Teoría Actuarial de los Seguros Personales

Tópicos de Interés

Aplicaciones de dos leyes de mortalidad

Relaciones entre las coberturas de vida y de muerte

Autoras:
Act. María Alejandra Metelli
Act. María Milagros Fernández Villa

Metelli, María Alejandra
Aplicaciones de dos leyes de mortalidad: relaciones entre las coberturas de vida y de muerte. Teoría actuarial de los seguros personales / María Alejandra Metelli; María Milagros Fernández Villa. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas, 2021.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-950-29-1902-7

1. Seguros. 2. Leyes. I. Fernández Villa, María Milagros. II. Título.
CDD 332.38

ISBN 978-950-29-1902-7

9 789502 919027

Contenido

I. APLICACIÓN DE ALGUNAS LEYES DE MORTALIDAD A FUNCIONES ACTUARIALES

I. Introducción

Se desarrollan a continuación las fórmulas correspondientes a las funciones biométricas y actuariales bajo dos hipótesis de leyes de mortalidad: la lineal y la exponencial.

II. Ley de Moivre

Bajo esta ley, el decrecimiento anual es constante; es decir, se supone que la cantidad de muertes que se producen anualmente es uniforme todos los años.

II.1 Sobrevivientes y fallecidos.

El número de fallecidos a cualquier edad está dado entonces por:

$$d(x+t) = \frac{l(0)}{\omega}$$

Puede observarse que el decrecimiento anual constante previamente mencionado es equivalente al cociente entre el grupo de sobrevivientes inicial l(0) y la cantidad máxima de años que se estima sobrevivirá una persona recién nacida, ω; comúnmente llamada edad terminal de la tabla.

A partir de la fórmula expuesta pueden obtenerse expresiones para la determinación de las distintas funciones biométricas y actuariales:

El número de fallecidos, entonces, entre las edades x y x+t está dado por:

$$d(x;0;t) = \sum_{s=0}^{t-1} d(x+s) = t \cdot \frac{l(0)}{\omega}$$

Es decir, resulta equivalente al producto entre el tiempo de exposición a riesgo y la cantidad de fallecidos por unidad de exposición.

El grupo de sobrevivientes a la edad x+t se calcula entonces como:

$$l(x+t) = l(0) - d(0;0;x+t) = l(0) - (x+t) \cdot \frac{l(0)}{\omega}$$

que puede reducirse a la siguiente expresión:

$$l(x+t) = l(0) \cdot \left(1 - \frac{(x+t)}{\omega}\right)$$

que también es equivalente a:

$$l(x+t) = l(0) \cdot \frac{\omega - x - t}{\omega}$$

II.2 Probabilidades

La probabilidad de que una persona de edad x fallezca antes de alcanzar la edad x+1 se obtiene como:

$$q(x;0;1) = \frac{d(x)}{l(x)}$$

es decir:

$$q(x;0;1) = \frac{\frac{l(0)}{w}}{l(0) \cdot \frac{w-x}{w}}$$

resultando entonces que:

$$q(x;0;1) = \frac{1}{\omega - x}$$

En forma análoga, la probabilidad de que una persona de edad x+t fallezca antes de alcanzar la edad x+t+1 es equivalente a:

$$q(x+t;0;1) = \frac{1}{\omega - x - t}$$

Puede concluirse entonces que la probabilidad anual de fallecimiento es una función creciente respecto a la edad. Ello es así como consecuencia de que la cantidad de muertes es constante y la de sobrevivientes va disminuyendo.

La probabilidad de que una persona de edad x fallezca a la edad x+t se calcula como:

$$q(x;t;1) = \frac{d(x+t)}{l(x)}$$

reemplazando numerador y denominador por sus expresiones equivalentes

$$q(x;t;1) = \frac{\frac{l(0)}{\omega}}{l(0) \cdot \frac{\omega - x}{\omega}}$$

obteniendo en consecuencia la siguiente expresión final:

$$q(x;t;1) = \frac{1}{\omega - x}$$

Puede observarse entonces que $q(x;t;1) = q(x;0;1)$, es decir, sólo interesa el tiempo de exposición al riesgo de muerte.

La probabilidad de que una persona de edad x alcance con vida la edad x+n se calcula como:

$$p(x;n) = \frac{l(x+n)}{l(x)}$$

teniendo en cuenta lo desarrollado en forma previa para l(x+t), puede escribirse que:

$$l(x+n) = l(0) \cdot \frac{\omega - x - n}{\omega}$$

De este modo, la probabilidad buscada resulta:

$$p(x;n) = \frac{l(0) \cdot \frac{\omega - x - n}{\omega}}{l(0) \cdot \frac{\omega - x}{\omega}}$$

de donde surge:

$$p(x;n) = \frac{\omega - x - n}{\omega - x}$$

que puede expresarse como:

$$p(x;n) = 1 - \frac{n}{\omega - x}$$

Teniendo en cuenta lo expuesto previamente, puede calcularse la probabilidad de que una persona de edad x no alcance con vida la edad x+n del siguiente modo:

$$q(x;0;n) = 1 - p(x;n)$$

es decir:

$$q(x;0;n) = 1 - \left(1 - \frac{n}{\omega - x}\right)$$

resultando la siguiente expresión:

$$q(x;0;n) = \frac{n}{\omega - x}$$

que también puede obtenerse como:

$$q(x;0;n) = \sum_{t=0}^{n-1} q(x;t;1)$$

es decir:

$$q(x;0;n) = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{1}{w - x}$$

con lo cual, dado que $\frac{1}{w-x}$ es constante, se obtiene que:

$$q(x;0;n) = \frac{n}{w - x}$$

En forma análoga, puede calcularse la probabilidad de que una persona de edad x alcance con vida la edad x+t y fallezca antes de alcanzar la edad x+t+n como:

$$q(x;t;n) = p(x;t) - p(x;t+n)$$

teniendo en cuenta las expresiones previamente halladas para la probabilidad de supervivencia, se obtiene:

$$q(x;t;n) = \left(1 - \frac{t}{\omega - x}\right) - \left(1 - \frac{t+n}{\omega - x}\right)$$

resultando entonces la siguiente expresión:

$$q(x;t;n) = \frac{n}{\omega - x}$$

Se concluye nuevamente que la mencionada probabilidad es independiente del plazo de diferimiento y sólo es función del tiempo en que la persona está expuesta al riesgo de muerte.

Se desprende de lo expuesto que:

$$q(x;0;n) = q(x;t;n)$$

Aplicando las expresiones anteriores a las funciones actuariales utilizadas en forma frecuente, se obtienen las siguientes expresiones:

II.3 Funciones actuariales

II.3.1 Capital diferido de vida

Se define como:

$$E(x;t) = v^t \cdot p(x;t)$$

teniendo en cuenta la expresión obtenida previamente para la probabilidad de supervivencia, se tiene que:

$$E(x;t) = v^t \cdot \frac{\omega - x - t}{\omega - x}$$

que puede expresarse como:

$$E(x;t) = v^t \cdot \left(1 - \frac{t}{\omega - x}\right)$$

II.3.2 Capital diferido de muerte

Se define como:

$$A(x;t;1) = v^{t+1} \cdot q(x;t;1)$$

teniendo en cuenta la expresión obtenida previamente para la probabilidad de fallecimiento, se tiene que:

$$A(x;t;1) = v^{t+1} \cdot \frac{1}{\omega - x} = \frac{v^{t+1}}{\omega - x}$$

II.3.3 Seguro de vida de capitales múltiples de riesgo diferido y plazo limitado

Esta cobertura resulta de la suma de capitales diferidos de vida; es decir:

$$a(x;h;n) = \sum_{t=h}^{h+n-1} E(x;t)$$

teniendo en cuenta la expresión obtenida para el capital diferido de vida bajo la ley analizada, se tiene que:

$$a(x;h;n)=\sum_{t=h}^{h+n-1} v^t\cdot\left(1-\frac{t}{\omega-x}\right)$$

de modo que:

$$a(x;h;n)=\sum_{t=h}^{h+n-1} v^t-\sum_{t=h}^{h+n-1} v^t\cdot\frac{t}{\omega-x}$$

El minuendo es equivalente al valor actual de una sucesión financiera de capitales constantes: $af(h;n;i)$

mientras que el sustraendo resulta equivalente al valor actual de una sucesión financiera de capitales variables en progresión aritmética de razón constante – increasing -: $aIf(h;n;i)$.

Teniendo en cuenta lo previamente expuesto puede desarrollarse la misma del siguiente modo:

$$a(x;h;n)=af(h;n;i)-\frac{1}{\omega-x}\cdot\sum_{t=h}^{h+n-1} t\cdot v^t$$

$$a(x;h;n)=af(h;n;i)-\frac{1}{\omega-x}\cdot\left[h\cdot af(h;n;i)+\sum_{t=1}^{n-1} af(h+t;n-t;i)\right]$$

$$a(x;h;n)=af(h;n;i)\cdot\left(1-\frac{h}{\omega-x}\right)-\frac{1}{\omega-x}\cdot\sum_{t=1}^{n-1} af(h+t;n-t;i)$$

$$a(x;h;n)=af(h;n;i)\cdot\frac{w-x-h}{\omega-x}-\frac{1}{\omega-x}\cdot\frac{1}{d}\cdot\left[\sum_{t=1}^{n-1} v^{h+t}-\sum_{t=1}^{n-1} v^{h+n}\right]$$

$$a(x;h;n)=af(h;n;i)\cdot\frac{w-x-h}{\omega-x}-\frac{1}{\omega-x}\cdot\frac{1}{d}\cdot\left[\sum_{t=1}^{n-1} v^{h+t}-n\cdot v^{h+n}\right]$$

$$a(x;h;n)=af(h;n;i)\cdot\frac{w-x-h}{\omega-x}-\frac{1}{\omega-x}\cdot\left[\frac{af(h+1;n;i)}{d}-\frac{n\cdot v^{h+n}}{d}\right]$$

$$a(x;h;n)=af(h;n;i)\cdot\frac{w-x-h}{\omega-x}-\frac{1}{\omega-x}\cdot\frac{af(h;n;i)}{i}+\frac{n\cdot v^{h+n}}{(\omega-x)\cdot d}$$

Puede sacarse factor común $af(h;n;i)$ entre los dos primeros términos y, teniendo en cuenta además la perpetuidad es equivalente a $af(1;\infty;i) = \frac{1}{i}$, la expresión anterior puede escribirse como :

$$a(x;h;n) = af(h;n;i) \cdot \frac{w - x - h - af(1;\infty;i)}{\omega - x} + \frac{n \cdot v^{h+n}}{(\omega - x) \cdot d}$$

Para el caso particular de h=0, se tiene que:

$$a(x;0;n) = af(0;n;i) \cdot \frac{w - x - af(1;\infty;i)}{\omega - x} + \frac{n \cdot v^{n}}{(\omega - x) \cdot d}$$

II.3.4 Imposiciones vitalicias

Las imposiciones vitalicias se calculan como el valor final de una serie de capitales constantes.
Se desarrolla a continuación el caso general en el cual se valúan n capitales constantes (h-1) períodos después de la imposición del último de los capitales.

Lo previamente expuesto puede entonces escribirse como:

$$s(x;n;h) = \sum_{t=0}^{n-1} E^{-1}(x+t;n+h-1-t)$$

Teniendo en cuenta que: $E^{-1}(x;n+h-1)$ puede escribirse como:

$$E^{-1}(x;n+h-1) = E^{-1}(x;t) \cdot E^{-1}(x+t;n+h-1-t)$$

se obtiene que:

$$E^{-1}(x+t;n+h-1-t) = E(x;t) \cdot E^{-1}(x;n+h-1)$$

En consecuencia $s(x;n;h)$ resulta equivalente a:

$$s(x;n;h) = \sum_{t=0}^{n-1} E(x;t) \cdot E^{-1}(x;n+h-1)$$

con lo cual, la expresión final es:

$$s(x;n;h) = a(x;0;n) \cdot E^{-1}(x;h+n-1)$$

Si se observa la expresión obtenida para a(x;h;n) y, considerando $h = 0$, se puede escribir:

$$a(x;0;n) = af(0;n;i) \cdot \frac{w - x - af(1;\infty;i)}{\omega - x} + \frac{n \cdot v^n}{(\omega - x) \cdot d}$$

Con lo cual, al reemplazar a(x;0;n) en la expresión previa correspondiente a S(x;n,h), se obtiene que:

$$s(x;n;h) = \left[af(0;n;i) \cdot \frac{w - x - af(1;\infty;i)}{\omega - x} + \frac{n \cdot v^n}{(\omega - x) \cdot d}\right] \cdot E^{-1}(x;h+n-1)$$

Asimismo, como $E^{-1}(x;h+n-1) = (1+i)^{h+n-1} \cdot \frac{w-x}{w-x-h-n+1}$

resulta la siguiente expresión final:

$$s(x;n;h) = sf(0;n;i) \cdot (1+i)^{h-1} \cdot \frac{w - x - af(1;\infty;i)}{\omega - x - h - n + 1} + \frac{n \cdot (1+i)^{h-1}}{(\omega - x - h - n + 1) \cdot d}$$

II.3.5 Seguro de muerte de riesgo diferido y plazo limitado

La expresión que representa la cobertura mencionada es $A(x;h;n)$, la cual puede obtenerse como la suma de los capitales diferidos de muerte:

$$A(x;h;n) = \sum_{t=h}^{h+n-1} A(x;t;1)$$

reemplazando $A(x;t;1)$ por la expresión obtenida bajo la ley de mortalidad bajo análisis, es decir, por:

$$A(x;t;1) = v^{t+1} \cdot q(x;t;1) = v^{t+1} \cdot \frac{1}{\omega - x} = \frac{v^{t+1}}{\omega - x}$$

se tiene que:

$$A(x;h;n) = \sum_{t=h}^{h+n-1} \frac{v^{t+1}}{\omega - x}$$

resultando en consecuencia la siguiente expresión final:

$$A(x; h; n) = \frac{af(h+1; n; i)}{\omega - x}$$

Para el caso particular en que $h = 0$; es decir, cuando se trata de un seguro temporario de muerte, la expresión resultante es:

$$A(x; 0; n) = \frac{af(1; n; i)}{\omega - x}$$

Para el caso particular en que el seguro de muerte cubra toda la vida; es decir, en el caso de una cobertura de vida entera, la expresión resultante es:

$$A(x; 0; w - x) = \frac{af(1; w - x; i)}{\omega - x}$$

que también podría expresarse como:

$$A(x; 0; w - x) = \frac{\frac{1}{i}}{\omega - x} = [i \cdot (w - x)]^{-1} = \frac{1}{i \cdot (w - x)}$$

II.3.6 Seguro Dotal

Dado que el seguro dotal es la suma de un seguro de capital diferido de vida $E(x; n)$ y un seguro temporario de muerte $A(x; 0; n)$, siendo:

$$E(x; n) = v^n \cdot \left(1 - \frac{n}{\omega - x}\right) \quad \text{y} \quad A(x; 0; n) = \frac{af(1; n; i)}{\omega - x}$$

la expresión final resultante para esta cobertura está dada por la expresión:

$$P(x; 1) = \frac{v^n \cdot (\omega - x - n) + af(1; n; i)}{\omega - x}$$

II.3.7 Seguro Dotal Doble Capital

El seguro dotal a doble capital resulta de la suma del dotal y de un seguro de muerte de riesgo diferido, sin límite.

