Teoría Actuarial de los Seguros Personales

Tópicos de Interés

Seguros sobre varias cabezas

Act. María Alejandra Metelli
Act. María Milagros Fernández Villa

Metelli, María Alejandra
Tópicos de interés: seguros sobre varias cabezas / María Alejandra Metelli; María Milagros Fernández Villa. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas, 2022.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-950-29-1940-9

1. Matemática Estadística. I. Fernández Villa, Maria Milagros. II. Título.
CDD 519.5

Autores:
María Alejandra Metelli
María Milagros Fernández Villa

EDITOR RESPONSABLE:
Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas.
Av. Córdoba 2122 - 1120AAQ - Ciudad Autónoma de Buenos Aires - República Argentina

Primera edición: Abril de 2022
Libro Digital, PDF
ISBN 978-950-29-1940-9

ÍNDICE

Seguros sobre Varias Cabezas

Introducción

Las coberturas involucradas en este tipo de contratación se refieren a aquellas modalidades de seguro donde se asegura la vida de un grupo de personas en forma conjunta.

Para poder determinar las formas que adoptarán las primas debe especificarse el tipo de cobertura a ofrecer que puede ser de vida o de muerte.

En todos los casos se hablará de grupos de personas y se definirá "hasta cuándo subsiste el grupo bajo análisis".

En el caso de coberturas de vida se procederá al análisis de:

- Supervivencia conjunta: en este caso, el grupo subsiste mientras se encuentran con vida todos los componentes del mismo.

- Grupos de exactamente un número de determinado de personas "*r*": en este caso el grupo subsiste si permanecen con vida exactamente *r* integrantes de los *m* componentes iniciales del grupo.

- Grupos de al menos un número determinado de personas "*r*"; en este caso el grupo subsiste si permanecen con vida al menos *r* integrantes de los *m* componentes iniciales del grupo

Es decir, las condiciones y variables que deben ser definidas al momento de contratación son:

- Tipo de cobertura
- Cantidad de personas "*m*" que conforman el grupo inicial
- Edades de esas personas; $x_1 : x_2 : x_3 : \dots : x_m$
- Cantidad de personas "*r*" que se desea sobrevivan.

En el caso de coberturas de fallecimiento, se definirá en qué momento ha de ser abonado el capital asegurado; es decir, debe definirse qué número de fallecimiento es el que determina el pago del siniestro. A partir de allí, se hará referencia al grupo en términos de subsistencia.

Se ejemplifica lo previamente expuesto del siguiente modo: se supone un grupo compuesto por 15 individuos en el cual el capital asegurado ha de abonarse cuando se produzca el cuarto fallecimiento. La pregunta que debe contestarse es: ¿hasta cuándo subsiste el grupo de acuerdo con la consigna indicada? El grupo subsiste mientras vivan al menos 12 integrantes del mismo.[1]

En general, si se identifica con *s* al número de fallecimiento que genera el pago del capital asegurado, el grupo subsistirá mientras se encuentren con vida al menos "*m*-*s*+1" integrantes de los *m* componentes iniciales del grupo.

[1] Puede observarse que, al producirse el cuarto fallecimiento, el grupo pasa a contar con once personas y ya no existe dado que se ha cumplido la condición indicada en la consigna.

Se procede a continuación a desarrollar las fórmulas biométricas y actuariales que permitirán calcular las primas de las coberturas previamente mencionadas.

Probabilidades

Grupo de Supervivencia Conjunta

En este caso, el grupo subsiste mientras sobreviven todos y cada uno de los *m* componentes correspondientes al grupo inicial. La probabilidad de que esto suceda está dada entonces por: $p(x_1\!:x_2\!:x_3\!:\ldots\!:x_m;t)$ que representa la probabilidad de que al cabo de t años las "*m*" personas de edades $x_1, x_2, x_3, \ldots, y\, x_m$ sobrevivan. El grupo subsiste si sobreviven todos sus integrantes; es decir que se extinguirá con el primer fallecimiento. Si se tiene en cuenta que se trata de sucesos independientes, la probabilidad buscada es equivalente al producto de las respectivas probabilidades individuales:

$$p(x_1\!:x_2\!:x_3\!:\ldots\!:x_m;t) = p(x_1;t)\cdot p(x_2;t)\cdot\, p(x_3;t)\cdot\ldots\cdot\, p(x_m;t)$$

Se reemplaza cada probabilidad individual por el cociente entre grupos de sobrevivientes:

$$p(x_1\!:x_2\!:x_3\!:\ldots\!:x_m;t) = \frac{l(x_1+t)}{l(x_1)}\cdot\frac{l(x_2+t)}{l(x_2)}\cdot\,\frac{l(x_3+t)}{l(x_3)}\cdot\ldots\cdot\frac{l(x_m+t)}{l(x_m)} \qquad [1]$$

Se definen entonces los siguientes grupos de sobrevivientes conjuntos como:

$$l(x_1+t\!:x_2+t\!:x_3+t\!:\ldots\!:x_m+t)= k * l(x_1+t)\cdot l(x_2+t)\cdot l(x_3+t)\cdot\ldots\cdot l(x_m+t)$$

$$l(x_1\!:x_2\!:x_3\!:\ldots\!:x_m) = k *\; l(x_1)\cdot l(x_2)\cdot l(x_3)\cdot\ldots\cdot l(x_m)$$

Reemplazando las dos expresiones anteriores en [1], se tiene que:[2]

$$p(x_1\!:x_2\!:x_3\!:\ldots\!:x_m;t) = \frac{l(x_1+t\!:x_2+t\!:x_3+t\!:\ldots\!:x_m+t)}{l(x_1\!:x_2\!:x_3\!:\ldots\!:x_m)}$$

A fin de ejemplificar lo expuesto, se mostrarán las fórmulas resultantes para grupos de dos y tres personas respectivamente:

1) Grupo de dos personas: $p(x\!:y;t)$ representa la probabilidad que las dos personas de edades "*x*" e "*y*" sobrevivan al cabo de "*t*" años. De acuerdo con lo expuesto, se tendrá entonces la siguiente expresión:

$$p(x\!:y;t) = p(x;t)\cdot p(y;t) = \frac{l(x+t)}{l(x)}\cdot\frac{l(y+t)}{l(y)} = \frac{l(x+t\!:y+t)}{l(x\!:y)}$$

[2] k es una potencia negativa de 10 que se utiliza a fin de reducir las cifras correspondientes a los grupos de sobrevivientes conjuntos. Lo expuesto se encuentra ilustrado en los anexos obrantes al final.

Ejemplo numérico[3]: la probabilidad conjunta de que dos personas de sexo masculino de 20 y 22 años sobrevivan al cabo de 20 años es de 0,921893 y se obtiene como:

$$p(20\colon 22; 20) = p(20; 20) \cdot p(22; 20) = 0{,}961357 \cdot 0{,}95895 = 0{,}92189332^{4}$$

2) Grupo de tres personas: $p(x\colon y\colon z; t)$ representa la probabilidad que las tres personas de edades “x”, “y” y “z” sobrevivan al cabo de “t” años.

$$p(x\colon y\colon z; t) = p(x; t) \cdot p(y; t) \cdot p(z; t) = \frac{l(x+t)}{l(x)} \cdot \frac{l(y+t)}{l(y)} \cdot \frac{l(z+t)}{l(z)}$$

$$p(x\colon y\colon z; t) = \frac{l(x+t\colon y+t\colon z+t)}{l(x\colon y\colon z)}$$

Ejemplo numérico: la probabilidad conjunta de que tres personas de sexo masculino de 20, 22 y 24 años sobrevivan al cabo de 20 años es de 0,880793, y se obtiene como:

$$p(20\colon 22\colon 24; 20) = p(20; 20) \cdot p(22; 20) \cdot p(24; 20) = 0{,}961357 \cdot 0{,}95895 \cdot 0{,}955418$$

$$p(20\colon 22\colon 24; 20) = 0{,}880793$$

Grupo de “Exactamente r”

$p(x_1\colon x_2\colon x_3\colon \dots\colon x_m; t; r)$ representa la probabilidad de que exactamente “*r*” individuos del grupo inicial de “*m*” personas de edades $x_1, x_2, x_3, \dots, y\ x_m$ sobrevivan al cabo de “*t*” años.

En cuanto a la nomenclatura utilizada, debe notarse que se agrega un tercer campo en el cual se indica la cantidad de individuos del grupo inicial que se desea se encuentren exactamente con vida.

Antes de proceder a la generalización de las fórmulas, se resolverán las probabilidades para grupos de dos y tres individuos, respectivamente.

1) Grupo de 2 personas: $p(x\colon y; t; 1)$ representa la probabilidad de que, de un grupo de dos personas de edades *x* e *y*, sobreviva exactamente una al cabo de *t* años. Para que ello suceda debe vivir *x* y fallecer *y* o, vivir *y* y fallecer *x* tal como se muestra a continuación:

$$p(x\colon y; t; 1) = p(x; t) \cdot q(y; 0; t) + p(y; t) \cdot q(x; 0; t)$$

Se reemplaza la probabilidad de fallecimiento por el complemento de la probabilidad de supervivencia:

$$p(x\colon y; t; 1) = p(x; t) \cdot [1 - p(y; t)] + p(y; t) \cdot [1 - p(x; t)]$$

---

[3] En todos los ejemplos, se utiliza la tabla CSO1980 sexo masculino y, en caso de corresponder, la tasa de interés técnica del 4%.

[4] Se invita al lector a construir los grupos de sobrevivientes conjuntos para dos y tres cabezas a fin de verificar los resultados expuestos.

Y, al distribuir, se obtiene la siguiente expresión:

$$p(x\colon y; t; 1) = p(x; t) + p(y; t) - 2 \cdot p(x\colon y; t)$$

Ejemplo numérico: la probabilidad de que de un grupo de dos personas de sexo masculino de edades 20 y 22, sobreviva exactamente uno de ellos al cabo de 20 años es de 0,07652, y se obtiene como:

$p(20\colon 22; 20; 1) = p(20; 20) + p(22; 20) - 2 \cdot p(20; 20) \cdot p(22; 20)$

$p(20\colon 22; 20; 1) =$0,961357 + 0,958950 $-2 \cdot$0,921893

$p(20\colon 22; 20; 1) = 0{,}07652$

2) Grupo de 3 personas: En este caso puede presentarse que sobrevivan exactamente dos o que sobreviva exactamente uno de los componentes del grupo inicial.

2.a) Que sobrevivan exactamente 2: $p(x\colon y\colon z; t; 2)$ representa la probabilidad de que, de un grupo de tres personas de edades *x, y* y *z*, sobrevivan exactamente dos al cabo de t años. Para que ello suceda deben vivir *x* e *y*, y fallecer *z* o, vivir *x* y *z*, y fallecer *y* o, vivir *y* y *z* y, fallecer *x*, tal como se muestra a continuación:

$$p(x\colon y\colon z; t; 2) = p(x; t) \cdot p(y; t) \cdot q(z; 0; t) + p(x; t) \cdot p(z; t) \cdot q(y; 0; t) + p(y; t) \cdot p(z; t) \cdot q(x; 0; t)$$

Se reemplaza la probabilidad de fallecimiento por el complemento de la probabilidad de supervivencia:

$$p(x\colon y\colon z; t; 2) = p(x; t) \cdot p(y; t) \cdot [1 - p(z; t)] + p(x; t) \cdot p(z; t) \cdot [1 - p(y; t)] + p(y; t) \cdot p(z; t) \cdot [1 - p(x; t)]$$

Y, al distribuir, se obtiene la siguiente expresión:

$$p(x\colon y\colon z; t; 2) = p(x\colon y; t) + p(x\colon z; t) + p(y\colon z; t) - 3 \cdot p(x\colon y\colon z; t)$$

Ejemplo numérico: la probabilidad de que de un grupo de tres personas de sexo masculino de edades 20, 22 y 24, sobrevivan exactamente dos de ellas al cabo de 20 años es de 0,11420885, y se obtiene como:

$$p(20\colon 22\colon 24; 20; 2) = p(20\colon 22; 20) + p(20\colon 24; 20) + p(22\colon 24; 20) - 3 \cdot p(20\colon 22\colon 24; 20)$$

$$p(20\colon 22\colon 24; 20; 2) = 0{,}961357 \cdot 0{,}95895 + 0{,}961357 \cdot 0{,}955418 + 0{,}95895 \cdot 0{,}955418 - 3 \cdot 0{,}961357 \cdot 0{,}95895 \cdot 0{,}955418$$

$p(20\colon 22\colon 24; 20; 2) =$ 0,921893 + 0,918497 +0,916198 $-3 \cdot$0,88079342

$p(20\colon 22\colon 24; 20; 2) = 0{,}11420885$

2.b) Que sobreviva exactamente 1: $p(x\colon y\colon z; t; 1)$ representa la probabilidad de que, de un grupo de tres personas de edades *x, y* y *z*, sobreviva exactamente una al cabo de t años. Para que ello suceda debe vivir *x* y fallecer *y* y *z* o, vivir *y*, y fallecer *x* y *z* o, vivir *z* y, fallecer *x* e *y*, tal como se muestra a continuación:

$$p(x\!:y\!:z;t;1) = p(x;t)\cdot q(y;0;t)\cdot q(z;0;t) + q(x;0;t)\cdot p(y;t)\cdot q(z;0;t) + q(x;0;t)\cdot q(y;0;t)\cdot p(z;t)$$

Se reemplaza la probabilidad de fallecimiento por el complemento de la probabilidad de supervivencia:

$$p(x\!:y\!:z;t;1) = p(x;t)\cdot[1-p(y;t)]\cdot[1-p(z;t)] + [1-p(x;t)]\cdot p(y;t)\cdot[1-p(z;t)]$$
$$+[1-p(x;t)]\cdot[1-p(y;t).p(z;t)]$$

Y, al distribuir, se obtiene la siguiente expresión:

$$p(x\!:y\!:z;t;1) = p(x;t) + p(y;t) + p(z;t) - 2\cdot p(x\!:y;t) - 2\cdot p(x\!:z;t) - 2\cdot p(y\!:z;t) + 3\cdot p(x\!:y\!:z;t)$$

Ejemplo numérico: la probabilidad de que de un grupo de tres personas de sexo masculino de edades 20, 22 y 24, sobreviva exactamente una de ellas al cabo de 20 años es de 0,00492701, y se obtiene como:

$$p(20\!:22\!:24;20;1) = p(20;20) + p(22;20) + p(24;20) - 2\cdot p(20\!:22;20) - 2\cdot p(20\!:24;20) - 2\cdot p(22\!:24;20) + 3\cdot p(20\!:22\!:24;20)$$

$$p(20\!:22\!:24;20;1) = 0{,}961357 + 0{,}958950 + 0{,}955418 - 2\cdot 0{,}921893 - 2\cdot 0{,}918497 - 2\cdot 0{,}916198 + 3\cdot 0{,}88079342$$

$$p(20\!:22\!:24;20;1) = 0{,}00492701$$

Grupo “Al menos r”

$p(x_1\!:x_2\!:x_3\!:\ldots\!:x_m;t;r,m)$ representa la probabilidad que al menos “*r*” individuos del grupo inicial de “*m*” personas de edades $x_1, x_2, x_3, \ldots, y\ x_m$ sobrevivan al cabo de “*t*” años.

