

$$\begin{aligned} p\left(E_1 \cap \overline{E}_2\right) &= p\left(E_1\right) - p\left(E_1 \cap E_2\right) = \\ &= p\left(E_1\right) - p\left(E_1\right)p\left(E_2\right) = \\ &= p\left(E_1\right)\left[1 - p\left(E_2\right)\right] = p\left(E_1\right)p\left(\overline{E}_2\right) \end{aligned}$$

Es decir que, si E_1 y E_2 son estocásticamente independientes, entonces, E_1 y $\overline{E}_2$ también lo son.

En general, dada una sucesión $\{E_1, E_2, ..., E_n, ...\}$ de eventos estocásticamente independientes, se demuestra que:

$$\begin{aligned} & p\left(\overline{E}_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n\right) = \\ &= p\left(E_2 \cap E_3 \cap ... \cap E_n\right) p\left[\overline{E}_1 / \left(E_2 \cap ... \cap E_n\right)\right] = \\ &= p\left(E_2 \cap E_3 \cap ... \cap E_n\right)\left\{1 - p\left[E_1 / \left(E_2 \cap ... \cap E_n\right)\right]\right\} = \\ &= p\left(E_2 \cap E_3 \cap ... \cap E_n\right)\left[1 - \frac{p\left(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n\right)}{p\left(E_2 \cap E_3 \cap ... \cap E_n\right)}\right] = ... = \\ &= p\left(E_1\right)p\left(E_2\right)...p\left(E_n\right)\left[1 - p\left(E_1\right)\right] = \\ &= p\left(\overline{E}_1\right)p\left(E_2\right)...p\left(E_n\right) \end{aligned}$$

De lo que se concluye que los eventos $\overline{E}_1, E_2, ..., E_n$ también son independientes. Esta propiedad es, a su vez, inmediatamente generalizable a cualquier conjunto de eventos del tipo $\overline{E}_1, \overline{E}_2, ..., \overline{E}_s, E_{s+1}, ..., E_n$ $(s = 1,2,...,n)$ para el cual se verifica que:

$$p\left(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap ... \cap \overline{E}_s \cap E_{s+1} \cap ... \cap E_n\right) = p\left(\overline{E}_1\right)p\left(\overline{E}_2\right)...p\left(\overline{E}_s\right)p\left(E_{s+1}\right)...p\left(E_n\right)$$

De las demostraciones anteriores se puede concluir en consecuencia que, dado un conjunto de eventos estocásticamente independientes $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ con probabilidades respectivas $p_1, p_2, ..., p_n$, la probabilidad de ocurrencia de cualquier arreglo de los mismos puede ser expresada en función de las probabilidades de los eventos singulares $p\left(E_i\right)$ $(i = 1,2,...,n)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & p\left(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap ... \cap E_{i_h} \cap \overline{E}_{i_{h+1}} \cap ... \cap \overline{E}_{i_n}\right) = \\ &= p\left(E_{i1}\right)p\left(E_{i2}\right)...p\left(E_{ih}\right)\left[1 - p\left(E_{i,h+1}\right)\right]...\left[1 - p\left(E_{in}\right)\right] \end{aligned}$$

Un caso particularmente interesante se presenta cuando los eventos E_i $(i = 1,2,...,n)$ son equiprobables. Haciendo $p(E_i) = p$ y $1 - p(E_i) = q$, la probabilidad de cualquier composición de los n eventos dados puede ser definida como $p^h q^{n-h}$. Luego, la probabilidad de un evento E definido como la unión de todas los arreglos de los n eventos, en las cuales los eventos contrarios ($\overline{E}$) sean $(n-h)$, estará dada por la suma de tantos sumandos de la forma $p^h q^{n-h}$ como posibles ordenamientos admitan los n eventos dados:

$$p(E) = p\left[\bigcup_i \left(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap ... \cap E_{i_h} \cap \overline{E}_{i_{h+1}} \cap ... \cap E_{i_n}\right)\right] = \binom{n}{h} p^h q^{n-h}$$

(donde, de acuerdo con la nomenclatura introducida por L. Euler, "*Commentarii Academiæ Scientiarum Imperialis Petropolitanæ*", vol. 4 (1741), $\binom{n}{h} = \dfrac{n!}{h!(n-h)!} = P_n^{h,n-h}$ denota el coeficiente binomial). Esta expresión define la probabilidad de que, dados n eventos independientes y equiprobables con probabilidad p , ocurran h (sin importar en qué orden).

Se agregan a continuación algunos ejemplos típicos en los libros de texto a fin de aclarar los alcances de las definiciones anteriores.

Ejemplo nº 3.1:

Supóngase un fenómeno cuyo comportamiento eventual sea el que resulta de arrojar tres monedas clásicas. Su espacio muestral será:

$$\Omega = \{(C,C,C);(C,C,X);(C,X,C);(X,C,C);(C,X,X);(X,C,X);(X,X,C);(X,X,X)\}$$

Sean los eventos:

$$E_1 : obtener\ al\ menos\ dos\ veces\ el\ resultado\ "cara"$$
$$E_2 : obtener\ un\ numero\ par\ de\ resultados\ "cara"$$
$$E_3 : obtener\ el\ resultado\ "ceca"\ en\ la\ primera\ moneda$$

Las probabilidades respectivas, calculadas como la relación entre el número de resultados favorables a cada evento y el número total de resultados posibles, serán:

$$p(E_1) = p[(C,C,X) \cup (C,X,C) \cup (X,C,C) \cup (C,C,C)] = \frac{1}{2}$$
$$p(E_2) = p[(X,X,X,) \cup (C,C,X) \cup (C,X,C) \cup (X,C,C)] = \frac{1}{2}$$

$$p(E_3) = p[(X,C,C) \cup (X,C,X) \cup (X,X,C) \cup (X,X,C)] = \frac{1}{2}$$

De la misma forma, se obtiene que:

$$p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = p(X,C,C) = \frac{1}{8}$$

Es decir, se verifica que:

$$p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = p(E_1)p(E_2)p(E_3)$$

Pero, también se verifica que:

$$p(E_1 \cap E_2) = p[(C,C,X) \cup (C,X,C) \cup (X,C,C)] = \frac{3}{8} \neq p(E_1)p(E_2)$$

$$p(E_1 \cap E_3) = p(X,C,C) = \frac{1}{8} \neq p(E_1)p(E_3)$$

$$p(E_2 \cap E_3) = p[(X,C,C) \cup (X,X,X)] = \frac{1}{4} = p(E_2)p(E_3)$$

Es decir que, de las relaciones correspondientes a la condición de independencia estocástica de orden-2, se verifica sólo una. De lo que se puede concluir que los tres eventos, aún satisfaciendo la relación de independencia de orden-3:

$$p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = p(E_1)p(E_2)p(E_3)$$

no son independientes de orden-2.

Ejemplo nº 3.2:

Supóngase un fenómeno cuyo comportamiento eventual sea el que resulta de lanzar dos dados clásicos. Sean los eventos:

E_1: *obtener un numero par en el primer dado*

E_2: *obtener un numero par en el segundo dado*

E_3: *obtener en ambos dados resultados tales que la suma de los puntos sea un numero par*

A partir de la relación entre el número de resultados favorables a cada evento y el número total de resultados posibles, se obtienen las siguientes probabilidades:

$$p(E_1) = p(E_2) = p(E_3) = \frac{1}{2}$$

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1 \cap E_3) = p(E_2 \cap E_3) = \frac{1}{4}$$

$$p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{1}{4} \neq p(E_1)p(E_2)p(E_3)$$

Estos resultados demuestran que los eventos son independientes de orden-2, pero no son independientes de orden-3.

Ejemplo nº 3.3:

Sean dos urnas, una de las cuales contiene 3 bolillas de distintos colores (una blanca, una roja y una negra), y la otra contiene 4 bolillas, de las cuales 3 son iguales a las de la primera urna y la cuarta es amarilla. Se extrae una bolilla al azar de cada una de las urnas. Denotando por $B_1, R_1, N_1, B_2, R_2, N_2, A_2$ a los eventos asociados a dicho experimento, y suponiendo una hipótesis de equiprobabilidad para las extracciones de cada una de las urnas, se obtiene que:

$$p(B_1) = p(R_1) = p(N_1) = \frac{1}{3}$$

$$p(B_2) = p(R_2) = p(N_2) = p(A_2) = \frac{1}{4}$$

Sean, ahora, los eventos $E_1 = B_1 \cup R_1$ y $H_1 = B_1 \cup N_1$. De acuerdo con el axioma de aditividad, será $p(E_1) = p(H_1) = \frac{2}{3}$ y, por lo tanto $p(E_1)p(H_1) = \frac{4}{9}$. Por otra parte, se obtiene en forma inmediata que $E_1 \cap H_1 = B_1$, de modo que:

$$p(E_1 \cap H_1) = \frac{1}{3} \neq p(E_1)p(H_1)$$

De lo que se concluye que E_1 y H_1 no son eventos independientes.

Procediendo en forma análoga con la segunda urna y definiendo los eventos $E_2 = B_2 \cap R_2$ y $H_2 = B_2 \cap N_2$, se obtiene que $p(E_2) = p(H_2) = \frac{1}{2}$ y, por lo tanto, que $p(E_2)p(H_2) = \frac{1}{4}$. Por otra parte, se verifica que:

$$p(E_2 \cap H_2) = p(B_2) = \frac{1}{4} = p(E_2)p(H_2)$$

De lo que se concluye que los eventos E_2 y H_2 son independientes (aún teniendo en común al evento B_2).

Todo esto confirma lo expresado en las páginas precedentes, en cuanto que distintas asignaciones de probabilidades ($p(B_1)$, $p(R_1)$, $p(N_1) \neq p(B_2)$ $p(R_2)$, $p(N_2)$, $p(A_2)$) hacen que dos situaciones similares desde el punto de vista físico den lugar a conclusiones diferentes, confirmando que la independencia estocástica no debe ser considerada como una propiedad inherente sólo al concepto de evento.

Sea, ahora, el evento $G_2 = B_2 \cap A_2$. Dado que $E_2 \cap H_2 \cap A_2 = B_2$ y que $p(G_2) = p(E_2) =$ $= p(H_2) = \frac{1}{2}$, se tiene que:

$$p(E_2 \cap H_2 \cap G_2) = p(B_2) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = p(E_2)p(H_2)p(G_2)$$

De lo que se concluye que los eventos E_2 , H_2 y G_2 , aún siendo independientes de orden-2, no son independientes de orden-3.

Ejemplo nº 3.4:

Sea un dispositivo formado por n partes componentes dispuestas en paralelo, de modo que el funcionamiento del sistema está garantizado por el funcionamiento de por lo menos una de ellas, y sea p la probabilidad de fallar de cada una de las partes componentes en el término de un año.

Supóngase que, a fin de estudiar su confiabilidad, se realice un relevamiento sobre un conjunto de estos dispositivos, tomando en consideración sólo aquéllos en los que, en el término de un año, ha fallado por lo menos una parte componente. Denotando por H al evento "*que falle por lo menos una parte componente*" y por E_j al evento "*que fallen* $j\ (= 1,2,...,n)$ *componentes*", se obtiene que $E_j \subseteq H\ (j = 1,2,...,n)$. Luego, la probabilidad de que en un dispositivo en observación fallen, en el término de un año, $j\ (= 1,2,...,n)$ partes componentes está dada por:

$$p(E_j / H) = \frac{p(E_j)}{p(H)} = \frac{\binom{n}{j} p^j q^{n-j}}{1-(1-p)^n} \qquad (j = 1,2,...,n)$$

Ejemplo nº 3.5:

Sea $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ un conjunto de eventos estocásticamente independientes con probabilidades respectivas $p_1, p_2, ..., p_n$ y sea $p(S_j)\ (j = 1,2,...,n)$ la probabilidad de que ocurra un número par de eventos menor o igual que j. Se puede escribir, entonces:

$$p(S_1) = p(\textit{que no ocurra el evento } E_1) = 1 - p_1$$

$$p(S_2) = p\Big[\big(\textit{que no ocurra el evento } E_1 \textit{ ni el evento } E_2\big) \cup$$
$$\cup \big(\textit{que ocurran ambos eventos}\big)\Big] =$$
$$= (1 - p_1)(1 - p_2) + p_1 p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - 2p_1)(1 - 2p_2) =$$
$$= p(S_1)(1 - p_1) + \left[1 - p(S_1)\right] p_2$$

$$p(S_3) = p\Big[\big(\textit{que no ocurra el evento } E_1 \textit{ ni el evento } E_2 \textit{ ni el evento } E_3\big) \cup$$
$$\cup \big(\textit{que ocurran dos de los tres eventos}\big)\Big] =$$
$$(1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) + p_1 p_2 (1 - p_3) + p_1 (1 - p_2) p_3 + (1 - p_1) p_2 p_3 =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - 2p_1)(1 - 2p_2)(1 - 2p_3) =$$
$$= p(S_2)(1 - p_3) + \left[1 - p(S_2)\right] p_3$$

En general, será:

$$p(S_{2j}) = (1 - p_1)(1 - p_2)\ldots(1 - p_{2j}) +$$
$$+ \left[p_1 p_2 (1 - p_3)\ldots(1 - p_{2j}) + \ldots + (1 - p_1)(1 - p_2)\ldots(1 - p_{2j-2}) p_{2j-1} p_{2j}\right] +$$
$$+ \left[p_1 p_2 p_3 p_4 (1 - p_5)\ldots(1 - p_{2j}) + \ldots + (1 - p_1)(1 - p_2)\ldots(1 - p_{2j-4}) p_{2j-3} p_{2j-2} p_{2j-1} p_{2j}\right] +$$
$$+ \ldots + p_1 p_2 \cdots p_{2j}$$

$$p(S_{2j+1}) = (1 - p_1)(1 - p_2)\ldots(1 - p_{2j+1}) +$$
$$+ \left[p_1 p_2 (1 - p_3)\ldots(1 - p_{2j+1}) + \ldots + (1 - p_1)(1 - p_2)\ldots(1 - p_{2j-1}) p_{2j} p_{2j+1}\right] +$$
$$+ \left[p_1 p_2 p_3 p_4 (1 - p_5)\ldots(1 - p_{2j+1}) + \ldots + (1 - p_1)\ldots(1 - p_{2j-3}) p_{2j-2} p_{2j-1} p_{2j} p_{2j+1}\right] +$$
$$+ \ldots + \left[p_1 p_2 \cdots p_{2j}(1 - p_{2j+1}) + \ldots + (1 - p_1) p_2 p_3 \cdots p_{2j+1}\right]$$

3.1.7.- Algunos problemas clásicos

A fin de resumir los postulados del sistema axiomático de Kolmogorov, sus corolarios y sus teoremas asociados, se incluye a continuación una selección de problemas que figuran en los tratados clásicos de teoría de la probabilidad mencionados en el Cap. 1.

3.1.7.1.- El problema de la división de las apuestas o del valor de un juego

Sean A y B dos jugadores que convienen en jugar una serie de partidas que finalizará cuando uno de los dos haya ganado en n oportunidades. Suponiendo que las probabilidades de A y B de ganar una partida sean, respectivamente, p y $q = 1 - p$, ¿de qué forma deberían dividirse las apuestas si, por alguna causa accidental, la serie se interrumpiera cuando a A le restan ganar n_A partidas y a B, n_B partidas?

Sea $p\left[G_A / (n_A, n_B)\right]$ la parte de la apuesta total que correspondería a A (o, según la nomenclatura de Huygens, el "*valor del juego*" o la "*expectativa*" del jugador A) si el juego se interrumpiera cuando a A le restan ganar n_A partidas y a B le restan ganar n_B partidas para ganar el juego. Si la apuesta total fuera igual a uno, entonces el valor del juego para el jugador A se identificaría con la probabilidad de que A ganara el juego, calculada al momento de la interrupción.

Esta probabilidad es una función que depende exclusivamente del número de partidas que le restan a A para ganar el juego. Se puede concluir fácilmente que A ganará el juego si gana las siguientes n_A partidas, o si gana n_A de las siguientes $n_A + 1$ partidas, con la condición de que la última sea ganada por A, o si gana n_A de las siguientes $n_A + 2$ partidas, con la misma condición, y así sucesivamente. El número máximo de partidas en el que A puede ganar el juego es $n_A + n_B - 1$. En consecuencia, la probabilidad de que A gane el juego en $n_A + x$ partidas, estará dada por la probabilidad de que gane $n_A - 1$ de las primeras $n_A + x - 1$ partidas, multiplicada por la probabilidad de que gane la $(n_A + x)$ -ésima partida, es decir, será igual a:

$$\left[\binom{n_A + x - 1}{x} p^{n_A - 1} q^x\right] p = \frac{(n_A + x - 1)!}{x!(n_A - 1)!} p^{n_A - 1} q^x$$

Luego, la probabilidad de A de ganar el juego, será:

$$\begin{aligned} p\left[G_A / (n_A, n_B)\right] &= \\ &= p^{n_A} + \binom{n_A}{1} p^{n_A} q + \binom{n_A + 1}{2} p^{n_A} q^2 + \ldots + \binom{n_A + n_B - 2}{n_B - 1} p^{n_A} q^{n_B - 1} = \\ &= p^{n_A} \sum_{j=0}^{n_B - 1} \binom{n_A + j - 1}{j} q^j \end{aligned}$$

Como generalización de este problema, sea un conjunto de k jugadores, $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$, a los cuales les resta ganar, respectivamente, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n)$ partidas para ganar el juego. Supóngase que las probabilidades de cada uno de los jugadores de ganar una partida sean, respectivamente, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ $(p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1)$. El número máximo de partidas en el que A_1 puede ganar el juego es:

$$n_1 + (n_2 - 1) + (n_3 - 1) + \ldots + (n_k - 1) = n - k + 1$$

La probabilidad de que A_1 gane el juego en $n_1 + x = n_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k$ $(x_i = 0,1,2,\ldots n-1;$ $i = 2,3,\ldots,k)$ partidas (donde x_i representa el número de partidas ganadas por A_i en las $n_i + x$ partidas), está dada por:

$$\left[\frac{(n_1 + x - 1)!}{(n_1 - 1)!x_2!x_3!\ldots x_k!} p_1^{n_1 - 1} p_2^{x_2} p_3^{x_3} \ldots p_k^{x_k}\right] p_1$$

Luego, la probabilidad de A_1 de ganar el juego, calculada al momento de la interrupción, será:

$$p[G_1 / (n_1, n_2, \ldots, n_k)] = p_1 \sum_{j_2=0}^{n_2-1} \sum_{j_3=0}^{n_3-1} \ldots \sum_{j_k=0}^{n_k-1} \frac{(n_1 + j_2 + j_3 + \ldots + j_k - 1)!}{(n_1 - 1)! j_2! j_3! \ldots j_k!} p_2^{j_2} p_3^{j_3} \ldots p_k^{j_k}$$

Este problema que, como se mencionó en la Sec. 1.3, aparece por primera vez en la literatura en "*Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalitá*" (1494) de Fr. Luca Paciolo, se conoció también como **problema de los puntos** dado que, en vez de contar el número de partidas, puede adjudicarse al ganador de cada partida un cierto número de puntos y efectuar el recuento del número de puntos que le restan para ganar. G. Cardano ("*Pratica arithmeticæ et mensurandi singularis*" (1539)), N. Tartaglia ("*General trattato di numeri e misure*" (1556)), G.B. Peverone ("*Due brevi e facili trattati, il primo d'arithmetica, l'altro di geometria*" (1558)) y L. Forestani ("*Practica d'arithmetica e geometria*" (1603)) desarrollaron distintos intentos de solución, Pascal y de Fermat hallaron soluciones para el caso particular en que $p = q = \frac{1}{2}$. La solución general se debe a P.R. de Montmort ("*Essai d'analyse sur les jeux de hazard*" (1708)), Johann Bernoulli (correspondencia con P.R. de Montmort, 1710) y A. De Moivre ("*De mensura sortis, seu, de probabilitate eventuum in ludis a casu fortuito pendentibus*" (1712))[372].

3.1.7.2.- El primer problema de Huygens[373]

Sean A y B dos jugadores que convienen en jugar una serie de partidas que finalizará cuando A obtenga el resultado E_A o B obtenga el resultado E_B. La serie de partidas está

---

372. La solución desarrollada en esta sección se debe a A. De Moivre ("*Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*" (1730)). De las fechas que figuran en los comentarios que figuran en las obras respectivas, se puede concluir que las soluciones generales a los problemas tratados en esta sección son posteriores al desarrollo del cálculo combinatorio, cuyos orígenes se remontan a la construcción del triángulo aritmético de coeficientes por los matemáticos hindúes, árabes, chinos y persas del siglo XII, cuyo desarrollo se encuentra en las contribuciones de N. Tartaglia, G. Cardano, Michael Stifel, M. Mersenne y B. Pascal, y su culminación en los trabajos de John Wallis, I. Newton. G. Leibniz y Jakob Bernoulli.

373. Los siguientes tres problemas que figuran en la Sec. 3.1.7 forman parte de las llamadas catorce proposiciones de Huygens y están incluídos en su "*De ratiotiniis in ludo aleae*" (1657). Este primer problema, en particular, fue formulado por P. de Fermat (1656).

organizada de la siguiente forma: A realiza el primer intento, luego B realiza dos intentos, luego A realiza dos intentos, y así sucesivamente. Suponiendo que la probabilidad de A de obtener el resultado E_A en un intento dado sea p_A, y la probabilidad de B de obtener el resultado E_B sea p_B, ¿cuál es la probabilidad de A de ganar el juego?

Denotando por $p(A_i)$ $(i = 1,2,...)$ la probabilidad de que A gane el juego en su i-ésimo intento, será:

$$p(A_1) = p(E_A) = p_A$$
$$p(A_2) = p\left[\left(\overline{E}_A \cap \overline{E}_B \cap \overline{E}_B \cap E_A\right) \cup \left(\overline{E}_A \cap \overline{E}_B \cap \overline{E}_B \cap \overline{E}_A \cap E_A\right)\right] =$$
$$= q_A q_B^2 p_A + q_A^2 q_B^2 p_A$$
$$p(A_3) = p\left[\left(\overline{E}_A \cap \overline{E}_B \cap \overline{E}_B \cap \overline{E}_A \cap \overline{E}_A \cap \overline{E}_B \cap \overline{E}_B \cap E_A\right) \cup\right.$$
$$\left.\cup \left(\overline{E}_A \cap \overline{E}_B \cap \overline{E}_B \cap \overline{E}_A \cap \overline{E}_A \cap \overline{E}_B \cap \overline{E}_B \cap \overline{E}_A \cap E_A\right)\right] =$$
$$= q_A^3 q_B^4 p_A + q_A^4 q_B^4 p_A$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Luego, la probabilidad de que A gane el juego estará definida por la serie geométrica[374]:

$$p(A) = p_A\left(1 + q_A q_B^2 + q_A^2 q_B^2 + q_A^3 q_B^4 + q_A^4 q_B^4 + \ldots\right) =$$
$$= p_A\left[\left(1 + q_A^2 q_B^2 + q_A^4 q_B^4 + \ldots\right) + \left(q_A q_B^2 + q_A^3 q_B^4 + q_A^4 q_B^5 + \ldots\right)\right] =$$
$$= p_A\left(1 + q_A^2 q_B^2\right)\left(1 + q_A^2 q_B^2 + q_A^4 q_B^4 + \ldots\right) =$$
$$= \frac{p_A\left(1 + q_A^2 q_B^2\right)}{1 - q_A^2 q_B^2}$$

En particular, para $p_A = p_B = p$, se obtiene que:

$$p(A) = \frac{p\left(1 + q^3\right)}{1 - q} = 1 - q + q^3 - q^5 + q^7 - \ldots$$

Una generalización de este problema consiste en suponer que la serie de partidas está organizada de la siguiente forma: A realiza k_1 intentos, luego B realiza k_2 intentos, luego A realiza k_3 intentos, y así sucesivamente. La probabilidad de que A gane en su primer intento será:

---

374. Solución debida a Jakob Bernoulli ("*Quæstiones nonullæ de usuris, cum solutione problematis de sorte alearum*" (1690)).

$$p\left(A_1\right) = p + pq + pq^3 + ... + pq^{k_1-1} = \left(1-q\right)\sum_{j=0}^{k_1-1} q^j = 1 - q^{k_1}$$

La probabilidad de A de ganar en el segundo intento, será:

$$p\left(A_2\right) = q^{k_1+k_2}\left(1 - q^{k_2}\right)$$

En general, la probabilidad de A de ganar en el i-ésimo intento será:

$$p\left(A_i\right) = q^{k_1+k_2+...+k_{i-1}}\left(1 - q^{k_i}\right)$$

Luego, la probabilidad de A de ganar el juego estará dada por[375]:

$$p\left(A\right) = 1 - q^{k_1} + q^{k_1+k_2} - q^{k_1+k_2+k_3} + q^{k_1+k_2+k_3+k_4} - ...$$

Entre los muchos trabajos que abordaron la solución de los problemas de Huygens cabe mencionar, a modo de curiosidad, una publicación de 1687 ("*Reeckening van Kaasen*") atribuida, según la opinión -muy controvertida- de algunos autores, al filósofo flamenco Benedictus (o Baruch) Spinoza.

3.1.7.3.- El segundo problema de Huygens

Sean A, B y C tres jugadores que extraen sucesivamente, en ese orden y sin reposición, una bolilla de una urna que contiene X bolillas blancas e Y bolillas negras ($X + Y = N$), ganando el juego aquel jugador que obtuviere la primera bolilla blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que A gane el juego?

Teniendo en cuenta la forma en que están ordenadas las extracciones, la probabilidad de que A gane en su primera intervención será $p\left(A_1\right) = \frac{X}{N}$. La probabilidad de que A gane en la segunda intervención, será:

$$p\left(A_2\right) = \frac{Y}{N}\frac{Y-1}{N-1}\frac{Y-2}{N-2}\frac{X}{N-3} = \frac{\frac{Y!}{\left(Y-3\right)!}}{\frac{N!}{\left(N-3\right)!}}\frac{X}{N-3}$$

La probabilidad de que A gane en la tercera intervención, será:

---

375. Resultado debido a P.R. de Montmort ("*Essai d'analyse sur les jeux de hazard*" (1713)).

$$p(A_3) = \frac{Y}{N}\frac{Y-1}{N-1}\frac{Y-2}{N-2}\frac{Y-3}{N-3}\frac{Y-4}{N-4}\frac{Y-5}{N-5}\frac{X}{N-6} = \frac{\frac{Y!}{(Y-6)!}}{\frac{N!}{(N-6)!}}\frac{X}{N-6}$$

En general, la probabilidad de que A gane en la j-ésima intervención, será:

$$p(A_j) = \frac{\frac{Y!}{[Y-3(j-1)]!}}{\frac{N!}{[N-3(j-1)]!}}\frac{X}{N-3(j-1)} \qquad \left(j = 1,2,\dots,\left[\frac{Y}{3}\right]\right)$$

(donde $\left[\frac{Y}{3}\right]$ denota el menor entero mayor que $\frac{Y}{3}$). Luego, la probabilidad de que A gane el juego estará dada por:

$$p(A) = \sum_{j=1}^{[Y/3]} p(A_j)$$

3.1.7.4.- El quinto problema de Huygens o problema de la duración de un juego o de la ruina de los jugadores[376]

Sean A y B dos jugadores -que cuentan con m y n fichas, respectivamente- quienes convienen en jugar una serie de partidas de acuerdo con las siguientes reglas: cada vez que se presente el resultado E (con probabilidad p), B le debe entregar a A una ficha y, viceversa, cada vez que se presente el resultado $\overline{E}$ (con probabilidad $q = 1 - p$), B debe recibir de A una ficha, resultando ganador aquel jugador que primero logre poseer todas las fichas. ¿Cuál es la probabilidad de que A gane el juego?.

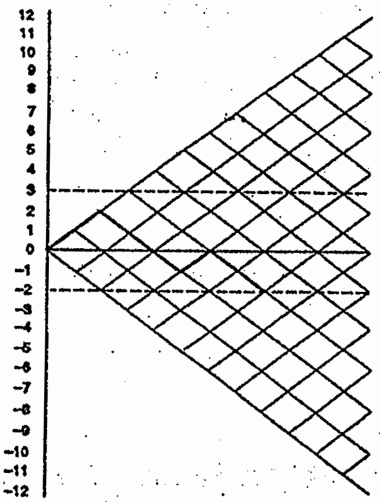
Al cabo de cada partida, si ocurre el resultado E, A gana una ficha (a costa del patrimonio de B) y, si ocurre el resultado $\overline{E}$, pierde una ficha (es decir, su ganancia será igual a -1). La **Figura 3.3** muestra la evolución de la ganancia de A. En el eje de abcisas está representado el número de orden de cada partida, y en el eje de ordenadas la ganancia neta de A al cabo de cada partida. Las ordenadas pueden asumir los valores comprendidos entre las ganancias mínima ($-m$) y máxima (n) de A (el juego finalizará cuando la ordenada asuma por primera vez alguno de estos dos valores)[377].

---

[376]. Este problema fue propuesto por Pascal a de Fermat en 1654 y llegó a conocimiento de Huygens a través del matemático francés P. de Carcavi, amigo íntimo de Pascal.

[377]. C. Huygens ("*De ratiotiniis in ludo aleæ*" (1656)) y J. Hudde ("*Epistolæ duæ, quarum altera de æquationum, altera de maximis et minimis agit*" (1665)) obtuvieron soluciones particulares para $m = n$ y $m = 1,2,3,4,5,6$. En 1710,

Figura 3.3



Supóngase que, al cabo de un cierto número de partidas, A cuente con X fichas ($A(X)$) y, por lo tanto, que B cuente con ($n+m-X$) fichas ($B(n+m-X)$), al cabo de una nueva partida A poseerá, con probabilidad p,$(X+1)$ fichas ($A(X+1)$) (y, en consecuencia, B poseerá $(n+m-X-1)$ fichas, $B(n+m-X-1)$) o, con probabilidad q,A poseerá $(X-1)$ fichas ($A(X-1)$) (y B contará con $(n+m-X+1)$ fichas, $B(n+m-X+1)$).

Luego, denotando por $p[A(X)]$ a la probabilidad de que A gane el juego, si cuenta con X fichas, se obtiene fácilmente que:

$$p[A(0)] = 0$$
$$p[A(X)] = p\,p[A(X-1)] + q\,p[A(X+1)] \qquad (X = 1,2,\ldots,n+m-1)$$
$$p[A(m+n)] = 1$$

De esta expresión resulta que:

P. de Montmort obtuvo una solución para $p=q$, luego generalizada por N. Bernoulli (correspondencia con P. de Montmort).

$$p[A(X+1)]-p[A(X)]=\frac{q}{p}\{p[A(X)]-p[A(X-1)]\}=\left(\frac{q}{p}\right)^{X}p[A(X)]$$

Luego, la probabilidad de que A gane el juego estará dada por:

$$p(A)=\sum_{X=0}^{nm1}\{p[A(X+1)]-p[A(X)]\}=p[A(1)]\sum_{X=0}^{m-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{X}=$$

$$=p[A(1)]\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m}}{1-\frac{q}{p}}$$

Pero, teniendo en cuenta que:

$$p[A(m+n)]=p[A(1)]=\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}}{1-\frac{q}{p}}=1$$

se obtiene que:

$$p[A(1)]=\frac{1-\frac{q}{p}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}}$$

y, por lo tanto que[378]:

$$p[A(m)]=\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}}$$

Otra cuestión interesante con respecto a este problema es la determinación de la duración esperada del juego (expresada en número de partidas). Como ya se vio, si al cabo de k (≥ 0) partidas la ordenada es igual a X, al cabo de $k+1$ partidas esta ordenada tomará los valores $X+1$ (con

---

[378]. Esta solución se debe a N. Struyck ("*Uytreekening der Kansen in het speelen, door de Arithmetica en Algebra, beneevens eene Verhandeling van Looterijen en Interest*" (1716)).

probabilidad p) ó $X-1$ (con probabilidad q). Supóngase, en particular, que $p = q = \frac{1}{2}$. Se observa, entonces, que al cabo de k partidas, la duración esperada del juego ($A^*(X_k)$) no depende de k sino del valor de la ordenada (si se verifica, por ejemplo, que $X_k = n$ ó $X_k = m$, la duración esperada del juego será igual a cero). Para cada $X = m+1, m+2, \ldots, n-2, n-1$ será:

$$A^*(X) = 1 + \frac{1}{2}\left[A^*(X+1) + A^*(X-1)\right]$$

A partir de esta expresión se demuestra que:

$$A^*(X) = (-X+m)(X-n) = -X^2 + (n-m)X + mn$$

Obsérvese que, en particular, la duración esperada inicial del juego está dada por el producto de las fortunas iniciales de A y de B, $A^*(0) = mn$. En general se demuestra que la duración esperada del juego, al cabo de una partida dada, será igual al producto de las fortunas de los jugadores, en ese momento.

Sean, por otra parte, dos puntos (P_1 y P_2) con ordenadas positivas en el gráfico correspondiente a la evolución de la ganancia de A (ver **Figura.3.4**). Sea Y_1 la ordenada del punto P_1 y sea P_1' un punto con la misma abcisa y ordenada $-Y_1$. Se observa que a cada recorrido $\Re$ del proceso que une a los puntos P_1 y P_2 y que "toca" o corta el eje de abcisas en un punto P^*, le corresponde uno, y sólo un recorrido $\Re'$ que une a los puntos P_1' y P_2, y que es tal que: **i)** coincide con $\Re$ en el tramo (P^*, P_2) y **ii)** el tramo (P_1', P^*) se obtiene trasladando verticalmente el tramo (P_1, P^*) de $\Re$. Viceversa, dado que todo recorrido $\Re'$, que une P_1' con P_2, debe cortar el eje de abcisas (es decir, dado que existirá siempre un paso en el cual $\Re'$ asumirá una ordenada igual a cero en un punto de abcisa P^*), si se traslada verticalmente el tramo (P_1', P^*), a $\Re'$ le corresponde uno, y sólo un recorrido que une a los puntos P_1 y P_2 y "toca" al eje de abcisas en el punto P^*. Este planteo (conocido como el **razonamiento de Desiré André**) permite concluir que existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de recorridos que unen a los puntos P_1 y P_2 y que asumen, por lo menos en un punto la ordenada cero, y el conjunto de todos los recorridos que unen a los puntos P_1' y P_2.

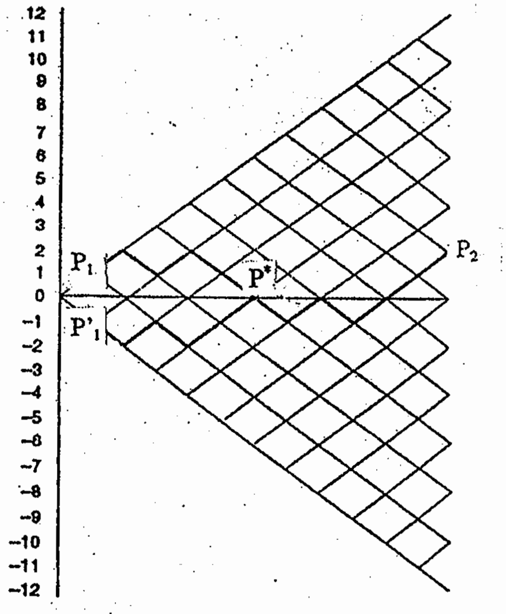
Aplicando este razonamiento al **punto de ruina** P_r (es decir, trasladando el eje de abcisas al punto $X = P_r$)[379], se obtiene un procedimiento que permite resolver, en forma simple, otra

---

[379]. El punto de ruina de un jugador está dado por una cantidad que define una ganancia máxima o una ganancia mínima prefijadas.

cuestión relacionada con el problema de la ruina: la determinación de la probabilidad de que el juego finalice en menos de k partidas. Se obtiene, inmediatamente, que el número de recorridos que terminarían en k partidas y que cortan al eje $X = P_r$ (en la hipótesis que, teóricamente, el juego continúa después de la ruina) es igual al número de recorridos que "tocan" al eje $X = P_{kr}$ al menos

Figura 3.4



una vez, pero no lo cortan. Luego, la probabilidad de que el juego finalice antes de la k -ésima partida (es decir, que la "ruina" de uno de los jugadores se produzca antes de la k -ésima partida) puede ser expresada como:

$$p(\Re_k) = 2p(X_k > P_{kr}) + p(X_k = P_r)$$

3.1.7.5.- El problema de J. Bernoulli sobre el juego de pelota[380]

Si bien el juego al que hace referencia Bernoulli se rige por reglas mucho más complicadas, su mecanismo de asignación de puntaje es asimilable al tenis. A fin de simplificar su tratamiento, se conviene en que por cada juego ganado se le asignará al vencedor un punto (en vez de utilizar la puntuación 0, 15, 30, 40,"gana"). Se considerará que un jugador ha ganado un "game", cuando haya

[380]. Este problema constituye el apéndice al "*Ars conjectandi*" (1713), titulado "*Lettre a un ami sur les parties du jeu de paume*".

obtenido 4 puntos, con 2 puntos de ventaja sobre su adversario. Si en un "game" cada uno de los contendientes contara con 3 puntos, se considerará ganador a aquel jugador que primero logre 2 puntos de diferencia sobre su adversario.

Sean los jugadores A y B. Supóngase que la probabilidad de A de ganar un juego sea p, y la probabilidad de B de ganar un juego sea $q = 1 - p$. Denotando por $p[A(i,j)]$ a la probabilidad de A de ganar el "game", si cuenta con i puntos y B cuenta con j puntos, se obtiene que:

$$p[A(i,j)] = p\,p[A(i+1,j)] + q\,p[A(i,j+1)]$$

De modo que, por ejemplo:

$$\begin{aligned} p[A(3,3)] &= p\,p[A(4,3)] + q\,p[A(3,4)] = \\ &= p\{p\,p[A(5,3)] + q\,p[A(4,4)]\} + q\{p\,p[A(4,4)] + q\,p[A(3,3)]\} \end{aligned}$$

Si se tiene en cuenta que $p[A(5,3)] = 1$, $p[A(3,5)] = 0$ y $p[A(4,4)] = p[A(3,3)]$, resulta que:

$$p[A(3,3)] = p^2 + 2pq\,p[A(3,3)]$$

es decir, que:

$$p[A(3,3)] = \frac{p^2}{p^2+q^2} = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^2}{\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 1}$$

De la misma forma, se obtienen, por ejemplo:

$$p[A(2,3)] = p\,p[A(3,3)] + q\,p[A(2,4)] = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^3}{\left(\frac{p}{q}\right)^3 + \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{p}{q} + 1}$$

$$\begin{aligned} p[A(3,2)] &= p\,p[A(4,2)] + q\,p[A(3,3)] = \\ &= p + \frac{pq^2}{p^2+q^2} = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^3 + \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{p}{q}}{\left(\frac{p}{q}\right)^3 + \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{p}{q} + 1} \end{aligned}$$

$$p[A(1,3)] = p\,p[A(2,3)] + q\,p[A(1,4)] = p[A(2,3)] =$$

$$= \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^4}{\left(\frac{p}{q}\right)^4 + 2\left(\frac{p}{q}\right)^3 + 2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{p}{q} + 1}$$

$$p[A(2,2)] = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^4 + 3\left(\frac{p}{q}\right)^3 + \left(\frac{p}{q}\right)^2}{\left(\frac{p}{q}\right)^4 + 2\left(\frac{p}{q}\right)^3 + 2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{p}{q} + 1}$$

$$p[A(1,2)] = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^5 + \left(\frac{p}{q}\right)^4 + \left(\frac{p}{q}\right)^3}{\left(\frac{p}{q}\right)^5 + 3\left(\frac{p}{q}\right)^4 + 4\left(\frac{p}{q}\right)^3 + 4\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{p}{q} + 1}$$

$$p[A(0,0)] = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^7 + 5\left(\frac{p}{q}\right)^6 + 11\left(\frac{p}{q}\right)^5 + 15\left(\frac{p}{q}\right)^4}{\left(\frac{p}{q}\right)^7 + 5\left(\frac{p}{q}\right)^6 + 11\left(\frac{p}{q}\right)^5 + 15\left(\frac{p}{q}\right)^4 + 5\left(\frac{p}{q}\right)^3 + 11\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 5\frac{p}{q} + 1}$$

P. de Montmort ("*Essai d'analyse sur les jeux de hazard*" (1713)) obtuvo una solución general para este problema, considerándolo como una derivación del problema de la duración del juego. Denotando por $\pi[A(i,j)]$ a la probabilidad de que A gane el juego cuando le restan ganar i puntos y a B le restan ganar j puntos ($p[A(i,j)] = \pi[A(4-i,4-j)]$), expresó la solución de la siguiente forma:

$$\pi[A(i,j)] = \sum_{h=1}^{i+j-2} \binom{i+j-2}{h} p^h q^{i+j-h} + \frac{p^2}{p^2+q^2} \binom{i+j-2}{i-1} p^{i-1} q^{j-1}$$

3.1.7.6.- El vigésimo problema de J. Bernoulli[381]

Sean $A, B_1, B_2, \ldots$ y B_{k-1} k jugadores que convienen en jugar una partida de Bock, de acuerdo con las siguientes reglas: Se utilizará en el juego una baraja formada por n cartas, subdivididas en s grupos de h cartas numeradas de 1 a h cada uno. Cada uno de los jugadores

381. Este es uno de los veinticuatro problemas incluídos por J. Bernoulli en la Parte III de su "*Ars conjectandi*".

$B_1, B_2, ..., B_{k-1}$ realizará una apuesta. El jugador que oficia de "banca" (A) distribuirá una carta a cada uno de sus $k-1$ adversarios y una a sí mismo. Si la carta de A fuere mayor o igual que la del jugador B_i $(i = 1,2,...,k-1)$, entonces ganará la apuesta de éste, en caso contrario deberá pagar a B_i una cantidad similar. El jugador A continuará en su condición de "banca" en tanto venza a todos sus adversarios en una jugada. ¿Cuál es la probabilidad de que A continúe ejerciendo su función de "banca" al cabo de una jugada?

Para $k = 2$, la probabilidad de A de seguir siendo "banca" será igual a la probabilidad simple de obtener en la distribución, una carta mayor o igual a la de su adversario. Existen $C_n^2 = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!}$ formas posibles de extraer dos cartas de la baraja, y existe $h\binom{s}{2}$ formas posibles de extraer dos cartas del mismo número. Luego, el número de formas de extraer dos cartas de distinto número será $\binom{n}{2} - h\binom{2}{2}$ y el número de formas de extraer dos cartas de modo que la carta de A sea mayor que la de su adversario, será $\frac{1}{2}\left[\binom{n}{2} - h\binom{s}{2}\right]$. Finalmente, el número de resultados favorables a A -es decir, el número de formas de adjudicar las cartas de manera que la del jugador A sea mayor o igual a la de su adversario- estará dada por:

$$\frac{1}{2}\left[\binom{n}{2} - h\binom{s}{2}\right] + h\binom{s}{2} = \frac{sh}{4}(sh + s - 2)$$

De modo que, la probabilidad de que A le gane el juego a B -es decir, la probabilidad de que A continúe en su condición de "banca"- será:

$$p(A) = \frac{\frac{1}{2}\left[\binom{n}{2} - h\binom{s}{2}\right] + h\binom{s}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{sh + s - 2}{2(sh - 1)}$$

J. Bernoulli resolvió, en particular, el caso para $k = 3$ y $s = 4$. El número total de formas posibles de extraer 3 cartas de la baraja está dado por $\binom{n}{3} = \binom{4h}{3} = \frac{4}{3}h(8h^2 - 6h + 1)$. Estos resultados posibles pueden ser clasificados de la siguiente forma: **i)** el conjunto formado por tres cartas con la misma numeración, cuya medida está dada por $h\binom{4}{3} = 4h$; **ii)** el conjunto formado por dos cartas iguales y la tercera de numeración distinta, cuya medida está dada por

$h\binom{4}{2}\binom{4h-4}{1} = 24h(h-1)$ y **iii)** el conjunto formado por tres cartas de distinta numeración, cuya medida puede ser calculada como la diferencia entre el número total de resultados posibles y el número de resultados correspondientes a las clases **i)** y **ii)**:

$$\binom{n}{3} - h\binom{4}{3} - h\binom{4}{2}\binom{4h-4}{1} = \frac{2}{3}h\left(16h^2 - 48h + 32\right)$$

Ahora bien, se puede concluir fácilmente que: **a)** todos los resultados de la clase **i)** son favorables al evento "*que A siga ejerciendo la condición de 'banca'*"; **b)** los resultados de la clase **ii)**, pueden ser divididos en dos subgrupos: uno en el que la tercera carta es de número mayor que la carta repetida, y otro en el que aquélla es de número menor que la carta repetida; **c)** si se da uno cualquiera de los resultados pertenecientes al primer subconjunto, A seguirá cumpliendo la función de "banca"; **d)** de los resultados del segundo subconjunto, sólo en $\frac{2}{3}$ de los casos A no será vencido por sus dos adversarios, es decir, que en un $\frac{1}{3}$ de los casos (aquéllos en los que le corresponda la carta distinta) perderá la condición de "banca"; **e)** el número de resultados de la clase **ii)** favorables al evento "*que A continúe ejerciendo la condición de 'banca'*" será, entonces $12h(h-1) + 8h(h-1)$; **f)** el número de formas en que se pueden distribuir 3 cartas distintas, está dado por $P_3 = 3! = 6$ y que, de esas 6 formas, sólo 4 son "favorables" a la continuación de A como "banca", de modo que el número de casos favorables a la continuación de A como "banca" entre los resultados de la clase **iii)** estará dado por $\frac{4h\left(16h^2 - 3h - 4\right)}{9}$. Luego, la probabilidad de que A continúe ejerciendo funciones de "banca" al cabo de una partida, para el caso en que $k = 3$ y $s = 4$, será[382]:

$$p(A) = \frac{16h^2 - 3h - 4}{3\left(8h^2 - 6h + 1\right)}$$

3.1.7.7.- El décimo-octavo problema de De Moivre o problema de la ocupación[383]

Supóngase que se realiza una serie de n tiradas en igualdad de condiciones de un dado

382. La solución de Bernoulli fue generalizada por R. Haussner ("*Wahrscheinlichkeitsrechnung von Jakob Bernoulli*" (1899)).

383. Tradicionalmente, bajo la denominación genérica de problemas de ocupación se reunieron todas aquellas cuestiones analizables en términos de una distribución aleatoria de bolillas en un conjunto de casilleros (por ejemplo, muestras de población clasificadas en distintas categorías, distribución del número de accidentes en los días de la semana). Estos problemas fueron tratados por P.R. de Montmort ("*Essai d'analyse sur les jeux de hazard*" (1708)). En particular, el problema al cual se hace referencia en el texto fue propuesto por F. Robartes a A. De Moivre, quien lo incorporó a su "*De mensura sortis, seu, de probabilitate eventuum in ludis casu pendentibus*" (1711).

clásico de h caras (numeradas de 1 a h) ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos una vez un conjunto de k resultados determinados?

En el caso particular en que $k = 1$, denotando por B_1 al evento "*no obtener ninguna vez el resultado '1'*", se obtiene que:

$$p(B_1) = p(b_1 \cap b_1 \cap .. \cap b_1) = p(b_1)p(b_1)...p(b_1) = \frac{(h-1)^n}{h^n} = \frac{A_{h-1,n}}{A_{h,n}}$$

(donde b_i denota el evento "*obtener un resultado distinto de '1' en la i-ésima tirada*" y $A_{i,j} = i^j$ denota el número de arreglos de i elementos con repetición de j). Luego, la probabilidad de obtener por lo menos una vez el resultado "1", estará dada por:

$$p(\overline{B}_1) = 1 - p(B_1) = 1 - \left(1 - \frac{1}{h}\right)^n$$

Para $k = 2$, el evento contrario al evento "*obtener por lo menos una vez los resultados '1' y '2', en las n tiradas*" (B_{12}), puede ser expresado como la unión de los siguientes eventos:

$$\begin{array}{l} b_{12} \cap b_{12} \cap .. \cap b_{12} \\ 1 \cap b_{12} \cap b_{12} \cap .. \cap b_{12} \\ 1 \cap 1 \cap b_{12} \cap .. \cap b_{12} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 1 \cap 1 \cap 1 \cap .. \cap 1 \\ 2 \cap b_{12} \cap b_{12} \cap .. \cap b_{12} \\ 2 \cap 2 \cap b_{12} \cap .. \cap b_{12} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 2 \cap 2 \cap 2 \cap .. \cap 2 \end{array}$$

(donde b_{12} denota el evento "*obtener un resultado distinto de '1' y de '2', en una tirada cualquiera*"). De modo que:

$$p(B_{12}) = \frac{1}{A_{h,n}}\left[A_{h-2,n} + \left(A_{h-1,n} - A_{h-2,n}\right) + \left(A_{h-1,n} - A_{h-2,n}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{A_{h,n}}\left(2A_{h-1,n} - A_{h-2,n}\right)$$

Luego, la probabilidad de obtener, al menos una vez, los resultados "1" y "2", será:

$$p\left(\overline{B}_{12}\right)=1-p\left(B_{12}\right)=1-2\left(1-\frac{1}{h}\right)^{n}+\left(1-\frac{2}{h}\right)^{n}$$

Denotando por $B_{1,2,\ldots,k}$ al evento contrario al evento "*obtener por lo menos una vez los resultados '1', '2',..., 'k' en las n tiradas*", la expresión anterior puede ser generalizada de la siguiente forma[384]:

$$p\left(\overline{B}_{1,2,\ldots,k}\right)=1-p\left(B_{1,2,\ldots,k}\right)=\frac{1}{A_{h,n}}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\binom{k}{j}A_{h-j,n}=$$
$$=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\binom{k}{j}\left(1-\frac{j}{n}\right)^{n}$$

3.1.7.8.- El problema de las rachas[385]

Sea una serie de n pruebas, cada una de las cuales admite sólo dos resultados posibles: E, cuya probabilidad de ocurrencia es igual a p, y $\overline{E}$, cuya probabilidad de ocurrencia es igual a $q=1-p$ ¿Cuál es la probabilidad de obtener por lo menos una racha del resultado E, de longitud mayor o igual que k? (es decir, la probabilidad de obtener por lo menos una sucesión ininterrumpida de al menos k resultados E).

Se denotará por $b_{k,n}$ $(n=k,k+1,k+2,\ldots)$ al evento "*que la primera racha de longitud k se verifique en la n-ésima prueba*". De modo que, por ejemplo, para $k=2$, se obtienen las siguientes probabilidades:

$$p\left(b_{2,2}\right)=p^{2}$$
$$p\left(b_{2,3}\right)=qp^{2}=q\,p\left(b_{2,2}\right)$$
$$p\left(b_{2,4}\right)=q^{2}p^{2}+qp^{3}=q\,p\left(b_{2,3}\right)+qp\,p\left(b_{2,2}\right)$$
$$p\left(b_{2,5}\right)=q^{3}p^{2}+2q^{2}p^{3}=q\,p\left(b_{2,4}\right)+qp\,p\left(b_{2,3}\right)$$
$$p\left(b_{2,6}\right)=q^{4}p^{2}+3q^{3}p^{3}+q^{2}p^{4}=p\,p\left(b_{2,5}\right)+qp\,p\left(b_{2,4}\right)$$

....

Operando de la misma forma, para $k=3$, se obtiene que:

384. Una solución similar a ésta fue desarrollada contemporáneamente y en forma independiente a la de de Moivre, por N. Bernoulli ("*De usu artis conjectandi in jure*" (1709)).

385. Este problema fue formulado por A. de Moivre ("*The doctrine of chances*" (1718)).

$$p(b_{3,3}) = p^3$$
$$p(b_{3,4}) = qp^3 = q\,p(b_{3,3})$$
$$p(b_{3,5}) = q^2p^3 + qp^4 = q\,p(b_{3,4}) + qp\,p(b_{3,3})$$
$$p(b_{3,6}) = q^4p^2 + 2q^3p^3 + q^2p^4 = q\,p(b_{3,5}) + qp\,p(b_{3,4}) + qp^2\,p(b_{3,3})$$
$$p(b_{3,7}) = q^4p^3 + 3q^3p^4 = q\,p(b_{3,6}) + qp\,p(b_{3,5}) + qp^2\,p(b_{3,4})$$
....

En general, se obtiene la siguiente fórmula de recurrencia:

$$p(b_{k,n}) = q\,p(b_{k,n-1}) + qp\,p(b_{k,n-2}) + ... + qp^{k-1}\,p(k, n-k) \qquad (n = k, k+1, k+2, ...)$$

Luego, la probabilidad del evento:

$B_{k,n}$: *obtener por lo menos una racha de longitud* k,
al cabo de n *pruebas*

quedará definida de la siguiente forma:

$$p(B_{k,n}) = p(b_{k,k} \cup b_{k,k+1} \cup ... \cup b_{k,n}) = p(b_{k,k}) + p(b_{k,k+1}) + ... + p(b_{k,n})$$

$(n = k, k+1, k+2, ...)$.

3.2.- La axiomática frecuencista

3.2.1.- La aditividad finita

Como se vio en la Sec. 2.3, mediante la abstracción (o idealización) que permite representar en términos analíticos un colectivo empírico (finito) por un colectivo matemático (infinito) de la forma $C = \{w_1, w_2, ..., w_n, ...\}$ (donde $w_n \in \Omega$ $(n = 1,2,...)$), es posible establecer los siguientes axiomas de la teoría de la probabilidad:

1) Axioma de convergencia: Sea un atributo A de un colectivo C. Entonces se puede asegurar que el límite de la frecuencia relativa de la ocurrencia de dicho atributo en una sucesión de n observaciones repetidas en igualdad de condiciones:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n} = p(A / C)$$

existe.

Debe tenerse en cuenta que: **i)** estas probabilidades interpretadas como límite de una frecuencia relativa siempre son condicionadas por un colectivo empírico en particular, del cual el atributo A es uno de sus posibles resultados[386] y **ii)** el hecho que la noción de serie empírica no coincida con la de sucesión matemática (en la que la ley que determina unívocamente sus elementos es conocida), permite concluir que la convergencia de las frecuencias no es asimilable a la operación analítica de pase al límite.

En realidad, el límite de la frecuencia relativa no depende de la naturaleza de los eventos sino del orden en el cual estos ocurren: Supóngase una sucesión formada por "ceros" y "unos", si en el segmento final de la misma se produjera una frecuencia mayor de "unos", se obtendría un valor límite más alto (que podría llegar a ser muy próximo a 1) y, viceversa, si en el segmento final se concentrara una mayor frecuencia de "ceros", el límite sería menor (podría llegar a ser muy próximo a 0). Se podría decir que el límite de la frecuencia relativa es lógicamente independiente de las frecuencias observadas en el segmento inicial (tan largo como se quiera) de la sucesión. Si en el segmento inicial de la sucesión se sustituyeran los "unos" por "ceros" (o viceversa), el límite no variaría.

2) **Axioma de aleatoriedad o de irregularidad**[387]: El tratamiento de von Mises de la aleatoriedad constituye, indudablemente, la parte más original y más interesante de su teoría. Como se mencionó en la Sec. 2.3, el principio fundamental es que los elementos de los colectivos empíricos no deben guardar ningún orden, es decir, deben satisfacer alguna **ley de aleatoriedad** (imaginable solamente a partir del paradójico supuesto de existencia de un modelo matemático o una idealización que pudiera capturar algunas de las propiedades intuitivas asociadas a la aleatoriedad).

En una propuesta muy ingeniosa von Mises relaciona la aleatoriedad con la ausencia de los denominados **sistemas de juego**, consistentes en algún arbitrio capaz de aportar alguna información sobre la ocurrencia de un evento a partir de una evidencia dada (un sistema de juego en la ruleta, por ejemplo, debería ser interpretado como algo que permitiera aportar alguna información a la ocurrencia del resultado "color rojo" después de una racha de longitud k de resultados "color negro")[388]. Este postulado, conocido también como **ley de exclusión de los sistemas de juego,** requiere entonces, no sólo la estabilidad de las frecuencias relativas con respecto a ciertos resultados particulares, sinola invariancia de dichas frecuencias ante una selección, de acuerdo con alguna regla,

---

386. En las interpretaciones logicista, frecuencista y propensionalista el elemento condicionante de la probabilidad de una hipótesis está definido por algún conjunto dado de evidencias, En la interpretación subjetivista, el elemento condicionante está dado por el grado de creencia que posee el individuo-evaluador acerca de la ocurrencia del evento. La diferencia entre un cuerpo de evidencia o un colectivo y un grado de creencia es la que permite distinguir entre una interpretación objetivista y una interpretación epistemológica.

387. "*Regellosigkeitsaxiom*" (von Mises, R. (1928)).

388. von Mises, R. (1928): "*Los autores de tales sistemas, tarde o temprano, han experimentado la triste experiencia de que no existe ningún sistema capaz de mejorar sus chances de ganar en el largo plazo, por ejemplo, cambiar las frecuencias relativas correspondientes a los diferentes colores o números que aparecen en una sucesión seleccionada a partir de la sucesión general del juego*".

de una sucesión localizada de la sucesión original[389].

A fin de formular una versión de esta ley para los colectivos matemáticos de la cual se derive el segundo axioma del sistema de Kolmogorov, supóngase un colectivo matemático C con espacio de atributos Ω, que satisface el axioma de convergencia. Entonces, para un atributo $A \subseteq \Omega$, se verificará que:

$$p(A / C) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

Sea, ahora, una sucesión C' obtenida de aplicar una regla de selección localizada o sistema de juego al colectivo C. Se dice que esta selección es exitosa si se verifica que:

$$\lim_{n' \to \infty} \frac{n'(A)}{n'} = p(A / C') \neq \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n} = p(A / C)$$

(si se verifica que $p(A / C') > p(A / C)$, entonces el individuo-evaluador apostaría a favor de la ocurrencia A en la sucesión C', viceversa, si $p(A / C') < p(A / C)$, el individuo-evaluador apostaría en contra de la ocurrencia de A en la sucesión C').

A partir de estas definiciones se podría, entonces, formular una primera versión del axioma de aleatoriedad según la cual, para cualquier sucesión C' obtenida de la sucesión original C

389. El primer axioma es anterior a von Mises. Este segundo axioma es de su autoría. Con respecto a la obra de sus predecesores, von Mises, R. (1928) sostiene que: "*...sus intentos (...) no condujeron ni podrían conducir a una teoría completa de la probabilidad, porque ignoraron la consideración de una característica fundamental de un colectivo*". La característica a la que se refiere es la ausencia de orden, a partir del concepto generalizado que asimila aleatoriedad con desorden, impredecibilidad, irregularidad, ausencia de comportamiento estructural. Esta interpretación errónea conduce a la conocida como **paradoja de la aleatoriedad**, que puede ser resumida en el siguiente ejemplo: Sean tres sucesiones finitas de la forma 00000000000000000000000; 01101010000010011110011; 11011110011101011111011. De acuerdo con el criterio precedente, sólo las sucesiones segunda y tercera serán consideradas aleatorias, sin embargo, estas tres sucesiones y las $2^{23} - 3$ sucesiones restantes tienen la misma probabilidad, $\frac{1}{2^{23}}$, de ocurrir (en realidad sólo la tercera sucesión fue construida al azar a partir de los resultados obtenidos de arrojar repetidamente una moneda, la segunda sucesión representa el desarrollo binario de $\sqrt{2} - 1$). Se puede concluir, entonces, que resulta imposible clasificar a una sucesión finita como aleatoria o no-aleatoria, lo máximo a que se puede aspirar es a desarrollar una noción de **grado de aleatoriedad** (ver Apéndice 2). Por otra parte, dados el conjunto $\sum$, formado por todas las sucesiones binarias finitas y el conjunto $\sum^*$, formado por todas las sucesiones binarias, debe tenerse en cuenta que el concepto de sucesión aleatoria tiene sentido sólo con respecto a una distribución de probabilidades dada del conjunto $\sum^*$ (por ejemplo, una sucesión con el doble de "ceros" que de "unos" no sería considerada aleatoria si se supone que $p(1) = p(0) = \frac{1}{2}$, pero podría ser considerada aleatoria si $p(1) = \frac{1}{3}$ y $p(0) = \frac{2}{3}$). Ver Winefield, A.H. (1966), Gigerenzer, G.; Hell, G.; Blank, H. (1988), Uspenskii, V.A.; Semenov, A.; Shen, A.Kh. (1990), Ayton, P.; Hunt, A.; Wright, G. (1989)(1997), Rapoport, A.; Budescu, D. (1992), Kareev, Y. (1992), Wright, G.; Ayton, P. (eds.) (1994).

mediante la utilización de un criterio de selección localizada, la frecuencia relativa $\frac{n'(A)}{n}$ debe converger a $p(A / C)$.

Muchas críticas a la propuesta de von Mises se refieren, no sólo a sus argumentos basados en la noción inexacta o semimatemática de sistema de juego o selección localizada, sino a la noción, no especificada completamente, de **selección admisible**. Debe tenerse en cuenta que, de acuerdo con el llamado **argumento de Kamke**, aceptar reglas arbitrarias de selección implica generar una incompatibilidad entre el axioma de irregularidad y la definición de colectivo: Dada una sucesión $\{n_k\}_{k \geq 1}$ con $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, supóngase un criterio consistente en seleccionar arbitrariamente una secuencia $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots\}$. Si todas las secuencias son consideradas admisibles, entonces puede suceder que la secuencia seleccionada sea tal que $x_{n_k} = 1$ o $x_{n_k} = 0$ para todo k, de modo que, desconociendo los postulados del principio de Cournot, se podría asegurar que ninguna secuencia x podría ser considerada un colectivo.

Por otra parte, supóngase un atributo A con probabilidad no-nula. De acuerdo con la condición de estabilidad de las frecuencias, en un colectivo matemático, este atributo deberá ocurrir infinitas veces, de modo que si se selecciona una sucesión localizada, resultará que:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n'(A)}{n} = 1 \neq p(A / C)$$

y, por lo tanto, que el axioma de aleatoriedad no se verificará. Luego, se puede concluir que, excepto en los casos triviales en los que al atributo A le corresponde una probabilidad de ocurrencia nula o igual a la unidad, esta expresión del axioma de aleatoriedad convierte a la clase de los colectivos en un conjunto vacío. A fin de evitar esta restricción von Mises, R. (1928) propuso que el criterio para decidir si un cierto elemento de la sucesión original debe pertenecer o no a la sucesión surgida de la selección localizada, debería ser considerada independientemente del resultado de la observación correspondiente. El inconveniente que acarrea este criterio es que el axioma de estabilidad de las frecuencias no está referido a procedimientos prácticos relacionados con colectivos empíricos, sino a definiciones matemáticas relacionadas con colectivos matemáticos y una definición matemática debe elaborarse exclusivamente a partir de conceptos estrictamente matemáticos.

Fry, T.C. (1928) y Cantelli, F.P. (1935) plantearon esta objeción en términos formales estableciendo que sólo una formulación matemática precisa del axioma de aleatoriedad y su relación con la condición de independencia estocástica podría garantizar la consistencia de ambos axiomas y, en consecuencia, la consistencia de la teoría[390]. En respuesta a esta crítica von Mises demostró que, para todo colectivo C que satisfaga el axioma de aleatoriedad, la distribución binomial se verifica. Es decir que, dado un atributo A tal que $p(A / C) = p$, la probabilidad de que se presente $n(A)$

---

390. Es decir, la demostración formal que este principio es válido sólo cuando la sucesión está formada por elementos independientes (o intercambiables en la interpretación subjetivista), en otros términos, cuando es invariante con relación a las permutaciones de los elementos que componen la población (ver Sec. 3.3.10).

veces en los n elementos de C será $\binom{n}{n(A)} p^{n(A)}(1-p)^{n-n(A)}$. Lo que demuestra que aleatoriedad implica independencia.

Con respecto a esta respuesta de von Mises, dado que, de acuerdo con el axioma de convergencia se verifica que $p(A/C) = p = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}$, se puede asegurar que, dados un infinitésimo $\varepsilon > 0$ y un valor de n (n^*) suficientemente grande, se verificará que, para $n > n^*$, $\left|p - \frac{n(A)}{n}\right| \leq \varepsilon$. Ahora bien, considerando cualquier segmento finito de la sucesión inmediatamente siguiente a los primeros n^* elementos (n^*+1, $n^*+2,\ldots,n^*+r$), se puede concluir que existe una probabilidad $p^r > 0$ de que el atributo A se presente en las r repeticiones y, por lo tanto, que si la racha de ocurrencias de A es suficientemente larga, la diferencia $\left|p - \frac{n(A)}{n}\right|$ será mayor que ε. Lo cual les permitió demostrar a T.C. Fry y F.P. Cantelli que existe una probabilidad no-nula de que, para algún valor de $n > n^*$, se produzca una divergencia que contradice los postulados de la definición de límite y que existe una probabilidad no-nula de que la implicación postulada por von Mises, *aleatoriedad* $\Rightarrow$ *independencia*, no se verifique. Resultado que los condujo a la conclusión que la condición de independencia contradice el axioma de convergencia.

De acuerdo con von Mises, el origen de esta objeción se encuentra en la errónea interpretación del significado de la proposición "*la probabilidad de que el atributo A se presente en las repeticiones $n^*+1, n^*+2,\ldots,n^*+r$ de C es igual a p^r*". Al respecto, postula que, dada una sucesión de infinitos colectivos, $C^{(1)}, C^{(2)},\ldots,C^{(K)},\ldots$, generados utilizando un mecanismo de selección similar al empleado al construir el colectivo C, la frecuencia límite de aquéllos en los cuales el atributo A se presenta en las ocurrencias $n^*+1, n^*+2,\ldots,n^*+r$ será p^r, lo cual no es incompatible con el colectivo C, que no presenta al atributo A en todas esas ocurrencias. En consecuencia concluye que la contradicción planteada por Fry-Cantelli sólo se producirá si se postula no sólo que la frecuencia relativa de A converge a p en cada colectivo $C^{(i)}$, sino que dicha convergencia es uniforme sobre los colectivos $C^{(i)}$.

Si bien esta respuesta puede considerarse satisfactoria, el problema relacionado con la posibilidad real de formular matemáticamente un axioma de aleatoriedad que sea consistente con el axioma de convergencia permaneció. Con el fin de acotar el conjunto admisible de selecciones localizadas, Wald, A. (1937)[391] propuso una aproximación consistente no en tratar de definir una clase específica de sistemas de selección, sino en analizar de diferentes formas el efecto que produce el criterio de selección de dicha clase. Wald demostró que, si el conjunto de selecciones admisibles

---

391. Debe tenerse en cuenta que, entre los años 1919 y 1940, la teoría frecuencista de von Mises gozó de gran popularidad en el Círculo de Viena. Esta circunstancia hizo que muchos teóricos relacionados con el mismo (entre los que cabe mencionar a A. Church, A.H. Copeland, K. Dörge, W. Feller, E. Kamke, K.R. Popper, H. Reichenbach, E. Tornier, F. Waismann y A. Wald) se dedicaran al análisis de cuestiones vinculadas con la aleatoriedad.

es infinito numerable, entonces se puede asegurar que los colectivos existen. Es decir demostró que, para cualquier conjunto S infinito numerable de selecciones localizadas, el conjunto de los colectivos:

$$C(S,p) = \left\{ x \in \Sigma^N : \forall \Phi \in S, \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (\Phi x)_j = p \right\}$$

admite la cardinalidad del continuo[392].

Si bien la generalidad del resultado del teorema de Wald implica un alto grado de arbitrariedad en la elección de la clase de selecciones localizadas, debe tenerse en cuenta que (según lo señaló el mismo Wald): **i)** dado un problema en particular, el individuo-evaluador, en general, sólo toma en consideración un conjunto numerable de selecciones localizadas y **ii)** suponiendo que dicho individuo formule su teoría con respecto a un sistema lógico[393], en el ámbito de dicho sistema sólo dispone de un conjunto numerable de fórmulas y, por lo tanto, sólo puede definir un conjunto numerable de reglas matemáticas. A partir de esta última consideración Church, A.(1934)(1936a)(1936b) y Turing, A. (1936) propusieron un método de especificación más precisa de las selecciones localizadas, basado en la definición de **función computable** como una función de números naturales a números naturales cuyo valor para un "input" particular puede ser calculado en un intervalo de tiempo finito utilizando exclusivamente un método mecánico definido "a priori"[394]. A partir de esta propuesta Church concluyó que "*...un sistema de juego no debería ser representado matemáticamente como una función o como la definición de una función, sino como un algoritmo efectivo para el cálculo de los valores de una función*"[395].

Debe tenerse en cuenta que un sistema de juego no es sino una regla que indica, en cada jugada, si es conveniente apostar o no y que, por lo tanto, debe proporcionar instrucciones en un intervalo de tiempo finito, en estos términos se puede considerar a un sistema de juego como un cierto tipo de computadora en la que el individuo-evaluador, a partir de la introducción de los $n-1$ resultados obtenidos en las $n-1$ correspondientes repeticiones del juego, recibe la instrucción de apostar o no sobre un atributo en particular en la jugada siguiente, de modo que la aceptación de la tesis de Church implica definir una regla de juego en términos de funciones recursivas. Sea un

---

392. Los resultados de este teorema fundamental de Wald también figura sin demostración en un trabajo del mismo título, publicado en 1938 (reeditado en Wald, A. (1955)).

393. En el ejemplo de Wald, A. (1938) este sistema estaba representado por los "*Principia Mathematica*" de Russell, B.; Whitehead, A.N. (1931).

394. Esta es la famosa tesis de Church confirmada posteriormente por distintas formas alternativas de explicación del concepto de función computable basadas en diferentes aproximaciones (como la λ -definibilidad, las máquinas de Turing y los algoritmos de Markov). Como se verá en el Apéndice 2, además de esta interpretación de la aleatoriedad como sinónimo de estabilidad de las frecuencias debida a R. von Mises, A. Wald y A. Church, históricamente pueden reconocerse las interpretaciones de la aleatoriedad como sinónimo de "*irreducibilidad*" o "*caoticidad*" debidas a R. Solomonoff, A.N. Kolmogorov y G. Chaitin y como sinónimo de "*tipicalidad*", debidas a P. Martin-Löf (para un tratamiento integral y detallado sobre este particular, ver Ambos-Spies, K.; Kučera, A. (en Cholak, P. (ed.)(2000)), Calude, C.S. (1994), Li, M.; Vitányi, P. (1997), Muchnik, A.A.; Semenoff, A.L.; Uspenskii, V.A. (1998), Uspenskii, V.A.; Semenoff, A.L.; Shen, A.Kh. (1990), Dellacherie, C. (1978)).

395. Church, A. (1940).

colectivo $\{w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots\}$, donde los elementos pueden asumir solamente los valores 0 ó 1 y sea una selección localizada definida por una sucesión infinita de ceros y unos, $\{E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots\}$, donde $E_j = 1$ implica seleccionar el elemento w_j del colectivo original y $E_j = 0$ implica su rechazo. Se dice que $\{E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots\}$ constituye un **sistema de juego recursivo** o una **selección localizada recursiva**, si $E_j = \phi(b_j)$ (donde: **i)** $b_1 = 1$; **ii)** $b_{j+1} = 2b_j + w_j$ y **iii)** $\phi(.)$ denota una función recursiva de números naturales)[396] y si los elementos $E_j = 1$ son infinitos.

De acuerdo con esta definición es posible obtener una nueva formulación del axioma de aleatoriedad a partir de la ley de exclusión de sistemas de juegos recursivos: Sean: **i)** un colectivo C que satisface el axioma de convergencia; **ii)** un atributo $A \subseteq C$ para el cual se verifica que $p(A / C) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n} = p$ y **iii)** una sucesión C^*, elegida mediante la aplicación de una selección localizada. Entonces se verifica que, en C^*, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$ existe y es igual a p .

Luego, retornando a la propuesta de Wald, dado que sólo existe un conjunto numerable de sistemas de selecciones localizadas recursivas, de los postulados de su teorema se demuestra que existe un continuo infinito de colectivos, es decir de sucesiones no-computables en el sentido de Church-Turing. Se puede concluir entonces que los trabajos de Wald, Church y Turing proporcionaron una explicación formal a la noción intuitiva de selección localizada de von Mises y permitieron demostrar la consistencia de sus axiomas. En otros términos, dotaron a la teoría de von Mises de un fundamento matemático riguroso.

No obstante, debe tenerse en cuenta que estas conclusiones pueden ser consideradas completamente válidas en el ámbito de la matemática clásica, pero no en el ámbito de la interpretación constructivista de la matemática, según la cual sólo se puede asegurar que un objeto matemático existe si es posible establecer algún procedimiento para su construcción. De acuerdo con este criterio se puede concluir fácilmente que no es posible justificar la existencia de una sucesión aleatoria . Esta proposición se basa en la teoría de la **complejidad algorítmica**[397], según la cual la complejidad de una sucesión binaria puede ser medida como la longitud de la regla necesaria para generarla. De acuerdo con esta interpretación, se dice que una sucesión no es aleatoria si es posible definirla mediante un número finito de signos (es decir que, si la sucesión no cumple con el axioma de irregularidad, entonces es caracterizable en forma recursiva). Estas consideraciones teóricas conducen a una forma del teorema de Kurt Gödel que demuestra que no existe ningún algoritmo capaz de decidir si una sucesión dada es o no aleatoria, lo cual permite concluir que la propuesta de Wald-Church-Turing tampoco proporciona una caracterización estricta de la propiedad de irregularidad.

---

[396]. Las funciones recursivas son una clase de funciones de los naturales en los naturales que pueden ser calculadas utilizando el formalismo de cómputo conocido como máquina de Turing (ver Apéndice 2).

[397]. Ver Kolmogorov, A.N. (1961), Solomonoff, R. (1964), Chaitin, G. (1966). Ver, también, Landro, A.H.; González, M.L. (1997).

Reemplazando los eventos $E_1, E_2,...$ de la axiomática de Kolmogorov por los atributos $A_1, A_2,...$ y el evento cierto (E_C) por el espacio de atributos (A), suponiendo que se cumple el axioma de convergencia y teniendo en cuenta que $0 \leq \frac{n(A)}{n} \leq 1$ y que $\frac{n(\Omega)}{n} = 1$, se puede concluir que $0 \leq p(A) \leq 1$ y que $p(\Omega) = 1$. Es decir que, en términos clásicos (no-constructivistas), el segundo axioma de Kolmogorov puede ser derivado del axioma de convergencia de von Mises.

De la misma forma, reemplazando los eventos E_1 y E_2 en el axioma de aditividad de Kolmogorov por los atributos excluyentes A_1 y A_2, tales que $\frac{n(A_1 \vee A_2)}{n} = \frac{n(A_1)}{n} + \frac{n(A_2)}{n}$ y suponiendo que se cumple el axioma de convergencia, se obtiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(A_1 \vee A_2)}{n} = p(A_1 \cup A_2) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A_1)}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{n(A_2)}{n} = p(A_1) + p(A_2)$$

De lo que se puede concluir que el axioma de aditividad finita de Kolmogorov también puede ser derivado del axioma de convergencia.

Sea un número n seleccionado al azar y supóngase que en los primeros n elementos de C el atributo A_1 se presente $n(A_1)$ veces. Si A_1 se presenta sólo un número finito de veces en C, entonces la sucesión $(A_1 \; y \; C)$ estará formada por un número finito de elementos y, por lo tanto, no definirá un colectivo y, en consecuencia, se verificará que $p(A_1 / C) = 0$. Que $p(A_1 / C) \neq 0$ implica que, cuando $n \to \infty$, $n(A_1) \to \infty$. Pero la implicación inversa no tiene por qué verificarse necesariamente, podría suceder que A_1 se presentara un número infinito de veces y, aún así, resultara que $p(A_1 / C) = 0$, lo cual permite concluir que en el ámbito de la interpretación frecuencista es posible introducir probabilidades condicionadas por atributos de probabilidad nula.

Supóngase que en los primeros $n(A_1)$ elementos de C, el atributo A_2 se presente $n(A_2)$ veces, si el atributo $(A_1 \wedge A_2)$ se presenta $n(A_1 \wedge A_2)$ veces en los n primeros elementos de C, entonces $n(A_1 \wedge A_2) = n(A_2)$ y, por lo tanto, se obtiene que:

$$\lim_{n(A_1)\to\infty} \frac{n(A_2)}{n(A_1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A_1 \wedge A_2)}{n(A_1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(A_1 \wedge A_2)}{n}}{\frac{n(A_1)}{n}}$$

Luego, aplicando el axioma de convergencia al colectivo C, resulta que la probabilidad:

$$\lim_{n(A_1)\to\infty} \frac{n(A_2)}{n(A_1)} = p(A_2 / A_1)$$

existe y es igual a $\frac{p(A_1 \cap A_2)}{p(A_1)}$. Lo cual demuestra que la definición de probabilidad condicionada de Kolmogorov se deriva de la definición de probabilidad condicionada de von Mises. Teniendo en cuenta que A_1 y A_2 pertenecen a C, la probabilidad condicionada $p(A_2 / A_1)$ debe ser interpretada como $p(A_2 / A_1 \ y \ C)$, donde $(A_1 \ y \ C)$ es un colectivo formado seleccionando aquellos elementos de C que contienen el atributo A_1.

Sea g un sistema de juego que opera de la siguiente forma: supóngase que A_2 haya aparecido $n-1$ veces en el colectivo C entonces, a partir del valor de $g(n)$ se seleccionan o rechazan los elementos sucesivos de C hasta la nueva aparición de A_2, en ese momento el sistema de selección localizada pasará a $g(n+1)$ y así sucesivamente. Denotando por C^* el colectivo obtenido de la aplicación del sistema recursivo de selección g^*, resulta que el colectivo obtenido de la aplicación del sistema g es $(A_2 \ y \ C^*)$. Luego, aplicando el axioma de aleatoriedad a C se puede concluir que el límite de las frecuencias de $(A_2 \ y \ C^*)$ existe y es igual al límite de las frecuencias en $(A_2 \ y \ C)$ y, en consecuencia, que la expresión $\lim_{n(A_1)\to\infty} \frac{n(A_2)}{n(A_1)} = p(A_2 / A_1)$ es invariante con respecto a cualquier sistema recursivo de selección localizada aplicado al colectivo $(A_2 \ y \ C)$.

Como resumen de los resultados obtenidos en esta sección se puede concluir entonces que, considerando la restricción referida a la aditividad finita y limitando la validez de la defininición de probabilidad condicionada de von Mises al caso que $p(A_1 / C) \neq 0$, los axiomas de Kolmogorov se derivan de los axiomas de von Mises. Por otra parte, se comprueba fácilmente que el axioma de aleatoriedad sólo fue utilizado para verificar que el colectivo $(A_2 \ y \ C)$ es realmente un colectivo. Esto indica que la derivación de los axiomas de Kolmogorov de los axiomas de von Mises también se verificará si se elimina el axioma de aleatoriedad y se exige a los colectivos el cumplimiento del axioma de convergencia exclusivamente, lo cual implica que, irónicamente, el axioma al cual von Mises dedicó sus mayores esfuerzos no es tomado en cuenta en la axiomatización clásica.

3.2.2.- La aditividad numerable

De acuerdo con las consideraciones realizadas acerca de la interpretación frecuencista de la probabilidad, se puede concluir que la aditividad numerable no puede ser derivada de los axiomas de von Mises. A partir del principio según el cual un colectivo empírico finito puede ser representado en términos analíticos por un colectivo matemático infinito, sería necesario hallar un caso en el que un número finito, pero suficientemente grande de repeticiones, pudiera ser aproximado por una sucesión infinita. Supóngase, por ejemplo, el caso relacionado con la probabilidad de elegir al azar un número natural, j, tal que $1 \leq j \leq n$. Para valores de n suficientemente grandes se podría intentar una primera aproximación asimilando n a infinito, es decir, considerando un espacio de atributos infinito numerable, $\Omega = \{1,2,...,n,...\}$, para el cual se verificará que $p(j) = 0$. Si se supone el cumplimiento del axioma de aditividad numerable, será $p(\Omega) = p(1) + p(2) + ... + p(n) + ... = 0$, pero, de acuerdo con el **axioma 2** de Kolmogorov, $p(\Omega) = 1$. Esta inconsistencia demuestra que la aditividad numerable no siempre puede derivarse de colectivos que satisfacen los axiomas de aleatoriedad y de convergencia de von Mises[398].

Si se tiene en cuenta que toda interpretación filosófica de la probabilidad debe permitir la justificación completa del aparato matemático utilizado, esta contradicción respecto de la aditividad numerable constituye innegablemente una deficiencia de la interpretación frecuencista. von Mises intentó resolver esta limitación postulando la aditividad numerable como un tercer axioma[399]. Si bien, desde un punto de vista matemático, esta solución resolvió la inconsistencia, generó una contradicción con respecto a la justificación filosófica general de la interpretación frecuencista, según la cual cada axioma debe ser una abstracción matemática y una idealización de una ley empírica (condición que se cumple en los axiomas de aleatoriedad y convergencia)[400].

3.3.- La axiomática subjetivista

3.3.1.- La lógica de lo probable y la axiomática subjetivista

De acuerdo a los expresado en los capítulos anteriores, la explicación a obtener por un observador acerca del comportamiento de un fenómeno fáctico, será siempre incompleta, por lo que, inevitablemente, se verá obligado a construir inferencias en condiciones de incertidumbre. Obviamente, estas inferencias carecen de sentido en el dominio de la lógica de lo cierto, ya que no permiten caracterizar como cierto o imposible algo que para el observador aparece como posible pero eventual y que permanecerá en esa categoría sin importar en qué forma ni en qué medida varíe su conjunto de información. Las explicaciones de dicho observador se justifican solamente en el ámbito de la "*lógica de lo probable*"[401] en la que sus posibilidades se reducen a ponderar el rango de los resultados posibles, asignando a cada uno de estos una probabilidad, es decir, una evaluación cuantitativa de su grado de creencia racional -o idea similar- acerca de su ocurrencia (suponiendo que cualquier grado de incertidumbre puede ser representado en forma numérica).