En función de lo expuesto y, teniendo en cuenta que también puede obtenerse como suma de un capital diferido de vida y un seguro de vida entera, siendo:

$$E(x;n) = v^n \cdot \left(1 - \frac{n}{\omega - x}\right) \quad \text{y} \quad A(x;0;w-x) = \frac{af(1;w-x;i)}{\omega - x}$$

la expresión final resultante para esta cobertura está dada por la expresión:

$$P(x;1) = \frac{v^n \cdot (\omega - x - n) + af(1;w-x;i)}{\omega - x}$$

III.Ley exponencial

Bajo esta ley, el decrecimiento anual es un porcentaje constante; con lo cual, la cantidad de muertes que se produce anualmente es decreciente.

III.1 Probabilidades de supervivencia

Conforme lo expuesto, se define la probabilidad anual de supervivencia como:

$$p(x+s;1) = a$$

es decir, constante cualquiera sea la edad considerada.

En consecuencia, la probabilidad de que una persona de edad x alcance con vida la edad x+t puede obtenerse mediante la aplicación del método de recurrencia como:

$$p(x;t) = \prod_{s=0}^{t-1} p(x+s;1)$$

teniendo en cuenta lo expuesto - probabilidad anual de supervivencia constante -, se obtiene la siguiente expresión:

$$p(x;t) = a^t$$

en forma análoga:

$$p(0;x+t) = a^{x+t}$$

III.2 Grupos de sobrevivientes y de fallecidos

El grupo de sobrevivientes a la edad x+t se calcula entonces como:

$$l(x+t) = l(0) \cdot p(x;t)$$

es decir;

$$l(x+t) = l(0) \cdot a^{x+t}$$

Así, el número de fallecidos a la edad x+t puede obtenerse como:

$$d(x+t) = l(x+t) - l(x+t+1)$$

reemplazando los grupos de sobrevivientes por las expresiones obtenidas previamente, se tiene que:

$$d(x+t) = l(0) \cdot a^{x+t} - l(0) \cdot a^{x+t+1}$$

con lo cual:

$$d(x+t) = l(0) \cdot a^{x+t} \cdot (1-a)$$

teniendo en cuenta que a< 1, se observa que el número de fallecidos anualmente es decreciente.

A partir de esta expresión pueden obtenerse expresiones para la determinación de las distintas funciones biométricas:

El número de fallecidos, entonces, entre las edades x y x+t se determina como:

$$d(x;0;t) = l(x) - l(x+t)$$

reemplazando los grupos de sobrevivientes por las expresiones obtenidas mediante la aplicación de esta ley, se obtiene que:

$$d(x;0;t) = l(0) \cdot a^{x} - l(0) \cdot a^{x+t}$$

con lo cual;

$$d(x;0;t) = l(0) \cdot a^{x} \cdot (1-a^{t})$$

III.3. Probabilidades de fallecimiento

La probabilidad de que una persona de edad x+t fallezca antes de alcanzar la edad x+t+1 se obtiene como:

$$q(x+t;0;1) = \frac{d(x+t)}{l(x+t)}$$

es decir:

$$q(x+t;0;1)=\frac{l(0)\cdot a^{x+t}\cdot(1-a)}{l(0)\cdot a^{x+t}}$$

resultando entonces que:

$$q(x+t;0;1)=1-a$$

Puede concluirse entonces que la probabilidad anual de fallecimiento es una función constante cualquiera sea la edad considerada.

La probabilidad de que una persona de edad x fallezca a la edad x+t se calcula como:

$$q(x;t;1)=\frac{d(x+t)}{l(x)}$$

reemplazando numerador y denominador por sus expresiones equivalentes

$$q(x;t;1)=\frac{l(0)\cdot a^{x+t}\cdot(1-a)}{l(0)\cdot a^{x}}$$

obteniendo en consecuencia la siguiente expresión final:

$$q(x;t;1)=l(0)\cdot a^{t}\cdot(1-a)$$

Puede observarse entonces que $q(x;t;1)<q(x;0;1)$, dado que, si bien el tiempo de exposición al riesgo de muerte es en ambos casos el mismo, la primera probabilidad expuesta se ve afectada por el hecho de que la persona debe sobrevivir a la edad x+t.

La probabilidad de que una persona de edad x no alcance con vida la edad x+n está dada por:

$$q(x;0;n)=1-p(x;n)$$

teniendo en cuenta que la expresión para p(x;n) será similar a la obtenida previamente para p(x;t), puede escribirse:

$$q(x;0;n)=1-a^{n}$$

En forma análoga, puede calcularse la probabilidad de que una persona de edad x alcance con vida la edad x+t y fallezca antes de alcanzar la edad x+t+n como:

$$q(x;t;n)=p(x;t)-p(x;t+n)$$

teniendo en cuenta las expresiones previamente halladas para la probabilidad de supervivencia, se obtiene:

$$q(x;t;n) = 1 - a^t - (1 - a^{t+n})$$

resultando entonces la siguiente expresión:

$$q(x;t;n) = a^t \cdot (1 - a^n)$$

Aplicando las expresiones anteriores a las funciones actuariales bajo análisis, se obtienen las siguientes expresiones:

III.4 Funciones actuariales

III.4.1 Capital diferido de vida

Se define como:

$$E(x;t) = v^t \cdot p(x;t)$$

teniendo en cuenta la expresión obtenida previamente para la probabilidad de supervivencia, se tiene que:

$$E(x;t) = v^t \cdot a^t$$

que puede expresarse como:

$$E(x;t) = (v \cdot a)^t$$

Resulta interesante destacar en este punto que dado que tanto v como a son valores inferiores a la unidad, el decrecimiento anual de la función capital diferido de vida es constante.

III.4.2 Capital diferido de muerte

Se define como:

$$A(x;t;1) = v^{t+1} \cdot q(x;t;1)$$

teniendo en cuenta la expresión obtenida previamente para la probabilidad de fallecimiento, se tiene que:

$$A(x;t;1) = v^{t+1} \cdot a^t \cdot (1 - a)$$

III.4.3 Seguro de vida de capitales múltiples de riesgo diferido y plazo limitado

Esta cobertura resulta de la suma de capitales diferidos de vida; es decir:

$$a(x;h;n) = \sum_{t=h}^{h+n-1} E(x;t)$$

teniendo en cuenta la expresión obtenida para el capital diferido de vida bajo la ley analizada, se tiene que:

$$a(x;h;n) = \sum_{t=h}^{h+n-1} (v \cdot a)^t$$

teniendo en cuenta que se trata de una suma de términos variables en progresión geométrica donde:

a_0 es el primer término de la progresión, equivalente a $(v \cdot a)^h$

n es la cantidad de términos

q es la razón de la progresión equivalente a $(v \cdot a)$

y que la fórmula correspondiente a la suma de términos variables en progresión geométrica – cuando la razón de la progresión es menor que la unidad - está dada por:

$$S_n = a_0 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

se obtiene la siguiente expresión:

$$a(x;h;n) = (v \cdot a)^h \cdot \frac{1-(v \cdot a)^n}{1-(v \cdot a)}$$

Para el caso particular de h=0, se tiene que:

$$a(x;0;n) = \frac{1-(v \cdot a)^n}{1-v \cdot a}$$

III.4.4. Imposiciones vitalicias

Las imposiciones vitalicias se calculan como el valor final de una serie de capitales constantes; es decir:

$$s(x;n;h)=\sum_{t=0}^{n-1}E^{-1}(x+t;n+h-1-t)$$

dado que: $E^{-1}(x;n+h-1)$ puede escribirse como:

$$E^{-1}(x;n+h-1)=E^{-1}(x;t)\cdot E^{-1}(x+t;n+h-1-t)$$

se tiene que:

$$E^{-1}(x+t;n+h-1-t)=E(x;t)\cdot E^{-1}(x;n+h-1)$$

resultando en consecuencia $s(x;n;h)$ equivalente a:

$$s(x;n;h)=\sum_{t=0}^{n-1}E(x;t)\cdot E^{-1}(x;n+h-1)$$

con lo cual, la expresión final es:

$$s(x;n;h)=a(x;0;n)\cdot E^{-1}(x;h+n-1)$$

Si se observa la expresión obtenida para $a(x;h;n)$ y, teniendo en cuenta que $h=0$, se puede escribir:

$$a(x;0;n)=\frac{1-(v\cdot a)^n}{1-v\cdot a}$$

con lo cual:

$$s(x;n;h)=\frac{[1-(v\cdot a)^n]\cdot E^{-1}(x;h+n-1)}{1-v\cdot a}$$

Teniendo en cuenta la expresión obtenida para el capital diferido de vida y, considerando las edades que se establecen en la expresión previa, puede escribirse:

$$E^{-1}(x;h+n-1)=(v\cdot a)^{-(h+n-1)}$$

resultando:

$$E^{-1}(x;h+n-1)=\left(\frac{1+i}{a}\right)^{(h+n-1)}$$

De este modo, la expresión final que surge para la imposición vitalicia al reemplazar el factor de capitalización actuarial por la hallada previamente, se:

$$s(x;n;h)=\frac{\left[\left(\frac{1+i}{a}\right)^{n}-1\right]\cdot\left(\frac{1+i}{a}\right)^{(h-1)}}{1-v\cdot a}$$

III.4.5 Seguro de muerte de riesgo diferido y plazo limitado

La expresión que representa la cobertura mencionada es $A(x;h;n)$, la cual puede obtenerse como la suma de los capitales diferidos de muerte:

$$A(x;h;n)=\sum_{t=h}^{h+n-1}A(x;t;1)$$

reemplazando $A(x;t;1)$ por la expresión obtenida bajo la ley de mortalidad bajo análisis, es decir:

$$A(x;t;1)=v^{t+1}\cdot a^{t}\cdot(1-a)$$

se tiene que:

$$A(x;h;n)=\sum_{t=h}^{h+n-1}v^{t+1}\cdot a^{t}\cdot(1-a)$$

que puede escribirse como:

$$A(x;h;n)=v\cdot(1-a)\cdot\sum_{t=h}^{h+n-1}v^{t}\cdot a^{t}$$

Teniendo en cuenta que el valor correspondiente a esta suma ya ha sido obtenido previamente en el desarrollo de los seguros de vida de capitales múltiples

$$a(x;h;n)=(v\cdot a)^{h}\cdot\frac{1-(v\cdot a)^{n}}{1-(v\cdot a)}$$

puede escribirse la siguiente expresión final:

$$A(x;h;n)=\frac{v\cdot(1-a)\cdot(v\cdot a)^{h}\cdot[1-(v\cdot a)^{n}]}{1-(v\cdot a)}$$

Para el caso particular en que $h = 0$; es decir, cuando se trata de un seguro temporario de muerte, la expresión resultante es:

$$A(x;0;n) = \frac{v \cdot (1-a) \cdot [1-(v \cdot a)^n]}{1-(v \cdot a)}$$

Para el caso particular en que el seguro de muerte cubra toda la vida; es decir, en el caso de una cobertura de vida entera, la expresión resultante es:

$$A(x;0;w-x) = \frac{v \cdot (1-a)}{1-(v \cdot a)}$$

dado que $(v \cdot a)^n$ tiende a cero a medida que n crece.

III.4.6 Seguro Dotal

Dado que el seguro dotal es la suma de un seguro de capital diferido de vida $E(x;n)$ y un seguro temporario de muerte $A(x;0;n)$, siendo:

$$E(x;n) = (v \cdot a)^n \qquad \text{y} \qquad A(x;0;n) = \frac{v \cdot (1-a) \cdot [1-(v \cdot a)^n]}{1-(v \cdot a)}$$

la expresión final resultante para esta cobertura está dada por la expresión:

$$P(x;1) = (v \cdot a)^n + \frac{v \cdot (1-a) \cdot [1-(v \cdot a)^n]}{1-(v \cdot a)}$$

III.4.7 Seguro Dotal Doble Capital

El seguro dotal a doble capital resulta de la suma del dotal y de un seguro de muerte de riesgo diferido, sin límite.