En cuanto a la nomenclatura utilizada, debe notarse que se agrega un cuarto campo. De este modo el tercer campo indica la cantidad de individuos que se desea que al menos se encuentren con vida mientras que el cuarto campo indica la cantidad de componentes del grupo inicial bajo análisis.

Antes de proceder a la generalización de las fórmulas, se resolverán las probabilidades para grupos de dos y tres individuos, respectivamente.

1) Grupo de 2 personas: $p(x\!:y;t;1{,}2)$ representa la probabilidad de que, de un grupo de dos personas, sobreviva al menos una al cabo de *t* años. Para que ello suceda debe vivir *x* y fallecer *y* o, vivir *y* y fallecer *x*, o vivir ambas, como se muestra a continuación:

$$p(x\!:y;t;1{,}2) = p(x;t)\cdot q(y;0;t) + p(y;t)\cdot q(x;0;t) + p(x\!:y;t)$$

Al reemplazar las probabilidades de muerte en función de las de supervivencia, puede escribirse como:

$$p(x\!:y;t;1) = p(x;t)\cdot[1-p(y;t)] + p(y;t)\cdot[1-p(x;t)] + p(x\!:y;t)$$

Al distribuir los distintos términos y realizar las correspondientes simplificaciones se llega a la siguiente expresión final:

$$p(x\colon y; t; 1{,}2) = p(x; t) + p(y; t) - p(x\colon y; t)$$[5]

Ejemplo numérico: la probabilidad de que de un grupo de dos personas de sexo masculino de edades 20 y 22, sobreviva al menos uno de ellos al cabo de 20 años es de 0,998414, y se obtiene como:

$p(20\colon 22; 20; 1{,}2) = p(20; 20) + p(20; 20) - p(20\colon 22; 20)$

$p(20\colon 22; 20; 1{,}2) =$0,961357 + 0,958950 - 0,921893

$p(20\colon 22; 20; 1{,}2) =$0,998414

2) Grupo de 3 personas: En este caso puede presentarse que sobrevivan al menos dos o que sobrevivan al menos uno de los componentes del grupo inicial.

2.a) Que sobrevivan al menos dos: $p(x\colon y\colon z; t; 2{,}3)$ representa la probabilidad de que, de un grupo de tres personas, sobrevivan al menos dos de ellas al cabo de *t* años. Para que ello suceda deben vivir *x* e *y*, y fallecer *z* o, vivir *x* y *z*, y fallecer *y* o, vivir *y* y *z* y, fallecer *x* o sobrevivir los tres componentes del grupo inicial, tal como se muestra a continuación:

$$p(x\colon y\colon z; t; 2{,}3) = p(x; t)\cdot p(y; t)\cdot q(z; 0; t) + p(x; t)\cdot p(z; t)\cdot q(y; 0; t) + p(y; t)\cdot p(z; t)\cdot q(x; 0; t) + p(x\colon y\colon z; t)$$

Se reemplazan las probabilidades de fallecimiento en términos de las probabilidades de supervivencia:

$$\begin{aligned} p(x\colon y\colon z; t; 2{,}3) = {} & p(x; t)\cdot p(y; t)\cdot [1 - p(z; t)] + p(x; t)\cdot p(z; t)\cdot [1 - p(y; t)] + p(y; t)\cdot p(z; t)\cdot [1 - p(x; t)] \\ & + p(x\colon y\colon z; t) \end{aligned}$$

Al operar algebraicamente se obtiene la siguiente expresión final.

$$p(x\colon y\colon z; t; 2{,}3) = p(x\colon y; t) + p(x\colon z; t) + p(y\colon z; t) - 2\cdot p(x\colon y\colon z; t)$$

Es interesante señalar que la probabilidad buscada es la suma de la probabilidad de que del grupo considerado sobrevivan exactamente dos personas al cabo de *t* años más la probabilidad de que sobrevivan los tres componentes al cabo del mencionado plazo.

Ejemplo numérico: la probabilidad de que de un grupo de tres personas de sexo masculino de edades 20, 22 y 24, sobrevivan al menos dos de ellas al cabo de 20 años es de 0,99500227, y se obtiene como:

$$p(20\colon 22\colon 24; 20; 2{,}3) = p(20\colon 22; 20) + p(20\colon 24; 20) + p(22\colon 24; 20) - 2\cdot p(20\colon 22\colon 24; 20)$$

$$p(20\colon 22\colon 24; 20; 2) = 0{,}961357\cdot 0{,}95895 + 0{,}961357\cdot 0{,}955418 + 0{,}95895\cdot 0{,}955418 - 2\cdot 0{,}961357\cdot 0{,}95895\cdot 0{,}955418$$

$p(20\colon 22\colon 24; 20; 2{,}3) =$0,921893 + 0,918497 + 0,916198 – 2 · 0,88079342

$p(20\colon 22\colon 24; 20; 2{,}3) =$0,99500227

También puede calcularse, tal como se manifestó, de la siguiente forma:

[5] Se invita al lector a que verifique que esta expresión también puede obtenerse como el complemento de la probabilidad de que ambos integrantes fallezcan.

$p(20:22:24;20;2{,}3) = p(20:22:24;20;2) + p(20:22:24;20)$

$p(20:22:24;20;2{,}3) =$ 0,11420885 + 0,88079342

$p(20:22:24;20;2{,}3) =$0,99500227

2.b) Que sobreviva al menos una: $p(x:y:z;t;1{,}3)$ representa la probabilidad de que de un grupo de tres personas, sobreviva al menos una de ellas al cabo de *t* años. Resulta de la suma de la probabilidad de que de un grupo de tres personas sobreviva exactamente una al cabo de *t* años, más la probabilidad de que de ese grupo sobrevivan exactamente dos al cabo del mencionado plazo o que al cabo del plazo fijado se encuentren todos con vida, tal como se expone a continuación:

$$p(x:y:z;t;1{,}3) = p(x:y:z;t;1) + p(x:y:z;t;2) + p(x:y:z;t)$$

Se reemplazan las probabilidades de exactamente por las expresiones obtenidas en la sección anterior:

$$\begin{aligned} p(x:y:z;t;1{,}3) = {} & p(x;t)\cdot q(y;0;t)\cdot q(z;0;t) + q(x;0;t)\cdot p(y;t)\cdot q(z;0;t) \\ & + q(x;0;t)\cdot q(y;0;t)\cdot p(z;t) + p(x;t)\cdot p(y;t)\cdot q(z;0;t) \\ & + p(x;t)\cdot p(z;t)\cdot q(y;0;t) + p(y;t)\cdot p(z;t)\cdot q(x;0;t) + p(x:y:z;t) \end{aligned}$$

Se reemplazan las probabilidades de fallecimiento en función de las de supervivencia:

$$\begin{aligned} p(x:y:z;t;1{,}3) = {} & p(x;t)\cdot[1-p(y;t)]\cdot[1-p(z;t)] + p(y;t)\cdot[1-p(x;t)]\cdot[1-p(z;t)] \\ & + p(z;t)\cdot[1-p(x;t)]\cdot[1-p(y;t)] + p(x;t)\cdot p(y;t)\cdot[1-p(z;t)] \\ & + p(x;t)\cdot p(z;t)\cdot[1-p(y;t)] + p(y;t)\cdot p(z;t)\cdot[1-p(x;t)] + p(x:y:z;t) \end{aligned}$$

Se llega así a la siguiente expresión final:

$$p(x:y:z;t;1{,}3) = p(x;t) + p(y;t) + p(z;t) - p(x:y;t) - p(x:z;t) - p(y:z;t) + p(x:y:z;t)$$

Este caso particular también se conoce con el nombre de **"último sobreviviente"**, pudiéndose expresar la probabilidad como[6]:

$$p(x:y:z;t;1{,}3) = 1 - q(x;0;t)\cdot q(y;0;t)\cdot q(z;0;t)$$

Al reemplazar las probabilidades de fallecimiento en función de las probabilidades de supervivencia, se obtiene la siguiente expresión:

$$p(x:y:z;t;1{,}3) = 1 - [1-p(x;t)]\cdot[1-p(y;t)]\cdot[1-p(z;t)]$$

$$p(x:y:z;t;1{,}3) = p(x;t) + p(y;t) + p(z;t) - p(x:y;t) - p(x:z;t) - p(y:z;t) + p(x:y:z;t)$$

Es importante destacar que esta probabilidad también puede obtenerse como la suma de las probabilidades de que, de un grupo de tres individuos se encuentre exactamente uno con vida y la de que se encuentren al menos dos con vida.

[6] Debe recordarse que la probabilidad del sistema completo es igual a la unidad.

Ejemplo numérico: la probabilidad de que de un grupo de tres personas de sexo masculino de edades 20, 22 y 24, sobreviva al menos uno de ellos al cabo de 20 años es de 0,99992928, a saber:

$$p(20{:}22{:}24;20;1{,}3) = p(20;20) + p(22;20) + p(24;20) - p(20{:}22;20) - p(20{:}24;20) - p(22{:}24;20) + p(20{:}22{:}24;20)$$
$$p(20{:}22{:}24;20;1{,}3) = 0{,}961357 + 0{,}95895 + 0{,}955418 - 0{,}961357 \cdot 0{,}95895 - 0{,}961357 \cdot 0{,}955418 - 0{,}95895 \cdot 0{,}955418 + 0{,}961357 \cdot 0{,}95895 \cdot 0{,}955418$$

$p(x{:}y{:}z;t;1{,}3) =$0,961357 + 0,958950 + 0,955418 - 0,921893 - 0,918497 - 0,916198 + 0,88079342

$p(x{:}y{:}z;t;1{,}3) = 0{,}99992928$

También puede calcularse de la siguiente forma – como suma de probabilidades de exactamente -:

$p(20{:}22{:}24;20;1{,}3) = p(20{:}22{:}24;20;1) + p(20{:}22{:}24;20;2) + p(20{:}22{:}24;20)$

$p(20{:}22{:}24;20;1{,}3) =$0,00492701 + 0,11420885 + 0,88079342

$p(x{:}y{:}z;t;1{,}3) = 0{,}99992928$

Los ejemplos desarrollados hasta aquí resultan sencillos pero el problema se plantea cuando los grupos están compuestos por un número mayor de individuos. Es necesario entonces, encontrar una fórmula general que pueda aplicarse a todas las situaciones.

La mencionada fórmula surge a partir de la aplicación del denominado método zeta cuyo desarrollo se presenta a continuación:

Método Zeta

Determinación de la fórmula general

Se supone un grupo de m individuos todos de idéntica edad x. Bajo este supuesto la probabilidad de que sobrevivan exactamente *r* individuos al cabo de *t* años y que, en consecuencia, fallezcan exactamente *m-r* individuos dentro del mencionado plazo está dada por la siguiente expresión:

$$p(x; x: \dots : x; t; r) = \binom{m}{r} . [p(x;t)]^r . [q(x;o;t)]^{m-r}$$

Donde:

$\binom{m}{r}$ Representa las distintas combinaciones en que pueden agruparse las probabilidades mencionadas.

$[p(x;t)]^r$ Representa la probabilidad de que exactamente *r* personas de edad *x* sobrevivan al cabo de *t* años.

$[q(x;o;t)]^{m-r}$ Representa la probabilidad de que exactamente *m-r* personas de edad *x* fallezcan dentro del plazo previamente mencionado.

La expresión obtenida corresponde al *r-ésimo* término del siguiente binomio elevado a la *m*:

$$[q(x;o;t) + p(x;t).t\ ]^m$$

Que puede escribirse como:

$$\{[1 - p(x;t)] + p(x;t).t\}^m$$

Es decir,

$$[1 + (t-1)\ p(x;t)]^m$$

Es importante tener presente este término dado que a partir del mismo se hallará la fórmula correspondiente a un grupo compuesto por m personas de distintas edades dado que, justamente, el problema se plantea cuando ese conjunto de personas tienen distintas edades: x_1, x_2, x_3, ….. x_m.

A fin de resolver la situación planteada, el binomio previamente expuesto bajo la hipótesis de idénticas edades, puede escribirse, para el caso de distintas edades, del siguiente modo:

$$[1 + (t-1)\ p(x_1;t)].[1 + (t-1)\ p(x_2;t)].[1 + (t-1)\ p(x_3;t)] \dots [1 + (t-1)\ p(x_m;t)]$$

Es decir, como el producto de *m* factores donde cada uno de ellos contiene a las probabilidades de supervivencia correspondientes de los distintos individuos de edades: x_1, x_2, x_3, ….. x_m.