---

398. Como se verá en la Sec. 3.3, de Finetti, B. (1936) coincide expresamente con von Mises en la imposibilidad conceptual de aceptar la condición de aditividad numerable (probablemente éste sea el único aspecto en el que coincidieron): "*...y, por último, destaco la coincidencia con respecto a un teorema particular: la extensión del teorema de las probabilidades totales a clases numerables, la cual cuenta con la aceptación de muchos autores, pero que no encuentra justificación ni en la teoría de von Mises ni en la mía*".

399. Ver von Mises, R. (1964a).

400. Como se vio en la Sec. 2.5, este defecto de la interpretación frecuencista puede ser superado a partir de la definición propensionalista de la probabilidad.

401. de Finetti, B. (1937).

Esta interpretación de la teoría de la probabilidad como "*lógica de lo incierto*"[402] constituye el núcleo de la interpretación subjetivista de F. Ramsey y B. de Finetti. De acuerdo con estos autores, la teoría de la probabilidad constituye una generalización de la lógica formal en la medida que las leyes de la probabilidad -como las de la lógica- son "*leyes de no-contradicción: (...) no restringen la libertad de nadie para atribuir un valor cualquiera a la probabilidad de ocurrencia de un evento cualquiera. Sólo se debe evitar que, al evaluar más de una probabilidad, dichas asignaciones sean contradictorias entre sí*"[403].

El objetivo fundamental de la interpretación subjetivista consistió en precisar la relación entre las condiciones de coherencia analizadas en la Sec. 2.5 y la probabilidad cuantitativa axiomatizada por Kolmogorov[404]. Debe tenerse en cuenta que, si bien Kolmogorov consideró a sus axiomas como el fundamento matemático de la interpretación frecuencista-propensionalista de la probabilidad, paradójicamente, su formalización los hizo susceptibles de una interpretación subjetivista[405].

Si bien las diferencias semánticas entre las axiomáticas de Kolmogorov y de Finetti son muy profundas, sintácticamente, la diferencia fundamental radica en que, mientras Kolmogorov identifica a la probabilidad como una medida en un espacio de conjuntos que proporciona una referencia a una teoría asociada de las variables aleatorias, de sus distribuciones de probabilidades y de sus valores esperados, de Finetti construye una teoría unificada de la probabilidad y del valor esperado (a la que denominó "*teoría de la previsión*")[406], la cual está caracterizada directamente como un operador lineal sobre funciones de cantidades[407].

A partir del concepto más general de probabilidad cualitativa comparativa ($\wp$) como representación de los grados de creencia que un individuo-evaluador asigna a la ocurrencia de un evento dado, la axiomática subjetivista está referida a las propiedades de una relación binaria estricta del tipo "es más probable que" o a su versión débil "es, al menos, tan probable como", referidas a conjuntos de proposiciones o eventos.

Se denotará por: **i)** $\wp(E_1) \succ \wp(E_2)$ a la relación "*el individuo evaluador considera que el evento E_1 es más probable que el evento E_2*"; **ii)** $\wp(E_1) \approx \wp(E_2)$ a la relación de equiprobabilidad comparativa, "*el individuo-evaluador considera que no existe una diferencia significativa entre las*

---

402. de Finetti, B. (1937).

403. de Finetti, B. (1970).

404. En de Finetti, B. (1949) figura un brillante análisis crítico acerca de la necesidad, conveniencia o utilidad de ciertos aspectos de la estructura axiomática de Kolmogorov. Las consideraciones de de Finetti se refieren no solamente a la función de probabilidades y sus propiedades, sino también al álgebra de eventos que constituye su dominio.

405. Ver de Finetti, B. (1949).

406. Ver Sec. 3.3.2.

407. Cabe destacar que la fascinación que provocó la formulación formalista-objetivista de Fréchet y Kolmogorov produjo la virtual desaparición de la interpretación subjetivista de los textos franceses sobre teoría de la probabilidad. En Inglaterra la tradición subjetivista utilitarista se mantuvo fundamentalmente en las obras de Good, I.J. (1950) y Lindley, D.V. (1965).

probabilidades de ocurrencia de los eventos E_1 *y* E_2"; **iii)** $\wp(E_1) \succeq \wp(E_2)$ a la relación "*el individuo evaluador considera que el evento* E_1 *es, al menos, tan probable como el evento* E_2". Como consecuencia inmediata de estas definiciones, se puede concluir que: **i)** si no se verifican las relaciones $\wp(E_1) \succ \wp(E_2)$ ni $\wp(E_2) \succ \wp(E_1)$, entonces, será $\wp(E_2) \approx \wp(E_1)$; **ii)** si se verifica la relación $\wp(E_1) \succ \wp(E_2)$ o $\wp(E_2) \approx \wp(E_1)$, entonces será $\wp(E_1) \succeq \wp(E_2)$; **iii)** si se verifican las relaciones $\wp(E_1) \succeq \wp(E_2)$ y $\wp(E_2) \succeq \wp(E_1)$, entonces será $\wp(E_2) \approx \wp(E_1)$ y **iv)** si se verifica la relación $\wp(E_1) \succeq \wp(E_2)$ y no se verifica que $\wp(E_2) \succeq \wp(E_1)$, entonces será $\wp(E_1) \succ \wp(E_2)$.

Una extensión inmediata de estas relaciones permite deducir que, cuando no se verifica ninguna de las relaciones $\wp(E_1) \succeq \wp(E_2)$ ni $\wp(E_2) \succeq \wp(E_1)$, se puede considerar que los eventos E_1 y E_2 son no-comparables en el sentido de Keynes, J.M. (1921) (obsérvese que la relación $\wp(E_1) \approx \wp(E_2)$ incluye la condición de comparabilidad, pero es indistinguible de la equiprobabilidad).

El conjunto sobre el cual están definidas las relaciones binarias $\succ$ y $\succeq$ define un álgebra $\Im$ de subconjuntos $E_1, E_2, \ldots$ de un dominio Ω. Según la notación utilizada precedentemente $E_i \in \Im$ define un evento y, para todo $E_i \in \Omega$, se verifica que $\varnothing \subseteq E_i \subseteq \Omega$ (donde $\varnothing$ denota el evento vacío o imposible)[408].

Como se mencionó en la Sec. 2.5, el término evento, tal como es interpretado en este contexto subjetivista, se refiere a un caso singular que, para un individuo que en ciertas circunstancias no puede asegurar su ocurrencia en forma cierta, es aleatorio (de modo que, en el ámbito de la interpretación subjetivista, la aleatoriedad no es considerada como una propiedad de los eventos, sino del conocimiento que el individuo posee de dichos eventos). Esta noción de evento no coincide con el concepto abstracto general de proposición de la interpretación clásica, la cual -de acuerdo con el sentido que le adjudican los lógicos- posee, incondicionalmente, la propiedad de ser verdadera o falsa. En la interpretación subjetivista la identificación entre eventos y proposiciones se logra a partir de una lógica trivalente.

De acuerdo con de Finetti, B. (1937), se dice que $\wp(\Omega)$ define una estructura de probabilidad cualitativa si, para cualquier conjunto de eventos $\{E_1, E_2, E_3\}$, se verifican los siguientes axiomas:

1) De asimetría: Si se verifica a que $\wp(E_1) \succ \wp(E_2)$, entonces no se verifica que $\wp(E_2) \succ \wp(E_1)$.

2) De no-trivialidad: El evento cierto es estrictamente más probable que el evento imposible, $\wp(\Omega) \succ \wp(\varnothing)$.

---

408. Las definiciones de evento-cierto y evento-imposible fueron tratadas en la Sec. 2.6.

3) De no-negatividad: Cualquier evento es débilmente más probable que el evento imposible $\wp(E) \succeq \wp(\varnothing)$.

4) De monotonicidad: Si se verifica que $E_1 \supseteq E_2$, entonces se verifica que $\wp(E_1) \succeq \wp(E_2)$.

5) De inclusión y monotonicidad: Si se verifica que $E_1 \supseteq E_2$ y que $\wp(E_2) \succ \wp(E_3)$ o que $\wp(E_1) \succ \wp(E_2)$ y que $E_2 \supseteq E_3$, entonces será $\wp(E_1) \succ \wp(E_3)$.

6) De transitividad: Si se verifica que $\wp(E_1) \succeq \wp(E_2)$ y $\wp(E_2) \succeq \wp(E_3)$, entonces, será $\wp(E_1) \succeq \wp(E_3)$.

7) De aditividad simple: Si se verifica que $\wp(E_1 \wedge E_3) = \varnothing$ y que $\wp(E_2 \wedge E_3) = \varnothing$, entonces, si $\wp(E_1) \succeq \wp(E_2)$, será $\wp(E_1 \vee E_2) \succeq \wp(E_2 \vee E_3)$ y viceversa.

8) De complementariedad: Si se verifica que $\wp(E_1) \succeq \wp(E_2)$, entonces no se verifica que $\wp(\overline{E}_1) \succeq \wp(\overline{E}_2)$ (donde $\overline{E}_1$ y $\overline{E}_2$ denotan los correspondientes eventos complementarios de E_1 y E_2).

De los axiomas **1)** y **2)**, se puede concluir que la relación $\succ$ determina un cierto ordenamiento (débil) de los eventos en $\Im$. En particular, Savage, L.J. (1954) considera a una relación $\succeq$ (o $\succ$) como capaz de generar una estructura de probabilidad cualitativa cuando satisface los axiomas de ordenamiento débil, no-trivialidad, no-negatividad y aditividad de deFinetti.

Como corolarios de los axiomas precedentes se obtiene fácilmente que:

i) Si se verifican las relaciones $\wp(E_1) \succ \varnothing$ y $\wp(E_1 \wedge E_2) = \varnothing$ entonces, será $\wp(E_2) \prec \wp(E_1 \vee E_2)$.

ii) Si se verifican las relaciones $\wp(E_1) \succeq \wp(E_2), \wp(E_3) \succeq \wp(E_4)$ y $\wp(E_1 \wedge E_3) = \varnothing$, entonces será $\wp(E_1 \vee E_3) \succeq \wp(E_2 \vee E_4)$.

iii) Si se verifican las relaciones $\wp(E_1 \wedge E_2) \succeq \wp(E_3 \wedge E_4)$ y $\wp(E_3 \wedge E_4) = \varnothing$, entonces será $\wp(E_1) \succeq \wp(E_3)$ o $\wp(E_2) \succeq \wp(E_4)$.

iv) Si se verifican las relaciones $\wp(E_1) \succeq \wp(\overline{E}_1)$ y $\wp(E_2) \preceq \wp(\overline{E}_2)$, entonces será $\wp(E_1) \succeq \wp(E_2)$.

El espíritu con que fue establecido este sistema de axiomas está relacionado con la necesidad, ya comentada, de fijar las condiciones necesarias para garantizar la existencia de una función real (p) del grado de incertidumbre sobre Ω tal que: **i)** $p(\Omega) = 1$; **ii)** dados dos eventos cualesquiera E_1 y E_2 (siendo $\wp(E_1), \wp(E_2) \in \Im$), se verifique que $p(E_1) > p(E_2)$ si, y sólo si $\wp(E_1) \succ \wp(E_2)$ y **iii)** dados des eventos E_1 y $E_2 \in \Omega$ tales que $p(E_1) \geq 0$ y $(E_1 \wedge E_2) = \varnothing$, se verifique que $p(E_1 \vee E_2) = p(E_1) + p(E_2)$.

Generalizando esta última condición, se puede concluir que, para garantizar la existencia de la función p es necesario que dados dos conjuntos finitos de eventos $E_1 = \{E_{11}, E_{12}, ..., E_{1n}\}$ y $E_2 = \{E_{21}, E_{22}, ..., E_{2n}\}$ tales que $\wp(E_1) \succ \wp(E_2)$, se verifique la relación $\sum_{i \in E_1} p(E_{1i}) > \sum_{i \in E_2} p(E_{2i})$. A partir de esta condición, conocida como de **aditividad finita**, se puede concluir que la cuestión central que dio origen al sistema de axiomas de de Finetti fue la definición de la forma a asumir por la relación "*mas probable que*"[409].

En el caso en que $\wp(\Omega)$ sea un conjunto finito, Kraft, Ch.; Pratt, J.W.; Seidenberg, A. (1959), Scott, D. (1964) y Krantz, D.H.; Luce, R.D.; Suppes, P.; Tversky, A. (1971) demostraron que las condiciones precedentes no son suficientes para asegurar el cumplimiento de la propiedad de aditividad. Dado un conjunto de eventos $E_{11}, E_{12}, ..., E_{1n}, E_{21}, E_{22}, ..., E_{2n} \in \Omega$ tales que $(E_{11}, E_{12}, ..., E_{1n}) \approx_0 (E_{21}, E_{22}, ..., E_{2n})$ (donde la relación $\approx_0$ indica que, para cada $1 \leq i \leq n$, el número de eventos E_{1j} que contiene i es igual al número de eventos E_{2j} que contiene i), es decir, dada una función-indicador de la forma:

$$\wp^{(i)}(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in E_i \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

(donde i denota un estado de $\Omega = \{1,2,...,n\}$), se demuestra que las sumas de probabilidades cualitativas para ambas sucesiones de eventos son iguales y, por lo tanto, que $\sum_{j=1}^{m} \sum_{i \in E_{1j}} p_i = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i \in E_{2j}} p_i$. En consecuencia, si se verifica la condición de aditividad finita y, además, que

409. de Finetti, B. (1949) obtuvo este resultado (conocido como **teorema de extensión**) casi contemporáneamente y en forma independiente de la demostración más restringida de Horn, A.; Tarski, A. (1948). En de Finetti, B. (1955a) figura un notable análisis de la estructura de la aditividad finita, desarrollado en forma independiente de los trabajos de Bochner, S. (1939), Sobczyk, A.; Hammer, P.C. (1944a)(1944b) el cual, en base a un coeficiente de divisibilidad apropiado, proporciona una descomposición de las probabilidades finitamente aditivas en: **i)** una parte componente **discreta** (masas concentradas en puntos de un conjunto numerable); **ii)** una parte componente **aglutinada** (concentrada en ultrafiltros que forman una clase numerable) y **iii)** una parte componente **continua** (indefinidamente divisible) que puede ser descompuesta, con respecto a una medida finitamente aditiva dada, en dos subcomponentes: uno **condensado** y otro **difuso** (absolutamente continuo). Esta memoria de de Finetti contiene, además, una demostración del teorema de Radon-Nikodým para medidas finitamente aditivas, basada en una extensión de la noción de función de concentración de Lorenz-Gini. Esta extensión de de Finetti de la definición de función de concentración es utilizada como una medida de robustez de métodos estadísticos Bayesianos y como un argumento para la demostración de las versiones exactas del teorema de Radon.Nikodým (ver Cifarelli, D.M.; Regazzini, E. (1987), Berti, P.; Regazzini, E.; Rigo, P. (1992), Fortini, S.; Ruggieri, F. (1994)).

$\left(E_{11},E_{12},...,E_{1n}\right)\approx_0\left(E_{21},E_{22},...,E_{2n}\right)$, entonces no se pueden verificar simultáneamente las condiciones $\wp\left(E_{1j}\right)\succeq\wp\left(E_{2j}\right)$, para todo j ni $\wp\left(E_{1j}\right)\succ\wp\left(E_{2j}\right)$, para al menos un estado j. Ahora bien, dada una sucesión de eventos $E_{11},E_{12},...,E_{1n},E_{21},E_{22},...,E_{2n}\in\Omega$ fuertemente aditivos, es decir tales que: **i)** $\left(E_{11},E_{12},...,E_{1n}\right)=_0\left(E_{21},E_{22},...,E_{2n}\right)$ y **ii)** $\wp\left(E_{1j}\right)\succeq\wp\left(E_{2j}\right)$, para todo $j<n\,(n>2)$, entonces no se puede verificar que $\wp\left(E_{1n}\right)\succ\wp\left(E_{2n}\right)$. Luego, se puede concluir que la condición necesaria y suficiente para que se verifique la propiedad de aditividad finita es que las relaciones $\succ$ sean fuertemente aditivas[410]

En la teoría subjetiva de la probabilidad, las condiciones $p_i\geq 0$ y $\sum p_i=1$ son suficientes para poder asegurar que la relación $\succ$ es no-trivial, no-negativa y fuertemente aditiva[411].

Asimismo, razonando en términos de apuestas, sea una sucesión de eventos $E_{11},E_{12},...,E_{1n},E_{21},E_{22},...,E_{2n}\in\Omega$ tales que: **i)** $\left(E_{11},E_{12},...,E_{1n}\right)\approx_0\left(E_{21},E_{22},...,E_{2n}\right)$; **ii)** $\wp\left(E_{1j}\right)\succeq\wp\left(E_{2j}\right)$ para todo $j<n$ y **iii)** $\wp\left(E_{1n}\right)\succ\wp\left(E_{2n}\right)$ (es decir, tales que no cumplan la condición de aditividad fuerte). Dado que $\wp\left(E_{1n}\right)\succ\wp\left(E_{2n}\right)$, el individuo-evaluador estaría dispuesto a apostar una cantidad positiva para participar de un juego consistente en cobrar 1 si ocurre un resultado E_{1j} y pagar 1 si ocurre un resultado E_{2j}. Pero, teniendo en cuenta que $\left(E_{11},E_{12},...,E_{1n}\right)=_0\left(E_{21},E_{22},...,E_{2n}\right)$, se produciría entonces la siguiente incongruencia: no importa cuál fuere el resultado a obtener, la ganancia neta de su apuesta del individuo-evaluador sería nula. Lo que demuestra que la aditividad fuerte es condición necesaria para poder asegurar la coherencia.

3.3.2.- La condición de coherencia

Supónganse dos eventos incompatibles, E_1 y E_2, que definen una clase completa (uno y sólo uno de ellos debe ocurrir, $E_2=\overline{E}_1$). Sean p_1 y p_2 las evaluaciones realizadas por un individuo de las respectivas probabilidades, y S_1 y S_2 las cantidades -desconocidas- a recibir, respectivamente, por el mismo, en caso de ocurrencia de E_1 o E_2 ($S_1,S_2\neq 0$).

---

410. Ver Koopman, B.O. (1940a)(1940b)(1941), Savage, L.J. (1954), Seidenberg, T. (1959), Luce, R.D.; Suppes, P. (1965), Krantz, D.H.; Luce, R.C.; Suppes, P.; Tversky, A. (1971), Fine, T. (1973), Roberts, F.S. (1979). El libro de Savage fue el que ejerció mayor influencia en el desarrollo de estos temas a partir de 1950. Savage generalizó las ideas de de Finetti hacia los aspectos relacionados con la teoría de la decisión (esta generalización no será tratada en este volumen). Como dato de color, obsérvese que el libro de Kranz, D.H.; Luce, R.D.; Suppes, P.; Tversky, A. (1971) fue publicado exactamente 300 años después de la correspondencia entre Pascal y Fermat, que dio origen a la teoría de la probabilidad.

411. La flexibilización de la condición de aditividad fuerte genera modelos más débiles que $\wp\left(E_1\right)\succ\wp\left(E_2\right)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\sum_{i\in E_1}p_i>\sum_{i\in E_2}p_i$ (ver May, K.O. (1954), Tversky, A. (1969), Fishburn, P.C. (1983)).

Las ganancias a obtener por el individuo-evaluador en los casos de ocurrencia de E_1 y E_2, estarán dadas, respectivamente, por las diferencias entre las cantidades a cobrar y las cantidades apostadas en cada caso:

$$G_1 = (1 - p_1)S_1 - p_2 S_2$$
$$G_2 = -p_1 S_1 + (1 - p_2)S_2$$

Si el determinante correspondiente a este sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{vmatrix} 1 - p_1 & -p_2 \\ -p_2 & 1 - p_1 \end{vmatrix} = 1 - (p_1 + p_2)$$

fuera no-nulo, entonces sería posible hallar valores de S_1 y S_2 tales que G_1 y G_2 resulten ambas positivas pero, según se expresó más arriba, esto significaría que la evaluación del valor de p realizada por el individuo-evaluador (debido a influencias psicológicas ajenas a lo que constituye estrictamente su grado de creencia en la ocurrencia del evento) sería tal que lo colocaría en la posición de perder con certeza[412]. En ese caso se dice que la evaluación realizada por este individuo es **incoherente.** Luego, la **condición de coherencia** implica que se verifique la relación $p_1 + p_2 = 1$. De estos resultados se puede concluir que la condición de coherencia constituye una restricción que, de alguna forma, permite asegurar que los grados de creencia son racionales (al menos hasta el punto de satisfacer dicha restricción)[413].

Supóngase que E fuera un evento cierto. La única ganancia posible sería $G_1 = [1 - p(E)]S_1$. Si $1 - p(E) \neq 0$, entonces sería posible hallar un valor de S_1 tal que $G_1 > 0$. Luego, para asegurar la coherencia, debe ser $p(E) = p = 1$. De la misma forma, si E fuera un evento imposible, la única ganancia posible sería $G_2 = [1 - p(E)]S_2 = p(\overline{E})S_2$. En este caso, si $p(\overline{E}) \neq 0$, sería posible hallar un valor de S_2 tal que $G_2 > 0$. Por lo tanto, para asegurar el cumplimiento de la condición de coherencia, se debe verificar que $p(E) = p = 0$. Estos resultados permiten concluir que, para un evento posible (es decir, ni cierto ni imposible), debe ser $0 < p(E) < 1$.

Por otra parte, dados los eventos E_1 y E_2, si se satisface la condición de coherencia, se verificará que $p_1 G_1 + p_2 G_2 = 0$ para cualquier valor de las cantidades G_1 y G_2. De modo que G_1 y G_2 no pueden ser ambas positivas. De esto se puede concluir que la condición $p_1 + p_2 = 1$ no es

---

412. Se dice, entonces, que este individuo evaluador ha sufrido un "dutch book" por parte de su contrincante.

413. Ver Sec. 2.5.

sólo necesaria, sino también suficiente para la existencia de coherencia[414] (y, en consecuencia, que el cumplimiento de la condición de coherencia implica que un conjunto de probabilidades definidas como cocientes de apuestas, satisfaga la axiomática de Kolmogorov)[415].

Generalizando la condición de coherencia, sea $\varepsilon = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$ un conjunto de eventos incompatibles que definen una clase completa. Sean $p_1, p_2, ..., p_n$ las evaluaciones realizadas por un individuo de las respectivas probabilidades de ocurrencia y sean $S_1, S_2, ..., S_n$ las cantidades a recibir por dicho individuo en caso de ocurrencia de $E_1, E_2, ..., E_n$, respectivamente. Las ganancias a obtener por el individuo evaluador en caso de ocurrencia de E_i $(i = 1,2,...,n)$ están dadas por $G_i = S_i - \sum_{j=1}^{n} p_j S_j$ $(i = 1,2,...,n)$. Si se interpreta a las S_i como incógnitas, queda definido un sistema de ecuaciones lineales cuyo determinante es de la forma:

$$\begin{vmatrix} 1-p_1 & -p_2 & \cdots & -p_n \\ -p_1 & 1-p_2 & \cdots & -p_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -p_1 & -p_2 & \cdots & 1-p_n \end{vmatrix} = 1 - \sum_{j=1}^{n} p_j S_j$$

Para que este determinante se anule y, en consecuencia, no existan valores de S_i que hagan que todas las cantidades G_i sean positivas, debe verificarse necesariamente que $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$. Asimismo, si se cumple esta condición, se verificará que $\sum_{j=1}^{n} p_j G_j = 0$. Esto demuestra que, dada una clase completa de eventos incompatibles, la condición necesaria y suficiente para la existencia de coherencia es que la suma de sus probabilidades sea igual a la unidad, $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$ (obsérvese que la aditividad numerable no es condición necesaria para que una probabilidad sea coherente).

Completando entonces la definición expresada en la Sec. 2.5, se denominará probabilidad de ocurrencia de un evento E, para un individuo dado, al número real $p(E) = p$ que representa la medida de su grado de creencia en E y que, interpretado como una apuesta de valor p sobre la ocurrencia de E, cumple la condición de coherencia.

En 1955, Shimony, A. introdujo la condición conocida como **principio de coherencia-**

---

414. Este concepto de coherencia es equivalente al "*principio de la cosa cierta*" ("*sure-thing principle*") de Savage (ver Savage, L.J. (1954)) según el cual, dadas dos ofertas aleatorias (A y B) que, ante la ocurrencia del evento E, produzcan la misma ganancia (G), si las ofertas A y B fueran modificadas de tal modo que produjeran la misma ganancia $G^* (\neq G)$, se puede asegurar que las relaciones de preferencia entre A y B permanecerán inalteradas.

415. Ramsey, F. (1926) denominó a esta condición como de **consistencia**. En general, la literatura adoptó la denominación de coherencia ya que la consistencia posee una connotación diferente en el ámbito de la lógica deductiva.

estricta, según la cual el apostador no debería solamente evitar exponerse a perder con seguridad (de acuerdo a lo establecido por la condición de coherencia simple) sino, también, evitar aceptar apuestas que significaran para él el riesgo de perder en ciertos casos y, para los casos restantes la certeza de un equilibrio entre pérdidas y ganancias[416]. Obviamente, esta condición es más restrictiva que la de coherencia simple. Obsérvese que, a diferencia de ésta, la aceptación de la condición de coherencia estricta, implica el reconocimiento de la equivalencia entre la probabilidad nula y la imposibilidad lógica, es decir, la incorporación a los postulados clásicos del llamado **postulado de regularidad** el cual, en situaciones que involucran un número finito de casos elementales, equivale a considerar a la probabilidad unitaria como la **certeza lógica** y a la probabilidad nula como la **imposibilidad lógica.** Es decir, este razonamiento implica reconocer la irracionalidad de atribuir a un **evento-posible** el mismo grado de **certeza subjetiva** que a un **evento-imposible** pero, a su vez, debe tenerse en cuenta que la justificación del postulado de irregularidad deriva, precisamente, de la aceptación del principio de coherencia estricta, lo que permitiría concluir que la definición de Shimony se basa en un argumento aparentemente circular.

Ejemplo nº 3.6:

Sea el fenómeno que resulta de arrojar una moneda. Si se verifica que: **i)** el observador posee la información de que la moneda tiene dos "caras"; su asignación a la probabilidad de ocurrencia del resultado "cara" será, entonces, igual a la unidad, $p(C) = 1$; **ii)** el observador posee la información de que la moneda es legítima, entonces, su asignación a la probabilidad de ocurrencia del resultado "cara", será $p(C) = \frac{1}{2}$; **iii)** la moneda posee dos "caras", pero que el observador no cuenta con esta información, entonces, su asignación a la probabilidad de ocurrencia del resultado "cara", será $p(C) = \frac{1}{2}$; **iv)** el observador posee la información de que la moneda posee dos "cecas", entonces, su asignación a la probabilidad de ocurrencia del resultado "cara", será $p(C) = 0$; **v)** el observador posee la información de que la moneda no es legítima, pero no sabe si posee dos "caras" o dos "cecas", entonces, su asignación a la probabilidad de ocurrencia del resultado "cara", será $p(C) = \frac{1}{2}$.

Obsérvese que los casos **i), iii), iv)** y **v)** son tales que, si bien corresponden a la misma situación objetiva, sus asignaciones de probabilidades no siempre coinciden, mientras que, si bien los casos **ii), iii)** y **v)** corresponden a situaciones objetivas diferentes, sus asignaciones de probabilidades son iguales.

Ejemplo nº 3.7:

Sea una urna respecto de la cual el observador posee la información que contiene dos

---

[416]. De acuerdo con este esquema de apuestas, la función de ganancias de un apostador podría ser tal que, para ciertos eventos constituyentes, éste perdiera, mientras que para otros obtuviera una ganancia nula (se pagaría, en caso de pérdida, una cierta cantidad de dinero para recibir una cantidad igual a cero en caso de ganancia).

bolillas que pueden ser, en forma equiprobable, ambas blancas, ambas negras o una blanca y una negra y sea el evento:

$$E\text{:}\textit{que las bolillas sean de colores diferentes}$$

A partir de las condiciones precedentes, se pueden considerar tres resultados posibles, de modo que $p(E) = \frac{1}{3}$. Ahora bien, suponiendo un experimento por el cual se realizan de dicha urna extracciones al azar con reposición de a una bolilla a la vez, queda definido un espacio muestral formado por cuatro resultados posibles: que la primera y la segunda bolillas sean blancas, que la primera y la segunda bolillas sean negras, que la primera bolilla sea blanca y la segunda sea negra, y que la primera bolilla sea negra y la segunda sea blanca. De acuerdo con los supuestos iniciales, cada uno de estos resultados alternativos tiene una probabilidad de ocurrencia igual a $\frac{1}{4}$, siendo los dos últimos los que satisfacen la condición E. Luego, será $p(E) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Se puede concluir, entonces, que no es posible atribuir una probabilidad objetiva al evento E, si no se cuenta con información acerca del procedimiento seguido para introducir las bolillas en la urna. Supóngase que el contenido de la urna se haya integrado de la siguiente forma: Sean dos bolsas cada una de las cuales contiene n bolillas blancas y n bolillas negras, respectivamente. Se arrojan simultáneamente dos monedas "clásicas", si se obtienen dos resultados "cara" (C) o dos resultados "ceca" (X), se toman (para introducir en la urna) dos bolillas de la misma bolsa (ambas blancas o ambas negras), si las monedas presentan resultados distintos, se toma una bolilla de cada bolsa. Entonces, será:

$$p(E) = p(C_1)p(X_2) + p(X_1)p(C_2) = \frac{1}{2}$$

Supóngase, ahora, que las dos bolsas mencionadas más arriba se mezclen en una bolsa que, obviamente, contendrá $2n$ bolillas blancas y negras en igual proporción, y que de esta última se realicen dos extracciones. Será, entonces:

$$\begin{aligned}
p(E) &= p(b_1)p(n_2 / b_1) + p(n_1)p(b_2 / n_1) = \\
&= \frac{n}{2n}\frac{n}{2n-1} + \frac{n}{2n}\frac{n}{2n-1} = \\
&= \frac{n^2}{\frac{2n(n-1)}{2}} = \frac{n^2}{\binom{2n}{2}} = \frac{n}{2n-1}
\end{aligned}$$

En este caso, se obtiene, además, que:

$$\begin{aligned}
& p(E_b) = p(\textit{que ambas bolillas sean blancas}) = \\
&= p(E_n) = p(\textit{que ambas bolillas sean negras}) = \\
&= p(b_1)p(b_2 / b_1) =
\end{aligned}$$

$$= p(n_1)p(n_2 / n_1) =$$

$$= \frac{n}{2n}\frac{n-1}{2n-1} = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{2n}{2}} = \frac{n-1}{2(2n-1)}$$

Obsérvese que no es posible hallar, en esta expresión, ningún valor de n para el cual los eventos E, E_b y E_n sean equiprobables (se demuestra fácilmente que $p(E) = \frac{1}{2}$, sólo si $n = -1$).

Ejemplo nº 3.8:

Sea una urna que contiene 90 bolillas de colores rojo (r), azul (a) y verde (v), de las cuales se sabe que las bolillas rojas son 30, pero de las 60 restantes, no se sabe cuántas son azules y cuántas son verdes. Se extrae una bolilla al azar y, sobre esta extracción, un observador realiza dos apuestas, una sobre un solo color y otra sobre un par de colores, considerando en la primera apuesta que, por alguna razón particular, el evento r es más probable que el evento v, y en la segunda apuesta, que el evento $(a \cup v)$ es más probable que el evento $(a \cup r)$.

Teniendo en cuenta que $p(r) = \frac{1}{3}$ y, de acuerdo con la consideración realizada por el observador, será $p(v) < \frac{1}{3}$ Por otra parte, teniendo en cuenta que $p(a \cup v) = \frac{2}{3}$, su evaluación de la segunda apuesta será tal que $p(a \cup r) < \frac{2}{3}$. A partir de estas consideraciones se puede escribir:

$$p(a) = p(a \cup v) - p(v) = \frac{2}{3} - p(v) > \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Pero, también se puede escribir:

$$p(a) = p(a \cup r) - p(r) = \frac{1}{3} < \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

De lo que se puede concluir que, dado que la combinación de apuestas planteadas precedentemente contradice el postulado de transitividad de la probabilidad, no es coherente.

3.3.3.- El teorema de unicidad de la probabilidad (o teorema fundamental de la probabilidad de de Finetti)

Sea $\varepsilon = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$ una clase de eventos cualesquiera y sea un conjunto de $k\ (= 2^n)$

eventos constituyentes ($\varepsilon^{(i)}$), formados por los productos lógicos de los n eventos E_i y de sus contrarios ($\overline{E}_i$) de la siguiente forma:

$$\varepsilon^{(1)} = E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n$$
$$\varepsilon^{(2)} = \overline{E}_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n$$
$$\varepsilon^{(3)} = E_1 \cap \overline{E}_2 \cap E_3 \cap ... \cap E_n$$
....
$$\varepsilon^{(j)} = E_1 \cap E_2 \cap ... \cap \overline{E}_{j-1} \cap E_j \cap ... \cap E_n$$
....
$$\varepsilon^{(n+2)} = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap E_3 \cap ... \cap E_n$$
....
$$\varepsilon^{(2n+2)} = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \overline{E}_3 \cap E_4 \cap ... \cap E_n$$
....
$$\varepsilon^{(k)} = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap ... \cap \overline{E}_n$$

(el número máximo de eventos constituyentes será $A_{2,n} = 2^n$, puede ser menor en la medida que existan combinaciones imposibles de estos eventos). Los eventos constituyentes definen una clase completa de eventos incompatibles:

$$\varepsilon^{(1)} \cup \varepsilon^{(2)} \cup ... \cup \varepsilon^{(k)} = \left(E_1 \cup \overline{E}_1\right) \cap \left(E_2 \cup \overline{E}_2\right) \cap ... \cap \left(E_n \cup \overline{E}_n\right) = \Omega$$

Ahora bien, cada evento E_i puede ser definido como la suma lógica de un conjunto de eventos constituyentes:

$$E_i = \varepsilon^{(i,1)} \cup \varepsilon^{(i,2)} \cup ... \cup \varepsilon^{(i,\nu)}$$

donde los $\varepsilon^{(i,j)}$ $\left(j = 1,2,...,\nu\right)$ son todos -y, solamente- los eventos constituyentes en los cuales aparece E_i (es decir, tales que $\varepsilon^{(i,j)} \subseteq E_i$). Debe tenerse en cuenta que los eventos definidos como sumas de eventos constituyentes son los únicos lógicamente dependientes de $E_1, E_2, ..., E_n$: en la medida que se conozca si cada E_i es verdadero o falso, será posible asegurar si los eventos-suma son verdaderos o falsos:

$$\varepsilon^{(i,1)} = E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_{i-1} \cap E_i \cap E_{i+1} \cap ... \cap E_n$$
$$\varepsilon^{(i,2)} = \overline{E}_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_{i-1} \cap E_i \cap E_{i+1} \cap ... \cap E_n$$
....

$$\varepsilon^{(i,n)} = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \ldots \cap \overline{E}_{i-1} \cap E_i \cap \overline{E}_{i+1} \cap \ldots \overline{E}_n$$

Luego, la probabilidad de ocurrencia del evento E_i puede ser definida como una suma de probabilidades de eventos constituyentes:

$$p(E_i) = p_i = \sum_j p\left[\varepsilon^{(i,j)}\right] \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

Queda demostrado entonces que, dado un evento E, la condición necesaria y suficiente para que su probabilidad esté determinada unívocamente es que el mismo resulte de la unión de un conjunto finito de eventos constituyentes $\varepsilon^{(i)}$, de modo que:

$$p(E) = \sum_j {}^{(E)}p\left[\varepsilon^{(j)}\right]$$

(donde la suma abarca a los $\varepsilon^{(j)}$ contenidos en E). Es decir, queda demostrado que la aceptación del principio de aditividad finita garantiza la posibilidad de obtener la evaluación de la probabilidad de cualquier evento (ver de Finetti, B. (1970))[417].

Supóngase, por el contrario, que E no resulte de la suma lógica de eventos constituyentes. Es posible definir, entonces, dos eventos E'' y E' (eventualmente puede considerarse que $E'' = \Omega$ y $E' = \varnothing$) que representen, respectivamente, la máxima y la mínima unión de eventos constituyentes para los cuales se verifiquen las inclusiones $E'' \supset E$ y $E' \subset E$ y se demuestra que, si se suponen asignadas las probabilidades de los eventos constituyentes, $p(E)$ puede asumir cualquiera de los valores del intervalo $\left[p(E'), p(E'')\right]$, es decir $p(E') \leq p(E) \leq p(E'')$.

de Finetti, B. (1937) ya había demostrado que $p(E')$ es el mínimo valor admisible para la probabilidad de la proposición más débil definible en términos de $E' \subset E$, y que $p(E'')$ es el máximo valor admisible para la probabilidad de la proposición más fuerte en términos de $E'' \supset E$ (ver también de Finetti, B.(1981)). El problema de la determinación de las probabilidades $p(E')$ y $p(E'')$ es asimilable a un problema de programación lineal (ver de Finetti, B. (1980), Halperin, T. (1965)(1986)).

Supóngase, ahora, que, en vez de asignar las probabilidades a los eventos constituyentes, se efectúe directamente la evaluación de las probabilidades de los n eventos de la clase ε, $p(E_i) = p_i \; (i = 1,2,\ldots,n)$. La condición necesaria y suficiente para poder asegurar la admisibilidad de esta evaluación es que exista al menos una solución $p\left(\varepsilon^{(i,1)}\right), p\left(\varepsilon^{(i,2)}\right), \ldots, p\left(\varepsilon^{(i,2^n)}\right)$ (tal que

417. Para una extensión de $\mathfrak{I}$ a estructuras infinitas y la consecuente extensión de la propiedad de unicidad de la medida de la probabilidad, ver Suppes, P.; Zanotti, M. (1976), Kaplan, M.; Fine, T. (1977), Luce, R.D.; Narens, L. (1978).

$p\left(\varepsilon^{(i,j)}\right) \geq 0 \left(j = 1,2,...,2^n\right)$) para el siguiente sistema de $n+1$ ecuaciones con 2^n incógnitas:

$$\begin{cases} \sum_j {}^{(i)} p\left(\varepsilon^{(i,j)}\right) = p_i \\ \sum_{j=1}^{2^n} p\left(\varepsilon^{(i,j)}\right) = 1 \end{cases}$$

(donde la suma $\sum {}^{(i)}$ abarca los términos para los cuales $\varepsilon^{(i,j)} \subseteq E_i$).

Ejemplo nº 3.9:

Sea una máquina cuyo funcionamiento, en un intervalo de tiempo dado, depende, a su vez, del funcionamiento de dos de sus componentes (C_1 y C_2), los cuales son sustituidos después de cada desperfecto y sea una clase $\varepsilon = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, formada por los eventos:

$$\begin{aligned} E_1 &= \textit{que } C_1 \textit{ sufra mas desperfectos que } C_2 \\ E_2 &= \textit{que } C_2 \textit{ no sufra ningun desperfecto} \\ E_3 &= \textit{que } C_1 \textit{ sufra un solo desperfecto} \\ E_4 &= \textit{que } C_1 \textit{ sufra dos desperfectos} \end{aligned}$$

Representando, respectivamente, por d_1 y d_2 al número de desperfectos que pueden sufrir los componentes C_1 y C_2 en el mencionado intervalo de tiempo, se puede escribir entonces:

$$\begin{aligned} E_1 &= (d_1 > d_2) \\ E_2 &= (d_2 = 0) \\ E_3 &= (d_1 = 1) \\ E_4 &= (d_1 = 2) \end{aligned}$$

De los $2^4 = 16$ eventos constituyentes que se pueden formar con estos 4 eventos, todos aquellos en los que figura el evento $(E_3 \cap E_4)$ resultan imposibles:

$$\begin{aligned} &E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 \\ &\overline{E}_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 \\ &E_1 \cap \overline{E}_2 \cap E_3 \cap E_4 \\ &\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap E_3 \cap E_4 \end{aligned}$$

También son imposibles los eventos constituyentes:

$$E_1 \cap \overline{E}_2 \cap E_3 \cap \overline{E}_4$$
$$\overline{E}_1 \cap E_2 \cap \overline{E}_3 \cap E_4$$
$$\overline{E}_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \overline{E}_4$$

Luego, se puede concluir que, a partir de la clase ε, es posible formar nueve eventos constituyentes:

$$\varepsilon^{(1)} = E_1 \cap E_2 \cap \overline{E}_3 \cap E_4$$
$$\varepsilon^{(2)} = E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \overline{E}_4$$
$$\varepsilon^{(3)} = E_1 \cap E_2 \cap \overline{E}_3 \cap \overline{E}_4$$
$$\varepsilon^{(4)} = E_1 \cap \overline{E}_2 \cap \overline{E}_3 \cap E_4$$
$$\varepsilon^{(5)} = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \overline{E}_3 \cap E_4$$
$$\varepsilon^{(6)} = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap E_3 \cap \overline{E}_4$$
$$\varepsilon^{(7)} = \overline{E}_1 \cap E_2 \cap \overline{E}_3 \cap \overline{E}_4$$
$$\varepsilon^{(8)} = E_1 \cap \overline{E}_2 \cap \overline{E}_3 \cap \overline{E}_4$$
$$\varepsilon^{(9)} = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \overline{E}_3 \cap \overline{E}_4$$

Sean, ahora, los eventos:

$E =$ *que* C_2 *sufra menos de* 3 *desperfectos y menos desperfectos que que* C_1

$E^* =$ *que* C_1 *sufra dos desperfectos y* C_2 *solo uno*

$E^{**} =$ *que* C_1 *sufra tres desperfectos y* C_2 *no sufra ninguno*

$E^{***} =$ *que* C_1 *y* C_2 *sufran el mismo numero de desperfectos*

Se concluye, entonces, en forma inmediata que E es compatible sólo con los siguientes eventos constituyentes:

$$\varepsilon^{(1)} = E_1 \cap E_2 \cap \overline{E}_3 \cap E_4$$
$$\varepsilon^{(2)} = E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \overline{E}_4$$
$$\varepsilon^{(3)} = E_1 \cap E_2 \cap \overline{E}_3 \cap \overline{E}_4$$
$$\varepsilon^{(4)} = E_1 \cap \overline{E}_2 \cap \overline{E}_3 \cap E_4$$
$$\varepsilon^{(8)} = E_1 \cap \overline{E}_2 \cap \overline{E}_3 \cap \overline{E}_4$$

y se verifican fácilmente las siguientes inclusiones:

$$\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(3)} + \varepsilon^{(4)} \subset E \subset \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(3)} + \varepsilon^{(4)} + \varepsilon^{(8)}$$

Si se supone que los eventos constituyentes son equiprobables, se obtiene el siguiente conjunto de asignaciones admisibles $\frac{4}{9} \leq p(E) \leq \frac{5}{9}$. Por otra parte, se verifica que $E^{*} = \varepsilon^{(4)}$ y, por lo tanto, que la única asignación admisible para su probabilidad es $p(E^{*}) = \frac{1}{9}$. De la misma forma, se tiene que $E^{**} \subseteq \varepsilon^{(3)}$, es decir, que el conjunto de asignaciones admisibles para la probabilidad de este evento debe cumplir la condición $p(E^{**}) \leq \frac{1}{9}$. Finalmente, E^{**} es compatible con los siguientes cuatro eventos constituyentes:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{(5)} &= \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \overline{E}_3 \cap E_4 \\
\varepsilon^{(6)} &= \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap E_3 \cap \overline{E}_4 \\
\varepsilon^{(7)} &= \overline{E}_1 \cap E_2 \cap \overline{E}_3 \cap \overline{E}_4 \\
\varepsilon^{(9)} &= \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \overline{E}_3 \cap \overline{E}_4
\end{aligned}$$

Se verifica, entonces, que $\varepsilon^{(7)} \subset E^{***}$, en tanto que para los otros tres eventos constituyentes no existe una inclusión de este tipo. Esto demuestra que el conjunto de asignaciones admisibles estará definido por el intervalo:

$$p\left(\varepsilon^{(7)}\right) \leq p\left(E^{***}\right) \leq p\left(\varepsilon^{(5)} + \varepsilon^{(6)} + \varepsilon^{(7)} + \varepsilon^{(9)}\right)$$

Es decir, será $\frac{1}{9} \leq p\left(E^{***}\right) \leq \frac{4}{9}$.

3.3.4.- La cuestión de la aditividad numerable

Sean los eventos $E_1, E_2, E_{11}, E_{12}, \ldots \in \Omega$. Si se verifica que: **i)** $E_{11} \subseteq E_{12} \subseteq E_{13} \subseteq \ldots$; **ii)** $E_1 = \bigcup_i E_{1i}$ y **iii)** $\wp(E_2) \succeq \wp(E_{1i})$ para todo $i = 1,2,\ldots$, entonces se puede asegurar que $\wp(E_2) \succeq \wp(E_1)$.

Este axioma, conocido como de **continuidad monótona**, es condición necesaria para poder garantizar la existencia de una correspondiente medida de probabilidad aditiva numerable. Villegas, C. (1964) demostró que si p es una medida de probabilidad aditiva finita correspondiente a la relación $\succ$, entonces la condición necesaria y suficiente para que sea aditiva numerable es que la relación $\succ$ sea monótonamente continua[418].

Teniendo en cuenta que, desde un punto de vista conceptual, la extensión de la propiedad de aditividad a conjuntos infinitos de eventos incompatibles constituye un ejemplo del riesgo que traen aparejadas las conclusiones que se obtienen de un sistema axiomático en el cual se han incluido axiomas basándose exclusivamente en conveniencias matemáticas, sin una justificación en términos del concepto de probabilidad, B. de Finetti, compartiendo los reparos de von Mises y Kolmogorov, concluye en la conveniencia de restringir el análisis a la aditividad finita[419].

Esta cuestión de la aditividad numerable constituye uno de los argumentos fundamentales que justifican la actitud constructivista-intuicionista de de Finetti opuesta a cualquier planteo de tipo axiomático[420]. Sus críticas se refieren, precisamente, a aquellos aspectos de la axiomática que los matemáticos clásicos más apreciaban: el desarrollo de una disciplina que partiera de una noción abstracta de probabilidad[421]. Por definición, los axiomas son proposiciones arbitrarias seleccionadas libremente como "*verdades de partida*"[422] con la única obvia condición de no ser contradictorias, de modo que todas las conclusiones que se puedan derivar de ellas son consideradas como válidas con respecto al marco de referencia -abstracto- tomado como punto de partida[423]. Como lo ha demostrado la historia, este planteo y la imposibilidad de la aplicación estricta de las condiciones inherentes a la concepción de la probabilidad en términos de la teoría de la medida, traen aparejados el peligro de pretender que dichas conclusiones sean consideradas válidas aún en aplicaciones concretas para las cuales parezca cómodo adoptar un modelo abstracto (Borel, E. (1914): "*Como han propuesto muchos autores, de la misma forma que se define la circunferencia en geometría o la masa en mecánica racional, se puede dar una definición puramente abstracta de probabilidad. A partir de esta definición se pueden deducir consecuencias lógicas absolutamente rigurosas. Pero, en la medida que se desee aplicar estas consecuencias a cualquier fenómeno real, se debe sustituir la probabilidad concreta de dicho fenómeno por la probabilidad abstracta. Entonces la incertidumbre*

---

418. Ver Chateauneuf, A.; Jaffray, J.Y. (1984).

419. de Finetti, B. (1970): "*El supuesto de aditividad numerable (...) es, en la actualidad habitualmente aceptado; si bien no debe su origen a los axiomas de Kolmogorov (1933), tuvo su sistematización en dichos axiomas. Su éxito se debe en gran medida a la conveniencia matemática de convertir el cálculo de probabilidades en un mero traslado de la moderna teoría de la medida (...) Nadie ha proporcionado una justificación real de la aditividad numerable (que vaya más allá de su consideración simplemente como una mera 'extensión natural' de la aditividad finita)*".

420. El intuicionismo constructivista de comienzos del siglo XX postula que la matemática es una representación de las actividades humana (a las que denomina "*intuiciones*") y que, por lo tanto, no tiene sentido considerar las implicaciones de axiomas arbitrarios que no representan ninguna actividad específica y que pueden conducir a resultados inconsistentes. Luego, como las actividades humanas son de extensión necesariamente finita, los axiomas de la interpretación intuicionista sólo expresan requerimientos que involucran un número finito de operaciones (ver Heyting, A. (1956), Bencerraf, P.; Putnam, H. (1983), Scozzafava, R. (1984), Hill, B.M. (1994)).

421. de Finetti, B. (1952): "*De acuerdo con el punto de vista axiomático, se introducen axiomas para la probabilidad (por ejemplo, mediante ciertas ecuaciones lineales sobre un cierto campo), sin que nadie pueda imaginar, si no lo sabe por sí mismo, qué cosa significa el término 'probabilidad'. Se podría, por ejemplo, interpretar a la probabilidad como medida y pensar que las palabras 'medida' y 'probabilidad' son sinónimos*".

422. de Finetti, B. (1995).

423. Poincaré, H. (1902): "*Para calcular una probabilidad y para dar sentido a este cálculo debemos admitir, en principio, una hipótesis o convención que siempre introduce cierta dosis de arbitrariedad*".

inherente a toda medida concreta retorna")[424].

de Finetti, B. (1931a) sostiene que las proposiciones contenidas en los axiomas no sólo deben ser formalmente consistentes, sino también intrínsecamente necesarias con respecto a una interpretación completa del concepto de probabilidad y estableció que la interpretación subjetivista no pretende reducir el conjunto de las probabilidades admisibles a una familia de probabilidades aditivamente numerables[425]

Los argumentos de de Finetti, B.(1931a)(1931b)(1970) a favor de la aditividad finita (y en contra de la aditividad numerable) se basan en que, en la teoría subjetivista, las probabilidades están definidas por cocientes de apuestas individuales y que estas apuestas sólo tienen significado sobre un conjunto finito de eventos[426], que la idea de un conjunto infinito de apuestas resulta bastante artificiosa y su caracterización sólo podría ser justificable en términos asintóticos considerando el límite de una sucesión finita de n apuestas. Pero esta aproximación no podría ser considerada, desde un punto de vista conceptual, como equivalente a un número infinito de apuestas en un punto del tiempo (este caso infinito podría ser concebible sólo si se lo considerara como "... *un caso límite no-posible de los casos posibles*")[427]. Adoptar la aditividad numerable implica reconocer la imposibilidad de asignar una distribución uniforme sobre un conjunto numerable, como por ejemplo, $\{1,2,\ldots,n,\ldots\}$, aceptar que lo único admisible es, de acuerdo con la nomenclatura de de Finetti, B. (1970), un conjunto de "*particiones extremadamente desbalanceadas*". Supóngase que $p(i) = p > 0 \; (i = 1,2,\ldots,n\ldots)$, entonces se verificará que $\sum_{i=1}^{\infty} p(i) = \infty$ cuando, de acuerdo con la axiomática, debe ser $\sum_{i=1}^{\infty} p(i) \leq 1$. Asimismo, si se supone que $p(i) = 0 \; (i = 1,2,\ldots,n,\ldots)$, entonces se verificará que $\sum_{i=1}^{\infty} p(i) = 0$ cuando debe ser $\sum_{i=1}^{\infty} p(i) = p(\Omega) = 1$. de Finetti, B. (1970) indica que "*...esto me obliga a seleccionar un subconjunto finito de ellos (por ejemplo, la clase numerable en cuestión) a la cual atribuyo una probabilidad total de al menos un 99% (dejando un 1% al subconjunto complementario), porcentaje que podría haber elevado al 99.99%, con un 0.001% para el subconjunto complementario y, aún se podría haber llevado a valores más extremos*" (obsérvese que en este pasaje de Finetti, en cierta forma, transgrede el argumento mencionado previamente de acuerdo con el cual el análisis se debería restringir a sucesiones finitas de eventos y a la no consideración de distribuciones de probabilidades sobre dominios numerables).

---

424. Borel continuó la discusión sobre la axiomatización y la aplicación de la matemática a la teoría de la probabilidad en los fascículos primero ("*Principes et formules classiques du calcul des probabilités*") y último ("*Valeur practique et philosophie des probabilités*") de su "*Traité du calcul des probabilités et de ses applications*" (que consta de 4 volúmenes divididos en 18 fascículos, publicados entre 1925 y 1939).

425. Ya en sus memorias de 1930, en ocasión de la discusión con Fréchet, M. (1930a)(1930b) acerca de la aplicación del operador límite en la teoría de la probabilidad, de Finetti desarrolló observaciones críticas sobre la formulación usual del teorema de Cantelli, F.P. (1917a)(1917b) mencionada en la Sec. 3.2 y estableció la "*no-necesidad*" de la aditividad numerable o completa

426. Ver Gillies, D.A. (1972b).

427. de Finetti, B. (1995).

En desacuerdo con la posición de de Finetti de considerar como inadmisible la posibilidad de asignar una distribución uniforme al conjunto numerable de los resultados posibles, Adams, E. (1964) planteó una situación en la cual parecería razonable apostar sobre una sucesión infinita numerable de eventos. Supóngase que un individuo-evaluador deba apostar sobre el número entero no-negativo a obtener como resultado de la impresión al azar de una computadora. Obviamente el conjunto de resultados posibles no posee extremo superior, de modo que será más fácil para dicho individuo definir una sucesión infinita de cocientes de apuestas, que determinar un límite superior fijo. Desde un punto de vista intuitivo, parece lógico suponer que este individuo asignará una probabilidad mayor a los números más pequeños, lo cual permite concluir que, en consecuencia, la distribución desbalanceada postulada por de Finetti no sólo no contradice a la intuición, sino que constituye el resultado que se debería esperara partir de la interpretación subjetivista de la aditividad numerable (obsérvese que esta justificación de la introducción de un elemento subjetivo que conduce a la adopción de una distribución asimétrica, como sustituto de la distribución uniforme que prescribe la aplicación del principio de indiferencia de la interpretación logicista, permite concluir que la defensa de la distribución uniforme por parte de de Finetti es más una defensa de la interpretación logicista que de la interpretación subjetivista).

A partir de la justificación de Adams de la distribución de probabilidades asimétrica y, en consecuencia, de la admisibilidad de un esquema de apuestas para una sucesión infinita numerable de eventos, Williamson, J.O.D. (1999) propuso como condición adicional que la cantidad de dinero en juego sea finita, es decir que las ganancias S_i $(i = 1,2,...,n,..)$ sean finitas, lo cual implica que la sucesión $p_1S_1 + p_2S_2+...+p_nS_n+...$ sea convergente y, por lo tanto, permite demostrar que si la cantidad de dinero en juego es finita, el axioma de aditividad numerable puede ser obtenido rigurosamente a partir del mismo argumento del "Dutch book" que utiliza de Finetti para establecer la aditividad finita. Es decir que, contrariamente a la opinión de de Finetti, a partir de la proposición de Adams y de la condición de Williamson, la aditividad numerable queda naturalmente justificada en el ámbito de la interpretación subjetivista[428].

Como corolario de todas las consideraciones analizadas en esta sección, se puede concluir que la interpretación subjetivista de de Finetti puede ser considerada como una aproximación operacionalista-positivista a la ciencia, una aproximación analítica a la filosofía y una aproximación constructivista-finitista-intuicionista a la matemática.

3.3.5.- El teorema de la probabilidad compuesta (o teorema de Ramsey-de Finetti)

Sean dos eventos, E y A, tales que $E \subset A$. de Finetti, B. (1937a) define el evento "E *condicionado por la supuesta ocurrencia de* A" (E / A), con $A \neq \emptyset$, como aquella entidad lógica que será verdadera si las proposiciones E y A son verdaderas, será falsa si A es verdadera y E

[428]. Con relación a esta cuestión de la aditividad finita y su relación con la aditividad numerable y con la condición de coherencia, se ha publicado una gran cantidad de trabajos entre los que merecen ser destacados los de Heath, D.; Sudderth, W. (1972), Dubins, L.E. (1975), Hill, B.M. (1988), Cohen, L.J. (1982), Seidenfeld, T.; Schervish, M. (1983), Sudderth, W. (1980), Kadane, J.B.; Schervish, M.J.; Seidenfeld, T. (1983), Hill, B.M.; Lane, D. (1986) y Gillies, D.A. (2000).

es falsa, y será indeterminado si A es falsa (esta condición equivale a suponer que no se puede asegurar, en este contexto, que la proposición A sea falsa). Luego, a partir de una interpretación de la probabilidad como precio, $p(E/A) = p$ puede ser considerada como la apuesta que el observador considera equitativo pagar por el derecho a recibir 1, si la proposición E es verdadera, y 0 en caso contrario, con la cláusula que si A no se verifica (independientemente del verificarse o no de E) no se pagará ni se recibirá nada[429]:

$$p(E/A) = \begin{cases} 1 & si \quad (E \cap A) \\ 0 & si \quad (\overline{E} \cap A) \\ p & si \quad \overline{A} \end{cases}$$

Como ya se comentó en la Sec. 3.1.3, la notación $p(E/A)$ es incompleta en la medida que no toma en consideración el conjunto de información básico ω con que cuenta el observador. Su expresión completa sería de la forma $p[E/(A \cap \omega)]$.

Supóngase que las evaluaciones de las probabilidades realizadas por un individuo, correspondientes a las ocurrencias de los eventos A y E, sean $p(A) = p'$ y $p(E \cap A) = p''$ y supóngase que se realizan tres apuestas: una a favor de A, con derecho a recibir una suma S' en caso de su ocurrencia; una a favor de E, con derecho a recibir una suma S en caso de su ocurrencia; y una a favor de $(E \cap A)$, con derecho a recibir una suma S'' en caso de su ocurrencia. Las ganancias a obtener por dicho individuo, según que ocurran los eventos $(A \cap E)$,$(A \cap \overline{E})$ o $\overline{A}$, serán, respectivamente:

$$\begin{aligned} G_1 &= G(A \cap E) = S' - p'S' + S - pS + S'' - p''S'' \\ G_2 &= G(A \cap \overline{E}) = S' - p'S' - p''S'' \\ G_3 &= G(\overline{A}) = -p'S' - p''S'' \end{aligned}$$

Suponiendo desconocidos los valores de S, S' y S'', queda determinado un sistema de ecuaciones lineales cuyo determinante es de la forma:

$$\begin{vmatrix} 1-p' & 1-p & 1-p'' \\ 1-p' & -p & -p'' \\ -p' & 0 & -p'' \end{vmatrix} = p'' - p'p$$

Si este determinante fuera no-nulo sería posible hallar valores de S, S' y S'' tales que las ganancias

---

429. A fin de sugerir la insuficiencia de la lógica bivalente para caracterizar este caso, de Finetti introdujo el término "*trievento*" (el recurso de la "*lógica trivalente*" fue introducido por Lukasiewicz, J. (1987)).

$G(E), G(A \cap \overline{E})$ y $G(\overline{A})$ fueran todas positivas, y esto violaría la condición de coherencia (de Finetti, B. (1970): "*Es necesario confirmar la condición de coherencia estableciendo que las evaluaciones condicionadas por* H *deben ser coherentemente condicionadas por* H *(por ejemplo, bajo la hipótesis que* H *sea verdadera)*")[430].

Luego, necesariamente, debe verificarse que $p'' = p'p$, es decir, que:

$$p(E \cap A) = p(A)p(E / A)$$

(expresión conocida como **teorema de la probabilidad compuesta**). Por otra parte, si se cumple esta relación, se verificará que:

$$p(A \cap E)G_1 + p(A \cap \overline{E})G_2 + p(\overline{A})G_3 = 0$$

lo que demuestra que la condición necesaria, también es suficiente[431].

En particular, para todo $A \neq \varnothing$, se verifica que:

$$p(A / A) = p[(\Omega \cap A) / A] = p(\Omega / A) = 1$$

Si existe una medida de probabilidad p única que se corresponde con las relaciones $\succ$ o $\succeq$, entonces se demuestra, en forma análoga, que $p(E \cap A) = p(E)p(A / E)$. Dado que en la interpretación subjetivista las probabilidades condicionadas son nociones primitivas[432], Koopman, B.O. (1940a)(1940b) y de Finetti, B. (1949) propusieron la axiomatización de la probabilidad condicionada a partir de las siguientes probabilidades comparativas: **i)** $\wp(E_1 / A) \succeq_0 \wp(E_2 / B)$, que debe ser interpretada como "*la ocurrencia de* E_1 *condicionada por la supuesta ocurrencia de* A *es, al menos, tan probable como la ocurrencia de* E_2 *condicionada por la supuesta ocurrencia de* B" y **ii)** $\wp(E_1 / A) \approx_0 \wp(E_2 / B)$, que se verificará si se verifican las relaciones $\wp(E_1 / A) \succeq_0 \wp(E_2 / B)$ y $\wp(E_2 / B) \succeq_0 \wp(E_1 / A)$. Como corolario de estas definiciones, se dice que E es un evento nulo si se verifica que $\wp(E / \Omega) \approx_0 \wp(\varnothing / \Omega)$. El axioma de Koopman expresa que la relación comparativa $\wp(E_1 / A) \approx_0 \wp(E_2 / B)$ implica la relación:

---

430. Ver Berti, P.; Rigo, P. (1989).

431. Esta demostración está basada en de Finetti, B. (1937a).

432. Como ya se mencionó en la Sec. 3.1.4, en el contexto subjetivista no tendría sentido hablar de probabilidades "a priori" bajo la notación $p(E)$, en la medida que es muy difícil imaginar un evento acerca de cuya ocurrencia se pueda pensar que el individuo-evaluador no conoce absolutamente nada.

$$\frac{p(E_1 / A)}{p(A)} = \frac{p(E_2 / B)}{p(B)}$$

y viceversa.

La probabilidad condicionada también aparece justificada a partir de las axiomatizaciones basadas en la **relación de preferencia** de Ramsey, F.P. (1931), Pfanzagl, J. (1967)(1968), Luce, R.D.; Krantz, D.H. (1971), Fishburn,P.C. (1973) y Balch, M.; Fishburn, P.C. (1974)[433].

A partir de las igualdades obtenidas más arriba, se puede concluir, entonces, que $p(A)p(E / A) = p(E)p(A / E)$. Relación de la que se deduce que:

$$p(E / A) = p(E)\frac{p(A / E)}{p(A)}$$

Expresión que, como ya se ha visto en la Sec. 3.1.5, constituye la formulación más simple del teorema de Bayes[434].

Si la evaluación de la probabilidad $p(E / A)$ realizada por un observador es mayor que su evaluación de la probabilidad $p(E)$, significa que, para dicho observador, entre los eventos E y A, existe una relación de dependencia estocástica y que esa relación es positiva. Viceversa, si sus evaluaciones son tales que $p(E / A) < p(E)$, debe entenderse que considera que la relación de dependencia estocástica entre A y E es negativa.

Como corolario de estos resultados, se demuestra que la medida de la variación (aumento o disminución) de la probabilidad de ocurrencia de E cuando ésta está condicionada por el supuesto de la ocurrencia de A, es igual a la medida de la variación de la probabilidad de ocurrencia de A cuando ésta está condicionada por el supuesto de la ocurrencia de E , e igual al cociente entre la probabilidad del evento compuesto $(E \cap A)$ y el producto de las probabilidades de ocurrencia de E y A:

$$\frac{p(E / A)}{p(E)} = \frac{p(A / E)}{p(A)} = \frac{p(E \cap A)}{p(E)p(A)}$$

(en particular, para $A = \Omega$, se verificará que $p(E) = p(E / \Omega)$). Asimismo, si las asignaciones de probabilidades que realiza el observador son tales que $p(E / A) = p(E)$, implicará que para él los

---

433. Para una revisión comparativa de estos desarrollos teóricos, ver Fishburn, P.C. (1981). Para un análisis de las condiciones necesarias y suficientes para el cumplimiento de la relación de Koopman, ver Kraft, C .H.; Pratt, J.W.; Seidenberg, A. (1959), Aczel, J. (1961)(1966), Luce, R.D. (1968), Domotor, Z. (1969), Krantz, D.H.; Luce, R.D.; Suppes, P.; Tversky, A. (1971).

434. Ver Paris, J.B. (1994).

eventos E y A son estocásticamente independientes[435].

de Finetti, B. (1972) clasifica la relación de dependencia en "*directa*" e "*indirecta*": la primera (basada en la idea de "*causa*") abarca aquellos casos en los que la ocurrencia de uno de los eventos modifica la condiciones de contorno en que se desenvuelve el otro; la segunda (basada en la idea de "*causa común*") abarca los casos en los que se supone que existen circunstancias que afectan la ocurrencia de ambos fenómenos. Las relaciones de dependencia serán analizadas detenidamente en el Cap. 10.

En el caso de independencia estocástica entre los eventos E y A, la condición necesaria y suficiente para asegurar el cumplimiento de la condición de coherencia es que la evaluación del observador de la probabilidad de ocurrencia del evento definido por el producto lógico $(E \cap A)$ cumpla la relación $p(E \cap A) = p(A)p(E)$.

Generalizando este concepto se puede afirmar que, para un observador, el conjunto $\varepsilon = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$ constituye una clase de eventos estocásticamente independientes, cuando considera que cada evento E_i $(i = 1,2,...,n)$ es independiente de cualquier producto lógico de los otros eventos de la clase ε[436]. En este caso, su evaluación de la probabilidad de cualquier producto lógico de eventos deberá ser igual al producto de las evaluaciones de las probabilidades de los factores, $p\left(\bigcap_i E_i\right) = \prod_i p_i$.

De acuerdo a lo expresado en la Sec. 3.3.3 y como corolario de la condición precedente, se puede afirmar que la probabilidad de ocurrencia de un evento E definido como una suma lógica de eventos constituyentes, $E = \bigcup_i \varepsilon^{(E_i)}$ y, por lo tanto, lógicamente dependiente de $E_1, E_2, ..., E_n$, estará dada por una función algebraica de las evaluaciones de las probabilidades $p(E_i)$ $(i = 1,2,...,n)$.

Como se verá en el Cap. 4, todas las consideraciones realizadas sobre eventos son válidas para las variables aleatorias. Es decir, dados una variable aleatoria X y un evento H tal que $p(H) > 0$, se verifica que:

$$p[(x_1 \leq X \leq x_2) / H] = \frac{p[(x_1 \leq X \leq x_2) \cap H]}{p(H)} \qquad (x_1, x_2 \in \Omega(X))$$

---

435. Nótese que, mientras las nociones de independencia lógica e independencia lineal pertenecen al ámbito de la lógica de lo cierto, la noción de independencia estocástica pertenece al dominio de la lógica de lo probable y asume distintas interpretaciones según cuál sea el concepto de probabilidad adoptado. En este caso posee un significado puramente subjetivo (ver Sec. 2.5).

436. Obviamente, la independencia de a pares o de segundo orden no es suficiente (ver Sec. 3.1.6).

Estos resultados, presentados por de Finetti en su memoria "*Sul significato soggetivo della probabilità*" y enunciados -sin demostración- por P.R. Ramsey en "*Truth and probability*" (ver Baithwaite, R.B. (1931)), demuestran claramente la superioridad de la interpretación subjetivista sobre la logicista. Mientras que, en ésta, los axiomas de la probabilidad sólo pueden ser justificados intuitivamente de una forma vaga y poco satisfactoria, en la teoría subjetivista, a partir de la condición de coherencia, admiten una demostración rigurosa. Además, dado que la teoría subjetiva, contrariamente a la interpretación logicista no necesita obtener "a priori" un supuestamente único grado de creencia racional, convierte en innecesaria la aplicación del principio de indiferencia (o, como máximo, lo considera un elemento heurístico) y, en consecuencia, elimina las paradojas (mencionadas en la Sec. 2.4) que éste genera[437].

3.3.6.- La condición de coherencia y la probabilidad intersubjetiva

Sea dos jugadores, A y B que, a fin de asegurar la condición de coherencia (ver Sec. 2.5), acuerdan apostar sobre la ocurrencia de un evento E de la siguiente forma: B debe elegir un número p que represente su cociente de apuestas sobre la ocurrencia de E y, entonces, A debe elegir el valor de la apuesta S. De modo que, si E ocurre, B le debe pagar a A la cantidad pS a cambio de la cantidad S. Debe tenerse en cuenta que, si bien la cantidad S puede ser positiva o negativa, debe ser relativamente pequeña con respecto a la fortuna de B. Bajo estas condiciones p puede ser interpretada como la medida del grado de creencia de B sobre la ocurrencia del evento E.

Estas consideraciones pueden ser extendidas a un conjunto de individuos $B = \{B_1, B_2\}$. Sea un juego en el que el jugador A está dispuesto a apostar contra un grupo de contrincantes $B = \{B_1, B_2\}$ sobre la ocurrencia de un evento E. Supóngase: **i)** que los respectivos grados de creencia de B_1 y B_2 sobre la ocurrencia de E (p_1 y p_2) sean tales que $p_1 > p_2$ y **ii)** que el jugador A elija una apuesta igual a $S > 0$ para jugar con B_1 y una apuesta igual a $-S$ para jugar con B_2. Entonces, si E ocurre, la ganancia de A estará dada por:

$$G_A = p_1S - S - p_2S + S = (p_1 - p_2)S$$

y, si E no ocurre, la ganancia de A estará dadas por:

$$G_A^* = p_1S - p_2S = (p_1 - p_2)S$$

---

437. Con respecto a la superioridad de la interpretación subjetivista sobre la logicista, Ramsey, F.R. (1926) expresa que "*En primer lugar, nos da una justificación clara de los axiomas del cálculo, cosa que en el sistema del Sr. Keynes es enteramente deficiente. Resulta fácil concluir que si las creencias parciales son consistentes, obedecerán a estos axiomas, pero resulta absolutamente oscuro por qué las deberían satisfacer las misteriosas relaciones lógicas del Sr. Keynes. Deberíamos ser curiosamente ignorantes de las instancias de estas relaciones y curiosamente conocedores de sus leyes generales. En segundo lugar, el principio de indiferencia ahora puede ser totalmente ignorado; (...) Poder eliminar el principio de indiferencia de la lógica formal es una gran ventaja, ya que resulta claramente imposible establecer condiciones puramente lógicas para demostrar su validez, como intentó el Sr. Keynes*".

Luego, se puede concluir que, al menos que $p_1 = p_2$, se verificará que $G_1 > 0$ y $G_2 > 0$. Es decir que, al menos que el conjunto B convenga en una probabilidad intersubjetiva, $p_1 = p_2$, el jugador A podría seleccionar apuestas que lo colocaran en la situación de ganar sobre $B = \{B_1, B_2\}$, cualquiera fuere el resultado del juego.

Supóngase ahora: **i)** que el jugador A esté dispuesto a apostar contra un grupo de contrincantes $B = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$ sobre la ocurrencia de un evento E ; **ii)** que los grados de creencia de los jugadores B_i $(i = 1,2,...,n)$, $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$, no sean todos iguales, es decir, que sea posible hallar dos grados de creencia p_i y p_j tales que $p_i > p_j$ $(i \neq j, i, j = 1,2,...,n)$ y **iii)** que el jugador A elija una apuesta igual a $S > 0$ para jugar con B_i , una apuesta igual a $-S$ para jugar con el jugador B_j y una apuesta $S = 0$ para jugar con un jugador B_h $(i, j \neq h)$. Entonces, de una forma similar a la del teorema anterior, se demuestra que, al menos que el conjunto B convenga en una probabilidad intersubjetiva $p_1 = p_2 = ... = p_n$, el jugador A podría seleccionar apuestas que lo colocaran en la posición de ganar sobre $B = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$, cualquiera fuere el resultado del juego.

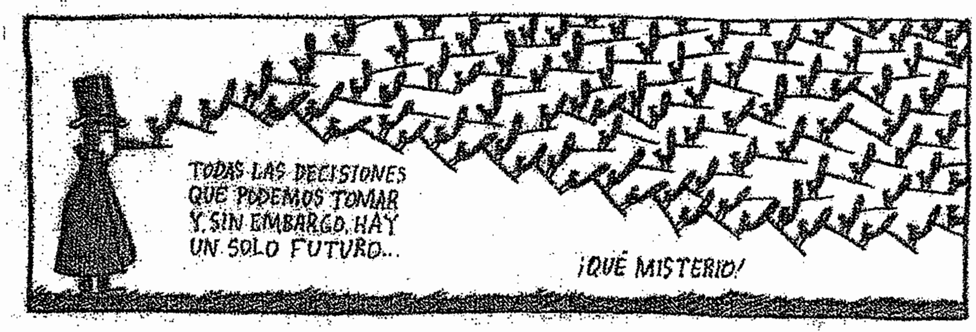
En general, supóngase que: **i)** el jugador A esté dispuesto a jugar contra un grupo de contrincantes $B = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$ sobre la ocurrencia de un conjunto de eventos $E = (E_1, E_2, ..., E_k)$ $(k \geq 1)$ y **ii)** que el grado de creencia del jugador B_i $(i = 1,2,...,n)$ sobre la ocurrencia del evento E_j $(j = 1,2,...,k)$ sea p_{ij} . Si se verifica que $p_{1j} = p_{2j} = ... = p_{nj} = p_j$, entonces se puede considerar al conjunto $B = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$ como si fuera un solo individuo con grado de creencia respecto de la ocurrencia del evento E igual a p_j y, en consecuencia, se pueden aplicar los postulados del primer teorema. Si se verifica además que el cociente de apuestas p_j satisface los axiomas de Kolmogorov entonces, de acuerdo con la expresión recíproca del teorema de Ramsey-de Finetti, se demuestra que el jugador A no está en condiciones de ganar sobre $B = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$ cualquiera fuere el resultado del juego.

Las demostraciones precedentes permiten concluir que, para el grupo social $B = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$ en su conjunto, la posición más favorable en cuanto al cumplimiento de la condición de coherencia (es decir a la protección respecto de un "Dutch book" generado en su contra por el jugador A), sería convenir en una probabilidad intersubjetiva o de consenso.

3.3.7.- Probabilidad inicial y probabilidad final

De acuerdo con de Finetti, B. (1970), el papel que juega la probabilidad en el contexto de la lógica inductiva consiste en precisar cómo "*debe variar*" la asignación de probabilidades referidas a la ocurrencia de un evento futuro en función de la observación de sus realizaciones. Donde el término "*debe variar*" no debe ser interpretado como "debe ser corregida". La probabilidad de ocurrencia de un evento condicionado no es sino una extensión coherente de una función de

Macanudo Por Liniers



probabilidades dada y no "*una mejor evaluación de la probabilidad de un evento condicionado*". En todos los casos esta "*variación*" debe ser interpretada como el equivalente matemático del "*aprendizaje a partir de la experiencia*"[438], de modo que el contenido de la lógica inductiva puede ser resumido en el principio de la probabilidad compuesta o su variante más sofisticada, conocida como el teorema de Bayes.

Interpretando a H como el **estado de información** en que se encuentra un individuo en un momento dado, $p(E/H)$ representará la evaluación de la probabilidad de ocurrencia del evento E, realizada por dicho individuo. De acuerdo con lo expresado por el teorema de Bayes[439], se puede escribir:

$$p(E/H)=\frac{1}{p(H)}p(E)p(H/E)=Kp(E)p(H/E)$$

Lo cual demuestra que la **probabilidad final** ($p(E/H)$) es igual al producto del factor de proporcionalidad K por la **probabilidad inicial** ($p(E)$) y por la **verosimilitud** ($p(H/E)$).

Una generalización de la expresión anterior, permite describir la transformación de las probabilidades iniciales en finales, a través de un proceso progresivo de asunción de distintos estados de información por parte del observador: Sean los estados de información H_1 y H_2. Se verifica, entonces, que:

$$p\left[E/\left(H_1\cap H_2\right)\right]=\frac{p\left(E\cap H_1\cap H_2\right)}{p\left(H_1\cap H_2\right)}=$$

---

438. de Finetti, B. (1970).

439. Este teorema será tratado en el Cap. 13.

$$= \frac{p(E)p(H_1 / E)p[H_2 / (E \cap H_1)]}{p(H_1)p(H_2 / H_1)} =$$

$$= Kp(E)p(H_1 / E)p[H_2 / (E / H_1)]$$

Lo cual demuestra que la **probabilidad final** (la evaluación que el observador realice de la probabilidad de ocurrencia del evento E, después de haber adquirido un estado de información $(H_1 \cap H_2)$) es proporcional al producto de la probabilidad inicial, por la verosimilitud de H_1 dado E, por la verosimilitud de H_2 dado E (de Finetti, B. (1937): "*No importa cuál sea la influencia de una observación en las predicciones del futuro, ésta no implica ni significa de ninguna manera, la corrección de la evaluación primitiva de la probabilidad $p(E_{n+1})$ después de que ésta haya sido 'refutada' por la experiencia, ni su sustitución por otra $p^*(E_{n+1})$ conforme a dicha experiencia y, por lo tanto, 'más próxima a la probabilidad real'; por el contrario, lo que dicha influencia manifiesta es que cuando, por ejemplo, la experiencia nos enseña el resultado A en las n primeras observaciones, nuestro juicio ya no será expresado por $p(E_{n+1})$, sino por la probabilidad $p(E_{n+1} / A)$ (...) Absolutamente nada de nuestra opinión inicial es despreciado o corregido; no es la función p la que ha sido modificada (y reemplazada por otra, p^*), sino el argumento E_{n+1} el que ha sido reemplazado por (E_{n+1} / A). (...) este razonamiento (tal como se manifestó en la elección de la función p) nos permite permanecer fieles a nuestra opinión original y coherentes con nuestro juicio en la variación de nuestras predicciones cuando tiene lugar una variación en las circunstancias conocidas*").

En general, dado un estado de información H, formado por una sucesión de estados de información $\{H_1, H_2, ..., H_n\}$, será:

$$p(E / H) = p[E / (H_1, H_2, ..., H_n)] =$$
$$= Kp(E)p(H_1 / E)p[H_2 / (E \cap H_1)]...p[H_n / (E \cap H_1 \cap ... \cap H_{n-1})]$$

3.3.8.- Una revisión del teorema de Bayes y del Bayesianismo

Con un razonamiento similar, sea una partición finita $H = \{H_1, H_2, ..., H_n\}$ del evento cierto Ω, sea una familia de eventos $\varepsilon = \{E\}$ y sea p una probabilidad definida sobre Ω. Supóngase que cada evento $E \in \varepsilon$ represente una posible observación, es decir, el resultado de un cierto experimento estadístico, y que cada evento $H_i \in H$ pueda ser considerado como un factor que contribuye a la observación E.

Aplicando los postulados del teorema de Bayes, el problema a resolver ahora puede ser planteado en los siguientes términos: suponiendo que se dispone de un criterio para la asignación de la probabilidad de ocurrencia de E en correspondencia con cada uno de los eventos-hipótesis H_i, determinar la evaluación de las probabilidades de dichas hipótesis, condicionadas por las observaciones E [440].

De acuerdo a lo expresado en la Sec. 3.3.5, $p(H_j)p(E/H_j) = p(E)p(H_j/E)$. Relación de la cual se obtiene que, si $p(E>0)$, entonces $p(H_j/E) = p(H_j)\frac{p(E/H_j)}{p(E)}$. Ahora bien, de acuerdo con la condición de **ausencia de conglomerabilidad**, según la cual[441]:

$$E = E \cap \Omega = E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{N} H_i\right) = \bigcup_{i=1}^{N}(H_i \cap E)$$

la ecuación anterior puede ser expresada de la siguiente forma[442]:

$$p(H_j/E) = p(H_j)\frac{p(E/H_j)}{\sum_{i=1}^{N} p(H_i)p(E/H_i)}$$

expresión conocida como la versión de Laplace del teorema de Bayes[443].

Como se vio en la Sec. 3.3.5, desde un punto de vista estrictamente técnico, esta relación no es sino una alternativa de la fórmula de la probabilidad compuesta, que permite afrontar el problema de la inferencia, es decir, el problema de la evaluación de las probabilidades $p(H_i/E)$ de cada hipótesis $H_i \in H$ -cuya evaluación, "a priori" de las observaciones, es $p(H_i)$ - sobre la base de datos empíricos, sintetizados aquí en las observaciones $E \in \varepsilon$.

---

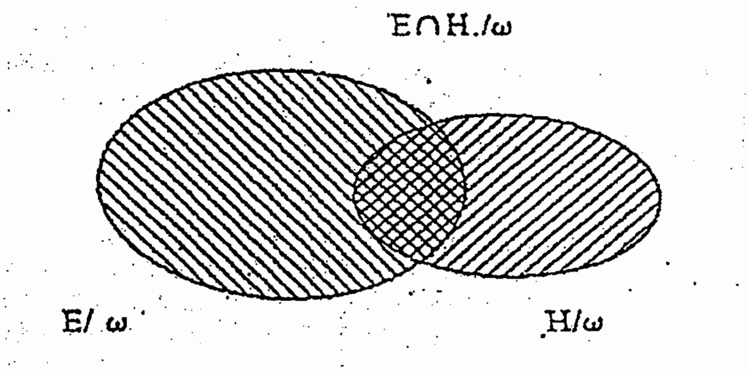
440. En su carta de presentación de "*An essay toward solving a problem in the doctrine of chances*" (1764) de Th. Bayes a la Royal Society, R, Price enuncia este problema de la siguiente forma: "*...hallar un método por el cual podamos obtener alguna conclusión con respecto a la probabilidad de que un evento ocurra, en circunstancias dadas, bajo la suposición de que no conocemos nada acerca de él, excepto que, en las mismas circunstancias, ha ocurrido un cierto número de veces y otro número de veces no ha ocurrido*" (ver Cap. 13).