En función de lo expuesto y, teniendo en cuenta que también puede obtenerse como suma de un capital diferido de vida y un seguro de vida entera, siendo:

$$E(x;n) = (v \cdot a)^n \qquad \text{y} \qquad A(x;0;w-x) = \frac{v \cdot (1-a)}{1-(v \cdot a)}$$

la expresión final resultante para esta cobertura está dada por la expresión:

$$P(x;1) = (v \cdot a)^n + \frac{v \cdot (1-a)}{1-(v \cdot a)}$$

IV. Cuadros

Se muestran a continuación los cuadros correspondientes a las leyes de mortalidad desarrolladas.

Las sucesivas columnas corresponden a:

- Edad
- Grupo de sobrevivientes a cada una de las edades
- Fallecidos a cada una de las edades
- Probabilidad anual de fallecimiento
- Probabilidad anual de supervivencia.

Ley de De Moivre

La raíz de la tabla se considera 10.000.000. Se considera 100 la edad terminal de la tabla. Los resultados se muestran en el CUADRO I.

Ley exponencial

La raíz de la tabla se considera 10.000.000. y se toma una probabilidad anual de supervivencia equivalente al 81 %. Los resultados se muestran en el CUADRO II.

CUADRO I

Edad	Sobrevivientes	Fallecidos	Probabilidades Anuales	
			Fallecimiento	Supervivencia
0	10.000.000	100.000	0,0100	0,9900
1	9.900.000	100.000	0,0101	0,9899
2	9.800.000	100.000	0,0102	0,9898
3	9.700.000	100.000	0,0103	0,9897
4	9.600.000	100.000	0,0104	0,9896
5	9.500.000	100.000	0,0105	0,9895
6	9.400.000	100.000	0,0106	0,9894
7	9.300.000	100.000	0,0108	0,9892
8	9.200.000	100.000	0,0109	0,9891
9	9.100.000	100.000	0,0110	0,9890
10	9.000.000	100.000	0,0111	0,9889
11	8.900.000	100.000	0,0112	0,9888
12	8.800.000	100.000	0,0114	0,9886
13	8.700.000	100.000	0,0115	0,9885
14	8.600.000	100.000	0,0116	0,9884
15	8.500.000	100.000	0,0118	0,9882
16	8.400.000	100.000	0,0119	0,9881
17	8.300.000	100.000	0,0120	0,9880
18	8.200.000	100.000	0,0122	0,9878
19	8.100.000	100.000	0,0123	0,9877
20	8.000.000	100.000	0,0125	0,9875
21	7.900.000	100.000	0,0127	0,9873
22	7.800.000	100.000	0,0128	0,9872
23	7.700.000	100.000	0,0130	0,9870
24	7.600.000	100.000	0,0132	0,9868
25	7.500.000	100.000	0,0133	0,9867
26	7.400.000	100.000	0,0135	0,9865
27	7.300.000	100.000	0,0137	0,9863
28	7.200.000	100.000	0,0139	0,9861
29	7.100.000	100.000	0,0141	0,9859
30	7.000.000	100.000	0,0143	0,9857
31	6.900.000	100.000	0,0145	0,9855
32	6.800.000	100.000	0,0147	0,9853
33	6.700.000	100.000	0,0149	0,9851
34	6.600.000	100.000	0,0152	0,9848
35	6.500.000	100.000	0,0154	0,9846

Edad	Sobrevivientes	Fallecidos	Probabilidades Anuales	
			Fallecimiento	Supervivencia
36	6.400.000	100.000	0,0156	0,9844
37	6.300.000	100.000	0,0159	0,9841
38	6.200.000	100.000	0,0161	0,9839
39	6.100.000	100.000	0,0164	0,9836
40	6.000.000	100.000	0,0167	0,9833
41	5.900.000	100.000	0,0169	0,9831
42	5.800.000	100.000	0,0172	0,9828
43	5.700.000	100.000	0,0175	0,9825
44	5.600.000	100.000	0,0179	0,9821
45	5.500.000	100.000	0,0182	0,9818
46	5.400.000	100.000	0,0185	0,9815
47	5.300.000	100.000	0,0189	0,9811
48	5.200.000	100.000	0,0192	0,9808
49	5.100.000	100.000	0,0196	0,9804
50	5.000.000	100.000	0,0200	0,9800
51	4.900.000	100.000	0,0204	0,9796
52	4.800.000	100.000	0,0208	0,9792
53	4.700.000	100.000	0,0213	0,9787
54	4.600.000	100.000	0,0217	0,9783
55	4.500.000	100.000	0,0222	0,9778
56	4.400.000	100.000	0,0227	0,9773
57	4.300.000	100.000	0,0233	0,9767
58	4.200.000	100.000	0,0238	0,9762
59	4.100.000	100.000	0,0244	0,9756
60	4.000.000	100.000	0,0250	0,9750
61	3.900.000	100.000	0,0256	0,9744
62	3.800.000	100.000	0,0263	0,9737
63	3.700.000	100.000	0,0270	0,9730
64	3.600.000	100.000	0,0278	0,9722
65	3.500.000	100.000	0,0286	0,9714
66	3.400.000	100.000	0,0294	0,9706
67	3.300.000	100.000	0,0303	0,9697
68	3.200.000	100.000	0,0313	0,9688
69	3.100.000	100.000	0,0323	0,9677
70	3.000.000	100.000	0,0333	0,9667

Edad	Sobrevivientes	Fallecidos	Probabilidades Anuales	
			Fallecimiento	Supervivencia
71	2.900.000	100.000	0,0345	0,9655
72	2.800.000	100.000	0,0357	0,9643
73	2.700.000	100.000	0,0370	0,9630
74	2.600.000	100.000	0,0385	0,9615
75	2.500.000	100.000	0,0400	0,9600
76	2.400.000	100.000	0,0417	0,9583
77	2.300.000	100.000	0,0435	0,9565
78	2.200.000	100.000	0,0455	0,9545
79	2.100.000	100.000	0,0476	0,9524
80	2.000.000	100.000	0,0500	0,9500
81	1.900.000	100.000	0,0526	0,9474
82	1.800.000	100.000	0,0556	0,9444
83	1.700.000	100.000	0,0588	0,9412
84	1.600.000	100.000	0,0625	0,9375
85	1.500.000	100.000	0,0667	0,9333
86	1.400.000	100.000	0,0714	0,9286
87	1.300.000	100.000	0,0769	0,9231
88	1.200.000	100.000	0,0833	0,9167
89	1.100.000	100.000	0,0909	0,9091
90	1.000.000	100.000	0,1000	0,9000
91	900.000	100.000	0,1111	0,8889
92	800.000	100.000	0,1250	0,8750
93	700.000	100.000	0,1429	0,8571
94	600.000	100.000	0,1667	0,8333
95	500.000	100.000	0,2000	0,8000
96	400.000	100.000	0,2500	0,7500
97	300.000	100.000	0,3333	0,6667
98	200.000	100.000	0,5000	0,5000
99	100.000	100.000	1,0000	0,0000
100	0			

CUADRO II

Edad	Sobrevivientes	Fallecidos	Probabilidades Anuales	
			Fallecimiento	Supervivencia
0	10.000.000	1.900.000	0,1900	0,8100
1	8.100.000	1.539.000	0,1900	0,8100
2	6.561.000	1.246.590	0,1900	0,8100
3	5.314.410	1.009.738	0,1900	0,8100
4	4.304.672	817.888	0,1900	0,8100
5	3.486.784	662.489	0,1900	0,8100
6	2.824.295	536.616	0,1900	0,8100
7	2.287.679	434.659	0,1900	0,8100
8	1.853.020	352.074	0,1900	0,8100
9	1.500.946	285.180	0,1900	0,8100
10	1.215.767	230.996	0,1900	0,8100
11	984.771	187.106	0,1900	0,8100
12	797.664	151.556	0,1900	0,8100
13	646.108	122.761	0,1900	0,8100
14	523.348	99.436	0,1900	0,8100
15	423.912	80.543	0,1900	0,8100
16	343.368	65.240	0,1900	0,8100
17	278.128	52.844	0,1900	0,8100
18	225.284	42.804	0,1900	0,8100
19	182.480	34.671	0,1900	0,8100
20	147.809	28.084	0,1900	0,8100
21	119.725	22.748	0,1900	0,8100
22	96.977	18.426	0,1900	0,8100
23	78.552	14.925	0,1900	0,8100
24	63.627	12.089	0,1900	0,8100
25	51.538	9.792	0,1900	0,8100
26	41.746	7.932	0,1900	0,8100
27	33.814	6.425	0,1900	0,8100
28	27.389	5.204	0,1900	0,8100
29	22.185	4.215	0,1900	0,8100
30	17.970	3.414	0,1900	0,8100
31	14.556	2.766	0,1900	0,8100
32	11.790	2.240	0,1900	0,8100
33	9.550	1.815	0,1900	0,8100
34	7.736	1.470	0,1900	0,8100

35	6.266	1.190	0,1900	0,8100

Edad	Sobrevivientes	Fallecidos	Probabilidades Anuales	
			Fallecimiento	Supervivencia
36	5.075	964	0,1900	0,8100
37	4.111	781	0,1900	0,8100
38	3.330	633	0,1900	0,8100
39	2.697	512	0,1900	0,8100
40	2.185	415	0,1900	0,8100
41	1.770	336	0,1900	0,8100
42	1.433	272	0,1900	0,8100
43	1.161	221	0,1900	0,8100
44	940	179	0,1900	0,8100
45	762	145	0,1900	0,8100
46	617	117	0,1900	0,8100
47	500	95	0,1900	0,8100
48	405	77	0,1900	0,8100
49	328	62	0,1900	0,8100
50	266	50	0,1900	0,8100
51	215	41	0,1900	0,8100
52	174	33	0,1900	0,8100
53	141	27	0,1900	0,8100
54	114	22	0,1900	0,8100
55	93	18	0,1900	0,8100
56	75	14	0,1900	0,8100
57	61	12	0,1900	0,8100
58	49	9	0,1900	0,8100
59	40	8	0,1900	0,8100
60	32	6	0,1900	0,8100
61	26	5	0,1900	0,8100
62	21	4	0,1900	0,8100
63	17	3	0,1900	0,8100
64	14	3	0,1900	0,8100
65	11	2	0,1900	0,8100
66	9	2	0,1900	0,8100
67	7	1	0,1900	0,8100
68	6	1	0,1900	0,8100
69	5	1	0,1900	0,8100
70	4	1	0,1900	0,8100

Edad	Sobrevivientes	Fallecidos	Probabilidades Anuales	
			Fallecimiento	Supervivencia
71	3	1	0,1900	0,8100
72	3	0	0,1900	0,8100
73	2	0	0,1900	0,8100
74	2	0	0,1900	0,8100
75	1	0	0,1900	0,8100
76	1	0	0,1900	0,8100
77	1	0	0,1900	0,8100
78	1	0	0,1900	0,8100
79	1	0	0,1900	0,8100
80	0	0	0,1900	0,8100
81	0	0	0,1900	0,8100
82	0	0	0,1900	0,8100
83	0	0	0,1900	0,8100
84	0	0	0,1900	0,8100
85	0	0	0,1900	0,8100
86	0	0	0,1900	0,8100
87	0	0	0,1900	0,8100
88	0	0	0,1900	0,8100
89	0	0	0,1900	0,8100
90	0	0	0,1900	0,8100

V. Análisis de los resultados obtenidos

Bajo la ley de De Moivre, la cantidad de fallecidos anualmente se supone constante, ello implica que las probabilidades anuales de fallecimiento son crecientes en virtud de que el número de sobrevivientes es decreciente.
Bajo la ley exponencial la probabilidad anual de fallecimiento es constante con lo cual, la cantidad de fallecidos anualmente es decreciente en virtud de que los sucesivos grupos de sobrevivientes van decreciendo.
Estos resultados pueden observarse en la tercera – cantidad de fallecidos – y cuarta columna – probabilidad anual de fallecimiento – de cada uno de los cuadros.

VI. Ejemplos

Se muestran a continuación los resultados numéricos obtenidos para cada una de las funciones determinadas en las leyes desarrolladas.

<u>Ley de De Moivre</u>

El número de fallecidos entre los 35 y 40 años resulta equivalente a 500.000.
Si se calculara el número de fallecidos entre los 40 y 45 años, el mismo también resulta equivalente a 500.000, de donde puede concluirse que el número de fallecidos en un período determinado depende de la longitud del período y no de la edad.

La probabilidad anual de fallecimiento para una persona de 35 años es equivalente a 1,54 % resultante del cociente:

$$q(35;0;1) = \frac{1}{100-35}$$

Si se deseara obtener la probabilidad de que una persona de 35 años falleciera a los 45, la expresión resultante es:

$$q(35;10;1) = \frac{1}{100-35}$$

Se observa que la probabilidad anual de fallecimiento no depende del período de diferimiento sino sólo del tiempo de exposición al riesgo de muerte.

La probabilidad de que una persona de 35 años alcance con vida los 45 años es equivalente a 0,84615 y surge a partir de la siguiente expresión:

$$p(35;10) = 1 - \frac{10}{65}$$

En forma análoga, la probabilidad de que una persona de 35 años fallezca antes de alcanzar los 45 años es equivalente a 0,15385 y surge a partir de la siguiente expresión:

$$q(35;0;10) = \frac{10}{65}$$

Dado la constancia observada en las probabilidades anuales de muerte, esta probabilidad es la suma de 10 probabilidades anuales de muerte.
Obviamente la suma de las probabilidades de sobrevivir y fallecer dentro de idéntico período debe resultar igual a la unidad.

La probabilidad de que una persona de 35 años fallezca entre los 55 y 65 años está dada por:

$$q(35;20;10) = \frac{10}{65}$$

Se llega nuevamente a la conclusión de que lo que importa bajo esta hipótesis es el tiempo de exposición al riesgo de muerte.