Dado que se está interesado en calcular las probabilidades de que exactamente *r* personas se encuentren con vida al cabo de *t* años, la pregunta que debe formularse es: ¿a partir de qué potencia de *t* se verifica esta condición? La misma se verifica a partir de la *r-ésima* potencia de la variable t.
Se detallan entonces a continuación las sucesivas potencias – a la izquierda – y el término que acompaña a t^r – a la derecha- en los cuales se verifica la consigna especificada:

$(t-1)^r : \binom{r}{o}$ Suma de todas las combinaciones posibles de supervivencia conjunta de r individuos

$(t-1)^{r+1} : -\binom{r+1}{1}$ Suma de todas las combinaciones posibles de supervivencia conjunta de r+1 individuos

$(t-1)^{r+2} : \binom{r+2}{2}$ Suma de todas las combinaciones posibles de supervivencia conjunta de r+2 individuos

$(t-1)^{r+3} : -\binom{r+3}{3}$ Suma de todas las combinaciones posibles de supervivencia conjunta de r+3 individuos

…

$(t-1)^m : (-1)^{m-r}\binom{m}{m-r}$ probabilidad de supervivencia conjunta del grupo inicial

Al sumar las expresiones anteriores, con el objetivo de encontrar la fórmula correspondiente de probabilidad buscada, se obtiene la siguiente expresión final:

$$p(x_1 : x_2 : \ldots : x_m; t; r) = \sum_{s=r}^{m} (-1)^{s-r} \binom{s}{s-r} Z(s,m)$$

Donde Z(s,m) representa, en este caso, la suma de todas las combinaciones de probabilidades de supervivencia conjunta correspondientes a *s* personas del grupo de *m* integrantes inicial.

Para el cálculo de las probabilidades de al menos *r* individuos sobre un total de *m* individuos componentes del grupo inicial, deben sumarse las probabilidades de exactamente *r*, exactamente *r+1* y así sucesivamente hasta completar la correspondiente a la totalidad de los componentes del grupo.

La expresión final entonces correspondiente a la probabilidad de que de un grupo de m cabezas de edades $x_1 : x_2 : \dots : x_m$ sobrevivan al menos r al cabo de t años es la siguiente:

$$p(x_1 : x_2 : \dots : x_m ; t; r; m) = \sum_{s=r}^{m} (-1)^{s-r} . \binom{s-1}{s-r} . Z(s,m)$$

Metodología general

Para poder resolver cualquier problema de probabilidades que pudiera presentarse, es necesario:

1. Definir de qué tipo de grupo se trata. Las tres situaciones posibles son:

   - Supervivencia conjunta.

   - Exactamente un número *r* determinado de individuos.

   - Al menos un número *r* determinado de individuos.

2. Si se trata de grupos de supervivencia conjunta, la probabilidad de supervivencia del grupo resulta equivalente al producto de las probabilidades individuales correspondientes a cada uno de los componentes del mismo.

3. Si se trata de grupos que implican la supervivencia de exactamente *r* o al menos *r* personas, debe aplicarse primero el método zeta para transformarlo en grupos de supervivencia conjunta y luego, resolver del modo indicado en el punto 2 cada uno de los grupos de supervivencia conjunta obtenidos.

Forma de cálculo de la probabilidad de Supervivencia Conjunta

Tal como se ha manifestado previamente, la probabilidad de supervivencia conjunta de un grupo es equivalente al producto de las probabilidades individuales de supervivencia de cada uno de los componentes del grupo; con lo cual, la tecnología actual permite realizar los cálculos en forma directa a través, por ejemplo, del uso de las planillas de Excel.

Si no se contara con este tipo de herramientas, es común verificar si la tabla de mortalidad que se está utilizando permite un ajuste por alguna ley de mortalidad.

Las dos leyes de mortalidad más utilizadas en estas circunstancias son Makeham o Gompertz.

A continuación, se desarrollará el procedimiento a seguir luego de haberse probado mediante algún test de bondad de ajuste que la tabla permite ser ajustada por una de esas leyes.

Ley de Makeham

Bajo la Ley de Makeham, la probabilidad de que una persona de edad x sobreviva t años, está representada por:

$$p(x;t) = s^t \cdot g^{c^x \cdot (c^t - 1)}$$

Donde las constantes *s, c* y *g* fueron obtenidas a partir del ajuste efectuado a la tabla de mortalidad analizada.

La probabilidad de supervivencia conjunta está dada por la expresión:

$$p(x_1{:}\,x_2{:}\,x_3{:}\,\ldots{:}\,x_m;t) = p(x_1;t) \cdot p(x_2;t) \cdot\ p(x_3;t) \cdot \ldots \cdot\ p(x_m;t)$$

Se reemplazan cada una de las probabilidades individuales por la expresión correspondiente a la ley de Makeham:

$$p(x_1{:}\,x_2{:}\,x_3{:}\,\ldots{:}\,x_m;t) = s^t \cdot g^{c^{x_1} \cdot (c^t - 1)} \cdot s^t \cdot g^{c^{x_2} \cdot (c^t - 1)} \cdot \ldots \cdot s^t \cdot g^{c^{x_m} \cdot (c^t - 1)}$$

Se trabaja la expresión algebraicamente y se llega a:

$$p(x_1{:}\,x_2{:}\,x_3{:}\,\ldots{:}\,x_m;t) = s^{m \cdot t} \cdot g^{(c^{x_1} + c^{x_2} + \cdots + c^{x_m}) \cdot (c^t - 1)}$$

A partir de la expresión previamente obtenida se determina la denominada edad de “envejecimiento uniforme” bajo el supuesto de que el grupo analizado será reemplazado por otro grupo de igual cantidad de individuos de la misma edad “$x_1 + h$”.

Es importante resaltar que al reemplazar al grupo conformado por personas de distintas edades por otro donde todos tienen la misma edad, esa edad “$x_1 + h$” necesariamente debe estar comprendida entre la menor y la mayor de las edades del grupo: $x_1 < x_1 + h < x_m$

La forma de cálculo de la mencionada edad uniforme se realizará, de acuerdo con lo expuesto, de manera de que se cumpla la siguiente igualdad:

$$c^{x_1} + c^{x_2} + \cdots + c^{x_m} = c^{x_1 + h} + c^{x_1 + h} + \cdots + c^{x_1 + h}$$

$$c^{x_1} + c^{x_2} + \cdots + c^{x_m} = m \cdot c^{x_1 + h}$$

Es decir, las *m* cabezas de distintas edades son reemplazadas por *m* cabezas todas de la misma edad: “$x_1 + h$”. Se despeja entonces “*h”* a partir de la expresión anterior, obteniéndose*:*

$$h = \frac{\log(1 + c^{x_2 - x_1} + \cdots + c^{x_m - x_1}) - \log{(m)}}{\log{(c)}}$$

En donde "*h*" representa los años que se le deben sumar a la menor edad del grupo, para establecer la edad de envejecimiento uniforme para un grupo de *m* cabezas.[7]

Se reemplaza la nueva edad uniforme para todos los componentes del grupo, y se obtiene la siguiente expresión:

$$p(x_1:x_2:x_3:\ldots:x_m;t) = s^{m\cdot t} \cdot g^{m\cdot c^{x_1+h}\cdot(c^t-1)}$$

Que puede escribirse como:

$$p(x_1:x_2:x_3:\ldots:x_m;t) = \left[s^t \cdot g^{c^{x_1+h}\cdot(c^t-1)}\right]^m$$

Es decir,

$$p(x_1:x_2:x_3:\ldots:x_m;t) = [p(x_1+h;t)]^m$$

Al observar la expresión se afirma lo manifestado en puntos anteriores.

Ejemplos:

La tabla de mortalidad CSO41 permite ser ajustada por la ley Makeham para un valor de *c* equivalente a 1,089132. A partir del valor mencionado, se puede determinar la edad de la ley de envejecimiento uniforme de distintos grupos de personas, por ejemplo:

a) La edad de envejecimiento uniforme para un grupo de tres personas de edades 20, 22 y 24 es 22,1135659; es decir, 22 años, 1 mes y 11 días que se obtiene a partir del siguiente cálculo:

$$h = \frac{\log\left(1+1{,}089132^{22-20}+1{,}089132^{24-20}\right)-\log(3)}{\log(1{,}089132)} = 2{,}11356593$$

$$x_1 + h = 22{,}1135659$$

b) La edad de envejecimiento uniforme para un grupo de cuatro personas de edades 20, 24, 25 y 28 es 24,590690697; es decir, 24 años, 7 meses y 3 días que se obtiene a partir del siguiente cálculo:

$$h = \frac{\log\left(1+1{,}089132^{24-20}+1{,}089132^{25-20}+1{,}089132^{28-20}\right)-\log(4)}{\log(1{,}089132)} = 4{,}5906907$$

$$x_1 + h = 24{,}5906907$$

[7] Por costumbre se trabaja con la menor de las edades, pero nada impide que se repita el desarrollo considerando la mayor de las edades. La edad de envejecimiento uniforme que se obtenga ha de ser la misma.

c) La edad de envejecimiento uniforme para un grupo de cinco personas de edades 20, 22, 24, 26 y 28 es 24,33939114; es decir, 24 años, 4 meses y 2 días que se obtiene a partir del siguiente cálculo:

$$h = \frac{\log(1+1{,}089132^{22-20}+1{,}089132^{24-20}+1{,}089132^{26-20}+1{,}089132^{28-20})-\log(5)}{\log(1{,}089132)} = 4{,}33939114$$

$$x_1 + h = 24{,}33939114$$

En los ejemplos desarrollados, se reemplaza el grupo de individuos por un grupo de igual número de componentes todos de idéntica edad – uniforme -

Ley de Gompertz

Bajo la Ley de Gompertz, la probabilidad de que una persona de edad x sobreviva t años está representada por:

$$p(x;t) = g^{c^{x}\cdot(c^{t}-1)}$$

Donde las constantes *c* y *g* fueron obtenidas a partir del ajuste efectuado a la tabla de mortalidad analizada.

La probabilidad de supervivencia conjunta está dada por la expresión:

$$p(x_1:x_2:x_3:\ldots:x_m;t) = p(x_1;t)\cdot p(x_2;t)\cdot\ p(x_3;t)\cdot\ldots\cdot\ p(x_m;t)$$

Se reemplazan cada una de las probabilidades individuales por la expresión correspondiente a la ley de Gompertz:

$$p(x_1:x_2:x_3:\ldots:x_m;t) = g^{c^{x_1}\cdot(c^{t}-1)}\cdot g^{c^{x_2}\cdot(c^{t}-1)}\cdot\ldots\cdot g^{c^{x_m}\cdot(c^{t}-1)}$$

Se trabaja la expresión algebraicamente y se llega a:

$$p(x_1:x_2:x_3:\ldots:x_m;t) = g^{(c^{x_1}+c^{x_2}+\cdots+c^{x_m})\cdot(c^{t}-1)}$$

A partir de la expresión previamente obtenida se determina la denominada edad de “envejecimiento uniforme” bajo el supuesto de que el grupo analizado será reemplazado por una sola persona de edad “$x_1 + h$”.

Es importante resaltar que al reemplazar al grupo conformado por *m* personas de distintas edades por una única persona de edad “$x_1 + h$” , necesariamente esa edad debe ser mayor a la mayor de las edades del grupo que se reemplaza: $x_1 + h > x_m$ ya que la misma deberá soportar la mortalidad de todo el grupo.

La forma de cálculo de la mencionada edad uniforme se realizará, de acuerdo con lo expuesto, de manera de que se cumpla la siguiente igualdad:

$$c^{x_1} + c^{x_2} + \cdots + c^{x_m} = c^{x_1+h}$$

Es decir, las *m* cabezas de distintas edades son reemplazadas por una sola cabeza de edad "$x_1 + h$". Si se despeja "*h*":

$$h = \frac{\log(1 + c^{x_2-x_1} + \cdots + c^{x_m-x_1})}{\log(c)}$$

En donde "*h*" representa los años que se le deben sumar a la menor edad del grupo, para establecer la edad de la persona por la cual se sustituye todo el grupo[8].

Reemplazando en la fórmula respectiva, se tiene entonces que:

$$p(x_1{:}x_2{:}x_3{:}\ldots{:}x_m;t) = g^{c^{x_1+h}\cdot(c^t-1)}$$

$$p(x_1{:}x_2{:}x_3{:}\ldots{:}x_m;t) = p(x_1+h;t)$$

Ejemplos:

La tabla de mortalidad CSO58 permite ser ajustada por la ley Gompertz para un valor de *c* equivalente a 1, 078948. A partir del valor mencionado, se puede determinar la edad de la ley de envejecimiento uniforme de distintos grupos de personas, por ejemplo

a) La edad de envejecimiento uniforme para un grupo de tres personas de edades 20, 22 y 24 es 36,55911548; es decir, 36 años, 6 meses y 21 días que se obtiene a partir del siguiente cálculo:

$$h = \frac{\log(1+1{,}078948^{22-20}+1{,}078948^{24-20})}{\log(1{,}078948)} = 16{,}5591155$$

$$x_1 + h = 36{,}5591155$$

b) La edad de envejecimiento uniforme para grupo de cuatro personas de edades 20, 24, 25 y 28 es 42,79815972; es decir, 42 años, 9 meses y 18 días que se obtiene a partir del siguiente cálculo:

$$h = \frac{\log(1+1{,}078948^{24-20}+1{,}078948^{25-20}+1{,}078948^{28-20})}{\log(1{,}078948)} = 22{,}7981597$$

$$x_1 + h = 42{,}79815972$$

c) La edad de envejecimiento uniforme para un grupo de cinco personas de edades 20, 22, 24, 26 y 28 es 45,4830179; es decir, 45 años, 5 meses y 23 días que se obtiene a partir del siguiente cálculo:

$$h = \frac{\log(1+1{,}078948^{22-20}+1{,}078948^{24-20}+1{,}078948^{26-20}+1{,}078948^{28-20})}{\log(1{,}078948)} = 25{,}4830179$$

[8] En el caso de la ley de Gompertz se acostumbra trabajar con la mayor de las edades en lugar de con la menor como ha sido desarrollado en el presente.

$x_1 + h =$ 45,48301792

En los ejemplos desarrollados, se reemplaza el grupo de individuos por un solo individuo.

Su aplicación a coberturas de seguros de personas

Capital Diferido de Vida

Supervivencia Conjunta

$\boldsymbol{E(x_1: x_2: x_3: \ldots : x_m; t)}$

La expresión anterior representa la prima pura única de un seguro de capital diferido de vida en el caso de supervivencia conjunta.