441. La propiedad conglomerativa (de Finetti, B. (1930e)) está vinculada con la divisibilidad de las medidas de probabilidad (en la literatura Bayesiana la propiedad de no-conglomerabilidad se menciona como de marginalización de las paradojas). Ver Dubins, L.E. (1975), Schervish, M.J.; Seidenfeld, T.; Kadane, J.B. (1984). Ver, además, Sec. 3.3.9,

442. Si se acepta la interpretación subjetivista, de acuerdo con este simple teorema (tan simple que algunos autores , por ejemplo, Cornfield, J. (1975), sostienen que resulta excesivamente solemne denominarlo teorema), no es necesario recurrir a fórmulas empíricas, para caracterizar el razonamiento inductivo (este rechazo de la idea de una probabilidad que depende de un estado de información, es lo que provoca el rechazo de los estadísticos objetivistas a admitir la utilización de la probabilidad inicial $p(E)$ y al empleo de fórmulas empíricas).

443. Laplace, P.S.: "*Mémoire sur la probabilité des causes par les èvénements*" (1774) (ver Cap. 14).

Figura 3.5



A partir de este resultado, se puede concluir que la medida de la variación de la probabilidad debida a un incremento en la información, en un proceso conocido como **condicionamiento Bayesiano**, es proporcional a la llamada **verosimilitud**, $p(E / H_i)$, de acuerdo con una constante $K = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{N} p(H_i)p(E / H_i)}$:

$$p(H_j / E) = Kp(H_j)p(E / H_j)$$

En la **Figura 3.5** se muestra una ilustración de la modificación de la asignación de probabilidades efectuada por el individuo-evaluador en un caso especial de razonamiento por inducción, a partir de las variaciones del conjunto de información de acuerdo con esta regla de condicionamiento Bayesiano[444]. Supóngase que ω represente todo lo que inicialmente se supone verdadero (tomando el área de ω como unitaria). Si a este conjunto de información se agrega una nueva hipótesis H ,la probabilidad del evento (E / H) ya no será igual a la relación entre el área de

---

[444]. Esta interpretación que propone de Finetti, B. (1959) de la inferencia como un caso especial de razonamiento por inducción es rechazada por las concepciones objetivistas que, como se vio en el Cap. 2, mediante la postulación de la existencia de leyes naturales, de características más o menos restrictivas, transforman el razonamiento inductivo en deductivo (de Finetti, B. (1959): "*Hablar de razonamiento inductivo significa atribuir un cierto valor a esta forma de aprendizaje a partir de la experiencia, no considerarlo como la consecuencia de una reacción psicológica peculiar, sino como un proceso mental susceptible de análisis, interpretación y justificación. Cuando esto ocurre, la tendencia a sobreestimar el razonamiento al extremo de excluir cualquier otro factor, puede generar un sesgo perjudicial. La razón constituye un suplemento invarolable de otras facultades intuitivas, pero nunca un sustituo de ellas (...) Una consecuencia de este sesgo es la elevación del razonamiento deductivo a un status estándar, habida cuenta que las verdades no tautológicas se basan en algo más. De esta forma el razonamiento inductivo es considerado generalmente como algo de menor nivel que genera cautela y sospecha. Y lo que es peor aún, se intenta otorgarle dignidad, procurando modificar su naturaleza asimilándolo a algo que podría casi ser incluido bajo un razonamiento deductivo. En efecto, a menudo se encuentran intentos de explicar la inducción sin considerar el término 'probabilidad' o tratando de apartar este término de su significado cotidiano como una medida del grado de creencia atribuido a las distintas alternativas posibles*").

$\left[(E \cap H)/\omega\right]$ y el área de (H/ω). Si esta desigualdad no se cumpliera, es decir, si se verificara que:

$$\frac{p\left[(E \cap H)/\omega\right]}{p(H/\omega)} = \frac{p(E)}{p(\omega)}$$

se podría concluir que los eventos son estocásticamente independientes[445].

Cuando se incorpora una nueva información H, queda excluido del universo todo lo que resulta lógicamente incompatible con H. Normalizando, entonces, nuevamente la medida, es decir, haciendo al área de $(\omega \cap H)$ igual a 1, se obtiene que $p\left[E/(\omega \cap H)\right]$ es igual a la relación entre el área de $\left[(E \cap H)/\omega\right]$ y el área de (H/ω).

Si bien a partir de este condicionamiento Bayesiano de Finetti puede ser considerado un Bayesiano, debe tenerse en cuenta que en "*La prévision: Ses lois logiques, ses sources subjectives*" (1937) incluye una crítica a la interpretación usual del paradigma de Bayes-Laplace[446] y en "*La probabilità e la statistica nei rapporti con l'induzione*" (1959) hace mención a la "*reconstrucción de la formulación clásica del Bayesianismo de acuerdo con el punto de vista subjetivista*" a partir de la introducción de las condiciones de intercambiabilidad y de intercambiabilidad parcial[447] en la lógica inductiva.

Una objeción que se hace a menudo a este condicionante Bayesiano de de Finetti es que, dado que la experiencia con que cuenta el individuo-evaluador presenta tal grado de complejidad que no es expresable bajo la forma de una proposición (es decir, dado que no todo lo que constituye la experiencia puede ser considerado como un evento perfectamente definido), esta regla no siempre puede proporcionar una explicación sobre las variaciones en las evaluaciones de las probabilidades ante variaciones en el conjunto de información (es decir, no siempre el individuo puede explicar la modificación de sus evaluaciones de las probabilidades de acuerdo con un condicionamiento Bayesiano).

Esta objeción se relaciona, fundamentalmente, con dos problemas muy discutidos en la literatura sobre teoría de la probabilidad: el de la **prueba incierta** y el de la **probabilidad indeterminada.** El primero deriva del hecho que el proceso de condicionamiento de la probabilidad

---

445. Supóngase que, dado un problema, exista un conjunto de hipótesis posibles a ser consideradas, $\{H_\theta\}$, donde $\theta \in R_1$, con una distribución de probabilidades "a priori" $p(\theta)$ que variará hacia una distribución "a posteriori" $p(H_\theta / e) = p(\theta / e)$ (ambas distribuciones existen sobre el conjunto de hipótesis en consideración). El procedimiento probabilístico, conocido como **verificación Bayesiana de hipótesis** consiste en la definición de criterios de selección para determinar cuál es la hipótesis más plausible con relación a las hipótesis alternativas relacionadas con un fenómeno aleatorio.

446. Ver Cap. 14. Ver además Daboni, L.; Wedlin, A. (1982), Campanino, M.; Spizzichino, F. (1981), Cifarelli, D.M.; Regazzini, E. (1982), Spizzichino, F. (1988).

447. Ver Sec. 3.3.10.

no parece ser capaz de tomar en consideración la relevancia de ciertos indicios que se agregan al conjunto de información[448]. Una solución a este problema fue desarrollada por Jeffrey, R.C. (1965) utilizando una versión generalizada del teorema de Bayes, que permite traducir cualquier tipo de variación en las evaluaciones de las probabilidad a condicionamientos Bayesianos.

El problema de la probabilidad indeterminada deriva del hecho que, a veces, el individuo evaluador parece no estar en condiciones de efectuar asignaciones de probabilidad puntuales (debido a su falta de decisión sobre la probabilidad a atribuir a los eventos individuales). A fin de resolver esta cuestión algunos autores[449] recurrieron al arbitrio de considerar matemáticamente este comportamiento mediante la utilización de intervalos (en vez de valores puntuales) para representar los grados de confiabilidad. de Finetti es contrario a esta interpretación por considerarla una tentativa inútil para eliminar las inevitables idealizaciones que acompañan a todo esquema matemático[450].

Ejemplo nº 3.10:

Sea una urna cuya composición se realiza de acuerdo con el siguiente procedimiento: Se arroja 6 veces un dado clásico, si se obtiene 6 veces el resultado "cuatro", se colocan en la urna 6 bolillas todas numeradas con el número "cuatro". Si se obtiene por lo menos una vez un resultado distinto de "cuatro", se colocan en la urna 6 bolillas numeradas del 1 al 6.

Sean los eventos:

$$H_1 : \textit{que la urna contenga bolillas con el numero } 4$$
$$H_2 : \textit{que la urna contenga seis bolillas con los numeros } 1,2,3,4,5 \; y \; 6$$

Entonces, será:

$$p(H_1) = p(6 \cap 6 \cap 6 \cap 6 \cap 6 \cap 6) = \left(\frac{1}{6}\right)^6 = \frac{1}{46656}$$
$$p(H_2) = 1 - p(6 \cap 6 \cap 6 \cap 6 \cap 6 \cap 6) = \frac{46655}{46656}$$

Supóngase que se realicen 5 extracciones con reposición de la urna, y sea el evento:

---

448. Para un análisis detallado acerca de esta aparente falta de habilidad del observador para evaluar el impacto de las evidencias de acuerdo a la condicionalidad Bayesiana, ver Peterson, C.R.; Schneider, R.J.; Miller, A.J. (1965), Philips, L.D.; Edwards, A.W.F. (1966), Pitz, G.F.; Downing, L.; Reinhold, H. (1967), Edwards, A.W.F. (1967), Kahneman, Du Charme, W.M.; Peterson, C.R. (1968), Tversky, A.; Kahneman, D. (1972), Kahneman, D.; Tversky, A. (1972), D.; Tversky, A. (1973), Winkler, R.L.; Murphy, A.M. (1973), Yousseff, Z.I.; Peterson, C.R. (1973), Gigerenzer, G.; Hell, W.; Blank, H. (1988).

449. Ver Koopman, B.O. (1940), Smith, C.A.B. (1961), Dempster, A.P. (1967), Levi, I. (1974), Good, I.J. (1983), Suppes, P.; Zanotti, M. (1989).

450. Ver de Finetti, B.; Savage, L.J. (1993).

$$E: que\ se\ presente\ 5\ veces\ el\ resultado\ 'cuatro'"$$

Se obtiene fácilmente que las verosimilitudes toman los valores $p(E / H_1) = 1$ y $p(E / H_2) = \frac{1}{7776}$.
Luego, de acuerdo con el teorema de Bayes, se obtiene que:

$$p(H_1 / E) = \frac{p(H_1)p(E / H_1)}{p(H_1)p(E / H_1) + p(H_2)p(E / H_2)} = 0{,}14286$$

$$p(H_2 / E) = \frac{p(H_2)p(E / H_2)}{p(H_1)p(E / H_1) + p(H_2)p(E / H_2)} = 0{,}85714$$

Se concluye, entonces, que, a pesar de que la verosimilitud asume su valor máximo para H_1, se verifica que $p(H_1 / E) < p(H_2 / E)$.

Ejemplo nº 3.11:

Sea p la probabilidad del evento:

A: que un estudiante conozca la respuesta correcta a una pregunta de un cuestionario con n alternativas posibles

(de modo que si no conoce la respuesta seleccionará al azar alguna de las n respuestas posibles). Sea B el evento "*que el estudiante responda correctamente*". Se tiene, entonces, que $p(A) = p$, $p(B / \overline{A}) = \frac{1}{n}$ y $p(B / A) = 1$. Luego, de acuerdo con el teorema de Bayes, resulta que:

$$p(A / B) = Kp(A)p(B / A) = Kp$$

$$p(\overline{A} / B) = Kp(\overline{A})p(B / \overline{A}) = K\frac{1-p}{n}$$

De estos resultados se puede concluir que, si $1 - p > np$, es decir, si se verifica que $p < \frac{1}{n+1}$, resulta que $p(\overline{A} / B) > p(A / B)$. Es decir, si se verifica que el estudiante responde correctamente, es más probable que este fenómeno se deba más al azar, que al conocimiento de la respuesta correcta.

Ejemplo nº 3.12:

Sea una urna que contiene N bolillas, de las cuales un número $N^{(b)}$ (desconocido para el observador) son blancas. Supóngase que se realicen n extracciones con reposición. Denotando por H_k a la hipótesis "*el número de bolillas blancas en la urna es* $N_k^{(b)}$", y por $E_i^{(n)}$ al evento "*que se obtengan* i *bolillas blancas (éxitos) en una sucesión dada de* n *extracciones*", se obtiene que:

$$p\left(E_i^{(n)} / H_k\right) = \left(\frac{N_k^{(b)}}{N}\right)^i \left(1 - \frac{N_k^{(b)}}{N}\right)^{n-i} = \left(\theta_k^{(b)}\right)^i \left(1 - \theta_k^{(b)}\right)^{n-i}$$

$$p\left(E_i^{(n)}\right) = \sum_{k=0}^{N} p(H_k)\left(\theta_k^{(b)}\right)^i \left(1 - \theta_k^{(b)}\right)^{n-i}$$

En particular, si se supone la equiprobabilidad de todas las posibles composiciones de la urna, es decir, si $p(H_k) = \frac{1}{N+1}\,(k = 0,1,2,\ldots,N)$, de acuerdo con el teorema de Bayes, se obtiene que:

$$p\left(H_k / E_i^{(b)}\right) = \frac{p(H_k)\left(\theta_k^{(b)}\right)^i \left(1 - \theta_k^{(b)}\right)^{n-i}}{\sum_{j=0}^{N} p(H_j)\left(\theta_j^{(b)}\right)^i \left(1 - \theta_j^{(b)}\right)^{n-i}} =$$

$$= K\left(\theta_k^{(b)}\right)^i \left(1 - \theta_k^{(b)}\right)^{n-i} \qquad \left(i \le k \le N - (n - i)\right)$$

donde $K = \frac{1}{\sum_{j=0}^{N}\left(\theta_j^{(b)}\right)^i \left(1 - \theta_j^{(b)}\right)^{n-i}}$.

Igualando a cero la derivada de la función $p\left(H_k / E_i^{(n)}\right)$ respecto a $\theta_k^{(b)}$ resulta que, suponiendo la equiprobabilidad de las distintas composiciones, la composición más probable corresponde a un valor $\theta_k^{(b)} = \frac{i}{n}$, es decir, a un número $N_k^{(b)} = \frac{iN}{n}$ de bolillas blancas.

Ejemplo nº 3.13:

Supóngase que el número de desperfectos a sufrir por un cierto aparato en un año obedezca a una distribución de probabilidades de Poisson de la forma[451]:

$$f(x / \theta) = \frac{\theta^x}{x!} e^{-\theta} \qquad (x = 0,1,2,\ldots)$$

---

[451]. La distribución de Poisson será tratada con detalle en el Cap. 7.

donde el coeficiente θ (que define, en este caso, el número promedio de desperfectos en un año) es desconocido. Toda la información referida a la variable aleatoria θ está resumida en la distribución inicial $g(\theta)$, que en este caso se supone definida por:

$$g(\theta) = k\theta^{C_0 - 1} e^{\lambda_0 \theta} \qquad (\theta > 0)$$

donde C_0 es un número natural, $\lambda_0 > 0$ y k es una constante tal que $\int_0^\infty g(\theta) d\theta = 1$.

El número de desperfectos ($x_i, i = 0,1,2,...$) sufridos en un año por cada uno de n aparatos similares a aquél en estudio, define una muestra aleatoria. Luego, la probabilidad de que el i-ésimo aparato sufra x_i desperfectos en un año, estará dada por:

$$f(x_i / \theta) = \frac{\theta^{x_i}}{x_i!} e^{-\theta}$$

De modo que la función de verosimilitud queda definida de la siguiente forma:

$$f(x / \theta) = \frac{\theta^{x_1 + x_2 + ... + x_n}}{x_1! x_2! ... x_n!} e^{-n\theta}$$

En consecuencia, la distribución de probabilidades final de la variable θ será de la forma:

$$f(\theta / x) = K(x) \theta^{C_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i - 1} e^{-(\lambda_0 + n)} = K(x) \theta^{C-1} e^{-\lambda\theta}$$

donde $C = C_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i$ y $\lambda = \lambda_0 + n$. Por otra parte, haciendo:

$$\int_0^\infty f(\theta / x) d\theta = 1 = K(x) \int_0^\infty \theta^{C-1} e^{-\lambda\theta} d\theta = K(x) \frac{1}{\lambda^C} \int_0^\infty (\lambda\theta)^{C-1} e^{-\lambda\theta} d(\lambda\theta)$$

se obtiene que:

$$K(x) = \frac{\lambda^C}{\int_0^\infty u^C e^{-u} du} = \frac{\lambda^C}{u^C (-e^{-u}) \Big|_0^\infty + C \int_0^\infty u^{C-1} e^{-u} du} = \frac{\lambda^C}{(C-1)!}$$

Ejemplo nº 3.14:

Sea una urna que contiene 10 monedas de las cuales 9 son normales y una es defectuosa, con dos "caras". Supóngase que de dicha urna se realice una extracción al azar, sin observar la moneda y, a fin de calcular la probabilidad de que la moneda extraida sea defectuosa, se efectúen 6 lanzamientos, obteniéndose 6 veces el resultado "cara".

Sean los eventos:

H: *que la moneda extraida sea defectuosa*

E: *obtener 6 veces el resultado "cara" al lanzar 6 veces una moneda*

Antes de realizar cualquier observación experimental, se obtiene que $p(H)=\frac{1}{10}$ y, dado que $H \subset E$, resulta que $p(E \cap H) = p(H)$. Por otra parte, por el teorema de la probabilidad compuesta, será:

$$p(E \cap \overline{H}) = p(E / \overline{H})p(\overline{H})$$

Luego, dado que $p(E/\overline{H}) = \frac{1}{2^6}$, se obtiene que la probabilidad de que la moneda extraída sea defectuosa, si de una serie de 6 lanzamientos realizados con la misma se obtuvieron 6 resultados "cara", es:

$$\begin{aligned} p(H/E) &= \frac{p(H \cap E)}{p(E)} = \frac{p(H \cap E)}{p(E \cap \Omega)} = \\ &= \frac{p(H \cap E)}{p\left[E \cap \left(H \cup \overline{H}\right)\right]} = \frac{p(H \cap E)}{p(E \cap H) + p(E \cap \overline{H})} = \\ &= \frac{p(H)}{p(H) + p(E/\overline{H})p(\overline{H})} = \frac{64}{73} \end{aligned}$$

Nótese cómo la evaluación inicial $p(H) = \frac{1}{10}$ (que no tiene en cuenta la información proporcionada por el fenómeno E), se modifica, transformándose en la evaluación final $p(H/E) = \frac{64}{73}$.

Ejemplo nº 3.15:

Sea una baraja francesa de 52 cartas, de la cual se realizan dos extracciones al azar sin reposición y sin observar el resultado obtenido. Denotando, respectivamente, por D_1 y D_2 a los eventos "*obtener una carta 'diamante' en la primera extracción*" y "*obtener una carta 'diamante'* *en la segunda extracción*", la probabilidad de que al menos una de las cartas sea "diamante" (E) puede ser definida de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
p(E) &= p\left[\left(D_1 \cap \overline{D}_2\right) \cup \left(\overline{D}_1 \cap D_2\right) \cup \left(D_1 \cap D_2\right)\right] = \\
&= 1 - p\left(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2\right) = \\
&= 1 - p\left(\overline{D}_1\right) p\left(\overline{D}_2 / \overline{D}_1\right) = \\
&= 1 - \frac{39}{52}\frac{38}{51} = \frac{15}{34} = 0.4412
\end{aligned}
$$

Supóngase que quien realiza las extracciones seleccione al azar una de las dos cartas extraídas precedentemente e informe al individuo-evaluador que no es "diamante" (evento que se denotará por $\overline{D}_1^*$). Sea H_1 el evento que representa a este proceso:

$$
\begin{aligned}
H_1 = {} & \left(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2\right) \cap \left[\overline{D}_1^* / \left(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2\right)\right] \cup \\
& \cup \left(\left[\left(D_1 \cap \overline{D}_2\right) \cup \left(\overline{D}_1 \cap D_2\right)\right] \cap \left\{\overline{D}_1^* / \left[\left(D_1 \cap \overline{D}_2\right) \cup \left(\overline{D}_1 \cap D_2\right)\right]\right\}\right)
\end{aligned}
$$

Luego, será:

$$
\begin{aligned}
p(H_1) &= p\left(\overline{D}_1 \cap D_2\right)1 + p\left[\left(D_1 \cap \overline{D}_2\right) \cup \left(\overline{D}_1 \cap D_2\right)\right]\frac{1}{2} = \\
&= \frac{39}{52}\frac{38}{51} + 2\frac{13}{52}\frac{39}{51}\frac{1}{2} = \frac{51}{68}
\end{aligned}
$$

Por otra parte, se verifica que:

$$
\begin{aligned}
p(E \cap H_1) &= p\left\{\left[\left(D_1 \cap \overline{D}_2\right) \cup \left(\overline{D}_1 \cap D_2\right)\right] \cap \overline{D}_1^*\right\} = \\
&= p\left[\left(D_1 \cap \overline{D}_2\right) \cup \left(\overline{D}_1 \cap D_2\right)\right] p\left\{\overline{D}_1^* / \left[\left(D_1 \cap \overline{D}_2\right) \cup \left(\overline{D}_1 \cap D_2\right)\right]\right\} = \\
&= 2\frac{13}{52}\frac{39}{51}\frac{1}{2} = \frac{13}{68}
\end{aligned}
$$

En consecuencia, sobre la base de la información disponible (H_1), se puede efectuar la siguiente nueva evaluación de la probabilidad de que por lo menos una de las cartas sea "diamante":

$$
p(E / H_1) = \frac{13}{51} = 0.2549
$$

Supóngase que el experimento anterior se haya repetido dos veces (previa incorporación de las dos cartas extraídas inicialmente), y que las dos veces, quien realiza las extracciones haya informado al individuo-evaluador que la carta observada no es “diamante”. El evento H_2 que representa a este proceso puede ser expresado, entonces, de la siguiente forma:

$$H_2 = H_1 \cap \overline{D}_2^* =$$
$$= \left(\left(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 \right) \cap \left[\overline{D}_1^* / \left(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 \right) \right] \cap \left\{ \overline{D}_2^* / \left[\left(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 \right) \cap \overline{D}_1^* \cap \overline{D}_2^* \right] \right\} \right) \cup$$
$$\cup \left(\left[\left(D_1 \cap \overline{D}_2 \right) \cup \left(\overline{D}_1 \cap D_2 \right) \right] \cap \left\{ D_1^* / \left[\left(D_1 \cap \overline{D}_2 \right) \cup \left(\overline{D}_1 \cap D_2 \right) \right] \right\} \cap \right.$$
$$\left. \cap \left\{ \overline{D}_2^* / \left(\left[\left(D_1 \cap \overline{D}_2 \right) \cup \left(\overline{D}_1 \cap D_2 \right) \right] \cap \overline{D}_1^* \right) \right\} \right)$$

De modo que:

$$p(H_2) = p\left(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 \right)(1)(1) + p\left[\left(D_1 \cap \overline{D}_2 \right) \cup \left(\overline{D}_1 \cap D_2 \right) \right] \frac{1}{2}\frac{1}{2} =$$
$$= \frac{38}{68} + \frac{13}{68}\frac{1}{2}$$

Por otra parte, se verifica que:

$$p(E \cap H_2) =$$
$$= p\left[\left(D_1 \cap \overline{D}_2 \right) \cup \left(\overline{D}_1 \cap D_2 \right) \right] p\left\{ \overline{D}_1^* / \left[\left(D_1 \cap \overline{D}_2 \right) \cup \left(\overline{D}_1 \cap D_2 \right) \right] \right\}.$$
$$.p\left\{ \overline{D}_2^* / \left(\left[\left(D_1 \cap \overline{D}_2 \right) \cup \left(\overline{D}_1 \cap D_2 \right) \right] \cap \overline{D}_1^* \right) \right\} =$$
$$= \frac{13}{68}\frac{1}{2}$$

Luego, en base a la información disponible, ahora se obtiene que:

$$p(E / H_2) = \frac{1}{1 + \frac{19}{13} 2^2} = 0.1461$$

Supóngase, en general, que el experimento en cuestión se haya repetido n veces (previa incorporación cada vez de las dos cartas extraídas inicialmente), y que las n veces quien realiza las extracciones haya informado que la carta observada no es “diamante”. El evento H_n que representa a este proceso será, entonces, de la forma:

$$H_n = H_1 \cap \overline{D}_2^* \cap \overline{D}_3^* \cap ... \cap \overline{D}_n^*$$

De modo que $p(H_n) = \frac{38}{68} + \frac{26}{68}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ y $p(E \cap H_n) = \frac{26}{68}\left(\frac{1}{2}\right)^n$. A partir de estas igualdades se obtiene que $p(E / H_n) = \frac{1}{1 + \frac{19}{13}2^n}$. Expresión de la que se concluye fácilmente que $\lim_{n \to \infty} p(E / H_n) = 0$. Resultado que parece lógico si se tiene en cuenta que el hecho que se verifiquen los eventos $H_1, H_2, ..., H_n, ...$ va a hacer que el grado de confiabilidad del individuo-evaluador en la ocurrencia del evento "*que una de las cartas extraídas inicialmente sea 'diamante'*" disminuya inevitablemente.

Ejemplo nº 3.16:

Sean A_1, A_2 y A_3 tres condenados a muerte a quienes se les anuncia que sólo dos de ellos serán ajusticiados ya que uno, seleccionado al azar, ha sido indultado. Sean los eventos:

$$I_i: \textit{que el condenado } A_i \textit{ haya sido indultado} \qquad (i = 1,2,3)$$

y sean $p(I_i) = \frac{1}{3}\,(i = 1,2,3)$ las correspondientes probabilidades.

El condenado A_1 observa que, por lo menos uno de sus dos compañeros será ajusticiado y solicita que se le revele el nombre. Su pedido se basa en el siguiente razonamiento: si se incrementa su conjunto de información con el dato "A_2 *será ajusticiado*", entonces su probabilidad de ser indultado aumentará, $p(I_1 / \bar{I}_2) = \frac{1}{2} > p(I_1)$. De la misma forma, si la información adicional fuera "A_3 *será ajusticiado*", se verificará que $p(I_1 / \bar{I}_3) = \frac{1}{2} > p(I_1)$. Esta deducción realizada por A_1 -que le permite suponer que el conocimiento del nombre de uno de los ajusticiados aumentará su probabilidad de ser indultado, y que matemáticamente parece correcta- adolece de un defecto: supone que $\bar{I}_2$ constituye el evento condicionante. En realidad, el evento condicionante sería "*se le comunica a* A_1 *que* A_2 *será ajusticiado*" (I_2^*), y puede ser expresado como $I_1^* = I_3 \cup (I_1 \cap I_2^*)$ (obsérvese que el evento I_2^* se verifica aún cuando el otro condenado a ser ajusticiado, junto con A_2, sea A_1). A partir de la relación precedente se puede escribir[452]:

---

[452]. Obsérvese que de la expresión que figura en el texto se obtiene que $p(I_3) = p(I_2^*)p\left[1 - p(I_1 / I_2^*)\right] = = p(\bar{I}_1 \cap I_2^*)$.

$$p\left(I_2^*\right) = p\left(I_3\right) + p\left(I_1\right) p\left(I_2^* / I_1\right)$$

Luego, si el informante, en la hipótesis " A_1 *ha sido indultado*", selecciona al azar -con igual probabilidad- el nombre a comunicar a A_1 del compañero que será ajusticiado, es decir, si $p\left(I_2^* / I_1\right) = \frac{1}{2}$, entonces se obtiene que:

$$p\left(I_2^*\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = p\left(I_2^* / I_1\right)$$

Por lo tanto, en la hipótesis "*se le comunica a* A_1 *que* A_2 *será ajusticiado*", la probabilidad de que A_1 haya sido indultado, será:

$$p\left(I_1 / I_2^*\right) = \frac{p\left(I_1 \cap I_2^*\right)}{p\left(I_2^*\right)} = \frac{p\left(I_1\right) p\left(I_2^* / I_1\right)}{p\left(I_2^*\right)} = p\left(I_1\right) = \frac{1}{3}$$

De lo que se puede concluir que, si se verifica que $p\left(I_2^* / I_1\right) = \frac{1}{2}$ (es decir, si en la hipótesis" A_1 *ha sido indultado*", el informante selecciona al azar, con igual probabilidad, el nombre a comunicar a A_1), el conocimiento del nombre de un compañero que será ajusticiado no modifica la probabilidad de A_1 de ser indultado.

En general, si se toman en consideración las definiciones de las probabilidades $p\left(I_2^*\right)$ y $p\left(I_2^* / I_1\right)$ mencionadas precedentemente, se puede escribir:

$$p\left(I_1 / I_2^*\right) = \frac{p\left(I_2^* / I_1\right)}{1 + p\left(I_2^* / I_1\right)}$$

Luego, el razonamiento de A_1 -que, como se mencionó en la página precedente, corresponde, en realidad, a la consideración de que $p\left(I_1 / I_2^*\right) = \frac{1}{2}$ - será correcto sólo si $p\left(I_2^* / I_1\right) = 1$.

De modo que se puede concluir entonces que, si el informante, junto con el nombre del compañero que será ajusticiado, no comunica a A_1 -en la hipótesis " A_1 *ha sido indultado*"- el método utilizado para seleccionar dicho nombre, entonces la evaluación de la probabilidad $p\left(I_1 / I_2^*\right)$ será necesaria e incuestionablemente subjetiva.

3.3.9.- La independencia estocástica condicionada

Sea $H = \{H_1, H_2, ..., H_n\}$ una partición finita del evento cierto Ω, con asignaciones de probabilidad $p(H_i) = p_i$ y sean dos eventos, E_1 y E_2, cuyas asignaciones de probabilidad, condicionadas por el supuesto de la ocurrencia de una hipótesis H_i, son:

$$p(E_1 / H_i) = q_1^{(i)} \qquad (i = 1,2,...,n)$$
$$p(E_2 / H_i) = q_2^{(i)} \qquad (i = 1,2,...,n)$$

Entonces, será:

$$\begin{aligned} p(E_1 \cap E_2) &= \sum_i p_i p\left[(E_1 \cap E_2) / H_i\right] = \sum_i p_1 q_1^{(i)} q_2^{(i)} = \\ &= \sum_i p_i \left[q_1 + \left(q_1^{(i)} - q_1\right)\right]\left[q_2 + \left(q_2^{(i)} - q_2\right)\right] = \\ &= q_1 q_2 + \sum_i p_i \left(q_1^{(i)} - q_1\right)\left(q_2^{(i)} - q_2\right) \end{aligned}$$

Donde, de acuerdo con la propiedad conglomerativa, q_1 y q_2 denotan, respectivamente, las evaluaciones de las probabilidades $p(E_1) = \sum_i p_i q_1^{(i)}$ y $p(E_2) = \sum_i p_i q_2^{(i)}$.

Si se supone que los eventos E_1 y E_2 son estocásticamente independientes, para que se cumpla la condición de coherencia, la evaluación de la probabilidad de ocurrencia del evento compuesto $(E_1 \cap E_2)$ deberá ser tal que:

$$\begin{aligned} p(E_1 \cap E_2) &= p(E_1) p(E_2) = \\ &= \left[\sum_i p(H_i) p(E_1 / H_i)\right]\left[\sum_i p(H_i) p(E_2 / H_i)\right] = \\ &= \left(\sum_i p_i q_1^{(i)}\right)\left(\sum_i p_i q_2^{(i)}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i q_1^{(i)} q_2^{(i)} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} p_i p_j \left[q_1^{(i)} q_2^{(i)} + q_1^{(j)} q_2^{(j)}\right] \end{aligned}$$

Luego, será:

$$p(E_1 \cap E_2) - p(E_1)p(E_2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i q_1^{(i)} q_2^{(i)} - \sum_{i=1}^{n} p_i^2 q_1^{(i)} q_2^{(i)} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} p_i p_j \left[q_1^{(i)} q_2^{(j)} + q_1^{(j)} q_2^{(i)} \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \left(q_1^{(i)} - q_1 \right) \left(q_2^{(i)} - q_2 \right)$$

Es decir, suponiendo que las probabilidades de las hipótesis ($p_i \ (i = 1,2,...,n)$) sean no-nulas, la condición de independencia estocástica entre los eventos E_1 y E_2 ($p(E_1 \cap E_2) = p(E_1)p(E_2)$) se dará cuando se verifique que, por lo menos uno de los eventos (E_1 o E_2) es estocásticamente independiente de las hipótesis ($H_i \ (i = 1,2,...,n)$):

$$p(E_j) = p(E_j / H_1) = ... = p(E_j / H_n) \qquad (j = 1,2)$$

Debe tenerse en cuenta que dos eventos estocásticamente independientes con respecto a una hipótesis, pueden ser correlacionados entre sí.

3.3.10.- La propiedad de intercambiabilidad

En cierto sentido el concepto de intercambiabilidad es el equivalente, en la interpretación subjetivista, a la noción de independencia en la interpretación objetivista. Constituye una forma alternativa de expresión del concepto de independencia con probabilidad constante, pero desconocida.

Como se vio en la Sec. 3.3.5, una sucesión $\{E_1, E_2, ..., E_n, ..\}$ es de eventos independientes de orden n si se verifica que:

$$p(E_1 \cap E_2 \cap .. \cap E_n) = p(E^{(n)}) = p(E_1)p(E_2)...p(E_n) = p(E_n)p(E^{(n-1)})$$

Es decir, si $p(E_n / E^{(n-1)}) = p(E_n)$. En el contexto Bayesiano esta igualdad indica que, en las condiciones de independencia supuestas, no es posible **aprender** acerca del comportamiento de esta sucesión de eventos a partir de la experiencia[453]. Ahora bien, en general, en el ámbito de la interpretación subjetivista, se supone que habitualmente el individuo-evaluador modifica sus asignaciones de probabilidad a partir de la información que le proporcionan las frecuencias, lo cual permite concluir que la aplicación de la condición de independencia se dará muy raramente en la

[453]. de Finetti, B. (1931a): "*Si el resultado de las pruebas precedentes puede modificar mi opinión, para mí son dependientes y no independientes (...) Si, como respuesta a la observación de las frecuencias, admito la posibilidad de modificar mi juicio sobre la probabilidad, significa que -por definición- mi juicio sobre la probabilidad de una prueba no es independiente de los resultados de las otras pruebas...*"

teoría subjetiva.

Se dice que una sucesión de eventos $\{E_1, E_2, ..., E_n, ...\}$ es intercambiable si, para cualquier sucesión finita $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$, la distribución de probabilidades conjunta es la misma[454].

Sea $E^*_{(n)}$ el promedio de esta sucesión de eventos, $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$:

$$E^*_{(n)} = \frac{1}{n}\left(E_1 + E_2 + ... + E_n\right)$$

En su **teorema de representación** de Finetti, B. (1937a) demuestra que, cuando $n \to \infty$, la función de distribución $F_n(\pi) = p\left(E^*_{(n)} \leq \pi\right)$ converge en-distribución a una función límite $F(\pi)$ (excepto en puntos de discontinuidad) y, como corolario establece la vinculación de los conceptos de intercambiabilidad e independencia: "*Sea* $p_x(E)$ *la probabilidad atribuida a un evento genérico* E *cuando los eventos* $E_1, E_2, ..., E_n$ *son considerados independientes e igualmente probables con probabilidad* π *, si se supone que los eventos* E_i *son intercambiables con distribución límite* $F(\xi)$*, la probabilidad* $p(E)$ *del mismo evento genérico está dada por* $p(E) = \int_0^1 p_x(E)dF(x)$. *Esta propiedad puede ser expresada de la siguiente forma: las distribuciones de probabilidad* p *correspondiente al caso de eventos intercambiables son combinaciones lineales de las distribuciones* p_x *correspondientes al caso de eventos independientes equiprobables, las ponderaciones en las combinaciones lineales están expresadas por* $F(x)$ ".

Cuando, de acuerdo con una interpretación objetivista, se supone independencia y se formulan las ecuaciones correspondientes, la interpretación subjetivista sólo puede reinterpretar dichas ecuaciones a partir de probabilidades subjetivas e intercambiabilidad.

Obsérvese que la interpretación de la condición de intercambiabilidad como aquélla que permite traducir la vaga noción de "elementos aleatorios análogos" a un lenguaje probabilístico se basa en una concepción subjetivista y la solución del problema de la inducción a través del teorema asintótico para distribuciones predictivas es, obviamente, subjetiva "*...pero perfectamente lógica en sí misma en tanto que, por otra parte, cuando se pretende eliminar los factores subjetivos lo único que se logra es esconderlos (...) con mayor o menor éxito, pero nunca evitar una brecha en la*

[454]. El concepto de intercambiabilidad es atribuible exclusivamente a de Finetti. En Ramsey, F.P. (1931) sólo figura una derivación de la regla de sucesión de Laplace, utilizando la condición de permutaciones igualmente probables, que puede considerarse equivalente a la condición de intercambiabilidad (ver Galavotti, M.C. (1994)) y que presumiblemente Ramsey adoptó a partir del **postulado de la permutación** debido a su maestro, W.E. Johnson (para un análisis detallado de la contribución de Johnson a la filosofía de la probabilidad, ver Zabell, S.L. (1989)). de Finetti no sólo definió la intercambiabilidad sino que desarrolló la **teoría matemática de las cantidades aleatorias intercambiables** en la ya mencionada serie de trabajos que tuvieron su culminación en "*La prévision: ses lois logiques, ses sources subjetives*" de 1937.

lógica. Es verdad que en muchos casos -como por ejemplo en la hipótesis de intercambiabilidad- estos factores subjetivos, dado que la experiencia es bastante rica, nunca poseen una influencia muy pronunciada. Si bien esta circunstancia es muy importante para explicar cómo, en ciertas condiciones, se produce un acuerdo más o menos estrecho entre las predicciones que producen diferentes individuos, también demuestra que las opiniones discordantes son siempre legítimas"[455].

Dado que, como se expresó en la Sec. 3.3.4 al tratar la cuestión de la aditividad numerable, si bien es razonable suponer una representabilidad aceptable de un juicio sobre el comportamiento de un hecho observable, es ilusorio suponer que se pueda expresar un juicio sobre algo que no posee ningún significado empírico, como son los eventos de dominio infinito. En el ámbito de la inferencia el teorema de representación debe ser asumido de acuerdo con su formulación más débil, según la cual la condición necesaria y suficiente para que los eventos E_n sea intercambiables es que, condicionados por un elemento aleatorio p, la distribución de probabilidades conjunta para cualquier sucesión finita sea la misma.

Sea, en particular, una sucesión de n eventos binomiales en los que la probabilidad de éxito es igual a p. Estos n eventos generan un conjunto de 2^n resultados posibles:

$$E^{(0)}(0) = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \ldots \cap \overline{E}_n$$

$$E^{(1)}(1) = E_1 \cap \overline{E}_2 \cap \ldots \cap \overline{E}_n$$

$$E^{(2)}(1) = \overline{E}_1 \cap E_2 \cap \overline{E}_3 \cap \ldots \cap \overline{E}_n$$

....

$$E^{(n)}(1) = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \ldots \cap \overline{E}_{n-1} \cap E_n$$

....

$$E^{(1)}(X) = E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_X \cap \overline{E}_{X+1} \cap \ldots \cap \overline{E}_n$$

$$E^{(2)}(X) = E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap \overline{E}_X \cap E_{X+1} \cap \overline{E}_{X+2} \cap \ldots \cap \overline{E}_n$$

....

$$E^{[X]}(X) = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \ldots \cap \overline{E}_{n-X} \cap E_{n-X+1} \cap \ldots \cap E_n$$

....

$$E^{(n)}(n) = E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n$$

(donde $[X] = \frac{n!}{X!(n-X)!}$). De estos 2^n resultados, sólo $\binom{n}{X} = \frac{n!}{X!(n-X)!}$ corresponden a la ocurrencia del evento compuesto:

---

[455]. de Finetti, B. (1937a).

$$E(X): obtener\ X\ exitos\ y\ (n - X)\ fracasos = \bigcup_{j=1}^{[X]} E^{(j)}(X)$$

cuya probabilidad está definida por:

$$p(X,n) = p[E(X)] = \binom{n}{X} p^X (1-p)^{n-X} \qquad (X = 0,1,2,...,n)$$

Luego, suponiendo que los eventos E_i $(i = 1,2,...,n)$ sean intercambiables, la probabilidad del evento genérico $p(E) = p^*(X,n)$ quedará expresada de la siguiente forma:

$$p(E) = \binom{n}{X} \int_0^1 p^X (1-p)^{n-X} dF(p)$$

En particular, si $F(p)$ denota la función de distribución correspondiente a una función uniforme[456], se verificará que:

$$p^*(X,n) = \binom{n}{X} B(X+1, n-X+1) = \frac{1}{n+1}$$

(donde $B(\bullet,\bullet)$ denota una función Beta)[457]. De modo que se puede concluir que, de acuerdo con el teorema de representación de de Finetti, dada una sucesión de eventos intercambiables, la función de probabilidades generada a partir de la misma puede ser representada como un promedio ponderado -con ponderaciones subjetivas- de funciones de Bernoulli (es decir, funciones respecto de las cuales los eventos son independientes y con probabilidad constante). Viceversa, si la probabilidad de que se produzcan X éxitos y $(n-X)$ fracasos, en una sucesión de n eventos, para cada uno de los ordenamientos posibles de éxitos y fracasos es igual a $\frac{p(X,n)}{\binom{n}{X}}$, entonces se dice que dicha sucesión posee la propiedad de intercambiabilidad[458].

Se puede concluir, entonces que, como se adelantó al comienzo de esta sección, desde un punto de vista meramente formal, los eventos inrtercambiables son asimilables a los eventos considerados como independientes con probabilidad constante pero desconocida (p), donde p se

---

[456]. La distribución uniforme será tratada en el Cap. 7.

[457]. La distribución Beta será tratada en el Cap. 7.

[458]. Ver Diaconis, P.; Freedman, D. (1980), Godehart, L. (1980), Suppes, P.; Zanotti, M. (1982), Jaynes, E.T. (1983), Sahlin, N.E. (1993), Wechsler, S. (1993), .

distribuye de acuerdo con la distribución mixta que postula el teorema de representación de de Finetti.

No obstante, con respecto a esta asimilación de la condición de intercambiabilidad a la de independencia, debe tenerse en cuenta que: **i)** en general la existencia de la probabilidad p es una condición meramente matemática debida a alguna extensión particular de una familia de distribuciones coherentes de dimensión finita a una ley para la sucesión $\{E_1, E_2, ..., E_n, ...\}$; **ii)** de acuerdo con Regazzini, E.; Petris, G. (1992), existen sucesiones de eventos intercambiables cuyas correspondientes frecuencias relativas de éxitos no convergen estocásticamente en un sentido preciso[459].

Como corolario natural de los resultados del teorema de representación y de las conclusiones consideradas en la Sec. 3.3.8, de Finetti propone lo que hoy se conoce como su **reducción a la intercambiabilidad**, que consiste en la eliminación de las nociones de probabilidad objetiva e independencia (en su interpretación de carácter metafísico) a favor de las de probabilidad subjetiva e intercambiabilidad.

Como reparo a este principio reduccionista se puede alegar que, a partir de una interpretación objetivista, el supuesto de intercambiabilidad sólo sería aplicable en situaciones de comprobada independencia objetiva y, por lo tanto, que el concepto de intercambiabilidad parecería ser redundante con respecto al de independencia objetiva: dada una hipotética situación de independencia oportuna y rigurosamente testeada, se podría aplicar la condición de intercambiabilidad, pero resulta que no sería necesario ya que el problema podría ser tratado utilizando simplemente los conceptos de independencia y de probabilidad objetiva; si por otra parte, los tests aplicados hubieran sugerido que la situación es de no-independencia, entonces la utilización de la condición de intercambiabilidad conduciría a resultados erróneos y, por lo tanto, debería ser evitada.

La réplica de de Finetti a estas objeciones se basó en que, a partir de la demostración de que los eventos intercambiables constituyen el equivalente de los eventos equiprobables de la independencia objetiva, se podrían introducir diferentes forma subjetivas equivalentes de eventos no-independientes (y, en particular, de cadenas de Markov, que dan origen a los eventos que podrían

---

[459]. de Finetti, B. (1937): "*Se puede tomar en consideración no sólo la frecuencia observada, sino también las regularidades o tendencias hacia ciertas regularidades que pueden revelar las observaciones. Supóngase, por ejemplo, que las primeras n pruebas proporcionen alternativamente un resultado favorable y uno desfavorable. En el caso de intercambiabilidad, nuestra predicción sobre la prueba siguiente después de estas n pruebas será la misma que después de cualquier otra experiencia con la misma frecuencia igual a* $\frac{1}{2}$, *pero con una sucesión completamente irregular de resultados diferentes; es la ausencia de cualquier influencia del orden sobre los juicios de un cierto individuo lo que caracteriza, por definición, a los eventos que considerará 'intrercambiables'. Por otra parte, en el caso en que los eventos no sean concebidos como intercambiables, debemos modificar nuestras predicciones en diferentes formas después de n pruebas dispuestas en forma irregular, con la misma frecuencia igual a* $\frac{1}{2}$, *la actitud más natural consistirá en predecir que la prueba siguiente tendrá una gran probabilidad de presentar un resultado opuesto al de la prueba precedente. Indudablemente sería posible e interesante estudiar esta influencia del orden en algunas hipótesis simples, mediante alguna extensión del concepto de intercambiabilidad y alguunos desarrollos vinculados con esta generalización*".

ser denominados como intercambiables-Markovianos)[460]. De modo que, en vez de asumir la hipótesis de intercambiabilidad, se puedan considerar distintas formas de intercambiabilidad Markoviana asignándole a cada una de ellas una probabilidad inicial.

Se puede concluir fácilmente que (contrariamente a la opinión de de Finetti)[461] esta generalización genera complicaciones tan grandes que la hacen inaplicable. Debe tenerse en cuenta que, de acuerdo con esta extensión, es necesario considerar todas las posibles clases de dependencia que podrían presentarse en una sucesión de eventos y asignar a cada una de ellas una probabilidad "a priori" y obviamente es imposible asegurar que un individuo haya tomado en consideración "todas" las formas posibles de dependencia y menos aún suponer que se pueda asignar probabilidades "a priori" individuales a cada una de ellas..

Por otra parte, el análisis de una sucesión de eventos a partir de una interpretación objetivista sólo requiere la consideración de una hipótesis inicial, por ejemplo que los eventos son independientes con probabilidad constante (que debe ser rigurosamente testeada) y no necesita considerar "a priori" ninguna hipótesis alternativa de dependencia o de probabilidades variables. Luego, se puede concluir fácilmente que la única forma de evitar las complicaciones asociadas a la generalización de la reducción a la intercambiabilidad de de Finetti es a partir de una aproximación objetiva.

En las aplicaciones se presentan eventos cuyas probabilidades a primera vista parecerían ser completamente objetivas (supóngase, por ejemplo, que el evento sea "*obtener el 'as' al arrojar un dado*" respecto del cual se puede asegurar, de acuerdo con el resultado de cuidadosos tests, que está mecánicamente perfectamente balanceado y que, a partir de la observación de sucesiones suficientemente grandes de repeticiones en igualdad de condiciones del experimento ha proporcionado frecuencias relativas aproximadamente iguales para cada una de sus caras, su probabilidad $p(1)=\frac{1}{6}$ podría ser, entonces un hecho objetivo sin el más mínimo ingrediente de subjetividad). Con respecto a estas probabilidades, existen dos tipos aproximaciones: **i)** la interpretación de Ramsey, F.P. (1926) según la cual se puede admitir la existencia de eventos subjetivos y objetivos y, en consecuencia, sendos conceptos de probabilidad aplicables, respectivamente, a cada una de estas circunstancias y **ii)** la interpretación de de Finetti según la cual todas las probabilidades son subjetivas y aún las aparentemente objetivas (incluyendo las que admiten una interpretación clásica) pueden ser explicadas en términos de grados de creencia subjetiva[462].

---

[460]. Para un tratamiento detallado de los procesos Markovianos, ver Landro, A.H.; González, M.L. (2009).

[461]. de Finetti, B. (1937): "*No se puede excluir 'a priori' completamente la influencia de los eventos (...) habría un número de grados de libertad y se generaría una complicación mucho mayor, pero no se produciría ningún cambio en la concepción del problema (...) con respecto al caso de los eventos intercambiables*".

[462]. de Finetti, B. (1937): "*No resulta difícil admitir que la explicación subjetivista es la única aplicable en el caso de predicciones prácticas (resultados deportivos, informes meteorológicos, eventos políticos, etc.), las cuales no son consideradas en el contexto de la teoría de la probabilidad, aún en su interpretación más amplia. Por otra parte, es más difícil aceptar que esta misma explicación para el valor más científico y profundo atribuido a la noción de probabilidad en ciertos dominios clásicos, resulte racional (...) Nuestro punto de vista permanece invariable en todos los casos: demostrar que existen profundas razones psicológicas que hacen que la concordancia exacta o aproximada entre las opiniones de distintos individuos resulte muy natural pero que no existe ninguna razón racional, positiva o metafísica*

De acuerdo con de Finetti, B. (1931), sea $E^{(j)}(X)\left(j=1,2,\dots,[X];\; X=0,1,2,\dots,n\right)$ una sucesión de eventos intercambiables, y sea $E^{(n+1)}$ el evento "*que el resultado de la* $(n+1)$ *-ésima prueba sea un éxito*". Entonces, será:

$$p\left(E^{(j1)}(X)\cap E^{(n+1)}\right)=\frac{p(X,n)}{\binom{n}{X}}p=\frac{X+1}{n+1}\frac{p(X+1,n+1)}{\binom{n}{X}}$$

Es decir, se puede concluir que, en el caso de eventos intercambiables, la probabilidad de $E^{(n+1)}$, condicionada a la ocurrencia de $E^{(j)}$, queda definida por una función de las variables X y n exclusivamente, de la forma:

$$p\left(E^{(n+1)}/E^{(j)}(X)\right)=\frac{p\left(E^{(j)}(X)\cap E^{(n+1)}\right)}{p\left(E^{(j)}(X)\right)}=\frac{X+1}{n+1}\frac{p(X+1,n+1)}{p(X,n)}=f(X,n)$$

tal que:

$$\lim_{n\to\infty} f(X,n)=\lim_{n\to\infty} p\left(E^{(n+1)}/E^{(j)}(X)\right)=\frac{X}{n}$$

Este resultado demuestra que la aparente probabilidad objetiva $f(X,n)$ no es sino una ilusión metafísica, que observadores diferentes con distintas asignaciones de probabilidades iniciales, basadas exclusivamente en la condición de coherencia, en virtud de la combinación de esta condición con la propiedad de intercambiabilidad y suponiendo que $\lim_{n\to\infty}\frac{p(X+1,n+1)}{p(X,n)}=1$, convergerán hacia una evaluación de la probabilidad final igual a $\frac{X}{n}$.

En otros términos, para un observador objetivista (en particular con tendencias Popperianas) cualquier evaluación f de una función de probabilidades es una conjetura acerca de los verdaderos valores de las probabilidades objetivas que debe ser cuidadosamente testeada. Si los resultados de estos tests revelan que esta conjetura es inadecuada, entonces el observador la reemplazará por una nueva conjetura, f^* (esencialmente subjetiva), que represente mejor el comportamiento del fenómeno eventual en estudio. De acuerdo con la propuesta de de Finetti, el observador no trata de aceptar o refutar sus probabilidades iniciales, $p\left(E^{(j)}\right)$, sino que las transforma en probabilidades finales mediante un condicionamiento Bayesiano. Es decir, si bien distintos observadores pueden partir de diferentes probabilidades iniciales, a partir de un incremento de la evidencia, sus probabilidades finales tenderán habitualmente a converger produciendo la ilusión de la existencia

---

que pueda proporcionar a este hecho algún significado más allá de una simple concordancia de opiniones subjetivas".

de una probabilidad objetiva (que, en términos de la interpretación subjetivista, constituye sólo un concepto metafísico vacío de significado).

Ahora bien, la valuación de la probabilidad inicial, $p(E)$, se realiza a partir de supuestos generales acerca de la naturaleza del evento en consideración. Se puede comprobar que, si estos supuestos son correctos (en un sentido amplio), entonces el esquema de de Finetti de modificación de la probabilidad $p(E)$ mediante un condicionamiento Bayesiano proporciona resultados aceptables, pero, si la evaluación de la probabilidad inicial es errónea, entonces todas las probabilidades condicionadas por la evidencia serán inapropiadas. Para que estas probabilidades finales condicionadas resulten razonables será entonces necesario que las modificaciones en $p(E)$ sean más drásticas que las permitidas por el muy conservador esquema de condicionamiento Bayesiano, circunstancia que estaría en manifiesta contradicción con el principio de reducción a la intercambabilidad de Finettiano.

Como se verá en el Cap. 4, el concepto de intercambiabilidad es aplicable no sólo a eventos sino, también, a variables aleatorias: Sea $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias con distribuciones de probabilidades $f_i(x)\ (i = 1,2,\ldots,n)$ y funciones de distribución $F_i(x)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Si las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independientes e idénticamente distribuidas, es decir, tales que $f_i(x) = f(x)\quad (i = 1,2,\ldots,n)$, entonces son intercambiables, pero la implicación inversa no se verifica necesariamente. Sea, por ejemplo, una urna de Pólya formada por k bolillas blancas y h bolillas negras, de la cual se extrae al azar una bolilla, se observa el color y se la reemplaza en la urna con una bolilla del mismo color, repitiendo el proceso en forma indefinida. Sea $X_i\ (i = 1,2,\ldots,n)$ la variable aleatoria que representa el resultado a obtener en la i-ésima extracción, la cual asumirá los valores 0 ó 1 según que la bolilla extraída sea o no negra. Se verifica que:

$$p(1,1,0,1) = \frac{h}{h+k} + \frac{h+n}{h+k+n}\frac{k}{h+k+2n}\frac{h+2n}{h+k+3n} =.$$

$$= \frac{h}{h+k}\frac{k}{h+k+n}\frac{h+n}{h+k+2n}\frac{h+2n}{h+k+3n} = p(1,0,1,1)$$

es decir, que las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ son intercambiables, pero no son independientes. Asimismo, sea una sucesión $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de variables Normales con distribución conjunta $N_n(0, \Gamma)$, donde la matriz de varianzas y covarianzas posee unos en la diagonal principal y los elementos restantes son de la forma $\gamma(X_i, X_j) = \gamma\ (i \neq j; i,j = 1,2,\ldots,n)$. Para que la matriz Γ sea definida positiva debe ser $\gamma = -\frac{1}{n-1} \geq 0$. Se demuestra, entonces, que las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ que, obviamente, no son independientes, son intercambiables.

Supóngase un conjunto de hipótesis sobre la función de probabilidades correspondiente a cada una de estas variables aleatorias. Se dice que las variables son intercambiables cuando se verifica su independencia condicionada por cada una de dichas hipótesis. En otros términos, que el concepto de intercambiabilidad de las variables aleatorias es equivalente al concepto de

independencia condicionada por una partición de hipótesis[463].

Ejemplo nº 3.17:

Sea $\{E_1, E_2, ..., E_n, ...\}$ una sucesión de eventos intercambiables, y sea E^*_{jn} el evento consistente en obtener j éxitos (y $(n-j)$ "fracasos") en correspondencia con j pruebas determinadas entre las primeras n pruebas sobre los eventos E_i :

$$E^*_{jn} = E_{i1} \cap E_{i2} \cap .. \cap E_{ij} \cap \overline{E}_{i,j+1} \cap .. \cap \overline{E}_n$$

cuya probabilidad se denotará de la siguiente forma: $p\left(E^*_{jn}\right) = p_{jn}$. Dado un valor arbitrario $N > n$, se denotará por H_{jN} a todas las posibles hipótesis relacionadas con las frecuencias relativas del éxito correspondientes a N eventos E_i ("a priori" de cualquier eventual observación):

$$H_{jN} : \text{que la frecuencia de los "exitos" sobre } N \text{ pruebas}$$
$$\text{sea } f_j = \frac{j}{N} \left(j = 0,1,2,...,N\right)$$

Los eventos H_{jN} que se generan al variar j definen una clase completa de eventos incompatibles, es decir, tales que $H_{iN} \cap H_{jN} = \varnothing \; (i \neq j)$ y $H_{0N} \cup H_{1N} \cup ... \cup H_{NN} = \Omega$. Por otra parte, se verifica que $E^*_{jN} \subseteq H_{jN}$ y que $\pi_{jn} = p\left(H_{jn}\right) = \binom{n}{j} p_{jn}$. Teniendo en cuenta que, con respecto a las j pruebas predeterminadas, se verifica que $E^*_{jn} = E^*_{j,n+1} \cup E^*_{j-1,n+1}$ y que los dos eventos que figuran en el segundo miembro son incompatibles, se obtiene que:

$$p_{jn} = \frac{\pi_{jn}}{\binom{n}{j}} = p_{j,n+1} + p_{j+1,n+1} = \frac{\pi_{j,n+1}}{\binom{n+1}{j}} + \frac{\pi_{j+1,n+1}}{\binom{n+1}{j+1}}$$

y, por lo tanto, que:

$$\pi_{jn} = \frac{n-j+1}{n+1} \pi_{j,n+1} + \frac{j+1}{n+1} \pi_{j+1,n+1}$$

---

463. de Finetti, B. (1995) reconoce dos tipos de intercambiabilidad: "*limitada*" e "*ilimitada*". Esta última se presenta cuando el experimento es indefinidamente repetible, en cambio, la intercambiabilidad limitada corresponde a aquellos procesos que no pueden continuar más allá de un límite dado (el ejemplo típico sería el de las extracciones sin reposición).

Luego, si $p\left(E_{jn}^{*}\right) > 0$, por la propiedad de intercambiabilidad, a partir de la información que proporciona E_{jn}^{*}, se puede obtener la siguiente evaluación de la probabilidad de ocurrencia de E_{n+1}:

$$p\left(E_{n+1} / E_{jn}^{*}\right) = \frac{p\left(E_{n+1} \cap E_{jn}^{*}\right)}{p\left(E_{jn}^{*}\right)} = \frac{p_{j+1,n+1}}{p_{jn}} =$$

$$= \frac{\pi_{j+1,n+1}\binom{n}{j}}{\pi_{jn}\binom{n+1}{j+1}} = \frac{j+1}{n+1}\frac{\pi_{j+1,n+1}}{\pi_{jn}} = \frac{(j+1)\pi_{j+1,n+1}}{(n-j+1)\pi_{j,n+1} + (j+1)\pi_{j+1,n+1}} =$$

$$= \frac{j+1}{(n-j+1)\dfrac{\pi_{j,n+1}}{\pi_{j+1,n+1}} + j + 1}$$

En particular, si se supone la equiprobabilidad de los eventos "*obtener* j *éxitos en* $n+1$ *pruebas*" *y* "*obtener* $j+1$ *éxitos en* $n+1$ *pruebas*" (condición que parece razonable si se supone que j y n son suficientemente grandes), $\pi_{j,n+1} = \pi_{j+1,n+1}$, se obtiene que:

$$p\left(E_{n+1} / E_{jn}^{*}\right) = \frac{j+1}{n+2}$$

Expresión en la que el segundo miembro se aproxima a la frecuencia observada, $\frac{j}{n}$. Como se vio en el Cap. 2, si bien este criterio de evaluación de una probabilidad a partir de frecuencias observadas, basado en la equivalencia entre los eventos pasados -efectivamente observados- y los eventos futuros constituye la respuesta más completa sobre el particular, incluye supuestos cuya racionalidad es, por lo menos opinable. Es, por ejemplo, inevitable un cierto grado de arbitrariedad en la selección de la clase de los eventos pasados a considerar como análogos y, por lo tanto, con la misma probabilidad de ocurrencia, a los eventos futuros.

Como se mencionó en la Sec. 3.1.4, este criterio de evaluación conocido como la **regla de sucesión**, fue utilizada para tratar de resolver el problema de inducción de D. Hume referido a la evaluación de la probabilidad de que el sol aparezca nuevamente mañana. Considerando los registros de los últimos 5000 años, se comprueba que el sol se alzó cada mañana durante 1.826.250 días. De acuerdo con la regla de sucesión, siendo $x = n = 1.826.250$, la probabilidad de que mañana amanezca será aproximadamente igual a 0,9999994. Ahora bien, supóngase que mañana el sol no aparezca, de acuerdo con la regla de sucesión, se verificará que $x = n - 1$ y que $n = 1.826.251$ y, por lo tanto la probabilidad de que el sol aparezca a la mañana siguiente será aproximadamente igual a 0.9999989. Es decir, se dará el resultado absurdo de una disminución del 0.00005% en la evaluación de la probabilidad después de anexar una información que seguramente generará tal grado de confusión que conducirá a pensar que el sol no aparecerá nunca más[464]

Ejemplo nº 3.18:

Sea una urna que contiene dos bolillas: una blanca y una roja. Se extrae de la misma, al azar, una bolilla y, después de haber observado su color, se la repone en la urna agregando una bolilla del color opuesto. Sea $E_i \ (i = 1,2,...)$ el evento "*obtener una bolilla roja en la i -ésima extracción*". Entonces, se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
& p(E_1) = \frac{1}{2} \\
& p(E_2) = p(E_1 \cap E_2) + p(\overline{E}_1 \cap E_2) = \\
& = p(E_1)p(E_2 / E_1) + p(\overline{E}_1)p(E_2 / \overline{E}_1) = \\
& = \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{1}{2} \\
& p(E_3) = p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) + p(\overline{E}_1 \cap E_2 \cap E_3) + p(E_1 \cap \overline{E}_2 \cap E_3) + p(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap E_3) = \\
& = p(E_1)p(E_2 / E_1)p[E_3 / (E_1 \cap E_2)] + p(\overline{E}_1)p(E_2 / \overline{E}_1)p[E_3 / (\overline{E}_1 \cap E_2)] + \\
& + p(E_1)p(\overline{E}_2 / E_1)p[E_3 / (E_1 \cap \overline{E}_2)] + p(\overline{E}_1)p(\overline{E}_2 / \overline{E}_1)p[E_3 / (\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2)] = \\
& = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{2}{4} + \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{2}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{2}{4} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Reiterando este razonamiento se demuestra, en general, que los eventos E_i son equiprobables, $p(E_i) = \frac{1}{2} \ (i = 1,2,...)$. Por otra parte, se verifica que:

$$
\begin{aligned}
& p(E_1 \cap E_3) = p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) + p(E_1 \cap \overline{E}_2 \cap E_3) = \\
& = p(E_1)p(E_2 / E_1)p[E_3 / (E_1 \cap E_2)] + p(E_1)p(\overline{E}_2 / E_1)p(E_3 / (E_1 \cap \overline{E}_2)) = \\
& = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{2}{4} \neq p(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

---

464. De acuerdo con Howson, C.; Urbach, P. (1989), en el sentido que la hipótesis rechazada asume una probabilidad nula, Bayesianismo implica "falsificacionismo". Ahora bien, considerando una versión subjetiva del Bayesianismo según la cual, a partir del aprendizaje sobre el comportamiento de leyes generales (en el sentido de tratar de asignarles probabilidades de acuerdo con la evidencia observada) un observador hubiera asignado una probabilidad a la ley universal referida a la aparición del sol a partir de una sucesión de un millón de apariciones, esa probabilidad hubiera disminuido a cero después de la primera falla. Luego se puede concluir que este ejemplo (de Popper) no constituye un buen argumento contra la teoría subjetiva del aprendizaje, pero proporciona un argumento importante contra la regla de sucesión (ver Sec. 2.6).

Lo cual demuestra que los eventos E_i, a pesar de ser equiprobables, no son intercambiables (la probabilidad de verificarse j cualesquiera de ellos no depende, para todo j, solamente de j).

Ejemplo nº 3.19:

Sea una urna que contiene N bolillas de las cuales N_b son blancas y las restantes, $N_r = N - N_b$, son rojas. Supóngase que se realicen n extracciones sucesivas al azar, reponiendo en la urna la bolilla extraída cada vez después de haber observado su color.

Sea E el evento "*obtener j bolillas blancas en las n extracciones*" (es decir, obtener, al cabo de n extracciones j bolillas blancas y, por lo tanto, $n-j$ bolillas rojas) y sea E_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ el evento "*obtener una bolilla blanca en la i-ésima extracción*". Suponiendo la equiprobabilidad de los n eventos asociados a la extracción de una bolilla, se obtiene que $p(E_i) = \dfrac{N_b}{N} = p\ (i = 1,2,\ldots,n)$.

El evento E puede ser expresado como la unión:

$$E = \bigcup_{i_1,\ldots,i_j} \left(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_j} \cap \overline{E}_{i_{j+1}} \cap \ldots \cap \overline{E}_{n}\right)$$

de $C_n^j = \binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$ eventos incompatibles (cada uno formado por la intersección de j resultados "bolilla blanca" y $n-j$ resultados "bolilla roja") que se obtienen de la variación de la selección de los subíndices $i_1,i_2,\ldots,i_n$, en el conjunto de los n primeros números naturales, Luego, como se verá en el Cap. 7, si los eventos E_i se suponen independientes, se verificará que:

$$p(E) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

La hipótesis de independencia de los eventos E_i se puede justificar de la siguiente forma: Como se trata de extracciones con reposición, se considera que la probabilidad de obtener una bolilla blanca en una extracción dada no se ve modificada por el conocimiento del resultado obtenido en cualquier otra extracción. Se puede considerar, por otra parte, que todos los resultados posibles de las n extracciones (N^n) son equiprobables. De estos resultados, se consideran favorables aquellos que se obtienen de asociar a cada j-ordenamiento de un conjunto de tamaño N_b, un $(n-j)$-ordenamiento de un conjunto de tamaño N_r. Es decir, el número de resultados favorables es $N_b^j N_r^{n-j}$, de modo que:

$$p\left(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap ... \cap E_{i_j} \cap \overline{E}_{i_{j+1}} \cap ... \cap E_{i_n}\right) = N_b^j \frac{N_r^{n-j}}{N^n} = p^j (1-p)^{n-j}$$

Relación que muestra la independencia de los E_i $(i = 1,2,...,n)$ (este es un caso en el que el supuesto de independencia surge de una hipótesis de equiprobabilidad de los resultados posibles de las n extracciones)[465].

Supóngase, ahora, que las n extracciones se realicen sin reposición (será necesario suponer, obviamente, que $n \leq N$). Se verificará, entonces, que[466]:

$$\begin{aligned}
&p\left(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap ... \cap E_{i_j} \cap \overline{E}_{i_{j+1}} \cap ... \cap E_{i_n}\right) = \\
&= \frac{N_b}{N}\frac{N_b - 1}{N-1} ... \frac{N_b - j + 1}{N - j + 1}\frac{N_r}{N-j}\frac{N_r - 1}{N - j - 1} ... \frac{N - n + j + 1}{N - n + 1} = \\
&= \left(\frac{N_b}{N}\right)^j \left(\frac{N_r}{N}\right)^{n-j} \frac{\left(1 - \frac{1}{N_b}\right) ... \left(1 - \frac{j-1}{N_b}\right)\left(1 - \frac{1}{N_r}\right) ... \left(1 - \frac{n-j-1}{N_r}\right)}{\left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{2}{N}\right) ... \left(1 - \frac{n-1}{N}\right)}
\end{aligned}$$

Para $i = 1$ será $p(E_1) = \frac{N_b}{N} = p$. Para $i = 2$, dado que, de acuerdo con su definición, E_2 no toma en consideración el resultado de la primera extracción, será:

$$E_2 = E_2 \cap \Omega = E_2 \cap \left(E_1 \cup \overline{E}_1\right) = \left(E_1 \cap E_2\right) \cup \left(\overline{E}_1 \cap E_2\right)$$

Luego, se puede escribir:

$$\begin{aligned}
p(E_2) &= p(E_1 \cap E_2) + p(\overline{E}_1 \cap E_2) = \\
&= p(E_1)p(E_2 / E_1) + p(\overline{E}_1)p(E_2 / \overline{E}_1) =
\end{aligned}$$

---

465. Debe tenerse en cuenta que, de acuerdo a lo expresado en la Sec. 2.6, para la concepción subjetivista, cada evento es un hecho singular; que aquéllas que en el lenguaje corriente se denominan repeticiones de un evento, no constituyen sino sucesiones de eventos distintos entre sí; que, si bien se puede reconocer la existencia de ciertas características comunes a estos eventos que influyen sobre el individuo, haciendo que éste estime evaluaciones de probabilidades iguales para todos ellos, resulta inadmisible la aceptación de la existencia de razones "a priori" que justifiquen la asignación de un conjunto arbitrario de probabilidades. En este caso se aplicará este criterio a eventos del mismo tipo o de características análogas, sin detallar el significado intrínseco de las mismas.

466. Cuando N aumenta indefinidamente $\lim_{N \to \infty} p\left(E_{i_1} \cap ... \cap E_{i_j} \cap \overline{E}_{i_{j+1}} \cap ... \cap \overline{E}_{i_n}\right) = \left(\frac{N_b}{N}\right)^j \left(\frac{N_r}{N}\right)^{n-j}$. La expresión que figura en el texto coincide con la correspondiente al caso de extracciones con reposición (si n es muy pequeño con relación a N, N_b y N_r , es lógico suponer que las extracciones sucesivas no alterarán sensiblemente la composición de la urna y, por lo tanto, los eventos E_i podrán ser considerados como quasi-independientes).

$$= p\frac{N_b - 1}{N - 1} + (1 - p)\frac{N_b}{N - 1} = \frac{N_b - \frac{N_b}{N}}{N - 1} = p$$

Continuando con este razonamiento se puede demostrar que, aún en este caso de extracciones sin reposición todos los eventos E_i $(i = 1,2,...,n)$ son equiprobables.

Ahora bien, teniendo en cuenta que:

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1)p(E_2 / E_1) = p\frac{N_b - 1}{N - 1} \neq \frac{N_b - \frac{N_b}{N}}{N - 1} = p$$

se puede concluir que los eventos E_i, si bien son equiprobables, no son independientes.

La probabilidad del evento E se obtiene, igual que en el caso precedente, sumando las probabilidades correspondientes a los $\binom{n}{j}$ posibles ordenamientos de los j resultados $(i_1, i_2, ..., i_j)$:

$$p(E) = p\left[\bigcup_{i_1...i_j}\left(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap ... \cap E_{i_j} \cap \overline{E}_{i_{j+1}} \cap ... \cap \overline{E}_{i_n}\right)\right] =$$

$$= \binom{n}{j}\frac{N_b}{N}\frac{N_b - 1}{N - 1}\cdots\frac{N_b - j + 1}{N - j + 1}\frac{N_r}{N - j}\frac{N_r - 1}{N - J - 1}\cdots\frac{N_r - n + 1 + 1}{N - n + 1} =$$

$$= \frac{n!}{j!(n - j)!}\frac{N_b!}{(N_b - j)!}\frac{N_r!}{(N - n + j)!}\frac{(N - n)!}{N!} =$$

$$= \frac{N_b!}{j!(N_b - j)!}\frac{N_r!}{(n - j)!(N_r - n + j)!}\frac{1}{\frac{N!}{n!(N - n)!}} =$$

$$= \frac{\binom{N_b}{j}\binom{N_r}{n - j}}{\binom{N}{n}}$$

Luego, se puede escribir:

$$p\left(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap ... \cap E_{i_j} \cap \overline{E}_{i_{j+1}} \cap ... \cap \overline{E}_{i_n}\right) = \frac{\binom{N_b}{j}\binom{N_r}{n - j}}{\binom{n}{j}\binom{N}{n}}$$

Obsérvese que en ambos casos (con reposición o sin reposición) la probabilidad de los eventos $\left(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_j} \cap \overline{E}_{i_{j+1}} \cap \ldots \cap \overline{E}_{i_n}\right)$ depende sólo de j y de n, y no de los eventos particulares $\left(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_j}\right)$. En otros términos, la probabilidad de que ocurran j eventos dados -y de que no ocurran los $(n-j)$ eventos restantes- depende sólo de cuántos y no de cuáles sean los eventos considerados. Es decir, que los eventos E_i son intercambiables.

Ejemplo nº 3.20:

Sea una urna que contiene N bolillas de las cuales un número desconocido ($N_k^{(b)} = 0,1,2,\ldots,N$) son blancas. Supóngase que se realicen n extracciones sucesivas con reposición. Denotando por H_k a la hipótesis "*el número de bolillas blancas en la urna es* $N_k^{(b)}$", se demuestra en forma inmediata que los eventos "*obtener una bolilla blanca en la* i*-ésima extracción*" (E_i), condicionados por la hipótesis H_k, son equiprobables:

$$p\left(E_i / H_k\right) = \frac{N_k^{(b)}}{N} \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

Ahora bien, como las hipótesis H_k definen una clase completa de eventos incompatibles, se puede concluir que los eventos no-condicionados:

$$E_i = E_i \cap \Omega = E_i \cap \left(\bigcup_{k=0}^{N} H_k\right) = \bigcup_{k=0}^{N}\left(E_i \cap H_k\right)$$

también son equiprobables:

$$p\left(E_i\right) = \sum_{k=0}^{N} p\left(E_i \cap H_k\right) = \sum_{k=0}^{N} p\left(H_k\right) p\left(E_i / H_k\right) = \sum_{k=0}^{N} p\left(H_k\right) \frac{N_k^{(b)}}{N}$$

(las probabilidades $p\left(E_i\right)$ no dependen de $i = 1,2,\ldots,n$). En particular, si se supone que todas las posibles composiciones de la urna son equiprobables, es decir, si $p\left(H_k\right) = \frac{1}{N+1} \; (k = 0,1,2,\ldots,N)$ para todo N, se obtiene que:

$$p\left(E_i\right) = \frac{1}{N(N+1)} \sum_{k=0}^{N} N_k^{(b)} = \frac{1}{2}$$

Supóngase, ahora, que $N = 2$ y $n = 2$. Las composiciones posibles de la urna están representadas por los eventos:

H_0: *la urna no contiene ninguna bolilla blanca*

H_1: *la urna contiene una sola bolilla blanca*

H_2: *ambas bolillas contenidas en la urna son blancas*

de modo que se puede escribir:

$$p(E_i) = \frac{p(H_1)}{2} + p(H_2) \qquad (i = 1{,}2 ; p(H_1) + p(H_2) \leq 1)$$

y,

$$p(E_1 \cap E_2) = \sum_{k=0}^{2} p(H_k) p[(E_1 \cap E_2) / H_k] = \sum_{k=0}^{2} p(H_k) \left(\frac{N_k^{(b)}}{2} \right)^2 =$$

$$= \frac{p(H_1 + 4p(H_2))}{4}$$

Si se supone la equiprobabilidad de las H_k, es decir, si $p(H_k) = \frac{1}{3}(k = 0{,}1{,}2)$, entonces, se verifica que:

$$p(E_1)p(E_2) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq p(E_1 \cap E_2) = \frac{\frac{1}{3} + 4\left(\frac{1}{3}\right)}{4} = \frac{5}{12}$$

De lo que se concluye que los eventos E_1 y E_2 no son independientes (con un razonamiento similar al seguido para obtener la relación que figura en el texto -y suponiendo la equiprobabilidad de los N^n posibles resultados de las n extracciones-, se demuestra que $p(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap ... \cap E_{i_j} \cap \overline{E}_{i_{j+1}} \cap ... \cap E_{i_n}) =$ $\sum_{k=0}^{N} p(H_k) p[(E_{i_1} \cap ... \cap E_{i_j} \cap \overline{E}_{i_{j+1}} \cap ... \cap \overline{E}_{i_n}) / H_k] = \sum_{k=0}^{N} p(H_k) \left(\frac{N_k^{(b)}}{N} \right)^j \left(1 - \frac{N_k^{(b)}}{N} \right)^{n-j}$).

Ahora bien, a partir de las relaciones anteriores se puede escribir la ecuación[467]:

$$\left[\frac{p(H_1)}{2} + p(H_2) \right]^2 = \frac{p(H_1)}{4} + p(H_2)$$

---

[467]. Nótese que esta probabilidad -como en el caso de una urna con composición conocida- depende sólo de cuántos y no de cuáles eventos se toman en consideración.

Es decir:

$$\left[p(H_1)+2p(H_2)\right]^2 - p(H_1) - 4p(H_2) = 0$$

Haciendo $X = p(H_1) + p(H_2)\,(0 \le X \le 1)$, la ecuación precedente puede ser expresada de la siguiente forma:

$$X^2 - \left[1-2p(H_2)\right]X + \left[\left(p(H_2)\right)^2 - 3p(H_2)\right] = 0$$

cuyas raíces:

$$X = \frac{\left[1-2p(H_2)\right] \pm \sqrt{1+8p(H_2)}}{2}$$

para $0 \le p(H_2) < 1$, son una negativa y la otra mayor que la unidad, lo que demuestra que, en general, no es imposible hallar valores de $p(H_1)$ y $p(H_2)$ tales que $p(H_1) + p(H_2) \le 1$, para los cuales se verifique que $p(E_1)p(E_2) = p(E_1 \cap E_2)$.

De los resultados anteriores se puede concluir que, en el caso de extracciones con reposición, los eventos E_i sólo son independientes si la composición de la urna es conocida, y no lo son si ésta no se conoce[468]. Esto confirma que la naturaleza de la independencia estocástica no se vincula solamente con los eventos considerados sino, también, con la probabilidad asignada a los mismos.

Es evidente, por otra parte, que el resultado de cada extracción influye sobre las evaluaciones de las probabilidades realizadas por el observador con respecto a las posibles composiciones (H_k) de la urna y, en consecuencia, teniendo en cuenta la ya demostrada equiprobabilidad de los eventos E_i, $p(E_i) = \sum_{k=0}^{n} p(H_k)\frac{N_k^{(b)}}{N}$, se puede concluir que también influye sobre las evaluaciones de las probabilidades correspondientes a los eventos E_i. La observación, por ejemplo, de n resultados "bolilla blanca" en n extracciones hace aumentar la evaluación de la probabilidad $p\left[E_{n+1} / \left(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n\right)\right]$ respecto de la correspondiente probabilidad no-condicionada $p(E_{n+1})$. Esto genera -aún sin que las sucesivas extracciones modifiquen la composición de la urna- una dependencia entre los eventos E_i, debida a la modificación del conjunto de información.

---

468. La independencia se verificará cuando se conozca cuál de las hipótesis H_i es la verdadera (independencia condicionada por una partición de hipótesis)..

Supóngase, ahora, que las n extracciones sucesivas se realicen sin reposición. De acuerdo a lo demostrado en el ejemplo precedente, se obtiene que:

$$p\left[\left(E_{i_1}\cap..\cap E_{i_j}\cap \overline{E}_{i_{j+1}}\cap..\cap \overline{E}_{i_n}\right)/\,H_k\right]=\frac{\binom{N_b}{j}\binom{N-N_b}{n-j}}{\binom{N}{n}\binom{n}{j}}$$

Luego, será:

$$p\left[\left(E_{i_1}\cap..\cap E_{i_j}\cap \overline{E}_{i_{j+1}}\cap..\cap \overline{E}_{i_n}\right)\right]=\sum_{k=0}^{N}p\left(H_k\right)\frac{\binom{N_b}{j}\binom{N-N_b}{n-j}}{\binom{N}{n}\binom{n}{j}}$$

De esta expresión se puede concluir que, también en este caso, la probabilidad de ocurrencia de j eventos y de no-ocurrencia de los $n-j$ eventos restantes, depende sólo de n y de j, es decir, de cuántos y no de cuáles son los eventos en consideración. En otros términos que, también en este caso, los eventos E_{i_j} son intercambiables.

Ejemplo nº 3.21:

Volviendo al Ejemplo nº 3.17, sea una sucesión de eventos intercambiables $\{E_1, E_2, ..., E_n, ...\}$ y sea H_{jn} el evento "*obtener exactamente j éxitos en n pruebas sobre los eventos* E_i". Para todo $N > n$, es posible definir las frecuencias futuras, es decir, los eventos:

$$H_{jN}: la\ frecuencia\ de\ los\ exitos\ sobre\ N\ pruebas$$
$$es\ f_i=\frac{i}{N}\left(i=j;j=1,2,...,N-\left(n-j\right)\right)$$

Haciendo $E = H_{jn}$ y dada la propiedad de intercambiabilidad de los eventos E_i, la probabilidad del evento:

$\left(E\,/\,H_{iN}\right)$:sup*oniendo que entre los N eventos, i sean verdaderos,*
que ocurran j exitos en las n pruebas seleccionadas del
conjunto de tamaño N

será:

$$p\left(E / H_{iN}\right) = \frac{\binom{i}{j}\binom{N-i}{n-j}}{\binom{N}{n}}.$$

Si se supone que $N >> n$ (es decir, si se supone un número de observaciones futuras mucho mayor que el número de pruebas efectuadas y que dieron origen a la verificación del evento $E = H_{jn}$), la probabilidad hipergeométrica anterior puede ser aproximada mediante una distribución de probabilidades binomial[469] y, en consecuencia, la verosimilitud puede ser expresada de la siguiente forma $p\left(E / H_{iN}\right) = \binom{n}{j} f_i^j \left(1 - f_i\right)^{n-j}$. Luego, de acuerdo con el teorema de Bayes, será:

$$p\left(H_{iN} / E\right) = Kp\left(H_{iN}\right)\binom{n}{j} f_i^j \left(1 - f_i\right)^{n-j}$$

Si, por otra parte, se supone la equiprobabilidad de las $N + 1$ posibles frecuencias, sobre N pruebas, es decir, si se supone que $p\left(H_{iN}\right) = \frac{1}{N+1}$, entonces la expresión anterior toma la forma $p\left(H_{iN} / E\right) = K_0 f_i^j \left(1 - f_i\right)^{n-j}$ (donde K_0 denota una constante independiente de i). Luego, se concluye en forma inmediata que la función de i que compone el segundo miembro de esta expresión, asume su valor máximo para $f_i = \frac{j}{n}$, lo cual demuestra que la frecuencia futura más probable es, de acuerdo con las hipótesis realizadas, la frecuencia observada en el pasado. Debe tenerse en cuenta que esta frecuencia más probable fue obtenida basándose en la condición de equiprobabilidad de las frecuencias posibles. Es decir que, de hecho, lo que se ha maximizado es la verosimilitud $p\left(E / H_{iN}\right)$, y no la probabilidad $p\left(H_{iN} / E\right)$.