A fin de ejemplificar las funciones actuariales, se considera una tasa de interés del 4 % efectivo anual:

De este modo, una persona de 35 años deberá abonar 0,57163 a fin de poder cobrar un capital unitario de alcanzar con vida los 45 años,

La cifra mencionada surge de:

$$E(35;10) = 1.04^{-10} \cdot \left(1 - \frac{10}{65}\right)$$

El capital diferido de muerte para una persona de 35 años con pago de capital asegurado unitario al fin del año del fallecimiento si éste tiene lugar a los 45 años, está dado por:

$$A(35;10;1) = \frac{1{,}04^{-11}}{100-35}$$

Es decir, el valor correspondiente es de 0.009993.

El valor actual a los 35 años de una serie de 10 capitales unitarios pagaderos mientras viva esta persona es 7,8932, resultado obtenido a partir de la siguiente expresión:

$$a(35;0;10) = af(0;10;0.04) \cdot \frac{100-35-af(1;\infty;0.04)}{100-35} + \frac{10 \cdot 1.04^{-10}}{(100-35) \cdot 0.03846}$$

Y que puede controlarse sumando los capitales diferidos que se muestran a continuación:

PLAZO	E(35;t)
0	1
1	0,9467
2	0,8961
3	0,8480
4	0,8022
5	0,7587
6	0,7174
7	0,6781
8	0,6408
9	0,6053

El valor final de 10 capitales unitarios anuales que se abonan a partir de los 35 años, valuados a la edad 54 puede obtenerse a partir de la siguiente expresión:

$$s(35;10;10) = sf(0;10;0.04)\cdot(1+0.04)^{10-1}\cdot\frac{100-35-af(1;\infty;0.04)}{100-35-10-10+1}+\frac{10\cdot(1+0.04)^{10-1}}{(100-35-10-10+1)\cdot 0.03846}$$

Siendo el resultado correspondiente 23,498694.

Si se capitaliza el valor obtenido para el seguro de vida de capitales múltiples en forma actuarial desde los 35 años hasta los 54 años se llega al mismo resultado; es decir:

$$s(35;10;10) = a(35;0;10).\ \cdot E^{-1}(35;19)$$

Si se tiene en cuenta que los valores son:

$$a(35;0;10) = 7{,}8932$$

$$E^{-1}(35;19) = 2{,}9771$$

El valor correspondiente a una cobertura de temporario de muerte para una persona de 35 años y un plazo de 10 años resulta equivalente a la siguiente expresión:

$$A(35;0;10) = \frac{af(1;10;0.04)}{100-35}$$

Es decir,

$$A(35;0;10) = \frac{8{,}110896}{65}$$

Lo que da como resultado un valor de prima pura única de 0,124783

Si se aplica la relación vida- muerte, se tiene que:

$$A(35;0;10) = 1 - E(35;10) - d \cdot a(35;0;10)$$

Reemplazando los valores previamente obtenidos se tiene que:

$$A(35;0;10) = 1 - 0{,}57163 - 0{,}03846 \cdot 7{,}8932$$

Y se observa que el resultado es el mismo.

La prima pura única de un seguro dotal para una persona de 35 años por un plazo de 10 años surge entonces de la suma de la correspondiente al seguro temporario de muerte y la del capital diferido de vida; es decir, su valor es equivalente a : 0,69641.

<u>Ley exponencial</u>

El número de fallecidos entre los 35 y 40 años resulta equivalente a 4.081 mientras que el de fallecidos entre los 40 y 45 años es de 1.423.

Los valores previamente expuestos pueden obtenerse a partir de los valores del CUADRO II, o mediante la aplicación de las fórmulas correspondientes considerando un valor de a equivalente a 0,81 y l(0) a 10.000.000, es decir:

$$d(35;0;5) = 10.000.000 \cdot 0{,}81^{35}(1 - 0{,}81^{5})$$

En forma análoga

$$d(40;0;5) = 10.000.000\,.\,0{,}81^{40}(1 - 0{,}81^{5})$$

Puede observarse además que los fallecidos entre las edades 40 y 45 resultan de la siguiente relación:

$$d(40;0;5) = d(35;0;5).\,0{,}81^{5}$$

La probabilidad anual de fallecimiento para una persona de 35 años es equivalente 0,19 siendo la misma constante cualquiera sea la edad que se considere en la hipótesis de mortalidad utilizada.

La probabilidad de que una persona de 35 años alcance con vida los 45 años es equivalente a 0.12157 y surge a partir de la siguiente expresión:

$$p(35;10) = 0{,}81^{10}$$

En forma análoga, la probabilidad de que una persona de 35 años fallezca antes de alcanzar los 45 años es equivalente a 0,87843 y surge a partir de la siguiente expresión:

$$q(35; 0; 10) = 1 - 0{,}81^{10}$$

Obviamente la suma de las probabilidades de sobrevivir y fallecer dentro de idéntico período debe resultar igual a la unidad.

La probabilidad de que una persona de 35 años fallezca entre los 55 y 65 años está dada por:

$$q(35; 20; 10) = 0{,}81^{20} \cdot (1 - 0{,}81^{10})$$

Que resulta ser igual a 0,012984. Este resultado puede ser también obtenido a partir del cuadro II sumando los fallecidos desde la edad 55 hasta la edad 64 inclusive y dividiendo la suma mencionada por los sobrevivientes a la edad 35.

A fin de ejemplificar las funciones actuariales, se considera una tasa de interés del 4 % efectivo anual:

De este modo, una persona de 35 años deberá abonar 0,082132 a fin de poder cobrar un capital unitario de alcanzar con vida los 45 años,

La cifra mencionada surge de:

$$E(35; 10) = (0{,}81/1{,}04)^{10}$$

El capital diferido de muerte para una persona de 35 años con pago de capital asegurado unitario al fin del año del fallecimiento si éste tiene lugar a los 45 años, está dado por:

$$A(35; 10; 1) = 1{,}04^{-11} \cdot 0{,}81^{10} \cdot (1 - 0{,}81)$$

Es decir, el valor correspondiente es de 0.01501

El valor actual a los 35 años de una serie de 10 capitales unitarios pagaderos mientras viva esta persona es 4,1504, resultado obtenido a partir de la siguiente expresión:

$$a(35; 0; 10) = \frac{1 - \left(\frac{0{,}81}{1{,}04}\right)^{10}}{1 - \frac{0{,}81}{1{,}04}}$$

Y que puede controlarse sumando los capitales diferidos que se muestran a continuación:

PLAZO	E(35;t)
0	1
1	0,7788
2	0,6066
3	0,4724
4	0,3680
5	0,2866
6	0,2232
7	0,1738
8	0,1354
9	0,1055

El valor final de 10 capitales unitarios anuales que se abonan a partir de los 35 años, valuados a la edad 54 puede obtenerse a partir de la siguiente expresión:

$$s(35;10;10)=\frac{\left[\left(\frac{1+0{,}04}{0{,}81}\right)^{10}-1\right]\cdot\left(\frac{1+0{,}04}{0{,}81}\right)^{(10-1)}}{1-\frac{0{,}81}{1{,}04}}$$

Siendo el resultado correspondiente 479,1852.

Si se capitaliza el valor obtenido para el seguro de vida de capitales múltiples en forma actuarial desde los 35 años hasta los 54 años se llega al mismo resultado; es decir:

$$s(35;10;10)=a(35;0;10).\ \cdot E^{-1}(35;19)$$

Si se tiene en cuenta que los valores son:

$$a(35;0;10)=4{,}1504$$

$$E^{-1}(35;19)=115{,}4564$$

El valor correspondiente a una cobertura de temporario de muerte para una persona de 35 años y un plazo de 10 años resulta equivalente a la siguiente expresión:

$$A(35;0;10)=\frac{\frac{1-0{,}81}{1{,}04}\cdot\left[1-\left(\frac{0{,}81}{1{,}04}\right)^{10}\right]}{1-\frac{0{,}81}{1{,}04}}$$

Es decir,

$$A(35; 0; 10) = \frac{0{,}16768}{0{,}22115}$$

Lo que da como resultado un valor de prima pura única de 0,758233

Si se aplica la relación vida- muerte, se tiene que:

$$A(35; 0; 10) = 1 - E(35; 10) - d \cdot a(35; 0; 10)$$

Reemplazando los valores previamente obtenidos se tiene que:

$$A(35; 0; 10) = 1 - 0{,}082132 - 0{,}03846 \cdot 4{,}1504$$

Y se observa que el resultado es el mismo.

La prima pura única de un seguro dotal para una persona de 35 años por un plazo de 10 años surge entonces de la suma de la correspondiente al seguro temporario de muerte y la del capital diferido de vida; es decir, su valor es equivalente a: 0,84037.

<u>Un análisis interesante</u>

<u>Bajo la ley de mortalidad exponencial, la expresión resultante para el capital diferido de vida es:</u>

$$E(x; t) = (v \cdot a)^t$$

Que también puede escribirse como:

$$E(x; t) = \left(\frac{(1+i)}{a}\right)^{-t}$$

De este modo, su variación respecto al plazo puede expresarse como:

$$\frac{\partial}{\partial t} E(x; t) = -E(x; t) \cdot ln\left[\frac{(1+i)}{a}\right]$$

y su variación porcentual estará dada por:

$$-\,ln\left[\frac{(1+i)}{a}\right]$$

Es decir, el aumento del plazo producirá una disminución porcentual en el valor del factor de actualización que dependerá de la tasa de interés y de la tasa de decrecimiento del grupo de sobrevivientes, independiente del plazo de contratación.

II. PARTE 2.- RELACIONES ENTRE LAS COBERTURAS DE VIDA Y DE MUERTE

I. Introducción

El objetivo del presente es determinar todas las coberturas de muerte en función de las coberturas de vida que responden a características similares.

A fin de poder efectuar los desarrollos correspondientes se partirá de la expresión inicial del capital diferido de muerte para continuar luego con las siguientes coberturas de muerte que, justamente se obtienen a partir del factor previamente mencionado.

Los desarrollos de cada una de las coberturas serán realizados para el caso general correspondiente a un plazo de diferimiento h y un plazo de cobertura n, mostrando luego a partir del resultado obtenido los casos particulares en cada caso.

El trabajo se cierra con el ejemplo correspondiente a cada una de las coberturas analizadas.

II. Capital diferido de muerte

El capital diferido de muerte es equivalente a:

$$A(x;t;1) = v^{t+1} \cdot q(x;t;1)$$

Reemplazando la probabilidad de muerte por la expresión correspondiente en función de las probabilidades de supervivencia, se tiene que:

$$A(x;t;1) = v^{t+1} \cdot [p(x;t) - p(x;t+1)]$$

Al distribuir el factor de actualización financiero, se obtiene entonces la siguiente expresión:

$$A(x;t;1) = v \cdot E(x;t) - E(x;t+1)$$

Esta relación, entonces, permite obtener el capital diferido de muerte en función del capital diferido de vida.

A partir de la expresión previamente expuesta, pueden obtenerse las relaciones que se detallan a continuación para los seguros pagaderos en caso de muerte:

III. Seguros pagaderos en caso de muerte

1. Capital asegurado constante

Se desarrolla la relación para el caso general, derivándose luego a partir de la misma las relaciones correspondientes a los cados particulares.

1.1. Riesgo diferido y plazo limitado

La cobertura que se analiza consiste en el pago del capital asegurado – considerado unitario en el desarrollo – a los derechohabientes al fin del año del fallecimiento del asegurado si éste se produce a partir de una edad determinada – x+h - y dentro de un plazo establecido – n - Entonces, puede escribirse:

$$A(x;h;n) = \sum_{t=h}^{h+n-1} A(x;t;1)$$

$$A(x;h;n) = \sum_{t=h}^{h+n-1} v^{t+1} \cdot q(x;t;1)$$

En función del desarrollo efectuado para el capital diferido de muerte, se tiene que:

$$A(x;h;n) = \sum_{t=h}^{h+n-1} v^{t+1} \cdot [p(x;t) - p(x;t+1)]$$

$$A(x;h;n) = \sum_{t=h}^{h+n-1} v^{t+1} \cdot p(x;t) - \sum_{t=h}^{h+n-1} v^{t+1} \cdot p(x;t+1)$$

$$A(x;h;n) = v \cdot \sum_{t=h}^{h+n-1} E(x;t) - \sum_{t=h}^{h+n-1} E(x;t+1)$$

Debe recordarse que la suma de capitales diferidos de vida da origen a los denominados seguros de vida de capitales múltiples; con lo cual, se obtiene la siguiente expresión:

$$A(x;h;n) = v \cdot a(x;h;n) - a(x;h+1;n)$$

Teniendo en cuenta que el valor actual financiero v es equivalente a la diferencia entre el capital unitario y los descuentos practicados al mismo: d y, la relación existente entre a(x;h+1;n) y a(x;h;n), se llega a la siguiente expresión:

$$A(x;h;n) = (1-d) \cdot a(x;h;n) - [a(x;h;n) - E(x;h) + E(x;h+n)]$$

Con lo cual, luego de efectuar las correspondientes simplificaciones, se llega a:

$$A(x;h;n) = E(x;h) - E(x;h+n) - d \cdot a(x;h;n)$$

Casos particulares:

1.2. Riesgo inmediato y plazo limitado

En este caso $h = 0$:

$$A(x;0;n) = 1 - E(x;n) - d \cdot a(x;0;n)$$

1.3. Riesgo inmediato, sin límite

En este caso $h = 0$ y $n = w - x$:

$$A(x;0;w-x) = 1 - d \cdot a(x;0;w-x)$$

1.4. Riesgo diferido, sin límite

En este caso $n = w - x - h$:

$$A(x;h;w-x-h) = E(x;h) - d \cdot a(x;h;w-x-h)$$

A fin de interpretar el significado de las expresiones previamente obtenidas, se partirá de la correspondiente al seguro de muerte de riesgo inmediato, sin límite:

¿Qué suma estaría dispuesta a pagar una persona en concepto de prima pura única por esta cobertura? La respuesta inmediata es "un importe menor a la unidad" dado que ese es el capital que han de recibir sus derechohabientes en caso de fallecimiento.
Surge entonces la siguiente pregunta: ¿Cuánto menos?, y la respuesta a este interrogante es los descuentos financieros que se obtienen a partir de la colocación de los fondos de las personas que sobreviven.