La cobertura consiste entonces en el pago del capital unitario al grupo a la finalización del plazo de cobertura - t años -, si todos los componentes del grupo inicial sobreviven al cabo del mencionado plazo. Es decir, el grupo como tal subsiste en tanto sobrevivan todos sus integrantes; extinguiéndose, en consecuencia, con el primer fallecimiento.

Se tiene así que la prima pura única de la cobertura mencionada resulta del producto entre el valor actual financiero del capital unitario y la probabilidad de cobro del mismo:

$$E(x_1: x_2: x_3: \ldots : x_m; t) = v^t \cdot p(x_1: x_2: x_3: \ldots : x_m; t)$$

Se reemplaza la probabilidad de supervivencia conjunta por la expresión hallada en la sección correspondiente, obteniéndose:

$$E(x_1: x_2: x_3: \ldots : x_m; t) = v^t \cdot \frac{l(x_1 + t: x_2 + t: x_3 + t: \ldots : x_m + t)}{l(x_1: x_2: x_3: \ldots : x_m)}$$

Se multiplica y divide la expresión por: $v^{\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_m}{m}}$

De este modo, se define el valor de conmutación para varias cabezas como:

$$D(x_1: x_2: x_3: \ldots : x_m) = v^{\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_m}{m}} \cdot l(x_1: x_2: x_3: \ldots : x_m)$$

Con lo cual, la expresión del capital diferido de vida en valores de conmutación resulta:

$$E(x_1: x_2: x_3: \ldots : x_m; t) = \frac{D(x_1 + t: x_2 + t: x_3 + t: \ldots : x_m + t)}{D(x_1: x_2: x_3: \ldots : x_m)}$$

Vale la pena mencionar que la obtención de valores de conmutación es válida en la medida en que uno pueda aplicarla; es decir, si se cuenta con tablas de valores de conmutación diseñadas a tal fin. De no poseerlas, la resolución deberá efectuarse por alguna de las formas indicadas previamente: planilla de Excel o aplicación de alguna ley de mortalidad.

Ejemplo
La prima pura única de un Seguro de Capital Diferido de Vida en el cual se abona un importe total de \$100.000.- al cabo de 20 años si la totalidad de los componentes del grupo inicial de tres personas de edades 20, 22 y 24 años, sobreviven 20 años es de \$40.198,26, y se obtiene como:

$Prima\ Pura\ \text{única} = \$100.000 \cdot E(20{:}\,22{:}\,24; 20) = 100.000 \cdot p(20{:}\,22{:}\,24; 20) \cdot v^{20}$

Donde:

$p(20{:}\,22{:}\,24; 20) = 0{,}880793$, valor obtenido en secciones anteriores,

De este modo:

$Prima\ Pura\ \text{única}\ para\ el\ capital\ unitario = 0{,}880793 \cdot \left(\frac{1}{1+0{,}04}\right)^{20}$ = 0.4019826

$Prima\ Pura\ \text{única} = \$40.198{,}26$[9]

Si se trabaja con valores de conmutación:

$$Prima\ Pura\ \text{única} = 100.000 \cdot E(20{:}\,22{:}\,24; 20) = \$100.000 \cdot \frac{D(40{:}\,42{:}\,44)}{D(20{:}\,22{:}\,24)}$$

Donde:

$$D(40{:}\,42{:}\,44) = v^{\frac{40+42+44}{3}} \cdot l(40{:}\,42{:}\,44) = \left(\frac{1}{1+0{,}04}\right)^{\frac{40+42+44}{3}} \cdot l(40) \cdot l(42) \cdot l(44)$$

$D(40{:}\,42{:}\,44) =$ 1.556.373,63

$$D(20{:}\,22{:}\,24) = v^{\frac{20+22+24}{3}} \cdot l(20{:}\,22{:}\,24) = \left(\frac{1}{1+0{,}04}\right)^{\frac{20+22+24}{3}} \cdot l(20) \cdot l(22) \cdot l(24)$$

$D(20{:}\,22{:}\,24) =$ 3.871.743,60

Con lo cual:

$$Prima\ Pura\ \text{única} = \$100.000 \cdot \frac{1.556.373{,}63}{3.871.743{,}60} = \$40.198{,}26$$

Exactamente r cabezas

$\boldsymbol{E(x_1{:}\,x_2{:}\,x_3{:}\,\ldots{:}\,x_m; t; r)}$

La expresión anterior representa la prima pura única de un seguro de capital diferido de vida en el caso de que sobrevivan exactamente *r* componentes del grupo inicial al cabo de *t* años.

La cobertura consiste entonces en el pago del capital unitario al conjunto de *r* sobrevivientes al cabo de t años, si exactamente *r* componentes del grupo inicial sobreviven al mencionado plazo. Es decir, el grupo como tal subsiste en tanto sobrevivan exactamente *r* componentes.

[9] Surge de multiplicar el valor anterior por el capital asegurado.

Antes de proceder a la generalización de las fórmulas, se desarrollará el procedimiento que debe seguirse con el caso del grupo de dos personas.

De este modo, $E(x{:}\,y; t; 1)$ representa la prima pura única correspondiente a un grupo de dos personas de edades *x* e *y* que ofrece como cobertura el pago del capital unitario al cabo de t años si exactamente uno de los componentes del grupo inicial – x o y - se encuentra con vida; es decir:

$$E(x{:}\,y; t; 1) = v^t \,.\, p(x{:}\,y; t; 1)$$

donde:

$$p(x{:}\,y; t; 1) = p(x; t) + p(y; t) - 2 \cdot p(x{:}\,y; t)$$

Con lo cual, al distribuir $v^{t,}$ la expresión resultante es:

$$E(x{:}\,y; t; 1) = E(x; t) + E(y; t) - 2 \cdot E(x{:}\,y; t)$$

Se observa que la expresión correspondiente al capital diferido de vida de dos cabezas donde la condición de cobro es que exactamente uno sobreviva puede calcularse como combinación lineal de capitales diferidos de vida de supervivencia conjunta. Es decir, la relación obtenida para las probabilidades de supervivencia se traslada al capital diferido de vida.
Conforme lo previamente expuesto, entonces, el esquema presentado puede trasladarse al caso general: $E(x_1{:}\,x_2{:}\,x_3{:} \ldots {:}\,x_m; t; r)$

De este modo, se tiene que la prima pura única de la cobertura del capital diferido de vida con las características señaladas resulta del producto entre el valor actual financiero del capital unitario y la probabilidad de cobro del mismo; es decir:

$$E(x_1{:}\,x_2{:}\,x_3{:} \ldots {:}\,x_m; t; r) = v^t \cdot p(x_1{:}\,x_2{:}\,x_3{:} \ldots {:}\,x_m; t; r)$$

Para poder resolverlo, se debe expresar la probabilidad de supervivencia $p(x_1{:}\,x_2{:}\,x_3{:} \ldots {:}\,x_m; t; r)$ en función de probabilidades de supervivencia conjunta y al multiplicarlo por el factor de actualización financiero v^t, se obtiene la siguiente expresión:

$$E(x_1{:}\,x_2{:} \ldots {:}\,x_m; t; r) = \sum_{s=r}^{m} (-1)^{s-r} \binom{s}{s-r} Z(s, m)$$

Donde Z(s;m), en este caso, representa las distintas combinaciones existentes de *s* cabezas sobre un total de *m* aplicado a la función capital diferido de vida.[10]

Ejemplos:

1) La prima pura única de un Seguro de Capital Diferido de Vida en el cual se abona un importe total de $100.000.- al cabo de 20 años, si sobreviven exactamente dos de los componentes del grupo inicial compuesto por tres personas de edades 20, 22 y 24 años, es de $5.212,34, y se obtiene como:

[10] La relación existente para las probabilidades se traslada al capital diferido de vida.

$Prima\ Pura$ única $= \$100.000 \cdot E(20{:}22{:}24;20;2)$

Donde:

$E(20{:}22{:}24;20;2) = p(20{:}22{:}24;20;2) \cdot v^{20}$

$p(20{:}22{:}24;20;2) =$ 0,11420885, valor obtenido en secciones anteriores.

Con lo cual:

$$E(20{:}22{:}24;20;2) = p(20{:}22{:}24;20;2) \cdot v^{20} = 0{,}11420885 \cdot \left(\frac{1}{1+0{,}04}\right)^{20} = 0{,}05212343$$

Si se utiliza el método Z:

$$E(20{:}22{:}24;20;2) = \sum_{s=2}^{3} (-1)^{s-2} \binom{s}{s-2} Z(s,3)$$

$$E(20{:}22{:}24;20;2) = \binom{2}{0} Z(2,3) - \binom{3}{1} Z(3,3)$$

Donde:

$Z(2,3) = E(20{:}22;20) + E(20{:}24;20) + E(22{:}24;20)$

$z(3,3) = E(20{:}22{:}24;20)$

$\binom{2}{0} = 1$ y $\binom{3}{1} = 3$

De este modo, se tiene que:

$$E(20{:}22{:}24;20;2) = E(20{:}22;20) + E(20{:}24;20) + E(22{:}24;20) - 3 \cdot E(20{:}22{:}24;20)$$

$$E(20{:}22{:}24;20;2) = 0{,}42074008 + 0{,}41919027 + 0{,}41814094 - 3 \cdot 0{,}4019826$$

$$E(20{:}22{:}24;20;2) = 0{,}05212343$$

Es decir;

$$Prima\ Pura\ \text{única} = E(20{:}22{:}24;20;2) \cdot \$100.000 = 0{,}05212343 \cdot \$100.000$$

$$Prima\ Pura\ \text{única} = \$5.212{,}34$$

2) La prima pura única de un Seguro de Capital Diferido de Vida en el cual se abona un importe total de $100.000.- al cabo de 20 años, al único sobreviviente de los componentes

del grupo inicial compuesto por tres personas de edades 20, 22 y 24 años[11], es de \$224,86, y se obtiene como:

$$Prima\ Pura\ \text{única} = \$100.000 \cdot E(20{:}\,22{:}\,24;20;1)$$

Donde:

$$E(20{:}\,22{:}\,24;20;1) = p(20{:}\,22{:}\,24;20;1) \cdot v^{20}$$

$p(20{:}\,22{:}\,24;20;1) =$ 0,00492701, valor obtenido en secciones anteriores.

Así:

$$E(20{:}\,22{:}\,24;20;1) = p(20{:}\,22{:}\,24;20;1) \cdot v^{20} = 0{,}00492701 \cdot \left(\frac{1}{1+0{,}04}\right)^{20} = 0{,}00224862$$

Si se utiliza el método Z:

$$E(20{:}\,22{:}\,24;20;1) = \sum_{s=1}^{3} (-1)^{s-1} \binom{s}{s-1} Z(s,3)$$

$$E(20{:}\,22{:}\,24;20;1) = \binom{1}{0} Z(1,3) - \binom{2}{1} Z(2,3) + \binom{3}{2} Z(3,3)$$

Donde:

$$Z(1,3) = E(20;20) + E(22;20) + E(24;20)$$

$$Z(2,3) = E(20{:}\,22;20) + E(20{:}\,24;20) + E(22{:}\,24;20)$$

$$z(3,3) = E(20{:}\,22{:}\,24;20)$$

$\binom{1}{0} = 1$ y $\binom{2}{1} = 2$ y $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$

Con lo cual:

$$E(20{:}\,22{:}\,24;20;1) = E(20;20) + E(22;20) + E(24;20) - 2[E(20{:}\,22;20) + E(20{:}\,24;20) + E(22{:}\,24;20)] + 3 \cdot E(20{:}\,22{:}\,24;20)$$

$$E(20{:}\,22{:}\,24;20;1) = 0{,}438751 + 0{,}437652 + 0{,}436040 - 2 \cdot [0{,}42074008 + 0{,}41919027 + 0{,}41814094] - 3 \cdot 0{,}4019826$$

$$E(20{:}\,22{:}\,24;20;1) = 0{,}00224862$$

$$Prima\ Pura\ \text{única} = E(20{:}\,22{:}\,24;20;1) \cdot \$100.000 = 0{,}00224862 \cdot \$100.000$$

$$Prima\ Pura\ \text{única} = \$224{,}86$$

[11] Abonar al único sobreviviente significa que la condición es que exactamente uno de los componentes del grupo inicial sobreviva.

Al menos r cabezas

$\boldsymbol{E(x_1 : x_2 : x_3 : \dots : x_m ; t ; r, m)}$

La expresión anterior representa la prima pura única de un seguro de capital diferido de vida en el caso de que sobrevivan al menos *r* componentes del grupo inicial al cabo de t taños.

La cobertura consiste entonces en el pago del capital unitario al conjunto de sobrevivientes al cabo de t años, si al menos *r* componentes del grupo inicial sobreviven al mencionado plazo. Es decir, el grupo como tal subsiste en tanto sobrevivan al menos *r* componentes.

Se tiene así que la prima pura única de la cobertura mencionada resulta del producto entre el valor actual financiero del capital unitario y la probabilidad de cobro del mismo:

$$E(x_1 : x_2 : x_3 : \dots : x_m ; t ; r, m) = v^t \cdot p(x_1 : x_2 : x_3 : \dots : x_m ; n ; r, m)$$

Para poder resolverlo, se debe expresar la $p(x_1 : x_2 : x_3 : \dots : x_m ; n ; r)$ en función de probabilidades de supervivencia conjunta y distribuir el factor de actualización financiero v^t. En consecuencia la fórmula resultante es:[12]

$$E(x_1 : x_2 : \dots : x_m ; t ; r ; m) = \sum_{s=r}^{m} (-1)^{s-r} \binom{s-1}{s-r} Z(s, m)$$

Donde Z(s;m) representa en este caso las distintas combinaciones existentes de s cabezas en un total de m aplicado a la función capital diferido de vida.