Ejemplo nº 3.22:

Sea una urna que contiene N bolillas, de las cuales un número $N^{(b)}$ (desconocido para el observador) son blancas. Supóngase que se realicen n extracciones con reposición. Denotando por H_k a la hipótesis "*el número de bolillas blancas en la urna es* $N_k^{(b)}$ ", y por $E_i^{(n)}$ al evento "*que se obtengan* i *bolillas blancas (éxitos) en una sucesión dada de* n *extracciones*", se obtiene que:

$$p\left(E_i^{(n)} / H_k\right) = \left(\frac{N_k^{(b)}}{N}\right)^i \left(1 - \frac{N_k^{(b)}}{N}\right)^{n-i} = \left(\theta_k^{(b)}\right)^i \left(1 - \theta_k^{(b)}\right)^{n-i}$$

---

469. Las distribuciones binomial e hipergeométrica serán tratadas en el Cap. 7.

$$p\left(E_i^{(n)}\right) = \sum_{k=0}^{N} p\left(H_k\right)\left(\theta_k^{(b)}\right)^i\left(1-\theta_k^{(b)}\right)^{n-i}$$

En particular, si se supone la equiprobabilidad de todas las posibles composiciones de la urna, es decir, si $p\left(H_k\right) = \dfrac{1}{N+1}\left(k = 0,1,2,\ldots,N\right)$, de acuerdo con el teorema de Bayes, se obtiene que:

$$p\left(H_k / E_i^{(b)}\right) = \frac{p\left(H_k\right)\left(\theta_k^{(b)}\right)^i\left(1-\theta_k^{(b)}\right)^{n-i}}{\sum_{j=0}^{N} p\left(H_j\right)\left(\theta_j^{(b)}\right)^i\left(1-\theta_j^{(b)}\right)^{n-i}} =$$

$$= K\left(\theta_k^{(b)}\right)^i\left(1-\theta_k^{(b)}\right)^{n-i} \qquad \left(i \le k \le N-\left(n-i\right)\right)$$

donde $K = \dfrac{1}{\sum_{j=0}^{N}\left(\theta_j^{(b)}\right)^i\left(1-\theta_j^{(b)}\right)^{n-i}}$.

Igualando a cero la derivada de la función $p\left(H_k / E_i^{(n)}\right)$ respecto a $\theta_k^{(b)}$ resulta que, suponiendo la equiprobabilidad de las distintas composiciones, la composición más probable corresponde a un valor $\theta_k^{(b)} = \dfrac{i}{n}$, es decir, a un número $N_k^{(b)} = \dfrac{iN}{n}$ de bolillas blancas.

Como se vio en los ejemplos anteriores, en los casos de extracciones de una urna de composición desconocida que contiene una fracción $\theta^{(b)}$ de bolillas blancas, a la incertidumbre sobre el resultado de cada extracción (incertidumbre que está presente aún en el caso en que la composición de la urna sea conocida), es decir, sobre la ocurrencia del evento:

$$E_i^{(b)}: obtener\ una\ bolilla\ blanca\ en\ la\ i-esima\ extraccion$$

se agrega la incertidumbre sobre la fracción $\theta^{(b)}$ la cual puede ser considerada como un posible valor de la variable aleatoria Θ $\left(\Omega(\Theta) = [0,1]\right)$ que, por razones de simplicidad, conviene suponer continua y con una distribución de probabilidades dada ($g(\Theta)$). La probabilidad de extracción de una bolilla blanca, condicionada por la hipótesis $\theta^{(b)}$, será $p\left(E_i^{(b)} / \theta^{(b)}\right) = \theta^{(b)}$.

La urna puede ser considerada como la representación de una población estadística formada por individuos que pueden poseer o no un determinado atributo o característica y respecto del cual se intenta, mediante un experimento consistente en observaciones al azar sucesivas, obtener información sobre la fracción θ de individuos que poseen dicha característica. Cada observación sobre un individuo de esta población puede ser asociada a una variable aleatoria X_i, que puede asumir solamente los valores 0 ó 1 y que indica la ocurrencia del evento E_i. Como la distribución de probabilidades correspondiente a esta variable X_i depende del parámetro θ, no está determinada. De la variable X_i se conoce solamente su distribución de probabilidades condicionada por cada valor θ de la variable Θ :

$$f(X_i / \theta) = \begin{cases} \theta & para \quad X_i = 1 \\ 1-\theta & para \quad X_i = 0 \end{cases}$$

(dada la propiedad de intercambiabilidad de los eventos E_i, se ha utilizado la misma notación para representar a todas las distribuciones condicionadas de X_i). Como se vio al comienzo de esta sección, se dice que una familia ε es de variables aleatorias intercambiables cuando, para cualquier conjunto de n elementos $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ de ε, se verifica que la distribución de probabilidades conjunta $f_X(x) = f_{X_1, X_2, ..., X_n}(x_1, x_2, ..., x_n)$ es simétrica, es decir, depende sólo de n y, en consecuencia, es invariante con respecto a las permutaciones de las variables $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$. Por otra parte, si $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ es la componente de un vector (X, Θ), se dice que las variables $X_1, X_2, ..., X_n$ son intercambiables si se verifica que, para cada valor θ de Θ, las X_i $(i = 1,2,...,n)$ tienen todas la misma distribución de probabilidades condicionada:

$$f\left[(x_1, x_2, ..., x_n) / \theta\right] = f(x_1 / \theta) f(x_2 / \theta) ... f(x_n / \theta)$$

y la distribución de probabilidades conjunta es, en consecuencia, de la forma:

$$f_{X_1, X_2, ..., X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = \int_0^1 g(\theta) f\left[(x_1, x_2, ..., x_n) / \theta\right] d\theta =$$

$$= \int_0^1 g(\theta) f(x_1 / \theta) f(x_2 / \theta) ... f(x_n / \theta) d\theta$$

A toda variable aleatoria n-dimensional $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ -componente del vector (X, Θ)-, en la cual cada variable marginal X_i representa el resultado posible de la i-ésima observación sobre un individuo de la población y las variables marginales son intercambiables, se la denomina **muestra aleatoria de tamaño** n.

La distribución de probabilidades marginal de X, condicionada por Θ, será de la forma:

$$f(x / \theta) = f(x_1 / \theta) f(x_2 / \theta) ... f(x_n / \theta) = \theta^{\Sigma x_i} (1-\theta)^{n - \Sigma x_i}$$

La distribución de probabilidades conjunta de la variable multidimensional (X, Θ) puede ser expresada como $h(x,\theta) = g(\theta)f(x/\theta)$ y, en consecuencia, la distribución marginal de la variable X queda definida por:

$$f(x) = \int_0^1 h(x,\theta)d\theta = \int_0^1 g(\theta)f(x_1/\theta)f(x_2/\theta)...f(x_n/\theta)d\theta$$

Luego, de acuerdo con el teorema de Bayes, la distribución final de Θ condicionada por el vector X, en función de la distribución de probabilidades inicial $g(\theta)$, será de la forma:

$$f(\theta/x) = K(x)g(\theta)\theta^{\Sigma x_i}(1-\theta)^{n-\Sigma x_i}$$

donde $K(x) = \dfrac{1}{\int_0^1 g(\theta)f(x/\theta)d\theta}$.

Por otra parte, si bien en los ejemplos anteriores no se ha realizado ninguna mención explícita sobre el problema de la definición de las probabilidades "a priori", se puede concluir inmediatamente que esta cuestión parece, inevitablemente, involucrar un cierto grado de arbitrariedad. El núcleo central de este problema ha sido la imposibilidad de lograr una interpretación correcta del principio de la razón insuficiente o principio de indiferencia según el cual, si no se conoce nada acerca de una variable X, excepto que puede asumir n valores, entonces la probabilidad "a priori" de que asuma cada uno de dichos valores debe ser constante (y, de acuerdo a la propiedad de aditividad simple, igual a n^{-1}).

A este respecto, cabe recordar que, según se demostró en la Sec. 3.1.2, los axiomas de la probabilidad conforman un conjunto completo de condiciones consistentes que limitan el dominio del razonamiento objetivamente válido sobre la incertidumbre. Esto implica que, aún cuando se pudiera hallar una formulación consistente del principio de indiferencia -o de cualquier otro procedimiento para la determinación de las probabilidades "a priori"- su legitimización sería imposible en la medida que ninguno de estos procedimientos constituye una consecuencia de dicho conjunto de axiomas. Más aún, la aceptación del principio de que los axiomas de la probabilidad definen una teoría completa de inferencia inductiva implica la aceptación de que las probabilidades "a priori", en el cálculo de las probabilidades finales de acuerdo con el condicionamiento Bayesiano, están esencialmente indeterminadas con respecto a dicha teoría.

Obsérvese que en todos los ejemplos anteriores se ha supuesto la intercambiabilidad de las sucesiones de eventos y la modificación de las probabilidades "a priori" de acuerdo con el condicionamiento Bayesiano. Debe tenerse en cuenta que, si la condición de intercambiabilidad no se verifica se generarán sucesiones de probabilidades totalmente ajenas a la realidad. Esta restricción podría solucionarse considerando un conjunto de hipótesis más amplio que podría incluir, por ejemplo, conjeturas de comportamientos caóticos, pero esta alternativa vaciaría de sentido a la aproximación Bayesiana.

Este resultado demostraría nuevamente la insuficiencia de la reducción a la intercambiabilidad de de Finetti y la posible necesidad de reconocer la existencia de una probabilidad objetiva[470].

Ejemplo nº 3.23:

A fin de efectuar un control de calidad se extrajo una muestra (x) de 10 piezas de un lote de 100, en la cual la primera, la cuarta y la séptima piezas resultaron defectuosas, $x = (1,0,0,1,0,0,1,0,0,0)$. Supóngase una distribución de probabilidades inicial de la variable aleatoria Θ -que representa la fracción de piezas defectuosas en el lote- de la forma:

$$g(\theta) = \begin{cases} (110)(1-\theta)\theta^9 & para \qquad 0 \leq \theta \leq 1 \\ 0 & para\ cualquier\ otro\ valor\ de\ \theta \end{cases}$$

Una aproximación binomial permite escribir la función de verosimilitud de la siguiente forma $f(x/\theta) = \theta^3(1-\theta)^7$ (expresión de la que se deduce la condición de intercambiabilidad). Luego, se obtiene que:

$$f(\theta/x) = K(x)(110)(1-\theta)\theta^9\left[\theta^7(1-\theta)^7\right] = K(x)(110)\theta^{12}(1-\theta)^8$$

donde,

$$K(x) = \frac{1}{\int_0^1 (110)\theta^{12}(1-\theta)^8\, d\theta} = \frac{1}{110}\frac{21!}{12!8!}$$

De modo que:

$$f(\theta/x) = \frac{21!}{12!8!}\theta^{12}(1-\theta)^8$$

A partir de esta expresión se obtiene que, dada la muestra x, la proporción esperada de piezas defectuosas será, en este caso:

$$E(\theta/x) = \int_0^1 \theta f(\theta/x)d\theta = \frac{21!}{12!8!}\frac{13!8!}{22!} = \frac{13}{22} = 0{,}59$$

---

[470]. Considérense, por ejemplo, las sucesiones que se originan en el llamado **juego de rojo o azul** (¡que colores gloriosos!) propuesto por Feller, W. (1950) o a partir del **reloj caótico** de Albert, M. (1992)(1999). Popper, K.R. (1957a) utilizó el juego de rojo o azul para criticar lo que denominó la **regla inductiva simple** y, en consecuencia, la reducción a la intercambiabilidad de de Finetti y, en la reedición de 1983 de la misma obra, para probar (se podría decir, en vano) la imposibilidad de la existencia de una lógica inductiva (ver Gillies, D.A. (1996)).

3.3.11.- La inferencia clásica

El eje de la polémica objetivismo-subjetivismo se desarrolló, fundamentalmente, alrededor de la interpretación Bayesiana de la inferencia inductiva, a la cual se consideró -en forma equivocada- ligada indisolublemente al subjetivismo. Para los subjetivistas cualquier método de inferencia, además de tomar en consideración la información disponible, debe reflejar la capacidad del observador para atribuir distintas ponderaciones a los distintos componentes de dicho conjunto de información[471], en tanto que los objetivistas consideran que los métodos de inferencia deben adecuarse, exclusivamente, a los criterios de la investigación científica, sin tomar en consideración la naturaleza probabilística del problema.

Fue la aparente imposibilidad de definir las probabilidades "a priori" de una manera objetiva, la que hizo que muchos autores -por ejemplo Fisher, R.A. (1956)- rechazaran la idea Bayesiana, consideraran la imposibilidad de la formulación de una teoría probabilística de la inferencia inductiva y, consecuentemente, se inclinaran por una teoría de la inferencia -llamada clásica- basada en la refutación lógica[472].

La inferencia estadística clásica se ocupa, fundamentalmente, de dos tipos de problemas: la prueba de hipótesis mediante el diseño de los llamados tests de significatividad, y la estimación de parámetros[473]. Si bien ambos temas han alcanzado un alto grado de refinamiento técnico, sus principios esenciales pueden ser fácilmente explicados a partir de ejemplos simples: Supóngase que la hipótesis a ser testeada (la llamada hipótesis nula) afirme que una moneda dada es legítima. Se

---

471. Ver Fürst, D. (1978).

472. Lakatos, I. (1978) expresó ese sentimiento de la siguiente forma: "*El valor cognitivo de una teoría no tiene nada que ver con su influencia psicológica sobre las mentes de las personas sino que (...) depende exclusivamente del fundamento objetivo que posea en los hechos*" (en realidad, Lakatos no aclaró nunca el significado de la expresión "*valor cognitivo objetivo*").

473. El objetivo de la teoría estadística objetivista consiste en caracterizar buenos métodos de estimación de la probabilidad sobre la ocurrencia de un evento a partir de la historia observada de ocurrencias y no ocurrencias (repetidas) del mismo.

realiza un experimento consistente en arrojar 20 veces dicha moneda y se toma en consideración el número de veces que se obtuvo el resultado "cara". El espacio muestral de dicho experimento comprende 21 posibilidades (que abarcan desde el resultado "*ninguna vez 'cara', 20 veces 'ceca'*" hasta el resultado "*20 veces 'cara', ninguna vez 'ceca'*") y el test de significatividad requiere la evaluación de la probabilidad estadística de cada uno de esos resultados posibles, suponiendo la validez de la hipótesis nula. Se selecciona, entonces, una región -a la que se denomina crítica- del espacio de resultados (usualmente en una o ambas "colas" de la distribución de probabilidades) tal que la probabilidad de que el resultado de un experimento esté incluido en ella, si la hipótesis nula fuera verdadera, sea muy pequeña (habitualmente 0,05). Finalmente, si el resultado obtenido en el experimento estuviera ubicado en la región crítica, se dirá que es significativo, a un nivel de significación del 5%, es decir, que existen razones suficientes para rechazar la hipótesis nula a un nivel del 5%. Ahora bien este planteo permite concluir en forma inmediata que los resultados obtenidos de la aplicación de los tests de significatividad encierran contradicciones: Ante la imposibilidad de arribar, en este esquema, a un sistema de conclusiones probables, se establece un mecanismo de aceptación-rechazo de una hipótesis, el cual se funda en significatividades y niveles de significación que no logran proporcionar una conclusión cierta -en el sentido de la lógica ordinaria- acerca de la veracidad o del valor cognitivo de la hipótesis en cuestión[474]. Con respecto a esta cuestión, Fisher, R.A. (1950)(1956) elaboró una justificación de los tests de significatividad basada en el siguiente razonamiento: obtenido un resultado significativo en el experimento, puede considerarse que ha ocurrido un resultado altamente improbable o que existen razones suficientes para considerar que la hipótesis nula es falsa[475].

Otra forma de interpretar el rechazo de una hipótesis se debe a Neyman, J.; Pearson, E. (1933), quienes desarrollaron una forma de test de significatividad que toma en consideración las hipótesis alternativas a la hipótesis nula. Este método sugiere que, aunque no se pueda concluir si una hipótesis nula es "*realmente*" falsa cuando se la "*rechaza a un nivel de significatividad dado*", en la práctica, se puede actuar como si lo fuera. La justificación de esta interpretación se basa en el siguiente razonamiento: Si se efectúan, repetidamente, tests de significatividad sobre la misma o sobre diferentes hipótesis y si, cada vez que el resultado fuera significativo a un nivel del 5%, se decidiese actuar como si la hipótesis nula fuera falsa, sólo el 5%, aproximadamente, de las decisiones resultarían equivocadas. De acuerdo con este esquema, un test construido utilizando un nivel de significatividad del 5% conduciría a un rechazo de una hipótesis nula verdadera con una probabilidad igual a 0,05, razonamiento que encierra una contradicción en la medida que de la probabilidad de un evento no se puede deducir su frecuencia. Esto permite concluir que la expresión "*significativo a un nivel de significatividad dado*" tampoco dice nada acerca de la veracidad de una hipótesis[476].

Con respecto al segundo gran tema que ocupa a la inferencia clásica -el problema de la estimación de parámetros-, se considerará aquí, a título introductorio, sólo la parte que hace a la estimación de intervalos de confiabilidad. Sea el caso más simple de la estimación del valor medio (m) de una población con desvío estándar conocido (σ). Supóngase que la evidencia empírica ($\overline{X}$) se obtiene a partir de una muestra de tamaño $n >> 0$. De acuerdo con los postulados del teorema

---

474. Ver Sec. 2.6.

475. Fisher, R.A. (1956) consideró que la "*fuerza de un test de significatividad*" radicaba, precisamente, en dicha dicotomía.

476. Ver Sec. 2.6.

central del límite, su distribución de probabilidades sobre el espacio de resultados es Normal, con desvío estándar $\sigma\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. De estas consideraciones, se obtiene que:

$$p\left(-1{,}96 \leq \frac{X^* - m}{\sigma\left(X^*\right)} \leq 1{,}96\right) = 0{,}95$$

(donde 0,95 determina el coeficiente de confiabilidad) o, lo que es lo mismo, que:

$$p\left[\overline{X} - (1{,}96)\sigma\left(\overline{X}\right) \leq m \leq \overline{X} + (1{,}96)\sigma\left(\overline{X}\right)\right] = 0{,}95$$

Luego, si a partir de una muestra dada, se obtiene el valor medio $\overline{X}^*$, queda definido un intervalo de confiabilidad, para m, del 95%:

$$\left[\overline{X}^* - (1{,}96)\sigma\left(\overline{X}^*\right); \overline{X}^* + (1{,}96)\sigma\left(\overline{X}^*\right)\right]$$

En términos de la estadística clásica este resultado debe ser interpretado de la siguiente forma: el 95% de los intervalos definidos de acuerdo con este método contendrán al parámetro en cuestión. En general los libros de texto clásicos indican que este grado de confiabilidad no debe ser interpretado como una probabilidad (ni objetiva, ni subjetiva), pero no definen qué cosa es.

A este respecto y de acuerdo con el **principio de la probabilidad directa**, si el observador conociera que la probabilidad objetiva de ocurrencia de un evento E es π, y no poseyera ninguna otra información relevante sobre el particular, entonces podría considerar (con las reservas ya comentadas en el Cap. 2 acerca de la equiprobabilidad y de la posibilidad de su repetición en igualdad de condiciones) que π constituye un grado de confiabilidad adecuado sobre la ocurrencia de dicho evento en un ensayo dado, es decir, podría evaluar que $p^*\left[E_j \,/\, p(E) = \pi\right] = \pi$ (donde E_j denota la ocurrencia del evento E en la observación j-ésima y $p^*(\bullet)$ define una función de probabilidades subjetiva). Ahora bien, sea, por ejemplo, el evento:

$$\begin{array}{l} E\!:\!\textit{obtener mas de } 5 \textit{ veces el resultado "cara" al arrojar} \\ \quad 20 \textit{ veces una moneda clasica} \end{array}$$

y sea $\pi = 0{,}86$ su probabilidad objetiva. Entonces, de acuerdo con el principio de la probabilidad directa, el grado de confiabilidad que el observador asignará a la obtención de más de 5 veces el resultado "cara" en cualquier sucesión de 20 tiradas de una moneda clásica será:

$$p^*\left\{(x > 5)_j \,/\left[p(x > 5) = 0{,}86\right]\right\} = 0{,}86$$

Pero, supóngase que, efectuadas 20 observaciones repetidas sobre el fenómeno, se haya obtenido dos veces el resultado "cara". Aplicar estrictamente el principio de la probabilidad directa implicaría que el observador debería asignar un 86% de confiabilidad a la ocurrencia del evento "*que 2 sea mayor que 5*", lo cual, obviamente, sería absurdo. Este razonamiento permite concluir que el principio de la probabilidad directa no constituye una regla general para cada valor de $0 \leq x \leq 20$, que el término x no es un número, sino una función cuyos valores dependen del resultado del experimento, en resumen, que la sustitución de x por números, requerida en la interpretación clásica de los intervalos de confiabilidad, resulta conceptualmente inaceptable.

3.4.- La axiomática propensionalista

3.4.1.- La regla de falsación, la axiomática frecuencista y el concepto de independencia

Sea el caso, ya mencionado en la Sec. 2.6, de una moneda sobre cuyas características no se posee información y tal que se supone que la probabilidad de obtener el resultado "cara" en una tirada dada es igual a p. Entonces, la variable aleatoria que representa el número de resultados "cara" a obtener al cabo de una sucesión de n tiradas independientes de dicha moneda se distribuye de acuerdo con una función binomial de la forma[477]:

$$p(X) = \binom{n}{X} p^X (1-p)^{n-X} \qquad (X = 0,1,2,\ldots,n)$$

La cual, cuando n aumenta indefinidamente, de acuerdo con los postulados del teorema central del límite, converge a una distribución Normal del tipo $N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$ de modo que, con una probabilidad del 95% (es decir, con un nivel de significación del 5%), se puede inferir que[478]:

$$p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \frac{X}{n} \leq p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Es decir que, a partir de la regla de falsación, se puede concluir que la ley de estabilidad de las frecuencias estadísticas se puede considerar como prácticamente cierta. Lo cual demuestra que, aún en el caso en que la probabilidad no esté definida en términos de frecuencias relativas, mediante la aplicación de la regla de falsación para proposiciones probabilísticas, es posible establecer un vínculo entre probabilidades y frecuencias observadas.

Se puede concluir, además, que esta interpretación propensionalista al fijar una tasa de convergencia igual a $\frac{1}{\sqrt{n}}$, satisface la condición de Miller, D.W. (1994) en la medida que mejora

---

477. La distribución binominal será tratada en el Cap. 7.

478. Los teoremas en el límite serán tratados en los capítulos 11 y 12.

los postulados de la ley empírica propuesta por von Mises[479]. Debe tenerse en cuenta que, habiendo partido de una posición operacionalista, la precisión de la ley de estabilidad de las frecuencias obtenida a partir de investigaciones empíricas exclusivamente, sin considerar el concepto teórico de probabilidad, no podía ser aumentada. De acuerdo con esta posición la probabilidad debía ser definida utilizando una axioma obtenido por abstracción a partir de la ley empírica y es imposible imaginar que la precisión de la ley pudiera aumentar mediante el agregado de condiciones restrictivas sobre la tirada de la moneda si estas no se basan en conceptos teóricos. Como se vio en la Sec. 2.6, la interpretación propensionalista propone una interacción continua entre teoría y observación como una solución más simple y más práctica que la de la estrategia operacionalista que propone en primer lugar observar y solamente después introducir conceptos teóricos.

Esta interpretación propensionalista permite, además, evitar las dificultades con que tropezó von Mises al aproximar los colectivos empíricos finitos mediante los colectivos matemáticos infinitos. Debe tenerse en cuenta que el reemplazo de la distribución binomial por la función Normal cuando n aumenta indefinidamente, en el ejemplo mencionado más arriba, no debe interpretarse en este contexto como un intento de relacionar una realidad empírica con un límite matemático hipotético, sino como la utilización de un límite como una aproximación matemática con fines de cálculo.

Dado que, asociado a la aplicación de la regla de falsación existe un nivel de significación de α % (es decir que se debe esperar que la regla de falsación conduzca al error de considerar como falsa una hipótesis estadística verdadera en un α % de los casos en que sea aplicada dicha hipótesis), se puede concluir que, si bien la regla de falsación podría considerarse como práctica y empíricamente exitosa, no es consistente.

Con respecto a la ley de irregularidad o de exclusión de los sistemas de juego, debe tenerse en cuenta que en la teoría propensionalista la noción de aleatoriedad se reduce a la de independencia, simplificando su desarrollo matemático. Considera que una sucesión es aleatoria si está formada por las repeticiones binarias independientes de un conjunto de condiciones S con $p(1) = p$ constante. Según se vio en la Sec. 3.2, si bien von Mises definió como aleatorias a aquellas sucesiones que satisfacían la condición de invariancia de las frecuencias límite con respecto a un conjunto de sistemas de selección localizada, definió y utilizó una noción de colectivos independientes introduciendo, de esta forma, los conceptos de aleatoriedad e independencia como nociones marcadamente diferentes. La interpretación propensionalista se basa en el principio axiomático de que ambos conceptos son el mismo concepto.

3.4.2.- La axiomática de Kolmogorov y el axioma de las repeticiones independientes

En las secciones 3.2 y 3.3 se consideró la axiomática de Kolmogorov en el contexto de las representaciones frecuencista y subjetivista respectivamente, que se caracterizan por proporcionar

---

[479]. Miller, D.W. (1994): "*Una de las cualidades de la interpretación propensionalista de la probabilidad consiste en ofrecer una explicación más profunda de la estabilidad estadística*".

definiciones explícitas de la probabilidad a partir de las cuales se derivan dichos axiomas[480].

En lo que hace a la interpretación propensionalista, debe tenerse en cuenta que, de acuerdo a lo expresado en la Sec. 2.6, no proporciona una definición explícita de probabilidad a partir de la cual puedan derivarse los axiomas de Kolmogorov, en realidad, como se vio en la sección precedente, considera a la probabilidad como explícitamente caracterizada por un conjunto de axiomas diseñados para proporcionar una teoría matemática de los fenómenos aleatorios observados y cuya justificación se obtiene a partir de la demostración que permite la derivación de resultados que concuerdan con la observación. En este contexto propensionalista, la justificación de los axiomas de Kolmogorov se obtiene a partir de la demostración que permite la derivación de las leyes de estabilidad de las frecuencias estadísticas y de aleatoriedad.

Los axiomas de Kolmogorov analizados en la Sec. 3.1.2 pueden ser resumidos en un axioma propensionalista de la forma: la probabilidad de que ocurra un evento del espacio muestral Ω define una función no-negativa aditiva numerable en dicho espacio muestral y tal que $p(\Omega) = 1$ (de acuerdo a lo expresado en la Sec. 3.1.5, a fin de completar el sistema es necesario adicionar a este axioma la definición de probabilidad condicionada, considerada como una noción primitiva y caracterizada por otro axioma). La vinculación de estos axiomas con el ámbito de las observaciones se obtiene mediante la definición de una regla de falsación para proposiciones probabilísticas y de un axioma adicional, conocido como **de las repeticiones independientes**, que no es otra cosa que la formalización explícita de algunas sugestiones realizadas por Kolmogorov, A.N. (1933) al considerar la relación entre su teoría y los datos experimentales.

Luego, a pesar de su afirmación que los "*Grundbegriffe*" estaban basados fundamentalmente en el trabajo de von Mises, se puede concluir que Kolmogorov, A.N. (1933) formuló sus axiomas a partir de una definición propensionalista fundada en la propuesta de Popper, consistente en asociar las probabilidades a los resultados de un sistema de condiciones repetibles S (no especificadas en el texto) y no a los colectivos de la interpretación fecuencista[481]. Kolmogorov propuso una formulación que representa el principio básico de la teoría propensionalista según el cual un conjunto de condiciones repetibles posee una propensión a producir, en una sucesión suficientemente larga de repeticiones, frecuencias relativas que son aproximadamente iguales a las probabilidades: "*Prácticamente se puede asegurar que si el complejo de condiciones S es repetido un número suficientemente grande de veces, n y si m es el número de ocurrencias del evento E, entonces el cociente $\frac{m}{n}$ sólo presentará una leve diferencia con $p(E)$*". Ahora bien, la formulación de este principio sólo puede obtenerse a partir de la definición de un sistema de probabilidades formado por un espacio de probabilidades en el sentido ordinario del término dado en la Sec. 3.1.2 y considerando a Ω como el conjunto de los resultados posibles de las condiciones repetibles S. Luego, dados un sistema de probabilidades y un evento $E \in \Omega$, si las condiciones S son repetidas un número suficientemente grande (n) de veces y el evento E ocurre $n(E)$ veces, entonces se puede asumir como una premisa básica de la teoría propensionalista que es prácticamente cierto que $\frac{n(E)}{n} \approx p(E)$

480. Con la excepción ya comentada del axioma de aditividad numerable en el ámbito de la definición frecuencista.

481. Ver Sheynin, O. (1996).

(los alcances de la expresión "prácticamente cierto" están relacionados con la utilización de la regla de falsación).

Antes de continuar con los alcances de esta formalización del principio propensionalista es necesario analizar con detalle el concepto de repetibilidad. Obviamente, de acuerdo con la opinión de de Finetti[482], no importa cuán cuidadosamente se hayan realizado, las repeticiones diferirán en muchos aspectos. Aún en el caso en que dos repeticiones coincidan en todas sus propiedades "*macroscópicas*"[483], inevitablemente diferirán en el momento en que fueron realizadas. Luego, se puede concluir que una sucesión de observaciones constituye una sucesión de repeticiones relativas a un conjunto S de condiciones o propiedades, si cada elemento de la sucesión satisface todas las condiciones de S, sin tomar en consideración otros aspectos no comprendidos en dicho conjunto de condiciones. Ahora bien, dado que existen ejemplos de conjuntos de condiciones repetibles (como las cadenas de Markov) que no son independientes, se puede concluir que repetibilidad no implica independencia. De modo que, en lo que hace a la asignación de probabilidades, se puede optar por asumir los resultados de los conjuntos de condiciones repetibles sin considerar si estas repeticiones son o no independientes o, alternativamente, tomar en cuenta sólo los resultados de los conjuntos de condiciones repetibles cuyas repeticiones sean independientes. La segunda opción conduce al ya mencionado **axioma de las repeticiones independientes**, que puede ser formulado de la siguiente forma: Sea una sucesión de repeticiones de las condiciones S y supóngase que de dicha sucesión se seleccione un conjunto de n repeticiones, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, reiterándose este procedimiento una y otra vez y seleccionando el mismo conjunto de medida n de estas repeticiones. Si, a partir de un sistema de probabilidades, se verifica que, para todo n, la medida $p^{(n)}$ sobre el mínimo campo de Borel ($\Im^n$) que contiene a $\Im$ es igual al producto de orden n de la medida p sobre $\Im$, entonces se puede asegurar que las repeticiones son independientes.

Una crítica que suele hacerse a este axioma es que limita la teoría de la probabilidad al caso particular de la independencia de los eventos. Pero, a partir del caso de una cadena de Markov, considerando una sucesión completa de sus realizaciones como un punto en el espacio de atributos Ω, de modo que las condiciones repetibles son aquéllas que definen a la cadena en su totalidad y las repeticiones independientes son realizaciones independientes de la cadena total, como respuesta a esta crítica, se demuestra que éste y otros casos de eventos no-independientes puede ser tratados, precisamente, a partir de la interpretación propensionalista, de acuerdo con los postulados del axioma de repeticiones independientes.

Debe tenerse en cuenta que, como se mencionó en la sección precedente, en la teoría propensionalista, el concepto de aleatoriedad de von Mises se reduce al concepto de independencia, Por otra parte, de acuerdo a lo expresado en la Sec. 3.3.10 al analizar la axiomática subjetivista, el concepto de intercambiabilidad puede ser considerado, en cierto sentido, como equivalente a la noción objetivista de independencia, es decir, al supuesto de imposibilidad de aprender de la experiencia. Luego, si se acepta que la independencia no puede ser considerada como una característica de la teoría de la probabilidad en general, sino como inherente a la interpretación objetivista, se puede concluir que el axioma de repeticiones independientes puede ser considerado

---

482. Ver Sec. 2.5.

483. Gillies, D.A. (2000).

como un elemento diferenciador de las interpretaciones objetivista y subjetivista de la probabilidad[484].

Obsérvese, por otra parte, que dado que los axiomas fueron establecidos para explicar las observaciones de un fenómeno aleatorio de la forma más simple que fuera posible, contrariamente a lo que ocurre en la teoría de von Mises, en la axiomática propensionalista la aditividad numerable está completamente justificada.

Luego, se puede concluir que, tal como se adelantó en páginas anteriores, los dos axiomas mencionados más la regla de falsación para proposiciones probabilísticas permiten derivar las leyes empíricas de von Mises. Es decir, por carácter transitivo, permiten la justificación de la axiomática de Kolmogorov en el ámbito de la interpretación propensionalista.

3.4.3.- Propensionalismo, causalidad y probabilidades condicionadas

Como se mencionó en la Sec. 2.6, Popper, K.R. (1990) propuso una interpretación de la propensión como una generalización de la noción de causa[485], pero su planteo está afectado por una dificultad insalvable generada por la dirección temporal definida de la causalidad. Las probabilidades poseen una simetría en el dominio del tiempo que la causalidad no posee: si E_1 causa a E_2 y si la ocurrencia de E_1 es anterior a la de E_2, entonces E_2 no puede ser causa de E_1.

La no consideración de este orden temporal genera incongruencias del tipo de la ya mencionada paradoja de Humphreys según la cual, dado un conjunto de probabilidades que permita deducir que la probabilidad de que una persona fallezca por haber recibido un disparo en la cabeza es igual a $\frac{3}{4}$, resulta incongruente, bajo estas circunstancias, afirmar que dicho cadáver poseía una propensión igual a $\frac{3}{4}$ de que su cráneo fuera perforado por una bala (ver Fetzer, J.H. (1981), Humphreys, P. (1985)).

Milne, P. (1986) planteó una ilustración más simple de esta paradoja en la que considera los eventos:

---

[484]. Kolmogorov, A.N. (1933): "*...desde un punto de vista matemático, la teoría de la probabilidad puede ser considerada como una aplicación especial de la teoría general de las funciones aditivas (...) El hecho que la función aditiva $p(A)$ sea no-negativa y satisfaga la condición $p(\Omega)=1$ no agrega dificultades. Las variables aleatorias (...) desde un punto de vista matemático representan simplemente funciones medibles con respecto a $p(A)$, en tanto que sus esperanzas matemáticas son integrales de Lebesgue abstractas (esta analogía aparece completamente explicada por primera vez en el trabajo de Fréchet). En consecuencia, la mera introducción de los conceptos anteriores no constituye una razón suficiente para producir una base de desarrollo de una nueva teoría. Históricamente la independencia de los experimentos y las variables aleatorias representa el concepto matemático que imprimió el sello característico a la teoría de la probabilidad. De modo que en el concepto de independencia se puede reconocer al menos el germen de un tipo particular de problemas en la teoría de la probabilidad*".

[485]. Popper, K.R. (1990): "*La causación no es sino un caso especial de la propensión: el caso de una propensión igual a 1*".

$$E_1 : \textit{obtener el resultado "6"}$$

y

$$E_2 : \textit{obtener un resultado par}$$

al arrojar un dado simétrico. Entonces, de acuerdo con la teoría clásica de la probabilidad, será $p(E_2 / E_1) = 1$ y $p(E_1 / E_2) = \frac{1}{3}$. Luego, si el resultado de una tirada en particular es "6", el resultado E_2 queda completamente determinado por E_1, lo cual corresponde satisfactoriamente a una propensión igual a 1. Pero la probabilidad $p(E_1 / E_2)$ no puede ser interpretada considerando que la ocurrencia del resultado E_2 causa parcialmente, con una ponderación igual a $\frac{1}{3}$, al resultado E_1 aún no ocurrido.

Por su parte, Earman, J.; Salmon, W.C. (1992) propusieron un ejemplo alternativo al de Milne (que se diferencia de éste porque los eventos observan un ordenamiento temporal): Sean dos máquinas ($M^{(1)}$ y $M^{(2)}$) que producen un artículo dado, tales que $M^{(1)}$ produce 800 unidades diarias con un 1% de piezas defectuosas y $M^{(2)}$ (más antigua y menos eficiente) produce 200 unidades diarias con un 2% de defecto. Supóngase que, al cabo de un día, se selecciona una unidad al azar entre las 1000 piezas producidas por ambas máquinas. Denotando por D al evento "*que la unidad seleccionada sea defectuosa*" y por $\mu^{(i)}$ $(i = 1,2)$ al evento "*que dicha pieza haya sido producida por la máquina* $M^{(i)}$ $(i = 1,2)$ ", se obtiene que $p(D / \mu^{(i)}) = 0{,}01$ y, de acuerdo con los postulados del teorema de Bayes[486], que:

$$p(\mu^{(1)} / D) = \frac{p(D / \mu^{(1)})p(\mu^{(1)})}{p(D / \mu^{(1)})p(\mu^{(1)}) + p(D / \mu^{(2)})p(\mu^{(2)})} = \frac{2}{3}$$

Ahora bien, a partir de la definición propensionalista, $p(\mu^{(1)} / D)$ debe ser interpretada como la propensión que posee una unidad defectuosa seleccionada al cabo de un día de producción a haber sido producida por la máquina $M^{(1)}$. Considerando la propuesta Popperiana de interpretar a las propensiones como causas parciales, este razonamiento quedaría expresado de la siguiente forma: la selección de una unidad defectuosa al fin del día constituye una causa parcial con ponderación igual a $\frac{2}{3}$ de haber sido producida por $M^{(1)}$. Expresión que carece de sentido, dado el orden temporal que afecta a los eventos (al momento en que la unidad es seleccionada, definitivamente, ya ha sido producida por $M^{(1)}$ o por $M^{(2)}$).

---

[486]. Este teorema será estudiado en el Cap. 13.

A partir de una teoría en la que las propensiones están asociadas a conjuntos de condiciones repetibles (S), cuyos resultados, $E_1, E_2, E_3, \ldots$, forman una clase Ω , se justifica la asignación de las propensiones a los eventos $E_1, E_2, E_3, \ldots$ (que son subconjuntos de Ω), de modo que cada **probabilidad condicionada fundamental** (o **probabilidad condicionada en el sentido fundamental**) $p(E_i / S) = p \ (i = 1,2,\ldots)$ implica que la repetición del conjunto de condiciones S un número suficientemente grande de veces, genera una propensión a que la frecuencia relativa del resultado E_i sea aproximadamente igual a p (obsérvese que en esta interpretación la propensiones no poseen ninguna vinculación con las repeticiones individuales de S, son calculadas utilizando asignaciones subjetivas a las probabilidades). Pero las probabilidades $p(S / E_i)$ no tienen sentido en el ámbito de esta teoría.

En el marco conceptual de la teoría propensionalista resulta necesario distinguir entre las probabilidades condicionadas fundamentales ($p(E_i / S)$) (donde S denota el conjunto de condiciones repetibles al que están asociadas las propensiones)[487] y las probabilidades condicionadas por un evento, $p(E_i / E_j \, y S)$ $(i \neq j)$ (donde: **i)** E_i denota un evento, no un conjunto de condiciones repetibles y **ii)** sólo se toman en cuenta los resultados de S que pertenecen al conjunto E_j). Decir que $p(E_i / E_j \, y S) = q$ significa que existe una propensión a que, si el conjunto de condiciones $(E_j \, y S)$ es repetido un número suficientemente grande de veces, la frecuencia relativa del resultado E_i sea aproximadamente igual a q .

A partir de esta interpretación asociada a conjuntos de condiciones repetibles, la probabilidad $p(E_1 / E_2 \, y S)$ del ejemplo de Milne puede ser interpretada de la siguiente forma: Supóngase que se tire un dado un número suficientemente grande de veces sin tomar en consideración los resultados "número par", entonces, bajo estas condiciones, existe una propensión en el resultado "6" a ocurrir con una frecuencia relativa igual a $\frac{1}{3}$. De la misma forma, la probabilidad $p(\mu^{(1)} / D \, y S)$ en el ejemplo de Earman-Salmon puede ser interpretada de la siguiente forma: Supóngase que la condición S sea repetida diariamente tomando en consideración sólo aquellos días en que se haya seleccionado una unidad defectuosa, entonces bajo estas condiciones, a partir de una sucesión suficientemente larga de observaciones, existe una propensión a que el evento $\mu^{(1)}$ ("*que la pieza defectuosa haya sido producida por* $M^{(1)}$ ") ocurra con una frecuencia aproximadamente igual a $\frac{2}{3}$. Obsérvese que si las propensiones son propensiones a producir frecuencias relativas en sucesiones suficientemente largas de observaciones entonces, aún teniendo en cuenta que en cada caso individual, al momento en que la unidad seleccionada es examinada y

487. En la interpretación subjetivista el condicionante S es sustituido por el conjunto de información con que cuenta el observador.

hallada defectuosa, los resultados $\mu^{(1)}$ o $\mu^{(2)}$ están determinados, la propensión $\frac{2}{3}$ tiene sentido. Luego, se puede concluir que las probabilidades condicionadas por un evento son reversibles.

En el ámbito de la teoría Popperiana-Milneriana para casos singulares, en la que la probabilidad de ocurrencia de un evento E_t se supone condicionada por un estado previo del universo, U_τ $(\tau < t)$, la evaluación $p(E_t / U_\tau) = p$ implica reconocer que el estado del universo U_τ posee una propensión (interpretada como una causa generalizada) de grado p a generar la ocurrencia de E_t.

Retornando al ejemplo de Earman-Salmon, sean: **i)** U_{t_1} el estado del universo en un momento t_1 al inicio de un día particular; **ii)** D_{t_3} $(t_3 > t_1)$ el evento "*que la unidad seleccionada en un momento* t_3, *al final de dicho día, sea defectuosa*" y **iii)** $\mu_{t_2}^{(i)}$ $(i = 1{,}2; t_1 < t_2 < t_3)$ el evento "*que esta unidad defectuoso haya sido producida en el momento* t_2 *por la máquina* $M^{(i)}$ $(i = 1{,}2)$ *en el curso del día en cuestión*". En base a la interpretación propensionalista Popperiana-Milneriana de casos singulares, dado que el conjunto de condiciones $(\mu_{t_2}\ y\ U_{t_1})$ no definen un estado del universo en un momento dado, la probabilidad $p\left(D_{t_3} / \mu_{t_2}^{(1)}\ y\ U_{t_1}\right)$ no admitiría una interpretación (para definir un estado del universo al momento t_2 sería necesario especificar el estado de "todos" los eventos, además de μ_{t_2} al momento t_2). Lo mismo ocurriría con la probabilidad $p\left(\mu_{t_2}^{(1)} / D_{t_3}\ y\ U_{t_1}\right)$, ya que el evento $\mu_{t_2}^{(1)}$ debería ocurrir en un momento anterior a t_3, razón por la cual la probabilidad $p\left(\mu_{t_2}^{(1)} / U_{t_1}\right)$ carecería de un significado causal. Se puede concluir, entonces que, dado que la única forma de resolver la paradoja de Humphreys es despojando a las probabilidades condicionadas por un evento de cualquier tipo de relación causal, la teoría Popperiana-Milleriana para casos singulares tampoco proporciona una solución aceptable.

Finalmente, en el ámbito de la teoría Fetzeriana para casos singulares en la que la probabilidad de ocurrencia de un evento E se supone condicionada por el conjunto completo de sus condiciones relevantes al momento t, R_t, la evaluación $p(E / R_t) = p$ implica reconocer una propensión (interpretada como una causa generalizada) de grado p para las condiciones R_t a producir la ocurrencia de E en algún momento posterior a t. En este contexto la probabilidad $p\left(D_{t_3} / \mu_{t_2}^{(1)}\ y\ U_{t_1}\right)$ del ejemplo de Earman-Salmon queda expresada como $p\left(D_{t_3} / \mu_{t_2}^{(1)}\ y\ R_{t_1}\right)$ (donde la ocurrencia del evento $\mu_{t_2}^{(1)}$ forma parte del conjunto de condiciones relevantes para D_{t_3} al momento t_2) y puede ser interpretada como una probabilidad condicionada fundamental para un valor de t diferente $p\left(D_{t_3} / \mu_{t_2}^{(1)}\ y\ R_{t_1}\right) = p\left(E / R_{t_2}\right)$, con la relación causal inherente a toda probabilidad condicionada fundamental. Por otra parte, si se tratara de extender el conjunto de condiciones $\left(D_{t_3}\ y\ R_{t_1}\right)$ a R_{t_3}, entonces la probabilidad $p\left(\mu_{t_2}^{(1)} / R_{t_3}\right)$ perdería sentido como una causa generalizada, ya que el momento t_3 es posterior a t_2 y, en consecuencia, en estas condiciones, la probabilidad $p\left(\mu_{t_2}^{(1)} / R_{t_3}\right)$ no admitirá una interpretación.

De las consideraciones anteriores se puede concluir, entonces, que la paradoja de Humphreys puede ser resuelta parcialmente en el ámbito de la axiomática de Fetzer en la que algunas probabilidades condicionadas por un evento son asimilables a propensiones (en el sentido de causas generalizadas)[488]. Dado que en su teoría las propensiones no satisfacen la axiomática de Kolmogorov[489], Fetzer, J.H. (1981) desarrolló este sistema axiomático propensionalista alternativo (al que denominó "*cálculo probabilístico causal*")[490], de características definitivamente probabilísticas, que podría ser considerado como una **teoría de la probabilidad no-estándar o no-Kolmogoroviana**[491]

[488]. Fetzer, J.H. (1982): "*...en virtud de su 'direccionamiento causal', las propensiones no pueden ser formalizadas apropiadamente como probabilidades 'absolutas' ni como probabilidades condicionadas que satisfacen tanto las relaciones de probabilidades inversas como las directas*".

[489]. Fetzer, J.H. (1991): "*...el hecho que las propensiones, en virtud de su condicionamiento parcial, no pueden ser consideradas como probabilidades (en el sentido que no satisfacen los axiomas estándar ni el teorema de Bayes), sólo fue reconocido después de la publicación de Humphreys (1985)*"

[490]. Conocido también como **cálculo probabilístico de Fetzer-Nute**.

[491].Fetzer, J.H. (1981): "*Quizás esto signifique que la construcción propensionalista debe ser clasificada como una concepción no-estándar de la probabilidad, ¡lo cual no excluye su importancia como una interpretación de la probabilidad! La geometría no-Euclidiana surgió como una concepción no-estándar de la geometría, pero esta circunstancia no disminuyó su importancia. Por lo tanto la construcción propensionalista de la probabilidad podría ser considerada capaz de formular una interpretación estándar, así como las construcciones de la geometría no-Euclidiana formularon interpretaciones estándar de la geometría, con anterioridad al advenimiento de la relatividad especial y general*".

APENDICE 1

La paradoja de San Petersburgo

El problema que dio origen a la hoy conocida como paradoja de San Petersburgo puede ser enunciado de la siguiente forma[494]: Sea un juego en el que un jugador A arroja sucesivamente una moneda clásica hasta obtener el resultado "cara". Si esta circunstancia se produce en la primera tirada, entonces A le debe entregar a su contrincante, el jugador B, una moneda; si el resultado "cara" se presenta por primera vez en la segunda tirada, A le debe entregar a B dos monedas; si este resultado se presenta en la tercera tirada, A le debe entregar a B 2^2 monedas. En general, si el resultado "cara" se presenta en la n-ésima tirada, A le debe entregar a B 2^{n-1} monedas.

Denotando por X a la variable aleatoria que representa las cantidades a recibir por el jugador B, será $p\left(X = 2^{x-1}\right) = \frac{1}{2^x}$ $(x = 1,2,...)$ y la función de distribución de probabilidades será, entonces, de la forma[495]:

$$F_X\left(2^{x-1}\right) = p\left(X \leq 2^{x-1}\right) = \sum_{j=1}^{x} \frac{1}{2^j} = 1 - \frac{1}{2^x}$$

El valor esperado del juego para el jugador B está dado por la suma de los productos de cada ganancia esperada por su respectiva probabilidad:

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} 2^{x-1} \frac{1}{2^x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... = +\infty$$

Es decir, está dado por la suma de una serie geométrica infinita cuyo primer término es igual a $\frac{1}{2}$ y su razón es igual a la unidad y que, por lo tanto, es divergente. Esta serie no es sumable, luego no existe valor esperado del juego.

Llegar a esta conclusión -aparentemente trivial- implicó 224 años de esfuerzos teóricos y la respuesta a la cuestión -indudablemente no-trivial- de si un juego sin valor esperado admite una

---

494. El primer enunciado de este problema figura en la correspondencia cursada entre Nikolaus Bernoulli y P.R. de Montmort (más exactamente, en una carta de Bernoulli a de Montmort fechada el 9 de setiembre de 1713), y fue publicado por primera vez en el "*Essai d'analyse sur les jeux de hazard*" de este último, en 1713.

495. En realidad, este problema -que figura como el último de una serie de cinco problemas propuestos por N. Bernoulli a de Montmort- es una variante del cuarto problema, cuyo enunciado es el siguiente: Si el jugador A obtiene el resultado "seis" al arrojar un dado, le debe entregar al jugador B una moneda; si este resultado ocurre en la segunda tirada, le debe entregar dos monedas; si ocurre en la tercera tirada, tres monedas, y así sucesivamente. N. Bernoulli demostró que el valor esperado de este juego, para B, era finito e igual a 6 monedas.

apuesta equitativa[496]. Durante todo ese período se consideró que el valor esperado del juego era infinito.

Debe tenerse en cuenta que existe una probabilidad pequeña pero no-nula de que, aún suponiendo una moneda "clásica", se verifique una sucesión ininterrumpida de resultados "ceca", y como los pagos a realizar por el jugador A crecen proporcionalmente al decrecimiento de las probabilidades de ocurrencia de dicho evento, el valor esperado del juego resulta infinito y que no existe, en la definición de valor esperado, ninguna condición que excluya un resultado infinito), conclusión que dio origen a la hoy famosa paradoja[497]: el precio a pagar por participar en un juego en el cual la ganancia es finita, puede ser infinito[498].

Para resolver esta paradoja se intentaron tres tipos de soluciones (todas concebidas durante el siglo XVIII) según las cuales la convergencia de la serie $\sum_{x=1}^{\infty} 2^{x-1} \frac{1}{2^x}$, que define el valor esperado del juego, puede ser obtenida mediante: **i)** la modificación de la función de pago; **ii)** la modificación de la distribución de probabilidades o, **iii)** la limitación del número de tiradas de la moneda. Como se verá, ninguno de estos planteos constituyó una solución completa del problema.

Estos intentos de solución se deben, fundamentalmente, a N. Bernoulli, a J. Bernoulli ("*Ars conjectandi*" (1713)), a G. Cramer (correspondencia con N. Bernoulli (1728)), a G.L. Buffon ("*Essai d'arithmétique morale*" (1777)), a D. Bernoulli ("*Specimen theoriæ novæ de mensura sortis*" (1738)) y a J-B.L.R. D'Alembert ("*Opuscules mathématiques*" (1768)).

G. Cramer procuró explicar la diferencia entre la estimación matemática y la estimación que indica el sentido común y que da origen a esta paradoja, a partir de la consideración de la diferencia entre el "*valor matemático*" y el "*valor moral*" del dinero[499], mediante la sustitución de la función de pago. Consideró que, a partir de un cierto monto (2^{24}), el dinero posee, para la gente "*de sentido común*", un valor constante, de lo que se concluye que la serie que define el valor esperado del juego para B posee un límite superior. De modo que, de acuerdo con esta hipótesis, sería:

$$E(X) = \sum_{x=1}^{24} 2^{x-1} \frac{1}{2^x} + 2^{24} \sum_{x=25}^{\infty} \frac{1}{2^x} \leq 1{,}3$$

---

496. Cuestión para la cual Feller, W. (1971) demostró que existe una respuesta afirmativa (en el caso de apuestas variables).

497. La denominación de paradoja de San Petersburgo -debida a J-B.LR.. D'Alembert- tiene su origen en la publicación de la solución propuesta por D. Bernoulli ("*Specimen theoriæ novæ de mensura sortis*" (1738)) por parte de la Academiæ Scientiarum Imperialis Petropolitanæ de San Petersburgo.

498. Para que el juego fuera equitativo B debería apostar una suma infinita, que debería estar seguro de perder "*...ya que es moralmente imposible que no ocurra el resultado 'seis' al cabo de un número infinito de 'tiradas' del dado*" (N. Bernoulli, correspondencia con de Montmort). J. Bernoulli consideró que "*...la 'certeza moral' es a la 'imposibilidad' como la 'muy alta' probabilidad (999/1000) es a la 'muy baja' probabilidad (1/1000)*").

499. Cramer, G. (correspondencia con N. Bernoulli (1728)): "*Los matemáticos evalúan el dinero en forma proporcional a su cantidad, la gente de sentido común en forma proporcional a su utilización*".

Posteriormente, Cramer generalizó su demostración suponiendo que el "*valor moral*" del dinero está dado por la raíz cuadrada de su "*valor matemático*"[500]:

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} \sqrt{2^{x-1}} \frac{1}{2^x} = \frac{1}{2} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$$

De acuerdo con la regla del fair play, la "*esperanza moral*" de ganar debe ser igual a la **esperanza moral** de perder, de modo que el valor de la apuesta estará dado por:

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{2} - 1\right)} \right]^2 = \frac{2}{12 - 8\sqrt{2}} = 2{,}9 < 3$$

Contrariamente a la solución de Cramer -relacionada con el concepto de esperanza moral-, la propuesta de N. Bernoulli estuvo dirigida al estudio de la *"certeza moral"*. De esta forma, determinó que una probabilidad de $\frac{1}{32}$ puede ser considerada como una "*imposibilidad*" (y a la probabilidad $\frac{31}{32}$ como una "*certeza*") con lo que el valor esperado del juego queda expresado como:

$$E(X) = \sum_{x=1}^{4} 2^{x-1} \frac{1}{2^x} = 2$$

Este tipo de solución -estudiada también por G.L. Buffon y E. Borel quienes, como se mencionó en la Sec. 3.1.4, fijaron los límites de la imposibilidad en $\frac{1}{10.000}$ y $\frac{1}{1.000.000}$, respectivamente- constituye lo que podría llamarse la interpretación subjetivista de la probabilidad de N. Bernoulli[501].

Por su parte, D. Bernoulli -contrariamente a las propuestas enunciadas precedentemente, que consideraban a la fortuna de los jugadores como finita- sustituyó, en la definición de valor esperado del juego, el valor absoluto de la ganancia por su valor relativo o utilidad. Basándose en la hipótesis de que "*toda ganancia, por pequeña que sea ('lucrulum'), proporciona una utilidad ('emolumentum') inversamente proporcional a la fortuna ('summa bonorum')*", estimó la utilidad

---

500. Este razonamiento fue continuado por A. Fontaine ("*Solution d'un probléme sur les jeux de hasard*" (1764)) y por S.D. Poisson ("*Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*" (1837)), quienes redefinieron la función de pago tomando en cuenta la fortuna del jugador A. En particular, Poisson consideró que la duración del juego estaba inevitablemente limitada por la fortuna de los jugadores.

501. Obsérvese que la definición de esperanza matemática -que se identifica con el contexto legal de los contratos aleatorios (ver Sec. 2.2)- perdió relevancia cuando el concepto de expectativa se trasladó al ámbito estrictamente económico.

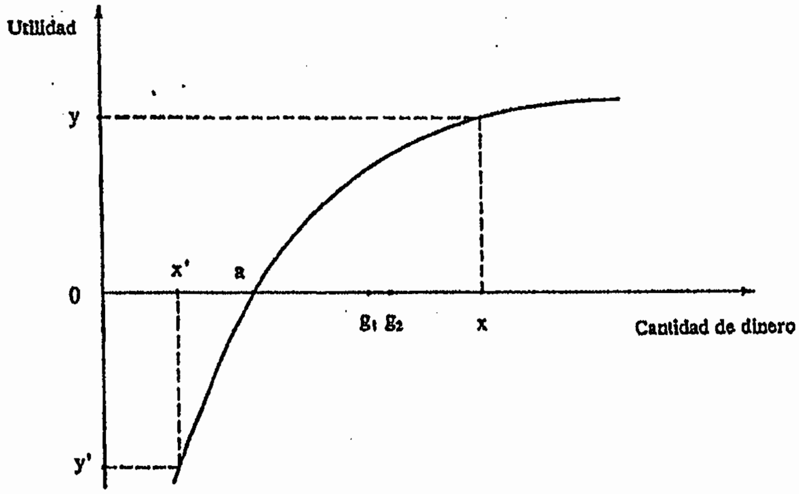
como proporcional al logaritmo del valor de la fortuna, $dy = k\frac{dx}{x}$ (donde y denota la utilidad, x denota la fortuna del jugador y k es una constante).

Integrando esta ecuación, se obtiene la utilidad de la fortuna total $y = k\ln(x) - \ln(a)$ (donde la constante de integración (a) representa la fortuna mínima de utilidad nula).

La **Figura A1.1** muestra la curva logarítmica de la utilidad. Suponiendo que a las ganancias sucesivas $g_1, g_2, g_3, \ldots$ les correspondan, respectivamente, las probabilidades $p_1, p_2, p_3, \ldots$, la utilidad media puede ser definida como:

$$y = kp_1 \ln(a + g_1) + kp_2 \ln(a + g_2) + kp_3 \ln(a + g_3) + \ldots - \ln(a)$$

Figura A1.1



De las expresiones precedentes se obtiene la esperanza moral o ganancia esperada (que produce la utilidad media):

$$z = x - a = (a + g_1)^{y_1} (a + g_2)^{y_2} (a + g_3)^{y_3} \ldots - a$$

(obsérvese en la figura precedente que, teniendo en cuenta que la utilidad negativa producida por una pérdida debe ser igual a la utilidad positiva producida por una ganancia, la apuesta de B (x') es menor que la ganancia esperada). De acuerdo con estos resultados, la "esperanza moral" del jugador B, en el problema de San Petersburgo, quedaría definida de la siguiente forma:

$$E(B) = (a + 1)^{1/2} (a + 2)^{1/4} (a + 2^2)^{1/8} \ldots - a$$

Para este caso en particular, el problema de la determinación de la apuesta de acuerdo con la regla del "fair game" fue estudiado por S. Laplace (*"Théorie analytique des probabilités"* (1795)). Denotando por z al valor de la apuesta, considerando una función de pago de la forma "2^x *si se obtiene 'cara' en la x-ésima 'tirada' y 0 si este resultado no ocurre al cabo de las n 'tiradas'*" y no tomando en cuenta la constante de integración indeterminada, Laplace obtuvo que la utilidad media de B está dada por:

$$\frac{1}{2}k\ln(a-z+2)+\frac{1}{2^2}k\ln\left(a-z+2^2\right)+\ldots+\frac{1}{2^n}k\ln\left(a-z+2^n\right)+$$
$$+\frac{1}{2^n}k\ln(a-z)+\ln(h)$$

De acuerdo con la regla del "fair game", la utilidad de la fortuna de B debe ser la misma antes o después del juego, es decir, la expresión precedente debe ser igual a $k\ln(a)+\ln(h)$. De modo que debe verificarse que:

$$1+\frac{z}{a-z}=\left(1+\frac{2}{a-z}\right)^{1/2}\left(1+\frac{2^2}{a-z}\right)^{1/2^2}\cdots\left(1+\frac{2^n}{a-z}\right)^{1/2^n}$$

Esta serie es decreciente, es decir, se verifica que:

$$\left(1+\frac{2^j}{a-z}\right)^{1/2^j}>\left(1+\frac{2^{j+1}}{a-z}\right)^{1/2^{j+1}}$$

O, lo que es lo mismo, que:

$$1+\frac{2^{j+1}}{a-z}\frac{2^{2j}}{(a-z)^2}>1+\frac{2^{j+1}}{a-z}$$

Por otra parte, dado que:

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{2^n}{a-z}\right)^{1/2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(2)}{2^n}+\frac{1}{2^n}\ln\left(\frac{1}{a-z}+\frac{1}{2^n}\right)=0$$

es decir, que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2^n}{a-z}\right)^{1/2^n}=1$, se puede concluir que el valor límite de la serie es igual a la unidad. Asimismo, la serie $1+\frac{z}{a-z}$ puede ser expresada de la siguiente forma:

$$\ln\left(1+\frac{z}{a-z}\right)=$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2^j} \ln\left(1 + \frac{2^j}{a-z}\right) + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j} \ln\left(1 + \frac{2^j}{a-z}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2^j} \ln\left(1 + \frac{2^j}{a-z}\right) + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j} \ln\left(\frac{1}{a-z}\right) + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{n\ln(2)}{2^j} + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j} \ln\left(1 + \frac{a-z}{2^j}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2^j} \ln\left(1 + \frac{2^j}{a-z}\right) + \ln\left(\frac{1}{a-z}\right) \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j} + \ln(2)\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} j\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}\right] +$$

$$+ \sum_{j=n}^{\infty} \frac{0{,}4342945}{2^j} \ln\left(1 + \frac{a-z}{2^j}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2^j} \ln\left(1 + \frac{2^j}{a-z}\right) + \frac{1}{2^{n-1}} \ln\left(\frac{1}{a-z}\right) + \frac{(n+1)\ln(2)}{2^{n-1}} + \frac{0{,}4342945}{3} \frac{a-z}{2^{2n-2}}$$

A partir de esta demostración Laplace obtuvo que, para $n = 11$ y $a - z = 100$, B debería poseer $a = 107{,}89$ y apostar $z = 7{,}89$; para $a - z = 200$, B debería poseer 208,78 y apostar 8,78.

La demostración de Laplace permite concluir que, si la fortuna de B es infinita, entonces su apuesta deberá ser infinita. Ahora bien, esta afirmación no es general. De acuerdo con un teorema debido a Menger, K. (1934), para toda evaluación de incrementos de la fortuna del jugador mediante una función $f(X)$ no-acotada, existe un juego de San Petersburgo para el cual la utilidad media del tomador de riesgo es infinita. La condición necesaria y suficiente para que se verifique esta proposición es que la función de utilidad $f(X)$ sea tal que el n-ésimo incremento de la fortuna sea igual a 2^{n-1}. Como corolario de este teorema se demuestra que en un juego de San Petersburgo de este tipo, la esperanza moral es infinita también para el caso de una fortuna finita (es mayor o igual a $e.e.e...$)[502].

D'Alembert ("*Réflexions sur le calcul des probabilités*" (1780)), a partir de su posición de obstinado criticismo al concepto de probabilidad basado en la hipótesis de que la física no es reducible a la matemática, y en oposición a la propuesta de D. Bernoulli, rechazó todas las soluciones que tomaban en consideración las fortunas de los jugadores, sosteniendo que la componente más

---

502. Menger, K. (1934) propone el siguiente ejemplo: Supóngase que el jugador B posea una fortuna a, al cabo de la n-ésima tirada su ganancia podría ser de $\left(ae^{2n} - a\right)$. Su esperanza matemática será $E(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\left(ae^{2^j} - a\right) = \infty$.

De acuerdo con la hipótesis de D. Bernoulli, la utilidad de cada ganancia será $k \ln\left(\frac{a + ae^{2^j} - a}{a}\right) = k \ln\left(e^{2^j}\right) = k2^j$.

De donde se obtiene que la utilidad media será $y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} k2^j = k + k + k + \ldots = \infty$. Esta serie es infinita aún cuando a sea finita.

importante del concepto de ganancia esperada no es la ganancia, sino la probabilidad.

En su "*Essai d'arithmétique morale*" (1777), G.L. Buffon trató de demostrar que las aproximaciones opuestas de D'Alembert y D. Bernoulli conducían al mismo resultado. Pero, indudablemente, la importancia de este autor en esta crónica de la solución del problema de San Petersburgo radica en que fue el único que efectivamente jugó la partida propuesta por N. Bernoulli (repitió la experiencia 2048 veces y comparó los resultados con la distribución binomial)[503]. A partir de estas observaciones determinó que, para un número dado de tiradas de la moneda, el valor medio del juego podía ser expresado como una función del número de jugadas. Intentó, además, obtener una solución completa para la función de utilidad y la definición del menor valor significactivo de probabilidad. Contrariamente al proceso utilizado por Cramer y D. Bernoulli, Buffon no supuso una ley particular para definir el decrecimiento de la utilidad en el cálculo de la esperanza moral, sino que calculó la utilidad de una ganancia igual a 5 monedas, obteniendo, para una función de pago 2^{n-1}, a partir de la hipótesis de que el límite inferior para una probabilidad significativa era $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$, una función de la forma $\left(\frac{9}{5}\right)^{n-1}$ (de acuerdo con este supuesto, un incremento del 100% en la fortuna del jugador incrementaría su utilidad en sólo un 80%)[504].

Buffon aplicó esta ley para demostrar los beneficios que acarrea la atomización del riesgo. Una demostracióm general de estas proposición fue desarrollada posteriormente por P.S. Laplace ("*Théorie analytique des probabilités*" (1812)) en su tratamiento de los tres teoremas de D. Bernoulli. De acuerdo con el ejemplo propuesto por Laplace, sea un comerciante que posee una fortuna igual a 1 y que desea despachar una suma de dinero ε en un barco cuya probabilidad de arribar a destino es igual a p. Su esperanza matemática y su esperanza moral serán, respectivamente, $(1+p\varepsilon)$ y $(1+\varepsilon)^p$. Supóngase que el comerciante divida la suma ε en n partes iguales para ser despachadas en n barcos. Aplicando el esquema de pruebas de Bernoulli, su utilidad promedio puede ser expresada como:

---

503. En el "*Essai d'artihmetique morale*" figura el hoy conocido como **problema de la aguja de Buffon**, que puede ser enunciado de la siguiente forma: Sea un plano dividido por una serie de rectas paralelas, separadas entre sí por una distancia a, sobre el que se arroja una aguja de medida ℓ ¿Cuál es la probabilidad de que la aguja intersecte a alguna de las rectas? Buffon concluyó que, para $\ell < a$, se verificaba que $p = \frac{2\ell}{\pi a}$ (muchos autores, incluido Buffon, utilizaron este resultado como una determinación experimental del valor de π). La distribución binnomial será tratada en el Cap. 7.

504. El principio de la certeza moral que, de acuerdo con los datos de la época, permitía afirmar que una probabilidad inferior a $\frac{1}{10.000}$ podía ser considerada nula (ver Sec. 3.1.2), condujo a Buffon a evaluar como nulas a las probabilidades inferiores a $\left(\frac{1}{2}\right)^{13}$ y, por lo tanto a concluir que el valor esperado del juego era igual a 6,5. Luego, mediante argumentos "ad-hoc" y a fin de obtener su valor de 5 monedas, fijó el límite inferior de las probabilidades significativas en $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$.

$$E(U_A) = k\left[p^n \ln(1+\varepsilon) + np^{n-1}(1-p)\ln\left(1+\frac{n-1}{n}\varepsilon\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)}{2}p^{n-2}(1-p)^2 \ln\left(1+\frac{n-2}{n}\varepsilon\right)\right] + \ln(h) =$$

$$= kp\int\left[\frac{p^{n-1}}{1+\varepsilon} + \frac{(n-1)p^{n-2}(1-p)}{1+\frac{n-1}{n}\varepsilon} + \frac{(n-1)(n-2)p^{n-3}(1-p)^2}{(1)(2)\left(1+\frac{n-2}{n}\right)\varepsilon} + \ldots\right]d\varepsilon + \ln(h)$$

En particular, para $n = 1$, será:

$$E(U_A) = kp\int\frac{d\varepsilon}{1+\varepsilon} + \ln(h) =$$

$$= kp\int\frac{d\varepsilon}{1+\varepsilon}\left[p + (1-p)\right]^{n-1} + \ln(h) =$$

$$= kp\int\left[\frac{p^{n-1}}{1+\varepsilon} + \frac{(n-1)p^{n-2}(1-p)}{1+\varepsilon} + \frac{(n-1)(n-2)p^{n-3}(1-p)^2}{(1)(2)(1+\varepsilon)} + \ldots\right]d\varepsilon + \ln(h)$$

Restando este valor de la utilidad promedio definida más arriba, se obtiene que la diferencia:

$$kp(1-p)\frac{n-1}{n}\int\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left[\frac{p^{n-2}}{1+\frac{n-1}{n}\varepsilon} + \frac{(n-2)p^{n-3}(1-p)}{1+\frac{n-2}{n}\varepsilon} + \ldots\right]d\varepsilon = 0$$

Lo cual demuestra que la partición del riesgo implica una ventaja moral para el inversor. Por otra parte, se puede escribir:

$$E(U_A) = kp\int d\varepsilon\int_0^{\infty} e^{-[1+(\varepsilon/n)]x}\left[pe^{-(\varepsilon/n)xx} + (1-p)\right]^{n-1}dx + \ln(h) =$$

$$= k\int\frac{p}{1+pk+(1-p)\frac{\varepsilon}{n}}\left[1 + \frac{p(1-p)\varepsilon^2\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+p\varepsilon+(1-p)\frac{\varepsilon}{n}\right)} + \ldots\right]d\varepsilon + \ln(h)$$

Para valores de n suficientemente grandes, se verifica que:

$$E(U_A) = k\int\frac{p}{1+p\varepsilon}d\varepsilon + \ln(h) = k\ln(1+p\varepsilon) + \ln(h)$$

Resultado que demuestra que la mencionada ventaja moral crece cuando n crece, llegando a ser aproximadamente igual a la "*ventaja matemática*" cuando n aumenta indefinidamente. Si se supone, además, que el comerciante asegura la suma ε mediante el pago de $(1-p)\varepsilon$, su esperanza moral aumentará de $(1+\varepsilon)^p$ a $(1+p\varepsilon)$, de lo que se puede concluir que el seguro implica una ventaja moral. Esta teoría de la aseguración de Laplace fue continuada por J. Fourier ("*Extrait d'una memoire sur la théorie analytique des assurances*" (1819)) y, fundamentalmente por T. Barrois ("*Essai sur l'application du calcul des probabilités aux assurances contre l'incendie*", (1835)) quien, dado que cuando los riesgos están infinitamente particionados las esperanzas matemática y moral se igualan, calculó la esperanza del asegurador como matemática y la esperanza del asegurado como moral.

Otra importante contribución de Buffon a la teoría del valor relativo del dinero radica en sus fórmulas para el cálculo del valor relativo de las ganancias y las pérdidas en forma proporcional a la fortuna incrementada ($\frac{x}{x+a}$) y a la fortuna que el jugador poseía previamente ($\frac{x}{a}$), respectivamente. Estas deducciones lo condujeron a la afirmación de que un "fair game" es un "losing game". Esta afirmación fue tratada luego por P.S. Laplace ("*Théorie analytique des probabilités*" (1812)) en su demostración de los tres teoremas de D. Bernoulli: Sea a la fortuna de un jugador A, p su probabilidad de ganar, μ su apuesta y $\dfrac{\frac{p}{1-p}\mu}{p}$ la apuesta de su contrincante (el jugador B). Al cabo de una jugada la fortuna de A asumirá los valores $\left(a+\frac{1-p}{p}+\mu\right)$, con probabilidad p, ó $(a-\mu)$, con probabilidad $1-p$. La esperanza moral de A estará dada, entonces, por:

$$E^*(A)=\left(a+\frac{1-p}{p}\mu\right)^p(a-\mu)^{1-p}$$

y su esperanza matemática será:

$$E(A)=\left(a+\frac{1-p}{p}\mu\right)p+(a-\mu)(1-p)=a$$

Dividiendo m. a m. por a y aplicando el operador logaritmo en la definición de la esperanza moral, se obtiene que:

$$\frac{1}{a}\ln\left[E^*(A)\right]=p\ln\left(1+\frac{1-p}{p}\frac{\mu}{a}\right)+(1-p)\ln\left(1-\frac{\mu}{a}\right)+$$

$$+\int\frac{1-p}{a}\left[\frac{1}{1+\frac{1-p}{p}\frac{\mu}{a}}-\frac{1}{1-\frac{\mu}{a}}\right]d\mu<0$$

Resultado que confirma la proposición de Buffon[505].Posteriormente, S.F. Lacroix ("*Traité Élémentaire du calcul des probabilités*", (1816)), L. Öttinger ("*Untrersuchungen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung*" (1848)) y J.B.J. Liagre ("*Calcul des probabilités et théorie des erreurs*" (1852)) demostraron que las fórmulas de D. Bernoulli y Buffon eran equivalentes.

Todas las consideraciones realizadas con respecto a la paradoja de San Petersburgo impulsaron a Condorcet[506] a fundamentar el concepto de valor esperado en el teorema de Bernoulli y a considerar, en consecuencia, que la regla del producto del valor de un evento por su probabilidad proporciona sólo un valor promedio, no un valor real[507]. Este valor medio (definido como el promedio de todos los valores reales) puede ser obtenido sólo a partir de un número suficientemente grande de repeticiones del evento, pero podría no ser obtenido nunca de un ensayo singular. De esta forma Condorcet concibió al juego como una relación entre certeza e incertidumbre y demostró, a partir de los postulados del teorema de Bernoulli, que la equivalencia entre el precio equitativo y la esperanza matemática sólo se da en el largo plazo. Dentro de este esquema la paradoja queda resuelta: el valor esperado del juego, para B, será infinito sólo en el caso irreal de un número infinito de partidas, cada una con un número infinito de tiradas. El caso real se concibe, solamente, a partir de un número finito de tiradas, con lo cual el problema se traslada a la determinación del número de jugadas necesario para lograr la equivalencia entre los jugadores. Condorcet supuso que el número de tiradas estaba dado y que B recibía 2 monedas si el resultado "cara" no se presentaba en n tiradas. El valor esperado del juego, para B, quedaba definido, entonces, por:

$$E(X)=\sum_{x=1}^{n}2^{x-1}\frac{1}{2^{x}}+1=\frac{n}{2}+1$$

505. Posteriormente, S.F. Lacroix ("*Traité Élémentaire du calcul des probabilités*", (1816)), L. Öttinger ("*Untrersuchungen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung*" (1848)) y J.B.J. Liagre ("*Calcul des probabilités et théorie des erreurs*" (1852)) demostraron que las fórmulas de D. Bernoulli y Buffon eran equivalentes.

506. "*Mémoire sur le calcul des probabilités*" (1784), "*Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*" (1785), "*Probabilité*" (1785), "*Éléments du calcul des probabilités*" (1805).

507. Supóngase un juego en el que el jugador A puede ganar 2, con probabilidad $\frac{1}{3}$, ó 1, con probabilidad $\frac{2}{3}$. El valor esperado del juego, para este jugador, será $\frac{4}{3}$, sin embargo podrá ganar sólo 2 ó 1, pero nunca $\frac{4}{3}$. De la misma forma, supóngase que el jugador A tenga una probabilidad igual a $\frac{1}{3}$ de ganar 2 y su oponente, B, tenga una probabilidad igual a $\frac{2}{3}$ de ganar 1. Dado que la ganancia esperada para ambos jugadores es igual a $\frac{2}{3}$, se puede afirmar que se trata de un juego equitativo. Pero, de hecho, A puede ganar 2 ó 0 y B 1 ó 0.

De acuerdo con la propuesta de Condorcet, el jugador B comienza ganando cuando el resultado "cara" ocurre en una tirada n^* tal que $2^{n^*-1} > \frac{n}{2} + 1$ y $n < 2^{n^*} - 2$. Si el resultado "cara" ocurre en la jugada n^*, tal que $n = 2^{n^*} - 2$, la probabilidad de que B pierda está dada por $p(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{2^{n^*-1}}$. De todo esto se puede concluir que, según la solución de Condorcet, el valor de la apuesta de B es una función del número de jugadas y es infinita sólo si este número es infinito.

Contrariamente a los probabilistas del siglo XIX -quienes, siguiendo los trabajos de Condorcet, basaron el concepto de esperanza matemática en la ley de los grandes números y consideraron a la paradoja de San Petersburgo como un ejemplo de que la probabilidad es válida sólo para eventos repetibles[508]-, Laplace, retomando -y generalizando- la propuesta de D. Bernoulli demostró que la esperanza matemática puede ser considerada como el límite de la esperanza moral, no sólo cuando se particiona infinitamente la fortuna, sino también cuando la división del riesgo resulta infinita, dando origen, de esta forma, a una teoría completa de la aversión al riesgo.

De toda la historia anterior se puede concluir que, si bien ninguna de las soluciones propuestas -ni la sustitución de la función de pago (acotada o no), ni la sustitución de la función de probabilidades (acotada o no), ni la limitación en el número de monedas- es totalmente satisfactoria, el problema de San Petersburgo dio lugar a propuestas epistemológicamente importantes que condujeron, por ejemplo, a la sustitución de la ley de los grandes números por el principio de la razón insuficiente como fundamento del concepto de valor esperado. Por otra parte, el hecho de que los probabilistas clásicos estuvieran dispuestos a rever definiciones y postulados tan fundamentales como los correspondientes al valor esperado a fin de adaptar sus cálculos al sentido común, parece confirmar lo expuesto en el Cap. 1 respecto a que la teoría de la probabilidad se desarrolló como un producto mixto, matemático-filosófico, cuya finalidad consistía en cuantificar lo razonable.

508. S.F. Lacroix ("*Traité Élémentaire du calcul des probabilités*" (1816)) y J.F. Friess ("*Versuch einer Kritik der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung*", (1842)) continuaron el planteo de Condorcet acerca del valor esperado a partir de un número suficientemente grande de repeticiones. E. Czuber ("*Das Petersburger Problem*" (1882)) consideró que el concepto de esperanza matemática rige en el marco de la ley de los grandes números, pero que pierde sentido al ser aplicado a un evento singular, y H. Laurent ("*Traité du calcul des probabilités*" (1873), "*Théorie des jeux de hazard*" (1893)) y J. Von Kries ("*Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung*" (1886)) definieron a la esperanza matemática como la relación equitativa entre la certeza y la incertidumbre, suponiendo que el evento de resultado incierto haya sido repetido la mayor cantidad posible de veces.

APENDICE 2

El "*Entscheidungsproblem*"

1.- G.W. Leibniz y el sexto problema de Hilbert

Las primeras ideas sobre complejidad (y, en consecuencia, sobre aleatoriedad como complejidad máxima) fueron propuestas originalmente por G.W. Leibniz en su "*Discours de métaphysique*" (1686). En esta obra, en lo que podría considerarse un cuestionamiento al principio determinístico de la razón insuficiente[509], Leibniz plantea la distinción entre fenómenos formalizables, es decir, que pueden ser explicados por una ley que permite descubrir sistemas de relación y construir modelos sobre su comportamiento y fenómenos irregulares. Establece, además, el principio que una teoría debe ser más simple que los datos que intenta explicar[510].

Como una aproximación formal a la propuesta de Leibniz, en 1928 David Hilbert y Wilhelm Ackermann, a partir de una posición formalista, plantearon el "*Entscheidungsproblem*" (o problema decisorio) que consistía en decidir si era posible definir un sistema matemático formal, completo y consistente que permitiera determinar la veracidad o falsedad de cualquier proposición. Es decir, un sistema tal que, dado un problema perfectamente definido, siempre fuera posible hallar un algoritmo capaz de resolverlo[511].

Hilbert estaba convencido que la matemática tradicional era lógicamente consistente, que incluía dos clases de "verdad": una, sintáctica, inherente exclusivamente a la forma y otra, semántica, inherente a los referentes externos y que la solución a todas sus paradojas e inconsistencias radicaba en "*capturar*" las verdades semánticas mediante reglas sintácticas a partir de la creación de una estructura puramente formal en cuyo ámbito se pudiera establecer la verdad de sus afirmaciones matemáticas[512].

Las afirmaciones de un sistema formal son sucesiones finitas de símbolos abstractos. El sistema está compuesto por una axiomática definida por un conjunto finito de dichas sucesiones y un conjunto finito de reglas de transformación que permiten convertir una sucesión de símbolos en otra distinta: dado un axioma, el proceso general consiste en aplicar una sucesión finita de transformaciones que lo conviertan en una secuencia finita de nuevas sucesiones en la cual cada sucesión es un axioma o es un derivado de los axiomas anteriores. La sucesión final de dicha secuencia constituye un teorema del sistema. La totalidad de los teoremas definen un conjunto de sucesiones demostrables del sistema.

La relación entre este ámbito puramente sintáctico del sistema formal y el ámbito semántico

---

509. Según el cual, si algo es verdadero, debe serlo por alguna razón.

510. Ver Rosen, R. (1985), Bar-Hillel, D.; Wagenaar, W.A. (1991).

511. El concepto matemático riguroso de **algoritmo** como conjunto finito de reglas ordenadas que se puede ejecutar en un número determinado de pasos, fue obtenido recién en la década de 1930 como culminación de la investigaciones sobre los fundamentos de la lógica matemática (ver Knuth, D.E. (1985), Davies, M. (2000)).

512. Este criterio constituye la esencia de la filosofía formalista.

de los objetos matemáticos y sus propiedades, se obtiene a partir de la interpretación de los elementos del sistema formal en términos de los objetos y operaciones de una estructura matemática asociada, es decir, a partir de la anexión de un significado semántico a la estructura abstracta, puramente sintáctica, de los símbolos y sucesiones del sistema formal. De modo que los teoremas del sistema formal pueden ser interpretados como afirmaciones verdaderas acerca de los objetos matemáticos asociados.