¿Cómo se interpretan el resto de las relaciones? En el caso del seguro temporario de muerte, debe recordarse que la cobertura es por un plazo limitado; con lo cual, no sólo deben descontarse los intereses generados por la colocación de los fondos correspondientes a los sobrevivientes sino también el valor actual actuarial del capital unitario en caso de que el asegurado sobreviva al plazo de cobertura contratado.

2. **Capitales variables en progresión aritmética - crecientes de razón igual al capital inicial (increasing).**

Se desarrolla la relación para el caso general, derivándose luego a partir de la misma las relaciones correspondientes a los casos particulares.

2.1. Riesgo diferido y plazo limitado

La cobertura considerada consiste en el pago del capital asegurado , creciente anualmente en progresión aritmética de razón equivalente al capital asegurado inicial, a los derechohabientes al fin del año del fallecimiento del asegurado si éste se produce a partir de una edad determinada – x+h - y dentro de un plazo establecido – n –

A lo largo del desarrollo se considera un capital inicial unitario.

Se define la prima pura única de la cobertura mencionada como:

$$AI(x;h;n) = \sum_{t=0}^{n-1} (1+t) \cdot A(x;h+t;1)$$

Que puede escribirse como:

$$AI(x;h;n) = \sum_{t=0}^{n-1} (1+t) \cdot v^{h+t+1} \cdot q(x;h+t;1)$$

En el desarrollo se tienen en cuenta las herramientas ya desarrolladas para el caso del capital diferido de muerte:

$$AI(x;h;n) = \sum_{t=0}^{n-1} (1+t) \cdot v^{h+t+1} \cdot [p(x;h+t) - p(x;h+t+1)]$$

$$AI(x;h;n) = \sum_{t=0}^{n-1} (1+t) \cdot v^{h+t+1} \cdot p(x;h+t) - \sum_{t=0}^{n-1} (1+t) \cdot v^{h+t+1} \cdot p(x;h+t+1)$$

$$AI(x;h;n) = v \cdot \sum_{t=0}^{n-1} (1+t) \cdot E(x;h+t) - \sum_{t=0}^{n-1} (1+t) \cdot E(x;h+t+1)$$

Debe recordarse que las sumas correspondientes a capitales diferidos de vida variables responden al concepto de seguros de vida de capitales variables en progresión aritmética de razón equivalente al capital inicial – increasing –

De este modo:

$$AI(x;h;n) = v \cdot aI(x;h;n) - aI(x;h+1;n)$$

Teniendo en cuenta que el valor actual financiero v es equivalente a la diferencia entre el capital unitario y los descuentos practicados al mismo: d y, la relación existente entre aI(x;h+1;n) y aI(x;h;n), se llega a la siguiente expresión:

$$AI(x;h;n) = (1-d) \cdot aI(x;h;n) - [aI(x;h;n) - a(x;h;n) + n \cdot E(x;h+n)]$$

Que, luego de efectuar las simplificaciones correspondientes, puede reducirse a:

$$\boldsymbol{AI(x;h;n) = a(x;h;n) - n \cdot E(x;h+n) - d \cdot aI(x;h;n)}$$

<u>*Casos particulares:*</u>

2.2. Riesgo inmediato y plazo limitado

En este caso $h = 0$:

$$\boldsymbol{AI(x;0;n) = a(x;0;n) - n \cdot E(x;n) - d \cdot aI(x;0;n)}$$

2.3. Riesgo inmediato, sin límite

En este caso $h = 0$ y $n = w - x$:

$$\boldsymbol{AI(x;0;w-x) = a(x;0;w-x) - d \cdot aI(x;0;w-x)}$$

2.4. Riesgo diferido, sin límite

En este caso $n = w - x - h$:

$$\boldsymbol{AI(x;h;w-x-h) = a(x;h;w-x-h) - d \cdot aI(x;h;w-x-h)}$$

3. Capitales variables en progresión aritmética – variables de razón "r".

Se desarrolla la relación para el caso general, derivándose luego a partir de la misma las relaciones correspondientes a los cados particulares.

3.1. Riesgo diferido y plazo limitado

La cobertura considerada consiste en el pago del capital asegurado , creciente anualmente en progresión aritmética de razón r, equivalente a un porcentaje sobre el capital asegurado inicial, a los derechohabientes al fin del año del fallecimiento del asegurado si éste se produce a partir de una edad determinada – x+h - y dentro de un plazo establecido – n –

A lo largo del desarrollo se considera un capital inicial unitario. Conforme lo expuesto, la prima pura única resulta equivalente a:

$$A_v(x;h;n;r) = \sum_{t=0}^{n-1} (1 + t \cdot r) \cdot A(x;h+t;1)$$

Que puede escribirse del siguiente modo:

$$A_v(x;h;n;r) = \sum_{t=0}^{n-1} A(x;h+t;1) + r \cdot \sum_{t=0}^{n-1} t \cdot A(x;h+t;1)$$

Al efectuar el correspondiente desarrollo se observa que en el cálculo de la misma intervienen una cobertura de muerte de capitales constantes y otra correspondiente a un increasing; es decir;

$$A_v(x;h;n;r) = A(x;h;n) + r \cdot AI(x;h+1;n-1)$$

De este modo, de acuerdo con el desarrollo expuesto para $A(x;h;n)$ en función de los seguros de vida:

$$A(x;h;n) = E(x;h) - E(x;h+n) - d \cdot a(x;h;n)$$

Y, expresando también $AI(x;h+1;n-1)$ en función de los seguros de vida :

$$AI(x;h+1;n-1) = a(x;h+1;n-1) - (n-1) \cdot E(x;h+n) - d \cdot aI(x;h+1;n-1)$$

Se obtiene que:

$$A_v(x;h;n;r) = E(x;h) - E(x;h+n) - d \cdot a(x;h;n) + r \cdot [a(x;h+1;n-1) - (n-1) \cdot E(x;h+n) - d \cdot aI(x;h+1;n-1)]$$

$$A_v(x;h;n;r) = E(x;h) - d \cdot [a(x;h;n) + r \cdot aI(x;h+1;n-1)] + r \cdot a(x;h+1;n-1) - E(x;h+n) \cdot [1 + r \cdot (n-1)]$$

Con lo cual:

$$\boldsymbol{A_v(x;h;n;r) = E(x;h) - d \cdot a_v(x;h;n;r) + r \cdot a(x;h+1;n-1) - E(x;h+n) \cdot [1 + r \cdot (n-1)]}$$

Casos particulares:

3.2. Riesgo inmediato y plazo limitado

En este caso $h = 0$:

$$\boldsymbol{A_v(x;0;n;r) = 1 - d \cdot a_v(x;0;n;r) + r \cdot a(x;1;n-1) - E(x;n) \cdot [1 + r \cdot (n-1)]}$$

3.3. Riesgo inmediato, sin límite

En este caso $h = 0$ y $n = w - x$:

$$\boldsymbol{A_v(x;0;w-x;r) = 1 - d \cdot a_v(x;0;w-x;r) + r \cdot a(x;1;w-x-1)}$$

3.4. Riesgo diferido, sin límite

En este caso $n = w - x - h$:

$$\boldsymbol{A_v(x;h;w-x-h;r) = E(x;h) - d \cdot a_v(x;h;w-x-h;r) + r \cdot a(x;h+1;w-x-h-1)}$$

4. Capitales variables en progresión aritmética – decrecientes de razón igual al último capital: Decreasing.

Se desarrolla la relación para el caso general, derivándose luego a partir de la misma las relaciones correspondientes a los cados particulares.

4.1. Riesgo diferido y plazo limitado

La cobertura considerada consiste en el pago del capital asegurado , decreciente anualmente en progresión aritmética de razón equivalente al capital asegurado final, a los derechohabientes al fin del año del fallecimiento del asegurado si éste se produce a partir de una edad determinada – x+h - y dentro de un plazo establecido – n –

A lo largo del desarrollo se considera un capital final unitario.

La prima pura única correspondiente a esta cobertura está dada por:

$$AD(x;h;n) = \sum_{t=0}^{n-1} (n-t) \cdot A(x;h+t;1)$$

Que puede escribirse como:

$$AD(x;h;n) = n \cdot \sum_{t=0}^{n-1} A(x;h+t;1) - \sum_{t=0}^{n-1} t \cdot A(x;h+t;1)$$

$$AD(x;h;n) = n \cdot A(x;h;n) - AI(x;h+1;n-1)$$

Teniendo en cuenta el desarrollo expuesto para $A(x;h;n)$ en función de los seguros de vida:

$$A(x;h;n) = E(x;h) - E(x;h+n) - d \cdot a(x;h;n)$$

Y la expresión resultante para $AI(x;h+1;n-1)$ también en función de los seguros de vida:

$$AI(x;h+1;n-1) = a(x;h+1;n-1) - (n-1) \cdot E(x;h+n) - d \cdot aI(x;h+1;n-1)$$

Se obtiene la siguiente expresión:

$$AD(x;h;n) = n \cdot [E(x;h) - E(x;h+n) - d \cdot a(x;h;n)] - [a(x;h+1;n-1) - (n-1) \cdot E(x;h+n) - d \cdot aI(x;h+1;n-1)]$$

$$AD(x;h;n) = n \cdot E(x;h) - d \cdot [n \cdot a(x;h;n) - aI(x;h+1;n-1)] - a(x;h+1;n-1) - E(x;h+n) \cdot [n - (n-1)]$$

$$AD(x;h;n) = n \cdot E(x;h) - d \cdot [n \cdot a(x;h;n) - aI(x;h+1;n-1)] - [a(x;h+1;n-1) + E(x;h+n)]$$

Con lo cual:

$$\boldsymbol{AD(x;h;n) = n \cdot E(x;h) - d \cdot aD(x;h;n) - a(x;h+1;n)}$$

Se puede a su vez considerar al presente como un caso particular dentro de los seguros con capitales variables en progresión aritmética – variables de razón "r", desarrollado en el punto 3 precedente; en el que la razón sería -1/n mientras que al resultado obtenido debería multiplicárselo por n.

De acuerdo con lo previamente expuesto, se tiene que:

$$AD(x;h;n) = n \cdot A(x;h;n) - AI(x;h+1;n-1)$$

Multiplicando todos los miembros por 1/n:

$$\frac{1}{n} \cdot AD(x;h;n) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot A(x;h;n) - \frac{1}{n} \cdot AI(x;h+1;n-1)$$

Entonces:

$$\frac{1}{n} \cdot AD(x;h;n) = A(x;h;n) - \frac{1}{n} \cdot AI(x;h+1;n-1)$$

Recordando la fórmula general del seguro con capital variable en progresión aritmética:

$$A_v(x;h;n;r) = A(x;h;n) + r \cdot AI(x;h+1;n-1)$$

Se observa que:

$$\frac{1}{n} \cdot AD(x;h;n) = A_v\left(x;h;n;r = -{}^{1}/_{n}\right)$$

Se comprueba la afirmación realizada, siendo el presente un caso particular dentro de los seguros con capitales variables en progresión aritmética – variables de razón “r”, desarrollado en el punto 3 precedente; en el que la razón sería -1/n.

$$\boldsymbol{AD(x;h;n) = n \cdot A_v\left(x;h;n;r = -{}^{1}/_{n}\right)}$$

<u>Casos particulares:</u>

4.2. Riesgo inmediato y plazo limitado

En este caso $h = 0$:

$$\boldsymbol{AD(x;0;n) = n - d \cdot aD(x;0;n) - a(x;1;n)}$$

4.3. Riesgo inmediato, sin límite

En este caso $h = 0$ y $n = w - x$:

$$\boldsymbol{AD(x;0;w-x) = (w-x) - d \cdot aD(x;0;w-x) - a(x;1;w-x-1)}$$

4.4. Riesgo diferido, sin límite

En este caso $n = w - x - h$:

$$\boldsymbol{AD(x;h;w-x-h) = (w-x-h) \cdot E(x;h) - d \cdot aD(x;h;w-x-h) - a(x;h+1;w-x-h-1)}$$

5. Periodicidad fraccionaria

Se desarrolla la relación para el caso general, derivándose luego a partir de la misma las relaciones correspondientes a los cados particulares.