Ejemplos

1) La prima pura única de un Seguro de Capital Diferido de Vida en el cual se abona un importe total de $100.000.- al cabo de 20 años, si sobreviven al menos dos de los componentes del grupo inicial compuesto por tres personas de edades 20, 22 y 24 años, es de $45.410,60 y se obtiene del siguiente modo:

$Prima\ Pura\ \text{única} = \$100.000 \cdot E(20 : 22 : 24 ; 20 ; 2{,}3)$

Donde:

$E(20 : 22 : 24 ; 20 ; 2{,}3) = p(20 : 22 : 24 ; 20 ; 2{,}3) \cdot v^{20}$

$p(20 : 22 : 24 ; 20 ; 2{,}3) =$ 0,99500227 resultado obtenido en secciones anteriores

Con lo cual:

$E(20 : 22 : 24 ; 20 ; 2{,}3) = p(20 : 22 : 24 ; 20 ; 2{,}3) \cdot v^{20} = 0{,}99500227 \cdot \left(\frac{1}{1+0{,}04}\right)^{20} =$ 0,45410605

[12] Se recuerda que las relaciones desarrolladas en el caso de las probabilidades se extienden al resto de las funciones actuariales. Se recomienda hacer el desarrollo correspondiente.

Si se utiliza el método Z:

$$E(20:22:24;20;2,3)=\sum_{s=2}^{3}(-1)^{s-2}\binom{s-1}{s-2}Z(s,3)$$

$$E(20:22:24;20;2,3)=\binom{1}{0}Z(2,3)-\binom{2}{1}Z(3,3)$$

Donde:

$$Z(2,3)=E(20:22;20)+E(20:24;20)+E(22:24;20)$$

$$z(3,3)=E(20:22:24;20)$$

$\binom{1}{0}=1$ y $\binom{2}{1}=2$

Así:

$$E(20:22:24;20;2,3)=E(20:22;20)+E(20:24;20)+E(22:24;20)-2\cdot E(20:22:24;20)$$

$$E(20:22:24;20;2)=0{,}42074008+0{,}41919027+0{,}41814094-2\cdot 0{,}4019826$$

$$E(20:22:24;20;2)=0.45410605$$

$$Prima\ Pura\ \text{única}=E(20:22:24;20;2,3)\cdot \$100.000=0{,}45410605\cdot \$100.000$$

$$Prima\ Pura\ \text{única}=\$45.410{,}610$$

2) La prima pura única de un Seguro de Capital Diferido de Vida en el cual se abona un importe total de $100.000.- al cabo de 20 años, si sobrevive al menos uno de los componentes del grupo inicial compuesto por tres personas de edades 20, 22 y 24 años, es de $45.635,47 y se obtiene como:

$$Prima\ Pura\ \text{única}=\$100.000\cdot E(20:22:24;20;1,3)$$

Donde:

$$E(20:22:24;20;1,3)=p(20:22:24;20;1,3)\cdot v^{20}$$

$p(20:22:24;20;1,3)=0{,}99992928$ resultado obtenido en secciones anteriores.

De este modo:

$$E(20:22:24;20;1,3)=p(20:22:24;20;1,3)\cdot v^{20}=0{,}99992928\cdot\left(\frac{1}{1+0{,}04}\right)^{20}=0{,}45635467$$

Si se utiliza el método Z:

$$E(20:22:24;20;1{,}3)=\sum_{s=1}^{3}(-1)^{s-1}\binom{s-1}{s-1}Z(s,3)$$

$$E(20:22:24;20;1{,}3)=\binom{0}{0}Z(1{,}3)-\binom{1}{1}Z(2{,}3)+\binom{2}{2}Z(3{,}3)$$

Donde:

$$Z(1{,}3)=E(20;20)+E(22;20)+E(24;20)$$

$$Z(2{,}3)=E(20:22;20)+E(20:24;20)+E(22:24;20)$$

$$z(3{,}3)=E(20:22:24;20)$$

$\binom{0}{0}=1$ y $\binom{1}{1}=2$ y $\binom{2}{2}=1$

Con lo cual:

$$E(20:22:24;20;1)=E(20;20)+E(22;20)+E(24;20)-[E(20:22;20)+E(20:24;20)+E(22:24;20)]+E(20:22:24;20)$$

$$E(20:22:24;20;1{,}3)=0{,}438751+0{,}437652+0{,}436040-[0{,}42074008+0{,}41919027+0{,}41814094]+0{,}4019826$$

$$E(20:22:24;20;1{,}3)=0{,}45635467$$

$$Prima\ Pura\ \text{única}=E(20:22:24;20;1{,}3)\cdot \$100.000=0{,}45635467\cdot 100.000$$

$$Prima\ Pura\ \text{única}=\$45.635{,}47$$

Seguros de vida de capitales múltiples constantes

Supervivencia conjunta

$\boldsymbol{a(x_1:x_2:x_3:\ldots:x_m;0;n)}$

La expresión anterior representa la prima pura única de un seguro de vida de capitales múltiples consistente en el pago de \$1 al grupo al inicio de cada año si todos los integrantes del grupo inicial sobreviven a cada una de los años, durante un plazo total de n años. Es decir, el grupo como tal subsiste en tanto sobrevivan todos sus integrantes; extinguiéndose con el primer fallecimiento.

$$a(x_1:x_2:x_3:\ldots:x_m;0;n)=\sum_{t=0}^{n-1}E(x_1:x_2:x_3:\ldots:x_m;t)$$

$$a(x_1:x_2:x_3:\ldots:x_m;0;n)=\sum_{t=0}^{n-1}\frac{D(x_1+t:x_2+t:x_3+t:\ldots:x_m+t)}{D(x_1:x_2:x_3:\ldots:x_m)}$$

Se define entonces:

$$N(x_1{:}\,x_2{:}\,x_3{:}\,\dots{:}\,x_m) = \sum_{t=0}^{w-x-1} D(x_1+t{:}\,x_2+t{:}\,x_3+t{:}\,\dots{:}\,x_m+t)$$

Con lo cual, la expresión previamente expuesta puede escribirse como:

$$a(x_1{:}\,x_2{:}\,x_3{:}\,\dots{:}\,x_m;0;n) = \frac{N(x_1{:}\,x_2{:}\,x_3{:}\,\dots{:}\,x_m) - N(x_1+n{:}\,x_2+n{:}\,x_3+n{:}\,\dots{:}\,x_m+n)}{D(x_1{:}\,x_2{:}\,x_3{:}\,\dots{:}\,x_m)}$$

La condición de cada uno de los cobros anuales es, entonces, que todos los integrantes del grupo inicial se encuentren con vida.

Ejemplo
La prima pura única de un Seguro de Vida de Capitales Múltiples para un grupo inicial de tres personas de edades 20, 22 y 24 años, pagadero durante un plazo de 20 años, en el cual se abonará una renta anual total de \$10.000.- al inicio de cada año si los tres componentes del grupo inicial se encuentran con vida, es de \$135.078,27, a saber:

$$\text{Prima Pura Única} = \$10.000 \cdot a(20{:}\,22{:}\,24;0;20)$$

Donde:

$$a(20{:}\,22{:}\,24;0;20) = \frac{N(20{:}\,22{:}\,24) - N(40{:}\,42{:}\,44)}{D(20{:}\,22{:}\,24)}$$

Y los valores de conmutación resultan de las siguientes expresiones:

$$N(20{:}\,22{:}\,24) = \sum_{t=0}^{w-24-1} D(20+t{:}\,22+t{:}\,24+t)$$

$$N(40{:}\,42{:}\,44) = \sum_{t=0}^{w-44-1} D(40+t{:}\,42+t{:}\,44+t)$$ [13].

$$N(20+t{:}\,22+t{:}\,24+t) = v^{\frac{20+t+22+t+24+t}{3}} \cdot l(20+t{:}\,22+t{:}\,24+t) = 74.540.551{,}32$$

$$N(40+t{:}\,42+t{:}\,44+t) = v^{\frac{40+t+42+t+44+t}{3}} \cdot l(40+t{:}\,42+t{:}\,44+t) = 22.241.707{,}18$$

$$D(20{:}\,22{:}\,24) = v^{\frac{20+22+24}{3}} \cdot l(20{:}\,22{:}\,24) = \left(\frac{1}{1+0{,}04}\right)^{\frac{20+22+24}{3}} \cdot l(20) \cdot l(22) \cdot l(24)$$

$$D(20{:}\,22{:}\,24) = 3.871.743{,}60$$

Al reemplazar estos valores en la expresión del seguro de vida de capitales múltiples se obtiene que:

[13] El anexo contiene las cifras expuestas de los valores de conmutación.

$a(20{:}\,22{:}\,24;0;20)=\frac{75.540.551{,}32-22.241.707{,}18}{3.871.743{,}60}=13{,}50782737$

$\text{Prima Pura Única} = \$10.000 \cdot a(20{:}\,22{:}\,24;0;20)=\$10.000 \cdot 13{,}50782737$

$\text{Prima Pura Única} = \$135.078{,}27$

Exactamente r cabezas

$\boldsymbol{a(x_1{:}\,x_2{:}\,x_3{:}\,\dots{:}\,x_m;0;n;r)}$

La expresión anterior representa la prima pura única de un seguro de vida de capitales múltiples pagadero anualmente, al comienzo de cada año en el caso de que sobrevivan exactamente *r* componentes del grupo inicial en cada uno de los años.

La cobertura consiste entonces en el pago del capital unitario al conjunto de *r* sobrevivientes en forma anual, si exactamente *r* componentes del grupo inicial se encuentran con vida al momento de exigencia del capital. Es decir, el grupo como tal subsiste en tanto sobrevivan exactamente *r* componentes.

Se define como:

$$a(x_1{:}\,x_2{:}\,x_3{:}\,\dots{:}\,x_m;0;n;r)=\sum_{t=0}^{n-1}E(x_1{:}\,x_2{:}\,x_3{:}\,\dots{:}\,x_m;t;r)$$

Se tiene así que la prima pura única de la cobertura mencionada se obtiene como combinación lineal de seguros de vida de capitales múltiples correspondientes a distintos grupos de supervivencia conjunta mediante la aplicación del método zeta.

En base a lo expuesto, la expresión resultante es:

$$a(x_1{:}\,x_2{:}\,\dots{:}\,x_m;0;n;r)=\sum_{s=r}^{m}(-1)^{s-r}\binom{s}{s-r}Z(s,m)$$

Donde Z(s;m) representa en este caso las distintas combinaciones existentes de *s* cabezas sobre un total de *m* aplicado a la función seguro de vida de capitales múltiples.

Ejemplos

1) La prima pura única de un Seguro de Vida de Capitales Múltiples en el cual se abona una renta anual total de \$10.000.- al inicio de cada año durante el plazo estipulado, si de un grupo inicial compuesto por tres personas de edades 20, 22 y 24 años, sobreviven exactamente 2 de ellas en cada uno de los años[14] es de \$6.117,13, y se obtiene como:

[14] Es decir, el primer cobro probable puede tener recién lugar al cabo de un año dado que en el momento de contratación todos los componentes del grupo están vivos y no se cumple con la condición exigida.

$Prima\ Pura$ única $= \$10.000 \cdot a(20{:}22{:}24;0;20;2)$

Se aplica el método Z:

$$a(20{:}22{:}24;0;20;2) = \sum_{s=2}^{3}(-1)^{s-2}\binom{s}{s-2}Z(s,3)$$

$$a(20{:}22{:}24;0;20;2) = \binom{2}{0}Z(2{,}3) - \binom{3}{1}Z(3{,}3)$$

Donde:

$Z(2{,}3) = a(20{:}22;0;20) + a(20{:}24;0;20) + a(22{:}24;0;20)$

$z(3{,}3) = a(20{:}22{:}24;0;20)$ resultado obtenido en supervivencia conjunta.

$\binom{2}{0} = 1$ y $\binom{3}{1} = 3$

De este modo:

$$a(20{:}22{:}24;0;20;2) = a(20{:}22;0;20) + a(20{:}24;0;20) + a(22{:}24;0;20) - 3 \cdot a(20{:}22{:}24;0;20)$$

Los cálculos se realizan utilizando los valores de conmutación:

$$a(20{:}22;0;20) = \frac{N(20{:}22) - N(40{:}42)}{D(20{:}22)} = \frac{851.165.687{,}01 - 280.702.012{,}53}{41.594.133{,}28} = 13{,}7150033$$

$$a(20{:}24;0;20) = \frac{N(20{:}24) - N(40{:}44)}{D(20{:}24)} = \frac{808.590.080{,}41 - 262.298.276{,}06}{39.844.520{,}67} = 13{,}7105879$$

$$a(22{:}24;0;20) = \frac{N(22{:}24) - N(42{:}44)}{D(22{:}24)} = \frac{769.728.629{,}81 - 246.485.006{,}19}{38.166.209{,}27} = 13{,}7096042$$

En consecuencia:

$$a(20{:}22{:}24;0;20;2) = 13{,}7150033 + 13{,}7105879 + 13{,}7096042 - 3 \cdot 13{,}50782737$$

$$a(20{:}22{:}24;0;20;2) = 0{,}611713314$$

$$Prima\ Pura\ \text{única} = a(20{:}22{:}24;0;20;2) \cdot \$10.000 = 0{,}611713314 \cdot \$10.000$$

$$Prima\ Pura\ \text{única} = \$6.117{,}13$$

2) La prima pura única de un Seguro de Vida de Capitales Múltiples en el cual se abona una renta total de $10.000.- al inicio de cada año, durante el plazo estipulado, si de un grupo inicial compuesto por tres personas de edades 20, 22 y 24 años, sobrevive exactamente una en el año considerado, es de $142,67, y se obtiene como:

$Prima\ Pura$ única $= \$10.000 \cdot a(20{:}22{:}24;0;20;1)$

Se aplica el método Z:

$$a(20{:}\,22{:}\,24; 0; 20; 1) = \sum_{s=1}^{3} (-1)^{s-1} \binom{s}{s-1} Z(s,3)$$

$$a(20{:}\,22{:}\,24; 0; 20; 1) = \binom{1}{0} Z(1,3) - \binom{2}{1} Z(2,3) + \binom{3}{2} Z(3,3)$$ [15]

Donde:

$$Z(1,3) = a(20; 0; 20) + a(22; 0; 20) + a(24; 0; 20)$$

$$Z(2,3) = a(20{:}\,22; 0; 20) + a(20{:}\,24; 0; 20) + a(22{:}\,24; 0; 20)$$

$$z(3,3) = a(20{:}\,22{:}\,24; 0; 20)$$

$\binom{1}{0} = 1$ y $\binom{2}{1} = 2$ y $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$

De este modo:

$$a(20{:}\,22{:}\,24; 0; 20; 1) = a(20; 0; 20) + a(22; 0; 20) + a(24; 0; 20) - 2[a(20{:}\,22; 0; 20) + a(20{:}\,24; 0; 20) + a(22{:}\,24; 0; 20)] + 3 \cdot a(20{:}\,22{:}\,24; 0; 20)$$

Los cálculos se realizan utilizando los valores de conmutación:

$$a(20; 0; 20) = \frac{N(20) - N(40)}{D(20)} = \frac{97.994.437{,}79 - 36.014.816{,}90}{4.451.715{,}85} = 13{,}92263633$$

$$a(22; 0; 20) = \frac{N(22) - N(42)}{D(22)} = \frac{89.270.358{,}87 - 32.189.224{,}82}{4.100.195{,}06} = 13{,}92156551$$

$$a(24; 0; 20) = \frac{N(24) - N(44)}{D(24)} = \frac{81.235.119{,}88 - 28.675.464{,}80}{3.776.658{,}41} = 13{,}91697351$$

Con lo cual:

$$a(20{:}\,22{:}\,24; 20; 1) = 13{,}92263633 + 13{,}92156551 + 13{,}91697351 - 2 \cdot [13{,}7150033 + 13{,}7105879 + 13{,}7096042] + 3 \cdot 13{,}50782737$$

$$a(20{:}\,22{:}\,24; 0; 20; 1) = 0{,}014266603$$

$$Prima\ Pura\ \text{única} = a(20{:}\,22{:}\,24; 0; 20; 1) \cdot \$10.000 = 0{,}014266603 \cdot \$10.000$$

$$Prima\ Pura\ \text{única} = \$142{,}67$$

Al menos r cabezas

$$\boldsymbol{a(x_1{:}\,x_2{:}\,x_3{:}\,\ldots{:}\,x_m; 0; n; r, m)}$$

[15] Los valores de Z(2,3) y Z(3,3) ya fueron calculados en el ejemplo anterior.