Se dice que un sistema es **completo** si cada verdad matemática puede ser traducida en un teorema y viceversa. Por otra parte, si el sistema no presenta afirmaciones contradictorias que puedan ser demostradas (por ejemplo, que una afirmación y su negación puedan ambas ser traducidas en teoremas), se dice que es **consistente.**

El planteo de Hilbert-Ackermann consideraba que el problema de la consistencia de la matemática en su totalidad era reducible a la determinación de la consistencia de la aritmética. De modo que su propuesta se limitó a desarrollar una teoría de la aritmética basada en un sistema formal completo, consistente, suficientemente potente como para representar todas las afirmaciones que se pudieran hacer sobre los números naturales y tal que las afirmaciones demostrables pudieran ser demostrables en un número finito de pasos. En este contexto, el "*Entscheidungsproblem*" puede ser interpretado como el problema de decidir si existe algún procedimiento finito capaz de determinar la verdad o falsedad de cualquier afirmación aritmética. En otros términos, decidir si la aritmética puede ser considerada un sistema que contiene un modelo de sí mismo, es decir si, de acuerdo con la nomenclatura de Rosen, R. (1985), puede ser considerada un "*sistema anticipatorio*".

2.- El teorema de incompletitud

En 1931 Kurt Gödel publicó su **teorema de incompletitud** en el que, refutando la pretensión de Hilbert y Ackermann de hallar una teoría del todo en la matemática y lesionando seriamente los postulados formalistas, demostró que "*todo sistema de primer orden consistente, que contenga los teoremas de la aritmética y cuyo conjunto de axiomas sea recursivo, es incompleto*" (como se verá más adelante, la restricción a un conjunto recursivo de axiomas se justifica en la medida que suponer un conjunto no-recursivo genera el problema de la imposibilidad de verificar si una fórmula es o no un axioma y, por lo tanto, si una demostración es o no válida). En una generalización posterior Gödel consideró la utilización de sistemas inductivos más potentes que la lógica de primer orden y concluyó que "*no existe ningún sistema deductivo cuyo conjunto de axiomas sea recursivo que contenga los teoremas de la aritmética y que además sea consistente y completo*"[513].

El punto de partida del desarrollo que condujo a Gödel a esta versión lógica formal de su teorema fue la paradoja de Epiménides que, en este contexto puede ser expresada como **"esta afirmación es falsa"**. La intención de Gödel era hallar una forma de expresar afirmaciones de este tipo (paradójicas auto-referenciales) en el ámbito de la aritmética. Ahora bien, dado que la

---

513. En otros términos, el teorema de Gödel postula que la aritmética no es completamente formalizable, que el total de teoremas en la teoría de números es de cardinalidad mayor que el conjunto de teoremas de una formalización; es decir que la aritmética no es sólo sintaxis sino que posee propiedades matemáticas (ver Nagel E., Newman, J.R. (1958), Hofstadter, D. (1979), Shanker, S. (ed.)(1988), Rosen, R. (en Casti, J.L.; Karlqvist, A. (1990)).

afirmación de Epiménides involucra la noción de verdad (que, de acuerdo con la demostración de Tarski, A. ( ), no puede ser "*capturada*" en el ámbito de un sistema formal), la única solución posible para Gödel consistió en reemplazar la noción (no formalizable) de verdad por la noción (formalizable) de **"demostrabilidad"** y transformar la paradoja en la proposición **"esta afirmación no es demostrable"**. Obsérvese que, si la afirmación es demostrable, entonces es verdadera es decir que debe ser verdadera y es no-demostrable, de modo que la afirmación y su negación son ambas demostrables, lo cual implica inconsistencia. Por otra parte, si la afirmación no es demostrable, entonces la afirmación es verdadera, es decir que es verdadera pero no-demostrable, lo cual implica que el sistema formal es incompleto. Generalizando este razonamiento Gödel concluyó que en todo sistema formal suficientemente potente como para contener todas las afirmaciones acerca de los números naturales, existe una afirmación que es no-demostrable a partir de las reglas del sistema. Diseñó, además, las reglas necesarias para construir una afirmación aritmética traducible en la afirmación metamatemática **"la aritmética es consistente"** y demostró (en forma independiente de Tarski) que esta afirmación no es demostrable y, por lo tanto, que la consistencia de la aritmética no puede ser establecida exclusivamente mediante argumentos inherentes al sistema formal de la aritmética misma[514].

3.- La tesis de Church-Turing

Los resultados de Gödel y la asimilación formalista de la matemática a un tipo de morofogénesis y su consecuente identificación con un mecanismo de generación de nuevos comportamientos (teoremas) a partir de comportamientos dados (axiomas) de acuerdo con reglas definidas, dieron origen a la **teoría de la computabilidad** fundamentalmente a partir de los trabajos de Kleene, Church, Turing y Post.

El análisis de Church, A. (1934)(1936a)(1936b) se basó en la definición de **función efectivamente computable** (es decir, computable mediante un algoritmo) como sinónimo de **función definible** y en el empleo del **cálculo lambda** (que consiste en una gramática de términos vinculados por un conjunto de reglas de transformación, diseñado para formalizar la definición de función, la noción de aplicación de funciones y la propiedad de recursividad). A partir de estas definiciones Church propuso su tesis expresando que **la clase de las funciones efectivamente computables coincide con la clase de las funciones recursivas.** En base a este postulado, a la extrapolación de la teoría de números y sus formalizaciones y a la relación entre un sistema material y sus modelos, concluyó que la respuesta al "*Entscheidungsproblem*" era negativa (¿o no positiva?)[515], es decir que la matemática no era un sistema anticipatorio [516].

El enfoque de Turing, A. (1936) al tratamiento del problema de Hilbert consistió en la utilización del concepto abstracto de máquina teórica (puramente sintáctica) que permitía

---

514. Ver Feferman, S. (ed.)(1986).

515. Ver Cobos, J.C.C. (Actas del Honorable Senado de la Nación, 2008).

516. Stephen Kleene arribó a la misma conclusión a partir del concepto de función recursiva (ver Soare, R. (1996), Bennett, D.J. (1998)).

caracterizar, de un modo matemático, el número de funciones efectivamente computables [517]. Una máquina de Turing (MT) consta de dos componentes: **i)** una cinta de dimensión infinita dividida en celdas cada una de las cuales contiene uno de un conjunto finito de símbolos y **ii)** un dispositivo lector que puede variar en un conjunto finito de estados internos, $E = \{e_0, e_1, ..., e_n\}$, con un conjunto de símbolos-"input", $\Sigma = \{0,1\}$. Este dispositivo puede leer las celdas de la cinta y escribir uno de los símbolos en cada una de ellas. El comportamiento de la máquina está controlado por un algoritmo (programa) compuesto por un número finito de instrucciones, de modo que el comportamiento del dispositivo lector queda determinado por su estado actual y por el resultado de la lectura de la celda. Turing construyó, además, un programa que podía simular la acción de otro programa que formaba parte su "input", generando la denominada **máquina universal** (MTU)[518].

Como el número de instrucciones que controla el comportamiento de la máquina es finito, es posible definir una sucesión de todas las máquinas de Turing, $\{MTU_1, MTU_2, ...\}$, de acuerdo con la medida creciente de su conjunto de instrucciones (es decir, con el número de símbolos involucrados en su codificación).

Sea una máquina de Turing en su estado inicial. De acuerdo con el correspondiente conjunto de instrucciones, puede suceder que arribe a su estado final e_n y se detenga produciendo un "output" $MTU(x)$, en $\Sigma = \{0,1\}$ (en este caso se dice que la computación es **convergente**) o que no se detenga nunca (se dice, entonces, que la computación es **divergente**). Luego, se puede concluir que una máquina de Turing define una función parcial del conjunto de sucesiones finitas $\Sigma = \{0,1\}$.

Se dice que una función $f(\bullet): N \to N$ es **computable en el sentido de Turing** si existe una máquina de Turing tal que, para todo $n = g(\omega)$ en el dominio de f (donde ω define un "input" en $\Sigma = \{0,1\}$) se detendrá produciendo un "output" $MTU(\omega)$ tal que $f(n) = g(MTU(\omega))$. Asimismo, se dice que un subconjunto $A \in N$ es recursivo si su función característica es computable en el sentido de Turing. Estos resultados se resumen en la expresión **"la clase de las funciones intuitivamente computables coincide con la clase de las funciones computables en el sentido de Turing"**, conocida como la **tesis de Turing.**

A partir de este concepto y teniendo en cuenta que el conjunto de las funciones computables en el sentido de Turing es un subconjunto finito numerable del conjunto no-numerable de todas las funciones parciales $N \to N$, que existen funciones que no observan regularidades computables y que el número de funciones computables es comparativamente muy pequeño, Turing concluyó que la respuesta al "*Entscheidungsproblem*" era negativa. Demostró, además, que los conceptos de función definible y de función computable en el sentido de Turing eran equivalentes y, en consecuencia, que su tesis y la de Church eran equivalentes.

---

517. Así como Gödel reemplazó la noción intuitiva de verdad por el concepto formalizable de "demostrabilidad", Turing reemplazó la noción intuitiva de computabilidad efectiva por el concepto de algoritmo.

518. De acuerdo con estas consideraciones, se puede concluir que una máquina de Turing no es una máquina en el sentido estricto del término, sino que debe interpretarse como sinónimo de programa o algoritmo (ver Herken, R. (ed.)(1988).

Kleene, S. (1938), por su parte, demostró: **i)** que existen funciones parcialmente computables generadas por algoritmos de duración infinita y **ii)** que en los sistemas deductivos cuyo sistema de axiomas es recursivo, la condición necesaria y suficiente para que una función aritmética (parcial) sea computable es que sea recursiva.

Como corolario de estos teoremas demostró que toda función computable (recursiva) es computable por una máquina de Turing. Este resultado permite concluir que, de acuerdo con la tesis de Church-Turing, todo problema irresoluble para una máquina de Turing será irresoluble para cualquier máquina algorítmica, lo cual implica reconocer que las máquinas de Turing y los sistemas algorítmicos poseen la misma capacidad computacional[519].

En términos de la teoría de la computabilidad un algoritmo puede ser definido como un programa computable en una máquina de Turing y el "*Entscheidungsproblem*" como la posibilidad de hallar un proceso general que permita decidir, en un número finito de pasos, si una fórmula de la lógica de primer orden es o no un teorema.

Ahora bien, esta afirmación de que los sistemas formales no contienen modelos de sí mismos expresada en la tesis de Church-Turing, no ha podido ser demostrada, de modo que, en realidad, la tesis debería ser considerada como una definición y no como un teorema (ver Delahaye, J.P. (1999)).

La demostración de la falsedad de la tesis de Church-Turing (es decir, la demostración de la existencia de un sistema anticipatorio) implicaría la aceptación de la interpretación reduccionista, el reconocimiento de que todo sistema material es un mecanismo y que la explicación de los fenómenos consiste exclusivamente en la búsqueda de una sintaxis. Viceversa, la demostración de su veracidad implicaría el rechazo de la interpretación reduccionista, el reconocimiento de la existencia de sistemas materiales complejos y la aceptación de que la explicación de los fenómenos asume un aspecto semántico.

Debe tenerse en cuenta que, dada la naturaleza flexible de la sintaxis, no hay forma de demostrar la verdad o falsedad de la tesis de Church-Turing basándose en la evidencia (supóngase, por ejemplo, que se propusiera un programa como capaz de generar todos los teoremas conocidos y de construir la sintaxis necesaria en la teoría de números, la refutación de esta proposición no podría ser obtenida hallando simplemente un teorema que este programa no pudiera formalizar, dado que el programa siempre podría ser extendido y, en consecuencia, la proposición de su capacidad para generar todos los teoremas podría ser renovada). Dado que la categorización de un sistema como no-anticipatorio o complejo implica afirmar que en el mismo existen más relaciones que en cualquiera de sus modelos sintácticos, la demostración en base a la evidencia sería similar a una demostración sobre la existencia de un conjunto infinito en base a la información que proporcionan los conjuntos finitos.

Obsérvese, por otra parte que, si bien la demostración del teorema de Gödel no se basa en la evidencia, dado que considera proposiciones sobre números a partir de números (es decir, que establece referentes numéricos para dichas proposiciones y, viceversa), y que, para algunos números

---

[519]. Debe tenerse en cuenta que los algoritmos son universales, es decir, invariantes con respecto al lenguaje de programación.

(los denominados números de Gödel), crea un referente proposicional que incorpora un ingrediente semántico, tampoco contribuye a la demostración de la tesis de Church-Turing..

4.- La complejidad algorítmica

A partir de esta conclusión y, de acuerdo con los conceptos de **teoría de la información ordinaria** como cuantificadora de las nociones de simplicidad y complejidad en función del número de "bits" necesario para codificar la información y de la **teoría de la información algorítmica** como medida del grado de complejidad algorítmica del conjunto de datos en función de la medida del menor programa necesario para generar el "output" $\omega \in \{0,1\}$ [517], la tesis de Church-Turing puede ser interpretada como un intento de demostrar si, dada una máquina de Turing, existe un algoritmo que permita decidir si un programa se detendrá o no (es decir, si la computación es o no convergente)[518].

De modo que, dada una máquina de Turing, MTU, la complejidad algorítmica, $K_{MTU}(\omega)$, será tal que:

$$K_{MTU}(\omega) = \begin{cases} \infty & \textit{si no existe ningun programa} \\ & P \textit{ tal que } MTU(P) = \omega \\ \min\{|P| : MTU(P) = \omega\} & \textit{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

donde P denota la medida del menor programa necesario en una MTU para producir el "output" $\omega \in \{0,1\}$ (y detenerse). En el primer caso se dice que el "output" ω es de **alta complejidad** (o caótico o, en el límite, aleatorio)[519], en el segundo se dice que es de **baja complejidad.**

Se demuestra que esta definición es invariante respecto de la selección de la máquina de Turing: dadas dos máquinas de Turing universales (MTU y MTU^*), para todo $\omega \in \{0,1\}$, se verifica que $K_{MTU}(\omega) \leq K_{MTU^*}(\omega) + c_{MTU^*}$, donde c_{MTU^*} es una constante independiente de ω.

Martin-Löf, P. (1969) demostró que si $f(\bullet): N \to N$ es una función computable tal que $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-f(n)} = \infty$ entonces, para toda sucesión binaria $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, se verifica que $K(x(n)) <$ $< n - f(n)$ para todo n. En particular, este teorema se cumple para $f(n) = \ln(n)$, lo que demuestra

---

517. Esta medida de complejidad, debida a Solomonoff, A. (1964), anticipó las propuestas de Chaitin, G. (1975)(1987)(1990) y de Thom, R. (1975)(en Güttinger, W.; Eikemeier, H. (eds.)(1979))(1983).

518. Problema conocido como **de la detención de Turing**

519. Kolmogorov, A.N. (1956) propuso considerar como aleatoria (o caótica) o irreducible a toda sucesión de alta complejidad (ver Copeland, B.J. (1997)).

que para valores muy por debajo de su propia medida, $n - \ln(n)$, una sucesión binaria se detendrá infinitamente a menudo y, en consecuencia, que existen relativamente muy pocos "outputs" ω que sean de baja complejidad con respecto a los de alta complejidad (aparentemente aleatorios).

Ahora bien, dada una máquina a la cual se le proporciona un "input" p , podría suceder que en primer término registrara este "input" en su totalidad para determinar su medida, $|p| = n$ y, en segundo término comenzara la computación sobre p "bit" a "bit". En este caso la complejidad de ω podría ser igual a $n + \ln(n)$, en vez de n . A fin de evitar esta paradoja Chaitin, G. (1975) propuso reemplazar en la definición de Martin-Löf la condición de máquina universal por la de **máquina universal de prefijo libre** la cual, por construcción, es autolimitada. Esta máquina leerá la cinta del programa sólo hacia la derecha, deteniéndose en el último "bit" de p .

En virtud de esta sustitución postuló que la medida de la complejidad de una sucesión finita ω , respecto de la máquina de Turing universal de prefijo libre MTU^* puede ser definida como $C_{MTU^*}(\omega) = \min\{|P| : MTU^*(P,\Lambda) = \omega\}$ y que, en consecuencia, se puede concluir que una sucesión $x = \{x_1, x_2, ...\} \in \Sigma^*$ es irreducible (o caótica) cuando satisface la **desigualdad de Kraft-Chaitin**, es decir, cuando existe una constante c tal que $C(x(n)) \geq n - c$ para todo n, donde $x(n) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ (ver Rozenberg, G.; Salomaa, A. (1994), Calude, C.S. (1994), Calude, C.S.; Grozea, C. (1996))[520].

A partir de la desigualdad de Kraft-Chaitin y considerando a la condición de von Mises-Wald-Church (según la cual se podría considerar como aleatoria a toda sucesión que cumpliera simplemente con una ley de aleatoriedad, por ejemplo, la ley débil de los grandes números) como insuficiente, Ville, J. (1939) propuso una definición de sucesión aleatoria "*típica*" como aquélla que satisface todas las leyes de este tipo, más precisamente, como aquélla que satisface con probabilidad igual a uno todas las propiedades que ocurran en el conjunto de todas las sucesiones binarias Σ^* (ver Sec. 3). Pero, teniendo en cuenta que no todas las sucesiones que no observan regularidades computables cumplen con la ley de los grandes números (la cual, como se vio en la Sec. 3.1.1, se considera solamente como condición necesaria de comportamiento aleatorio), se puede concluir que este criterio tampoco es adecuado para caracterizar la aleatoriedad (ver Lambalgen, M. (1987), Chaitin, G. (1987)(1988)).

Por su parte, basándose en su desigualdad, Martin-Löf, P. (1969) definió una medida de probabilidad μ , sobre Σ^* , tal que se puede asegurar que la condición necesaria y suficiente para

---

520. Es estos términos, el criterio de Leibniz podría ser expresado de la siguiente forma: si una teoría es de la misma medida en "bits" que los datos que intenta explicar, entonces no sirve. Por otra parte, debe tenerse en cuenta que, de acuerdo con el teorema de Waerden, J. (en Calude, S. (2000)) según el cual, dada una sucesión binaria, siempre es posible hallar una medida para la cual uno de los dos símbolos ocurrirá de acuerdo con una progresión geométrica, asimilar el concepto de aleatoriedad al criterio Leibniziano de ausencia de una ley que permita explicar su comportamiento (es decir, a la ausencia absoluta de regularidades no-triviales en su trayectoria) implicaría la imposibilidad de considerar a una sucesión como aleatoria.

que un subconjunto $N \subset \Sigma^*$ sea μ-nulo es que, para todo $\varepsilon > 0$ racional, exista una sucesión de "outputs" $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots\}$ en $\{0,1\}$, tales que: **i)** $N \subset \bigcup_{k \geq 1} \Gamma_{\omega_k}$ y **ii)** $\sum_{k \geq 1} \mu\left(\Gamma_{\omega_k}\right) < \varepsilon$ (donde los $\Gamma_{\omega_k} = \left\{x \in \Sigma^* : x = \omega_k y\right\}$ denotan los conjuntos que forman la cobertura de un conjunto nulo en Σ^*). Estableció, además, que un conjunto N es **efectivamente** μ **-nulo** si, para todo $\varepsilon > 0$ racional y para todo $k \geq 0$, existe un algoritmo que produce un "output" ω_k que satisface las condiciones anteriores (la definición de la **medida efectiva** μ **-unitaria** se obtiene como complemento de la anterior). Se dice que una medida μ es **computable** si, para todo $\varepsilon > 0$ racional y todo "output" ω en $\{0,1\}$, existe una función computable de una máquina de Turing, $F(\varepsilon,\omega)$, tal que $\left|F(\varepsilon,\omega) - \mu(\Gamma_\omega)\right| \leq \varepsilon$.

A partir de estas definiciones y considerando como "*típicas*" a aquellas sucesiones binarias que no presentan características distintivas, Martin-Löf, P. (1969) demostró que, dada una medida de probabilidad, μ-computable, la intersección de los conjuntos de medida efectiva μ no es vacío y es de medida efectiva μ-unitaria. De modo que se puede concluir que la identificación de los conjuntos de las sucesiones aleatorias y de las sucesiones μ-típicas es consistente, es decir, se puede asegurar que una sucesión que pertenece a todos los conjuntos de medida efectiva μ-unitaria (para una medida computable) es aleatoria en el sentido de Martin-Löf.

Como corolario de este teorema se puede concluir que la condición necesaria y suficiente para que una sucesión x sea μ-típica y, por lo tanto, irreducible o aleatoria en el sentido de Martin-Löf, es que $\mu(\{x\}) > 0$. Un resultado fundamental completamente válido en el ámbito de la matemática clásica pero inaceptable desde un punto de vista constructivista, según el cual sólo se puede asegurar que un objeto matemático existe si es posible establecer algún procedimiento para su construcción.

En este sentido, la propuesta de Martin-Löf puede ser implementada en términos de un **test secuencial de aleatoriedad**, consistente en una sucesión recursivamente numerable de intervalos $\left\{I_m^n\right\}_{n \geq 1}$ tales que, para cada m, se verifica que $\mu\left(I_m^n\right) < 2^{-m} = \varepsilon$. La aplicación de este test a una sucesión x implica seleccionar un nivel de confiabilidad m (ó ε) y verificar si $x \in I_m^n$ para un $m > 1$. Si se verifica esta condición se considera que, a un nivel de confiabilildad m, x puede ser considerada no-aleatoria. Viceversa si, a partir de cierto nivel de confiabilidad, dicha condición no se verifica, se considera que x satisface la condición de aleatoriedad. En resumen, se dice que una sucesión puede ser considerada típica, irreducible o aleatoria es el sentido de Martin-Löf si satisface **todos** los tests de aleatoriedad secuenciales con un nivel de confiabilidad m (ver Dellacherie, C. (1978)).

Dado que no se han hallado contraejemplos ésta, aunque inevitablemente insuficiente puede ser considerada como la definición instrumental de aleatoriedad más apropiada en términos de inferencia inductiva.

5.- El número Ω

Un ejemplo de sucesión aleatoria en el sentido de Martin-Löf es la que integra el **número Ω de Chaitin** con respecto a una máquina de Turing (ver Chaitin, G. (1966)), definido como la suma infinita $\Omega = \sum_{\{p\in\Sigma:\, MT(p,\Lambda)<\infty\}} \frac{1}{2^p}$ sobre todos los "inputs" $p \in \Sigma$, sobre los cuales la máquina MTU converge (cada "input" p para el cual la computación MTU es convergente agrega un 1 al p-ésimo "bit" del desarrollo binario de Ω). Obviamente, dado que la detención de $MTU(p)$ se verificará para un "input" dado, será $\Omega > 0$. Por otra parte, de acuerdo con la desigualdad de Kraft-Chaitin, será $\Omega \le 1$ y, como la detención de $MTU(p)$ no se verificará para todos los "inputs", será $\Omega < 1$ (ver Rozenberg, G.; Salomaa, A. (1994)).

Este número Ω define la probabilidad de que una máquina de Turing, a la cual se le ha proporcionado un "input" seleccionado al azar (es decir, formado por una serie de "bits" tal que el valor de cada "bit" está determinado por el resultado a obtener al arrojar una moneda simétrica) se detenga[524]. De modo que el cálculo de los primeros N dígitos de $\Omega(N)$ no pueden ser calculados utilizando un programa de medida $n < N$; en otros términos, Ω es un objeto "*algorítmicamente aleatorio*" formado por un número infinito de "bits" irreducibles: dado un programa de medida $n < \infty$, existe un número infinito de bits que el programa no puede computar. Si se tiene en cuenta que los infinitos bits de Ω representan las proposiciones matemáticas lógicamente irreducibles, queda demostrado que, contrariamente a la proposición de Hilbert, dado un sistema finito de axiomas, existe un número infinito de proposiciones verdaderas que son indemostrables[525].

Obviamente, si los n primeros dígitos (es decir, el prefijo) de $\Omega(n)$ son conocidos, todos los problemas de detención para programas codificables en menos de n "bits" quedan resueltos. Luego, dados un prefijo de $\Omega(n)$ suficientemente grande, una fórmula f perteneciente a un sistema axiomático A y las máquinas de Turing $MTU(A,f)$ y $MTU(A,\neg f)$ las cuales, mediante la verificación de todas las demostraciones posibles en el sistema A, decidirán, respectivamente, si f o $\neg f$ es o no un teorema, es decir, si f es demostrable, no-demostrable o independiente de A. Ahora bien, dado que la medida del prefijo es una función de la medida de la expresión reducida de la correspondiente función computable de $MTU(F)$ y de f y, teniendo en cuenta que, dado que el tiempo de computación, $t(n)$, que requiere hallar todos los programas de medida menor que n que convergen, crece a mayor velocidad que cualquier función computable, el hecho de conocer $\Omega(n)$ no resulta de utilidad práctica en la resolución del problema de la demostrabilidad.

---

524. Debe tenerse en cuenta que, si bien el valor numérico de Ω depende de la selección del lenguaje de computación, sus propiedades permanecen invariantes con respecto a distintos lenguajes.

525. Chaitin, G. (1936): "*El número Ω es irreducible. Para obtener sus primeros n 'bits' se necesita una teoría de n 'bits', es decir una teoría de complejidad igual al fenómeno que se quiere estudiar. Lo cual implica que el razonamiento no contribuye en nada a la explicación del mismo*".

6.- “Demostrabilidad”, aleatoriedad y caos

De los resultados obtenidos por Gödel, Church, Turing, Kolmogorov, Ville, Chaitin y Martin-Löf se puede concluir que existe un abismo insuperable entre la verdad y la “demostrabilidad” de una proposición y, por lo tanto, que la aleatoriedad de una sucesión es indemostrable. Sin embargo, a partir de la consideración de procesos dinámicos caóticos es posible generar un vínculo entre la noción de complejidad de Chaitin y la tesis de Church-Turing.

La característica más importante de un sistema dinámico es su **conjunto atractor**, es decir, el subconjunto de puntos de su **espacio de estados** en el cual la trayectoria evoluciona cuando $t \to \infty$. La dinámica del sistema está condicionada por la naturaleza del conjunto atractor. Obviamente, es posible que a partir de diferentes estados iniciales el sistema transcurra a distintos atractores, pero a cada punto del espacio de estados le corresponde un único atractor que condicionará la dinámica del sistema. Los sistemas dinámicos clásicos obedecen a dos tipos alternativos de atractores: **puntuales** o **ciclos límite** (el primero está definido por un punto fijo del espacio de estados, el segundo está definido por una curva cerrada de modo que, cuando la trayectoria del sistema ingresa en el atractor, permanecerá orbitando de acuerdo con dicha curva). Estos dos atractores clásicos pueden ser, a su vez, **estables** o **inestables** según que, cuando un punto del atractor experimente una perturbación infinitesimal hacia un punto externo al atractor, la trayectoria a partir del punto perturbado retorne hacia el atractor o sea repelida por éste.

Existen otros dos tipos de atractores: el **atractor extraño** o **caótico**, formado por la combinación de órbitas periódicas inestables y órbitas no-periódicas y el **atractor quasi- periódico**, que constituye el vínculo entre el ciclo límite y las trayectorias caóticas y que está formado por la combinación de ciclos límite que se intersectan frecuentemente.

Según se concluyó de las consideraciones sobre la complejidad, existen sucesiones computables de complejidad arbitrariamente grande. En términos de la teoría de atractores, el teorema de Chaitin demuestra que, en un conjunto infinito de sucesiones binarias computables siempre es posible hallar una sucesión cuyo atractor es caótico. Por su parte, el teorema de Levin-Schnorr-Chaitin demuestra que, en particular, la condición necesaria y suficiente para que una sucesión binaria puede ser considerada aleatoria (típica en el sentido de Martin-Löf) con respecto a la distribución $b\left(n, \frac{1}{2}\right)$ es que sea caótica con respecto a dicha distribución.

Luego, se puede concluir que la aceptación de la existencia de atractores caóticos y la interpretación de la aleatoriedad como límite del grado de complejidad de un atractor, pueden ser considerados como los únicos argumentos capaces de reducir (pero no de eliminar) la distancia entre la afirmación sobre la aleatoriedad de una sucesión y su “demostrabilidad” y, en consecuencia, de aproximar a una justificación de la teoría de los colectivos de von Mises.

Apéndice 3

NOTAS BIOGRAFICAS
(o la probabilidad y el barro de la historia)

"*...con esa gozosa complacencia con que los pequeños se sienten agrandados al descubrir las pequeñeces de los gigantes*".

(E. Sábato, "*Querido y remoto muchacho*")

Adrain, Robert (1775-1843) nació en Carrickfergus (Irlanda) y falleció en New Brunswick (Inglaterra). En 1798 emigró a los Estados Unidos. Cursó estudios secundarios en New Jersey, Pennsylvania y Nueva York. Fue alumno del Queen's College (Rutgers), y de las universidades de Columbia y de Pennsylvania. En 1808 fundó la publicación científica "*The Analyst*", cuya circulación cesó poco tiempo después. Sus trabajos están relacionados, fundamentalmente, con la matemática aplicada y abarcan un amplio espectro que va de la geofísica y la geometría descriptiva a la historia de la matemática. Merecen ser mencionadas sus soluciones al llamado "problema de Patterson", en el que hace una ingeniosa aplicación del cálculo de variaciones, y al problema de Laplace sobre agujeros negros. Su contribución más importante es, indudablemente, "*Research concerning the probabilities of the errors which happen in making observations*" (1808), en la que introduce a la distribución Normal como fundamento probabilístico del método de los cuadrados mínimos.

Agnesi, Maria Gaetana (1718-1799) nación en Milán en el seno de una familia distinguida. Su única obra, "*Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana*" (1748), publicada por obra e insistencia de los matemáticos Jacopo Riccati y Ramiro Rampinelli, resumió los avances obtenidos en el cálculo infinitesimal, en Italia y Francia, durante la primera mitad del siglo XVIII y constituyó el libro de texto obligado en esa materia hasta comienzos del siglo XIX. En 1750, como consecuencia del reconocimiento obtenido por esta obra, fue propuesta por el Papa Benedetto XIV y aceptada como profesora de la Universidad de Bolonia y miembro de la Academia delle Scienze de dicha ciudad. En realidad nunca ejerció esta cátedra dado que, inmediatamente después de la edición de las "Instituzioni", y cediendo a una vocación que había manifestado desde su juventud, abandonó totalmente sus estudios y se dedicó durante el resto de su vida a las obras de caridad. Sus trabajos inéditos (entre los que se destaca un extenso comentario a las "*Section Coniques*" de G.F.A de l'Hôpital) fueron recogidas en 25 volúmenes que se encuentran en la Biblioteca Ambrosiana de Milán.

Arbuthnot, John (1667-1735) nació en (Kincardineshire, Ecocia) y falleció en Londres. En 1696 obtuvo su grado en medicina (fue médico del Rey de Inglaterra), pero durante toda su vida ejerció como profesor de matemáticas en dicha ciudad. En 1704 fue designado Miembro del College of Physicians de Londres y de la Royal Society. Su traducción del latín del "*De ratiotiniis in ludo aleæ*" de Ch. Huygens incluye, además, la solución de los problemas planteados por el autor y secciones adicionales de su autoría referidas a juegos de dados y cartas. En 1710 presentó en la Royal Society su famoso ensayo "*An argument for Divine Providence taken from the constant regularity observed in the birth of both sexes*" (publicado en 1712) en el que expuso una argumento probabilístico sobre la existencia de Dios, a partir de la distribución de la proporción de nacimientos masculinos y femeninos, utilizando un razonamiento asimilable a lo que actualmente se denomina un test de signo. Los resultados obtenidos le permitieron arribar a curiosas conclusiones, como por ejemplo, que la poligamia parecía ser una práctica poco recomendable en una sociedad civilizada. El novedoso contenido de esta obra desató un profundo debate que involucró a personajes como William 'sGravesande, Bernard Nieuwentijtm Nicholas Bernoulli y Abraham de Moivre. Más allá de sus indudables habilidades como matemático, su fama se debió a sus dotes literarias (fue el creador de John Bull, un personaje que con el tiempo se transformó en un símbolo del carácter inglés y colaborador de Jonathan Swift, de Alexander Pope y de John Gay) y a sus condiciones de agudo satiririzador de la política de su época.

Arnauld, Antoine (1612-1694) nació en París. En 1641 obtuvo el grado doctoral en la Sorbonne. En 1648 se retiró a la abadía de Port-Royal (a la que, en 1654, ingresó Blaise Pascal). Su correspondencia con Gottfried Leibniz y el hecho que Christiaan Huygens le haya dedicado una copia de su "*Horologium oscillatorium*" constituyen una muestra de la consideración que gozó entre sus contemporáneos (fue concido como "Arnauld el grande"). En 1662, junto con su colega Pierre Nicole, publicó "*La logique ou l'art de penser*" (se los conoció a ambos como los "lógicos de Port Royal"), la cual ejerció una profunda influencia sobre los científicos de la segunda mitad del siglo XVII y del siglo XVIII. Sus obras más importantes en el ámbito de la matemática son "*Nouveaux élements de géometrie contenant un ordre tout nouveau et des nouvelles démonstrations des propositions les plus comunes, des nouveaux moyens de faire voir quelles lignes sont incommensurables, des nouvelles mesures des angles, dont on ne s'était pas avisé, et des nouvelles manières de trouver et de démontrer la proportion des lignes*" (1667) y "*Solution d'un des plus celèbres et des plus difficiles problèmes d'arithmétique appellé communement les quarrez magiques*" (1667). En lo que hace a la teoría de la probabilidad, sus contribuciones están contenidas en su correspondencia con Ch. Huygens.

Bayes, Thomas (c.1702-1761) nació en Hertfordshire(?) (o Londres (?)) y falleció en Tunbridge Wells. Fue el mayor de los siete hijos del matrimonio formado por Joshua Bayes y Ann Carpenter. Su padre, uno de los siete primeros ministros ordenados, en 1694, en la primera academia no-conformista fundada por Richard Frankland (los no-conformistas, que se caracterizaron por su rechazo al misterio de la Trinidad y su escepticismo respecto de la divinidad de Cristo, desempeñaron un papel muy importante en el desarrollo de las ideas científicas durante el siglo XVIII, su crecimiento en el ámbito de la comunidad científica se vio favorecido por el surgimiento de la filosofía natural), fue miembro de la Royal Society la cual, en su propuesta como candidato certifica que es "*hábil en geometría y en todos los temas del conocimiento matemático y filosófico*". Según algunos autores habría recibido su primera educación en forma privada (como era costumbre entre los no-conformistas), de acuerdo con otros -opinión que no es incompatible con la anterior- habría recibido una "*educación liberal para el ministerio*" primero en la Coward's Academy (a esta institución, conocida más tarde como Hoxton Academy, asistió, en el período 1740-44, el reverendo Richard Price), fundada por un señor Coward de Walthamstow y, posteriormente, en la Fund Academy, fundada por el Ministro John Ward en Tenter Alley. Por otra parte, no sería extraño que hubiera estudiado probabilidades con A. De Moivre en el famoso Slaughter's Coffee, en St. Martin's Lane. En 1719 ingresó a la Universidad de Edimburgo, en la cual siguió estudios de lógica y teología, egresando al año siguiente sin obtener su ordenación. Alrededor de 1727 fue ordenado Ministro Presbiteriano (en realidad, igual que su amigo R. Price, militó an el Arianismo que fue, junto con el Deísmo, uno de los movimientos precursores del moderno Unitarismo), ejerciendo su ministerio como asistente de su padre en Leather Lane y, luego, en el templo Little Mount Sion, en Tunbridge Wells, en una congregación presbiteriana disidente, hasta su retiro en 1752. Su obra se compone de: **i)** "*Divine benevolence, or an attempt to prove that the principle end of the Divine Providence and government is the happiness of his creatures*", un tratado de metafísica publicado en 1731, en forma anónima, como respuesta a la memoria "*Divine rectitude, or a brief inquiry concerning the moral perfections of the Deity; particularly in respect of Creation and Providence*" (1730) del Ministro Anglicano Dr. John Balguy, en el marco de una polémica sobre la cuestión: "*Dios no estaba obligado a crear el universo, entonces ¿por qué lo hizo?*" (la adjudicación de la autoría de este trabajo se debe fundamentalmente a R. Price, quien en su "*A review of the principal questions in moral. Particularly those respecting the origin of our ideas of virtue, its nature, relation to the Deity, obligation, subjet-matter, and sanctions*" (1787) testimonia que "*El autor de Divine benevolence fue el Señor Bayes, una de las personas más ingeniosas que he conocido y, por muchos años ministro de una congregación disidente en Tunbridge Wells*"). **ii)** "*An introduction to the doctrine of fluxions, and a defence of the mathematicians against the objections of the author of 'The analyst', so far as they are designed to affect their general methods to reasoning*" (1736), una memoria en defensa de los aspectos metafísicos de la teoría de fluxiones de I. Newton ante el ataque por parte de George Berkeley, obispo de Cleyne (luego obispo de Oxford) en su obra "*The analyst; or a discourse adressed to an infidel mathematician*" (1730). Este "*muy agudo*" trabajo, que"*...es anónimo por razones que son fácilmente* *entendibles, pero que siempre fue atribuido a Bayes por sus contemporáneos*" (A. De Morgan: "*Rev. Thomas Bayes, notes and queries*" (1860)) le valió su elección, en 1742, como Miembro de la Royal Society); **iii)** Una breve carta dirigida a John Canton (publicada en las Philosophical Transactions de la Royal society, en 1763) acerca de series asintóticas semiconvergentes, en particular, sobre el teorema de De Moivre-Stirling. **iv)** El famoso "*An essay towards solving a problem in the doctrine of chances*" -comunicado en forma póstuma a la Royal Society en una carta fechada el 10 de noviembre de 1763 y expuesto el 23 de diciembre del mismo año por su amigo Richard Price-, en el que figura su famoso teorema sobre la inversión de la probabilidad. Existe, además, una libreta (preservada en la Equitable Life Assurance Society, por obra de R. Price y de su sobrino W. Morgan) con anotaciones sobre temas tan curiosos como detalles sobre máquinas eléctricas, sistemas de pesos y medidas ingleses, notas sobre matemática, filosofía natural y mecánica celeste, y un sistema completo de taquigrafía, derivado de uno debido a Thomas Shelton ("*Zeiglographia*" (1654)) y modificado por Elisha Coles, en uso en el siglo XVII.

Bernoulli, Daniel (1700-1782) nació en Gröningen y falleció en Basilea. Perteneció a una familia de refugiados flamencos que, huyendo de las masacres perpetradas en Flandes por las tropas católicas españolas, abandonó Amberes para radicarse en Basilea (la familia Bernoulli predominó en la política, el arte, las leyes y la ciencia en los siglos XVII y XVIII, doce de sus miembros realizaron aportes relevantes a la matemática y a la física, de los cuales cuatro, Jakob I, Johann I, Nikolaus II y Daniel, fueron autores de contribuciones fundamentales al desarrollo de la teoría de la probabilidad). Según se puede observar en el cuadro que figura en el Apéndice III, fue el segundo hijo de Johann I y, por lo tanto, sobrino de Jakob I y primo de Nikolaus I (hijo de Nikolaus, quien se destacó como artista plástico). Sus hermanos fueron Nikolaus II y Johann II. Nació en Gröningen. En 1721, se graduó en medicina en la Universidad de Basilea. Estudió matemática con su padre y su hermano mayor Nikolaus II. En 1725 ambos hermanos obtuvieron puestos académicos en San Petersburgo. Nikolaus falleció al año siguiente y él permaneció en esta ciudad durante ocho años. A su retorno a Basilea ejerció las cátedras de botánica, fisiología y física. Es considerado el fundador de la hidrodinámica teórica. Fue miembro de las academias de Bolonia, Berlín y París. Sus contribuciones a la teoría de la probabilidad están contenidas fundamentalmente en "*Specimen theoriæ novæ de mensura sortis*" (1738), en el que desarrolló la idea de curva de utilidad y de esperanza moral en el juego como concepto necesario para resolver el problema (planteado por su primo Nikolaus I) de la determinación del valor de un juego con esperanza matemática infinita (conocido luego como la paradoja de San Petersburgo). En 1770, desarrolló (independientemente de los trabajos de De Moivre) una nueva forma de obtención de la función Normal como aproximación a las probabilidades binomiales ("*Mensura sortis ad fortuitam seccessionem rerum naturaliter contingentium applicata*") y la utilizó por primera vez para describir los errores aleatorios en la medición de tiempos al utilizar un reloj de péndulo ("*Diiudicatio maxime probabilis plurium observationem discrepatium atque verisimillima inductio inde formanda*" (1778)).

Bernoulli, Jakob I (o Jacques I, o Santiago I, o Giacomo I) (1654-1705) nació y falleció en Basilea. Fue el mayor de cuatro hermanos: Nikolaus, quien se destacó como artista plástico (es de su autoría el único retrato que se conoce de Jakob, fechado en 1686), Johann I, que se destacó como matemático y Jerome, que se dedicó a la atención de los negocios de la familia. Su padre, Nikolaus Bernoulli, era farmacéutico y legislador de la ciudad de Basilea. Su madre, Margaretha Scönauer, era hija de otro farmacéutico de Basilea. En 1676 se graduó en filosofía y teología y contrariando la voluntad de su padre, también estudió matemática y astronomía. A partir de 1677 y por cuatro años, se desempeñó como tutor académico en Suiza y Francia, donde tomó contacto con los discípulos de Descartes. Fue probablemente durante su estadía en París cuando se despertó su interés por la probabilidad. En 1681, con motivo de la aparición de un gran cometa, publicó un artículo en el que formuló las aparentes leyes de comportamiento de dicho fenómeno (refutadas, luego, por los "*Principia*" de I. Newton, en1687) y concluyó que, en consecuencia, su aparición podía ser predicha. Esta teoría obviamente chocó con los principios teológicos de la época que, basándose en la hipótesis de la impredecibilidad, adjudicaban su presentación a la voluntad divina. Esta circunstancia hizo que, a partir de ese momento, abandonara definitivamente la teología y se dedicara con exclusividad a la matemática y a la astronomía, adoptando como divisa de su vida el lema "*Invito padre, sidera verso*". En 1682 volvió a abandonar Basilea para viajar por Holanda e Inglaterra, circunstancia que le permitió conocer a Jan Hudde en Amsterdam y a John Flamsteed, Robert Boyle y Robert Hooke en Londres. A su regreso, en 1683, dictó conferencias sobre física experimental mejorando los desarrollos matemáticos de rené Descartes, John Wallis y Isaac Barrow, y editó en el Acta Eruditorum algunos trabajos sobre matemática (entre ellos, uno sobre teoría de la probabilidad en el que plantea una solución al "quinto problema de Huygens"). De su matrimonio con Judith Stepanus (1684) tuvo un hijo y una hija, ninguno de los cuales se dedicó a la matemática. En 1687 fue nombrado profesor de matemática en la Universidad de Basilea. A partir de 1690, junto a su hermano Johann, realizó importantes contribuciones al desarrollo del cálculo infinitesimal del cual -junto a Isaac Newton y Gotfried Wilhelm Leibniz- puede ser considerado uno de los creadores (junto con Leibniz, con quien mantuvo una extensa correspondencia, desarrolló las reglas de integración y diferenciación tal como son conocidas hoy). En 1699 fue elegido miembro de la Academie des Sciences de París y, en 1701, miembro de la Academia de Berlín. Realizó también importantes contribuciones a la teoría de las ecuaciones diferenciales, a la mecánica, al cálculo de variaciones y a la teoría de las series infinitas. A su muerte dejó gran cantidad de trabajos inéditos sobre matemática (publicados más tarde por su sobrino Nikolaus I quien, con gran sabiduría, los ordenó cronológicamente, de modo que resulta relativamente fácil seguir la evolución de su pensamiento científico), siendo los principales los referidos a la teoría de la probabilidad. Su recopilación produjo la edición póstuma del "*Ars conjectandi*" (1713), su obra más importante. Las relaciones con su hermano Johann con el tiempo se fueron enfriando y, como consecuencia de diferencias acerca de la solución del conocido como "problema isoperimétrico" (consistente en hallar una curva de una longitud dada que encierre el área máxima), terminaron en una franca hostilidad. Igual que Arquímedes hizo grabar en su lápida la fórmula de la espiral logarítmica, $r = ae^{b\theta}$ (que siempre se revela "*simillima filia matri*" y a la cual consideraba uno de sus resultados "*más hermosos*" y "*símbolo de la fuerza en la adversidad*") con la inscripción "*Eadem mutata resurgo*".

Bernoulli, Jakob II (1759-1789) nació en Basilea y falleció en San Petersburgo. Fue el tercer hijo de Johann II y, por lo tanto, hermano de Johann III. En 1786 fue nombrado miembro de la Academia de Ciencias de San Petersburgo. Se destacó por sus trabajos en mecánica clásica. Murió ahogado en el río Neva.

Bernoulli, Johann I (1667-1748), hermano menor de Jakob I (fue el décimo hijo de Nikolaus Bernoulli), nació y falleció en Basilea. En 1687 obtuvo el grado de "Magister" en filosofía y, en 1694, se doctoró en medicina en la Universidad de su ciudad natal pero, al igual que su hermano, contrariando los deseos paternos, se dedicó a la matemática. Hacia 1690 se trasladó a Ginebra y luego a Lyon y a París allí, en casa del Padre Nicolas Malebranche, conoció a Guillaume François Antoine de L'Hôpital Marqués de Saint Même y Señor de otros dominios, quien fue su primer discípulo notable. El producto de estas enseñanzas constituyó el libro "*Analyse des infiniment petits*" (1696) publicado lor L'Hôpital (con quien aparentemente existió una acuerdo económico que le permitía utilizar los descubrimientos científicos de su profesor, entre los que figura la hoy conocida como regla de L'Hôpital). En 1692 regresó a Basilea. En 1695 fue nombrado profesor de matemática en Gröningen. Contrajo matrimonio con Dorothea Falkner, hija de un diputado del Parlamento de Basilea (algunos cronistas sugieren que su nombramiento como profesor de griego en la Universidad de Basilea en 1705, se vio facilitado por las influencias políticas de su suegro). En ese mismo año sucedió a su hermano Jakob I en la cátedra de matemática de dicha Universidad. Fue miembro de las academias de París, Berlín, Londres, Bolonia y San Petersburgo. Los últimos años de su vida los dedicó al tratamiento de problemas de mecánica, hidrodinámica y física experimental. Fue el primero en atribuir al término función el significado de "*cantidad compuesta, de una forma cualquiera, por una variable y por constantes*" (definición que se utilizó hasta las primeras décadas del siglo XIX, cuando se planteó la necesidad de considerar a las funciones independientemente de su representación analítica y se introdujo el concepto de correspondencia). De su correspondencia surge que mantuvo agrias disputas con otros científicos de su época (incluyendo a su hermano Jakob I). En 1735 compartió con su hijo Johann II el premio otorgado por la Académie des Sciences de París (y, cuentan las crónicas que, considerando que éste había incurrido en una falta de respeto a su autoridad paterna lo expulsó de su casa). Sus contribuciones a la teoría de la probabilidad se encuentran en su correspondencia con P. de Montmort (1710-1713). Una idea de la fama que gozó como matemático puede ser obtenida de los siguientes versos escritos por Voltaire como epígrafe de su "*Opera omnia in quatuor tomos distributa*" (1742): "*Son espirit vit la verité/et son œur connut la justice/il fait l'honneur de la Suisse/et celui de l'humanité*", y del epitafio inscripto por sus conciudadanos sobre su tumba: "*Hoc sub lapide requiescit vir quo maiorem ingenio Basilea non tulit sæculi sui Archimedes non illis Europæ luminibus Cartesiis, Newtoniis, Leibnitziis mathematum scientia secundus Johannes Bernoulli*".

Bernoulli, Johann II (1710-1790), hijo de Johann I y, por lo tanto, hermano de Nikolaus II y de Daniel, nació y falleció en Basilea. En 1748 sucedió a su padre en la cátedra de matemática de la universidad de dicha ciudad. Su fama como matemático se ve avalada por cuatro memorias premiadas por la Academie des Sciences de París. Según los comentarios de su hermano Daniel, su carácter indolente impidió que su legado científico fuera más amplio.

Bernoulli, Johann III (1744-1807), hijo de Johann II, nació en Basilea y falleció en Berlín. Se graduó en matemáticas en la universidad de dicha ciudad. Inmediatamente después de su graduación, y aceptando una invitación de Federico II, ingresó como miembro de la Academia Prusiana, en la cual publicó gran cantidad de trabajos sobre astronomía. En el período 1786-1789 se desempeñó como director del *Magazin für die reine und Angewandte Matematik* (uno de las primeras publicaciones periódicas sobre matemática que existieron en Europa).

Bernoulli, Nikolaus I (1687-1759), hijo de Nikolaus, nació y falleció en Basilea. Estudió matemática con sus tíos Jakob I y Johann I, graduándose en 1704. En 1709 obtuvo el grado en leyes en la Universidad de Basilea con la tesis "*De usu artis conjectandi in jure*". Durante los años 1712 y 1713 viajó por Inglaterra, Holanda y Francia. En Londres conoció a Abraham De Moivre y a Isaac Newton, y en París a Pierre de Montmort (con quien había mantenido correspondencia sobre cuestiones relacionadas con la probabilidad desde 1710). Con el apoyo de Gottfried Wilhelm Leibniz, en 1716, la República de Venecia lo designó profesor de matemática en la Universidad de Padua. En 1722 fue nombrado profesor de lógica y en 1731 profesor de derecho en la Universidad de Basilea. Los temas de su especialidad fueron teoría de las series y teoría de la probabilidad. Sus aportes en el primero de estos ámbitos se encuentran en su correspondencia con Leibniz y con Leonhard Euler. Su contribución a la teoría de la probabilidad se encuentra en la tesis antes mencionada y en su correspondencia con de Montmort (1713).

Bernoulli, Nikolaus II (1695-1726) nación en Basilea y falleció en San Petersburgo. Fue hijo de Johann I y, por lo tanto, primo de Nikolaus I. En 1726 se doctoró en matemática en la universidad de su ciudad natal. Viajó por Francia e Italia. En 1722 ingresó a la Facultad de Ciencias Jurídicas de Berna hasta que, en 1725, la abandonó para dedicarse exclusivamente a la matemática. Ese mismo año aceptó la invitación de Pedro el Grande a él y a su hermano Daniel para formar parte de la Academia de Ciencias de San Petersburgo. El rigor del clima de esta ciudad perjudicó de tal forma su salud, que falleció al poco tiempo.

Bertrand, Joseph Louis François (1822-1900) nació y falleció en París. En 1841, al cabo de una carrera brillante, egresó de la École Polytechnique e ingresó a la Escuela de Minería, abandonando al poco tiempo sus estudios para dedicarse a la enseñanza secundaria. Datan de esta época sus famosos tratados de artimética y álgebra. Designado profesor de College de France, comenzó la redacción del gran "*Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*" (que quedó trunco en el segundo volumen, los manuscritos del tercer volumen, junto con su biblioteca, resultaron destruidos durante la revolución de 1871). En 1856 fue nombrado Miembro de la Academie des Sciences. Sus cursos en el College de France se hallan comprendidos en "*Thérmodinamique*" (1887), "*Calcul des probabilités*" (1889) y "*Leçons sur la théorie methématique de l'elasticité*" (1890). sus brillantes dotes de historiador y literato lo elevaron, en 1874, al cargo de Secretario Perpetuo de la Academie, como sucesor de Bernard Le Bovier de Fontenelle. Sus "*Éloges académiques*" le valieron su elección como miembro de la Academie Français, en 1876. Su producción científica es rica y variada, abarca campos como la teoría de números, la geometría infinitesimal y la mecánica analítica.

Bienaymé, Irenée-Jules (1796-1878) nació y falleció en París. En 1815 ingresó a la École Polytechnique, pero cuando ésta fue clausurada en 1816 debido a las simpatías Napoleónicas de sus estudiantes, se vio precisado a ejercer tareas como traductor de periódicos para ganarse la vida. En 1818 fue nombrado profesor de matemática en la Academia Militar de St. Cyr. Favorecido por circunstancias relacionadas con la restauración de los Borbones (1815), en 1820 ingresó a la Administration des Finances, de la que llegó a ser Inspector General en 1834. En 1844 fue elegido Oficial de la Legión de Honor y, después de la revolución de 1848 y de la proclamación de la Segunda República, se retiró prematuramente del servicio público y se dedicó exclusivamente a la ciencia, llegando a ser uno de los estadísticos más importantes del siglo XIX. Inmediatamente después de su retiro fue designado Profesor de cálculo de probabilidades en la Sorbonne, cargo en el que permaneció hasta 1851 (Gabriel Lame, su sucesor en dicha cátedra, lo destacó como el único exponente de la teoría de la probabilidad en Francia). En los años siguientes se desempeñó brillantemente como consultor del gobierno de Napoleón III en cuestiones referidas a economía y estadística. En 1853, en razón de una serie de publicaciones realizadas en la Société Philomatique y, en particular, de su memoria "*Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés*", fue elegido Miembro de la Academie des Sciences de París y en 1860 Miembro de la Academie des Sciences de San Petersburgo. Sus primeras publicaciones datan de 1829 y están dedicadas fundamentalmente a cuestiones estadísticas y actuariales (en particular al análisis de las tablas de mortalidad de A. Déparcieux y E.E. Duvillard, de uso habitual en esa época). Sus contribuciones abarcaron las áreas de la teoría de los cuadrados mínimos (generalizando y continuando la obra de Laplace), los desarrollos de las distribuciones χ^2 y Γ, los teoremas en el límite (sobre este tema, cabe mencionar la desigualdad publicada en 1853, obtenida en forma independiente por Pafnuty Lvovich Chebychev, en 1867 y conocida hoy como de Bienaymé-Chebychev), la teoría de los procesos estocásticos ramificados (en la cual, su desarrollo del teorema fundamental precedió en 28 años a la publicación "*Englishmen of science: Their nature and nurture*" (1874) de Francis Galton), y los tests no-paramétricos para el análisis de series de observaciones aleatorias. Muchas de las ideas de Bienaymé se encuentran en su correspondencia con Lambert Adolphe Jacques Quetelet, Antoine Augustin Cournot y Chebychev.

Black, Arthur (1851-1893) nació en Brighton. En 1877 obtuvo su título de grado en la Universidad de Londres. El estudio de sus manuscritos no publicados, revela que -como sus contemporáneos Karl Pearson y George Weldon- fue un convencido Darwinista y que sus esfuerzos estuvieron dedicados, fundamentalmente, a la cuantificación de la teoría de la evolución. Su único trabajo publicado (en forma póstuma) fue "*Algebra of animal evolution*" (1898), actuando como editores Francis Galton y M.J.M. Hill (en realidad, los hermanos de Black habían encargado originalmente la edición a K. Pearson, pero, dado que los temas sobre los que trataba la obra eran similares a aquéllos sobre los que él se encontraba trabajando, éste derivó el encargo hacia F. Galton).

Boscovich, Ruggiero Giuseppe (o Bosković) (1711-1787) nació en Ragusa (Dalmacia, hoy Dubrovnik, Croacia). Fue educado en colegios jesuitas y en el Collegium Romanum y en 1744 fue ordenado sacerdote en la Compañía de Jesús. Propuso una versión preliminar de la teoría atómica de la materia que fue muy apreciada entre los científicos de su época. En 1750 el Papa Benedicto XIV lo comisionó, junto con el astrónomo inglés Christopher Maire (también sacerdote jesuita) para realizar mediciones relacionadas con el problema de la determinación de la forma de la tierra. En el informe que generó este trabajo ("*Litteraria expeditione per pontificiam ditionem ad dimetiendas duas meridiani gradus*") está contenida la primera resolución exitosa del problema de la inconsistencia de diferentes mediciones, a partir del criterio de optimización basado en la minimización de la suma de los valores absolutos de los errores de observación aleatorios (denominado luego, por Laplace "*método de situación*", para distinguirlo del criterio de los "*cuadrados mínimos*"). Laplace y Gauss utilizaron sus conceptos acerca de la distribución de los errores en sus propios trabajos sobre astronomía. En particular, Gauss generalizó la metodología para más de una variable explicativa. Después de la suspensión de la Compañía de Jesús en 1733, aceptando una invitación del Rey de Francia, se trasladó a París, donde se desempeñó durante nueve años como Director de Óptica de la marina francesa.

Bowley, Arthur Lyon (1869-1957) nació en Bristol en el seno de una familia muy convencional y religiosa. Realizó sus primeros estudios en el Christ's Hospital, un internado pertenenciente a una fundación de costumbres religiosas muy estrictas en la que los alumnos estaban sometidos a una disciplina espartana (del cual fue, posteriormente, director). En 1888 ingresó al Trinity College de Cambridge, graduándose con honores en matemática, en 1891. Por recomendación de Alfred Marshall fue designado integrante del cuerpo deocente inicial de la London School of Economics (fundada en 1895), permaneciendo a cargo de la cátedra de Estadística hasta su retiro en 1936. En 1895 fue nombrado profesor de matemática en una escuela de Leather

Head y, entre 1910 y 1913, en el University Extension College (Reading), en el que permaneció como profesor invitado de Economía hasta 1919. En ese año accedió al cargo de profesor de la University of London. Fue miembro, entre otras instituciones, de la British Association, de la Royal Society y del International Statistical Institute. En 1949 fue nombrado Knight Bachelor por el gobierno británico. No obstante la orientación matemática de sus estudios, su interés siempre estuvo dirigido a la economía y a los problemas sociales. En particular, y por influencia de Alfred Marshall, dedicó muchos esfuerzos a las cuestiones de la reforma social en Gran Bretaña a fines del siglo XIX. A este respecto cabe destacar su "*A short account of England's foreign trade in the nineteenth century*", por el cual recibió, en 1892, el Cobden Prize en Cambridge. Sus publicaciones en estadística y economía matemática son pocos y de escaso valor ("*Relations between the accuracy of an average and that of its constituent parts*" (1897), "*Elements of statistics*" (1901), "*An elementary manual of statistics*" (1910), "*The measurement of the accuracy of an average*" (1911), "*The mathematical groundwork of economics: An introductory treatise*" (1924)). Su mayor contribución fue al desarrollo de las técnicas de muestreo y sus aplicaciones a la economía y a los estudios sociales ("*Changes in average wages (nominal and real) in the United Kingdom between 1860 and 1891*" (1895), "*Wages in the United Kingdom in the nineteenth century*" (1900), "*Livelihood and poverty: A study in the economic conditions of working-class households in Horthampton, Warrington, Stanley and Reading*" (1915, en colaboración con A.R. Burnett-Hurst)). Otro ámbito en el que fue pionero fue el de la estimación del ingreso nacional, en particular el del estudio de los salarios y de la redistribución del ingreso como una herramienta de la reforma social ("*Three studies on the national income: I.- The division of the product of industry; II.- The change in the distribution of national income; III.- The national income: 1924*" (1919-1927), "*Wages an income in the United Kingdom since 1860*" (1937)). También realizó importantes aportes en el diseño y perfeccionamiento de los números índice ("*Measurement of the precision attained in sampling*" (1926), "*The influence on the precision of index-numbers of correlation between the prices of commodities*" (1926), "*Notes on index numbers*" (1928), "*Family expenditure: A study of its variation*" (1935, en colaboración con R.D.G. Allen)).

Calcagnini, Celio (1479-1541) nació en Ferrara. Fue poeta, filósofo y astrónomo de renombre. En su tratado "*Quomodo cœlum stet, terra moveatur, vel de perenni motu terræ commentatio*", anticipándose a Galileo, introdujo la idea de que la tierra se movía alrededor del sol. Su disertación "*De talorum, tesserarum ac calculorum ludis ex more veterum*" ejerció gran influencia sobre los trabajos de Gerolamo Cardano referidos a la teoría de la probabilidad.

Cantelli, Francesco Paolo (1875-1966) nació en Palermo (italia) y falleció en Roma. En 1899 se graduó en matemáticas en la Universidad de Palermo, especializándose en astronomía. En uno de sus más interesantes trabajo sobre este tema, en base a las indicaciones proporcionadas por el Dante en la "*Divina commedia*", estableció en forma rigurosa la posición de los astros en los años 1300 y 1301, demostrando que el viaje imaginario del Dante había tenido lugar en 1301. Entre 1903 y 1923 se desempeñó como actuario de los Istituti di Previdenza della Cassa Depositi e Prestiti, donde desarrolló importantes investigaciones en matemática financiera y actuarial. Fue en esta época que comenzó sus estudios en teoría de la probabilidad. En 1915, junto con G. Castelnuovo, introdujo los cursos de probabilidades y matemática actuarial en la Universidad de Roma, circunstancia que dio origen a la creación de la Scuola di Statistica e Scienze Attuariali, fundada oficialmente en 1927 y que, en 1935, se unificó con la Scuola Speciale di Statistica (fundada algunos años antes por Corrado Gini) formando la primera Facoltà di Scienze Statistiche, Demografiche ed Attuariali en Italia. En 1930 fundó el Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari, del cual fue editor hasta 1958. Esta publicación fue una de las más importantes en el ámbito de la probabilidad, la estadística y la matemática actuarial, contando entre sus colaboradores a Kolmogorov, Neyman, de Finetti, Lévy y Cramér. Sus contribuciones más importantes en teoría de la probabilidad se refieren a la convergencia estocástica, en particular, a la "*ley uniforme de los grandes números*" y a la generalización de la ley del logaritmo iterado de Kolmogorov. En "*Teoria astratta della probabilità*" (1932) presentó la primera demostración completa y rigurosa de la correspondencia entre la noción de probabilidad y la teoría de la medida. "*Genesi e costruzione delle tavole di mutualità*" (1914) contiene sus avances en el análisis general de las leyes de capitalización.

Caramuel, Juan (1606-1682), nació en Madrid en el seno de familia formada por el ingeniero bohemio Lorenzo Caramuel y Lobkowitz y de la holandesa Catalina de Frisia y falleció en Milán. Siendo muy joven ingresó a la orden Benedictina. Fue alumno de la Universidad de Alcalá de Henares, llegando a ser profesor de la misma. Habiéndose radicado en Escocia, fue designado Vicario General de la Orden Cisterciense para la Gran Bretaña e Irlanda. Posteriormente fue nombrado, Obispo de la Campania y Arzobispo de Taranto por el Papa Alejandro VII. Se destacó por su vasta cultura y su extensa producción académica. Se conocen 262 publicaciones de su autoría, entre las que interesa destacar "*Cursus mathematicus*" (1670) gran parte de la cual está dedicada a la filosofía de la matemática y "*Mathesis biceps vetus et nova*", en la que planteó la posibilidad de constriur sistemas numéricos distintos del decimal y perfeccionó el método de los logaritmos Neperianos.

Carcavi, Pierre de (c.1600-1684) nació en Lyon (Francia) y falleció en París. Su padre, que era banquero, lo orientó hacia la magistratura. Es así que, en 1632, fue nombrado Consejero de Parlamento de Toulouse (donde conoció a Pierre de Fermat). A fin de establecerse en París, compró un puesto de Miembro del Gran Consejo del Reino pero, en 1648, debió venderlo para hacer frente a las deudas de su padre. Obligado por las urgencias económicas, se dedicó, por algún tiempo, a la compraventa de libros raros. Posteriormente con el patrocinio del Ministro Colbert, ejerció importantes funciones de gobierno, en particular, en la biblioteca del Rey, hasta que, a la muerte de aquél, cayó en desgracia ante Luis XIV. En 1666 Colbert fundó una academia paralela a la Academie des Sciences, de la que fue Miembro (junto con Christiaan Huygens, Gilles Personnes de Roverbal, Bernard Frénicle de Bessy, E. Picard, entre otros). Su obra se encuentra contenida, fundamentalmente, en su correspondencia con Huygens, Pierre de Fermat, René Descartes y Amos Dettonville (uno de los seudónimos utilizados por B. Pascal).

Cardano, Gerolamo (o Jerôme Cardan) (1501-1576), hijo del geómetra Fazio Cardano, nació en Pavía (ducado de Milán, hoy Italia) y falleció en Roma. Se graduó en medicina en la Universidad de Padua, logrando rápidamente gran renombre. En 1532 fue nombrado profesor de matemática en la Accademia Palatina de Milán (corresponde a esta época su "*Encomium geometriœ*") y posteriormente en la Universidad de Pavía. En 1539 fue elegido miembro del Colegio de Físicos del Milán. En 1560 fue nombrado profesor de la Universidad de Boloña, ciudad que lo honró con el título de ciudadano honorario. Probablemente las duras acusaciones a que lo sometieron sus contemporáneos se deban a la reprobable conducta de sus hijos (el mayor condenado a muerte por uxoricidio, en Boloña, en 1560 y el menor perseguido por la justicia a instancias de su propio padre). Publicó trabajos sobre medicina, matemática, astronomía, física, juegos de azar, ajedrez, etc., entre los que cabe destacar : "*Practica arithmeticœ et mensurandi singularis*" (1539), en el que trata el problema de la división de apuestas y plantea, por primera vez, una forma rudimentaria de la ley de los grandes números; "*Artis manœ, sive de regulis algebraicis*" (1545), "*Ars magna arithmeticœ, seu liber quadraginta capitulorum et quadraginta questionum*" y "*De regula aliza*" (1570) (si bien ninguno de sus escritos se destacó por su claridad, según sus comentaristas, este último es de "*...una desesperante oscuridad*"), en los que trata de las ecuaciones cúbicas; "*Exœreton mathematicorum*" y "*Opus de proportionibus numerorum*" (contrariamente a lo ocurrido con otros autores de la época, no escribió en italiano vulgar, el latín era para él "*...la condición para alcanzar la inmortalidad*" (Italo Calvino)). Alrededor de 1545, una acusación de Niccoló Tartaglia de actuar de mala fe y de haber plagiado parte de sus trabajos, dio origen a una larga y muy famosa polémica entre ambos. La oscura crónica de esta interminable discusión parece haber sido la siguiente: En 1515 un documento privado escrito por el matemático boloñés Scipione dal Ferro sobre un método de resolución de ciertas ecuaciones de tercer grado, cae en manos de su yerno, el matemático Annibale della Nave quien, aparentemente, dejó que el secreto del descubrimiento se filtrara en los círculos boloñeses. Como resultado de esta situación, Zuanne da Coi (o Colla) y Antón María Florido (o Fior) propusieron el problema a Tartaglia quien obtuvo algunos resultados originales, que comunicó a nuestro matemático "pavese" bajo la promesa de éste de mantenerlos en secreto (dado que iban a ser incluidos por Tartaglia en el "General Trattato di numeri et misure", que habría de publicarse entre 1556 y 1560). De hecho, lo que ocurrió fue que poco tiempo después (y hasta hoy) el método de Tartaglia comenzó a ser citado, en la literatura, como fórmula de Cardano. Más allá de sus indiscutibles dotes intelectuales, fue conocido en su época por sus hábitos excéntricos, por la excesiva acidez de sus críticas y, sobre todo, por su fama de jugador empedernido. De la simbiosis entre el matemático y el jugador surgió su obra más importante, "Liber de ludo aleæ", cuyo manuscrito fue hallado entre sus papeles después de su muerte en Roma y publicado junto con sus demás trabajos en 1663, en Lyon. Si bien su principal interés profesional estaba dirigido a la medicina, también dedicó muchos esfuerzos al perfeccionamiento de las técnicas espiritistas y a la confección de horóscopos. Como apéndice de sus "Libelli" publicó los horóscopos de personajes famosos, escritores y príncipes de la época, entre los que cabe destacar a Nerón, Petrarca, Solimán el Magnífico, el Papa Paulo III, los emperadores Francisco I y Carlos V. Su versión del horóscopo de Jesús (incluido en su comentario a la obra de Galileo) fue declarada herética por la Inquisición, por lo que, en 1570, fue arrestado y despojado de sus derechos a publicar libros, dedicando el resto de su vida a la redacción de su autobiografía ("*De vita propria liber*" y "*De libris propriis et eorum usu*"). En esta obra extraordinaria, de estructura compleja -escrita y reescrita varias veces- "*...intentó determinar las relaciones entre el cuerpo, el alma y las fuerzas que operan en el cosmos*" (Grafton, A. (2000)). Con respecto a su propia experiencia de vida expresa: "*Después que mi madre hubiera intentado abortar sin éxito, vi la luz el 24 de setiembre de 1501 (...) Los lugares principales del horóscopo eran tales como los he descripto en mi carta natal (...) Por lo tanto debería haber nacido monstruoso, es más, era probable que saliera del vientre de mi madre destrozado, y faltó poco. En efecto, nací como muerto y fui arrancado de su regazo. Lo que me devolvió la vida fue un baño en vino caliente, que a cualquier otro hubiera resultado fatal. El trabajo de parto había durado tres días. No obstante, al fin sobreviví. Dado que Júpiter se encontraba en ascendente y Venus dominaba toda la figura, no sufrí lesiones sino en los genitales, por lo que de los 21 a los 31 años no pude hacer el amor y, a menudo, lloraba por mi suerte envidiando a los demás*".

Cauchi, Augustin Louis (1789-1857) nació en París y falleció en Sceaux (Francia). A fin de evitar las consecuencias de la agitación política de la época, toda su familia se trasladó a Arcueil (donde, por la misma razón, también se habían refugiado Laplace y el químico J. Berthollet, fundando una sociedad científica privada que pretendía emular a la Académie de Sciences suprimida por la Revolución). Allí recibió de su padre (hombre de vasta cultura) su primera instrucción. En 1805 ingresó a la École Polytechnique, pasando luego al École des Ponts et Chausées de la que egresó, en 1810, con el título de ingeniero. Ese mismo año fue enviado al puerto de Cherburgo, donde el gobierno napoleónico estaba realizando importantes obras. Ante un quebrantamiento de su salud motivado por el exceso de trabajo, en 1813 retornó a París dedicándose, a partir de ese momento, exclusivamente a la investigación científica. En 1816 obtuvo el premio del Institut de France por su trabajo sobre el tema "*Una masa fluida, originariamente en reposo, fue puesta en movimiento por una causa desconocida; determinar la forma que presentará dicha masa y la velocidad de cada molécula de la superficie de la misma en un momento dado*". En ese mismo año, por voluntad de Luis XVIII, fue admitido como miembro de la Academie des Sciences y fue designado profesor de la École Polytechnique, del College de France y de la Sorbone. Después de la revolución de julio de 1830, habiéndose negado a prestar juramento de fidelidad a la Casa de Orléans, le fueron quitados todos sus cargos en la enseñanza pública. Por este motivo se exilió voluntariamente en Friburgo (Suiza). Al poco tiempo fue designado profesor de física en la Universidad de Turín. En 1833 se trasladó a Praga, desempeñándose como instructor del duque de Bordeaux. En 1838, a su regreso a Francia, le fue restituido su cargo de profesor en el Institut y, después de la revolución de 1848, retornó a la cátedra de la Sorbone. Una de las características que marcaron su vida fue su dedicación a las obras de caridad. Por su fecundidad y variedad, su producción sólo es comparable a la de Leonhard Euler. Durante sus 47 años de labor ininterrumpida, publicó 789 trabajos entre los que cabe mencionar: "*Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite de transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment"(1812), "Mémoire sur les intégrales definies*" (1814), "*Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique*" (1821), "*Leçons sur les applications du calcul infinitésimal á la géometrie*" (1826-1828), "*Excercises de mathématique*" (1826-1830), "*Résumé analytiques*" (1833), "*Excercises d'analyse et de physique mathématique*" (1840-1847). Entre sus innumerables discípulos merecen ser mencionados: Pierre-Alphonse Laurent, Victor Puiseux, C.A.A. Briot, J.C. Bouquet y el matemático italiano Francesco Faá di Bruno.

Chebychev, Pafnuty Lvovich (o **Tshébysheff** o **Chebyshev** según sea la transliteración del original cirílico) **(1821-1894)** nació en Okatovo (Rusia) y falleció en San Petersburgo. Se graduó en matemática en la Universidad de Moscú. En 1847 ingresó como docente en la Universidad de San Petersburgo, en la que, a partir de 1860, llegó a ser Profesor Titular. En 1859 fue nombrado Miembro de la Academia de Ciencias de San Petersburgo, y en 1860 Miembro de la Academie des Sciencies de París. Sus contribuciones a la teoría de la probabilidad constituyen una porción relativamente pequeña de su obra en matemática y mecánica aplicada. Fue uno de los exponentes más destacados de la tradición probabilística rusa (basada, fundamentalmente, en la obra de M.V. Ostrogradskiĭ y V.Y. Bunyakovskiĭ) e, indudablemente, puede ser considerado como el fundador y la figura central de la importante escuela matemática de San Petersburgo (cuya influencia en el desarrollo de la matemática del imperio ruso, fue enorme). Entre sus discípulos más importantes se destacan A.N. Korkin, E.I. Zolotarev, A.A. Markov, G.E. Voronoi, A.M. Lyapunov, D.A. Grave y V.A. Stelkov. Ya en sus primeras contribuciones a la teoría de la probabilidad, que datan de 1846, se pueden hallar los lineamientos que signarían toda su obra: la cuestión de la estimación, para un valor de n finito, del desvío de una cantidad con respecto a un límite, cuando $n \to \infty$. En 1867 obuvo la desigualdad (en forma independiente de la demostración publicada en 1853 por I.J. Bienaymé), conocida hoy como de Bienaymé-Chebychev, la cual constituyó una herramienta fundamental para las sucesivas generalizaciones de la ley de los grandes números de J. Bernoulli. En 1890/91 planteó por primera vez el uso del método de los momentos en la generalización del teorema central del límite para variables no-idénticamente distribuidas, y señaló la posibilidad de mejorar su demostración mediante la utilización de los hoy conocidos como polinomios de Chebychev-Hermite.

Chuprov, Alexander Alexandrovich (o **Tschuprow** según sea la transliteración del original cirílico) **(1874-1926)** nació en Mosal'sk (Rusia) y falleció en Ginebra (suiza). En 1896 se graduó en la Facultad de Física y Matemática de la Universidad de Moscú con una disertación sobre la teoría de la probabilidad como base de la estadística teórica. Luego, influido por su padre, quien ejerció durante muchos años como profesor de economía política en la Universidad de Moscú, viajó a Alemania para estudiar economía. Durante este período se relacionó con Ladislau von Bortikiewicz y con Wilhelm Lexis. Entre 1897 y 1901 asistió a la Universidad de Estrasburgo donde obtuvo su doctorado con la tesis "*Die Feldgemeinschaft, eine morphologische Unrtersuchung*" (bajo la dirección de G.F. Knapp). En 1902 se trasladó a la Universidad de San Petersburgo, donde fundó la Sección Económica del Instituto Politécnico y se desempeñó como profesor de estadística hasta 1916. Entre sus discípulos de este período cabe mencionar a O.N. Anderson y N.S. Chetverikov (o Tschetwerikoff). En 1909 fue publicada su tesis doctoral en la Universidad de Moscú. Este trabajo, que incluye los principios de la teoría de la probabilidad en su interpretación frecuencista a partir de la ley de los grandes números y una revisión de la teoría de la estabilidad de las series estadísticas de Lexis y Bortkiewicz, ejerció una enorme influencia entre los probabilistas rusos. En 1917 viajó de vacaciones a los países escandinavos y, a causa de la revolución bolchevique, nunca más regresó a Rusia. El período de exilio se dividió entre las ciudades de Dresde y Praga, donde falleció.

Condorcet, Marie Jean Antoine Nicolas Caritat, Marqués de (1743-1794) nació en Ribernout (Francia) y falleció en Bour-la-Reine. Fue matemático, filósofo, historiador, economista y político (de acuerdo con Pearson, K. (1978), "*Sin duda hubo mejores matemáticos, mejores economistas, mejores historiadores, mejores filósofos y mejores políticos que Condorcet, pero difícilmente haya existido un hombre que haya sido tan buen matemático, como buen economista, como buen historiador, como buen filósofo y como buen político*"). Si bien sus publicaciones en matemáticas carecen hoy de importancia, en su momento llamaron la atención de científicos dela talla de Jean-Baptiste Le Rond D'Alembert, A. Fontaine y J.L. Lagrange. Fue amigo de Turgot y de Voltaire. En 1769 fue nombrado Miembro Asociado y, en 1773, Secretario Perpetuo de la Académie des Sciences. como parte de las tareas inherentes a este cargo, fue el encargado de la redacción de las notas necrológicas de los socios fallecidos, las cuales, colecionadas en varios volúmenes, le permitieron acceder a la Académie Française. En 1774 fue nombrado Inspecteur des Monnaies, y Turgot -que era Ministro de Finanzas- le encomendó varias misiones científicas. En 1782 fue elegido Miembro de la Académie Française. Como Diputado de la Asamblea Legislativa, fue miembro del Comité de Educación Pública. Fue encargado por la Convención Nacional para preparar el proyecto girondino de la Constitución. En 1793 -siguiendo la suerte de todos los girondinos- fue perseguido. A fin de escapar a la guillotina, huyó y vivió varios meses escondido en casa de amigos, vagando por los alrededores de París bajo el nombre de Pierre Simon. Finalmente, en 1794, fue detenido, falleciendo en circunstancias poco claras, en la prisión de Bourg-la-Reine (aparentemente, a fin de evitar la vergüenza que implicaba la ejecución pública, se suicidó). Paradójicamente en ese mismo año, la Convención Nacional aprobó la publicación de "*Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'espirit humain*" (probablemente su obra más importante), elaborada en los meses que pasó prófugo, que tuvo una amplia difusión y ejerció una influencia directa sobre pensadores como A. Comte. Constituyó un ejemplo típico del sector ilustrado de la nobleza que prestó apoyo a la Revolución. Puede ser considerado el último de los enciclopedistas. Tomó parte en la publicación del "*Supplément à l'Encyclopédie*" y, muy particularmente, en la recapitulación de su parte matemática (1784-1785). Sus contribuciones "*Essai sur l'application de l'analyse á la probabilité des décisions rendues á la pluralité des voix*" (1785) y "*Sur les* *évènements futurs*" (1803), estuvieron dedicadas al desarrollo de la que se llamó matemática social, consistente en la aplicación del cálculo de probabilidades a la descripción y predicción de los fenómenos humanos, y que comprendía una descripción estadística de las sociedades, una ciencia económica y una teoría combinatoria y probabilística de las operaciones intelectuales (este último texto no ha sido conservado). Llegó a construir modelos estadísticos de cuerpos electorales, que permitían apreciar la probabilidad de que las decisiones colectivas se correspondieran con las respuestas correctas a los problemas sociales (estas cuestiones relacionadas con el problema de la formación de una opinión colectiva fueron posteriormente replanteados por K.J. Arrow y G.Th. Guibaud). Un interesante análisis de las nociones básicas y los principios de la teoría de la probabilidad se encuentran en su "*Memoire sur le calcul des probabilités*" (1784).

Côtes, Roger (1682-1716) nació en Burbage (Leicestershire) y falleció en Cambridgeshire. En 1699 ingresó al Trinity College de Cambridge. En 1706 obtuvo el cargo de profesor de la Cátedra Plumiana de astronomía en Cambridge y, en 1711, fue nombrado Miembro de la Royal Society. Fue gran amigo de I. Newton y el encargado de la segunda edición de sus "*Principia*". Sus manuscritos fueron editados en forma póstuma (1722), por su primo Robert Smith (quien lo sucedió en la Cátedra Plumiana), en dos partes: "*Harmonia mensurarum, sive analysis et synthesis per rationum angulorum mensuras promotæ*" y "*Opera miscellanea æstimatio errorum in mixta mathesi per variationes partium trianguli plani et spherici*" (en la que figura su teoría sobre la estimación de errores aleatorios en mediciones trigonométricas).

Cournot, Antoine Augustin (1801-1877) nació en Gray (Alta Sajonia) y falleció en París. Hijo de un notario, proviene de una familia de granjeros radicados en Franche-Comté desde mediados del siglo XVI. Curso sus primeros estudios en colegios de Gray y Besançon. A su egreso, entre 1816 y 1820, se dedicó, en forma autodidacta, al estudio de los trabajos de Laplace y Leibniz. En 1821 fue admitido como alumno en la École Normale Supérieure. Producida la clausura de la École al año siguiente, permaneció en París, obteniendo su grado en ciencias en 1823, en la Sorbonne (donde fue discípulo de Sylvestre Françqos Lacroix) . En ese mismo año ingresó como asesor literario al servicio del Mariscal Gouvion Saint-Cyr (quien deseaba completar algunos manuscritos inconclusos) y como tutor de su hijo. En 1829 recibió el doctorado en ciencias con una tesis sobre mecánica ("*Mémoire sur le mouvement d'un corps rigide soutenu par un plan fixe*"). Tambiés estudió leyes. Algunos trabajos sobre esta materia (principalmente "*Mémoire sur les applications du calcul des chances à la statistique judiciaire*" (1838)) llamaron la atención de S.D. Poisson, por cuya recomendación fue nombrado profesor de análisis matemático en la Universidad de Lyon. Además de su desempeño docente, se destacó por su tarea en la administración universitaria: fue rector de la Académie de Grenoble (1835-1853) y de la Académie de Dijon (8154-1862). A partir de 1862 regresó a París y se retiró definitivamente de la función pública. Poco antes de su fallecimiento había sido propuesto como miembro del Institut de France. Hacia el final de su vida había quedado prácticamente ciego. Su obra abarcó materias como economía ("*Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*" (1838), "*Principes de la théorie des richesses*" (1863), "*Revue sommaire des doctrines écnomiques*" (1877)), filosofía ("*Traité de l'enchainement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire*" (1861), "*Matérialisme, vitalisme, rationalisme: Études des donées de la science en philosophie*" (1875)), álgebra y cálculo infintesimal ("*Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal*" (1841), "*De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie*" (1847)). Su contribución a la teoría de la probabilidad está contenida en "*Exposition de la théorie des chances ete des probabilités*" (1843), en la que figura su definición de estadística como "*...aquella ciencia vinculada con la colección y coordinación de numerosos hechos de cada clase, de modo tal de obtener relaciones numéricas que sean sensiblemente independientes de las anomalías del azar, que manifiesten la existencia de causas que operan uniformemente y cuyos efectos han sido, sin embargo, confundidos con otros efectos accidentales*".