5.1. Riesgo diferido y plazo limitado

La cobertura considerada consiste en el pago del capital asegurado a los derechohabientes al fin de la fracción de año en que se produce el fallecimiento del asegurado si éste se produce a partir de una edad determinada – x+h - y dentro de un plazo establecido – n –

Resulta necesario resaltar que en el caso de las coberturas de muerte el fraccionamiento sólo se verifica en el plazo mientras que el capital siempre es el contratado originalmente – en los desarrollos el capital unitario –

Se define la prima pura única como:

$$A(x;h;n;k) = \sum_{t=0}^{n-1} A(x;h+t;1;k)$$

Que puede escribirse como:

$$A(x;h;n;k) = \sum_{t=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{k-1} A\left(x;h+t+\frac{s}{k};\frac{1}{k}\right)$$

$$A(x;h;n;k) = \sum_{s=0}^{n\cdot k-1} A\left(x;h+\frac{s}{k};\frac{1}{k}\right)$$

Se desarrolla $A\left(x;h+\frac{s}{k};\frac{1}{k}\right)$ como:

$$A\left(x;h+\frac{s}{k};\frac{1}{k}\right) = v^{h+\frac{s+1}{k}} \cdot q\left(x;h+\frac{s}{k};\frac{1}{k}\right)$$

Al reemplazar la probabilidad de muerte por su relación con las probabilidades de supervivencia, y distribuir, se obtiene que:

$$A\left(x;h+\frac{s}{k};\frac{1}{k}\right) = v^{h+\frac{s+1}{k}} \cdot \left[p\left(x;h+\frac{s}{k}\right) - p\left(x;h+\frac{s+1}{k}\right)\right]$$

$$A\left(x;h+\frac{s}{k};\frac{1}{k}\right) = v^{\frac{1}{k}} \cdot v^{h+\frac{s}{k}} \cdot p\left(x;h+\frac{s}{k}\right) - v^{h+\frac{s+1}{k}} \cdot p\left(x;h+\frac{s+1}{k}\right)$$

Pudiendo lograr el objetivo de expresar este capital diferido de muerte en función de capitales diferidos de vida:

$$A\left(x;h+\frac{s}{k};\frac{1}{k}\right) = v^{\frac{1}{k}} \cdot E\left(x;h+\frac{s}{k}\right) - E\left(x;h+\frac{s+1}{k}\right)$$

Reemplazando en la tercera fórmula correspondiente a esta sección, se obtiene:

$$A(x;h;n;k) = \sum_{s=0}^{n\cdot k-1}\left[v^{\frac{1}{k}}\cdot E\left(x;h+\frac{s}{k}\right)-E\left(x;h+\frac{s+1}{k}\right)\right]$$

Distribuyendo las sumas, se obtienen los seguros de vida de capitales múltiples de pagos fraccionarios:

$$A(x;h;n;k) = v^{\frac{1}{k}}\cdot k\cdot a(x;h;n;k) - k\cdot a\left(x;h+\frac{1}{k};n;k\right)$$

Teniendo en cuenta las relaciones entre las coberturas de seguro de vida de capitales múltiples fraccionarios, se llega a:

$$A(x;h;n;k) = v^{\frac{1}{k}}\cdot k\cdot a(x;h;n;k) - k\cdot\left[a(x;h;n;k)-\frac{1}{k}E(x;h)+\frac{1}{k}E(x;h+n)\right]$$

Que puede escribirse como:

$$A(x;h;n;k) = E(x;h) - E(x;h+n) - a(x;h;n;k)\cdot k\cdot\left(1-v^{\frac{1}{k}}\right)$$

Recordando que: $\left(1-v^{\frac{1}{k}}\right)$ es la tasa de descuento d(k), se tiene que la expresión final resultante es:

$$\boldsymbol{A(x;h;n;k) = E(x;h) - E(x;h+n) - f(k)\cdot a(x;h;n;k)}$$

donde:

- $a(x;h;n;k) = \sum_{t=0}^{n-1} a(x;h+t;1;k) = \sum_{s=0}^{n\cdot k-1}\frac{1}{k}\cdot E\left(x;h+\frac{s}{k}\right)$
- $d(k) = \left(1-v^{\frac{1}{k}}\right)$ → tasa de descuento periódica (k).
- $f(k) = k\cdot d(k)$ → tasa nominal anual de descuento, con capitalización periódica (k).

La resolución final dependerá de las hipótesis que se empleen:

✓ Aplicación de la hipótesis D.U.E. (Distribución Uniforme del Capital Diferido de Vida)

Bajo esta hipótesis:

$$a(x;h;n;k) = a(x;h;n) - \frac{k-1}{2k}\cdot[E(x;h)-E(x;h+n)]$$

Con lo cual:

$$\boldsymbol{A(x;h;n;k) = E(x;h) - E(x;h+n) - f(k) \cdot \left[a(x;h;n) - \frac{k-1}{2k} \cdot [E(x;h) - E(x;h+n)]\right]}$$

- ✓ Aplicando la hipótesis D.U.F. (Distribución Uniforme de Fallecimientos)

  Bajo esta hipótesis:

$$a(x;h;n;k) = a(x;h;n) \cdot \frac{i \cdot d}{j(k) \cdot f(k)} - w(k) \cdot [E(x;h) - E(x;h+n)]$$

donde:

$$w(k) = \sum_{s=0}^{k-1} \frac{s}{k^2} \cdot (1+i)^{k-s/k} = \frac{i - j(k)}{f(k) \cdot j(k)}$$

Con lo cual:

$$\boldsymbol{A(x;h;n;k) = E(x;h) - E(x;h+n) - f(k) \cdot \left[a(x;h;n) \cdot \frac{i \cdot d}{j(k) \cdot f(k)} - w(k) \cdot [E(x;h) - E(x;h+n)]\right]}$$

<u>*Casos particulares:*</u>

5.2. Riesgo inmediato y plazo limitado

En este caso $h = 0$:

- ✓ Aplicación de la hipótesis D.U.E. (Distribución Uniforme del Capital Diferido de Vida)

$$\boldsymbol{A(x;0;n;k) = 1 - E(x;n) - f(k) \cdot \left[a(x;0;n) - \frac{k-1}{2k} \cdot [1 - E(x;n)]\right]}$$

- ✓ Aplicando la hipótesis D.U.F. (Distribución Uniforme de Fallecimientos)

$$\boldsymbol{A(x;0;n;k) = 1 - E(x;n) - f(k) \cdot \left[a(x;0;n) \cdot \frac{i \cdot d}{j(k) \cdot f(k)} - w(k) \cdot [1 - E(x;n)]\right]}$$

5.3. Riesgo inmediato, sin límite

En este caso $h = 0$ y $n = w - x$:

- ✓ Aplicación de la hipótesis D.U.E. (Distribución Uniforme del Capital Diferido de Vida)

$$\boldsymbol{A(x;0;w-x;k)=1-f(k)\cdot\left[a(x;0;w-x)-\frac{k-1}{2k}\right]}$$

- ✓ Aplicando la hipótesis D.U.F. (Distribución Uniforme de Fallecimientos)

$$\boldsymbol{A(x;0;w-x;k)=1-f(k)\cdot\left[a(x;0;w-x)\cdot\frac{i\cdot d}{j(k)\cdot f(k)}-w(k)\right]}$$

5.4. Riesgo diferido, sin límite

En este caso $n=w-x-h$:

- ✓ Aplicación de la hipótesis D.U.E. (Distribución Uniforme del Capital Diferido de Vida)

$$\boldsymbol{A(x;h;w-x-h;k)=E(x;h)-f(k)\cdot\left[a(x;h;w-x-h)-\frac{k-1}{2k}\cdot E(x;h)\right]}$$

- ✓ Aplicando la hipótesis D.U.F. (Distribución Uniforme de Fallecimientos)

$$\boldsymbol{A(x;h;w-x-h;k)=E(x;h)-f(k)\cdot\left[a(x;h;w-x-h)\cdot\frac{i\cdot d}{j(k)\cdot f(k)}-w(k)\cdot E(x;h)\right]}$$

IV. Plan Dotal

Se trata de una cobertura mixta; es decir, que cubre los riesgos de muerte y vida; con lo cual, el pago del capital se produce en forma cierta, resultando incierto el momento de pago del mismo para la empresa aseguradora.

La prima pura única resulta equivalente entonces a la siguiente expresión:

$$P(x;1)=A(x;0;n)+E(x;n)$$

Teniendo en cuenta la expresión hallada para $A(x;0;n)$ en función de los seguros de vida, se tiene que:

$$P(x;1)=[1-E(x;n)-d\cdot a(x;0;n)]+E(x;n)$$

Con lo cual:

$$\boldsymbol{P(x;1)=1-d\cdot a(x;0;n)}$$

Puede observarse que la relación obtenida es análoga a la del seguro de muerte de riesgo inmediato sin límite. Debe tenerse en cuenta que en la cobertura de muerte mencionada también el pago del capital es cierto dado que el asegurado ha de fallecer en algún momento. De acuerdo con lo expuesto, la interpretación de la relación obtenida para el seguro dotal resulta similar a la correspondiente a la cobertura de vida entera.

V. Plan Dotal doble capital o Capital doblado

La prima pura única resulta equivalente a:

$$P(x;1) = A(x;0;n) + E(x;n) + A(x;n;w-x-n)$$

o

$$P(x;1) = A(x;0;w-x) + E(x;n)$$

Teniendo en cuenta la expresión hallada para $A(x;0;w-x)$ en función de los seguros de vida, se tiene que:

$$P(x;1) = [1 - d \cdot a(x;0;w-x)] + E(x;n)$$

Con lo cual:

$$\boldsymbol{P(x;1) = 1 - d \cdot a(x;0;w-x) + E(x;n)}$$

VI. Ejemplos

Se muestran a continuación los resultados numéricos obtenidos para cada una de las relaciones desarrolladas, considerando los siguientes supuestos:

- Edad del asegurado al contratar el seguro → $\boldsymbol{x = 35}$.
- Sexo → **masculino.**
- Capital Asegurado → **CA = 10.000.-**
- Plazo de contratación de seguro (para seguros de riesgo limitado) → $\boldsymbol{n = 20}$.
- Plazo de diferimiento (para seguros de riesgo diferido) → $\boldsymbol{h = 10}$**.**
- Bases técnicas:
    - Tasa de interés → **i = 4%.**
    - Tabla de mortalidad → **CSO 1980.**

1. Capital asegurado constante

a. Riesgo diferido y plazo limitado

$$P(35;1) = A(35;10;20) \cdot 10.000$$

Cálculo con valores de conmutación:

$$P(35;1) = \frac{M(45) - M(65)}{D(35)} \cdot 10.000 = \frac{537.238 - 338.615}{2.405.371} \cdot 10.000 = 825{,}75.-$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$A(x;h;n) = E(x;h) - E(x;h+n) - d \cdot a(x;h;n)$$

$$P(35;1) = \left[E(35;10) - E(35;10+20) - \frac{0{,}04}{1{,}04} \cdot a(35;10;20)\right] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = [0{,}655534 - 0{,}238091 - 0{,}038462 \cdot 8{,}706561] \cdot 10.000 = 825{,}75.-$$

b. Riesgo inmediato y plazo limitado

$$P(35;1) = A(35;0;20) \cdot 10.000$$

Cálculo con valores de conmutación:

$$P(35;1) = \frac{M(35) - M(55)}{D(35)} \cdot 10.000 = \frac{593.703 - 456.100}{2.405.371} \cdot 10.000 = 572{,}07.-$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$A(x;0;n) = 1 - E(x;n) - d \cdot a(x;0;n)$$

$$\mathrm{P}(35;1)=\left[1 - E(35;20) - \frac{0{,}04}{1{,}04} \cdot a(35;0;20)\right] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = [1 - 0{,}414066 - 0{,}038462 \cdot 13{,}746913] \cdot 10.000 = 572{,}07.-$$

c. Riesgo inmediato, sin límite

$$P(35;1) = A(35;0;w-35) \cdot 10.000$$

Cálculo con valores de conmutación:

$$P(35;1)=\frac{M(35)}{D(35)}\cdot 10.000=\frac{593.703}{2.405.371}\cdot 10.000=2.468,24$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$A(x;0;w-x)=1-d\cdot a(x;0;w-x)$$

$$P(35;1)=\left[1-\frac{0,04}{1,04}\cdot a(35;0;w-35)\right]\cdot 10.000$$

$$P(35;1)=[1-0,038462\cdot 19,582579]\cdot 10.000=2.468,24$$

d. Riesgo diferido, sin límite

$$P(35;1)=A(35;10;w-35-10)\cdot 10.000$$

Cálculo con valores de conmutación:

$$P(35;1)=\frac{M(45)}{D(35)}\cdot 10.000=\frac{537.238}{2.405.371}\cdot 10.000=2.233,49$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$A(x;h;w-x-h)=E(x;h)-d\cdot a(x;h;w-x-h)$$

$$P(35;1)=\left[E(35;10)-\frac{0,04}{1,04}\cdot a(35;10;w-45)\right]\cdot 10.000$$

$$P(35;1)=[0,655534-0,038462\cdot 11,236806]\cdot 10.000=2.233,49$$

2. Capitales variables en progresión aritmética - crecientes de razón igual al capital inicial (increasing).

a. Riesgo diferido y plazo limitado

$$P(35;1)=AI(35;10;20)\cdot 10.000$$

Cálculo con valores de conmutación:

$$P(35;1)=\frac{R(45)-R(65)-20\cdot M(65)}{D(35)}\cdot 10.000$$

$$P(35;1)=\frac{13.258.505-4.162.882-20\cdot 338.615}{2.405.371}\cdot 10.000=9.658,93.-$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$AI(x;h;n) = a(x;h;n) - n \cdot E(x;h+n) - d \cdot aI(x;h;n)$$

$$P(35;1) = \left[a(35;10;20) - 20 \cdot E(35;10+20) - \frac{0,04}{1,04} \cdot aI(35;10;20)\right] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = [8,706561 - 20 \cdot 0,238091 - 0,038462 \cdot 77,449796] \cdot 10.000 = 9.658,93.-$$

b. Riesgo inmediato y plazo limitado

$$P(35;1) = AI(35;0;20) \cdot 10.000$$

Cálculo con valores de conmutación:

$$P(35;1) = \frac{R(35) - R(55) - 20 \cdot M(55)}{D(35)} \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \frac{18.957.998 - 8.226.932 - 20 \cdot 456.100}{2.405.371} \cdot 10.000 = 6.689,49.-$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$AI(x;0;n) = a(x;0;n) - n \cdot E(x;n) - d \cdot aI(x;0;n)$$

$$P(35;1) = \left[a(35;0;20) - 20 \cdot E(35;20) - \frac{0,04}{1,04} \cdot aI(35;0;20)\right] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = [13,746913 - 20 \cdot 0,414066 - 0,038462 \cdot 124,712751] \cdot 10.000 = 6.689,49.-$$

c. Riesgo inmediato, sin límite

$$P(35;1) = AI(35;0;w-35) \cdot 10.000$$

Cálculo con valores de conmutación:

$$P(35;1) = \frac{R(35)}{D(35)} \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \frac{18.957.998}{2.405.371} \cdot 10.000 = 78.815,28.-$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$AI(x;0;w-x) = a(x;0;w-x) - d \cdot aI(x;0;w-x)$$

$$P(35;1) = \left[a(35;0;w-35) - \frac{0,04}{1,04} \cdot aI(35;0;w-35)\right] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = [19,582579 - 0,038462 \cdot 304,227328] \cdot 10.000 = 78.815,28.-$$

d. Riesgo diferido, sin límite

$$P(35;1) = AI(35;10;w-45) \cdot 10.000$$

Cálculo con valores de conmutación:

$$P(35;1) = \frac{R(45)}{D(35)} \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \frac{13.258.505}{2.405.371} \cdot 10.000 = 55.120,42.-$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$AI(x;h;w-x-h) = a(x;h;w-x-h) - d \cdot aI(x;h;w-x-h)$$

$$P(35;1) = \left[a(35;10;w-45) - \frac{0,04}{1,04} \cdot aI(35;10;w-45)\right] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = [11,236806 - 0,038462 \cdot 148,843865] \cdot 10.000 = 55.120,42.-$$