La expresión anterior representa la prima pura única de un seguro de vida de capitales múltiples pagadero anualmente, al comienzo de cada año en el caso de que sobrevivan al menos *r* componentes del grupo inicial de *m* individuos en cada uno de los años.
La cobertura consiste entonces en el pago del capital unitario al conjunto de al menos *r* sobrevivientes en forma anual, si se encuentran con vida al momento de exigencia del capital. Es decir, el grupo como tal subsiste en tanto sobrevivan al menos *r* componentes.

Se define como:

$$a(x_1: x_2: x_3: \ldots : x_m; 0; n; r, m) = \sum_{t=0}^{n-1} E(x_1: x_2: x_3: \ldots : x_m; t; r, m)$$

Se tiene así que la prima pura única de la cobertura mencionada se obtiene como combinación lineal de seguros de vida de capitales múltiples correspondientes a distintos grupos de supervivencia conjunta mediante la aplicación del método zeta.

En base a lo expuesto, la expresión resultante es:

$$a(x_1: x_2: \ldots : x_m; 0; n; r; m) = \sum_{s=r}^{m} (-1)^{s-r} \binom{s-1}{s-r} Z(s, m)$$

Donde Z(s;m) representa en este caso, las distintas combinaciones existentes de *s* cabezas en un total de *m* aplicado a la función seguro de vida de capitales múltiples.

Ejemplos

1) La prima pura única de un Seguro de Vida de Capitales Múltiples en el cual se abona una renta anual total de \$10.000.- al inicio de cada año durante un plazo establecido de 20 años, si de un grupo inicial compuesto por tres personas de edades 20, 22 y 24 años, sobreviven al menos dos de ellas en cada uno de los años es de \$141.195,41, y se obtiene como:

$$Prima\ Pura\ única = 10.000 \cdot a(20: 22: 24; 0; 20; 2,3)$$

Se aplica el método Z:

$$a(20: 22: 24; 0; 20; 2,3) = \sum_{s=2}^{3} (-1)^{s-2} \binom{s-1}{s-2} Z(s, 3)$$

$$a(20: 22: 24; 0; 20; 2,3) = \binom{1}{0} Z(2,3) - \binom{2}{1} Z(3,3)$$

Donde:

$$Z(2,3) = a(20: 22; 0; 20) + a(20: 24; 0; 20) + a(22: 24; 0; 20)$$

$$z(3,3) = a(20: 22: 24; 0; 20)$$

$\binom{1}{0} = 1$ y $\binom{2}{1} = 2$

Con lo cual:

$a(20{:}\,22{:}\,24;0;20;2) = a(20{:}\,22;0;20) + a(20{:}\,24;0;20) + a(22{:}\,24;0;20) - 3 \cdot a(20{:}\,22{:}\,24;0;20)$

Se realizan los cálculos empleando los valores de conmutación:

$$a(20{:}\,22;0;20) = \frac{N(20{:}\,22) - N(40{:}\,42)}{D(20{:}\,22)} = \frac{851.165.687{,}01 - 280.702.012{,}53}{41.594.133{,}28} = 13{,}7150033$$

$$a(20{:}\,24;0;20) = \frac{N(20{:}\,24) - N(40{:}\,44)}{D(20{:}\,24)} = \frac{808.590.080{,}41 - 262.298.276{,}06}{39.844.520{,}67} = 13{,}7105879$$

$$a(22{:}\,24;0;20) = \frac{N(22{:}\,24) - N(42{:}\,44)}{D(22{:}\,24)} = \frac{769.728.629{,}81 - 246.485.006{,}19}{38.166.209{,}27} = 13{,}7096042$$

En consecuencia:

$a(20{:}\,22{:}\,24;0;20;2{,}3) = 13{,}7150033 + 13{,}7105879 + 13{,}7096042 - 2 \cdot 13{,}50782737$

$a(20{:}\,22{:}\,24;0;20;2{,}3) = 14{,}11954069$

$Prima\ Pura\ \text{única} = a(20{:}\,22{:}\,24;0;20;2{,}3) \cdot \$10.000 = 14{,}11954069 \cdot \$10.000$

$Prima\ Pura\ \text{única} = \$141.195{,}41$

2) La prima pura única de un Seguro de Vida de Capitales Múltiples en el cual se abona una renta anual total de \$10.000.- al inicio de cada año durante un plazo establecido de 20 años si de un grupo inicial compuesto por tres personas de edades 20, 22 y 24 años, sobrevive al menos una persona en cada año considerado, es de \$141.338,07, y se obtiene como:

$Prima\ Pura\ \text{única} = \$10.000 \cdot a(20{:}\,22{:}\,24;0;20;1{,}3)$

Se aplica el método Z:

$$a(20{:}\,22{:}\,24;0;20;1{,}3) = \sum_{s=1}^{3} (-1)^{s-1} \binom{s-1}{s-1} Z(s,3)$$

$$a(20{:}\,22{:}\,24;0;20;1{,}3) = \binom{0}{0} Z(1{,}3) - \binom{1}{1} Z(2{,}3) + \binom{2}{2} Z(3{,}3)$$

Donde:

$Z(1{,}3) = a(20;0;20) + a(22;0;20) + a(24;0;20)$

$Z(2{,}3) = a(20{:}\,22;0;20) + a(20{:}\,24;0;20) + a(22{:}\,24;0;20)$

$z(3{,}3) = a(20{:}\,22{:}\,24;0;20)$

$\binom{0}{0} = 1$ y $\binom{1}{1} = 1$ y $\binom{2}{2} = 1$

Con lo cual:

$$a(20{:}22{:}24;0;20;1{,}3) = a(20;0;20) + a(22;0;20) + a(24;0;20) - [a(20{:}22;0;20) + a(20{:}24;0;20) + a(22{:}24;0;20)] + a(20{:}22{:}24;0;20)$$

Se realizan los cálculos empleando los valores de conmutación:

$$a(20;0;20) = \frac{N(20) - N(40)}{D(20)} = \frac{97.994.437{,}79 - 36.014.816{,}90}{4.451.715{,}85} = 13{,}92263633$$

$$a(22;0;20) = \frac{N(22) - N(42)}{D(22)} = \frac{89.270.358{,}87 - 32.189.224{,}82}{4.100.195{,}06} = 13{,}92156551$$

$$a(24;0;20) = \frac{N(24) - N(44)}{D(24)} = \frac{81.235.119{,}88 - 28.675.464{,}80}{3.776.658{,}41} = 13{,}91697351$$

En consecuencia:

$$a(20{:}22{:}24;20;1{,}3) = 13{,}92263633 + 13{,}92156551 + 13{,}91697351 - [13{,}7150033 + 13{,}7105879 + 13{,}7096042] + 13{,}50782737$$

$$a(20{:}22{:}24;0;20;1) = 14{,}13380729$$

$$Prima\ Pura\ \text{única} = a(20{:}22{:}24;0;20;1{,}3) \cdot \$10.000 = 14{,}13380729 \cdot \$10.000$$

$$Prima\ Pura\ \text{única} = \$141.338{,}07$$

Seguro de muerte de riesgo inmediato y plazo limitado

El seguro consiste en el pago del capital unitario cuando se produce el *r-ésimo* fallecimiento. En consecuencia, es necesario definir al grupo en términos de subsistencia para así poder resolver el problema. De este modo, el grupo subsiste siempre y cuando sobrevivan al menos "*m-r+1*" integrantes del grupo inicial. Bajo estas condiciones, se tiene que:

$A(x_1{:}x_2{:}\dots{:}x_m;0;n;m-r+1,m)$ es la prima pura única de la cobertura buscada.

Esta prima se calcula a partir de las relaciones vida- muerte como:

$$A(x_1{:}x_2{:}\dots{:}x_m;0;n;m-r+1,m) = 1 - E(x_1{:}x_2{:}\dots{:}x_m;n;m-r+1,m) - d \cdot a(x_1{:}x_2{:}\dots{:}x_m;0;n;m-r+1,m)$$

Para poder resolver deben llevarse las expresiones obtenidas de al menos m-r+1 individuos a términos de grupos de supervivencia conjunta mediante la aplicación del método Zeta, tal como ha sido desarrollado previamente.

Ejemplos:

1) La prima pura única de un Seguro de Muerte para un grupo inicial de tres personas de edades 20, 22 y 24 años, en el que se abona el capital asegurado de $100.000.- al producirse el primer fallecimiento (es decir el grupo subsiste mientras se encuentren todos con vida), es de $7.848,56, y se obtiene como:

$Prima\ Pura$ única $= 100.000 \cdot A(20{:}\,22{:}\,24;\,0;\,20)$

Donde:

$A(20{:}\,22{:}\,24;\,0;\,20) = 1 - E(20{:}\,22{:}\,24;\,20) - d \cdot a(20{:}\,22{:}\,24;\,0;\,20)$

Los valores de $E(20{:}\,22{:}\,24;\,20)\ y\ a(20{:}\,22{:}\,24;\,0;\,20)$ fueron calculados en los ejemplos anteriores, por lo tanto:

$$A(20{:}\,22{:}\,24;\,0;\,20) = 1 - 0{,}45635467 - \frac{0{,}04}{1+0{,}04} \cdot 13{,}50782737$$

$A(20{:}\,22{:}\,24;\,0;\,20) =$ 0,078485559

$Prima\ Pura$ única $= \$100.000 \cdot 0{,}078485559 = \$7.848{,}56$

2) La prima pura única de un Seguro de Muerte para un grupo inicial de tres personas de edades 20, 22 y 24 años, en el que se abona el capital asegurado de $100.000.- al producirse el segundo fallecimiento (es decir el grupo subsiste mientras se encuentren al menos 2 personas con vida), es de $ 283,47, y se obtiene como:

$Prima\ Pura$ única $= 100.000 \cdot A(20{:}\,22{:}\,24;\,0;\,20;\,2{,}3)$

Donde:

$A(20{:}\,22{:}\,24;\,0;\,20;\,2{,}3) = 1 - E(20{:}\,22{:}\,24;\,20;\,2{,}3) - d \cdot a(20{:}\,22{:}\,24;\,0;\,20;\,2{,}3)$

Los valores de $E(20{:}\,22{:}\,24;\,20;\,2{,}3)\ y\ a(20{:}\,22{:}\,24;\,0;\,20;\,2{,}3)$ fueron calculados en los ejemplos anteriores, por lo tanto:

$$A(20{:}\,22{:}\,24;\,0;\,20;\,2{,}3) = 1 - 0{,}45410605 - \frac{0{,}04}{1+0{,}04} \cdot 14{,}11954069$$

$A(20{:}\,22{:}\,24;\,0;\,20)$ =0,002834696

$Prima\ Pura$ única $= \$100.000 \cdot 0{,}002834696 = \$283{,}47$

3) La prima pura única de un Seguro de Muerte para un grupo inicial de tres personas de edades 20, 22 y 24 años, en el que se abona el capital asegurado de $100.000.- al producirse el tercer fallecimiento (es decir el grupo subsiste mientras se encuentre al menos una persona con vida, se denomina también último sobreviviente), es de $3,74, a saber:

$Prima\ Pura$ única $= \$100.000 \cdot A(20{:}\,22{:}\,24;\,0;\,20;\,1{,}3)$

Donde:

$A(20{:}\,22{:}\,24;\,0;\,20;\,1{,}3) = 1 - E(20{:}\,22{:}\,24;\,20;\,1{,}3) - d \cdot a(20{:}\,22{:}\,24;\,0;\,20;\,1{,}3)$

Los valores de $E(20{:}22{:}24;20;1{,}3)\ y\ a(20{:}22{:}24;0;20;1{,}3)$ fueron calculados en los ejemplos anteriores, por lo tanto:

$$A(20{:}22{:}24;0;20;1{,}3) = 1 - 0{,}45635467 - \frac{0{,}04}{1+0{,}04} \cdot 14{,}13380729$$

$A(20{:}22{:}24;0;20)$ =0,0000373569

$$Prima\ Pura\ \text{única} = \$100.000 \cdot 0{,}0000373569 = \$3{,}74$$

Reserva Matemática

Para el cálculo de la Reserva Matemática deben plantearse las distintas situaciones posibles que podrían tener lugar durante la vigencia de la cobertura.

Ello es así porque a priori no se sabe cuál ha de ser la composición del grupo en el momento de cálculo de la reserva.