Craig, John (c.1663-1731) nació en Hoddam, Dumfries, Escocia y falleció en High Holborn (Londres). A pesar de su amistad con I. Newton, fue un seguidor de las ideas de Leibniz, cuyos métodos utilizó en su "*Methodus figurarum lineis rectis et curvis comprehensarum quadraturas determinandi*" (1685). Luego, según resulta de su "*De calculo fluentium*" (1718), se orientó hacia los procedimientos Newtonianos. La obra que aseguró su celebridad fue "*Theologiæ christianæ principia matematica*" (1699), en la que, a partir del supuesto de que la confiabilidad de los conocimientos transmitidos de generación en generación disminuye en relación directa con el cuadrado del tiempo transcurrido, demuestra que la fe en la veracidad de los milagros narrados en los Evangelios es decreciente y que habrá de anularse en el año 3150 (pero también demuestra que en esa fecha el mundo habrá dejado de existir).

Cramer, Gabriel (1704-1752) nació en Ginebra en el seno de una familia de gran cultura y falleció en Bagnols-sur-Cèze (Francia). En 1722 se doctoró en la Academia de dicha ciudad. En 1724 fue designado profesor de matemática de la misma y, posteriormente como profesor de filosofía. En 1731 obtuvo una mención de la Académie des Sciences de París, en un concurso sobre un tema de astronomía (en el cual el ganador fue Johann Bernoulli). Fue el editor de los "*Elementa Matheseos universæ*" de C. Wolf, de las obras de Jakob y Johan Bernoulli, y de la correspondencia entre este último y G.W. Leibniz. Su obra más importante fue "*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*" (1750).

Cramér, Harald (1893-1985) nació y falleció en Estocolmo. Estudió Matemática y Química en la Universidad de dicha ciudad, en la que, en 1917, obtuvo su doctorado en Matemática Pura. Se desempeñó como Profesor Asistente de Matemática en dicha Universidad entre 1917 y 1929, año en que fue nombrado Profesor de Estadística Matemática y de Matemática Actuarial, permaneciendo en dichos cargos hasta 1958. En 1950 fue nombrado Presidente de la Universidad de Estocolmo y en 1958, Canciller de la Universidades Suecas. Fue Profesor Invitado, entre otras, en las universidades de París (1937), Princeton (1946), Yale (1947), Chapel Hill (1947), Moscú (1967). En 1954 fue nombrado Miembro Honorario de la Royal Society y en 1972 fue premiado con la "Guy Medal in Gold" por dicha Sociedad. Fue distinguido con títulos honorarios por las universidades de Princeton (1947), Copenhage (1950), Estocolmo (1964), Helsinki (1971), Edimburgo (1972), Calcuta (1977) y París (1977). Durante toda su vida desarrolló una doble actividad: como investigador en matemática y como consultor en materia actuarial. En este último tema puede ser considerado un pionero en el tratamiento de la teoría del riesgo mediante procesos estocásticos. En lo que hace a su tarea como matemático, cabe distinguir su obra en teoría de números y en teoría de la probabilidad, en la que se destacan sus contribuciones sobre la desigualdad para la varianza de un estimador insesgado (conocida como de Cramér-Rao), la descomposición de series cronológicas estacionarias (conocida como descomposición de Cramér-Wold) y las factorizaciones de la función Normal. Escribió dos libros ("*Random variables and probability distributions*" (1937) y "*Mathematical methods of statistics*" (1946)) que ejercieron una notable influencia en el desarrollo de la estadística y de la teoría de la probabilidad.

D'Alembert, Jean-Baptiste Le Rond (1717-1784) nació en París. Su madre, la escritora e ilustre cortesana en los años de la regencia del duque de Orléans Claudine-Alexandrine de Guérin, marquesa de Tencin, lo abandonó poco después de su nacimiento en las escalinatas de la iglesia de Saint Jean Baptiste Le Rond (de donde tomó su nombre, el origen de su apellido es desconocido). Su padre, el general de artillería Louis-Camus Destouches-Canon mostró más interés por el niño que su madre, lo recuperó y lo dio en adopción a Madame Rousseau, la mujer de un vidriero de París llamado Alembert, proveyendo a su sustento durante toda su vida. A su fallecimiento, ocurrido en 1726, le aseguró una renta vitalicia de 1200 francos anuales. Gracias a su apoyo pudo cursar estudios en el Colegio Jansenista de las Cuatro Naciones (vedado a cualquiera que no acreditara un origen noble). En 1735 obtuvo el grado de Bachiller en la Facultad de Ciencias Jurídicas de la Universidad de París. No ejerció como abogado y, en realidad, dedicó toda su vida exclusivamente al estudio. En 1742 fue elegido Miembro de la Académie des Sciences. A instancias de Daniel Didérot, escribió el Discurso Preliminar de la célebre "*Encyclopédie Méthodique, ou Dictionnaire Raisonné des sciences, des arts et des métieres*" (lo que le permitió el acceso a la Académie Française). Fue, además, el redactor de los artículos sobre matemática de la "*Encyclopédie*" (entre los que se destacan los siguientes trabajos sobre teoría de la probabilidad: "*Advantege*", "*Basette*", "*Carreau*", "*Die*", "*Lotterie*", "*Croix ou pile*", publicados entre 1751 y 1757). En 1763 Federico II de Prusia le ofreció la Presidencia de la Academia de Ciencias de Berlín (donde trabajaba Leonhart Euler) y Catalina II de Rusia el cargo de instructor del principe heredero, pero rechazó ambos cargos, prefiriendo permanecer en París por el resto de su vida. Fue, sin duda, el más eminente matemático de Francia durante la primera mitad del siglo XVIII. Sus principales obras fueron "*Traité de dynamique*" (1743) y "*Réflexions sur la cause générale des vents*" (1746). Sus contribuciones más importantes en el ámbito de la teoría de la probabilidad están contenidas en "*Reflexions sur le calcul des probabilités*" (1761), "*Sur l'application du calcul des probabilités a l'inoculation de la petit vérole*" (1761), "*Sur le calcul des* *probabilités*" (en "*Opuscules mathématiques*", 1780). Debe destacarse la importantísima tarea que desarrolló para el mejoramiento de la enseñanza pública en Francia.

de Fermat, Pierre (1601-1665) nació en Beaumont de Lomange en el seno de una familia de comerciantes adinerados y falleció en Castres. Estudió leyes en las universidades de Toulouse y Orleáns y matemática en la Universidad de Burdeos (donde tomó contacto con los trabajos de François Viète). Trabajó durante algún tiempo como Encargado del Registro de Toulouse, hasta que fue nombrado Consejero Real del Parlamento de dicha ciudad, puesto que ocupó por el resto de su vida. Puede ser considerado como uno de los exponentes más acabados del "matemático aficionado" (debe tenerse en cuenta que fue a través de estos "amateurs" que se llevó a cabo la mayor y mejor labor de investigación en los siglos XVII y XVIII). Igual que los demás matemáticos de su época, no fue proclive a la edición de sus trabajos, de modo que la mayor parte de sus publicaciones son póstumas. sus investigaciones sobre geometría analítica -cuyo desarrollo logró en forma independiente y contemporáneamente a René Descartes- se publicaron recién en 1679 (dado que Descartes había publicado su "*Géometrie*" en 1637, esta circunstancia hizo que perdiera la co-paternidad de lo que hoy se conoce, precisamente, como geometría Cartesiana), por obra de su hijo Samuel, quien también editó gran parte de su correspondencia científica. Sus estudios sobre cuadraturas y su método de las tangentes fueron muy importantes para el desarrollo del incipiente cálculo infinitesimal (el propio Isaac Newton reconoció haber adoptado ideas de este método para sus trabajos sobre cálculo diferencial). También fueron importantes las aplicaciones de sus métodos infinitesimales al estudio de los problemas de óptica, entre los que se destaca el hoy conocido como principio de Fermat sobre la trayectoria a recorrer por un rayo de luz entre dos puntos (acerca de este tema, sostuvo una fuerte disputa con Descartes que concluyó en una buena amistad entre ambos). Su contribución fundamental a la teoría de la probabilidad está contenida en su correspondencia con Blaise Pascal (1654). No obstante la trascedencia de los trabajos mencionados, el lugar preponderante que ocupa en la historia de la matemática se debe a sus resultados en teoría de números (es considerado, en realidad, el creador de la moderna teoría de números) a partir de los trabajos de Diofanto de Alejandría.

de Finetti, Bruno (1906-1985) nació en Innsbruck de padres italianos y falleció en Roma. En 1927 se graduó en matemática aplicada en la Universidad de Milán. Por recomendación de Corrado Gini formó parte del Istituto Nazionale di Statistica hasta 1931. Fue profesor de análisis matemático, matemática financiera y actuarial y cálculo de probabilidades en las universidades de Trieste y Roma. En 1946 fue designado profesor de Economía y, posteriormente, director del Istituto di Calcolo delle Probabilità en la Universidad de Roma. Sus principales contribuciones -contenidas en más de 300 publicaciones- fueron a la estadística, la matemática financiera y actuarial, la economía y la informática. En el período entre 1926 y 1930 -que se destaca por su intensa actividad creadora- estableció los fundamentos de la interpretación subjetivista de la probabilidad (uno de sus aforismos preferidos, que define la quintaesencia de esta interpretación dice "*la probabilidad no existe*"). Sus principales obras en esta materia fueron "*Teoria delle probabilità*" (1970) y "*Probability, induction and statistics*" (1972). Fue miembro del International Statistical Institute, del Institute of Mathematical Statistics, de los institutos de actuarios francés y suizo y Socio Nacional de la Academia dei Lincei.

de Moivre, Abraham (1667-1754) nació en Vitry (Francia) en el seno de una familia protestante y falleció en Londres. Recibió una esmerada educación en humanidades y en matemáticas (se dice que leyó el "De ratiotiniis in ludo aleæ" de Huygens a la edad de 16 años) en la Universidad Protestante de Sedan (a la que ingrtesó a lo 11 años) y en la Universidad de Saumur. A partir de 1684 estudió matemáticas y física en la Sorbonne con Jacques Ozanam. Cuando en 1685 -después de la revocación del edicto de Nantes- se intensificó la persecución de los hugonotes, fue internado en un establecimiento religioso a fin de persuadirlo a cambiar su credo. Después de tres años fue liberado e inmediatamente se exilió en Ingaterra donde se desempeñó como tutor en matemáticas de los hijos de ciudadanos adinerados (su padre era cirujano y su familia no poseía ningún título nobiliario, el apellido original era Moivre, el "de" fue agregado por él mismo cuando se produjo su salida de Francia). En 1692 conoció a Edmond Halley, quien lo introdujo en el círculo científico de I. Newton, con quien mantuvo una estrecha relación hasta su muerte. Como continuador de la obra matemática de éste, en 1695 publicó su primer trabajo sobre el método de fluxiones y sus aplicaciones y, en 1697 fue elegido miembro de la Royal Society. También fue miembro de las academias de París y Berlín. En 1703 sostuvo una agria (y muy publicitada) disputa científica con George Cheyne, también miembro de la Royal Society y autor de un mediocre trabajo titulado "*Fluxionum methodus inversa, sive quantitatum fluentium leges generationis*". Esta controversia dio origen a la publicación de "*Animadversiones in D. Georgii Cheynaei tractatum de fluxionum methodus inversa*" y a su correspondencia don Johann (I) Bernoulli, la cual se prolongó hasta 1714, año en que la famosa disputa entre Newton y Leibniz por la paternidad del cálculo infinitesimal los colocó en bandos opuestos. Falleció en la pobreza a los 81 años. Todhunter, I. (842) escribió en su homenaje: "*De la larga lista de hombres ennoblecidos por el genio, la virtud y la mala fortuna que han hallado asilo en Inglaterra, sería difícil encontrar alguno que haya honrado más a su país de adopción que de Moivre*". Su obra matemática está contenida en 15 trabajos publicados entre 1695 y 1746. Dado su escaso éxito para obtener una cátedra de matemática pura, a partir de 1708 se dedicó cada vez más a las aplicaciones actuariales y a la teoría de la probabilidad, lo que le permitió aumentar sus ingresos actuando como asesor de jugadores y aseguradores (su oficina funcionaba en el Slaughter's Coffee House de Londres). Con respecto a la teoría de la probabilidad, cabe destacar "*De mensura sortis, seu, de probabilitate eventuum in ludis a casu fortuito pendentibus*" (1712), "*The doctrine of chances: or, a method of calculating the probability of events in play*" (1718) y "*Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*" (1730), en cuyo suplemento ("*Approximatio ad summam terminorum binomii $(a+b)^n$ in seriem expansi*") figura la demostración del primer teorema central del límite. En lo que se refiere a la matemática actuarial, su trabajo más importante fue "*Annuities upon lives*", publicado en 1725.

de Montmort, Pierre Rémond (1678-1719) nació en París en el seno de una familia pertenenciente a la nobleza francesa y falleció en París. Estudió filosofía Cartesiana y teología con Nicolas de Malebranche. En sus estudios de matemática fue un autodidacta. En 1706, después de haber ejercido por algunos años la canongía de Notre Dame (heredada de su hermano mayor) se casó y se retiró a sus dominios de Montmort donde permaneció el resto de su vida. En 1715 fue elegido Miembro de la Royal Society y, en 1716, Miembro de la Academie des Sciences. Mantuvo una amistosa relación científica con G.W. Leibniz, I. Newton y Johann y Nikolaus Bernoulli (parrte de la correspondencia intercambiada con estos autores figura como quinta parte de la segunda edición, significativamente ampliada, del "*Essai d'analyse sur les jeux de hazard*" (1713)). En 1715 fue elegido miembro de la Royal Society y en 1716, miembro asociado (dado que no residía en París) de la Académie Royales des Sciences. Leibniz lo eligió como su representante ante la comisión formada por la Royal Society para dirimir la controversia sobre la prioridad en el descubrimiento del cálculo diferencial e integral (curiosamente favoreció a Newton en la disputa). Su contribución a la teoría de la probabilidad está contenida en el "*Essai d'analyse sur les jeux de hazard*" (1708) y está relacionada con el problema de la comparación de pares (en particular, vinculada con juegos de cartas como el "rencontre", el "treize" y el "snap") en el cual una sucesión de elementos a los cuales se ha asignado un orden específico, se compara con una sucesión de elementos ordenados aleatoriamente (del tratamiento de este problema surgió lo que podría considerarse como la primera obtención de un límite exponencial en la teoría de la probabilidad). Trabajo con Johann Bernoulli en el problema de los puntos planteado por Pascal y Fermat y con Nikolaus Bernoulli en la cuestión de la duración de un juego en el problema de la ruina de los jugadores (respecto de la cual obtuvo una solución posiblemente anterior a la de de Moivre). Al momento de su fallecimiento, se encontraba dedicado a la redacción de una historia de la matemática.

Déparcieux, Antoine (1703-1768) nació en Clotet-de-Cessons y falleció en París. Fue hijo de un agricultor de muy escasos recursos. Su precocidad indujo a su familia (en particular, a su hermano Pierre) a inscribirlo en el colegio jesuita de Alés, donde obtuvo rápidos progresos en ciencias exactas. En 1730, con la asistencia económica del señor de Montcarville, ingresó en la Universidad de París. Inmediatamente después de la edición de sus "*Tablas trigonométricas y de funciones astronómicas*" (1741-1742), se publicó su obra más importante: "*Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine*" (1746), por la cual fue elegido miembro de la Académie Royale des Sciences. Esta memoria está referida al cálculo del precio de rentas y a la construcción de tablas de mortalidad utilizando los registros de la parroquia de St. Sulpice e, igual que Edward Halley, los datos sobre nacimientos y fallecimientos en la ciudad de Breslau. En 1760 se publico "*Addition à l'essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine*", que no agregó muchas ideas novedosas respecto de la memoria de 1746. Debe tenerse en cuenta que existió otro Antoine Déparcieux (conocido como "Déparcieux el joven"), sobrino del anterior, nacido en 1753 y fallecido tempranamente a la edad de 46 años debido, según Pearson, K. (1978), a su "... *deplorable hábito de trabajar inmediatamente después de las comidas*" (es decir, como diría la brujita del 76, ¡por no dormir la siesta!).

de Witt, Jan (1625-1672) nació en Dordrecht (Holanda) en el ámbito de una familia burguesa. Estudió derecho en la Universidad de Leiden y, una vez graduado, se estableció en Le Hague. Su designación, en 1650, como secretario del Concejo y diputado de su ciudad natal marcó el comienzo de una notable carrera política que culminó con su nombramiento como Primer Ministro, en 1653 (a la edad de 28 años). Como líder del partido republicano representó a la oposición al Príncipe de Orange. Durante el período de relativa paz comprendido entre 1654 y 1665, caracterizado por la feroz competencia marítima y comercial con Inglaterra, condujo su ministerio con una gran habilidad diplomática, logrando consolidar las finanzas públicas. Posteriormente la perspectiva de una guerra con Francia generó la necesidad de incrementar los fondos públicos, lo que trajo aparejado una aumento en los impuestos y un proyecto de desarrollo de las rentas vitalicias. A este respecto, en 1671, publicó "*Waerdye van Lyf-Renten naer proportie van Los-Renten*" (redescubierto accidentalemente por Bieren de Haan y reeditado en 1879 por la sociedad Matemática de Amsterdam). Su principal contribución en matemáticas fue "*Elementa linearum curvarum*", escrita alrededor de 1650 y publicada en la "*Exercitationum Mathematicarum*" de Franz van Schooten (quien era profesor en la Universidad de Leiden) en 1657. Fallleció en Le Hague (Holanda) a manos de una turba enfurecida, en un confuso episodio originado en una falsa acusación de intento de asesinato del príncipe de Orange sobre su hermano menor Cornelis.

Edgeworth, Francis Ysidro (1845-1926) (de acuerdo con Fitzpatrick, P.J. (1960), el nombre original era Ysidro Francis) nació en Edgeworthstown (condado de Longford, Irlanda) y falleció en Oxford. Su madre era hija de un exiliado político español (probablemente de esta circunstancia provenga su segundo nombre). Estudió en el Trinity College de Dublin y en el Balliol College de Oxford, del cual egresó con un grado en Litteræ Humaniores. Fue profesor de lógica y de economía política en el King's College de Oxford y, en 1891, fue designado Miembro del All Souls College, en el cual permaneció por el resto de su vida. Se desempeñó, desde 1891, como editor del Economic Journal (en los últimos años de su vida compartió este cargo con J.M. Keynes). En 1907 recibió la Guy Medal de la Royal Statistical Society, cuya presidencia ejerció en 1912. En 1922 fue nombrado profesor emérito en Oxford, presidente de la Sección Economía de la British Association y vicepresidente de la Royal Economic Society. Fue miembro de la British Academy. Sus principales contribuciones a la economía están contenidas en "*Mathematical Psychics: An essay on the application of mathematics to the moral sciences*" (1881) y en "*Papers related to political economy*" (1891-1921). En cuanto a sus aportes a la teoría de la probabilidad cabe mencionar: "*The method of least squares*" (1883), "*'A priori' probabilities*" (1884), "*The philosophy of chance*" (1884), "*Molecular statistics*" (1921).

Euler, Leonhard (1707-1783) nació en Basilea y falleció en San Petersburgo. Su padre, que era pastor calvinista, fue amigo de Jakob Bernoulli. Estudió teología en la Universidad de Basilea pero, a partir de los 17 años, se dedicó al estudio de la matemática. Fue discípulo del "irascible" Johan (I) Bernoulli de quien recibió los primeros conocimientos en esta materia. Compartió una gran amistad con Daniel y Nikolaus Bernoulli (hijos de Johan). Fueron ellos quienes -al intentar sin éxito acceder a un cargo de profesor en la Universidad de Basilea- lograron que, en 1727, fuera nombrado miembro asociado a la Sección Médica de la Academia de Ciencias de San Petersburgo. Con motivo de la complicada situación política de la época, sus años de estadía en Rusia no fueron muy felices (téngase en cuenta que su arribo a Rusia coincidió con el fallecimiento de la zarina Catalina I, viuda del zar Pedro "El Grande"). En 1733, al regreso de Daniel Bernoulli a Basilea, lo sucedió como miembro de la Sección Matemática de la Academia de Ciencias de San Petersburgo. En 1735, como consecuencia de un exceso de trabajo, perdió la visión de su ojo derecho. Al año siguiente se publicó uno de sus grandes tratados: "Mecánica" (de acuerdo con muchos autores, esta obra fue a la mecánica como la geometría analítica de Descartes fue a la geometría griega). Cansado de la situación política imperante en Rusia, aceptó, en 1741, la invitación de Federico II "El Grande" de Prusia para incorporarse a la Academia de Ciencias de Berlín. Desgraciadamente, debido a sus desavenencias con el emperador quien, a pesar de la cantidad, calidad y belleza de su producción matemática, nunca lo apreció (lo llamaba, con crueldad, "cíclope matemático"), su estadía en Berlín tampoco fue muy feliz. Es así que, dada la relativa tranquilidad política que se vivía en ese momento en Rusia, decició, en 1766, aceptar la invitación de la emperatriz Catalina "La Grande" para reincorporarse a la Academia de Ciencias de San Petersburgo. En ese mismo año, debido a una afección de cataratas, sufrió un proceso de pérdida de la visión de su ojo sano. A pesar de este grave percance su producción científica no disminuyó: comenzó a utilizar una pizarra donde podía escribir con grandes caracteres y a dictar sus memorias a sus hijos (esto, probablemente, hizo que sus trabajos ganaran en calidad pedagógica). En 1771 un incendio en el cual casi pierde la vida, destruyó su biblioteca. En 1776, después de someterse a una complicada intervención quirúrgica, recuperó la vista por un día y, a partir de ese momento, su ceguera fue definitiva. Fue el autor más prolífico de toda la historia de la matemática. Cuando en 1909 la Asociación Suiza de Ciencias, en colaboración con numerosas asociaciones matemáticas de distintos países, decidió publicar sus obras completas, editó 80 volúmenes y no logró abarcar la totalidad de sus trabajos. En su obra se destacan los grandes tratados: "Introductio in "*Analysis infinitorum*" (1748), "*Institutiones calculi differentialis*" (1755), "*Institutiones calculi integralis*" (1768) y la ya mencionada "*Mecanica*". En el ámbito de la teoría de la probabilidad y sus aplicaciones merecen ser mencionadas las memorias "*Sur la multiplication du genre humain*" (1750-1755), "*Solution d'une question trés difficile dans le cacul des probabilités*" (1753), "*Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre*" (1753), "*Sur la probabilité des séquences dans la lotterie Génoise*" (1763), "*Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain*" (1767) y "*Solutio quarundam qœstionum difficiliorum in calculo probabilium*" (1785). Su producción científica continuó hasta el día de su fallecimiento. M.-J.N. Caritat-Condorcet, en su "*Éloge de Monsieur Euler*", escribió: "*El 7 de setiembre de 1783, después de haber disfrutado haciendo unos cálculos sobre la ley de los globos ascendentes, en su gran pizarra (...), almorzó con Lexell y su familia hablando del planeta de Herschel y los cálculos que determinaban su órbita. Poco después pidió que le acomodaran a su nieto entre lo brazos; mientras jugaba con el niño y tomaba su té, la pipa que sostenía en su mano cayó y cesó de calcular y de respirar*".

Fechner, Gustav Theodor (1801-1887) nació en Gross-Särchen (Alemania). En 1817 ingresó a la Facultad de Medicina de la Universidad de Leipzig, ciudad en la que permaneció por el resto de su vida. Sus estudios en medicina lo condujeron al excepticismo en materia religiosa y al determinismo inherente a la mecánica clásica. En 1820, debido a la influencia de los "Naturphilosophen" (entre los que cabe destacar a Lorenz Oken, Friederich Wilhelm Josef von Schelling y Heinrich Steffens) se enroló en la correiente de la filosofía natural. En 1827 fue becado para estudiar física en París con Jean-Baptiste Biot, Louis Jacques Thénard y André-Marie Ampère y, en 1834, fue designado profesor de física en la Universidad de Leipzig. Durante este período su principal medio de subsistencia fue la traducción del francés de libros de texto científicos (en particular, de Biot y Thénard). Las sucesivas revisiones de estas traducciones fueron tan sustanciales que los textos terminaron por perder cualquier similitud con los originales franceses, y pueden ser considerados como obras propias. Esta tarea fue de suma importancia en la introducción de la ciencia matemática francesa en Alemania y en la consecuente reforma de su ciencia física. Sus investigaciones en el campo de la física están contenidas en más de 30 trabajos y numerosos libros. Entre 1840 y 1843 sufrió una profunda depresión que le ocasionó una ceguera temporaria. Esta circunstancia le provocó la pérdida de su cátedra de física e hizo que, a partir de 1846 y por el resto de su vida, se dedicara al estudio de la filosofía en la Universidad de Leipzig. Corresponden a este período "*Über das Causalgesetz*" (1849), "*Über die physikalische und philosophische Atomenlehre*" (1855), "*Elemente der Psychophysic*" (1860) y "*Zend-Avesta, oder über die Dinge des Himmels und des Jenseits*" (1851) (su obra más importante en el ámbito de la filosofía). Por su parte, "*Über das Causalgesetz*" (1849), "*Die mathematische Behandlung organischer Gestalten und Processe*" (1849) y "*Kollektivmasslehre*" (completada por G.F. Lipps y publicada en forma póstuma por la Real Academia Sajona de Ciencias, en 1897) contienen los estudios para el desarrollo de un lenguaje matemático-probabilístico-estadístico afín a su interpretación de la aleatoriedad-con-causalidad. En particular, los estudios realizados por el astrónomo alemán Heinrich Bruns y el probabilista austríaco Emanuel Czuber sobre esta última obra, fueron los que condujeron a R. von Mises a la interpretación de la probabilidad como límite de la frecuencia relativa de la ocurrencia de un fenómeno.

Fibonacci, Leonardo (o Leonardo Pisano) (c.1170-1250) nació y falleció en Pisa (?). Sus datos biográficos son muy escasos y las fechas muy discutidas (debe tenerse en cuenta que hasta el 1° de enero de 1750, en Pisa el año calendario comenzaba el 25 de mayo y se encontraba retrasado en un año con respecto al cálculo actual, y que ese retraso de un año, dos meses y veinticinco días no siempre fue considerado por los historiadores). Se sabe que perteneció a una familia radicada en Pisa desde el siglo XI. El hecho de encabezar sus manuscritos con la frase "*Filio Bonacj*" o "*De Filijs Bonacij*" indujo a la generalidad de los historiadores a considerarlo hijo de un señor Bonaccio. No obstante, documentos posteriores permitirían asegurar que su padre se llamaba Guglielmo (puede ser que, de acuerdo a costumbres medievales, adoptara el nombre del miembro más ilustre de la familia y fuera descendiente y no hijo de Bonaccio). De acuerdo a sus propias afirmaciones en el "*Liber abbaci*", su padre se desempeñaba como escribano de la República de Pisa. En 1192, en compañía de éste -a quien se le había encargado una misión oficial-, viajó a Argelia, donde tuvo oportunidad de acceder a procedimientos aritméticos que los árabes habían desarrollado en los siglos IX, X y XI. Más tarde, alternando el ejercicio del comercio con los estudios matemáticos, recorrió la costa mediterránea hasta Constantinopla. A fines del siglo XII regresó a su patria y, en 1202, publicó su primera obra (que fue, a su vez, su "opus magnunm"), la ya mencionada "*Liber abbaci*", cuyo éxito fue tal que, en forma inmediata, se manifestó la necesidad de una nueva versión ampliada, publicada recién en 1228. Su estructura hace pensar que esta obra sería la recopilación de un curso, lo que permitiría concluir que su autor habría ocupado una cátedra en la Universidad de Pisa. Según se lee en la introducción, la finalidad de su publicación fue hacer conocer la naturaleza y el uso de las cifras indo-arábigas y demostrar la posibilidad de desarrollar una técnica de cálculo superior a aquélla basada en el sistema de numeración romano (debe tenerse en cuenta que, de acuerdo con el Statuto dell'Arte del Cambio, promulgado en Florencia en 1299, la adopción de estas cifras, por ser una "*...invención de pueblos infieles*", significaba una ofensa a la religión y "*...porque no poseen una forma bien definida como las cifras romana*" se prestaban al engaño y al fraude. Por otra parte, su título parecería demostrar que ya a comienzos del siglo XII la expresión "ábaco" había perdido su significado primitivo de "instrumento auxiliar en los cálculos numéricos" para asumir el de "aritmética", en particular, "aritmética basada en el uso de cifras indo-arábigas". En1223 publicó su segundo libro de carácter didáctico, "*Practica geometriæ*", inspirada el los "*Elementos*" y en "*Acerca de la división de las figuras*" de Euclides. Otras publicaciones, menores en tamaño pero no en originalidad, fueron "*Flos Leonardi Bigolli Pisani super solutionibus quarundam quarundam quæstionum ad numerum et geometriam vel ad utrumque pertinentium*", "*Epistola Leonardi ad magistrum Theodorum Phylosophum Domini Imperatoris*" y "*Liber quadratorum*".

Fisher, Ronald Aylmer (1890-1962) nació en East Finchley, en las cercanías de Londres y falleción en Adelaide (Australia). Fue el séptimo (y el último) hijo (omitiendo un hermano gemelo fallecido en el parto) de George Fisher y Katie Heath. Desde su infancia sufrió de una pronunciada miopía. Su educación se desarrolló en la Mr. Greville's School en Hampstead, en Stanmore y en Harrow. Desde edad temprana mostró precocidad en el estudio de las matemáticas. En 1912 se graduó con honores en esta especialidad en el Gonville and Caius College de Cambridge, siendo beneficiado con una beca que le permitió estudiar la teoría de errores con F.J.M. Stratton y mecánica estadística y teoría cuántica con J. Jeans. Inmediatamente después fue contratado por la Mercantile and General Investment Company. En ese mismo año publicó "*On the absolute criterion for fitting frequency curves*", en el que propuso el método de máxima verosimilitud en la determinación de funciones de ajuste para curvas de frecuencias. Sus estudios relacionados con la investigación en estadística aplicada a la teoría de la evolución condujeron, en 1911, a la formación de la Sociedad de Eugenesia de la Universidad de Cambridge. En 1915 publicó su notable trabajo sobre la distribución muestral del coeficiente de correlación ("*Frequency distribution of the values of the correlation coefficient in samples from an indefinitely large population*"), respecto del cual Karl Pearson y los miembros de su Departamento de Estadística (H.E. Soper, A.W. Young, B.M.Cave y a. Lee) publicaron una crítica (Pearson no había comprendido el método de máxima verosimilitud) sin informar previamente a su autor. Esta circunstancia generó una violenta confrontación alimentada por el resto de sus vidas por sus temperamentos y fuertes personalidades. En 1918 publicó su trabajo sobre correlación y parentezco de acuerdo con la ley de la herencia de Mendel ("*The correlation between relatives on the supposition of Mendelian inheritance*"). Durante la Primera Guerra Mundial fue relevado del servicio militar debido a su pronunciada miopía, dedicándose a la enseñanza de las matemáticas en escuelas públicas. En 1917 se casó con Ruth Eileen Guiness, de quien tuvo nueve hijos. En 1919 Karl Pearson le propuso integrar el cuerpo docente del University College de Cambridge, pero desestimó el ofrecimiento y aceptó el nombramiento como Estadístico del Instituto de Investigación Agrícola Rothamsted Experimental Station. En 1921 fue nombrado Miembro del Gonville and Caius College, cargo que ejerció hasta 1921 y, luego, desde 1943 hasta su muerte. En 1929 fue elegido Miembro de la Royal Society. En 1933 fue nombrado, como sucesor de K. Pearson, profesor de eugenesia y biometría en la Cátedra Galton del University College. Contemporáneamente Egon Pearson (hijo de Karl) fue nombrado director del Departamento de Estadística del mismo y Jerzy Neyman ingresó al mismo como profesor, originándose una larga enemistad con ambos. En 1931 y 1936, aceptando la invitación del Director del Centro de Estadística y Computación, George W. Snedecor, se desempeñó como profesor visitante de los cursos de verano en la Iowa State University. En 1937-1938 ejerció como profesor invitado por Psanta Chandra Mahalanobis, Director del Instituto Estadístico de la India, en la universidad de Calcuta. En 1943 fue elegido como profesor en la Cátedra

Balfour de Genética en Cambridge. En 1938 la Royal Society lo distinguió con la Royal Medal, en 1948 con la Darwin Medal y en 1955 con la Copley Medal. En 1952 fue nombrado Presidente de la Royal Society y Caballero del Imperio Británico. En 1956 fue nombrado Director del Gonville and Caius College. Fue miembro de la American Academy of Arts and Science, de la National Academy of Sciences, de la Pontificia Academia delle Scienze, de la Royal Danish Academy of Sciences and Letters, y de la Royal Swedish Academy of Sciences. En 1957 se incorporó al Departamento de Estadística Matemática de la Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization. Sus aportes fundamentales a la estadística están contenidos en "*On the mathematical foundations of theoretical statistics*" (1922) (en el cual repudia los postulados del teorema de Bayes sustituyéndolos por el principio de la verosimilitud), "*Statistical methods of research workers*" (1925) y "*Theory of statistical estimation*" (1925). Le fueron otorgados los doctorados "honoris causa" de las universidades de Ames, Harvard, Glasgow, Londres, Calcuta, Chicago, Adelaide y Leeds. Fue nombrado socio extranjero de la Academia Nacional de Ciencias de los Estados Unidos, miembro honorario extranjero de la Academia Americana de Artes y Ciencias, miembro extranjero de la Sociedad Filosófica Americana, miembro honorario de la Asociación Americana de Estadística, presidente honorario del Instituto Internacional de Estadística, miembro extranjero de la Academia Real de Ciencias de Dinamarca, miembro de la Academia Pontificia, miembro de la Academia Imperial Alemana de Ciencias Naturales. Resulta curioso que ignorara en sus trabajos algunos importantes desarrollos teóricos producidos en su época, como la formulación axiomática de la probabilidad realizada por A.N. Kolmogorov y la teoría de los procesos estocásticos. En 1959 fue designado investigador honorario de la División de Estadística Matemática del C.I.S.R.O., en Adelaide, donde falleció.

Frenicle de Bessy, Bernard (c.1605-1675) nació y falleció en París. su fama se basó fundamentalmente en su habilidad para resolver problemas aritméticos. Desarrolló numerosas aplicaciones sobre métodos de su invención que nunca fueron publicadas. Hacia 1660 abandonó los estudios de aritmética para dedicarse exclusivamente a la teología y a la práctica religiosa. Fue miembro de la Academie des Sciences. Sus obras fueron publicadas en forma póstuma por su compatriota el matemático Phillipe de la Hire. Entre éstas cabe mencionar: "*Traité des triangles rectangles en nombres*" (1676), "*Abregé des combinaisons*" (1729) y "*Des carrés magiques*" (1731).

Galilei, Galileo (1564-1642), hijo de Vincenzo Galilei, un musicólogo y editor de música muy conocido en su época (autor del primer tratado operístico de que se tiene conocimiento: "*Dialogo della musica antica e della moderna*" (1581)), nació en Pisa y falleció en Arcetri (Florencia). En 1583 ingresó a la Universidad de dicha ciudad para estudiar medicina. Al poco tiempo decidió abandonar esta ciencia, para dedicarse (siguiendo el consejo del matemático Guidobaldo Del Monte) al estudio de las obras de Euclides y de Arquímedes. En 1590 ingresó como docente a la Universidad de Pisa. En 1592 fue elegido Miembro del Ateneo Patavino, permaneciendo durante los siguientes 18 años al servicio de la República de Venecia. Fue en la época de su estadía en Padua que elaboró sus principales trabajos de investigación sobre las leyes del movimiento y tomó contacto con la teoría Copernicana ("*De revolutionibus orbium cœlestium*" (1543)). En 1610 se trasladó a Florencia en calidad de "*Primario Matematico dello Studio di Pisa*" y "*Primario Matematico e Filosofo del Granduca di Toscana*". A partir de la utilización del telescopio (que había sido inventado poco tiempo antes en Holanda) realizó, en esta época, importantes descubrimientos astronómicos (la orografía de la Luna, las fases de Venus similares a las de la Luna, los cuatro satélites de Júpiter, los anillos de Saturno, la rotación del Sol) que perturbaron a los científicos de la época y aterrorizaron a la Iglesia. El 25 de febrero de 1616, durante una estadía en Roma, fue citado por el Santo Oficio en virtud de un decreto por el cual se declaraba "*Que el sol sea el centro del mundo e inmóvil de movimiento local es proposición absurda y falsa en filosofía y formalmente herética, por ser expresamente contraria a la Sagrada Escritura*". Al día siguiente el cardenal Bellarmino (a quien se deben, entre otras muchas, las condenas de Giordano Bruno y Tommaso Campanella, y que fue proclamado santo por Pío XI en 1930 y doctor de la Iglesia Universal en 1931) le prohibió formalmente "*...defender y enseñar la doctrina copernicana, orlamente y por escrito*". Su silencio se mantuvo hasta 1632, año en que, suponiendo que la elección de su amigo Maffeo Barberini como Papa Urbano VIII trería aparejado un cambio en la actitud de la Iglesia, decidió publicar "*Dialoghi sopra i due massimi sistemi del mondo, Tolemaico e Copernicano*". Si bien, para congraciarse con el nuevo Pontífice, expresó en el epílogo que las teorías científicas no pueden pretender explicar completamente el comportamiento de los fenómenos de la naturaleza porque "*...sólo son interpretaciones posibles, pero no necesarias*" de los mismos, y que la religión "*...es la depositaria de la verdad absoluta que es negada a la ciencia*"", no pudo evitar la trascendencia del carácter revolucionario de esta obra. Esta circunstancia (así como la consideración de ofensiva por parte del Papa de la aparente semejanza entre su persona y el personaje de Simplicio) hizo que el 23 de junio de 1633 fuera sometido a un segundo proceso en el que se lo condenó (por 7 votos contra 3) a abjurar de la teoría copernicana y a cumplir arresto domiciliario por el resto de su vida, en la ciudad de Florencia. La condena de 1616, sobre la cual se basó el proceso de 1632, fue abolida oficialmente por un decreto del 15 de setiembre de 1822. Al año siguiente sus libros y los de Copernico fueron retirados del "*Index librorum prohibitorum*". Fue Miembro de la Academia dei Lincei (la cual, fundada en Roma por el Príncipe Federico Cesi, Duque de Acquasparta en 1601, puede ser considerada, excepción hecha de una Accademia degli Oziosi, de Nápoles, la primera academia científica, en el sentido moderno del término, de que se tiene noticia). Si bien el renombre que había adquirido la Universidad de Padua en su período como profesor, hizo que fuera escuchado, virtualmente, por todos los científicos de la época, merecen ser mencionados, en particular, sus discípulos Francois de Noailles, Martin Hasdale, Richard White, Bonaventura Cavalieri, Evangelista Torricelli (quien lo sucedió como "Primario Matematico"), Vincenzo Viviani (quien lo asistió en los últimos y más desgraciados años de su vida y, a su muerte, escribió un "*Racconto storico*" de su vida y se encargó de la edición de sus obras completas). En 1636 dio término a su obra más extensa, "*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*", en la que reunió sus investigaciones más importantes en el ámbito de la mecánica. Otras obras de gran importancia para el desarrollo de la ciencia moderna fueron: "*Istoria e dimostrazioni intorno alle macchie solari e loro accidenti*" (1613), "*Il saggiatore*" (1623), "*Della scienza meccanica*" (1649). Su contribución a la teoría de la probabilidad se remite a unos apuntes (escritos, presumiblemente, entre 1613 y 1623) hallados entre sus papeles y editados, en forma póstuma (1718), con el resto de sus obras, bajo el título "*Considerazioni sopra il gioco dei dadi*".

Galton, Francis (1822-1911) nació cerca de Birmingham (Inglaterra) y falleció en Hamslemere (Inglaterra). Fue el menor de nueve hijos del matrimonio formado popr el banquero Samuel Tertius Galton y de Violetta Darwin quien era hija de un segundo matrimonio de Erasmus Darwin, uno de cuyos nietos de su primer matrimonio fue Charles Robert Darwin (es decir que Violetta podría ser considerada casi como una tía de Charles). Estudió medicina en el General Hospital de Birmingham y en el King's College de Londres. En 1840 ingresó al Trinity College de Cambridge como estudiante de matemática, pero en 1843 tuvo que dejar sus estudios por problemas de salud. Cuando su padre falleció, en 1844, recibió una herencia que le aseguró un elevado nivel de ingresos, abandonó, entonces, definitivamente su idea de estudiar medicina, y se dedicó a la caza mayor. A este período de inactividad le siguió un período de exploraciones geográficas, por las que recibió, en 1853, la Golden Medal de la Royal Geographical Society y, en 1854, la Silver Medal de la French Geographical Society. En 1858 se casó con Louisa Butler. En 1856 fue elegido Miembro de la Royal Society, la cual le otorgó, en 1886, la Golden Medal, en 1902, la Darwin Medal y, en 1910, la Copley Medal. En 1901 el Antropological Institute le otorgó la Huxley Medal. En 1908 la Linnean Society le otorgó la Darwin-Wallace Medal. Le fueron concedidos los doctorados honorarios de las universidades de Oxford y Cambridge y el cargo de Miembro Honorario del Trinity College. La publicación de "*The origin of species*" (1859) de Charles Darwin, ejerció tal influencia sobre su pensamiento que lo transformó de geógrafo en antropólogo. Sus principales trabajos en este nuevo campo fueron: "*Hereditary talent and character*" (1865); "*English men of science: Their nature and nurture*" (1869), en el que expone la tesis de que la herencia tiende a producir en el individuo una preeminencia en algún área y que el entorno tiende a constituirse en el factor decisivo en la determinación de dicha área; "*Hereditary genius*" (1877), en el que introdujo los términos "*co-relación*" y "*regresión*", "*Inquiries into human faculty and its development*" (1883), en el que expone algunos resultados preliminares obtenidos en el campo de la psicometría; "*Natural inheritance*" (1889), quizás la más importante de sus contribuciones a la estadística, en la que expone los fundamentos de los conceptos de correlación y regresión (los argumentos utilizados en esta obra recién alcanzaron un grado de difusión importante cuarenta años más tarde, cuando R.A. Fisher introdujo el análisis de la varianza). En los últimos años de su vida trabó una estrecha amistad con Karl Pearson. En 1880, junto con K. Pearson y W.R.F. Weldon, fundó la revista Biometrika. En 1901, de la fusión de su Oficina de Registro Eugenético y del Laboratorio de Biometría, surgió el laboratorio que hoy lleva su nombre.

Gauss, Carl Friederich (en realidad, su nombre de bautismo era **Johann Friederich Carl**, posteriormente renunció a su primer nombre e invirtió el orden de los dos restantes) **(1777-1855)** nació en Brunswick en el seno de una familia muy modesta y falleció en Göttingen (Hannover, hoy Alemania). Está considerado, junto con Arquímedes y Newton, uno de los tres más grandes matemáticos de todos los tiempos. Su precocidad no conoce igual en la historia de la matemática. En 1791 Carl Wilhelm Friederich, Duque de Hannover, impresionado por su talento poco común, lo tomó bajo su protección, haciéndose cargo de su educación en el Caroline College y en la Universidad de Gotinga (protección que se prolongó hasta su muerte en 1806). En 1799 obtuvo el doctorado en dicha universidad (su tesis, "*Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*", constituyó un aporte de gran importancia al teorema fundamental de la teoría de las ecuaciones algebraicas). En 1807 fue nombrado profesor de astronomía en la Universidad de Gotinga y director del observatorio astronómico de dicha ciudad. Continuó con sus investigaciones en astronomía hasta 1817. Entre 1821 y 1825 se dedicó a los estudios de geodesia y, entre 1831 y 1841 a los de magnetismo terrestre. Si bien nunca abandonó sus investigaciones en aritmética (una de sus máximas fue: "*La matemática es la reina de las ciencias, la aritmética es la reina de las matemáticas*""), realizó contribuciones importantes en todas las ramas de la matemática pura y aplicada que existían en su época (algunas de las cuales las había creado el mismo): geometría diferencial, geometría de funciones de variable compleja, teoría de números, topología. Sus principales aportes se encuentran en "*Disquisitiones generales circa seriem infinitam*" (1811), "*Tafel zur bequemen Berechnung der Logarithmen der Summe oder Differenz zweier Grössen, welche selbst nur durch ihre Logarithmen gegeben sind*" (1812), "*Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*" (1814), "*Disquisitiones generales circa superficies curvas*" (1827) y "*Principia generalia theoriæ figuræ fluidorum in statu æquilibri*" (1828). En 1798 concluyó una de sus obras más importantes: "*Disquisitiones arithmeticæ*" (publicada en 1801), en la que por primera vez trata a la teoría de números como una rama particular de la matemática. En 1809 publicó "*Theoria motus corporum cœlestiorum in sectionibus conicis solum ambientium*" (considerada su segunda obra maestra) en la que incluye el desarrollo del método de los cuadrados mínimos. Entre todas sus contribuciones ésta fue la que tuvo más amplia difusión en las ciencias fácticas y sobre la cual, a pesar del desapego que manifestó durante toda su vida por la docencia, dictó cursos desde 1835 hasta su muerte. En 1802 fue elegido miembro de la Academia Imperial de Artes y Ciencias de San Petersburgo, en 1804 miembro de la Royal Society, en 1810 miembro de la Academia Real de Ciencias de Berlín, en 1822 miembro de la American Academy of Arts and Sciences de Boston, en 1853 miembro de la Philosophical Society de Filadelfia. Sólo se conoce un episodio que produjo alguna alteración en su reposada y extraordinariamente regular existencia: A partir de 1806 comenzó a recibir desde París una serie de cartas, con la firma Le Blanc, conteniendo observaciones y desarrollos inspirados en el "*Disquisitiones arithmeticæ*". Esta correspondencia provenía, en realidad, de una dama francesa llamada Sofie Germain. El secreto se develó cuando la señora Germain se dirigió al General Pêrnetty, jefe de las tropas francesas que asediaban Brunswick, solicitándole encarecidamente que "*...la persona y los bienes del gran matemático*" fueran respetados. Esta correspondencia duró poco tiempo (presumiblemente hasta 1807).

Gini, Corrado (1884-1965) nació en Motta di Livenza (provincia de Treviso). Estudió derecho y matemáticas en la Universidad de Bolonia. Fue profesor de Estadística, Economía, Política, Demografía, Biometría, Derecho Constitucional y Sociología en las universidades de Cagliari, Padua y Roma. En 1920 fundó la revista internacional de estadística "*Metron*" y la revista "*Genus*" (perteneciente al "Comittato Italiano per lo Studio dei Problemi della Popolazione"), ejerciendo la dirección de ambas. Entre 1926 y 1932 desempeñó el cargo de Director del "Istituto Centrale di Statistica". Como reconocimiento a sus méritos científicos le fueron otorgados los doctorados "honoris causa" en Ciencias Económicas por la Universidad Católica de Milán (1932), en Sociología por la Universidad de Génova (1934) y en Ciencias por la Universidad de Harvard (1936). Sus primeros trabajos científicos se refieren a la aplicación de la teoría de la probabilidad al problema de la estimación de la proporción de nacimientos masculinos y femeninos ("*Il sesso dal punto de vista statistico: Le leggi della produzione dei sessi*" (1908)), y a la estructura cuantitativa de la dispersión ("*Memorie di metodologia statistica*" (1912), "*Sur la théorie de la dispersion et sur la vérification et l'utilization des schémes théoriques*" (1940), "*Alle basi del metodo statistico: Il principio della compensazione degli errori accidentali e la legge dei grandi numeri*" (1941)). Está considerado el iniciador de los estudios que vinculan a la demografía con la sociología, la biología y la economía ("*Los efectos demográficos de las migraciones internacionales*" (1946), "*Vecchie e nuove osservazioni sulle cause della natalitá differenziale e sulla misura della fecunditá naturale delle coniugate*" (1949)). Desarrolló, en este sentido, una "*teoría de las fases de crecimiento de una población*" según la cual se debe esperar que ésta crezca rápidamente durante la primera fase de su desarrollo, luego observe una tasa de crecimiento decreciente hasta llegar a ser casi estacionaria y, finalmente, comience un período de declinación que la podría conducir, eventualmente, a su extinción ("*Patologia economica*" (1923)). Sus contribuciones más importantes están relacionadas con la teoría de los índices de precios ("*Quleques considérations au sujet de la construction des nombres indices des prix et des questions analogues*" (1924)) y con el estudio de las relaciones entre distribuciones de probabilidades ("*The measurement of the difference between two quantity groups and in particular between the characteristics of two populations*" (1953), "*Transvariazione*" (1959)).

Gnedenko, Boris Vladimirovich (1912-1995) nació en Simbirsk (hoy Ulyanovsk, Rusia) en el seno de una familia de origen ucraniano y falleció en Moscú. En 1927 ingresó a la Universidad de Saratov (dada su juventud fue admitido sólo por recomendación del Ministro de Educación de la Unión Soviética) y, en 1930, se inscribió en el Instituto Textil de Ivanovo (un centro textil ubicado al este de Moscú). En 1934 fue admitido como alumno en el Instituto de Matemática de la Universidad de Moscú, allí trabó amistad con Eugene Slutskii, Nokolai Smirnov, Vladimir Glivenko y, en particular, con Alexandre Khinchin y Andrei Kolmogorov. En 1937 fue nombrado investigador asistente en dicho Instituto. En noviembre de ese mismo año fue incorporado al Ejército Rojo para cumplir su servicio militar y, poco tiempo después, en razón de algunas opiniones antisoviéticas vertidas en el seno del Instituto, fue arrestado y en carcelado en la prisión de Bryansk, acusado de distribuir propaganda contrarrevolucionaria y de formar parte de una conspiración liderada por Kolmogorov. Habiendo sido puesto en libertad en 1938, retornó a la Universidad de Moscú en la que fue designado profesor en el Departamento de Mecánica y Matemática. En 1941 obtuvo el doctorado en física y matemática. En 1945 fue elegido Miembro de la Academia Ucraniana de Ciencias y, en 1949, Director del Instituto de Matemática de la Universidad de Kiev y presidente de la Sección de Ciencias Químicas de la Academia Ucraniana de Ciencias. En 1960 regresó a Moscú y en 1966 fue designado Director del Departamento de Teoría de la Probabilidad del Instituto de Mecánica y Matemática, en reemplazo de A. Kolmogorov. Allí condujo un programa de seminarios sobre control de calidad que ejercieron una notable influencia en la modernización de la industria soviética producida a partir de 1970. Su aporte más importante en el ámbito de la teoría de la probabilidad está contenido en "*Limit distributions for sums of independent random variables*" (1949). En 1953 se publicó "*The theory ofprobability*", convirtiéndose en forma inmediata en el libro de texto más popular sobre teoría de la probabilidad, hasta la aparición de "*An introduction to probability theory and its applications*" (1968) de William Feller.

Gosset, William Sealy (1876-1937) nació en Canterbury y falleció en Beaconsfield (Inglaterra). Era descendiente de una antigua familia de hugonotes que había abandonado Francia después de la revocación del Edicto de Nantes. Intentó ingresar a la Royal Military Academy (Woolwich) porque quería ser, como su padre, un Royal Engineer, pero fue rechazado por problemas en la vista. Estudió en el Winchester College y en el New College de Oxford en el cual obtuvo, en 1899, los títulos en matemática y ciencias naturales (haciéndose acreedor a una distinción en química). Inmediatamente después de la finalización de sus estudios ingresó a la famosa cervecería Guinness de Dublin, permaneciendo en ella durante toda su vida. En 1906 y 1907 realizó estudios de especialización en el Laboratorio de Biometría del University College de Londres, dirigido por K. Pearson. La firma Guiness permitió la publicación de sus trabajos con la condición de que no figurara su nombre. El autor debía ser designado como "The pupil" o "The student". Eligió la segunda denominación, por la que se lo conoce en el ámbito científico (sólo uno de sus trabajos apareció firmado con su verdadero nombre). Se caracterizó por no ser un matemático profundo, pero demostró poseer una notable intuición para descubrir la relevancia de ciertos principios generales en las aplicaciones prácticas. Por esta razón R. Fisher lo describió como el "*Faraday de la estadística*". Su primer trabajo en el ámbito de las matemáticas fue "*On the error of counting with a Haemacytometer*" (1907). Su fama deriva fundamentalmente de su segundo trabajo, "*The probable error of a mean*" (1908), en el que propuso las bases del hoy conocido como "test de la t de Student". También en 1908 fue publicado "*Probable error of a correlation coefficient*".

Grandi, Guido (su nombre de pila era **Francesco Ludovico,** adoptó el nombre **Guido** cuando, a los 16 años, ingresó a la orden Camaldulense) **(1671-1742)** nació en Cremona y falleció en Pisa. En 1694 fue designado como profesor de filosofía peripatética en el convento de su orden, en Florencia. Esta circunstancia lo indujo al estudio de los "*Principia*" de I. Newton, logrando rápidos e importantes progresos en geometría. En 1700 Cosimo de'Medici lo designó profesor de filosofía y, en 1714, profesor de matemática en la Universidad de

Pisa. En 1707 fue nombrado matemático del Gran Duque de Toscana y en 1709, miembro de la Royal Society. Su vasta correspondencia científica demuestra la consideración de que gozaba entre los matemáticos de su tiempo. Su colaboración a la primera edición florentina de las "*Opere di Galileo*" contiene una "*Nota al Trattato del Galileo sul moto naturalmente accelerato*" en la que figura la definición de la curva llamada "*versiera*", erróneamente atribuida primero a M.G. Agnesi y posteriormente a A.L. Cauchy (la función de probabilidades asociada a esta curva hoy se conoce como distribución de Cauchy). Su primera publicación fue "*Geometrica demonstratio vivianeorum problematum*" (1699), a la que le siguieron "*Geometrica demonstratio theorematum hugenianorum circa logisticam, seu logarithmican lineam*" (1701) y "*Quadratura circuli, et Hyperbolæ et parabolas quadrabiles geometrice exhibita*" (1703). En est última obra manifiesta su abandono de los métodos infinitesimales de la escuela Galileana y la adopción de la metodología de Leibniz, lo cual implicó el ingreso en Italia de las nuevas técnicas de cálculo infinitesimal reafirmado, luego, en "*De infinitis infinitorum et infinite parvorum ordinibus*" (1710). Entre las publicaciones posteriores a ésta cabe mencionar "*Flores geometrici ex rhodonearum, et clœliarum curvarum descriptione resultantes*" (1728), en la que figura una clase de curvas planas de ecuación polar de la forma ϱ=a.sen($\mu\omega$), denominadas "*rodonee*" (o rosas) y las correspondientes curvas esféricas, denominadas "*clelias*" en homenaje a la condesa de Borromeo.

Graunt, John (1620-1674) nació y falleció en Londres. Hijo de un pañero londinense, recibió la educación común a todo joven inglés de la época perfeccionándose además en latín y francés. Rápidamente se convirító en un respetable ciudadano, ejerció cargos de relevancia en el gremio de los pañeros y en el Concejo de la ciudad de Londres, y tuvo una destacada actuación en los círculos cultutales y científicos de dicha ciudad. Fue capitán de la banda de Londres. El gran incendio de Londres de 1666 destruyó sus propiedades y, aparentemente, esta circunstancia le generó problemas económicos de tal magnitud, que nunca logró recuperarse. En los últimos años de su vida, a los problemas económicos, se agregarían los inconvenientes derivados de su decisión de cambiar su filiación religiosa de su puritanismo original al socinianismo (unitarista) y, finalmente, al catolicismo romano. Esta actitud lo obligó a declinar sus cargos civiles y militares. Es considerado el fundador de la demografía como ciencia. En "*Natural and political observations made upon the bills of mortality*" (1662) introdujo la idea de que las estadísticas vitales (registros de bautismos y sepelios en Londres en los períodos 1629-1636 y 1647-1653) podían ser utilizadas para construir tablas de mortalidad y motivó su elección como miembro de la recién fundada Royal Society. En la literatura, en general, su nombre aparece asociado al de su contemporáneo William Petty, un científico inglés (también nacido en Romsey, en 1623) cuya obra en estadística demográfica estuvo, en cierta forma, vinculada a la suya.

'sGravesande, Willem Jacob (1688-1742) nació en 'sHertongenbosch (Holanda) y falleció en Leiden (Holanda). Fue un físico de gran fama en su época. Ejerció una notable influencia en la introducción de la "*filosofía experimental*" en los Países Bajos. En 1718 fue designado profesor de matemática, astronomía y filosofía en la Universidad de Leiden. Su contribución a la teoría de la probabilidad está contenida en "*Démonstration mathématique de la diréction de la Providence Divine*" -la cual forma parte del segundo volumen de la Parte II ("*Introduction a la philosophie, contenant la metaphysique, et la logique*") de sus "*Oeuvres philosophiques et mathématiques*" (1774), publicadas treinta años después de su fallecimiento-, en la que, influido por "*An argument for Divine Providence, taken from the constant regularity observ'd in the births of both sexes*" de J. Arbuthnot, trata la vinculación entre la constancia de la relación entre los nacimientos femeninos y masculinos y la intervención de la Divina Providencia. La versión completa sus cálculos vinculados con la "*Démostration*" circularon en forma privada en una memoria titulada "*Démonstration mathématique du soin que Dieu prend de diriger ce qui se passe dans ce monde, tirée du nombre des garçons et des filles qui nassent journellement*" y publicados en 1715 en "*Het Regt gebruik der Wereldbeschowingen*" (traducido al inglés por John Chamberlayne en 1718 bajo el título "*The religious philosopher: or the right use of the contemplating the works of the Creator*").

Halley, Edmond (1656-1741) nació en Haggerston (Shoreditch, Londres) y falleció en Greenwich. En su infancia recibió una esmerada educación clásica y, simultáneamente estudió astronomía, navegación y matemática y comenzó a realizar observaciones astronómicas con instrumentos proporcionados por su padre. A los 17 años ingresó al Queen's College de Oxford, pero su interés por la astronomía le impidió concluir sus estudios. Viajó a la isla de Santa Elena para realizar observaciones de estrellas que, por encontrarse muy próximas al Polo Sur, no eran visibles desde Europa. El resultado de esta expedición se plasmó en un catálogo, publicado en 1678, conteniendo la posición de 341 estrellas, que fue de gran importancia para el establecimiento de nuevas rutas comerciales en el hemisferio sur. Este trabajo justificó su elección, en ese mismo año, como miembro de la Royal Society, en la que se desempeñó como editor de las Philosophical Transactions durante un período muy prolongado. En 1704 sucedió a John Wallis en su cátedra de geometría de Oxford. En 1720 fue designado Astrónomo Real en el observatorio de Greenwich, cargo que ocupó por el resto de su vida. Sus principales trabajos fueron obviamente en el ámbito de la astronomía y la geofísica, pero también realizó importantes contribuciones a la física, la matemática, la demografía y la ciencia actuarial. Además se deben a su obra: una edición de las "*Cónicas*" de Apollonio, una traducción del árabe al latín de "*De sectione Rationis*" de Pergeo y una edición muy cuidada de los trabajos del matemático griego Sereno. A partir de los resultados obtenidos por Isaac Newton, analizó la órbita de 24 cometas. En particular, observó que las órbitas de los cometas de 1531, 1607 y 1682 eran similares, por lo que concluyó que podía tratarse de distintas apariciones del mismo objeto prediciendo, entonces, la siguiente aparición del hoy conocido como "cometa Halley". En 1693 publicó la primera tabla de mortalidad basada en datos observados con los fallecimientos clasificados por edades ("*An estimate on the degrees of mortality of mankind drawn from curious tables of the births and funerals at the city of Breslau: with an attempt to ascertain the price of annuities upon lives*").

Helmert, Friederich Robert (1843-1917) nació en Friburgo (Alemania). En 1868 se graduó en física y matemática en la Universidad de Leipzig. Sus investigaciones en geodesia lo condujeron al tratamiento de muchos problemas estadísticos: en su tesis doctoral ("*Studien über rationelle Vermessungen der Höheren Geodäsie*" (1868)) desarrolló una teoría de la "*elipse del error*"; en "*Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendungen auf die Geodäsie und die Theorie der Messinstrumente*" (1872) utilizó el método de los cuadrados mínimos en el control de instrumentos de medición. En 1872 fue designado profesor de Geodesia en la Escuela Técnica de Aachen. El éxito de su trabajo "*Die mathematischen und physikatischen Theorien der Höheren Geodäsie*" (1880-1884) le valió la designación, en 1907, como profesor de Geodesia Avanzada en la Universidad de Berlín y Director del Instituto Geodésico de Prusia.

Huygens, Christiaan (1629-1695) nació en Le Hague (Países Bajos) en el seno de una política y artísticamente prominente familia protestante y falleció en Le Hague. Bajo la dirección de su padre, recibió una educación muy refinada y una instrucción muy vasta. Entre 1645 y 1649 estudió leyes y matemática en las universidades de Leiden y Breda. En 1645 conoció a Franz van Schooten, quien lo instruyó sobre la obra de los más grandes matemáticos antiguos y contemporáneos (Arquímedes, Apollonio, Pappo, Diofanto, Viète y Descartes). En 1655 viajó a París para recibir el doctorado en leyes de la Universidad Protestante de Angers, oportunidad en la que tomó conocimiento de los resultados obtenidos por Fermat y Pascal en probabilidades. En 1663 fue elegido miembro de la recién fundada Royal Society y en 1666 pasó a integrar la Académie Royale des Sciences de París. A partir de ese momento, y hasta la revocación del Edicto de Nantes, en 1685, vivió casi ininterrumpidamente en París. Durante uno de sus estancias en dicha ciudad conoció al joven Leibniz, a quien guió en sus primeros estudios de matemática. No conoció personalmente a Pascal ni a de Fermat, pero se relacionó con los matemáticos franceses Giles Personne de Roverbal y Claude Mylon, con quienes mantuvo una nutrida correspondencia. En matemática, continuó la obra de Decartes, de Fermat y Pascal. En astronomía continuó con la línea de investigación comenzada por Galileo. Al igual que de Fermat y Newton fue renuente a la publicación de sus trabajos y muchos de sus libros fueron editados mucho tiempo después de haber sido escritos, excepción hecha de un pequeño tratado sobre probabilidades, "*Van Rekeningh in Spelen Van Geluck*" (1656) que, con correcciones y adiciones constituyó un año más tarde el famoso "*De ratiotiniis in ludo aleæ*". Posteriormente retornó en forma esporádica al estudio de la probabilidad, pero no publicó los resultados obtenidos. Además de su renombre como matemático, fue famoso por su habilidad en el pulido de lentes para telescopios, lo que le permitió mejorar sus observaciones astronómicas y descubrir el primer satélite y los anillos de Saturno.

Keynes, John Maynard (1883-1946) nació en Cambridge y falleció en Firle (Sussex). Estudió en Eton. Se graduó en matemáticas en el King's College, en el cual -a propuesta de Alfred Marshall- fue nombrado profesor de Economía en 1908. Sus obras fundamentales en materia económica fueron: "*The economic consequences of the peace*" (1919), "*A treatise of money*" (1930) y "*The general theory of employment, interest and money*" (1936). Su aporte a la teoría de la probabilidad está contenido en su tesis doctoral "*A treatise on probability*" (1921) -única publicación que realizó sobre esta materia y única de sus obras que se puede considerar como "*intencionadamente filosófica*"-, en la cual expuso su interpretación de la probabilidad como una relación lógica entre una proposición y la evidencia que se posee sobre la veracidad de la misma. El contenido de esta obra revela su intención de sistematizar el proceso de inferencia a través de la teoría de la probabilidad y desarrollar los fundamentos lógicos de los argumentos estadísticos.

Khinchin, Alexandre Iacolevich (1894-1959) nació en Kondrova (Rusia) y falleció en Moscú. En 1911 ingresó a la Universidad de Moscú, permaneciendo vinculado a ella durante el resto de su vida, primero como estudiante y luego como profesor e investigador. Sus trabajos en matemáticas abarcan un espectro muy amplio que incluye la teoría de funciones de variable real, la teoría de números y la teoría de la probabilidad y sus aplicaciones a la física y a la estadística, la teoría de "colas" y la teoría de la información. Sus primeras contribuciones a la teoría de la probabilidad datan de 1924 (entre 1924 y 1930 publicó más de 50 trabajos sobre este tema, entre los que se destacan "*Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*" y "*Limit distributions for the sum of independent random variables*") y se refieren fundamentalmente a la teoría de la agregación de variables aleatorias independientes, la ley del logaritmo iterado, la ley de los grandes números y el teorema central del límite. Su aporte más importante a la teoría de la probabilidad fue en el campo de los procesos estocásticos estacionarios.

Kolmogorov, Andrei Nikolaevitch ((1903-1987) nació en Tombov (Rusia), donde su madre, Maria Yakovlevna Kolmogorova -quien falleció en el parto- se había detenido en un viaje de retorno de Crimea (como se ve, Kolmogorov era el apellido de su abuelo materno) y falleció en Moscú. Diez días después de su nacimiento fue llevado a casa de su abuelo materno, siendo adoptado por su tía Vera Yakovlevna (cabe destacar que las tres hermanas Kolmogorov, María, Vera y Nadejda poseían profundas convicciones socialistas y colaboraron en forma activa con la revolución). Su padre, Nikolai Matveevich Kataev, fue un calificado agrónomo y estadístico que sufrió el exilio, que, después de la revolución de octubre, llegó a ser Director del Departamento de Educación del Ministerio de Agricultura de Narkomzem y que falleció combatiendo durante los hechos bélicos producidos en Rusia en 1919. En 1910 se trasladó con su tía Vera a Moscú, ingresando a la escuela privada Perman, de la cual egresó en 1920. Entre los años 1928 y 1930 trabajó, junto con otros estudiantes, en la construcción de ferrocarril Kazan-Sverdlovsk. En 1920 ingresó a la Facultad de Matemáticas y Física de la Universidad de Moscú, convirtiéndose inmediatamente en un alumno destacado de los famosos matemáticos V.V. Stepanov y N.N. Luzin. En el mismo año ingresó al Departamento de Metalurgia del Instituto Mendeleev de Química y Tecnología y a la Facultad de Historia de la Universidad de Moscú. En 1925 obtuvo su título de grado e ingresó a la Escuela de Postgrado de dicha Universidad. En ese mismo año publicó (en colaboración con A.Y. Khinchin) su primer trabajo sobre probabilidades, el cual incluye la demostración de la desigualdad sobre las sumas parciales de variables aleatorias independientes que hoy lleva su nombre. A ésta siguieron 18 trabajos referidos a la ley de los grandes números, la ley del logaritmo iterado, algunas generalizaciones de las operaciones de diferenciación e integración y una contribución a la lógica intuicionista. En 1929 ingresó al Instituto de Matemática y Mecánica de la Universidad de Moscú. En 1931 es nombrado Profesor de dicha Universidad. En 1933 fue designado Director del Instituto de Investigaciones en Matemáticas de la misma Universidad, cargo que desempeñó hasta 1939. En ese mismo año publicó su famosa monografía, "*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*", la cual constituyó el primer intento fundacional de una axiomática de la probabilidad. Basándose en la teoría de la medida, introdujo los conceptos de "*evento elemental*" y "*evento aleatorio*" como conjuntos medibles y de variable aleatoria como función medible. En 1938 dio a conocer su trabajo acerca de la teoría de Khinchin-Slutski sobre procesos estocásticos estacionarios (considerada por muchos autores como complementaria a la teoría de N. Wiener). En 1939 fue elegido Miembro Plenario de la Academia de Ciencias de la URSS. En 1940 dio a conocer su famoso trabajo sobre estructuras de las turbulencias. En 1946 fue nombrado Director del Laboratorio de Turbulencias de la Academia De Geofísica Teórica. En 1954 publicó, en colaboración con B.V. Gnedenko el libro "*The limit distributions for the sums of independent random variables*", que inmediatamente se transformó en un clásico. En 1960 fue designado Director del Laboratorio de Métodos Estadísticos. En 1963 recibió el Premio Internacional de la Fundación Balzan. En 1966 fue elegido Miembro Plenario de la Academia de Ciencias

Pedagógicas de la URSS. En 1976 asumió como Director de la División Estadística Matemática de la Facultad de Matemática y Mecánica de la Universidad de Moscú. En 1980 recibió el Premio Internacional de Matemática de la Fundación Wolf. Sus descubrimientos no se limitaron al ámbito de las matemáticas, sino que abarcaron especialidades tan disímiles como meteorología, historia, lingüística y pedagogía. Durante toda su vida dedicó muchos esfuerzos a la enseñanza de la matemática, en particular en la Escuela para Niños de Nivel Intelectual Superior, dependiente de la Universidad de Moscú. En 1949 le fue otorgado el Premio Chebychev y, en 1987, el Premio Lobachevsky de la Academia de Ciencias de la URSS. Fue distinguido con el título de Héroe del Trabajo Socialista (1913), le fueron otorgadas siete Ordenes de Lenín (1944, 1945, 1953, 1961, 1963, 1973, 1975), la Estrella de Oro de la URSS (1963), la Orden de la Bandera Roja (1940), el Premio Stalin (1941), el Premio Lenín (1965) y la Orden de la Revolución de Octubre (1983). Fue Doctor Honoris Causa en Ciencias de la Universidad de París (1955), de la Universidad de Estocolmo (1960), del Instituto de Estadística de la India (1962), de la Universidad de Budapest (1973). Fue elegido Miembro Correspondiente de la Academia Rumana de Ciencias (1956), Miembro Extranjero de la Academia Polaca de Ciencias (1956), Miembro Honorario de la Royal Statistical Society (1956), Miembro Honorario del International Statistical Institute (1957) y de la American Academy of Arts and Sciences (1959), Miembro de la Academia Leopoldina de Ciencias Naturales de Alemania (1959), Miembro Extranjero de la American Philosophical Society de Filadelfia, Miembro Honorario de la Sociedad Meteorológica de los Estados Unidos (1962), Miembro Honorario de la Sociedad Matemática de la India (1962), Miembro Honorario de la London Mathematical Society (1962), Miembro Extranjero de la Academia Real de Ciencias de los Países Bajos (1963), Miembro de la Royal Society (1964), Miembro Honorario de la Academia Húngara (1965), Miembro de la Academia Nacional de Ciencias de los Estados Unidos (1967), Miembro Extranjero de la Academia Francesa de Ciencias (1968), Miembro Honorario de la Academia Internacional de Historia de la Ciencia (1977), Miembro Honorario de la Academia Alemana de Ciencias (1977), Miembro de la Sociedad de la Orden "Pour la Mérite" (1977), Miembro Extranjero de la Academia Finlandesa de Ciencias (1983).

Lacroix, Sylvestre François (1765-1843) nació y falleció en París. Por designación de los ministerios de Guerra y de Marina de Francia estuvo a cargo de la enseñanza de la matemática en varias escuelas de provincia. Con la fundación de la École Politechnique y de la École Normales Superieur regresó a París en calidad de profesor. Fue profesor de la Facultad de Ciencias de la Universidad de París y del College de France, y miembro de la Académie des Sciences. En el período 1797-1800 publicó su "*Traité de calcul différentiel et intégral*" en el que reunió el inmenso material elaborado por los analistas del siglo XVIII, que abarca todo el cálculo infinitesimal, incluyendo el cálculo de variaciones, y la teoría de ecuaciones. Gozó de una notoria fama entre profesores y estudiantes por obra de una serie de manuales escolares de su autoría, referidos a temas como la aritmética, el cálculo diferencial e integral, la teoría de la probabilidad, la geografía matemática y la agrimensura, y al "*Essai sur l'inseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier*" (1838), en el que reunió consejos y normas didácticas que aún hoy podrían ser de gran utilidad en la enseñanza. Su aporte a la teoría de la probabilidad se encuentra en el "*Traité élementaire du calcul des probabilités*" (1816).

Lagrange, Joseph Louis (1736-1813) nació en Turín (Sardegna-Piemonte) de padre francés y madre italiana y falleció en París. Fue el menor de once hermanos y el único que sobrevivió más allá de la infancia. En 1744 fue nombrado profesor de la Escuela de Artillería de Turín y en 1759, Miembro de la Academia Real Ciencias y Letras de Berlín, de la que llegó a ser Presidente en 1766 -en reemplazo de Euler a su regreso a San Petersburgo. Durante sus veinte años de estadía en Berlín -en la que llegó a mantener cierta amistad con Federico de Prusia- publicó importantes trabajos en teoría de números, en la resolución de ecuaciones algebraicas ("*Aditions a l'algèbre d'Euler*" (1772)), que, posteriormente, servirían de base a los estudios de N.E.Abel y E. Galois para la demostración de la irresolubilidad de las ecuaciones de grado mayor o igual a cinco) y en la teoría de los errores de observación no sistemáticos ("*Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats du plusieurs observations; dans lequel on examine les advantages de cette méthode par le calcul des probabilités; et oú l'on résout différents problèmes relatifs à cette matière*" (1770-1773)). Fue autor del primer intento serio (aunque vano) de fundamentación rigurosa del cálculo infinitesimal ("*Théorie des fonctions analytiques*" (1797)). Durante su estadía en Berlín contrajo matrimonio, enviudando poco tiempo después. La siguiente carta, enviada a su amigo D'Alembert, es una muestra de la fina ironía que lo caracterizó: "*Mi querido e ilustre amigo, he recibido su carta y sus felicitaciones; se lo agradezco de corazón. No sé si he calculado bien o mal, o más bien creo no haber calculado nada, pues me habría sucedido* *lo que a Leibniz, que a fuerza de reflexionar no pudo decidirse jamás. Como quiera que sea, le confieso que nunca he sentido gusto por el matrimonio, y que nunca me hubiera comprometido si las circunstancias no me hubieran obligado. Estando en un país extranjero sin amigos y sin ilusiones, con una salud bastante delicada, he creído un deber comprometerme con una de mis parientes, a la que conocía desde hace mucho tiempo y con la que ya había vivido muchos años en la casa de mi padre. He aquí la historia exacta de mi matrimonio, si no se los he comunicado antes es porque la cosa me ha parecido tan indiferente en sí misma, que no valía la pena molestarlos con ella*". En 1786, a la muerte de Federico de Prusia y accediendo al ofrecimiento de Luis XVI, se trasladó a París, donde fue recibido con grandes honores (siéndole habilitado, como residencia, un conjunto de habitaciones en el palacio del Louvre). En esta época pasó por un período de profunda depresión, que lo llevó a abandonar sus estudios de matemática. Comenzó a interesarse en la química, llegando a ser gran amigo de Lavoisier. Durante la Revolución se desempeñó como presidente de la comisión encargada de la renovación del sistema de pesas y medidas y la creación del sistema métrico decimal. En la época del terror sólo la intervención de Guyton-Morveau logró evitar que fuera expulsado de Francia. Posteriormente fue nombrado Director de la Casa de la Moneda y, a partir de su fundación, Profesor de la École Normale y de la École Polytechnique. A pesar de sus opiniones sobre el matrimonio, expresadas en la carta transcripta, se casó por segunda vez en 1792, con la hija de su amigo el astrónomo Lemonnier. Napoleón le otorgó el título de Conde del Imperio y Gran Oficial de la Legión de Honor y lo nombró Senador. Su obra más importante (y una de las más bellas de la historia de la matemática) fue "*Mécanique analytique*" en la que, basándose en su cálculo de variaciones, sintetizó los avances de la mecánica desde Newton (debido a la elegancia de los resultados obtenidos, W.R. Hamilton la calificó de "*poema científico*"). Otras obras de su autoría que merecen ser mencionadas son: "*Théorie des fonctions analytiques*" (1797), "*Resolution des équations numériques*" (1798), "*Leçons d'arithmétique et d'algèbre donés a l'École Normale*" (1806), "*Leçons sur le calcul des fonctions*" (1806).

Lambert, Johann Heinrich (Jean-Henri Lambert) (1728-1777) nació en Mülhousen (Alsacia, en esa época perteneciente a Suiza) en el seno de una familia humilde emigrada de Francia después de la revocación del Edicto de Nantes y falleció en Berlín. Fue un filósofo y matemático autodidacta. En 1744, a partir de las observaciones sobre la trayectoria de un cometa, inició las investigaciones que concluyeron, en 1761, con la demostración del teorema que lleva su nombre. En 1748 fue nombrado instructor de los hijos del Conde De Salis, cargo que desempeñó hasta 1758. En ese período efectuó largos viajes por Alemania, Holanda y el norte de Italia, en el transcurso de los cuales conoció a J.-B.L.R. D'Alembert y a A.G. Kästner. En 1760 fue elegido Miembro Activo de la Academia de Baviera y, en 1765, Miembro de la Academia Real de Ciencias de Berlín. En 1770 el gobierno prusiano lo designó Consejero Edilicio. Escribió una gran cantidad de trabajos sobre lógica y teoría del conocimiento. Entre sus aportes más importantes a la matemática, merecen recordarse su demostración de la irracionalidad de π y e ("*Vorläufige Kenntnise für die, die Quadratur und die Rectification des Circuls suchen*", "*Mémoire sur quelques proprietés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques*"), su "*ley del coseno*" ("*Photometría*" (1760)). Sus principales contribuciones a la teoría de la probabilidad están contenidas en "*Photometria*" y "*Beytrage zum gebrauche der mathematik und deren anwendung*" (1765). En el "*Neues organon*" (1764) incluye una interesante generalización de las reglas de Bernoulli sobre probabilidades no-aditivas.

Laplace, Pierre Simon Marqués de (1749-1827) nació en Beamont-en-Auge y falleció en París. Fue el científico más ilustre de la época de oro de la ciencia francesa (se lo conoció como el Newton de Francia). Su temprano talento matemático le valió el padrinazgo de J. Le Rond D'Alembert. En 1767 se trasladó a París y dos años más tarde fue nombrado profesor en la École Militaire. En 1773 fue nombrado Miembro Adjunto de la Académie des Sciences, llegando a ser, en 1785, Miembro Plenario. A pesar de los esfuerzos por mantenerse prescindente (cuatro días después de la toma de la Bastilla tuvo lugar una sesión en la que Laplace presentó los resultados de sus investigaciones sobre la oscilación del plano de la órbita de la tierra), la actividad de la Académie durantre el período de la Revolución se vio inevitablemente afectada por la complejidad de la situación política imperante. En diciembre de 1789 fue nombrado (junto con Borda, Condorcet y Teal) miembro de la comisión encargada de dictar los nuevos estatutos de l'Académie. En mayo de 1790 fue elegido miembro de la Comisión de Pesas y Medidas. Intentado apartarse de los conflictos políticos, en la primavera de 1793, se radicó en la ciudad de Melun, de la que regresó después de la ejecución de Robespierre (el 27 de julio de 1794). En 1795 fue designado profesor de la École Normale (creada por decreto de la Convención

Nacional del 30 de octubre de 1794, para perfeccionamiento docente). Su curso correspondiente a ese año fue publicado con el título de "*Théorie analytique des probabilités*". En ese mismo año fue elegido Presidente de Sección Matemática del Institut Nationale (que sucedió a la abolición de l'Académie), del cual era miembro Napoleón Bonaparte, con quien se generó una relación de amistad (el tercer tomo de la "*Mécanique céleste*" está dedicado a "*Bonaparte, el Pacificador de Europa a quien Francia debe su prosperidad, su grandeza y la época de su gloria más brillante*"). En 1799 Bonaparte lo nombró Ministro del Interior, pero lo removió de su cargo al cabo de seis semanas "*...por tratar de trasladar el espíritu de los infinitesimal a la administración*". No obstante, en 1803, lo designó Canciller del Senado y el 1806 le otorgó el título de conde. A pesar de estas circunstancias, a la caída de Napoleón, manifestó su lealtad a los Borbones. En 1817 Luis XVIII le otorgó el título de Marqués. Su obra, que abarca los ámbitos de la física, la matemática pura, la mecánica celeste, la probabilidad y sus aplicaciones a la estadística, puede ser clasificada en tres fases superpuestas: la primera, que va desde las primeras memorias de 1770 hasta los comienzos de la década de 1780, está dedicada, fundamentalmente, a las ecuaciones diferenciales, las series, las ecuaciones en diferencias, y la teoría de la probabilidad. Los trabajos más importantes de este período son la "*Mémoire sur la probabilité des causes par les èvénements*" (1774) y la "*Mémoire sur les probabilités*" (1781), en las que figura su demostración del teorema de Bayes. La segunda fase, que se extiende desde mediados de la década de 1770 hasta 1805, se refiere al desarrollo de las herramientas matemáticas necesarias para el tratamiento de la física del sistema solar, y culmina con la publicación de la "*Mécanique céleste*" (1798-1805). Este tratado, que intenta completar el trabajo de Newton sobre la teoría de la gravitación, constituye su obra magna. La tercera fase, que abarca el período 1805-1827, está relacionada casi exclusivamente con la teoría y la aplicación de la estadística matemática. La obra más importante de este período es la "*Théorie analytique des probabilités*" (1812-1820). A partir de la segunda edición (publicada en 1814) esta obra incluyó como introducción el "*Essai philosophique sur les probabilités*", editado originalmente como una serie de 10 conferencias dictadas en 1795, en la École Normale. En lo que hace a la teoría de la probabilidad, sistematizó y extendió las dispersas investigaciones de sus predecesores. En base a los trabajos de De Moivre y Lagrange introdujo el concepto de función generatriz de momentos (que luego, a partir de la introducción por parte de Matthieu Paul Hermann Laurent de la representación trigonométrica de funciones, condujo al método de las funciones características de Paul Lévy) y la fórmula de inversión asociada a ésta. Sus trabajos sobre el análisis del comportamiento de los errores de observación no sistemáticos, junto con los de Carl Friederich Gauss, constituyeron la culminación del proceso de formación de la inferencia inductiva. Entre sus discípulos más importantes cabe mencionar a Lambert Adolphe Jacques Quetelet y a Siméon Denis Poisson.