3. Capitales variables en progresión aritmética – variables de razón "r".

i) Supuesto: r=10% (creciente de razón 10%)

a. Riesgo diferido y plazo limitado

$$P(35;1) = A_v(35;10;20;0,10) \cdot 10.000$$

Cálculo con valores de conmutación:

$$P(35;1) = [A(35;10;20) + r \cdot AI(35;10+1;20-1)] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = [0,08257503 + 10\% \cdot 0,883318194] \cdot 10.000 = 1.709,07.-$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$A_v(x;h;n;r) = E(x;h) - d \cdot a_v(x;h;n;r) + r \cdot a(x;h+1;n-1) - E(x;h+n) \cdot [1 + r \cdot (n-1)]$$

$$P(35;1) = \left[E(35;10) - \frac{0{,}04}{1{,}04} \cdot a_v(35;10;20;0{,}10) + 10\% \cdot a(35;11;19) - E(35;30) \cdot (1 + 10\% \cdot 19)\right] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \left[0{,}655534 - \frac{0{,}04}{1{,}04} \cdot 15{,}58088482 + 10\% \cdot 8{,}051027 - 0{,}238091 \cdot (1 + 10\% \cdot 19)\right] \cdot 10.000 = 1.709{,}07.-$$

b. Riesgo inmediato y plazo limitado

$$P(35;1) = A_v(35;0;20;0{,}10) \cdot 10.000$$

Cálculo con valores de conmutación:

$$P(35;1) = [A(35;0;20) + r \cdot AI(35;1;20-1)] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = [0{,}057207 + 10\% \cdot 0{,}611742574] \cdot 10.000 = 1.183{,}81.-$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$A_v(x;0;n;r) = 1 - d \cdot a_v(x;0;n;r) + r \cdot a(x;1;n-1) - E(x;n) \cdot [1 + r \cdot (n-1)]$$

$$P(35;1) = \left[1 - \frac{0{,}04}{1{,}04} \cdot a_v(35;0;20;0{,}10) + 10\% \cdot a(35;1;19) - E(35;20) \cdot (1 + 10\% \cdot 19)\right] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \left[1 - \frac{0{,}04}{1{,}04} \cdot 24{,}84349645 + 10\% \cdot 12{,}746913 - 0{,}414066 \cdot (1 + 10\% \cdot 19)\right] \cdot 10.000 = 1.183{,}81.-$$

c. Riesgo inmediato, sin límite

$$P(35;1) = A_v(35;0;w-35;0{,}10) \cdot 10.000$$

Cálculo con valores de conmutación:

$$P(35;1) = [A(35;0;w-35) + r \cdot AI(35;1;w-35-1)] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = [0{,}246824 + 10\% \cdot 7{,}634704532] \cdot 10.000 = 10.102{,}94.-$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$A_v(x;0;w-x;r) = 1 - d \cdot a_v(x;0;w-x;r) + r \cdot a(x;1;w-x-1)$$

$$P(35;1)=\left[1-\frac{0,04}{1,04}\cdot a_v(35;0;w-35;0,10)+10\%\cdot a(35;1;w-35-1)\right]\cdot 10.000$$

$$P(35;1)=\left(1-\frac{0,04}{1,04}\cdot 48,04705437+10\%\cdot 18,582579\right)\cdot 10.000=10.102,94.-$$

d. Riesgo diferido, sin límite

$$P(35;1)=A_v(35;10;w-45;0,10)\cdot 10.000$$

Cálculo con valores de conmutación:

$$P(35;1)=[A(35;10;w-45)+r\cdot AI(35;10+1;w-45-1)]\cdot 10.000$$

$$P(35;1)=[0,223349+10\%\cdot 5,288692738]\cdot 10.000=7.522,19.-$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$A_v(x;h;w-x-h;r)=E(x;h)-d\cdot a_v(x;h;w-x-h;r)+r\cdot a(x;h+1;w-x-h-1)$$

$$P(35;1)=\left[E(35;10)-\frac{0,04}{1,04}\cdot a_v(35;10;w-45;0,10)+10\%\cdot a(35;11;w-45-1)\right]\cdot 10.000$$

$$P(35;1)=\left(0,655534-\frac{0,04}{1,04}\cdot 24,99751201+10\%\cdot 10,581272\right)\cdot 10.000=7.522,19.-$$

ii) Supuesto: r = -3% (decreciente de razón 3%)

a. Riesgo diferido y plazo limitado

$$P(35;1)=A_v(35;10;20;-0,03)\cdot 10.000$$

Cálculo con valores de conmutación:

$$P(35;1)=[A(35;10;20)+r\cdot AI(35;10+1;20-1)]\cdot 10.000$$

$$P(35;1)=[0,08257503-3\%\cdot 0,883318194]\cdot 10.000=560,75.-$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$A_v(x;h;n;r)=E(x;h)-d\cdot a_v(x;h;n;r)+r\cdot a(x;h+1;n-1)-E(x;h+n)\cdot[1+r\cdot(n-1)]$$

$$P(35;1)=\left[E(35;10)-\frac{0,04}{1,04}\cdot a_v(35;10;20;-0,03)-3\%\cdot a(35;11;19)-E(35;30)\cdot(1-3\%\cdot 19)\right]\cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \left[0{,}655534 - \frac{0{,}04}{1{,}04} \cdot 6{,}644264328 - 3\% \cdot 8{,}051027 - 0{,}238091 \cdot (1 - 3\% \cdot 19)\right] \cdot 10.000 = 560{,}75.-$$

b. Riesgo inmediato y plazo limitado

$$P(35;1) = A_v(35;0;20;-0{,}03) \cdot 10.000$$

Cálculo con valores de conmutación:

$$P(35;1) = [A(35;0;20) + r \cdot AI(35;1;20-1)] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = [0{,}057207 - 3\% \cdot 0{,}611742574] \cdot 10.000 = 388{,}54.-$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$A_v(x;0;n;r) = 1 - d \cdot a_v(x;0;n;r) + r \cdot a(x;1;n-1) - E(x;n) \cdot [1 + r \cdot (n-1)]$$

$$P(35;1) = \left[1 - \frac{0{,}04}{1{,}04} \cdot a_v(35;0;20;-0{,}03) - 3\% \cdot a(35;1;19) - E(35;20) \cdot (1 - 3\% \cdot 19)\right] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \left[1 - \frac{0{,}04}{1{,}04} \cdot 10{,}41793746 - 3\% \cdot 12{,}746913 - 0{,}414066 \cdot (1 - 3\% \cdot 19)\right] \cdot 10.000 = 388{,}54.-$$

c. Riesgo inmediato, sin límite

$$P(35;1) = A_v(35;0;w-35;-0{,}03) \cdot 10.000$$

Cálculo con valores de conmutación:

$$P(35;1) = [A(35;0;w-35) + r \cdot AI(35;1;w-35-1)] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = [0{,}246824 - 3\% \cdot 7{,}634704532] \cdot 10.000 = 177{,}83.-$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$A_v(x;0;w-x;r) = 1 - d \cdot a_v(x;0;w-x;r) + r \cdot a(x;1;w-x-1)$$

$$P(35;1) = \left[1 - \frac{0{,}04}{1{,}04} \cdot a_v(35;0;w-35;-0{,}03) - 3\% \cdot a(35;1;w-35-1)\right] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \left(1 - \frac{0{,}04}{1{,}04} \cdot 11{,}04323702 - 3\% \cdot 18{,}582579\right) \cdot 10.000 = 177{,}83.-$$

d. **Riesgo diferido, sin límite**

$$P(35;1) = A_v(35;10;w-45;-0.03) \cdot 10.000$$

Cálculo con valores de conmutación:

$$P(35;1) = [A(35;10;w-45) + r \cdot AI(35;10+1;w-45-1)] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = [0{,}223349 - 3\% \cdot 5{,}288692738] \cdot 10.000 = 646{,}89.-$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$A_v(x;h;w-x-h;r) = E(x;h) - d \cdot a_v(x;h;w-x-h;r) + r \cdot a(x;h+1;w-x-h-1)$$

$$P(35;1) = \left[E(35;10) - \frac{0{,}04}{1{,}04} \cdot a_v(35;10;w-45;-0{,}03) - 3\% \cdot a(35;11;w-45-1)\right] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \left(0{,}655534 - \frac{0{,}04}{1{,}04} \cdot 7{,}108594421 - 3\% \cdot 10{,}581272\right) \cdot 10.000 = 646{,}89.-$$

4. **Capitales variables en progresión aritmética – decrecientes de razón igual al último capital: Decreasing.**

a. **Riesgo diferido y plazo limitado**

$$P(35;1) = AD(35;10;20) \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = 20 \cdot A_v\left(35;10;20;r = -{}^{1}/_{20}\right) \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = [20 \cdot A(35;10;20) - AI(35;10+1;20-1)] \cdot 10.000$$

Cálculo con valores de conmutación:

$$P(35;1) = [20 \cdot A(35;10;20) - AI(35;10+1;20-1)] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = [20 \cdot 0{,}08257503 - 0{,}883318194] \cdot 10.000 = 7.681{,}82.-$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$AD(x;h;n) = n \cdot E(x;h) - d \cdot aD(x;h;n) - a(x;h+1;n-1) - E(x;h+n)$$

$$P(35;1) = \left[20 \cdot E(35;10) - \frac{0{,}04}{1{,}04} \cdot aD(35;10;20) - a(35;11;19) - E(35;30)\right] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \left[20 \cdot 0{,}655534 - \frac{0{,}04}{1{,}04} \cdot 105{,}3879927 - 8{,}051027 - 0{,}238091\right] \cdot 10.000 = 7.681{,}82.-$$

b. Riesgo inmediato y plazo limitado

$$P(35;1) = AD(35;0;20) \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = 20 \cdot A_v\left(35;0;20;r = -{}^{1}/_{20}\right) \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = [20 \cdot A(35;0;20) - AI(35;1;20-1)] \cdot 10.000$$

Cálculo con valores de conmutación:

$$P(35;1) = [20 \cdot A(35;0;20) - AI(35;1;20-1)] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = [20 \cdot 0{,}057207 - 0{,}611742574] \cdot 10.000 = 5.323{,}90.-$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$AD(x;0;n) = n - d \cdot aD(x;0;n) - a(x;1;n-1) - E(x;n)$$

$$P(35;1) = \left[20 - \frac{0{,}04}{1{,}04} \cdot aD(35;0;20) - a(35;1;19) - E(35;20)\right] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \left[20 - \frac{0{,}04}{1{,}04} \cdot 163{,}972414 - 12{,}746913 - 0{,}414066\right] \cdot 10.000 = 5.323{,}90.-$$

c. Riesgo inmediato, sin límite

$$P(35;1) = AD(35;0;w-35) \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = (w-35) \cdot A_v\left(35;0;w-35;r = -{}^{1}/_{w-35}\right) \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = [(w-35) \cdot A(35;0;w-35) - AI(35;1;w-35-1)] \cdot 10.000$$

Cálculo con valores de conmutación:

$$P(35;1) = [(100-35) \cdot A(35;0;w-35) - AI(35;1;w-35-1)] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = [(100-35) \cdot 0{,}246824 - 7{,}634704532] \cdot 10.000 = 84.088{,}47.-$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$AD(x;0;w-x) = (w-x) - d \cdot aD(x;0;w-x) - a(x;1;w-x-1)$$

$$P(35;1) = \left[(100-35) - \frac{0{,}04}{1{,}04} \cdot aD(35;0;w-35) - a(35;1;w-35-1)\right] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \left[(100-35) - \frac{0{,}04}{1{,}04} \cdot 988{,}2229178 - 18{,}582579\right] \cdot 10.000 = 84.088{,}47$$

d. Riesgo diferido, sin límite

$$P(35;1) = AD(35;10;w-45) \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = (w-45) \cdot A_v\left(35;10;w-45; r = -{}^{1}\!/_{w-45}\right) \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = [(w-45) \cdot A(35;10;w-45) - AI(35;10+1;w-45-1)] \cdot 10.000$$