Cabe aclarar que el método que se aplica para el cálculo de la reserva es el método prospectivo dado que el cálculo por el método retrospectivo implicaría tener que analizar distintas situaciones para cada uno de los supuestos que pudieran presentarse; es decir, el año de fallecimiento de cada uno de los componentes del grupo cuyo deceso se hubiera producido con anterioridad al cálculo de la reserva.

Por ejemplo, si un grupo de seis individuos de edades x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 y x_6 contratan un seguro dotal por un plazo de n años en el que se abona el capital asegurado al producirse el cuarto fallecimiento; y las primas son abonadas si al menos cuatro de los integrantes del grupo se encuentran con vida; la prima pura única estará dada por:

$$P(\bar{x};1) = \ A(x_1{:}x_2{:}x_3{:}x_4{:}x_5{:}x_6;o;n;3{,}6) + E(x_1{:}x_2{:}x_3{:}x_4{:}x_5{:}x_6;n;3{,}6)$$

Teniendo en cuenta la relación vida- muerte, la expresión anterior puede expresarse como:

$$P(\bar{x};1) = \ 1 - d.a(x_1{:}x_2{:}x_3{:}x_4{:}x_5{:}x_6;o;n;3{,}6)$$

Donde $\bar{x}$ representa al grupo de los individuos contratantes.

$P(\bar{x};1)$ es la prima pura única de la cobertura.

La prima pura anual surge del cociente entre la expresión anterior y el seguro de vida que contempla la forma de pago de primas establecida. Es decir,

$$a(x_1{:}x_2{:}x_3{:}x_4{:}x_5{:}x_6;o;n;4{,}6)$$

Con lo cual:

$$P(\bar{x};n) = \frac{P(\bar{x};1)}{a(x_1{:}x_2{:}x_3{:}x_4{:}x_5{:}x_6;o;n;4{,}6)}$$

Donde $P(\bar{x};n)$ es la prima pura anual de la cobertura.

Debe aplicarse entonces el método Zeta para el cálculo de $a(x_1: x_2: x_3: x_4: x_5: x_6; o; n; 3,6)$
Y de $a(x_1: x_2: x_3: x_4: x_5: x_6; o; n; 4,6)$

Se trata en ambos casos de grupos de al menos donde *r* es equivalente a 3 y 4 respectivamente.

La fórmula que debe aplicarse es entonces:

$$a(x_1: x_2: \dots : x_m; 0; n; r, m) = \sum_{s=r}^{m} (-1)^{s-r} \binom{s-1}{s-r} Z(s, m)$$

Para el caso de al menos tres, se tiene que:

$$a(x_1: x_2: \dots : x_6; 0; n; 3,6) = \sum_{s=3}^{6} (-1)^{s-3} \binom{s-1}{s-3} Z(s, 6)$$

Para el caso de al menos cuatro, se tiene que:

$$a(x_1: x_2: \dots : x_6; 0; n; 4,6) = \sum_{s=4}^{6} (-1)^{s-4} \binom{s-1}{s-4} Z(s, 6)$$

Al desarrollar las sumas se obtienen, respectivamente, las siguientes expresiones para cada una de las dos situaciones analizadas:

$$Z(3,6) - 3\,Z\,(4,6) + 6\,Z\,(5,6) - 10\,Z\,(6,6)$$

$$Z(4,6) - 4\,Z\,(5,6) + 10\,Z\,(6,6)$$

Donde:

Z(3,6) representa las distintas combinaciones de 3 individuos sobre un conjunto de 6, habrá un total de $\binom{6}{3}$ combinaciones posibles; es decir, 20 combinaciones.
Z(4,6) representa las distintas combinaciones de 4 individuos sobre un conjunto de 6, habrá un total de $\binom{6}{4}$ combinaciones posibles; es decir, 15 combinaciones.
Z(5,6) representa las distintas combinaciones de 5 individuos sobre un conjunto de 6, habrá un total de $\binom{6}{5}$ combinaciones posibles; es decir, 6 combinaciones.

De este modo han podido expresarse las primas en función de seguros de supervivencia conjunta que podrán resolverse entonces aplicando alguna de las leyes de mortalidad o, mediante la planilla de Excel.

Se desarrollará ahora el procedimiento para la obtención de las reservas matemáticas correspondientes a la cobertura planteada. En base a lo expuesto, deben plantearse las distintas situaciones que pueden presentarse; es decir:

1. Todos vivos

$$V(x_1\colon x_2\colon x_3\colon x_4\colon x_5\colon x_6;t;1) = 1 - da(x_1+t\colon x_2+t\colon x_3+t\colon x_4+t\colon x_5+t\colon x_6+t;o;n-t;3{,}6)$$

$$-P(\bar{x};n).\,a\,(x_1+t\colon x_2+t\colon x_3+t\colon x_4+t\colon x_5+t\colon x_6+t;o;n-t;4{,}6)$$

2. Un muerto: se supone x_6

$$V(x_1\colon x_2\colon x_3\colon x_4\colon x_5\colon x_6;t;1) = 1 - da(x_1+t\colon x_2+t\colon x_3+t\colon x_4+t\colon x_5+t;o;n-t;3{,}5)$$

$$-P(\bar{x};n).\,a\,(x_1+t\colon x_2+t\colon x_3+t\colon x_4+t\colon x_5+t;o;n-t;4{,}5)$$

   El mismo procedimiento debería realizarse contemplándose distintos supuestos respecto a la persona fallecida, es decir si fallece x_5 ó x_4 ó x_3 ó x_2 ó x_1.

3. Dos muertos: se supone x_6 y x_5

$$V(x_1\colon x_2\colon x_3\colon x_4\colon x_5\colon x_6;t;1) = 1 - da(x_1+t\colon x_2+t\colon x_3+t\colon x_4+t;o;n-t;3{,}4)$$

$$-P(\bar{x};n).\,a\,(x_1+t\colon x_2+t\colon x_3+t\colon x_4+t;o;n-t)$$

   El mismo procedimiento debería realizarse contemplándose distintos supuestos respecto a las personas fallecidas, es decir si fallecen x_6 y x_4 ó x_6 y x_3 ó x_6 y x_2 ó x_6 y x_1, ó x_5 y x_4 ó x_5 y x_3 ó x_5 y x_2 ó x_5 y x_1 ó x_4 y x_3 ó x_4 y x_2 ó x_4 y x_1, ó x_3 y x_2 ó x_3 y x_1, ó x_2 y x_1.

4. Tres muertos: se supone x_6 y x_5 y x_4

$$V(x_1\colon x_2\colon x_3\colon x_4\colon x_5\colon x_6;t;1) = 1 - da(x_1+t\colon x_2+t\colon x_3+t\colon x_4+t;o;n-t)$$

   El mismo procedimiento debería realizarse contemplándose distintos supuestos respecto a las personas fallecidas, es decir si fallecen x_6 y x_5 y x_3, y así sucesivamente las distintas combinaciones de 3 personas en el grupo de 6.

Al producirse el cuarto fallecimiento, se extingue el grupo; es decir, se paga el capital asegurado y, en consecuencia, finaliza el contrato, ya no hay reserva.

Se invita al lector a realizar los cálculos numéricos para un grupo de edades (30:32:35;37;41;44) a fin de afianzar los conceptos desarrollados.

Conclusiones

A partir de esta presentación resulta conveniente resaltar que para poder realizar los cálculos inherentes a coberturas donde intervienen varias vidas, es indispensable convertir los grupos con los que uno se enfrenta en grupos de supervivencia conjunta que son los que permiten su resolución numérica.

Los pasos a seguir son los siguientes:

- ✓ Definir la cobertura que se va a ofrecer: de muerte o de vida.
- ✓ En el caso de coberturas de muerte, llevarlo a términos de subsistencia del grupo.
- ✓ En el caso de coberturas de vida, definir la condición de pago; es decir, cuántos componentes del grupo deben encontrarse con vida para que el pago tenga lugar.
- ✓ Aplicar los desarrollos correspondientes para convertir las expresiones obtenidas en expresiones que refieran a grupos de supervivencia conjunta, prestando especial atención en la enumeración de todas las combinaciones posibles para la conformación de cada uno de los grupos.
- ✓ Resolver las coberturas correspondientes a cada uno de los grupos de supervivencia conjunta mediante la aplicación de alguna de las herramientas válidas: cálculo mediante el uso de planilla de Excel, empleo de una tabla de moralidad que permita ser ajustada por alguna de las leyes de envejecimiento uniforme desarrolladas en el presente.

ANEXOS

TABLAS DE MORTALIDAD

1. Tabla mortalidad individual: [16] [17]

x	l(x)	d(x)	v^t	Dm(x)	Nm(x)
0	10.000.000	41.800	1	10.000.000,00	237.830.373,78
1	9.958.200	10.655	0,9615385	9.575.192,31	227.830.373,78
2	9.947.545	9.848	0,9245562	9.197.064,28	218.255.181,48
3	9.937.697	9.739	0,8889964	8.834.576,14	209.058.117,20
4	9.927.958	9.432	0,8548042	8.486.459,86	200.223.541,05
5	9.918.526	8.927	0,8219271	8.152.305,51	191.737.081,19
6	9.909.599	8.423	0,7903145	7.831.700,41	183.584.775,69
7	9.901.176	7.921	0,7599178	7.524.080,26	175.753.075,27
8	9.893.255	7.519	0,7306902	7.228.904,80	168.228.995,02
9	9.885.737	7.315	0,7025867	6.945.587,34	161.000.090,21
10	9.878.421	7.211	0,6755642	6.673.507,31	154.054.502,87
11	9.871.210	7.601	0,6495809	6.412.149,67	147.380.995,56
12	9.863.609	8.384	0,624597	6.160.781,07	140.968.845,89
13	9.855.225	9.757	0,6005741	5.918.792,70	134.808.064,82
14	9.845.468	11.322	0,5774751	5.685.512,59	128.889.272,13
15	9.834.146	13.079	0,5552645	5.460.552,16	123.203.759,54
16	9.821.067	14.830	0,5339082	5.243.547,72	117.743.207,38
17	9.806.237	16.376	0,5133732	5.034.259,58	112.499.659,66
18	9.789.860	17.426	0,4936281	4.832.550,35	107.465.400,08
19	9.772.434	18.177	0,4746424	4.638.411,93	102.632.849,73
20	9.754.258	18.533	0,4563869	4.451.715,85	97.994.437,79
21	9.735.725	18.595	0,4388336	4.272.363,07	93.542.721,94
22	9.717.129	18.365	0,4219554	4.100.195,06	89.270.358,87
23	9.698.764	18.040	0,4057263	3.935.043,93	85.170.163,81
24	9.680.724	17.619	0,3901215	3.776.658,41	81.235.119,88
25	9.663.105	17.104	0,3751168	3.624.793,17	77.458.461,47
26	9.646.002	16.688	0,3606892	3.479.208,93	73.833.668,31
27	9.629.314	16.466	0,3468166	3.339.605,67	70.354.459,38
28	9.612.848	16.342	0,3334775	3.205.668,21	67.014.853,71
29	9.596.506	16.410	0,3206514	3.077.133,25	63.809.185,50
30	9.580.096	16.574	0,3083187	2.953.722,45	60.732.052,25
31	9.563.522	17.023	0,2964603	2.835.204,34	57.778.329,80
32	9.546.499	17.470	0,2850579	2.721.305,46	54.943.125,46
33	9.529.029	18.200	0,2740942	2.611.851,41	52.221.820,01

[16] $Dm(x) = l(x+t) \cdot v^t$ m indica que se trabaja con la tabla de mortalidad correspondiente al sexo masculino
[17] $Nm(x) = \sum_{t=0}^{w-x-1} D(x+t)$

X	l(x)	d(x)	v^t	Dm(x)	Nm(x)
34	9.510.829	19.022	0,2635521	2.506.598,82	49.609.968,60
35	9.491.807	20.028	0,2534155	2.405.370,79	47.103.369,77
36	9.471.779	21.217	0,2436687	2.307.976,40	44.697.998,98
37	9.450.563	22.681	0,2342968	2.214.237,05	42.390.022,58
38	9.427.881	24.324	0,2252854	2.123.964,31	40.175.785,52
39	9.403.557	26.236	0,2166206	2.037.004,31	38.051.821,21
40	9.377.322	28.320	0,208289	1.953.193,34	36.014.816,90
41	9.349.002	30.758	0,2002779	1.872.398,74	34.061.623,56
42	9.318.244	33.173	0,1925749	1.794.460,15	32.189.224,82
43	9.285.071	35.933	0,1851682	1.719.299,87	30.394.764,67
44	9.249.138	38.754	0,1780463	1.646.775,18	28.675.464,80
45	9.210.384	41.907	0,1711984	1.576.803,06	27.028.689,62
46	9.168.476	45.109	0,1646139	1.509.258,28	25.451.886,56
47	9.123.368	48.536	0,1582826	1.444.069,93	23.942.628,28
48	9.074.831	52.090	0,1521948	1.381.141,81	22.498.558,35
49	9.022.742	56.031	0,1463411	1.320.398,13	21.117.416,54
50	8.966.710	60.167	0,1407126	1.261.729,28	19.797.018,41
51	8.906.544	65.018	0,1353006	1.205.060,65	18.535.289,13
52	8.841.526	70.379	0,1300967	1.150.253,57	17.330.228,48
53	8.771.148	76.397	0,125093	1.097.209,18	16.179.974,91
54	8.694.751	83.122	0,1202817	1.045.819,70	15.082.765,72
55	8.611.629	90.164	0,1156555	995.982,37	14.036.946,02
56	8.521.465	97.656	0,1112072	947.648,50	13.040.963,65
57	8.423.809	105.213	0,10693	900.758,12	12.093.315,15
58	8.318.596	113.050	0,1028173	855.295,82	11.192.557,03
59	8.205.546	121.196	0,0988628	811.223,41	10.337.261,21
60	8.084.350	129.996	0,0950604	768.501,58	9.526.037,80
61	7.954.354	139.519	0,0914042	727.061,61	8.757.536,22
62	7.814.835	149.967	0,0878887	686.835,53	8.030.474,61
63	7.664.868	161.422	0,0845084	647.745,34	7.343.639,08
64	7.503.446	173.630	0,081258	609.715,21	6.695.893,74
65	7.329.816	186.324	0,0781327	572.698,47	6.086.178,53
66	7.143.492	198.946	0,0751276	536.673,53	5.513.480,06
67	6.944.546	211.392	0,0722381	501.660,74	4.976.806,53