Legendre, Adrien Marie (1752-1833) nació y falleció en París. Estudió matemática en el Colegio Mazarino, bajo la dirección de un maestro que, en su época, gozó de gran fama, el abad Marie. En 1775, con el patrocinio de D'Alembert, fue nombrado profesor de matemática en la Escuela de Guerra, cargo que ocupó hasta 1780. En 1783 fue nombrado Miembro Adjunto de la Académie des Sciences. En 1787 fue designado miembro de la comisión ancargada de conectar entre sí los observatorios de París y de Greenwich, lo que lo condujo a sus estudios sobre geodesia y a su famoso teorema sobre los triángulos esféricos. En 1791 fue nombrado miembro de la comisión encargada de diseñar el nuevo sistema de pesas y medidas. Fue profesor de Institut Polytechnique y de la École Normal. Sus obras más importantes son "*Essai sur la théorie des nombres*" (1798), "*Exercises de calcul integral*" (1811) y, fundamentalmente, "*Éléments de géometrie*" (1794). En lo que hace al proceso de formación de la inferencia inductiva, merece ser mencionada "*Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*" (1805), en cuyo apéndice, titulado "*Sur la méthode des moindres carrés*", expuso su método de los cuadrados mínimos para el tratamiento de los errores de observación no sistemáticos.

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646-1716) nació en Leipzig en el seno de una familia con tradición jurídica y académica (su padre fue profesor de moral y su abuelo materno profesor de derecho en la Universidad de Leipzig). Ya en el período de sus estudios secundarios se evidenció como un erudito. En 1661 ingresó al Ateneo de Leipzig, del que egresó, en 1664, como "Magister" en filosofía y derecho. En 1666 obtuvo su doctorado en la Universidad de Altdorf. En 1667 se radicó en Nuremberg donde, con la influencia del Príncipe Elector de Meinz, fue designado como funcionario del Estado (corresponde a esta época su "*Hypothesis physica*"). En 1672 fue designado funcionario de la embajada alemana en París. En 1673 fue nombrado Miembro de la Royal Society. En ese mismo año, con el apoyo del abad J. Gallois, fue propuesto para acceder como Miembro de la Académie des Sciences de París, pero fue rechazado por su negativa a convertirse al catolicismo. A instancias de Christian Huygens (su "venerado maestro") se dedicó al estudio de las obras, entre otros, de Arquímedes, Apollonio, Pascal y Descartes. Perfeccionó la máquina aritmética de Pascal, creando un "Strumentum arithmeticum" que permitía, además de sumar y restar, multiplicar, dividir y extraer raíces. A la muerte del Príncipe Elector dejó sus cargos oficiales y se dedicó con exclusividad a la actividad científica. En 1675 aceptó el cargo de bibliotecario y consejero del Duque de Brunswick. Data de esta época su relación con J. Collins y J. Hudde y B. Spinoza. En 1682 publicó su "*Méthode générale pour mener les touchantes des lignes courbes sans calcul et sans réduction des quantités irrationelles*", en el que resume los procedimientos infinitesimales (de indiscutible originalidad e indiscutible potencia) creados durante su estancia en París. Con motivo del encargo de escribir la historia de la casa Brunswick-Lüneburg, realizó largos viajes por Austria e Italia, lo que le permitió relacionarse con los principales matemáticos de la época. Propulsó la creación de las academias de ciencias de Prusia y San Petersburgo. Sus principales aportes en el ámbito de la matemática se hallan en la correspondencia con J. Gallois (1678) sobre teoría de números (publicada en el Journal des Sçavants), en la correspondencia con Jean Bernoulli (1695), en la que figuran los primeros resultados referidos al cálculo de derivadas de orden superior, en los artículos sobre cálculo integral publicados en Acta Eruditorum en el período 1702-1703. En lo que hace a la teoría de la probabilidad, sus contribuciones más importantes están contenidas en "*De incerti æstimatione*" (1678) y en la ya mencionada correspondencia con Johann Bernoulli.

Lévy, Paul-Pierre (1886-1971) nació y falleció en París en el seno de una familia con tradición matemática. Recibió su educación primaria en el Lycée Louis le Grand, en el Lycée Saint Louis y en 1904 ingresó a la École Polytecnique, en la que fue alumno de Henri Poincaré y se graduó primero de su promoción como ingeniero en minas. En 1910 fue nombrado profesor en la École des Mines de Saint-Etienne y en 1913 ingresó como docente en la École Polytechnique, de la que llegó a ser Profesor Titular (1920). Posteriormente fue nombrado Profesor en la Universidad de California (Berkeley) (circunstancia de la que surgió su amistad con Jerzy Neyman). Enrolado en la artillería, en 1914, desarrolló los primeros métodos de tiro contra aviones. Fue miembro de la Académie des Sciences. Sus principales contribuciones fueron en el ámbito del análisis funcional y de la teoría de la probabilidad, en particular sobre la utilización de la función característica (dos teoremas fundamentales sobre la transformación de Fourier-Stieltjes, la fórmula de inversión y la relación entre el límite de una medida de Stieltjes y el límite de su transformación (1922)), el estudio de los procesos estocásticos aditivos ("*Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes*" (1934), "*L'addition de variables aléatoires enchainées et la loi de Gauss*" (1934), "*Proprietés asymptotiques des sommes de variables aléatoires enchainées*" (1935), "*Proprietés asymptotiques des sommes de variables aléatoires indépendantes ou enchainées*" (1935)) y la teoría del movimiento Browniano. Sus libros -que ejercieron una notable influencia en el desarrollo de la teoría de la probabilidad- fueron: "*Calcul des probabilités*" (1925) (en el que introduce el método de las funciones características), "*Théorie del'addition des variables aléatoires*" (1937) (en el que demuestra los primeros teoremas de los que hoy se denominan "martingalas") y "*Processus stochastiques et mouvement Brownien*" (1948).

Lexis, Wilhelm (1837-1914) nació en Eschweiler (Alemania) y falleció en Göttingen (Alemania). Estudió leyes, ciencias naturales y matemáticas, graduándose en la Universidad de Bonn en física y matemáticas. Hasta 1861 trabajó como investigador en los laboratorios químicos Bunsen en Heidelberg. Luego se trasladó a París, donde realizó estudios en ciencias sociales que lo condujeron a su primera publicación de importancia: "*Die französischen Ausfuhrprämien im Zusammenhange mit der Tarifgeschichte und Handelsentwicklung Frankreichs seit der Restauration*" (1870), en la que planteó la necesidad de fundamentar la teoría económica en información cuantitativa. En 1872 fue designado profesor en la Universidad de Estrasburgo, y en 1874 profesor en la Universidad de Dorpat en las cátedras de Economía, Etnología y Estadística. En 1876 fue designado profesor de Economía en la Universidad de Friburgo. Entre 1884 y 1887 se desempeñó como profesor en la Universidad de Breslau y, a partir de ese año como profesor de Ciencias Políticas en la Universidad de Göttingen. Contribuyó activamente en la mayor enciclopedia económica alemana ("*Handwörterbuch der Staatswissenschaften*"). Fue Director del primer Instituto de Ciencias Actuariales de Alemania. Sus mayores contribuciones a la estadística -que datan de la época de su estadía en la Universidad de Friburgo- tuvieron su origen en problemas de población, sociología y economía. Imprimió una nueva dirección al análisis de las series estadísticas y condujo a los estadísticos de un enfoque puramente matemático

-asociado a la obra de Laplace- hacia una aproximación empírica o inductiva. A partir del análisis de la varianza, intentó desarrollar métodos estadísticos para evaluar cambios cualitativos en las poblaciones. Su aporte más importante en teoría económica fue su crítica de la escuela austríaca. En general sus contribuciones en esta disciplina fueron mucho menos consideradas por sus contemporáneos que las referidas a la estadística.

Lhuillier, Simon Antoine Jean (1750-1840) nació y falleció en Ginebra. Se desempeñó como instructor privado. En 1775 se trasladó a Varsovia, donde fue designado tutor del príncipe Czartorinski. En 1789 retornó a Ginebra pero, con motivo de los desórdenes revolucionarios de la época, se trasladó casi de inmediato a Tubinga. A su regreso a Ginebra fue designado en la universidad como sucesor de Joseph Louis François Bertrand. Sus obras más importantes son "*De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum geometrice considerata seu de maximis et minimis*" (1782), "*Exposition élémentaire de principes des calculs superieurs, pour servir de reponse à la demande d'une thêorie claire et précise de l'infini mathématique*" (1786) (obra premiada en el concurso convocado por la Academia de Ciencias y Letras de Berlín en 1784), "*Polygonométrie ou la mesure des figures rectilignes et abrégé de isopêrimétrie élémentaire ou de la dépendance mutuelle des figures*" (1789) y "*Éléments d'analyse géométrique et d'analyse algébrique appliqués à la recherche des lieux géometriques*" (1809).

Lyapunov, Alexander Mikhailovich (1857-1918) nació en Yaroslavl (Rusia) (lugar de exilio del padre de Kolmogorov) y falleció en Odessa (Rusia). Ingresó en la Universidad de San Petersburgo en 1876 (en la época de mayor auge de la escuela matemática fundada por P. L. Chebychev). En 1885 fue nombrado profesor de Mecánica en la Universidad de Kharkov, en la que permaneció hasta 1902, año en que, al ser nombrado miembro de la Academia de Ciencias de San Petersburgo, regresó a dicha ciudad. Fue miembro de la Academia Nazionale dei Lincei. Su vida terminó en suicidio, después del fallecimiento de su esposa. Su interés en la teoría de la probabilidad se debió a la gran influencia que ejercieron sobre él los trabajos de Chebychev referidos al teorema central del límite (1879-1880), del cual obtuvo una expresión generalizada. Si bien su obra en esta materia comprende unos pocos trabajos -publicados entre 1900 y 1901- todos sobre el mencionado teorema central del límite, ejerció una notable influencia en el desarrollo de la teoría de la probabilidad.

Markov, Andrei Andreevich (1856-1922) nació en Ryazan (Rusia) y falleció en Petrogrado (hoy San Petersburgo). Cursó sus estudios primarios y secundarios en el Quinto Gimnasio de San Petersburgo. Desde temprana edad se caracterizó por su naturaleza rebelde, lo que le provocó, más tarde, serios enfrentamientos con el régimen zarista y con sus colegas académicos. En 1874 ingresó a la Universidad de San Petersburgo, en la que fue alumno de P.L. Chebychev, A.N. Korkin y E.I. Zolotarev y de la que egresó con medalla de oro. Fue miembro de la llamada escuela de matemática de San Petersburgo, fundada por Chebychev (de la cual, junto con Lyapunov, llegó a ser uno de sus discípulos más destacados). Al retirarse Chebychev, en 1883, lo sucedió en el dictado del curso de teoría de la probabilidad. En 1886 fue elegido miembro de la Academia de Ciencias de San Petersburgo. Sus contribuciones más importantes fueron en teoría de números, análisis matemático, diferenciación finita, estadística y teoría de la probabilidad. En esta última cabe mencionar sus trabajos sobre la generalización de la versión de Chebychev de la ley de los grandes números para variables no necesariamente independientes (1898), resultado que lo condujo a la definición de las hoy llamadas cadenas de Markov como modelo para el estudio de variables dependientes (1906). Estos trabajos dieron origen a una gran cantidad de publicaciones sobre la teoría de los procesos estocásticos autorregresivos de primer orden. Entre sus obras no se puede dejar de mencionar "*The calculus of probability*" (1924), un libro de texto que ejerció gran influencia sobre la obra, entre otros, de S.N. Bernstein, V.I. Romanovsky y J. Neyman.

Mersenne, Marin (1588-1648) nació en Oizé-en-Maine (Francia) y falleció en París. Cursó estudios en el colegio de La Flèche (en el que parece haber sido condiscípulo de Descartes) y en la Sorbona. En 1611 ingresó a la orden de los Minoriti Francescani. Entre 1615 y 1617 enseñó en varias ciudades de Francia y en 1619 se radicó en París donde, con el fin de favorecer la investigación científica y de comentar y popularizar la filosofía cartesiana, fundó una academia. Con el transcurso del tiempo (en 1666), el Ministro Colbert le otorgó existencia legal transformándola en la Académie des Sciences. Fue famoso por estar involucrado en todas las controversias científicas de la época. Fue probablemente el más importante de los "informadores" de su época (se denominaban "informadores" a aquellas personas que se encargaban de recoger y difundir, mediante la correspondencia epistolar, noticias sobre trabajos científicos en curso de elaboración). Se conserva su correspondencia con Bonaventura Cavalieri, Evangelista Torricelli, René Descartes, Pierre de Fermat, Girard Desargues, Blaise Pascal, Gilles Personnes de Roverbal, Francis van Schooten, Christiaan Huygens y John Wallis. A pesar de su condición religiosa, se debe a su obra la traducción (y consiguiente popularización en Francia) de "*Dialoghi sopra i due massimi sistemi del mondo. Tolemaico e Copernicano*" dos años después de la condena de G. Galilei.

Newton, Isaac (1642-1727) nació en Woolsthorpe (Lincolnshire) y falleció en Londres. Al concluir sus estudios primarios en Grantham, en 1661, ingresó al Trinity College de Cambridge en el que se graduó en 1668. En 1669 fue nombrado segundo profesor en la Cátedra Lucasiana de matemática en la Universidad de Cambridge (sucediendo a Isaac Barrow). En 1672 fue elegido miembro de la Royal Society, institución que presidió desde 1703 hasta su fallecimiento en 1727. En 1696, con motivo de su designación como "Warden of the Mint", se radicó en Londres, llegando a ser, en 1699, "Master of the Mint". En 1705 la reina Ana le otorgó el título de Caballero. Si bien es reconocido fundamentalmente como un matemático sobresaliente, descubridor junto con Gottfried Wilhelm Leibniz, del cálculo infinitesimal y de la ley de la gravitación universal y que no se le pueden atribuir contribuciones originales a la teoría de la probabilidad, de su correspondencia con Samuel Pepys (1693) se puede concluir que estuvo familiarizado con el cálculo de probabilidades, en particular, con un esquema de inspección sobre la acuñación de monedas basado en la suma ponderada de un gran número de monedas seleccionadas al azar, conocido como la "prueba del pyx". En 1687 publicó su obra magna, "*Principia mathematica*" (reeditada en 1713), en 1704, "*Optiks*" reeditada en 1717 y, en 1707, "*Arithmetica universalis*". No pueden obviarse en esta reseña de sus contribuciones el método de Newton-Raphson para aproximar las raíces de un polinomio y el método de Gauss-Newton para aproximar una función no-lineal mediante una función lineal, muy utilizados en el contexto estadístico.

Nicole, Pierre (1625-1695) nació en París. Sus trabajos están publicados en las Memorias de la Academie des Sciences. Fue compañero de B. Pascal y A. Antoine en la abadía de Port Royal. Su obra más importante fue "*La logique ou l'art de penser*", escrita en colaboración con A. Antoine (se los conoció como los lógicos de Port Royal) y publicada en 1662. Este tratado ejerció una profunda influencia sobre los pensadores de la segunda parte del siglo XVII y del siglo XVIII. Su contribución a la teoría de la probabilidad se halla en "*Examen et résolution de quelques questions sur les jeux*" (1733).

Paciol o Paciuolo o Paciolo, Luca (c.1445-c.1514) nació y falleció en Borgo San Sepolcro (Umbria). El hecho de haber nacido en la Umbria explica, en cierta forma, que fuera conocido también como Lucas de Burgo. Siendo muy joven se radicó en Venecia como instructor en una casa privada. En 1470, dedicó a su empleador un pequeño tratado de álgebra (cuyo texto de ha perdido completamente). Durante su estadía en Venecia ingresó a la orden de los "Minoriti Francescani". Completada su instrucción teológica y filosófica, comenzó su peregrinaje por Italia transformándose en lo que se podría denominar una "cátedra de matemática ambulante". En 1475 fue designado como profesor de la Universidad de Perugia. Fue durante su estadía en esta ciudad que escribió su segundo libro de álgebra (cuyo manuscrito se encuentra en la Biblioteca Vaticana). En 1481 se trasladó a Zara, en 1487 se estableció por un breve período en Florencia, luego retornó a Perugia y, en 1489, fue designado profesor de la Universidad de Roma ("la Sapienza"). En 1496, después de una breve estadía en Nápoles, retornó a Venecia. En 1498, aceptando una invitación de Ludovico Sforza, "El Moro", se estableció en Milán y, cuando este soberano perdió su corona a manos de los franceses, retornó a Florencia en compañía de Leonardo Da Vinci, con quien había trabado una fraterna amistad. Entre 1500-1506 se desempeñó como profesor en las universidades de Pisa y Boloña. En 1508 retornó a Venecia, en 1510 a Perugia y, en 1514 a Roma, donde probablemente murió (en una fecha incierta posterior al 30 de agosto de ese año). Su renombre se debe, fundamentalmente, a la monumental enciclopedia matemática publicada bajo el título de "*Summa di arithmetica, geometria, proportioni e proportionalitá*" (finalizada en 1487 y editada en Venecia en 1494), que tuvo una gran difusión, probablemente debido a que fue la primera obra impresa sobre esta materia (sólo se conocen dos libros anteriores de aritmética, debidos a Pietro Borghi y a Filippo Calandri, impresos en 1491, pero que son de escaso o nulo valor científico) y a que no estaba escrita en latín, sino en lengua vulgar. En realidad, en su texto se encuentran locuciones latinas, griegas y expresiones de los dialectos de todas las ciudades en las cuales había habitado. El estilo resultante fue tal que mereció por parte de su principal biógrafo, Bernardino Baldi, el siguiente comentario: "*Su decir es en tal medida bárbaro, grosero y poco feliz, que provoca náuseas a quien lo lee*". La "*Summa*" no es un libro original, sino que constituye un "racconto" de las obras de los matemáticos más importantes desde Euclides, y se caracteriza por la gran cantidad de interpolaciones extra-matemáticas (notas autobiográficas, datos históricos, información sobre los sistemas monetarios en uso, proverbios, frases en prosa y en verso de otros autores). Una parte importante de la "*Summa*" está dedicada a las aplicaciones de la aritmética a cuestiones comerciales, en particular, al cálculo de intereses comerciales y a un artificio utilizado desde comienzos del siglo XV en Génova y Venecia, conocido como "partida doble". En esta obra aparece por primera vez el problema denominado "de la división de apuestas". En 1508, como consecuencia de un curso dictado en Venecia, sobre los "*Elementos*" de Euclides, se editó ""*Libellus in tres partiales tractatus divisus quorumanque corporum regularium*" (1508), que ejerció una considerable influencia sobre la enseñanza de la matemática en el siglo XVI. En 1509 se publicó "*Divina proportione. Opera a tutti gl'ingegni perspicaci e curiosi necessaria*", que también constituye una especie de resumen del material científico de la época, y que consta de tres partes: la primera (concluida en 1497) posee la particularidad de estar ilustrada por Leonardo Da Vinci, la segunda es una monografía sobre arquitectura, inspirada en las obras de Vitrubio, y la tercera es la traducción al italiano de "*De corporibus regularibus*" de Pier Franceschi (mejor conocido como Piero della Francesca, "*Monarcha ali tempi nostri de la pictura*", según el comentario de nuestro "frate"). Se deben también a su autoría un escrito sobre el juego del ajedrez, titulado "*De ludis*" o "*Schifanoja*" (cuyo texto se perdió) y "*De vitribus quantitatis*" (cuyo manuscrito se encuentra en la Universidad de Boloña), que contiene una colección de problemas "curiosos". En su tercera parte, que no posee ningún carácter científico (es una colección de anécdotas, proverbios, poesías, etc.) figura, por primera vez, pero atribuido a Brunelleschi, la historia del huevo de Cristóbal Colón.

Pascal, Blaise (1623-1662) nació en Clermont-Ferrand (Francia) en el seno de una familia pertenenciente a la alta burguesía y falleció en París. No había cumplido aún los dos años cuando se le diagnosticó una extraña enfermedad que le causaba trastornos intestinales y atrofias en las articulaciones. Su madre, Antoniette Bégon, falleció cuando el tenía tres años. Su padre, Étienne, perteneciente a la llamada "nobleza de toga" y hombre de vasta y profunda cultura, dirigió su educación hacia los estudios humanísticos y luego, debido a sus notables habilidades, hacia la geometría, permitiéndole acompañarlo a las reuniones científicas organizadas por el matemático Marin Mersenne (que condujeron a la creación de la Académie Royale des Sciences), donde conoció a Gérard Desargues, Gilles de Roverbal, Pierre de Fermat, Pierre Gassendi, Pierre de Carcavi y al mismo Descartes. Influido por las obras de este autor, sus progresos en geometría fueron tan rápidos, que a los 16 años editó "*Essai pour les coniques*". Poco después, a fin de intentar aliviar el trabajo de su padre, concibió una máquina de calcular (conocida luego como "*la Pascaline*") cuya construcción le llevó tres años (y de la cual, aparentemente, Huygens habría contado con un modelo). Corresponden a esta época dos tratados sobre aritmética: "*Potestatum numericarum summa*" y "*Traité sur les ordres numériques*". En 1646, inspirado en los descubrimientos de Galileo Galilei y Evangelista Torricelli, comenzó con una serie de estudios barométricos dirigidos a generalizar la teoría de este último, que culminaron con el conocido como "experimento de Puy-de-Dôme". A partir de este momento y en razón de una declinación en su salud, se vio obligado a abandonar su fervoroso ritmo habitual de trabajo, iniciando lo que los autores en general han catalogado como un "período de vida mundana" (es en esta época que conoció a Antoine Gombaud, Chevalier de Méré, a la duquesa d'Aguillon y al duque de Roannez, con quien trabó una duradera amistad). En 1646 se produjo lo que se conoce como la "primera conversión" que lo acercó a la doctrina Jansenista, a partir de su conversaciones con los médicos La Bouteillerie y Deslandes (ambos discípulos de Duvergier de Hauranne, abad de Saint-Cyran). En 1654 fue testigo de la curación milagrosa, por el contacto con una reliquia (la santa espina) que se conservaba en Port-Royal, de una fistula lagrimal que sufría su sobrina. Esta circunstancia, unida a un accidente sufrido en la noche del 23 al 24 de noviembre del que resultó milagrosamente ileso (circunstancia a la que interpretó como una "advertencia celestial"), se retiró del "mundo" e ingresó a la famosa abadía de Port-Royal des Champs para dedicarse exclusivamente a la reflexión sobre cuestiones teológico-filosóficas (en 1652 su hermana Jacqueline había ingresado al convento de Port Royal y esta circunstancia parece haber sido muy significativa en su intensa evolución religiosa futura). Se deben a esta época las "*Lettres proviniciales*" (1656) -publicadas bajo el seudónimo de Louis Montalte-, la cuarta parte de "*La logique ou l'art de penser*", titulada "*De la méthode*", (publicada originalmente en forma anónima y atribuida en una reedición reciente enteramente a Antoine Arnauld y Pierre Nicole), la cual contiene elementos de su pensamiento probabilístico que ilustran sus ideas sobre su teoría de la decisión y constituyeron, de alguna forma, los fundamentos de la ley de los grandes números de Jakob Bernoulli (quien lo menciona en su "*Ars conjectandi*" como un autor desconocido "*magni acuminis et ingenii vir*") y los "*Pensées*" (1670), obras en las cuales la lengua francesa alcanzó su más alto grado de perfección. La única excepción a estas obras de carácter filosófico fue "*Diverses inventions en géometrie*" (1659), publicada bajo el seudónimo de Amos Dettonville (anagrama de Louis de Montalte). Su contribución a la teoría de la probabilidad está contenida fundamentalmente en su correspondencia con el matemático Pierre de Fermat, y en las consideraciones incluidas en el "*Traité du triangle arithmétique, avec quelques petits traités sur la même matière*" (impreso en 1654, pero dado a conocer públicamente en 1665), en el que figura el triángulo aritmético (conocido hoy como "triángulo de Pascal" pero que, presumiblemente, tomó del "*Cursus mathematicus nova brevi et clara methodo demonstratus per notas reales et universales circa usum cuiuscumque idiomatis intellectu faciles*" (1634) de Pierre Hérigone).

Pearson, Egon Sharpe (1895-1980) nació en Midhurst (Inglaterra). Fue alumno del Dragon College de Oxford y del Winchester College. En 1920 se graduó en el Trinity College de Cambridge. En 1921 ingresó como colaborador en el área Estadística del Laboratorio Galton de Estadística y Eugenesia que dirigía su padre (Karl) en el University College de Londres. En 1924 asumió el cargo de Editor Asistente de la revista Biometrika (fundada por su padre, F. Galton y W.R.F. Weldon). En 1925 conoció a Jerzy Neyman, quien había sido becado por el gobierno de Polonia para cursar un postgrado en el Laboratorio Galton. A partir de ese momento Galton y Neyman pasan a integrar un binomio que, al decir de M.S. Bartlett, "*...fue, en el ámbito científico, comparable por su fama al formado por Laurel & Hardy*" (o, trasladando la analogía de Bartlett a un lenguaje más autóctono, como Gardel y Lepera). En 1931 dictó conferencias en Iowa sobre la aplicación del control de calidad en la industria y en la Bell Telephone, en Nueva York. Esta actividad condujo a la creación por la Royal Society de la Industrial and Agricultural Research Section. En 1933 fue nombrado Director del Departamento de Estadística del University College, cargo en el que permaneció hasta 1960. En 1934 se casó (su esposa Eileen, con quien tuvo dos hijas, falleció en 1949). En 1935 recibió el Premio Weldon. en 1966 fue elegido Miembro de la Royal Society. En 1967 se casó por segunda vez y se trasladó a Cambridge (su segunda esposa falleció en 1975). Sus contribuciones más importantes (entre sus más de 140 publicaciones) son "*On the use and interpretation of certain test criteria for purposes of statistical inference*" (1928), "*On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses*" (1933) (ambos en colaboración con J. Neyman), en la que exponen la forma generalizada de la teoría de los tests de hipótesis, hoy conocida como de Neyman-Pearson, "*A survey of the uses of statistical method in the control and standarization of the quality of manufactured products*" (1933) y "*Sampling problems in industry*" (1934).

Pearson, Karl (1857-1936) nació en Londres y falleció en Coldharbour (Surrey, Inglaterra). Fue educado en el Kings' College de Cambridge, donde estudió matemática, filosofía e historia de las religiones. Después de graduarse con honores en matemática, en 1879, estudió leyes en Lincoln's Inn. En 1881 realizó estudios sobre física y metafísica en las universidades de Heidelberg y Berlín. De esta época data su primera publicación, "*The new Werther*", un ensayo autobiográfico en forma de cartas. En 1885 fue designado a cargo de la cátedra de Matemática Aplicada y Mecánica, y en 1911 a cargo de la cátedra de Eugenesia en el University College de Londres, en el que permaneció por el resto de su vida. En 1890 fue nombrado profesor de Geometría en el Gresham College, donde publicó "*The grammar of Science*" (1893). En 1896 fue elegido Miembro de la Royal Society y en 1898 fue distinguido por dicha Sociedad con la "Darwin Medal". En 1901, junto con F. Galton y W.R.F. Weldon, fundó la famosa publicación "*Biometrika*", cuya dirección ejerció hasta su fallecimiento. En 1911 fue nombrado Director del Instituto de Estadística Aplicada del University College -fundado en ese año por F. Galton-, en cuyo ámbito se hallaban los laboratorios de Biometría y Eugenesia (a su retiro, en 1933, este instituto fue dividido, creándose, por una parte, el Departamento de Eugenesia a cargo de Ronald Aylmer Fisher, con quien sostuvo una recordada polémica en los años que siguieron a la finalización de la Primera Guerra Mundial, y el Departamento de Estadística, dirigido por su hijo Egon Sharpe). Entre sus discípulos cabe recordar a G.U. Yule, L.N.G. Filon y W.S. Gosset (conocido por el seudónimo "The student"). En 1915 fue designado por la Universidad de Londres a cargo de una cátedra honoraria para alumnos no-graduados, a la cual, dada la fama que adquirió, asistieron docentes de todas las universidades del mundo. Los científicos que más influyeron sobre su pensamiento fueron Francis Galton y George Weldon. Fue la publicación de "*Natural inheritance*" (1889), en la que Galton resumió sus investigaciones del período 1877-1885, la que lo indujo a sus estudios sobre regresión en poblaciones biológicas, cuya culminación fue la definición del coeficiente de correlación (1897) (la idea de "correlación" se debe a Galton: "*Co-relation and their measurement chiefly from anthropometric data*" (1880), "*Regression towards mediocrity in hereditary stature*" (1885)). Su admiración por este científico se evidencia en "*The life, letters and labours of Francis Galton (1914-1930)*". Fue su participación en el desarrollo de las herramientas matemáticas necesarias para el estudio de la evolución a través de mediciones morfológicas, la que le permitió establecer los fundamentos de la moderna estadística matemática. Sus principales contribuciones sobre esta materia se refieren a la definición de un sistema generalizado de curvas de frecuencias, y a la definición de la distribución χ^2. Algunos de sus innovadores conceptos, como la idea de aplicar la matemática a los estudios de biología, y sus radicales -e impopulares para la época- ideas sobre el socialismo, la liberación femenina y la ética del librepensamiento generaron inevitables controversias que lo condujeron a una suerte de aislamiento científico que hizo que, por ejemplo, se autoexcluyera de la participación en congresos científicos, y que la Royal Society rechazara sus trabajos. A su formidable obra como docente e investigador se debe la elevación de la Estadística a la categoría de disciplina universitaria.

Peverone, Giovanni Battista (1509-1559) nació en Cuneo (Italia). Fue el único matemático del Piamonte del cual se tiene conocimiento en la primera mitad del siglo XVI. Su obra está contenida en un volumen titulado "*Due brevi e facili trattati, il primo d'aritmetica, l'altro di geometria*" (1559).

Poisson, Siméon Denis (1781-1840) nació en Pithiviers (Francia) en el seno de una familia muy modesta y falleció en París. Impulsado por un profesor de la École Central de Fontainebleu, en 1798 ingresó a la École Polytechnique. En 1800, con el apoyo de Laplace, fue designado como docente en dicho establecimiento, llegando en 1806 al cargo de profesor en reemplazo de J. Fourier. En 1812 fue nombrado profesor del Institut de France y en 1816 Miembro de la Academie des Sciences de París. Toda su vida se caracterizó por su dedicación a la investigación científica y a la docencia (según sus propias palabras: "*La vida es buena para dos cosas solamente: estudiar matemáticas y enseñar matemáticas*"). Sus principales contribuciones fueron en mecánica, análisis matemático y física matemática. Su interés por la teoría de la probabilidad y la estadística se manifestó hacia el final de su vida (sus primeras publicaciones sobre la materia datan de 1835). Influido por los resultados de Alexander Mikhailovich Lyapunov desarrolló una teoría asintótica para un muestreo hipergeométrico. Su obra más importante en esta disciplina es "*Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédés des règles générales du calcul des probabilités*", publicado en 1837. Sus publicaciones (a veces injustamente criticadas) porpularizaron la teoría de la probabilidad y, a través de las enseñanzas de Chebychev y Ostrogradsky, ejercieron una influencia importante sobre la escuela de San Petersburgo.

Popper, Karl Raimund (1902-1994) nació en Himmelhoff (distrito de Ober St. Veit, Viena) y falleció en East Croydon (Surrey, Inglaterra). En un vano intento por lograr una mayor integración cultural de la familia en la sociedad vienesa, sus padres, Simon Carl Siegmund y Jenny Schiff, renunciaron en 1900 a formar parte de la comunidad judía y se convirtieron al Luteranismo. Cursó su estudios primarios en la Frei Schule, una institución privada alternativa a la educación convencional, libre de la influencia del clericalismo de la burguesía vienesa. En 1918 abandonó la educación regular y se inscribió como estudiante no matriculado en la Universidad de Viena, a la que ingresó oficialmente en 1922. En 1924 obtuvo su habilitación como profesor de matemática, física y química en escuelas secundarias y, en 1930, fue designado profesor de la Escuela Superior de Schwegler en el 15° distrito escolar de Viena (cabe destacar que desarrolló una importante tarea social en la asociación educativa socialista dedicada a la juventud de la clase obrera: la "Kinderfeeunde"). Fue alumno, entre otros, de Wilhelm Wirtiger en cálculo infinitesimal, de Hans Hahn en teoría de números, de Max Elstein en física teórica y de Eduard Nelly en probabilidades. Fue a través del profesor Hahn que conoció los "*Principia*" de Bertrand Russell y Alfred Whitehead, una obra que ejerció gran influencia en sus trabajos sobre lógica. Entre 1935 y 1936 se radicó en Inglaterra, donde trabó contacto con A.J. Ayer, R.B. Braithwaite, G.E. Moore, I. Berlin, G. Ryle, F. von Hayek. L- Robbins y E. Gombrich. En 1936 fue designado profesor en el Caterbury University College de Christchurch, en Nueva Zelanda, donde elaboró dos de sus obras principales. "*La miseria del historicismo*" y "*La sociedad abierta y sus enemigos*". En 1945 von Hayek le ofreció un puesto como profesor enla London School of Economics y en 1949 fue nombrado profesor de lógica y metodología en la Universidad de Londres. Es en esta época que da a conocer sus artículos sobre las axiomatizaciones de la probabilidad. En 1958 fue nombrado miembro de la British Academy y en 1976, miembro de la Royal Society. En 1965 fue investido como Caballero de la Corona Británica. Fue galardonado, entre otros, con la insignia de Companion of Honour, el Premio Lippincott de la Academia Americana de Ciencias Políticas, el Premio Sonning de Dinamarca, el Premi Internacional Catalunya y la Medalla Goethe. Su obra más importante en el ámbito de la filosofía de la probabilidad es "*Lógica del descubrimiento científico*" (1934).

Price, Richard (1723-1791) nació en Tyn-Ton (Llangeinor, Glamorgan, Gales) y falleció en Newington (Green, Londres). Al igual que Th. Bayes, fue un Ministro No Conformista, además de matemático, político y economista. Si bien puede ser considerado como una de las figuras más importantes en el desarrollo del pensamiento cuantitativo en el siglo XVIII y el fundador de la ciencia actuarial en Inglaterra, es más conocido por ser el editor y comentarista del famoso "*An essay toward solving a problem in the doctrine of chances*" de Th. Bayes. En 1765 fue elegido miembro de la Royal Society y, en 1780, le fue otorgado el título de Divine Doctor por el Marischal College de Aberdeen. Sus principales aportes a la teoría actuarial están contenidos en "*Observations on reversionary payments on schemes for providing annuities for widows, and for persons in old age; on the method of calculating the values of assurances on lives and on the national debt*" (1771). Fue un ardiente defensor de las luchas de los colonos americanos por su independencia (se conserva una nutrida correspondencia con Benjamin Franklin y otros líderes de las guerras de la independencia norteamericana). En los últimos años de su vida se convirtió en un entusiasta simpatizante de la Revolución Francesa. Sus ideas a este respecto se hallan en su sermón "*A discourse on the love of our country*" (1789) (el cual dio origen a la famosa refutación de E. Burke, "*Reflections on the revolution in France, and on the proceedings of certain societies in London relative to that event*" (1789)).

Prokhorov, Yuri Vasilievich (1929) nació en Moscú. En 1949 se graduó en matemática en la Universidad de dicha ciudad. En 1952 ingresó al Instituto de matemáticas de la Academia de Ciencias de la URSS. En 1957 fue nombrado profesor en la Universidad de Moscú. En 1966 fue elegido Miembro Correspondiente y, en 1972 fue designado Miembro de la Academia de Ciencias de la URSS. En 1970 recibió el Premio Lenín. De 1978 a 1982 ocupó el cargo de Vicepresidente de la International Mathematical Union. Fue, durante 18 años, Director del Instituto Steklov. Si bien son numerosas sus publicaciones sobre estadística, matemática, teoría de colas y teoría de control estocástico, sus contribuciones más importantes se refieren a la teoría de la probabilidad. En particular, al desarrollo de métodos asintóticos para establecer las condiciones de transición, en el límite, de procesos estocásticos discretos a continuos. En el área de de los teoremas límite clásicos, merecen ser destacados sus resultados acerca de las condiciones de aplicabilidad de la ley fuerte de los grandes números ("*J. Bernoulli: On the law of large numbers*" (1986)), y de los teoremas límite locales para sumas de variables aleatorias independientes ("*Convergence of random processes and limit theorems of probability theory*" (1949)).

Quetelet, Lambert Adolphe Jacques (1796-1874) nació en Gantes y falleció en Bruselas. En 1819 obtuvo el doctorado en la Universidad de Gantes y en el mismo año fue nombrado Profesor de Matemática en la Universidad de Bruselas. En 1824 se trasladó a París, donde estudió astronomía y probabilidades. A su retorno a Bruselas fundó el Observatorio Real, especializándose en meteorología. A partir de 1830 se dedicó exclusivamente al estudio de la sociología y la estadística. Con la publicación del libro "*Sur l'homme et le dévelopment de ses facultés, ou essai de physique sociale*", su reputación alcanzó nivel internacional. En él introduce el hoy famoso concepto de "*l'homme moyen*" como resumen de algunas características de una población (posteriormente este concepto se fue desvirtuando, hasta terminar como sinónimo de "hombre ideal", con respecto al cual todos los desvíos debían interpretarse como errores). En 1846 publicó "*Lettres á S.A.R. le Duc Régnant de Saxe-Coburg et Gotha sur la théorie des probabilités, appliquée aux sciences morales et politiques*", obra en forma de una serie de cartas a dos príncipes alemanes de los cuales había sido tutor (uno de los cuales era el príncipe Alberto que se había casado con la reina Victoria de Inglaterra en 1840),en la que proporciona una idea más completa de su "*homme moyen*", hallando que los desvíos, igual que los errores de observación, poseen distribución Normal. Esta aplicación de la función Normal a las ciencias sociales ejerció enorme influencia en los trabajos de Francis Galton y en la formulación de la teoría cinética de los gases por parte de J.C. Maxwell. Propuso, además, una clasificación de las fuentes de variación en causas accidentales, periódicas y constantes, adelantándose informalmente a lo que sería el análisis de la varianza o la descomposición de series cronológicas. Fue un escritor prolífico (su obra abarca una docena de volúmenes) y un científico inquieto que participó en la fundación, entre otras, de la Statistical Society de Londres y la Statistical Section de la British Association for the Advancement of Science. Fue el primer miembro extranjero de la American Statistical Association.

Ramsey, Frank Plumpton (1903-1930) nació y falleció en Cambridge (Inglaterra). Su padre era matemático y ejerció como profesor y luego como presidente de Magdalene College y su hermando Michael fue arzobispo de Canterbury. Su educación se desarrolló en Winchester y en el Trinity College de Cambridge, Toda su vida estuvo muy influida por su amigo el filósofo austríaco Ludwig Wittgenstein, cuyo "*Tractatus logico-philosophicus*" tradujo al inglés. De una carta dirigida a Wittgenstein a fines de 1923, en la que refiere que "*...desde Enero estoy horrorosamente desconectado; mucha de mi energía fue absorbida por una deasafortunada pasión por una mujer casada, la cual me produjo tal desorden psicológico, que es necesario que recurra al psicoanálisis. De modo que probablemente para Navidad me traslade a Viena, donde pienso permanecer nueve meses para ser analizado*", se puede concluir que estaba pasando por un período conflictivo de su vida. No obstante, parece que la terapia ejerció algún efecto positivo, ya que a fines de 1924 asumió como miembro del King's College y profesor de matemática en la Universidad de Cambridge y se casó con Lettice Baker. Su trabajo abarcó los ámbitos de la matemática y los fundamentos de la probabilidad. Falleció a los 26 años.

Roberval, Gilles Personnes de (1602-1675). Su nombre original era Gilles Personnes, luego asumió el nombre de su lugar de nacimiento, Roverbal (diócesis de Beauvais), y por él fue habitualmente designado. Falleció en París. En 1628 inició su carrera científica. En 1631, después de su participación en el asedio de La Rochelle, se estableció en París siendo designado profesor en el Colegio Gervais. Poco tiempo después fue nombrado profesor del College de France, cargo que desempeñó por el resto de su vida. En 1666 fue elegido Miembro de la Académie des Sciences. Se conoce una sola publicación suya, que trata sobre estática (incluida en una obra de M. Mersenne). El carácter de las polémicas que sostuvo con R. Descartes, E. Torricelli, Ch. Wren, B. Cavalieri y A. Girard lo muestran como una persona vulgar y violenta. En 1693, a instancias de J. Gallois, la Académie des Sciences publicó la totalidad de sus memorias. Entre éstas cabe mencionar "*Observations sur la composition des mouvements et sur les moyens de trouver les touchantes des lignes courbes*", en la cual figura el método para la construcción de tangentes a curvas planas, conocido como método de Roverbal (y debería ser denominado como método de Roverbal-Torricelli, dado que fue desarrollado contemporáneamente por ambos autores en forma independiente). Otros trabajos importantes son: "*Traité des indivisibles*", "*De trochoide ejusque spatio*", "*De recognitione œquationum*" y "*De geometrica planarum et cubicarum œquationum resolutione*".

Saunderson (o Sanderson), Nicholas (1682-1739) nació en Thurlston (Yorkshire) y falleció en Cambridge. Al año de vida, a raíz de un violento ataque de viruela, quedó ciego. A pesar de esta desgracia se destacó por su amplio conocimiento sobre literatura clásica y por su sorprendente habilidad para realizar complicados cáclulos artiméticos. En 1707 se radicó en Cambridge. En el Christ's College ejerció la docencia privada con tanto éxito que, en 1711, a instancias de I. Newton, fue designado Cuarto Profesor Lucasiano de matemáticas (como sucesor de William Whiston). En 1728 le fue otorgado el doctorado en derecho por Jorge III. Si bien sus trabajos de investigación abarcaron prácticamente todas las ramas de la matemática de su época (paradójicamente su especialidad fue la óptica), su fama de basa en su calidad como profesor. Su obra, editada en su totalidad en forma póstuma, está compuesta por: "*Elements of algebra*" (1740), la cual se inicia con un artículo titulado "*The palpable arithmetic of Doctor Saunderson*", escrito por su sucesor en la cátedra de Cambridge, con el fin de hacer conocer un método de cálculo de su invención que constaba de un tablero dividido en pequeños cuadrados (parecido a un ábaco) en el que los números eran representados mediante la colocación de alfileres y las figuras geométricas por hilos que conectaban dichos alfileres y "*The method of fluxions to a select number of useful problems*" (1756), en el que expuso una interpretación geométrica del método Newtoniano de las fluxiones. Algunas investigaciones recientes han planteado la posibilidad de que sea el verdadero autor del famoso teorema de Bayes.

Savage, Leonard Jimmie (1917-1971) nació en Detroit (Michigan) y falleció en New Haven (Connecticut). estudió en las universidades de Wayne (donde se graduó en filosofía) y Michigan (donde se graduó en matemáticas en 1941). Cursó estudios post-doctorales en el Institute for Advanced Studies de la Universidad de Cornell y, posteriormente, ingresó al Institute of Advanced Studies de la Universidad de Princeton. En 1944 se incorporó al Statistical Research Group de la Universidad de Columbia. Fue profesor de las universidades de Chicago (1947), Michigan (1960) y Yale (1964). Sus investigaciones abarcan las áreas de estadística, matemática, economía y biología. Fue un fecundo colaborador de B. de Finetti en la interpretación subjetiva de la probabilidad (debe destacarase su generalización de su teorema de la intercambiabilidad). Su contribución más importante es, sin duda, su axiomática de la "*probabilidad personal*" y su relación con la inferencia estadística. Su libro "*The foundations of statistical inference*" (1954) y sus trabajos posteriores sobre la importancia de los métodos Bayesianos ejercieron una enorme influencia sobre los probabilistas y estadísticos de su época. Publicó, además, una gran cantidad de trabajos en probabilidad, estadística y economía, en colaboración, entre otros, con P.R. Halmos, I.R. Savage (su hermano, también distinguido estadístico). M. Friedman, J.H. Lorie y, en particular, con Lester Dubins ("*How to gamble if you must: Inequalities for stochastic processes*" (1965)).

Simpson, Thomas (1710-1761) nació y falleció en Market Bosworth (Leicestershire), en el ámbito de una familia de pañeros. Conflictos familiares hicieron que a los 14 años de edad abandonara su casa y se estableciera en una localidad vecina, en una pensión de una tal señora Swinfield (viuda de un sastre de la localidad, 30 años mayor que él y con dos hijos de su edad), con quien, tiempo después, contrajo matrimonio. La relación accidental con un mercachifle y adivino que se alojaba en la misma pensión le permitió obtener un libro de aritmética y otro de astrología, y convertirse él mismo en un hábil adivino. Precisamente un desafortunado caso de adivinación provocó su traslado y el de su familia a Derby, donde continuó con su oficio de pañero y sus estudios de matemática, y comenzó a desempeñarse como instructor en una escuela nocturna. En 1735 se radicó en Londres, trabajando como pañero y enseñando matemáticas en sus horas libres. Inmediatamente ingresó a uno de los numerosos clubes matemáticos existentes en dicha ciudad, haciéndose acreedor a una muy justificada reputación como docente y autor de libros de texto. Entre 1737 y 1757 publicó once volúmenes, entre textos y ensayos producto de sus investigaciones sobre teoría de fluxiones, álgebra, geometría, trigonometría, mecánica, astronomía, teoría de la probabilidad y rentas vitalicias. Más allá de las controversias que suscitaron y de las numerosas acusaciones de plagio, la calidad de los textos (muchos de nivel elemental) parece verse avalada por el número de sus ediciones en Inglaterra, Estados Unidos, Francia y Alemania. En 1743 abandonó Londres para ejercer el cargo de segundo maestro de matemáticas de la Real Academia Militar de Woolwich. En 1745 fue elegido miembro de la Royal Society. Fue un asiduo colaborador del Ladies' Diary (una publicación anual con una sección sobre matemática elemental), siendo designado su editor en 1754. Está considerado, cronológica e intelectualmente, como un continuador de la obra de A. de Moivre. Su contribución a la teoría de la probabilidad está contenida en dos pequeños tratados: "*The nature and laws of chance. The whole after a new, general and conspicuous manner and illustrated with a great variety of examples*" (1740) y "*The doctrine of annuities and reversions*" (1742) (en los que intentó presentar gran parte de las teorías desarrolladas por de Moivre, pero en un lenguaje apto para ser comprendido por un público más amplio) y en las memorias "*On the advantage of taking the mean of a number of observations in practical astronomy*" (1755) y "*Miscellaneous tracts on some curious, and very interesting subjects in mechanics, physical-astronomy, and speculative mathematics*" (1757) en la cual -continuando con los trabajos de R. Côtes ("*Opera miscellanea, sive æstimatio errorum in mixta mathesi*" (1722)) postuló la conveniencia de utilizar el valor medio de un conjunto de observaciones realizadas en igualdad de condiciones como estimación del verdadero valor y la necesidad de asignar "a priori" una distribución de probabilidades a los errores de observación, principio que constituyó la base de los estudios posteriores sobre el problema de la inferencia.

Stirling, James (1692-1770) nació en Garden (Escocia) y falleció en Edinburgo. En 1710 ingresó a la Universidad de Oxford y es recordado por su participación en los tumultos que tuvieron lugar entre los años 1714 y 1716 con motivo de los cambios producidos en la monarquía inglesa. En 1717, por sugerencia del embajador de la "Serenissima" en Londres y con la esperanza de obtener una cátedra en la Universidad de Padua, se trasladó a Venecia. No pudiendo acceder al cargo de profesor, retornó a Inglaterra en 1719. En 1726 fue nombrado miembro de la Royal Society. Hasta 1735 ejerció como profesor en una academia privada en

Londres. En ese mismo año asumió la dirección de una compañía minera escocesa. Absorbido por sus labroes empresarias, en 1754, abandonó sus estudios y renunció a su cargo en la Royal Society. Sus principales trabajos fueron: "*Lineæ tertii ordinis newtonianæ, sive illustratio tractatus D. Newtoni de enumeratione linearum tertii ordinis*" (1717) y "*Methodus differentialis, sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum*" (1730), en la que figura la famosa fórmula para el cálculo de factoriales (obtenida contemporáneamente y en forma independiente por A. de Moivre).

Strode, Thomas (c.1626-c.1699). Es muy poco lo que se conoce sobre su vida. Su nombre aparece mencionado por primera vez en 1676 como recipiendario de una carta del matemático inglés John Collins (en el marco de la disputa entre Newton y Leibniz por la paternidad del cálculo infinitesimal). De acuerdo con la "*Athenæ oxoniensis: An exact history of all the writers and bishops who have had their education in the mos antient and famous university of Oxford*", publicada por Anthony a' Wood en 1691/92, se sabe que "*...era hijo de un caballero de Somerset*" y que asistió a la Universidad de Oxford entre 1642 y 1645, que fue alumno del prestigioso profesor Abraham Woodhead (quien seguramente despertó su interés por la matemática). Aparentemente, también estudió leyes, ya que en 1657 fue admitido como abogado en el Inner Temple. Sólo publicó dos trabajos: "*A short treatise of the combinations, elections, permutations and composition of quantities; illustrated by several examples, with a new speculation of the differences of the powers of numbers*" (1678) (en la última parte de este trabajo, bajo el título "*Mathematical observation on dice*", desarrolló algunas fórmulas de interpolación conocidas hoy como fórmulas de las diferencias de Newton) y "*A new and easie method to the art of dyalling*" (1688).

Struyck, Nicolaas (1687-1769) nació en Amsterdam en el seno de una familia burguesa. Fue educado en ciencias clásicas, matemática y ciencias naturales. Se desempeñó durante toda su vida como profesor de matemática, cosmografía, astronomía y contabilidad. Si bien hoy es casi desconocido, gozó, en su época de una gran consideración. En 1749 fue designado Miembro de la Royal Society y, en 1755, de la Académie des Sciences de París. Su contribución a la teoría de la probabilidad está contenida en su único libro dedicado exclusivamente a las ciencias matemáticas: "*Uytreekening der Kansen in het Spelen, Door de Arithmetica en Algebra, Beneevens eene Verhandeling van Looterijen en Interest*" (1716), en el que se puede notar la influencia ejercida por los trabajos de Huygens, Montmort, Jakob y Nikolaus Bernoulli y De Moivre. Es autor de muchas otras obras entre las que cabe destacar las dedicadas a rentas vitalicias ("*Calcul des rentes viagères*" (1740)) y estadística de poblaciones humanas ("*Calcul des rentes viagères*", suplemento a su obra de 1740 (1753)) (dado que sus trabajos fueron todos escritos en holandés, su influencia fue solamente local).

Tartaglia, Niccoló (c.1505-1557) nació en Brescia (República de Venecia, hoy Italia) y falleció en Venecia. Su padre, Micheletto "il Cavallaro" ("*di casata ignota*" según su propia expresión en "*Delli quesiti et inventioni diverse*" (1546)) falleció cuando él era muy pequeño. De acuerdo a su propio relato, a fin de escapar al despiadado saqueo al que Gaston De Foix sometió a la ciudad de Brescia el 19 de febrero de 1511, su familia, confiando en que sería respetada la santidad del lugar, buscó refugio en la catedral. Pero los soldados franceses penetraron en el templo y uno de ellos le infirió cinco heridas en la cabeza y una en el rostro, cuya secuela se tradujo en un defecto al hablar que le valió el apodo de "il tartaglia" que conservó durante el resto de su vida. En su testamento, redactado tres días antes de su muerte, declaró heredero de sus bienes a un hermano suyo al que designa con el nombre de Giampietro Fontana, de lo que se podría deducir que ése era su verdadero apellido. No se sabe qué circunstancias lo llevaron a seguir la carrera científica y a dedicar su vida a la enseñanza. Son sus obras las únicas que arrojan alguna luz sobre su vida. Por ejemplo, de ellas se pude concluir que entre 1521 y 1533 vivió en Verona, que en 1534 se estableció en Venecia como "maestro público", que en 1548 se trasladó a Brescia, pero que inmediatamente regresó a Venecia, donde permaneció hasta su muerte. Es conocida su polémica con G. Cardano (y el discípulo de éste, L. Ferrari) en relación con los métodos de solución de la ecuación cúbica, en los años 1547 y 1548. Su origen humilde le impidió acceder a una primera instrucción suficiente. Esta circunstancia explica por qué, en vez de escribir en latín, según la costumbre general de la época, lo hizo en dialecto bresciano. En 1537 se publicó su tratado "*Nova scientia inventa*", en el que introdujo la ciencia de la balística. Su obra más importante es el "*General Trattato di numeri et misure*", que compone una inmensa enciclopedia matemática (en caracteres tipográficos actuales ocuparía una 4000 páginas) inconclusa que consta de seis partes. Las dos primeras fueron publicadas en 1556, las tres siguientes, en forma póstuma, en 1560. La sexta parte, publicada también en 1560, fue escrita por un "*docto matemático*" (?), a partir de material fragmentario hallado después de su muerte. Es en esta última parte en la que, después de una exposición sobre temas de álgebra (en particular, sobre las ecuaciones de segundo grado), figura una serie de problemas algunos de los cuales se relacionan con la teoría de la probabilidad y el cálculo combinatorio.

van Schooten, Franz (1615-1661) nació y falleció en Leyden. A la muerte de su padre (también matemático y del mismo nombre) lo sucedió en la cátedra de matemática de la Escuela de Ingeniería de la Universidad de esta ciudad. Entre sus discípulos cabe destacar a Christiaan Huygens y a Jan de Witt. A partir de 1635 mantuvo una profunda amistad con René Descartes. En 1649 publicó al versión latina de "*La géometrie*" ("*Geometria opera atque studio*") enriquecida por comentarios (de los cuales son de su autoría "*De cubicarum æquationum resolutione*", "*Additamentum in quo continentur solutio artificiosissima defficilis cujusdam problematis; et generalis regula de extrahendi quibuscumque radicibus binomiis*", "*Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico in lucem editus*" y "*Notæ et animadversiones tumultuariæ in universum opus*") que resultaron fundamentales en la difusión de las ideas de Descartes. Su obra "*Exercitationes mathematicæ*" (1657) contiene como apéndice "*De ratiotiniis in ludo aleæ*" de Christiann Huygens.

Van Waveren Hudde, Johann (1633-1704) nació y falleció en Amsterdam. En 1672, el emperador Guillermo III lo designó Burgomaestre de dicha ciudad, cargo que con intermitencias en las que se desempeñó como Canciller del Almirantazgo, ejerció por 21 años. Sus contribuciones más importantes en el ámbito de la matemática están relacionadas con la resolución de ecuaciones algebraicas (tema en el que continuó los resultados de la "*Geometria opera atque studio*" (1637) de Descartes), los máximos, los mínimos y las tangentes de curvas algebraicas (como continuador de la obra de de Fermat). Sus aportes a la teoría de la probabilidad están contenidos en la correspondencia que mantuvo, a partir de 1665, con C. Huygens y, a partir de 1671, con J. De Witt, en particular sobre el problema de la evaluación de probabilidades a partir de frecuencias observadas, en el cálculo de las rentas vitalicias ("*Stads-finatie geredresfeert in den jaare 1679*"). Parece haber tenido alguna participación en el diseño de la lotería de Amsterdam (a beneficio de los refugiados franceses), pero más en su condición de funcionario de la ciudad que de probabilista.

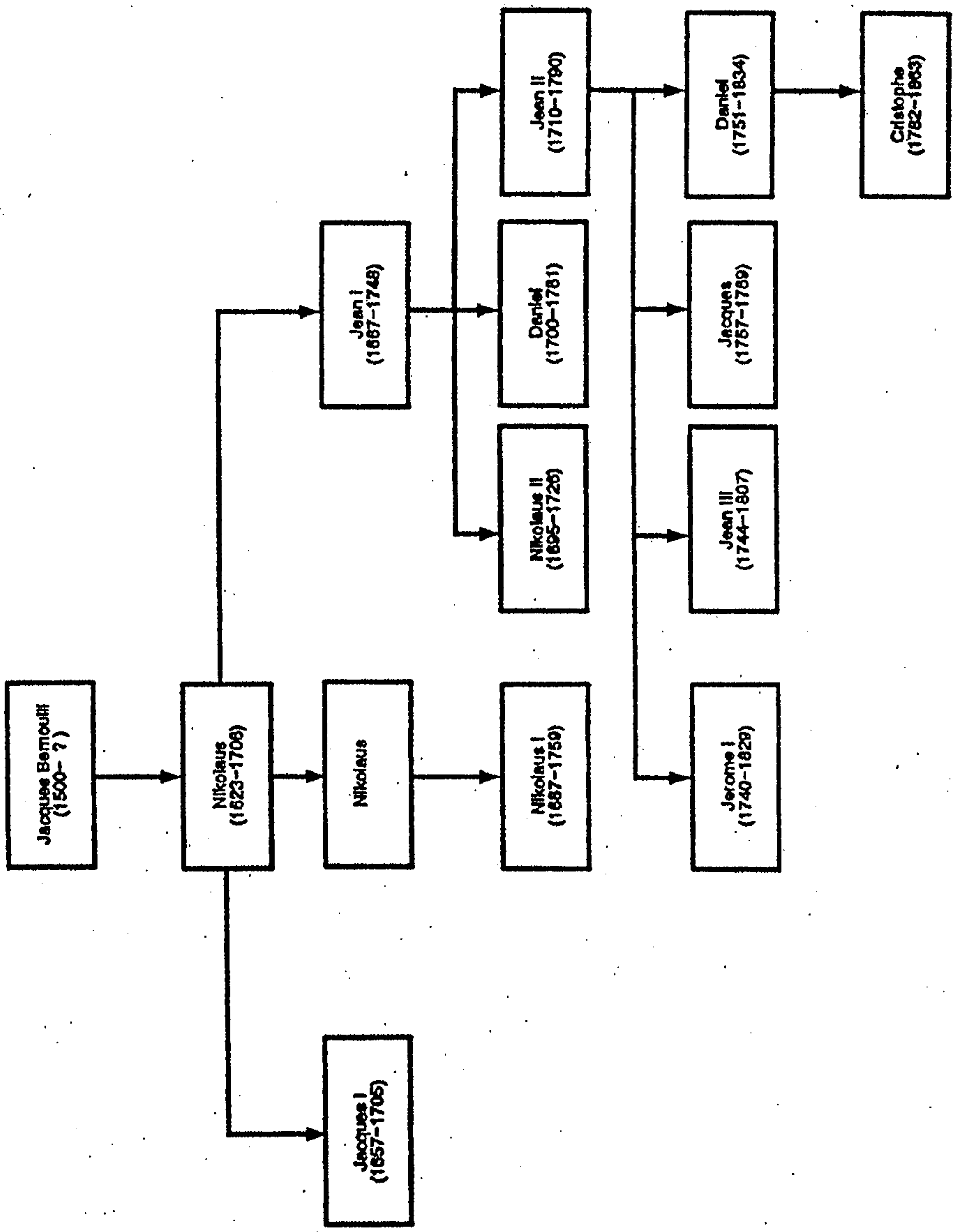
Von Bortkiewicz, Ladislaus (o Vladislav von Bortkiewitsch, de acuerdo con la transliteración del original cirílico) **(1868-1931)** nació en San Petersburgo en el seno de una familia de ascendencia polaca y falleció en Berlín. En 1890 se graduó en leyes en la Universidad de dicha ciudad. Luego estudió con Wilhelm H.A.R. Lexis en Gotinga, obteniendo su doctorado en 1893. Entre 1895 y 1897 ejerció tareas como docente privado en Estrasburgo. En 1899 regresó a Rusia y se desempeñó como empleado en la oficina de la Comisión de Pensiones del Ferrocarril. Entre 1899 y 1900 ejerció tareas docentes en el Liceo Alexandrowsky de San Petersburgo. En 1901 fue designado profesor de Economía y Estadística en la Universidad de Berlín, cargo que desempeñó por el resto de su vida. Entre 1906 y 1923 ejerció como profesor en la Berlin Handel Shonschule. Además de la economía clásica, sus contribuciones abarcaron temas tan amplios como la teoría de la población, la teoría actuarial, la economía matemática y la física estadística. Merecen ser destacados los trabajos referidos al estudio de: **i)** las poblaciones estacionarias y la construcción de tablas de mortalidad ("*Die mittlere Lebensdauer: Die Methoden ihrer bestimmung und ihr Verhätnis zur Sterblichkeitsmessung*" (1893), "*Über die Methoden der 'standard population'*" (1904), "*Die Sterbeziffer und der Frauenüberschuss in der stationären und der progressiven Bevölkerung*" (1911)) que lo condujeron a la ciencia actuarial ("*Risicoprämie und Sparprämie bei lebensversicherungen auf eine Person*" (1903), "*Korrelationskoeffizient und Sterblichkeits index*" (1929)); **ii)** los números índices ("*Zweck und Struktur einer Preisindexzahl*" (1923-1924)); **iii)** las medidas de concentración del ingreso ("*Die Disparitätsmasse der Einkommensstatistik*" (1931)); **iv)** la interpretación estadística de la radioactividad ("*Die radioaktive Strahlung als Gegenstand wahrscheinlichkeitstheoresticher Untersuchungen*" (1913)); **v)** los trabajos de Lexis sobre la dispersión ("*Die Theorie der Bevölkerungs und Moralstatistik nach Lexis*" (1904), "*Der mittlere Fehler des zum Quadrat erhobenen Divergenzkoefficienten*" (1918)) cuya generalización generó el moderno análisis de la varianza y **vi)** la teoría de rachas ("*Die Iterationen*" (1917)): se debe también a su ingenio el desarrollo de una econometría Marxista ("*Value and price in the marxian system*" (1906-1907), "*On the correction of Marx's* *fundamental theoretical construction in the third volume of 'Capital'"* (1907), "*Die Rodbers'sche Grundrententheorie und die Marx'sche Lehre von der absoluten Grundrente*" (1910-1911). Su trabajo más conocido es "*Das Gesetz der Kleinen Zahlen*" (1898), en el que demuestra que ciertos eventos que se caracterizan por su baja frecuencia, en una población grande, pueden ser modelizados mediante la utilización de la distribución de probabilidades de Poisson, a la que denominó ley de los fenómenos raros (es aquí donde figura su famoso ejemplo sobre el número de soldados del ejército prusiano muertos anualmente por coces de caballo) y que significó el redescubrimiento de la distribución de Poisson "*...después de medio siglo de un vacío casi perfecto*" (Haight, F.). Sus trabajos influyeron notablemente sobre los científicos alemanes, italianos y del norte de Europa. En 1903 fue elegido miembro del International Statistical Institute.

von Mises, Richard Martin Edler (1883-1953), hermano del famoso economista Ludwig Von Mises, nació en Lemberg (en el Imperio Austro-Húngaro) y falleció en Boston. En 1901 se graduó en matemática en la Akademische Gymnasium de Viena y en 1906, en ingeniería mecánica en la Universidad Tecnológica de dicha ciudad. En 1908 fue nombrado profesor en la Universidad de Estrasburgo. Al finalizar la Primera Guerra Mundial -en la que actuó como asesor técnico de las fuerzas aéreas de Alemania y Austria- se radicó en Dresde (el hecho que Estrasburgo hubiera pasado a ser francesa, impidió su retorno a esta ciudad), siendo designado profesor de la Facultad de Tecnología. En 1920 fue nombrado profesor de Matemática Aplicada y Director del Instituto de Matemática Aplicada de la Universidad de Berlín. En 1921 fundó la primera publicación periódica sobre matemática aplicada (*Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik*), la cual ejerció una profunda influencia en el desarrollo de esta disciplina en todo el mundo. En 1933, dada la situación política que se vivía en Alemania, aceptó el cargo de Profesor y Director del Instituto de Matemática en la Universidad de Estambul, cargo que desempeñó hasta 1939, año en el que pasó a la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Harvard, en la que fue designado inmediatamente domo profesor Gordon McKay en aerodinámica y matemática aplicada. Pocos meses antes de su fallecimiento realizó una clasificación de sus temas de investigación en ocho grupos: análisis aplicado, cálculo diferencial e integral, mecánica, hidrodinámica, aerodinámica, geometría constructiva, teoría de la probabilidad y estadística y filosofía. Las más importantes entre sus numerosas publicaciones en materia de probabilidad fueron: "*Fundamentalsatze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*" y "*Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*", ambas de 1919. Publicó, además, tres libros sobre este tema: "*Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und Theoretischen Physik*" (1931), "*Probability, statistics and truth*" (1928) y "*Mathematical theory of probability and statistics*" (1964).

Wald, Abraham (1902-1950) nació en Cluj Hungría (hoy Rumania) y falleció en Travancore (india). Debido a que el precepto judío del "sabbath" le impedía asistir a la escuela el sábado, recibió su educación primaria en el seno familiar. En 1927 ingresó a la Universidad de Viena en la que se doctoró en matemáticas en 1931. Inmediatamente después de su graduación trabajó en geometría bajo la dirección de Menger. Dado que las condiciones políticas y económicas en Viena, en la década de 1930 le hicieron imposible acceder a una posición académica, se desempeñó como tutor en matemáticas del banquero y economista Karl Schlesinger. De esta relación surgió su interés por las economía y la econometría. En 1932 ingresó al Austrian Institute for Business Cycle Research, en el cual trabajó durante cinco años en las áreas de econometría y economía matemática (sus principales contribuciones en esta materia se refieren a los números índices, las superficies de indiferencia, la existencia y unicidad de soluciones para las formas generalizadas de los sistemas de ecuaciones de producción de Walras, el problema del duopolio de Cournot y las ecuaciones en-diferencias estocásticas). En 1938 aceptó la invitación de la Cowles Commission para trabajar como investigador en el área de econometría en los Estados Unidos (habida cuenta de su condición de judío ortodoxo y el hecho que casi toda su familia fuera asesinada por los nazis, puede afirmarse que esta invitación salvó su vida). Poco tiempo después fue llevado por H. Hotelling a Columbia, como investigador en el Departamento de Estadística Matemática, y allí permaneció el resto de su vida. Se casó con Lucille Lang, de quien tuvo dos hijos. Fue un docente insuperable y uno de los personajes claves en la separación de las escuelas estadísticas americana e inglesa. Sus contribuciones más importantes pertenecen al ámbito de la estadística matemática, en particular, a la teoría estadística de la decisión y al análisis secuencial. En "*Contributions to the theory of statistical estimation and testing hypotheses*" (1939) introdujo los conceptos fundamentales de "*espacio de decisión múltiple*" y de "*función de riesgo*", y el principio de "*minimización del riesgo máximo*". La culminación de su obra en teoría de la decisión es "*Statistical decision functions*" (1950), en la que incorporó sus investigaciones anteriores sobre Bayes y las soluciones minimax. En 1943 propuso una formulación matemática y una solución general al problema de los tests secuenciales. Estos resultados y las investigaciones posteriores sobre este tema se halla en "*Sequential analysis of statistical data*". En 1950, aceptando una invitación del gobierno, viajó a la India con su esposa a fin de dictar una serie de conferencias, pero fallecieron al accidentarse el avión que los transportaba.

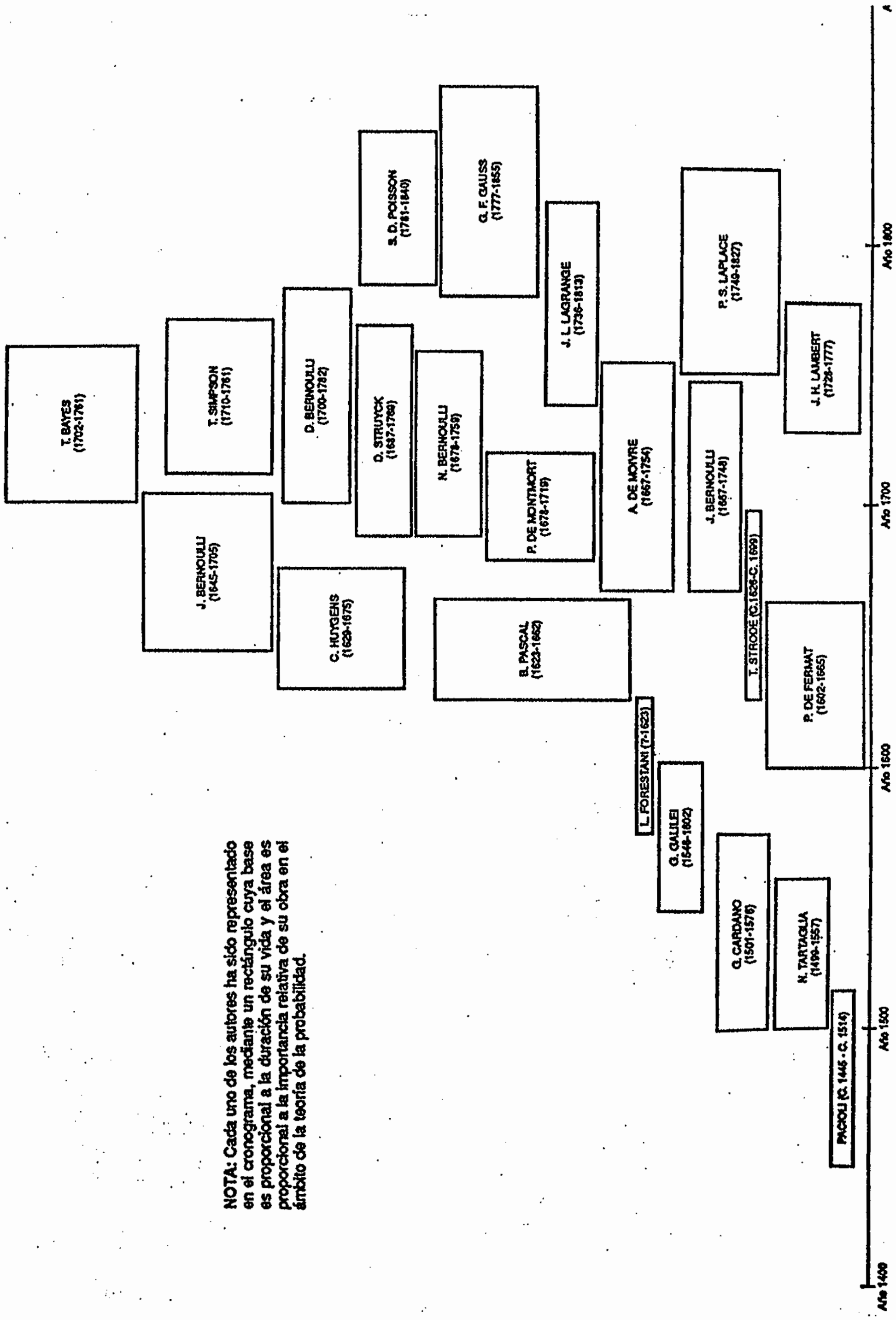
Apéndice 4

La familia Bernoulli



Apéndice 5

Cuatro siglos de probabilidad clásica



NOTA: Cada uno de los autores ha sido representado en el cronograma, mediante un rectángulo cuya base es proporcional a la duración de su vida y el área es proporcional a la importancia relativa de su obra en el ámbito de la teoría de la probabilidad.

Epifonema

"*¿Qué me impide soñar que alguna vez*
descifré la sabiduría
y dibujé con aplicada mano los símbolos?"

(J.L. Borges: "*Elogio de la sombra*"

Bibliografía

- Aczel, J.: "Über die Begründung der Additions-und Multiplikationsformen von Bedingten Wahrscheinlichkeiten". Magyar Tud. Akad. Mat. Kutaró Int. Kozl., vol. 6, 1961.
- Adams, E.: "On rational betting systems". Archiv für Mathematische Logik und Grundlagenforschung, vol. 6, 1964.
- Adams, W.J.: "*The life and times of the central limit theorem*". Kaedmon, 1974.
- Adrain, R.: "Research concerning tje probabilities of the errors wich happen in making observations". The Analyst, vol. 1, 1809. Reeditado en Stigler, S., 1980.
- Albert, M.: "Die Falsifikation statisticher Hypothesen". Journal for General Philosophy of Science, vol. 23, 1992.
- Allamand, J.N.S. (ed.): "*Oeuvres philosophiques ete mathématiques de Mr. G.J. 'sGravesande*". Marc Michell Rey, 1774.
- Arbuthnot, J.: "". Philosophical Transactions of the Royal Society, vol. 27, 1710.
- Arbuthnot, J.: "*Of the laws of chance or, a method of calculation of the hazards of game*" (1692). Cuarta edición Mutte-Bathurst, 1738.
- Arnauld, A.; Nicole, P.: "*La logique ou l'art de penser*" (1662). Reeditado por Flammarion, 1970.
- Ayer, A.J.: "Two notes on probability". En "*The concept of a person and other essays*". MacMIllan, 1963.
- Bacon, F.:"Novum organum, sive indicia vera de interpretatione naturæ et regno hominis". En "*The works of Francis Bacon*". Londres, 1825-1836. Reeditado en Spedding, J.; Heath, D.; Ellis, R.L. (eds.), 1860-1864.
- Balch, M.; Fishburn, P.C.: "Subjective expected utility for conditional primitives". En "*Essays on economic behavior under incertainty*". North-Holland, 1974.
- Barendregh, H.: "*The type free lambda calculus*". North-Holland, 1977.
- Barendregh, H.: "*The lambda calculus, its syntax and semantics*". North-Holland, 1984.
- Bar-Hillel, H.; Wagenaar, W.A.: "The perception of randomness". Advanced in Applied Mathematics, vol. 12, 1991.
- Barone, F.: "*Il neopositivismo logico*". Laterza, 1953.
- Barrois, T.: "*Essai sur l'application du calcul des probabilités aux assurances contre l'incendie*". París, 1835.
- Bauny, R.P.E.: "*Sommes des pechez qui se commettent en tous les états*". Lyon, 1646.
- Baxter, D.: "National income and taxation of the United Kingdom". En Bamhauer, M. (ed.): "*Compte rendu Congrés International de Statistique á la Haye*", 1870.
- Bayes, Th.: "Essay toward solving a problem in the doctrine of chances". Philosophical Transactions of the Royal Society, vol. 53, 1764.
- Benacerraf, P.; Putnam, H.: "*The philosophy of mathematics. Selected readings*". Cambridge University Press, 1983.
- Bennett, D.J.: "*Randomness*". Harvard University Press, 1998.
- Benoiston de Châteneuf, L.F.: "*Mémoire sur la durée des familles nobles de France*". París, 1845.
- Bernoulli, D.: "Specimen thoriæ novæ de mensura sortis".Commentarii Academiæ Scientiarum Imperialis Petropolitanæ, vol. 5, 1738. Traducido como "Exposition a new theory on the measurement of risk". Econometrica, vol. 22, 1954. Reeditado en "*Werke von Daniel Bernoulli*", 1982.
- Bernoulli, D.: "Quelle est la cause physique de l'inclination des plans des orbites des planètes". Recueil des pièces qui on remporté le Prix de l'Academie Royale des Sciences, vol. 3, 1734.
- Bernoulli, D.: "*Mensura sortis ad fortuitam successionem rerum naturaliter contingentium applicata*" /1770-1771). Reeditado en Speiser, D. (ed.): "*Die Werke von Daniel Bernoulli*". Birhäuser, 1982.
- Bernoulli, D.: "Diiudicatio maxime probabilis plurium observationem discrepatium atque verisimillima inductio inde formanda". Acta Academiæ Imperialis Petropolitanæ. Ubiversidad de Basilea, 1778.
- Bernoulli, J.: "*Meditationes*" (1684-1690). En "*Die Werke von Jakob Bernoulli*". Birkhäuser, 1975.
- Bernoulli, J.: "Qæstiones nonullæ de usuris, cum solutione problematis de sorte alearum". Acta Eruditorum, 1690. Reeditado en "*Die Werke von Jakob Bernoulli*". Birkhäuser, 1975.
- Bernoulli, J.: "*Ars conjectandi*". Thurnisiorum, 1713.
- Bernoulli, N.: "*De usu artis conjectandi in jure*". Basilea, 1709. Reeditado en "*Die Werke von Jakob Bernoulli*". Birkhäuser, 1975.

- Bernstein, S.N.: "Über eine Anwendung der Mengenlehre aufein aus de Theorie der säkularen Störungen herrührendes Problem". Mathematische Annalen, vol. 71, 1912.
- Bernstein, S.N.: "On the axiomatic foundation of the theory of probability". (original en ruso). Communications of the Khariv Mathematical Society, vol. 15, 1917. Resumido en la traducción al inglés de Skotz, en Maistrov, L.E. (1974).
- Bernstein, S.N.: "*Theory of probability*" (original en ruso). Traducido al inglés, State Publishing House, 1927a.
- Bernstein, S.N.: "Sur l'extension du théoreme limité du calcul des probabilités aux sommes des quantités dépendantes". Mathematische Annales, vol. 97, 1927b.
- Berti, P.; Regazzini, E.; Rigo, P.: "Finitely additive Radon-Nikodým theorem and concentration of a probability with respect to a probability". Proceedings American Mathematical Society, vol. 114, 1992.
- Berti, P.; Rigo, P.: "Conglomeabilità, disintegrabilità e coerenza". Serie Ricerca Teorica, nº 11, Dipartamento di Statistica, Università di Firenze, 1989.
- Bertrand, J.: "*Calcul des probabilités*". Gauthier-Villars, 1889.
- Bessel, F.W.: "Über den Ort des Polasterns" (1815).
- Bessel, F.W.: "Untersuchungenüber die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler" (1838). En Abhandlungen der Könglich säschischen Gesellschaft der Wissenschaften, vol. 2, 1875.
- Bienaymé, I.J.: "Mémoire sur la probabilité des résultats moyens des observations. Demonstration directe de la règle de Laplace". Mémoires présentés par divers savants a l'Academie Royal des Sciences de l'Institut de France, vol. 5, 1838.
- Bienaymé, I.J.: "*De la loi de multiplication et la durée des families*". París, 1845.
- Bienaymé, I.J.: "Considertions à l'appui de la décuverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindre carrées". Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, vol. 37, 1853.
- Bienaymé, I.J.: "Remarque sur les differences qui distinguent l'interpolation de M. Cauchy de la métode des moindres carrées, , et qui assurent la superiorité de cette méthode". Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, vol. 37, 1853.
- Bochner, S.: "Additive set functions on groups". Annals of Mathematics, vol. 40, 1939.
- Boltzmann, L.: "Über die mechanische Bedeutung des sweiten Hauptsatzes der Wármetheorie". Wissenschaft liche Abhandlungen, vol. 1, 1866.
- Boltzmann, L.: "Über das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmolekülen". Wissenschaftliche Abhandlungen, vol. 1, 1871.
- Boltzmann, L.: "Weitere Studien über das wärmegleichewitch unter Gasmolekülen". Wissenschaftliche Abhandlungen, vol. 1, 1872.
- Boltzmann, L.: "Bermerkungen über einige Probleme der mechanischen Wärmertheorie". Wissenschaftliche Abhandlungen, vol. 2, 1877a.
- Boltzmann, L.: "Über die Beizehungen zwischen dern Huptsätze der mechanischen Wärmetheorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung" (1877b). En Hasenhörl, F. (ed.). Leipzig, 1909.
- Boltzmann, L.: "Über die mechanische Analogien des zweiten Hauptszases der Thermodynamik". Wissenschaftliche Abhandlungen, vol. 3, 1887.
- Bolzano, B.: "Wissenschaftslehre", 1837.
- Bonnot de Condillac, E.: "Essai por l'origine des connaisance humaines" (1746). En "*Œuvres*", París, 1798.
- Bonnot de Condillac, E.: "*Traité des sensations*". 1754. En "*Œuvres*", París, 1798.
- Boole, G.: "Further observations on the theory of probabilities". The Philosophical Magazine, Serie 4, vol. 2, 1851. Reeditado en "*Collected logical works*". Open Court, 1952.
- Boole, G.: "Sketch of a theory and method of probabilities founded upon the calculus of logic". En "*Collected logical works*". Open Court, 1952.
- Boole, G.: "*An investigation of the law of thought on wich are founded the mathematical theories of logic and probabilities*". MacMillan, 1854. Reeditado por Dover, 1958.
- Boole, G.: "On the application of the theory of probabilities to the question of testimonies or judgements". Transactions of the Royal Society of Edinburgh, vol. 21, 1857. Reeditado en "*Collected logical works*". Open Court, 1952.
- Borel, E.: "Sur quelques points de la théorie des fonctions". Annales École Normal Supérieur, vol. 12, 1895.
- Borel, E.: "Sur les séries de Taylor". Acta Mathematica, vol. 20, 1897. Reeditado en "*Œuvres de Emile Borel*". Centre National de la Recherche Scientifique, 1972.