Cálculo con valores de conmutación:

$$P(35;1) = [(100-45) \cdot A(35;10;w-45) - AI(35;11;w-45-1)] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = [(100-45) \cdot 0{,}223349 - 5{,}288692738] \cdot 10.000 = 69.955{,}25.-$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$AD(x;h;w-x-h) = (w-x-h) \cdot E(x;h) - d \cdot aD(x;h;w-x-h) - a(x;h+1;w-x-h-1)$$

$$P(35;1) = \left[(100-45) \cdot E(35;10) - \frac{0{,}04}{1{,}04} \cdot aD(35;10;w-45) - a(35;11;w-45-1)\right] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \left[(100-45) \cdot 0{,}655534 - \frac{0{,}04}{1{,}04} \cdot 480{,}4172811 - 10{,}581272\right] \cdot 10.000 = 69.955{,}25$$

5. Periodicidad fraccionaria

Supuesto: k=12 (periodicidad mensual)

a. Riesgo diferido y plazo limitado

$$P(35;1) = A(35;10;20;12) \cdot 10.000$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$A(35;10;20;12) = E(35;10) - E(35;10+20) - f(12) \cdot a(35;10;20;12)$$

La resolución final dependerá de las hipótesis que se empleen:

- ✓ **Aplicación de la hipótesis D.U.E. (Distribución Uniforme del Capital Diferido de Vida)**

$$A(x;h;n;k) = [1 + f(k) \cdot (k-1)/2k] \cdot [E(x;h) - E(x;h+n)] - f(k) \cdot a(x;h;n)$$

$$P(35;1) = \{[1 + f(12) \cdot (12-1)/(2 \cdot 12)] \cdot [E(35;10) - E(35;30)] - f(12) \cdot a(35;10;20)\} \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \left[\left(1 + 0{,}039157 \cdot \frac{11}{24}\right) \cdot (0{,}655534 - 0{,}238091) - 0{,}039157 \cdot 8{,}706561\right] \cdot 10.000 = 840{,}14$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$A(x;h;n;k) = E(x;h) - E(x;h+n) - f(k) \cdot \left[a(x;h;n) - \frac{k-1}{2k} \cdot [E(x;h) - E(x;h+n)]\right]$$

$$P(35;1) = \left\{E(35;10) - E(35;30) - f(12) \cdot \left[a(35;10;20) - \frac{12-1}{2 \cdot 12} \cdot [E(35;10) - E(35;30)]\right]\right\} \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \left\{0{,}655534 - 0{,}238091 - 0{,}039157 \cdot \left[8{,}706561 - \frac{11}{24} \cdot (0{,}655534 - 0{,}238091)\right]\right\} \cdot 10.000 = 840{,}14$$

- ✓ **Aplicando la hipótesis D.U.F. (Distribución Uniforme de Fallecimientos)**

$$A(x;h;n;k) = A(x;h;n) \cdot \frac{i}{j(k)}$$

$$P(35;1) = \left[A(35;10;20) \cdot \frac{i}{j(12)}\right] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \left[0{,}082575 \cdot \frac{0{,}04}{0{,}039285}\right] \cdot 10.000 = 840{,}78$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$A(x;h;n;k) = E(x;h) - E(x;h+n) - f(k) \cdot \left[a(x;h;n) \cdot \frac{i \cdot d}{j(k) \cdot f(k)} - w(k) \cdot [E(x;h) - E(x;h+n)]\right]$$

Por lo tanto

$$P(35;1) = \left\{E(35;10) - E(35;30) - f(12) \cdot \left[a(35;10;20) \cdot \frac{i \cdot d}{j(12) \cdot f(12)} - w(12) \cdot [E(35;10) - E(35;30)]\right]\right\} \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \left\{0{,}655534 - 0{,}238091 - 0{,}039157 \cdot \left[8{,}706561 \cdot \frac{0{,}04 \cdot 0{,}038462}{0{,}039285 \cdot 0{,}039157} - 0{,}464888874 \cdot (0{,}655534 - 0{,}238091)\right]\right\} \cdot 10.000 = 840{,}78$$

b. Riesgo inmediato y plazo limitado

En este caso $h = 0$:

$$P(35;1) = A(35;0;20;12) \cdot 10.000$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$A(35;0;20;12) = 1 - E(35;20) - f(12) \cdot a(35;0;20;12)$$

La resolución final dependerá de las hipótesis que se empleen:

- ✓ **Aplicación de la hipótesis D.U.E. (Distribución Uniforme del Capital Diferido de Vida)**

$$A(x;0;n;k) = [1 + f(k) \cdot (k-1)/2k] \cdot [1 - E(x;n)] - f(k) \cdot a(x;0;n)$$

$$P(35;1) = \{[1 + f(12) \cdot (12-1)/(2 \cdot 12)] \cdot [1 - E(35;20)] - f(12) \cdot a(35;0;20)\} \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \left[\left(1 + 0{,}039157 \cdot \frac{11}{24}\right) \cdot (1 - 0{,}414066) - 0{,}039157 \cdot 13{,}746913\right] \cdot 10.000 = 581{,}66$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$A(x;0;n;k) = 1 - E(x;n) - f(k) \cdot \left[a(x;0;n) - \frac{k-1}{2k} \cdot [1 - E(x;n)]\right]$$

$$P(35;1) = \left\{1 - E(35;20) - f(12) \cdot \left[a(35;0;20) - \frac{12-1}{2 \cdot 12} \cdot [1 - E(35;20)]\right]\right\} \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \left\{1 - 0{,}414066 - 0{,}039157 \cdot \left[13{,}746913 - \frac{11}{24} \cdot (1 - 0{,}414066)\right]\right\} \cdot 10.000 = 581{,}66$$

- ✓ **Aplicando la hipótesis D.U.F. (Distribución Uniforme de Fallecimientos)**

$$A(x;0;n;k) = A(x;0;n) \cdot \frac{i}{j(k)}$$

$$P(35;1) = \left[A(35;0;20) \cdot \frac{i}{j(12)}\right] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \left[0{,}057207 \cdot \frac{0{,}04}{0{,}039285}\right] \cdot 10.000 = 582{,}48$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$A(x;0;n;k) = 1 - E(x;n) - f(k) \cdot \left[a(x;0;n) \cdot \frac{i \cdot d}{j(k) \cdot f(k)} - w(k) \cdot [1 - E(x;n)]\right]$$

Por lo tanto

$$P(35;1) = \left\{1 - E(35;20) - f(12) \cdot \left[a(35;0;20) \cdot \frac{i \cdot d}{j(12) \cdot f(12)} - w(12) \cdot [1 - E(35;20)]\right]\right\} \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \left\{1 - 0{,}414066 - 0{,}039157 \cdot \left[13{,}746913 \cdot \frac{0{,}04 \cdot 0{,}038462}{0{,}039285 \cdot 0{,}039157} - 0{,}464888874 \cdot (1 - 0{,}414066)\right]\right\} \cdot 10.000 = 582{,}48$$

c. Riesgo inmediato, sin límite

En este caso $h = 0$ y $n = w - x - h$:

$$P(35;1) = A(35;0;w-35;12) \cdot 10.000$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$A(35;0;w-35;12) = 1 - f(12) \cdot a(35;0;w-35;12)$$

La resolución final dependerá de las hipótesis que se empleen:

- ✓ **Aplicación de la hipótesis D.U.E. (Distribución Uniforme del Capital Diferido de Vida)**

$$A(x;0;w-x;k) = [1 + f(k) \cdot (k-1)/2k] - f(k) \cdot a(x;0;w-x)$$

$$P(35;1) = \{[1 + f(12) \cdot (12-1)/(2 \cdot 12)] - f(12) \cdot a(35;0;w-35)\} \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \left[\left(1 + 0{,}039157 \cdot \frac{11}{24}\right) - 0{,}039157 \cdot 19{,}582579\right] \cdot 10.000 = 2.511{,}58$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$A(x;0;w-x;k) = 1 - f(k) \cdot \left[a(x;0;w-x) - \frac{k-1}{2k}\right]$$

$$P(35;1) = \left\{1 - f(12) \cdot \left[a(35;0;w-35) - \frac{12-1}{2 \cdot 12}\right]\right\} \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \left[1 - 0{,}039157 \cdot \left(19{,}582579 - \frac{11}{24}\right)\right] \cdot 10.000 = 2.511{,}58$$

- ✓ **Aplicando la hipótesis D.U.F. (Distribución Uniforme de Fallecimientos)**

$$A(x;0;w-x;k) = A(x;0;w-x) \cdot \frac{i}{j(k)}$$

$$P(35;1) = \left[A(35;0;w-35) \cdot \frac{i}{j(12)}\right] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \left(0{,}246824 \cdot \frac{0{,}04}{0{,}039285}\right) \cdot 10.000 = 2.513{,}17$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$A(x;0;w-x;k) = 1 - f(k) \cdot \left[a(x;0;w-x) \cdot \frac{i \cdot d}{j(k) \cdot f(k)} - w(k)\right]$$

Por lo tanto

$$P(35;1) = \left\{1 - f(12) \cdot \left[a(35;0;w-35) \cdot \frac{i \cdot d}{j(12) \cdot f(12)} - w(12)\right]\right\} \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \left[1 - 0{,}039157 \cdot \left(19{,}582579 \cdot \frac{0{,}04 \cdot 0{,}038462}{0{,}039285 \cdot 0{,}039157} - 0{,}464888874\right)\right] \cdot 10.000 = 2.513{,}17$$

d. Riesgo diferido, sin límite

En este caso $n = w - x - h$:

$$P(35;1) = A(35;10;w-45;12) \cdot 10.000$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$A(35;10;w-45;12) = E(35;10) - f(12) \cdot a(35;10;w-45;12)$$

La resolución final dependerá de las hipótesis que se empleen:

- ✓ **Aplicación de la hipótesis D.U.E. (Distribución Uniforme del Capital Diferido de Vida)**

$$A(x;h;w-x-h;k) = [1 + f(k) \cdot (k-1)/2k] \cdot E(x;h) - f(k) \cdot a(x;h;w-x-h)$$

$$P(35;1) = \{[1 + f(12) \cdot (12-1)/(2 \cdot 12)] \cdot E(35;10) - f(12) \cdot a(35;10;w-45)\} \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \left[\left(1 + 0{,}039157 \cdot \frac{11}{24}\right) \cdot 0{,}655534 - 0{,}039157 \cdot 11{,}236806\right] \cdot 10.000 = 2.273{,}03$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$A(x;h;w-x-h;k) = E(x;h) - f(k) \cdot \left[a(x;h;w-x-h) - \frac{k-1}{2k} \cdot E(x;h)\right]$$

$$P(35;1) = \left\{E(35;10) - f(12) \cdot \left[a(35;10;w-45) - \frac{12-1}{2 \cdot 12} \cdot E(35;10)\right]\right\} \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \left[0{,}655534 - 0{,}039157 \cdot \left(11{,}236806 - \frac{11}{24} \cdot 0{,}655534\right)\right] \cdot 10.000 = 2.273{,}03$$

- ✓ **Aplicando la hipótesis D.U.F. (Distribución Uniforme de Fallecimientos)**

$$A(x;h;w-x-h;k) = A(x;h;w-x-h) \cdot \frac{i}{j(k)}$$

$$P(35;1) = \left[A(35;10;w-45) \cdot \frac{i}{j(12)}\right] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \left[0{,}223349 \cdot \frac{0{,}04}{0{,}039285}\right] \cdot 10.000 = 2.274{,}15$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$A(x;h;w-x-h;k) = E(x;h) - f(k) \cdot \left[a(x;h;w-x-h) \cdot \frac{i \cdot d}{j(k) \cdot f(k)} - w(k) \cdot E(x;h)\right]$$

Por lo tanto

$$P(35;1) = \left\{E(35;10) - f(12) \cdot \left[a(35;10;w-45) \cdot \frac{i \cdot d}{j(12) \cdot f(12)} - w(12) \cdot E(35;10)\right]\right\} \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = \left[0{,}655534 - 0{,}039157 \cdot \left(11{,}236806 \cdot \frac{0{,}04 \cdot 0{,}038462}{0{,}039285 \cdot 0{,}039157} - 0{,}464888874 \cdot 0{,}655534\right)\right] \cdot 10.000 = 2.274{,}15$$

6. Plan Dotal

$$P(35;1) = [A(35;0;20) + E(35;20)] \cdot 10.000$$

Cálculo con valores de conmutación:

$$P(35;1) = \left[\frac{M(35) - M(55)}{D(35)} + \frac{D(55)}{D(35)}\right] \cdot 10.000 = (0{,}057207 + 0{,}414066) \cdot 10.000 = 4.712{,}73$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$P(x;1) = 1 - d \cdot a(x;0;n)$$

$$P(35;1) = \left[1 - \frac{0{,}04}{1{,}04} \cdot a(35;0;20)\right] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = [1 - 0{,}038462 \cdot 13{,}746913] \cdot 10.000 = 4.712{,}73$$

7. Plan Dotal doble capital o Capital doblado

$$P(35;1) = [A(35;0;w-35) + E(35;20)] \cdot 10.000$$

Cálculo con valores de conmutación:

$$P(35;1) = \left[\frac{M(35)}{D(35)} + \frac{D(55)}{D(35)}\right] \cdot 10.000 = (0{,}246824 + 0{,}414066) \cdot 10.000 = 6.608{,}90$$

Cálculo con relación vida muerte:

$$P(x;1) = 1 - d \cdot a(x;0;w-x) + E(x;n)$$

$$P(35;1) = \left[1 - \frac{0{,}04}{1{,}04} \cdot a(35;0;w-35) + E(35;20)\right] \cdot 10.000$$

$$P(35;1) = [1 - 0{,}038462 \cdot 19{,}582579 + 0{,}414066] \cdot 10.000 = 6.608{,}90$$