- Borel, E.: "*Leçons sur la théorie des fonctions*". Gauthier-Villars, 1898.
- Boscovich, R.G.: "*Theoria philosophiæ naturalis*", 1758.
- Boscovich, R.G.; Maire, C.: "*De litteraria expeditione por pontificiam ditionem ad dimitiendas dua meridiani gradus*". Palladis, 1755.
- Boscovich, R.G.; Maire, C.: "*Voyage astronomique et geographique, dans l'état de l'eglise*". Tilliard, 1770.
- Bowditch, N.: "*Observations of the comet of 1807*", 1809.
- Bowditch, N.: "*Elements of the orbit of the comet of 1811*", 1815.
- Bowley, A.L.: "*Elements of statistics*". King, 1901.
- Box, G.F.: "*R.A. Fisher: The life of a scientist*". Wiley, 1978.
- Boyle, R.: "Origin of forms and qualities" (1666). En "*The works of the Honourable Robert Boyle*". Londres, 1772.
- Boyle, R.: "Some considerations about the reconcileableness of reason and religion" (1675). En "*The works of the Honourable Robert Boyle*". Londres, 1772.
- Braithwaite, R.B.: "*The foundations of mathematics and other logical essays*". Routledge-Kegan, 1931.
- Bravais, A.: "Analyse mathématique sur les probabilités des erreurs de situation d'un point". Mémoires presentés par divers savants à l'Academie Royale des Sciences de l'Institut de France, vol. 9, 1846.
- Bridgman, P.: "*The logic of modern physics*". MacMillan, 1927. Reeditado por Arno Press, 1980.
- Bridgman, P.: "*The nature of physical theory*". Princeton University Press, 1936. Reeditado por ARNA Press, 1980.
- Brier, G.W.: "Verification of forecasts expressed in terms of probability". Monthly Weather Review, vol. 42, 1950.
- Briggs, H.: "*Trigonometria britannica*". Londres, 1633.
- Broadbent, T.A.A.: "Ramsey, Frank Plumpton". En "*Dictionary of scientific biographies*", Scribner's, 1975.
- Bruns, H.: "Über die Darstellung von Fehlergesetzen". Astronomische Nachrichten, vol 43, 1897.
- Bruns, H.: "Zur collectiv-Masslehre". Philosophische Studien, vol. 14, 1898.
- Bruns, H.: "Wahrscheinlichkeitsrechnung Kollektivmasslehere". En "Beiträge zur Quotenrechnung". Berichte der Königlich sächsischen gesellschaft der Wissenschaften, vol. 58, 1905.
- Bruns, H.: "Das Gruppenschema für zufällige Ereignisse". Abhandlungen der Königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, vol. 29, 1906.
- Brunschvicg, L.; Boutroux, P. (eds.): "*Œvres de Blaise Pascal*". Hachette, 1908.
- Buffon, G.-L.: "Essai d'arithmetique morale". Supplément à la histoire naturelle, vol. 4, Imprimerie Royale, 1777.
- Burdach, K.F.: "Die Persönliche Besonderheit". Blicke ins Leben, vol. 2, 1842.
- Butler, J.: "*The analogy of religion, natural and revealed, to the constitution and course of nature*" (1689), Londres, 1736.
- Byrne, E.: "*Probability and opinion: A study in the medieval presuppositions of post medieval theories of probability*". Martinus Nijhoff, 1968.
- Calude, C.S.: "*Information and randomness*". Springer-Verlag, 1994.
- Calude, C.S.: "Who is afraid of randomness?". http://www.cs.auckland.ac.nz/staff-cgi-bin/mjd/secondcgi.pl, 2000.
- Calude, C.S.; Grozea, C.: "The Kraft-Chaitin inequality revisited". http://www.cs.auckland.ac.nz/staff-cgi-bin/mjd/secondcgi.pl, 1996
- Campanino, M.; Spizzichino, F.: "Prediction, sufficiency and representation of infinite sequences of exchangeable random variables". Technical Report, Istituto di Matematica "G. Castelnuovo", Università di Roma, 1981.
- Caramuel, J.: "*Cursus mathematicus*". Campania, 1670.
- Cantelli, F.P.: "La tendenza ad un limite nel censo del calcolo delle probabilitá". Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, vol. 41, 1916a.
- Cantelli, F.P.: "Sulla legge dei grandi numeri". Atti Reale Academia Nazionale dei Lincei, Memorie C1.Sc.Fis., vol. 11, 1916b.
- Cantelli, F.P.: "Sulla probabilità como limite della frequenza". Atti Reale Academia Nazionale dei Lincei, Memorie C1.Sc.Fis., vol. 26, 1917a.
- Cantelli, F.P.: "Su due applicazioni d'un teorema di G. Boole alla statistica matematica". Atti Reale Academia Nazionale dei Lincei, Memorie C1.Sc.Fis., vol. 26, 1917b.
- Cantelli, F.P.: "Una teoria astratta del calcolo delle probabilità". Giornale dell'Istituto degli Attuari, vol. 3, 1932.

- Cantelli, F.P.: "Consideration sur la convergence dans le calcul des probabilités". Annales de l'Institut Henri Poincaré, vol. V, 1935.
- Cantelli, F.P.: "*Alcune memorie matematiche: Onoranze di Francesco Paolo Cantelli*". Giuffrè, 1958.
- Caramuel, J.: "*Mathesi biceps, vetus et nova*". Campania, 1670.
- Carathéodory, C.: "Über das lineare Mass von Punktmengen-eine Verallgemeinerung des Längenbegriffes". Nachr. Akademy Wiss Göttingen Mat-Phys. II KL, vol. 4, 1914.
- Carathéodory, C.: "*Vorlesun gen über reelle Funktionen*". Teubner, 1918.
- Cardano, G.: "*Pratica arithmeticæ et mesurandi singularis*". Milán, 1539. Reeditado en "*Opera omnia*", 1663.
- Cardano, G.: "*Liber de ludo aleæ*" (1564). En "*Opera omnia*", 1663. Reeditado como "*The book on games of chance*". Rinehart-Winston, 1953.
- Cardano, G.: "*Opus novum de proportionibus numerorum*". Basilea, 1570.
- Caritat-Condorcet, M.-J. N.: "Nouvelles expériences sur la résistance des fluides" (1777). En Arago, F.; Codorcet-O'Connor, A. (eds.), París, 1847-1849.
- Caritat-Condorcet, M.-J. N.: "Mémoire sur le calcul de probabilités". Histoire de l'Academie Royal des Sciences, 1781-1784.
- Caritat-Condorcet, M.-J. N.: "*Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des voix*". Imprimerie Royal, 1785.
- Caritat-Condorcet, M.-J. N.: "*Probabilité*". En Encyclopedie Méthodique-Diderot & D'Alembert, Premiers Editeurs de l'Encyclopedie, 1785.
- Caritat-Condorcet, M.-J. N.: "*Éléments du calcul des probabilités et son application aux jeux de Hasard, a la loterie, et aux jugements des hommes, avec un discours sur les avantages des mathématiques sociales*". Royez, 1805.
- Castelnuovo, G.: "*Calcolo delle probabilitá*". Albrighi-Segati, 1919.
- Casti, J.L.: "Chaos, Gödel and truth" (1990). En Casti, J.L.; Karlqvist, A. (1990)).
- Casti, J.L.: "*Searchig for certainty*". Morrow, 1991.
- Casti, J.L.; Karlqvist, A.: "*Beyond belief*". CRC Press, 1990a.
- Catalan, E.C.: "Deux problèmes des probabilités". Journal de Liouville, vol. 6, 1841.
- Catalan, E.C.: "Un noveau principe des probabilités". Académie Royale des Sciences des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, Bulletin 44, 1877.
- Catalan, E.C.: "Problèmes et Théorèmes des probabilités". Académie Royale des Sciences des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, Bulletin 46, 1886.
- Catalan, E.C.: "Sur une application du théorème de Bayes, faite par Laplace". Mémoire de la Societé Royale des Sciences de Liège, Deuxième Série, Tome XV, Mélanges Mathématiques, vol. 299, 1888.
- Chaitin, G.J.: "On the length of programs for computing finite binary sequences". Journal Association Computing Machinery, vol. 13, 1966.
- Chaitin, G.J.: "A theory of program size formally identical to information theory". Journal ACM, vol. 22, 1975.
- Chaitin, G.J.: "*Algorithmic information theory*". Cambridge University Press, 1987.
- Chaitin, G.J.: "Randomness in arithmetic". Scientific American, vol. 259, 1988.
- Chaitin, G.J.: "*Information, randomness, and incompletness*". World Scientific, 2da. edición, 1990.
- Charleton, W.: "*Physologia Epicuro-Gassendo-Charletoniana*" (1654). Reeditado en Londres, 1966.
- Chateauneuf, A.; Jaffray, J.Y.: "Archimedean qualitative probabilities". Journal of Mathematical Psychology, vol. 28, 1984.
- Chebychev, P.L.: "Des valeurs moyennes", 1867.
- Chebychev, P.L.: "Sur deux théoremes relatifs aux probabilités". 1887.
- Cholak, P. (ed.): "*Computability theory: current trends and open problems*". Contemporary Mathematics, American Mathematical Society, 2000.
- Chrystal, G.: "On some fundamental principles in the theory of probability". Transactions of the Actuarial Society of Edinburg, vol. 11, 1891.
- Church, A.: "An unsolvable problem of elementary number theory". American Journal of Mathematics, vol. 58, 1934.
- Church, A.: "A note on the Entscheidungsproblem". Journal of Symbolic Logic, vol. 1, 1936.
- Church, A.: "An unsolvable problem of elementary number theory". American Journal of Mathematics, vol. 58, 1936.

- Church, A.: "On the concept of a random sequence". Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 46, 1940.
- Cifarelli, D.M.; Regazzini, E.: "Some considerations about mathematical statistics teaching methodology suggested by the concept of exchangeability". En Koch, G.; Spizzichino, F. (eds.)(1982).
- Cifarelli, D.M.; Regazzini, E.: "de Finetti's contribution to probability and statistics". Statistical Science, vol. 11, 1996.
- Clausius, R.: "Ueber die Natur derjenigen Bestandtheile der Erdamosphäre durch welche die Lichtreflexion in derselben bewirk wird". Annales Phys. Chem, vol. 76, 1849.
- Clausius, R.: "On the motive power of heat, and on the laws wich can be deduced from it for the theory of heat" (1850).
- Copeland, B.J.: "The Church-Turing thesis". Stanford Encyclopedia of Philosophy, http://www.plato.stanford.edu/, 1997.
- Costantini, D.; Geymonat, L.: "*Filosofia della probabilità*". Feltrinelli, 1982.
- Côtes, R.: "Opera miscellanea sive æstimatio errorum in mixta mathesi, per variationes partium trianguli plani et sphærici". En Smith, R. (ed.), Cambridge, 1722.
- Cottrell, A.: "Keynes's theory of probability and its relevance to his economics: Three thesis". Economics and Philosophy, vol. 9, 1993.
- Cournot, A.A.: "Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses". París, 1838.
- Cournot, A.A.: "Memoire sur les applications du calcul des chances à la statistique judiciaire". Journal de Mathématiques pures et appliquées, vol. 3, 1838.
- Cournot, A.A.: "*Exposition de la théorie des chances et des probabilités*". Hachette, 1843. Reeditado en "*Cournot, A.A. Œvres complètes*". Vrin, 1973-1984.
- Cover, T.M.; Gacs, P.; Gray, R.M.: "Kolmogorov's contributions to information theory and algorithmic complexity". Annals of Probability, vol. 17, 1989.
- Craig, "*Theologiæ christianæ principia mathematica*". Child, T., 1699. Reeditado en Leipzig, 1755 y traducido en "*John Craig's mathematical principles of christian theology*". Journal of the History of Phylosophy, 1991.
- Cramér, H.: "*Random variables and probability distributions*". Cambridge University Press, 1937.
- Cramér, H.: "*Mathematical methods of statistics*". Princeton University Press, 1946.
- Cumberland, R.: "*De legibus nature disquisitio philosophica*". Flesher-Hooke, 1672.
- Czuber, E.: "Das Petersburger Problem". Archiv der Mathematik und Physic, vol. 67, 1882.
- Czuber, E.: "*Theorie der Beobachtungsfehler*". Teubner, 1891.
- Czuber, E.: "Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen". Jahresbericht der deutschen Mathematiker vereinigung, vol. 7, 1899.
- Czuber, E.: "*Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlersaugsleichung, Statistik und Lebensverscherung*". Teubner, 1903.
- Daboni, L.; Wedlin, A.: "*Statistica*". UTET, 1982.
- D'Alembert, J.B.L.R.: "Réflexions sur le calcul des probabilités". Opuscules Mathématiques, vol. 2, 1761. Reeditado en "*Oeuvres de D'Alembert*". Belin, 1821-1822.
- D'Alembert, J.B.L.R.: "Doutes et questions sur le calcul des probabilités". Mélanges de Littérature d'Histoire et de Philosophie, vol. 5, 1767.
- D'Alembert, J.B.L.R.: "*Opuscules mathématiques*", París, 1768.
- D'Alembert, J.B.L.R.: "*Reflexions sur le calcul des probabilités*", París, 1780.
- Dalla Chiara, M.L.: "*Language, quantum, music*". Kluwer, 1999.
- Daniell, P.J.: "A general form of integral". Annals of Mathematics, vol. 19, 1918.
- Daniell, P.J.: "Integrals in an infinite number of dimensions". Annals of Mathematics, vol. 20, 1919a.
- Daniell, P.J.: "Functions of limited variation in an infinite number of dimensions". Annals of Mathematics, vol. 21, 1919b.
- Daniell, P.J.: "Further properties of the general integral". Annals of Mathematics, vol. 21, 1920.
- Daniell, P.J.: "Integral products and probability". American Journal of Mathematics, vol. 43, 1921.
- Daston, L.: "D'Alembert's critique of probability theory". Historia Mathematica, vol. 6, 1979.
- Daston, L.: "Probabilistic expectation and rationality in classical probability theory". Historia Mathematica, vol. 7, 1980.
- Daston, L.: "*Classical probability in the enlightment*". Princeton University Press, 1988.
- Daston, L.: "How probabilities came to be objective and subjective". Historia Mathematica, vol. 21, 1994.

- David, F.N.: "Studies in the history of probability and statistics I: Dicing and gaming". Biometrika, vol. 26, 1955.
- David, F.N.: "*Games, gods and gambling, The origins an history of probability an statistical ideas from the earliest timesto the Newtonian era*". Harper, 1962.
- Davies, M.: "*The universal computer: The road from Leibniz to Turing*". W.W. Norton & Co., 2000.
- Davis, J.B.: "*Keynes's philosophical development*". Cambridge University Press, 1994.
- de Beguelin, N.: "*Sur l'usage du principle de la raison suffisante dans le calcul des probabilités*". París, 1767.
- de Beguelin, N.: "*Sur les suites ou séquences dans la lotterie de Genes*". París, 1767.
- de Candolle, A.: "*Histoire des sciences et des savants depuis deux siècles*". París, 1873.
- de Finetti, B.: "Sulla proprietà conglomerativa delle probabilità subordinate". Rendiconti Regio Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, vol. 63, 1930a.
- de Finetti, B.: "Fondamenti logici del ragionamento probabilistico". Bolletino dell'Unione Matematica Italiana, vol. 5, 1930b. Reeditado en de Finetti, B. (1981).
- de Finetti, B.: "Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio". Memorie della Reale accademia dei Lincei, vol. IV, 1930c. Reeditado en de Finetti, B. (1981).
- de Finetti, B.: "Problemi determinati e indeterminati nel calcolo della probabilità". Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, vol. XII, 1930d. Reeditado en de Finetti, B. (1981).
- de Finetti, B.: "Sui passaggi al limite nel calcolo delle probabilità". Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, vol. 63, 1930e.
- de Finetti, B.: "A proposito dell'estensione del teorema delle probabilità totali alle classi numerabili". Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, vol. 63, 1930f.
- de Finetti, B.: "Ancora sull'estensione alle classi numerabili del teorema delle probabilità totali". Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, vol. 63, 1930g.
- de Finetti, B.: "*Probabilismo: Saggio critico sulla teoria della probabilità e sul valore della scienza*". Logos. Biblioteca di Filosofia, Perrella, 1931a. Traducción al inglés en Erkenntnis, vol. 31, 1980.
- de Finetti, B.: "Sul significato soggettivo della probailità" (1931b). Traducción al inglés en de Finetti, B. (1981).
- de Finetti, B.: "Sul concetto di probabilità". Rivista Italiana di Statistica, Economia e Finanza, Año V, 1933.
- de Finetti, B.: "Statistica e probabilità nel concetto di R. von Mises" (1936). Traducción al inglés en de Finetti, B. (1993).
- de Finetti, B.: "La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives". Annales Institut H. Poincaré, 1937. Traducción al inglés en Kyburg, H.E.; Smokler, H.E. (eds.)(1980).
- de Finetti, B.: "Cambridge probability theorists" (1938a). Traducción al inglés en The Manchester School of Economic and Social Studies, vol. 53, 1985.
- de Finetti, B.: "Resoconto critico sul Colloquio di Ginevra intorno alla teoria della probabilità". Giornale Istituto Italiano degli Attuari, vol. 9, 1938b.
- de Finetti, B.: "Sur la condition d'equivalence partielle". Colloque Consacré à la Théorie des Probabilités, Hermann, 1938c.
- de Finetti, B.: "Sull'impostaziones assiomatica del calcolo delle probabilità. Agiunta alla nota sull'assiomatica delle probabilità". Annali Triestini, Sec. II, vol. 19, 1949.
- de Finetti, B.: "Sulla preferibilità". Giornale degli Economisti e Annali di Economia, vol. 11, 1952.
- de Finetti, B.: "*Probabilitá, induzione e statistica*" (1949). Traducción al inglés, Wiley, 1972.
- de Finetti, B.: "La struttura delle distribuzioni in un insieme astratto qualsiasi". Giornale Istituto Italiano degli Attuari, vol. 18, 1955. Traducción al inglés en de Finetti, B. (1972).
- de Finetti, B.: "La probabilità e la statistica nei rapporti con l'induzione, secondo i diversi punti di vista". Atti Corso CIME su Induzione e Statistica, Varenna, 1959, Traducción al inglés en de Finetti, B. (1972).
- de Finetti, B.: "*Teoria delle probabilità*". Torino, 1970. Traducción al inglés: "*Theory of probability*". Wiley, 1975.
- de Finetti, B.: "Initial probabilities: A prerequisite of any valid induction". Synthese, vol. 20, 1978.
- de Finetti, B.: "*Scritti (1926-1930)*". CEDAM, 1981.
- de Finetti, B.: "*Scritti (1931-1936)*". Pitagora, 1991.
- de Finetti, B.: "*Induction and probability*". CLUEB, 1993.
- de Finetti, B.: "*Filosofia della probabilità*". Il saggiatore, 1995.
- Delahaye, J.P.: "*Information, complexité et hasard*". Hermès, 1999.
- Dellacherie, C.: "Nombres au hazard: De Borel à Martin-Löf". Gazette des Mathematiciens, vol. 11, 1978.

- de Moivre, A.: "De mensura sortis, seu, de probabilitate eventuum in ludis casu fortuito pendentibus". Philosophical Transactions of the Royal society, vol. 27, 1711 (traducido al inglés por Hald, A. en International Statistical Review, vol. 52, 1984).
- de Moivre, A.: "*Treatise of annuities on lives*". W. Pearson, 1725.
- de Moivre, A.: "*The doctrine of chances: or a method of calculating the probability of events in play*". W. Pearson, 1718.
- de Moivre, A.: "Approximatio ad summam terminorum binomii $(a+b)^n$ in seriem expansi" (1733). Reproducción en Archibald, R.C. (1926).
- de Moivre, A.: "*Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*". Tonson & Watts, 1730.
- de Montmort, P.R.: "*Essai d'analyse sur les jeux de hazard*" (1708). Segunda edición, J. Qillau, 1713.
- De Morgan, A.: "Review of Laplace's théorie analytique des probabilités". Dublin Review, vol. 2, 3, 1837.
- De Morgan, A.: "*An essay on probabilities and their application to life contingencies and insurance offices*". Longman-Orme-Brown- Green & Longmans-Taylor, 1838.
- De Morgan, A.: "Theory of probabilities" (1836-1837). Reeditado en Fellowes, B. (1845).
- De Morgan, A.: "*Formal logic or the calculus of inference, necessary and probable*". Taylor & Walton, 1847.
- Deparcieux, A.: "*Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine*". París, 1746.
- Derham, W,: "*Physico-theology, or a demonstration of the being and attributes of God from his works of creation*" (1713). Duodécima edición Innys & Richardsonm 1754.
- Descartes, R.: "*Principia philosophia*". Parés, 1644.
- de Witt, J.: "Letters to Jan Hudde". En "*Brieven van Johann de Witt*", Fruin, 1913.
- de Witt, J.: "*Waerdye van Lyf-Renten. Naer Proportie van Los-Renten*". S'Graven-Hage, 1671. Reeditado en "*Die Werke von Johann de Witt*", 1975.
- Dodson, J.: "*First lecture on insurances*" (1771). No publicado.
- Domat, J.: "*Les loix civiles dan leur ordre naturel*" (1689-1694). Reeditado por Héricourt, 1777.
- Domotor, Z.: "Probabilistic relational structures and their applications". Technical Report, nº 144, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford University, 1969.
- Donkin, W.F.: "On certain questions relating to the theory of probabilities". The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine an Journal of Science, Serie 4, 1851.
- Doob, J.L.: "Kolmogorov's early work on convergence theory and foundations". Annals of Probability, vol. 17, 1989.
- Doob, J.L.: "The development of rigor in mathematical probability, 1900-1950". En Pier, J.P. (1994b). Reeditado en American Mathematical Monthly, vol. 103, 1996.
- Drobisch, M.W.: "*Bereäge zur Orientierung über Herbart's System de Philosophie*". Leopold Voss, 1834.
- Drobisch, M.W.: "*Die moralische Statistik und die mensliche Willensfreheit: Eine Untersuchung*". Leipzig, 1867.
- Drobisch, M.W.: "Über Mittelgrösen und die Anwendberkeit derselben auf die Berechnung des Steigens und Sinkens des Geldwerths". Math.-Phys, KL, vol. 1, 1871.
- Dubins, L.E.: "Finitely additive conditional probabilities, conglomerability and disintegration". Annals of Probability, vol. 3, 1975.
- Du Moulin, C .: "*Summaire du livre analytique des contratz usures, rentes constituées, interetz & monnoyes*". París, 1554.
- Earman, J.; Salmon, W.C.: "The confirmation of scientific hypotheses". En Salmon, W.C. (ed.)(1992).
- Eatwell, J.; Milgate, M.; Newman, P. (eds.): "*The new Palgrave: A dictionary of economics*", MacMillan, Stockton Press, 1987.
- Eddington, A.S.: "New pathways in science". MacMillan, 1935.
- Edgeworth, F.Y.: "Mathematical psychics: An essay on the application of mathematics to the moral sciences". C. Keegan, 1881. Reeditado por A.M. Kelley, 1967.
- Edgeworth, F.Y.: "Correlated averages". Philosophical Magazines, vol. 34, 1892.
- Edgeworth, F.Y.: "The law of error and correlated averages". Philosophical Magazines, vol. 34, 1892.
- Edgeworth, F.Y.: "A new method of treating correlated averages". Philosophical Magazines, vol. 35, 1893.
- Edgeworth, F.Y.: "Exercises in the calculation of errors". Philosophical Magazines, vol. 36, 1893.
- Edgeworth, F.Y.: "A defence of index-numbers". Economic Journal, vol. 1, 1896.
- Ellis, R.L.: "On the foundations of the theory of probabilities". Transactions of the Cambridge Philosophical Society, vol. 8, 1849. Reeditado en William, W. (ed.), 1863.

- Emerson. W.: ""*Miscellanies*" o "*Miscellaneous treatise, containing several mathematical subjects*". Nourse, 1776.
- Estes, W.: "The cognitive side of probability learning". Psychological Review, vol. 83, 1976.
- Euler, L.: "Recherches sur la question des inegalités du mouvement de Saturneet de Jupiter, sujet proposé pour le prix de l'aneé, par l'Academie Royale des Sciences de Paris". Turici, 1749.
- Euler, L.: "Sur la multiplication du genre humain" (1750-1755). Reeditado en "*Opera omnia. Commentationes algebraicæ ad theoriam combinationum et probabilitatum pertinentes*", 1911-1956.
- Euler, L.: "*Solution d'une question très difficile dans le calcul des probabilités*" (1753). Reeditado en "*Opera omnia Commentationes algebraicæ ad theoriam combinationum et probabilitatum pertinentes*", 1911-1956.
- Euler, L.: "Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre". Memorias de la Academia de Ciencias de Berlín, vol. 7, 1753. Reeditado en "*Opera omnia Commentationes algebraicæ ad theoriam combinationum et probabilitatum pertinentes*", 1923.
- Euler, L.: "Sur la probabilité des séquences dans la lotterie genoise" (1763). Reeditado en "*Opera omnia Commentationes algebraicæ ad theoriam combinationum et probabilitatum pertinentes*", 1923.
- Euler, L.: "Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genrfe humain" (1767). Reeditado en "*Opera omnia Commentationes algebraicæ ad theoriam combinationum et probabilitatum pertinentes*", 1923.
- Euler, L.: "Solutio quarandam quæstionum difficilorum in calculo probabilium". Opuscula Analytica, vol. 2, 1785. Reeditado en "*Opera omnia Commentationes algebraicæ ad theoriam combinationum et probabilitatum pertinentes*", 1923.
- Faber, G.: "Über stetige Funktionen". Mathematische Annalen, vol. 69, 1910.
- Fechner, G.T.: "Zur experimentalen Ästhetik". Abhandlungen der Könglich säschischen gesellschaft der Wissenschaften, vol. 9, 1871.
- Fechner, G.T.: "*Send-avesta, oder über die Dinge des Himmmels und des Jenseits*". Tercera edición, Leopold Voss, 1906.
- Fechner, G.T.: "*Elemente der Phychophysik*" (1866). Versión en inglés, Holt-Rinehart-Winston, 1966.
- Fefferman, S.: "Mathematical intuition vs mathematical monsters". Synthese, vol. 125, 2000.
- Fellner, F.: "L'evaluation de la richesse nationale". Bulletin de l'Institute International de Statistique, vol. XIII, 1901.
- Fellowes, B.: "*Encyclopædia Metropolitana*". Londres, 1845.
- Fetzer, J.H.: "Scientific knowledge: Causation, explanation and corroboration". Boston Studies in the Philosophy of Science, vol. 69, 1981.
- Fetzer, J.H.: "Probabilistic explanation". PSA, vol. 2, 1982.
- Fetzer, J.H.: "Probabilistic metaphysics". En Fetzer, J.H. (ed.)(1988).
- Fetzer, J.H. (ed.): "*Probability an causality*". Reidel, 1988.
- Fetzer, J.H.: "Critical notice:Philip Kitcher and Wesley Salmon (eds.), '*Scientific explanation*'; and Wesley C. Salmon, "*Four decades of scientific explanation. Philosophy of science*". Philosophy of Science, vol. 58, 1991.
- Fetzer, J.H.: "Peirce and propensities". En Moore, E.C. (ed.), 1993.
- Fine, T.: "*Theories of probability*". Academic Press, 1973.
- Fishburn, P.C.: "A mixture-set axiomatization of conditional subjective expected utility". Econometrica, vol. 41, 1973.
- Fishburn, P.C.: "Subjective expected utility: A review of normative theories". Theory and decision, vol. 13, 1981.
- Fishburn, P.C.: "A generalization of comparative probability on finite sets". Journal of Mathematical Psychology, vol. 27, 1983.
- Fishburn, P.C.: "The axioms of subjective probability". Statistical Science, vol. 1, 1986.
- Fisher, I.: "*Mathematical investigations in the theory of value and prices*" (1892). Segunda edición, Kelley, 1965.
- Fisher, I.: "*The purchasing power of money: Its determination and relation to credit, interest and crises*". MacMillan, 1911.
- Fisher, I.: "*The making of index-numbers: A study of their varieties, tests and reliability*" (1922). Tercera edición, Houghton-Mifflin, 1927.

- Fleck, L.: "*Genesis and development of scientific fact*" (1935). Traducción al inglés, University of Chicago Press, 1981.
- Fisher, R.A.: "*Contributions to mathematical statistics*". Oliver & Boyd, 1950.
- Fisher, R.A.: "*Statistical methods and scientific inference*". Oliver & Boyd, 1956.
- Fontaine, A.: "Solution d'un probléme sur les jeux de hasard". Mémoires Doneés à l'Académie Royal des Sciences, 1764.
- Forestani, L.: "*Pratica d'arithmetica e geometria*". Venecia, 1603.
- Forrest, D.W.: "*Francis Galton, the life and work of a Victorian genius*". Elek, 1974.
- Fortini, S.; Ruggieri, F.: "On defining neighbourhoods of measures through the concentration function". Sankhyã, Serie A, vol. 56, 1994.
- Fourier, J.J.: "Estrait d'une mémoire sur la théorie analytique des assurances" (1819). En Fourier, J.J. (1890).
- Fourier, J.J.: "*Oeuvres de Fourier*". Gauthier-Villars, 1890.
- Fréchet, M.: "Définition de l'integrale sur un ensemble abstrait". Comptes Rendus Académie des Sciences, vol. 160, 1915a.
- Fréchet, M.: "Sur l'integrâle d'une fonctionelle étendue à un ensemble abstrait". Bulletin Societé Mathematique de France, vol. 43, 1915b.
- Fréchet, M.: "Sur l'extension du théorème des probabilités totales au cas d'une suite infinie d'événements". Rendiconti Reale Istituto Lombardo di Sciences et Lettere, vol. 63, 1930a.
- Fréchet, M.: "Sur la convergence 'en probabilité'". Metron, vol. 8, 1930b.
- Fréchet, M.: "*Méthode des fonctions arbitraires, théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles*". Gauthier-Villars, 1938a.
- Fréchet, M.: "Exposé et discussion de quelques recherches récentes sur les fondements du calcul des probabilités". Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. 735. en Colloque consacré à la théorie des probabilités, Hermann, 1938b.
- Fréchet, M.: "*Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités*". Gauthier-Villars, 1937-38. Esta obra constituye el primer volumen de Borel, E. (1939).
- Fréchet, M.; Halbwachs, M.: "*Le calcul des probabilités à la portée de tous*". Dunod, 1924.
- Freeman, P.R.; Smith, A.F.M.: "*Aspects on uncertainty: A tribute to D.V. Lindley*". Wiley, 1994.
- Frege, G.: "*The basic laws of arithmetic*". University of California Press, 1893.
- Frenicle de Bessy, B.: "Abregé des combinaisons". 1729.
- Freudenthal, H.: "Huygen's foundations of probability". Historia Mathematica, vol. 7, 1980.
- Frieden, B.R.: "*Probability, statistical optics and data testing*". Springer-Verlag, 1991.
- Friess, J.F.: "*Versuch einer kritik der Principen de Wahrscheinlichkeitsrechnung*". Veweg und Sohn, 1842.
- Fry, T.C.: "*Probability and its engineering uses*". Van Nostrand, 1928.
- Fuss, N.: "*Eclaircissements sur les éstablissement publics en faveur tant des veunes que des morts avec la description d'une nouvelle espéce de tontine sussi favorable au public qu'utile á l'état calculé sous la diréction de monsieur L. Euler*". San Petersburgo, 1776.
- Galavotti, M.C.: "F.P. Ramsey and the notion of chance". Proceedings of the 17th. International Wittgenstein-Symposium, 1994.
- Galavotti, M.C.: "Operationalism, probability and quantum mechanics". Foundations of Science, vol. 1, 1995.
- Galavotti, M.C.: "Some remarks on objective chance (F.P. Ramsey, K.R. Popper y N.R.Campbell)". En Dalla Chiara, M.L. (ed.), 1999.
- Galilei, G.: "Considerazioni sopra il gioco dei dadi". En "*Opera omnia*", 1718.
- Galilei, G.: "*Dialogo sui massimi sistemi del mondo Tolemaico e Copernicano*". Traducción al alemán, Teubner, 1891. Traducción al inglés, University of California Press, 1967.
- Galton, F.: "Typical laws of heredity". Nature, vol. 15, 1877.
- Galton, F.: "The geometric mean in vital and social statistics". Proceedings of the Royal Society, vol. 29, 1879.
- Galton, F.: "The application of a graphic method of fallible measures". Jubilee Volume of the RSS, 1885.
- Galton, F.: "Regressions towards mediocrity in hereditary stature". Journal of the Anthopological Institute, vol. 15, 1886.
- Galton, F.: "Family likeness in stature". Proceedings of the Royal Society, vol. 40, 1886.
- Galton, F.: "Co-relations and their measurement, chiefly from anthropometric data". Proceedings of the Royal Society, vol. 45, 1888.
- Galton, F.: "*Natural inheritance*". MacMillan, 1889.
- Galton, F.: "Kinship and correlation". North American Review, vol. 150, 1890.

- Gardner, M.: "*The ambidextrous universe*". Scribner & Sons, 1979.
- Gassendi, P.: "*Syntagma*", 1659.
- Gattiker, T.: "*Of the nature and use of lots. A treatise historicall and theologicall*". Griffin-Bladen, 1619.
- Gauss, C.F.: "*Disquisitio de elementis illipticis palladis*", 1811.
- Gay, J.: "*Preliminary dissertation concerning the fundamental principle of virtue and morality*".1731.
- Gauss, C.F.: "*Theoria motus corporum cœlestiorum*". Parthes et Besser, 1809. Reimpreso por Dover, 1963.
- Gauss, C.F.: "Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen" (1816). Reeditado en "*Carl Friederich Gauss Werke*". Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, 1880.
- Gauss, C.F.: "*Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiæ*". Dietrich, 1823.
- Gerhart, C.I. (ed.): "*Die philosophischen Schriften van G.W. Leibniz*", Berlín, 1875-1890.
- Geymonat, L.: "*Scienza e realismo*". Feltrinelli, 1854.
- Gigerenzer, G.; Swijtnik, Z.; Porter, T.; Daston, L.; Beatty, J.; Krüger, L.: "*The empire of chance*". Cambridge University Press, 1989.
- Gillies, D.A.: "Operationalism". Synthese, vol. 25, 1972a.
- Gillies, D.A.: "The subjective theory of probability". British Journal for the Philosophy of Science, vol. 29, 1972.
- Gillies, D.A.: "*An objective theory of probability*". Methuen, 1973.
- Gillies, D.A.: "*Frege, Dedekind and Peano on the foundations of arithmetic*". Van Gorcum, 1982.
- Gillies, D.A.: "Bayesianism versus falsificationism. Review of Howson and Urbach 1989". Ratio, New Series, vol. 1, 1990.
- Gillies, D.A.: "Intersubjetive probability and confirmation theory". British Journal for the Philosophy of Science, vol. 42, 1991.
- Gillies, D.A.: "*Artificial intelligence and scientific method*". Oxford University Press, 1996.
- Gilliles, D.A.: "Keynes as a methodologist". British Journal for the Philosophy of Science, vol. 39, 1998.
- Gillies, D.A.: "*Philosophical theories of probability*". Routledge, 2000.
- Gillies, D.A.; Ietto-Gillies, G.: "Intersubjetive probability and economics". Review of Political Economy, vol. 3, 1991.
- Glass, D.V.: "Graunt's life table". Journal Institute of Actuaries of London, vol. 76, 1950.
- Gnedenko, B.V.: "*The theory of probability*" (1950a). Traducción al inglés, Chelsea, 1962.
- Gnedenko, B.V.: "Probability theory an recognition of the real world". Uspeshi Mat. Nauk, vol. 5, 1950b.
- Good, I.J.: "*Probability and the weighing of evidence*". Griffin, 1950.
- Gouraud, M.C.C.: "*Histoire du calcul des probabilités depuis sus origines jusqu'à nos jours*". A. Durand, 1848.
- Graunt, J.: "Natural an political observations mentioned in a following index and made upon the bills of mortality" (1662). Tercera edición, Martyn-Allestry, 1665.
- Greenwood, M.: "*Medical statistics from Graunt to Farr*". Cambridge University Press, 1948.
- Grimaudet, F.: "*Paraphrase des droits des usures pignoratifs*". París, 1583.
- Güttinger, W.; Eikemeier, H. (eds.): "*Structural stability in physics*". Springer, 1979.
- Haberman, S.J.: "*Advanced statistics*". Springer, 1996.
- Hacking, I.: "*Logic statistical inference*". Cambridge University Press, 1965.
- Hacking, I.: "*The emergence of probability: A philosophical study of early ideas about probability, induction and statistical inference*". Cambridge University Press, 1984.
- Hadamard, J.: "Les pincipes du calcul des probabilités". Revue de Métaphysique et de Morale, vol. 39, 1922.
- Halley, E.: "An estimate of the degrees of the mortality of mankind, drawn from curious tables of the births and funerals at the city of Breslau with an attempt to escertain the price of annuities uppon lives". Philosophical Transactions of the Royal society, vol. 17, 1693.
- Hartley, D.: "*Observations on man, his frame, his dutyand his expectations*". Richardson, 1749.
- Hasenhörl, F. (ed.): "*Ludwig Boltzmann, Wissenschaftliche abhandlungen*". Leipzig, 1909.
- Hausdorff, F.: "Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung". Sitzungsber Königlich Sächs Gesellschaft Wiss Leipz.Math-Phys.KL 53, 1901.
- Hausdorff, F.: "*Grundzüge der Mengenlehre*". von Weit, 1914.
- Hawkins, T.: "*Lebesgue's theory of integration: Its origins and development*". University of Wisconsin Press, 1970.
- Helm, G.: "Die Wahrscheinlichkeitslehre als Thorie der Kolleltivbegriffe". Analen der Naturphilosophie, vol. 1, 1902.

- Herken, R (ed.): "*The universal Turing machine*". Oxford University Press, 1988.
- Heyting, A.: "*Intuitionism: An introduction*". North-Holland, 1956.
- Hicks, J.: "*Causality in economics*". Blackwell, 1979.
- Hilbert, D.: "Mathematical problems". Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 8, 1902.
- Hilbert, D.: "*Foundations of geometry*". Traducción al inglés, Open Court, 1971.
- Hill, B.M.: "On steinian shrinkage estimators: The finite/infinite problem and formalism in probability and statistics". En Freeman, P.R.; Smith, A.F.M. (eds.), 1994.
- Hobbes, T.: "*Leviathan*". Crooke, 1660.
- Hochkirchen, T.: "*Die Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Kontexte: Von Hilberts sechstem Problem zu Kolmogoroffs Grundbegriffen*". Vandenhoeck-Ruprecht, 1999.
- Hofstadter, D.: "*Gödel, Escher, Bach: An eternal golden braid*". Basic Books, 1979.
- Holgate, P.: "The influence of Huygens' work in dynamics on his contributions to probability". International Statistician, vol. 52, 1984.
- Holgate, P.: "Independent functions: Probability and analysis in Poland between the wars". Biometrika, vol. 84, 1997.
- Hooper, G.: "A calculation of the credibility of human testimony". Philosophical Transactions of the Royal Society, vol. 21, 1699.
- Horn, A.; Tarski, A.: "Measures on Boolean algebras". Transactions of the American Mathematical Society, vol. 64, 1948.
- Howson, C.; Urbach, P.: "*Scientific reasoning: The Bayesian approach*". Open Court, 1989.
- Hume, D.: "*An inquiry concerning human understanding*" (1718). Reeditado por Handel, 1955.
- Hume, D.: "*A treatise of human nature*". Selby-Bigge, 1739.
- Humphreys, P.: "Why propensities cannot be probabilities?". The philosophical Review vol. 94, 1985.
- Jaynes, E.T.: "The well-posed problem". Foundations of Physics, vol. 4, 1973.
- Jeffrey, R.C.: "*The logic of decision*". McGraw-Hill, 1965.
- Jeffreys, H.: "*Scientific inference*". Cambridge University Press, 1931. Segunda edición, 1957, tercera edición, 1973.
- Jevons, W.S.: "The variations of prices and the value of currency since 1872". JRSS, vol. 28, 1865.
- Jevons, W.S.: "*The pinciples of science: A treatise on logic and scientific method*". MacMIllan, 1874.
- Kaplan, M.; Fine, T.: "Joint orders in comparative probability". Annals of Probability, vol. 5, 1977.
- Kendall, M.G.: "The beginings of probability calculus". Biometrika, vol. 43, 1956.
- Keynes, J.M.: "*A treatise on probability*" (1921). MacMillan, 1963.
- Keynes, J.M.: "*The general theory of employment, interest and money*". En "*The collected writings of John Maynard Keynes*". MacMillan, Cambridge University Press for the Royal Economic Society, 1993.
- Keynes, J.M.: "*My early beliefs*". En "*The collected writings of John Maynard Keynes*". MacMillan, Cambridge University Press for the Royal Economic Society, 1993.
- Khinchin, A.Y.: "*Philosophical problems in contemporary physics*". 1952.
- Khinchin, A.Y.: "The frequency theory of R. von Mises and contemporary ideas in probability theory". Vaprosi Filosofi, vol. 12, 1961.
- Kleene, S.: "A theory of positive integers in formal logic". American Journal of Mathematics, vol. 57, 1935.
- Knobloch, E.: "Emile Borel as a probabilist". En Krüger, L.; Daston, L.; Heidelberger, M. (eds.), 1987.
- Knuth, D.E.: "Algoritmic thinking and mathematical thinking". American Mathematical Monthly, vol. 92, 1985.
- Koch, G.; Spizzichino, F. (eds.): "*Exchangeability in probability and statistics*". North-Holland, 1982.
- Kolmogorov, A.N.: "The general theory of measure and the calculus of probability". Collected works of the Mathematical Section, Communist Academy, Section for Natural and Exact Sciences, vol. 1, 1929 (original en ruso, traducción al inglés en Kolmogorov, A.N. (1992)).
- Kolmogorov, A.N.; "Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung". Mathematische Annalen, vol. 104, 1931.
- Kolmogorov, A.N.: "*Grundbegriffe der Wahscheinlichkeitsrechnung*". Springer, 1933a. Traducción al inglés: "*Foundations of the theory of probability*", Chelsea, 1950.
- Kolmogorov, A.N.: "Über die Grenswertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung". Izv. Akad. Nauk., 1933b.
- Kolmogorov, A.N.: "Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione". Giornale Istituto Italiano degli Attuari, vol. 4, 1933c.
- Kolmogorov, A.N.: "Obituary for Evgen Evgenevich Slutsky". Russian Mathematical Surveys, vol. 3, 1948 (original en ruso, traducción al inglés en Seynin, O. (ed.)(1998)).

- Kolmogorov, A.N.: "Three approaches to the quantitative definition of information". Problems in Information Transmission, vol. 1, 1965.
- Kolmogorov, A.N.; Uspenskii, V.A.: "Algorithms and randomness". Theory of probability and Applications, vol. 32, 1987.
- Kolmogorov, A.N.; "*Selected works of A.N. Kolmogorov. Vol. 2, Probability theory and mathematical statistics*". Dordrecht, 1992.
- Koopman, B.O.: "The axioms and algebra of intuitive probability". Annals of Mathematics, vol. 41, 1940a.
- Koopman, B.O.: "The bases of probability". Bulletin of American Mathematical Society, vol. 46, 1940b. Reeditado en Kyburg, H.E.; Smokler, H.E. (eds.)(1964).
- Korner, S. (ed.): "*Observation and interpretation*". Proceedings of the 9th. Symposium of the Colston Research Society. University of Bristol, 1957.
- Kraft, C.H.; Pratt, J.W.; Seidenberg, A.: "Intuitive probability on finite sets". Annals of Mathematical Statistics, vol. 30, 1959.
- Krantz, D.H.; Luce, R.C.; Suppes, P.; Tversky, A.: "*Foundations of measurements*". Academic Press, 1971.
- Krüger, L.; Daston, L.; Heidelberger, M. (eds.): "*The probabilistic revolution*". MIT Press, 1990.
- Kuhn, T.S.: "*The structure of scientific revolutions*". University of Chicago Press, 1962.
- Kyburg, H.E.; Smokler, H.E. (eds.): "*Studies in subjective probability*". Wiley, 1964.
- Lacroix, S.F.: "*Traité élementaire du calcul des probabilités*". Courcier, 1816. Segunda edición, Bachelier, 1822.
- Lad, F.: "Probability theory: A Marxist discussion". Science and Society, vol. 47, 1983.
- Laemmel, R.: "Untersuchungen über die Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten". Ph. thesis University of Zurich, 1904. Reeditado en Scneider, I. (ed.)(1988)
- Lagrange, J.L.: "Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre los résultats de plusiers observations; dans lequel on examine les avantages de cette méthode par le calcul des probabilité; et ou l'on resoud diferens probèmes relatifs à cette matière". Miscellanea Taurinensia, vol. 5, 1776.
- Lakatos, I. (ed.): "*The problem of inductive logic*". North-Holland, 1968.
- Lakatos, I.: "*Philosophical papers*". Cambridge University Press, 1978.
- Lambert, J.H:: "Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung". Verlage des Buchladens des Realschule, 1765-1772.
- Landro, A.H.; González, M.L.: "*Elementos de econometría de los fenómenos dinámicos*". Ediciones Cooperativas, 2009.
- Laplace, P.S.: "Mémoire sur les suites récurro-récurrentes et sur leurs usages dans la théorie de hazard". Mémoires de l'Academie des Sciences, vol. 6, 1774. Reeditado en "*Œuvres*". Imprimerie Royale, Gauthier-Villars, 1912.
- Laplace, P.S.: "Mémoire sur la probabilité des causes par les èvènements". Mémoires de l'Académie Royales des Sciences presentés par divers savans, vol. 6, 1774.
- Laplace, P.S.: "Recherches sur l'integration des équations différentielles aux différences finies et sur usage dans la théorie des hasards". Mémoires de l'Académie des Sciences, 1776.
- La place, P.S.: "Mémoire surles probabilités". Memoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris, 1778.
. Laplace, P.S.: "Mémoire sur les suites". Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris, 1782.
- Laplace, P.S.: "Mémoire sur la figure de la terre". Mémoire de l'Academie Royale des Sciences, 1783.
- Laplace, P.S.: "Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de trés grands nombres". Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris, 1786.
- Laplace, P.S.: "Sur les naissances, les mariages et les morts a Paris, depuis 1771 jusqu'en 1784, et dans toute l'etendue de la France, pendantles anées 1781 et 1782". Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris, 1786.
- Laplace, P.S.: "Theoria motus corporum cœlestiorum in sectionibus conicis solum ambientium". En "*Traité de méchanique céleste*". Duprat-Courcier, 1799-1805.
- Laplace, P.S.: "Mémoire sur les formules qui sont fonctions de trés grands nombres et sur leur application aux probabilités". Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris, 1810.
- Laplace, P.S.: "Mémoire sur les intégrales définies et leur application aux probabilités, et spécialment á la recherche du millieu qu'il faut choisir entre les résultats des observations". Mémoire de l'Académie Royale des Sciences, 1811.
- Laplace, P.S.: "*Théorie analytique des probabilités*" (1812). Tercera edición, Courcier, 1820.
- Laplace, P.S.: "*Essai philosophique sur les probabilités*" (1814). Sexta edición, Courcier, 1840. Reimpreso, Dover, 1951.

- Laspeyres, E.A.T.: "*Die Berenchnung einer Mittleren Preissteigerung*", Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, 1864a.
- Laspeyres, E.A.T.: "Hamburger Warenpreise und die californish-australischen Goldentckungen seit 1848". Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, 1864.
- Laurent, M.P.H.: "*Traité du calcul des probabilités*". Gauthier-Villars, 1873.
- Lebesgue, H.: "Sur une généralization de l'intégrale définie". Comptes Rendus Académie des Sciences, vol. 132, 1901.
- Lebesgue, H.: "*Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*". Gauthier-Villars, 1904.
- Leclerc-Buffon G.: "Histoire naturelle générale et particulère". Supplément,vol. 4, 1777.
- Leibniz, G.W.: "*De incerti æstimatione*", 1678.
- Leibniz, G.W.: "*Discours de métaphysique*" (1686). Reeditadco en Gerhart, C.I. (ed.), Berlín, 1875-1890.
- Leibniz, G.W.: "Nouveaux essais sur l'entendement humain" (1703-1705). Reeditado en Sämliche Schriften und Briefe, 1765.
- Lévy, P.P.: "*Calcul des probabilités*". Gauthier-Villars, 1925.
- Lévy, P.P.: "La théoreme fondamental de la théorie des erreurs". Annales Institut Henry Poincaré, vol. 1, 1950.
- Lévy, P.P.: "Sur les séries dont les termes sont des variables éventuelles indépendantes". Studia Mathematica, vol. 3, 1931.
- Lévy, P.P.: "Sur les intégrales dont los éléments sont des variables aléatoires independantes". Annali Scuola Normale, Pisa, 1934.
- Lévy, P.P.: "L'addition de variables aléatoires enchainées et la lois de Gauss". Bulletin Societé Mathématique de France, vol. 62, 1934.
- Lévy, P.P.: "Proprietés asymptotiques des sommes de variables aléatoires enchainées". Comptes Rendus Academie des Sciences Paris, vol. 199, 1935a.
- Lévy, P.P.: "Proprietés asymptotiques des sommes de variables indépendantes ou enchainées". Journal Mathématiques Pures et Apliquées, 1935b.
- Lévy, P.P.: "*Théorie de l'addition de variables aléatoires*". Gauthier-Villars, 1937.
- Lexis, W.: "*Einleitung in der Theorie der Bevolkerongstatistik*". Estrasburgo, 1875.
- Lexis, W.: "Das Geschlechverhäitnis der Geborenen und die Wahrscheinlichkeitsrechnung". Jahrbücher für Nationaökonomie und Statistik, vol. 27, 1876.
- Lexis, W.: "*Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menlischen Gesellschaft*". Wagner, 1877.
- Li, M.; Vitányi, P.: "*An introduction to Kolmogorov complexity and its applications*". Springer-Verlag, 1997.
- Liagre, J.B.J.: "*Calcul del probabilités e theorie des erreurs, avec des applications aux sciences d'observation en général et geodesie in particulier*". Alexander Jamar, 1852.
- Lindley, D.V.: "*Introduction to probability and statistics from a Bayesian new point*". Cambridge University Press, 1965.
- Lindley, D.V.; Clarotti, C.A.: "*Accelerated time testing and experts' opinions*". North-Holland, 1988.
- Lipps, G.F. (ed.): "*Kollektivemasslehere*". Engelman, 1897.
- Lipps, G.F.: "Über Fechner's collectivmasslehre und vie Vertheilungsgesetze der Collectivgegestände". Philosophische Studien, vol. 13, 1898.
- Lipps, G.F.: "Die Theorie der Collectivgegestände". Philosophische Studien, vol. 17, 1901.
- Lipps, G.F.: "Die Betimmung der Abhängigkeit zwischen den Merkmalen eines Gegeständes". Berichte der Königlich Säsischen Gesellschaft der Wissenschaften, vol. 57, 1905.
- Locke, J.: "*An essay concerning human understanding*". Routledge, 1690.
- Łomnicki, Z.: "Nouveaux fondements du calcul des probabilités (definition de la probabilité fondée sur la théorie des ensembles)". Fundamenta Mathematica, vol. 4, 1923.
- Łomnicki, Z.; Ulam, S.: "Sur la théorie de la measure dans les espaces combinatoires et son application au calcul des probabilités. I: Variables indépendantes". Fundamenta Mathematica, vol. 23, 1934.
- Lotze, R.H.: "*Logik; drei Bücher vom Denken, vom Untersuchen und vom Erkennen*". Hirzel, 1874. Traducción al inglés como "*Logic, in the three blocks, of thought, of investigation and of knowledge*". Clarendon Press, 1884.
- Loveland, J.: "Buffon, the certainty of sunrise, and the probabilistic reductio ad absurdum". Archive History of Exact Sciences, vol. 55, 2001.

- Lubbock, J.W.; Drinkwater-Bethume, J.E.: "*On probability*". Society for the diffusion of useful knowledge, 1830.

- Luce, R.D.: "On the numerical representation of qualitative conditional probability". Annals of Mathematical Statistics, vol. 39, 1968.
- Luce, R.D.; Krantz, D.H.: "Conditional expected utility". Econometrica, vol. 39, 1971.
- Luce, R.D.; Narens, L.: "Qualitative independence in probability theory". Theory and Decision, vol. 9, 1978.
- Luce, R.D.; Suppes, P.: "Preference, utility and subjective probability". Handbook of Mathematical Psychology, vol. 3, 1965.
- Magens, N.: "*An essay on insurance*". Londres, 1755.
- Mahoney, M.S.: "*The mathematical career of Pierre de Fermat*". Princeton University Press, 1973.
- Maistrov, L.E.: "*Probability theory: A historical sketch*". Academic Press, 1974.
- Makeham, W.M.: "On the theory of inverse probabilities". Journal of the Institute of Actuaries, vol. 29, 1892a.
- Makeham, W.M.: "On a problem an probabilities". Journal of the Institute of Actuaries, vol. 29, 1892b.
- Malthus, R.T.: "*An essay on the principle of population, as it affects the future improvements of society, with remarks on the speculation of Mr. Godwin, Monsieur Condorcet and other writers*" (1817). Sexta edición, Londres, 1826.
- Markov, A.A.: "On a case of trials connected into a compound chain". Isvestiya Akad. Nauk, vol. 22, 1911.
- Markov, A.A.: "*Wahrscheinlichkeitsrechnung*". Teubner, 1912.
- Markov, A.A.: "On trials connected in a chain from unobservable events". Isvestiya Akad. Nauk, vol. 23, 1912.
- Marsh, R.C. (ed.): "*Bertrand Russell. Logic and knowledge. Essays 1901-50*". Allen & Unwin, 1956.
- Martin-Löf, P.: "The literature on von Mises revisited". Theoria, vol. XXXV, 1969.
- Masani, P.R.: "*Norbert Wiener, 1894-1964*". Birkhäuser, 1990.
- Maxwell, J.C.: "*Illustrations of the dynamical theory of gases*" (1860). Reeditado en Niven, W.D. (ed.) (1890).
- Maxwell, J.C.: "*Trait's thermodynamics*" (1887). Reeditado en Niven, W.D. (ed.) (1890).
- May, K.O.: "Intransitivity, utility, and the agregation of preference patterns". Econometrica, vol. 22, 1954.
- Meinong, A.: "*Über Möglichkeit Wahrscheinlichkeit: Beiträge zur Gegestandstheorie und Erkenntnis-theorie*". Barth, 1915.
- McAlister, D.: "The law of geometric mean". Proceedings of the Royal Society, vol. 29, 1879.
- McCurdy, C.S.I.: "Humphreys's paradox and the interpretation of universe conditional probabilities". Synthese, vol. 108, 1996.
- Mellor, D.H.: "*The matter of chance*". Cambridge Universisty Press, 1965.
- Merriman, M.: "A list of the writings relating to the method of least squares, with historical and critical notes". Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences, vol. 4, 1877.
- Meyer, A.: "Note sur le théorème inverse de Bernoulli". Bulletin de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beau-Arts de Belgique, vol. 23, 1856.
- Meyer, A.: "*Essai sur une exposition nouvelle de la théorie analitique des probabilités a posteriori*". Dessain, 1857.
- Michell, J.: "An inquiry into the probable parallax, and magnitud of the fixed stars, from the quantity of light wich they afford us, and the particular circumstances of their situation". Philososphical Transactions of the Royal Society, vol. 57, 1767.
- Mill, J.S.: "*A system of logic, ratiocinative and inductive: being a connected view of the principles of evidence and methods of scientific investigation*". J.W. Parker, 1843.
- Miller, D.W.: "*Critical rationalism. A restatement and defence*". Open Court, 1994.
- Miller, D.W.: "Propensities and indeterminism". En O'Hear, A. (ed.)(1996).
- Milne, P.: "Can there be a realistic single-case interpretation of probability?". Erkenntnis, vol. 25, 1986.
- Monk, R.: "*Ludwig Wittgenstein. The duty of genius*". Jonathan Cape, 1990.
- Monk, R.: "*Bertrand Russell. The spirit of solitude*". Jonathan Cape, 1996.
- Moore, E.C. (ed.): "*Charles Peirce and the philosophy of science*". University of Alabama Press, 1993.
- Morgan, W.: "*Probability of survivorship*". Londres, 1783.
- Muchnik, A.A.; Semenoff, A.L.; Uspenskii, V.A.: "Mathematical mataphysics and randomness". Theoretical Computer Science, vol. 201, 1998.
- Nagel, E.; Newman, J.R.: "*Gödel's proof*". New York University Press, 1958.
- Nalimov, V.V.: "*The forces of science*". ISI Press, 1981ªa.
- Nalimov, V.V.: "*In the labyrinths of language: A mathematician's journey*". ISI Press, 1981b.
- Nalimov, V.V.: "*Realms of the inconscious: The enchated frontier*". ISI Press, 1982.

- Newman, P.: "Ramsey, Frank Plumpton (1903-1930)". Reeditado en Eatwell, J.; Milgate, M.; Newman, P. (eds.)(1987).
- Newton, I.: "*Opticks*". 1730. Reeditado por Dover, 1979.
- Newton, I.: "*Philophiæ naturalis principia mathematica*". Tercera edición traducida, University of California Press, 1946.
- Nieuwentyt, B.: "*Het regt gebruik der Wereldbeschouwingen*" (1715). Traducido como "*The religious philosopher: or, the right use of contemplating the works of the creator*", 1715.
- Nikodým, O.: "sur une généralization des intégrales de M.J. Radon". Fundamenta Mathematica, vol. 15, 1930.
- Niven, W.D. (ed.): "*J.C. Maxwell scientific papers*". Cambridge University Press, 1890.
- O'Hear, A. (ed.): "*Karl Popper: Philosophy and problems*". Cambridge University Press, 1996.
- Ore, O.: "Pascal and the invention of probability theory". American Mathematical Monthly, vol. 67, 1960.
- Ostrogradoski, M.V.: "Extrait d'un mémoire sur la probabilité des erreurs des tribunaux". Bulletin Scientifique nº 3, Mémoire de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg, VI Series: Sciences Mathématiques, Physiques et Naturelles. Tome III. Première Partie, Sciences Mathématique et Physique, 1838.
- Öttinger, L.: "Untrersuchungen úber die Wahrscheinlichkeitsrechnung". Journal für die reine una angewandte Mathematik, vol. 36, 1848.
- Paasche, H.: "Über die Preisentwicklung der Ietzen Jahre nach den Hamburger Bürsenentwicklungen". Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, 1871.
- Pacioli, L.: "*Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalitá*". Venecia, 1494.
- Paris, J.B.: "*The uncertain reasoner's companion. A mathematical perspective*". Cambridge University Press, 1994.
- Parkinson, G.H.R.: "*An encyclopædie of philosophy*". Oxford University Press, 1988.
- Pascal, B.: "Usage du triangle arithmétique pour déterminer les parties qu'on doit faire entre deux jouers qui jouent en plusieurs partes" (1654). Reeditado en Mesnbard, J. (ed.): "*Oeuvres complètes*". Desclée de Brouwer, 1970.
- Pascal, B.: "Traité du triangle arithmetique avec quelques autres petits traités sur la même matière" (1665). En Brunschvicg, L.; Boutroux, P. (eds.)(1908).
- Pascal, B.: "*Pensées*" (1669). Reeditado por Lafuma, 1962.
- Pascal, B.: "*Oeuvres complétes*". Desclée de Brouwer, 1970.
- Payne, J.W.; Bettman, J.R.; Johnson, E.J.: "Behavorial decision research: A constructive processing perspective". Annua Review Psychology, vol. 43, 1992.
- Pearson, K.: "*The grammar of science*". Walter Scott, 1892.
- Pearson, K.: "Asymetrical frequency curves". Nature, vol. 48, 1893.
- Pearson, K.: "Contributions to the mathematical theory of evolution, I". Proceedings of the Royal Society, vol. 54, 1893.
- Pearson, K.: "Contributions to the mathematical theory of evolution, II". Philosophical Transactions of the Royal Society, Serie A, vol. 186, 1895.
- Pearson, K.: "Contributions to the mathematical theory of evolution, III". Philosophical Transactions of the Royal Society, Serie A, vol. 187, 1896.
- Pearson, K.: "*The history of statistics in the 17th and 18th centuries, against the changing background of intellectual scientific and religious thought. Lectures given at the University College of London, during de academic sessions 1921-1923*". Griffin, 1978.
- Peirce, B.: "On Peirce's criterion". Proceedings of the American Academy of Sciences, vol. 13, 1878.
- Peirce, C.S.: "On the theory of errors of observation". Report of the Superintendent of the US Coast Survey of the Year Ending June 1870. Apendix nº 21, 1873.
- Peirce, C.S.: "Notes on the doctrine of chances". Reeditado en "*Essays in the philosophy of science*". The American Heritage Series, Bobbs-Merril (1957).
- Peverone, G.B.: "*Due brevi e facili trattati, il primo d'arithmetica, l'altro di geometria*". Lyon, 1558.
- Pfanzgl, J.: "*Theory of measurement*". Wiley, 1968.
- Pier, J.P.: "Intégration et mesure 1900.1950" (1994a). En Pier, J.P. (ed.)(1994b).
- Pier, J.P. (ed.): "*Development of mathematics 1900-1950*". Birkhäuser, 1994b.
- Poincaré, H.: "Sur le probléme des trois corps et les équations de la dynamique". Acta Mathematica, vol. 13, 1890.

- Poincaré, H.: "*Calcul des probabilités-Leçons professées pendant le deuxième semestre*". Carré, 1896.
- Poincaré, H.: "*La valeur de la science*". Flammarion, 1905.
- Poisson, S.D.: "Sur la probabilité des résultats moyens des observations" (1824), Connaisance des temps pour l'an 1827.
- Poisson, S.D.: "Suite du mémoire sur la probabilité des résultats moyens des observations" (1829), Connaisance des temps pour l'an 1832.
- Poisson, S.D.: "*Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédés des règles générales du calcul des probabilités*". Bachelier, 1837.
- Pompilij, G.: "*Teoria dei campioni*". Veschi, 1959.
- Popper, K.R.: "*The loogic of scientific discovery*" (1934). Sexta edición, Hutchinson, 1972.
- Popper, K.R.: "Probability magic or knowledge out of ignorance". Dialectica, vol. 11, 1957a.
- Popper, K.R.: "The propensity interpretation of the calculus of probability and the quantum theory". En Korner, S. (ed.)(1957b).
- Popper, K.R.: "The propensity interpretation of probability". British Journal for the Philosophy of Science, vol. 10, 1959a.
- Popper, K.R.: "*The logic of scientific discovery*". Hutchinson, 1959b.
- Popper, K.R.: "*New appendices to the logic of scientific discovery*". Traducción al inglés, Hutchinson, 1972.
- Popper, K.R.: "*Realism and the aim of science*". Routledge & Kegan, 1983.
- Popper, K.R.: "*A world of propensities*". Thoemmes, 1990.
- Prevost, P.; Lhuillier, S.F.: "Sur les probabilités". Mémoire de l'Académie Royales des Sciences et Belles-Lettres, Classe de Mathématique, 1799.
- Price, R.: "*Observations on revisionary payments*". Londres, 1769.
- Prigogine, I.; Nicolis, G.: "*Self-organization in non-equilibrium systems, from dissipative structures to order to fluctuations*". Wiley, 1977.
- Prigogine, I.; Stengers, I.: "*La nouvelle alliance*". Gallimard, 1986.
- Prokhorov, Y.V.: "Convergence of random processes and limit theorems of probability theory". Teor. Verojatnost Primenenija, vol. 1, 1956.
- Prony, R.: "*Recherches physicomathématique sur la théorie des aux courantes*". Imprimerie Impériale, 1804.
- Puffendorf, S.: "*Le droit de la nature et des gens*" (1682). Traducción al inglés, Londres, 1740.
- Puissant, L.: "*Traité de topographie, d'arpentage et de nivellement*". Courcier, 1807.
- Quetelet, A.: "*Sur l'homme et le développment de ses facultés*". Bachelier, 1835.
- Quetelet, A.: "Sur la statistique morale et les principes qui donent en former la base". Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Belgique, vol. 21, 1848.
- Rademacher, H.: "Einige Sätze über Reihen von Allgemeinen Orthogonal funktionen". Mathematische Annalen, vol. 87, 1922.
- Radon, J.: "Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen". Akad. Wiss. Sitzugsber Kaiserl. Math-Nat.KL.122, 1913.
- Ramsey, F.P.: "*The foundation of mathematics and other logical essays*". Routledge & Kegan, 1931.
- Ramsey, F.P.: "Further considerations". En Ramsey, F.P. (1931).
- Ramsey, F.P.: "Last papers. Probability and partial belief". En Ramsey, F.P. (1931).
- Ramsey, F.P.: "Truth and probability". En Ramsey, F.P. (1931). Reeditado en Kyburg, H.E.; Smokler, H.E. (eds.), 1964.
- Ramsey, F.P.: "*Notes on philosophy, probability and mathematics*". Bibliopolis, 1991.
- Rappaport, A.: "*Operational philosophy: Integrating knowledge andaction*". Harper, 1954.
- Regazzini, D.M.: "On a general definition of concentration function". Sankhyã, Serie B, vol. 49, 1987.
- Regazzini, E.; Petris, G.: "Some statistical aspects of the use of exchangeability in statistics". Journal of the Italian Statistical Society, vol. 1, 1992.
- Reichenbach, H.: "*The theory of probability*". University of California Press, 1935.
- Roberts, F.S.: "*Measurement theory*". Addison-Wesley, 1979.
- Rosen, R.: "*Anticipatory systems*". Pergamon, 1985.
- Rosen, R.: "What con we know?". En Casti, J.L.; Karlqvist, A. (1990).
- Rosen, R.: "Complexity and information". Journal of Computation and Applied Mathematics, vol. 22, 1988.
- Rowen, H.H.: "*John de Witt, grand pensionary of Holland*". Princeton University Press, 1975.
- Rowen H.H.: "*John de Witt, statesment of the 'true freedom'*". Cambridge University Press, 1986.
- Rozenberg, G.; Salomaa, A.: "*Cornerstones of undecidability*". Prentice Hall, 1994.
- Rümelin, G.: "*Zur Theorie der Statistik*" (1863). En Reden und Aufsätze, Friburgo, 1875.

- Runde, J.: "Keynes after Ramsey: In defence of 'A treatise on probability'". Studies in History an Philosophy Science, vol. 25, 1994.
- Runde, J.: "On Popper, probabilities and propensities". Review of Social Economy, vol. LIV, 1996.
- Russell, B.: "*Principles of mathematics*". Oxford, 1903.
- Russell, B.: "On denoting" (1905). En Marsh, R.C. (ed.), 1956.
- Russell, B.; Whitehead, A.N.: "*Principia mathematica*". Oxford, 1910-1913.
- Russell, B.: "*The problems of philosophy*". Williams & Norgate, 1912.
- Russell, B.: "*On knowledge of the external world*". Allen & Unwin, 1961.
- Russell, B.: "*The autobiography of Bertrand Russell*". Allen & Unwin, 1967.
- Russell, B.: "*My philosophical development*". Allen & Unwin, 1969.
- Ryder, J.M.: "Consequences of a simple extension of the Dutch book argument". British Journal of Philosophy of Science, vol. 32, 1981.
- Sadi Carnot, L.: "*Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propes à développer cette puissance*", 1824.
- Sahlin, N.-E.: "*The philosophy of F.P. Ramsey*". Cambridge University Press, 1990.
- Salmon, W.C.: "Propensities: Adiscussion review of D.H. Mellor 'The matter of chance'". Erkenntnis, vol. 14, 1979.
- Salmon, W.C. (ed.): "*Introduction to philosophy of science*". Prentice-Hall, 1992.
- Sambursky, S.: "*The physical world of the greeks*". Routledge & Keegan, 1963.
- Savage, L.J.: "*The foundations of statistics*". Wiley, 1954.
- Savage, L.J.: "*The foundations of statistical inference: A discussion*". Wiley, 1962.
- Savage, L.J.: "Elicitation of personal probabilities and expectations". JASA, vol. 66, 1972.
- Savage, L.J.: "*The writings of Leonard Jimmie Savage. A memorial selection*". American Statistical Association and Institute of Mathematical Statistics, 1981.
- Schebelius, J.: "*Deutsche Arithmetica*". Nuremberg, 1545.
- Schervish, M.J.; Seidenfeld, T.; Kadane, J.B.: "The extent of non-conglomerability of finitely additive probabilities". Zeitschrift für Wahrscheinleichkeits Thorie und verwandte Gebiete, vol. 66, 1984.
- Schlaifer, R.: "*Probability and statistics for business decisions: An introduction to managerial economics under uncertainty*". McGraw-Hill, 1959.
- Schneider, I.: "The introduction of probability in mathematics". History of Mathematics, vol. 3, 1976.
- Schneider, I. (ed.): "*Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeits Theorie von der Anfängen bis 1983: Einführungen und Texte*". Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1988.
- Schols, C.M.: "*Über de theorie der fouten in de ruimte en in het platte Vlak*", 1875.
- Scozzafava, R.: "A survey of some common misunderstanding concerning the role and meaning of finitely additive probabilities in statistical inference". Statistica, vol. 44, 1984.
- Segal, I.E.: "Norbert Wiener, November 26, 1894-March 18, 1964". Biographical Memories, vol. 61, 1992.
- Serres,M.: "*Feux et signaux de Brume-Zola*". Grasset, 1975.
- 'sGravesande, W.J.: "Démonstration mathématique du soin que dieu prend de diriger ce qui se passe dans ce monde, tirée du nombre des journellement". En Allamand, J.N.S. (ed.) (1774).
- Shafer, G.: "Constructive probability". Synthese, vol. 48, 1981.
- Shafer, G.: "The combination of evidence". International Journal of Intelligent Systems, vol. 1, 1986.
- Shafer, G.: "The unity of probability". En von Furstenberg, G.M. (1990).
- Shafer, G.: "The unity and diversity of probability". Statistical Science, vol. 5, 1990.
- Shafer, G.; Pearl, J. (eds.): "*Readings in uncertain reasoning*". Morgan-Kaufmann, 1990.
- Shafer, G.; Vovk, V.: "*Probability and finance: It's only a game!*". Wiley, 2001.
- Shafer, G.; Vovk, V.: "The origins and legacy of Kolmogorov Grundbegriffe". Workin Paper nº 4, 2005.www.probabilityandfinance.com.
- Shafer, G.; Vovk, V.: "The sources of Kolmogorov's Grundbegriffe". Statistical Science, vol. 21, 2006.
- Shanker, S. (ed.): "*Gödel's theorem in focus*". Croom & Helm, 1988.
- Sheynin, O.B.: "Daniel Bernoulli on the Normal law". Biometrika, vol. 57, 1970.
- Sheynin, O.B.: "Daniel Bernoulli's work on probability". Rete, vol. 1, 1972.
- Sheynin, O.B.: "On the prehistory of the theory of probability". Archive History Exact Sciences, vol. 12, 1974.
- Sheynin, O.B.: "Laplace's work on probability". Archive History Exact Sciences, vol. 16, 1976.

- Sheynin, O.B.: "*Aleksandr A. Chuprov: Lifve, work correspondence. The making of mathematical statistics*". Vandenhoeck-Ruprecht, 1996.
- Sheynin, O. B. (ed.): "*From Markov to Kolmogorov. Russian papers on probability and statistics. Containing essays of S.N. bernstein, A.A. Chuprov, B.V.Gnedenko, A.Ya.Khinchin, A.N.Kolmogorov, A.M. Liapunov, A.A. Markov y V.V. Paevsky*". Hänsel-Hohenhusen, 1998.
- Sierpiński, W.: "*Œuvres choises*". Polish Scientific Publishers, 1975.
- Simpson, T.: "*The doctrine of annuities and reversions, deduced from general and evident principles*". Nourse, 1742.
- Simpson, T.: "The valuation of annuities for single and joint lives. Select exercises for young proficients in the mathematicks". Nourse, 1752. Reeditado como "*A supplement to the doctrine of annuities and reversions*". Wingrave, 1791.
- Simpson, T.: "On the advantage of taking the mean of a number of observations in practical astronomy. A leeter to the Righr Honorable George Earl of Macclesfield, President of the Royal Society". Philosophical Transactions of the Royal Society, vol. 49, 1755.
- Simpson, T.: "*Miscellaneous tracts on some curious, and very interesting subjects in mechanics, physical-astronomy an speculative mathematics*". J. Nourse, 1757.
- Simpson, T.: "An attempt to show the advantage arising by taking the mean of number of observations in practical astronomy". En Simpson, T. (1757).
- Skidelsky, R.: "*John Maynard Keynes-Vol. 1: Hopes betrayed 1883-1920*". MacMillan, 1983.
- Skidelsky, R.: "*John Maynard Keynes-Vol. 2: The economist as saviour 1920-1937*". MacMillan, 1992.
- Slutsky, E.: "On the question of the logical foundation of the theory of probability" (original en ruso). Bulletin of Statistics, vol. 12, 1922.
- Slutsky, E.: "Über stocastische Asymptoten und Grenzwerte". Metron, vol. 5, 1925.
- Smith, R. (ed.): "*Opera miscellanea*", Cambridge, 1722.
- Soare, R.: "Computability and recursion". Bulletin of Symbolic Logic, vol. 2, 1996.
- Sobczyk, A.; Hammer, P.C.: "A descomposition of additive set functions". Duke Mathematical Journal, vol. 11, 1944a.
- Sobczyk, A.; Hammer, P.C.: "The ranges of additive set functions". Duke Mathematical Journal, vol. 11, 1944b.
- Solomonoff, A.: "A formal theory of inductive inference". Information and Control, vol. 7, 1964.
- Spizzichino, F.: "Symmetry conditions on opinion assessment leading of time-transformed exponential models". En Lindley, D.V.; Clarotti, C.A. (eds.)(1988).
- Stampa, G.M.: "*Ludus serio expensus*". 1700.
- Steinhaus, H.: "Les probabilités dénombrables et leur rapport à la theorie de la measure". Fundamenta Mathematica, vol. 4, 1923.
- Steinhaus, H.: "Über die Wahrscheinlichkeit dafür daβ der Konvergenzkreis einer Potenzreihe ihre natürliche Grenze ist". Athematische Zeitschrift, vol. 31, 1930a.
- Steinhaus, H.: "Sur la probabilité de la convergence de séries". Studia Mathematica, vol. 2, 1930b.
- Stiefel, M.: "*Arithmetica integra*". Nuremberg, 1544.
- Stigler, S.M.: "Simon Newcomb, Percy Daniell and the history of robust estimation 1885-1920". JASA, vol. 68, 1973.
- Striling, J.: "*Methodus differentialis: Sive tractatus de cummatione et interpolatione seriorum infinitarium*". Bowyer, 1730.
- Strode, T.: "*A short trteatise of combinations, elections, permutations and composition of quantities. I llustrated by several examples, with a new speculation of the differences of the power of numbers*". Godbid-Wyer, 1678.
- Struyck, N.: "*Uytreekening der Kansen in het speelen, door de Arithmetica en Algeba, beeneevens eene Verhanderling van Looterijen en Interest*" (1716). Reeditado en "*Oeuvres de Nicolas Struyck*". La Société Génerale Néerlandaise s'Assurances sur la Vie et de Rentes Viagères, 1912.
- Struyck, N.: "*Calcul des rentes viagères*" (1740). Reeditado en "*Oeuvres de Nicolas Struyck*". La Société Génerale Néerlandaise s'Assurances sur la Vie et de Rentes Viagères, 1912.
- Stumpf, C.: "*Über die Begriff der Mathematischen Wahrscheinlichkeit*". Hahrgang, 1892.
- Suppes, P.; Zanotti, M.: "Necessary an sufficient conditions for existence of a unique measure strictly agreeing with a qualitative probability ordering". Journal of Philosophy and Logic, vol. 5, 1976.

- Süssmilch, J.P.: "*Die guttliche Ordnung in der Veränderungen des menschlichen Geschlechts*" (1741). Tercera edición traducida en Hecht, J. (ed.) como "Lòrdre divin aux origin de la demographie". Institut National d'Etudes Demographiques, 1979.
- Sutherland, I.: "John Graunt: A tricentenary tribute". JRSS, Serie A, vol. 126, 1963.
- Tartaglia, N.: "*General trattato di numeri e misure*". Venecia, 1536.
- Tavanec, P.V. (ed.): "*Problems of the logic of scientific knowledge*". Traducción al inglés, Humanities Press, 1970.
- Thom, R.: "*Structural stability and morphogenesis*". Benjamin, 1975.
- Thom, R.: "*Mathematical models of morphogenesis*". Horwood,1983.
- Tillotson, J.: "*Wisdom of being religious*" (1664). En "*The works of the most Reverend Dr. John Tillotson*", Edinburgo y Glasgow, 1748.
- Todhunter, I.: "*A history of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace*". MacMillan, 1865. Reeditado por Chelsea, 1949, 1965.
- Trembley, J.: "De probabilitate causarum ab affectionibus oriunda: Disquisitio mathematica". Commentationes Societatis Regiæ Scientiarum Gottingensis, Commentationes Mathematica, vol. 13, 1795-1798.
- Turing, A.: "On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem". Proceedings London Mathematical Society, Serie 2, vol. 42, 1936.
- Tversky, A.: "Intransitivity of preferences". Psychological Review, vol. 76, 1969.
- Ulam, S.: "Zum Massbegriffe in Produkträumen". Verhandlung des Internationalen Mathematiker-Kongress, Zurich, vol. 2, 1932.
- Uspenskii, V.A.; Semenoff, A.L.; Shen, A.Kh.: "Can an individual sequence of zeros and ones be random?". Russian Mathematical Surveys, vol. 45, 1990.
- van Deuren, P.: "*Leçons sur le calcul des probabilités*". Gauthier-Villars, 1934.
- van Lambalgen, M.: "von Mises' definition of randomness reconsidered". The Journal of Symbolic Logic, vol. 52, 1987.
- van Schooten, F.: "*Exercitationum mathematicorum*". Johannis Elsevirii, 1657.
- van Schooten, F.: "*Mathematische Oeffeningen*". Gerrit van Goedesbergh, 1659.
- Venn, J.: "*The logic of chance*". MacMillan, 1866.
- Verhulst, P.F.: "*Deuxiéme mémoire sur la loi d'accroissement de la population*". Estrasburgo, 1847.
- Vieta, F.: "Variorum et rebus mathematicis responsorum" (1591). En "*Opera mathematica. In unum volumen congesta ac recognita, opuere atque studio Francisci Schooten*", 1634.
- Ville, J.: "*Étude critique de la notion de collectiff*". Gauthier-Villars, 1939.
- Villegas, C.: "On qualitative probability σ-algebras". Annals of Mathematical Statistics, vol. 35, 1964.
- Volchan, S.B.: "What is a random sequence?". American Mathematical Monthly, vol. 109, 2002.
- von Furstenberg, G.M.: "*Acting under uncertainty: Multidisciplinary conceptions*". Kluwer, 1990.
- von Kries, J.: "*Die Principen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Fine logische Untersuchung*". Mohr, 1886.
- von Lindenau, A. Baron: "Über der Gerbauch der Gradmessungen zur Bestimmung der Gestalt der Erde". Monaliche Correspondenz, vol. 14, 1806.
- von Mises, R.: "Über die Grundbegriffe der Kollektive masslehre". Jahresberichte der Deutschen Mathematiker Vereinigung, vol. 21, 1912.
- von Mises, R.: "Fundamentalsatze de Wahrscheinlichkeitsrechnung". Mathematischen Zeitschrift, vol. 4, 1919.
- von Mises, R.: "Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung". Mathematische Zeitschrift, vol. 5, 1919.
- von Mises, R.: "Über die gegenwärtige Krise der Mechanik". Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, vol. 1, 1921.
- von Mises, R.: "*Probability, statistics and truth*". MacMillan, 1928.
- von Mises, R.: "*Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik*". Deuticke, 1931.
- von Mises, R.: "*Mathematical theory of probability and statistics*". Academic Press, 1964.
- von Mises, R.: "*Selecta II*". American Mathematical Society, 1964.
- von Mises, R.: "*The science of mechanics: A critical and historical account of its development*". Sexta edición en inglés, Open Court, 1960.
- von Neumann, J.; Morgenstern, O.: "*Theory of games and economic behavior*". Princeton University Press, 1944.

- von Plato, J.: "*Creating modern probability: Its mathematics, physics and philosophy in historical perspective*". Cambridge University Press, 1994.
- Wald, A.: "*Statistical decision functions*". Wiley, 1950.
- Wald, A.: "Die Widerspruchsfreiheit des Kollektivbergriffes". Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums", vol. 8, 1937. Reeditado en "*Wald: Selected papers in statistics and probability*". MacGraw-Hill, 1955.
- Watson. H.W.: "*On the probability of the extinction of families*". Londres, 1875.
- Westergaard, H.L.: "*Grundsüge der Theorie der Statistik*". G. Fisher, 1890.
- Whittle, P.: "*Probability via expectartion*". Springer, 2000.
- Whyte, L.L.: "*R.J. Boscovich: Studies in his life and work*". Londres, 1961.
- Wiener, N.: "The mean of a funcitonal of arbitrary elements". Annals of Mathematics, vol. 22, 1920.
- Wiener, N.: "The average of an analytical functional". Proceedings National Academy of Sciences USA, vol. 7, 1921a.
- Wiener, N.: "The average of an analytical functional and the Brownian movement". Proceedings National Academy of Sciences, vol. 7, 1921b.
- Wiener, N.: "Differential-space". Journal of Mathematics and Physics, MIT, vol. 2, 1923.
- Wiener, N.: "The average value of a functional". Proceedings London Mathematical Society, vol. 22, 1924.
- Willcox, W.F.: "The founder of statistics". Review of International Institute of Statistics, vol. 5, 1937.
- William, W. (ed.): "*The mathematical and other writings of Robert Leslie Ellis M.A.*". Deighton, 1863.
- Williamson, J.O.D.: "Countable additivity and subjective probability". British Journal for the Philosophy of Science, vol. 50, 1999.
- Wiman, A.: "Über eine Wahrscheinlichkeitsaufgabe bei kettebrucentwicklungen". Öfversight af Kongliga Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar Femtiondesjunde Ärgängen, vol. 57, 1900.
- Wiman, A.: "*Bemerkung über eine von Glydén Aufgeworfene Wahrschein lichkeitsfrage*". Håkan Ohlssons Boktrykeri, 1901.
- Wittgenstein, L.: "*Tractatus logico philosophicus*". Routledge-Kegan, 1961.
- Youschkevitch, A.P.: "Isaac Newton". En "*Dictionary of Scientific biographies*", Scribner's, 1974.
- Zabell, S.A.: "The rule of succession". Erkenntnis, vol. 31, 1989.
- Zabell, S.A.: "Ramsey, truth and probability". Theoria, vol. 57, 1991.

Indice temático