x	l(x)	d(x)	v^t	Dm(x)	Nm(x)
68	6.733.154	223.473	0,0694597	467.682,87	4.475.145,79
69	6.509.680	235.455	0,0667882	434.769,69	4.007.462,92
70	6.274.225	247.895	0,0642194	402.926,99	3.572.693,23
71	6.026.331	260.940	0,0617494	372.122,45	3.169.766,23
72	5.765.391	274.721	0,0593744	342.316,87	2.797.643,78
73	5.490.670	289.029	0,0570908	313.466,80	2.455.326,91
74	5.201.641	302.683	0,054895	285.544,14	2.141.860,11
75	4.898.957	314.464	0,0527837	258.584,93	1.856.315,97
76	4.584.493	323.344	0,0507535	232.679,20	1.597.731,04
77	4.261.149	328.620	0,0488015	207.950,32	1.365.051,84
78	3.932.529	329.939	0,0469245	184.531,92	1.157.101,52
79	3.602.590	328.016	0,0451197	162.547,78	972.569,60
80	3.274.574	323.659	0,0433843	142.065,19	810.021,83
81	2.950.915	317.164	0,0417157	123.099,49	667.956,63
82	2.633.751	308.807	0,0401112	105.643,04	544.857,14
83	2.324.944	298.197	0,0385685	89.669,61	439.214,11
84	2.026.746	284.251	0,0370851	75.162,10	349.544,50
85	1.742.495	266.515	0,0356588	62.135,21	274.382,40
86	1.475.981	245.146	0,0342873	50.607,33	212.247,20
87	1.230.835	220.996	0,0329685	40.578,81	161.639,86
88	1.009.839	195.171	0,0317005	32.012,39	121.061,06
89	814.667	168.872	0,0304813	24.832,07	89.048,67
90	645.795	143.218	0,0293089	18.927,53	64.216,60
91	502.577	119.101	0,0281816	14.163,43	45.289,07
92	383.476	97.192	0,0270977	10.391,33	31.125,63
93	286.284	77.901	0,0260555	7.459,28	20.734,30
94	208.383	61.661	0,0250534	5.220,70	13.275,03
95	146.723	48.413	0,0240898	3.534,52	8.054,32
96	98.310	37.805	0,0231632	2.277,18	4.519,81
97	60.505	29.054	0,0222724	1.347,59	2.242,62
98	31.450	20.694	0,0214157	673,53	895,04
99	10.757	10.757	0,020592	221,5	221,5
100	0	0	0,0198	0	0,00

2.Tabla de mortalidad para dos cabezas de edades x e y - diferencia de edad entre dichas personas: 2 años[18].

x	y	l(x)	l(y)	l(x:y)	D(x:y)	N(x:y)
0	2	10.000.000	9.947.545	99.475.447	95.649.469	2.178.382.462
1	3	9.958.200	9.937.697	98.961.571	91.495.535	2.082.732.993
2	4	9.947.545	9.927.958	98.758.803	87.796.217	1.991.237.458
3	5	9.937.697	9.918.526	98.567.304	84.255.745	1.903.441.241
4	6	9.927.958	9.909.599	98.382.085	80.862.902	1.819.185.497
5	7	9.918.526	9.901.176	98.205.076	77.612.898	1.738.322.595
6	8	9.909.599	9.893.255	98.038.198	74.500.973	1.660.709.696
7	9	9.901.176	9.885.737	97.880.420	71.520.264	1.586.208.723
8	10	9.893.255	9.878.421	97.729.742	68.663.621	1.514.688.459
9	11	9.885.737	9.871.210	97.584.179	65.924.375	1.446.024.838
10	12	9.878.421	9.863.609	97.436.883	63.293.141	1.380.100.463
11	13	9.871.210	9.855.225	97.282.993	60.762.670	1.316.807.322
12	14	9.863.609	9.845.468	97.111.849	58.322.860	1.256.044.652
13	15	9.855.225	9.834.146	96.917.720	55.967.569	1.197.721.792
14	16	9.845.468	9.821.067	96.692.999	53.690.190	1.141.754.223
15	17	9.834.146	9.806.237	96.435.963	51.487.949	1.088.064.033
16	18	9.821.067	9.789.860	96.146.870	49.359.230	1.036.576.084
17	19	9.806.237	9.772.434	95.830.805	47.304.780	987.216.854
18	20	9.789.860	9.754.258	95.492.820	45.324.943	939.912.074
19	21	9.772.434	9.735.725	95.141.729	43.421.443	894.587.130
20	22	9.754.258	9.717.129	94.783.383	41.594.133	851.165.687
21	23	9.735.725	9.698.764	94.424.494	39.842.924	809.571.554
22	24	9.717.129	9.680.724	94.068.849	38.166.209	769.728.630
23	25	9.698.764	9.663.105	93.720.177	36.562.254	731.562.421
24	26	9.680.724	9.646.002	93.380.282	35.028.513	695.000.167
25	27	9.663.105	9.629.314	93.049.076	33.561.800	659.971.654
26	28	9.646.002	9.612.848	92.725.547	32.158.756	626.409.854
27	29	9.629.314	9.596.506	92.407.771	30.815.910	594.251.098
28	30	9.612.848	9.580.096	92.092.006	29.529.432	563.435.189
29	31	9.596.506	9.563.522	91.776.402	28.296.378	533.905.757
30	32	9.580.096	9.546.499	91.456.381	27.113.182	505.609.379
31	33	9.563.522	9.529.029	91.131.086	25.977.640	478.496.196
32	34	9.546.499	9.510.829	90.795.122	24.886.414	452.518.557
33	35	9.529.029	9.491.807	90.447.709	23.837.683	427.632.143

[18] El valor de k utilizado para la confección de los grupos de supervivencia conjunta es de 10^{-6}, es decir los valores de l(x:y) y, en consecuencia, los correpondientes a, D(x:y) y N(x:y) se encuentran expresados incluyéndose el factor 10^{-6}

x	y	I(x)	I(y)	I(x:y)	D(x:y)	N(x:y)
34	36	9.510.829	9.471.779	90.084.474	22.828.799	403.794.460
35	37	9.491.807	9.450.563	89.702.919	21.857.796	380.965.661
36	38	9.471.779	9.427.881	89.298.813	20.922.430	359.107.865
37	39	9.450.563	9.403.557	88.868.909	20.020.870	338.185.435
38	40	9.427.881	9.377.322	88.408.275	19.151.054	318.164.564
39	41	9.403.557	9.349.002	87.913.877	18.311.497	299.013.510
40	42	9.377.322	9.318.244	87.380.168	17.500.319	280.702.013
41	43	9.349.002	9.285.071	86.806.146	16.716.687	263.201.694
42	44	9.318.244	9.249.138	86.185.719	15.958.855	246.485.006
43	45	9.285.071	9.210.384	85.519.065	15.226.357	230.526.152
44	46	9.249.138	9.168.476	84.800.500	14.517.711	215.299.794
45	47	9.210.384	9.123.368	84.029.716	13.832.456	200.782.083
46	48	9.168.476	9.074.831	83.202.377	13.169.485	186.949.628
47	49	9.123.368	9.022.742	82.317.789	12.528.337	173.780.143
48	50	9.074.831	8.966.710	81.371.385	11.907.980	161.251.806
49	51	9.022.742	8.906.544	80.361.445	11.307.869	149.343.827
50	52	8.966.710	8.841.526	79.279.405	10.726.550	138.035.958
51	53	8.906.544	8.771.148	78.120.610	10.163.235	127.309.407
52	54	8.841.526	8.694.751	76.874.867	9.616.508	117.146.172
53	55	8.771.148	8.611.629	75.533.869	9.085.345	107.529.664
54	56	8.694.751	8.521.465	74.092.017	8.569.150	98.444.319
55	57	8.611.629	8.423.809	72.542.721	8.067.275	89.875.169
56	58	8.521.465	8.318.596	70.886.626	7.579.909	81.807.894
57	59	8.423.809	8.205.546	69.121.956	7.106.935	74.227.986
58	60	8.318.596	8.084.350	67.250.443	6.648.568	67.121.051
59	61	8.205.546	7.954.354	65.269.818	6.204.575	60.472.483
60	62	8.084.350	7.814.835	63.177.860	5.774.724	54.267.908
61	63	7.954.354	7.664.868	60.969.072	5.358.492	48.493.184
62	64	7.814.835	7.503.446	58.638.187	4.955.416	43.134.692
63	65	7.664.868	7.329.816	56.182.071	4.565.244	38.179.276
64	66	7.503.446	7.143.492	53.600.806	4.187.977	33.614.031
65	67	7.329.816	6.944.546	50.902.243	3.824.164	29.426.055
66	68	7.143.492	6.733.154	48.098.231	3.474.524	25.601.890
67	69	6.944.546	6.509.680	45.206.775	3.140.049	22.127.366

x	y	I(x)	I(y)	I(x:y)	D(x:y)	N(x:y)
68	70	6.733.154	6.274.225	42.245.325	2.821.488	18.987.317
69	71	6.509.680	6.026.331	39.229.487	2.519.294	16.165.829
70	72	6.274.225	5.765.391	36.173.360	2.233.684	13.646.534
71	73	6.026.331	5.490.670	33.088.592	1.964.617	11.412.850
72	74	5.765.391	5.201.641	29.989.491	1.712.124	9.448.234
73	75	5.490.670	4.898.957	26.898.557	1.476.597	7.736.109
74	76	5.201.641	4.584.493	23.846.888	1.258.726	6.259.512
75	77	4.898.957	4.261.149	20.875.187	1.059.489	5.000.786
76	78	4.584.493	3.932.529	18.028.654	879.825	3.941.297
77	79	4.261.149	3.602.590	15.351.173	720.346	3.061.472
78	80	3.932.529	3.274.574	12.877.359	581.023	2.341.126
79	81	3.602.590	2.950.915	10.630.938	461.216	1.760.104
80	82	3.274.574	2.633.751	8.624.413	359.773	1.298.888
81	83	2.950.915	2.324.944	6.860.712	275.192	939.114
82	84	2.633.751	2.026.746	5.337.945	205.877	663.923
83	85	2.324.944	1.742.495	4.051.203	150.239	458.046
84	86	2.026.746	1.475.981	2.991.438	106.671	307.807
85	87	1.742.495	1.230.835	2.144.724	73.537	201.136
86	88	1.475.981	1.009.839	1.490.502	49.140	127.599
87	89	1.230.835	814.667	1.002.721	31.787	78.459
88	90	1.009.839	645.795	652.148	19.878	46.673
89	91	814.667	502.577	409.433	12.000	26.794
90	92	645.795	383.476	247.647	6.979	14.794
91	93	502.577	286.284	143.880	3.899	7.815
92	94	383.476	208.383	79.910	2.082	3.916
93	95	286.284	146.723	42.004	1.052	1.834
94	96	208.383	98.310	20.486	494	782
95	97	146.723	60.505	8.877	206	288
96	98	98.310	31.450	3.092	69	83
97	99	60.505	10.757	651	14	14
98	100	31.450	0	0	0	0
99	101	10.757	0	0	0	0
100	102	0	0	0	0	0

3.Tabla de mortalidad para dos cabezas de edades x e y - diferencia de edad entre dichas personas: 4 años[19].

x	y	l(x)	l(y)	l(x:y)	D(x:y)	N(x:y)
0	4	10.000.000	9.927.958	99.279.577	91.789.550	2.081.925.546
1	5	9.958.200	9.918.526	98.770.667	87.806.763	1.990.135.996
2	6	9.947.545	9.909.599	98.576.184	84.263.335	1.902.329.233
3	7	9.937.697	9.901.176	98.394.887	80.873.425	1.818.065.897
4	8	9.927.958	9.893.255	98.219.821	77.624.551	1.737.192.473
5	9	9.918.526	9.885.737	98.051.936	74.511.413	1.659.567.921
6	10	9.909.599	9.878.421	97.891.196	71.528.138	1.585.056.509
7	11	9.901.176	9.871.210	97.736.589	68.668.431	1.513.528.370
8	12	9.893.255	9.863.609	97.583.203	65.923.715	1.444.859.939
9	13	9.885.737	9.855.225	97.426.157	63.286.174	1.378.936.224
10	14	9.878.421	9.845.468	97.257.681	60.746.860	1.315.650.051
11	15	9.871.210	9.834.146	97.074.918	58.300.680	1.254.903.190
12	16	9.863.609	9.821.067	96.871.160	55.940.681	1.196.602.510
13	17	9.855.225	9.806.237	96.642.669	53.662.243	1.140.661.829
14	18	9.845.468	9.789.860	96.385.759	51.461.145	1.086.999.585
15	19	9.834.146	9.772.434	96.103.546	49.336.989	1.035.538.441
16	20	9.821.067	9.754.258	95.797.213	47.288.198	986.201.451
17	21	9.806.237	9.735.725	95.470.820	45.314.501	938.913.253
18	22	9.789.860	9.717.129	95.129.339	43.415.788	893.598.752
19	23	9.772.434	9.698.764	94.780.534	41.592.883	850.182.964
20	24	9.754.258	9.680.724	94.428.278	39.844.521	808.590.080
21	25	9.735.725	9.663.105	94.077.332	38.169.651	768.745.560
22	26	9.717.129	9.646.002	93.731.445	36.566.650	730.575.909
23	27	9.698.764	9.629.314	93.392.444	35.033.075	694.009.259
24	28	9.680.724	9.612.848	93.059.330	33.565.498	658.976.185
25	29	9.663.105	9.596.506	92.732.049	32.161.011	625.410.686
26	30	9.646.002	9.580.096	92.409.622	30.816.527	593.249.675
27	31	9.629.314	9.563.522	92.090.161	29.528.840	562.433.148
28	32	9.612.848	9.546.499	91.769.047	28.294.110	532.904.308
29	33	9.596.506	9.529.029	91.445.388	27.109.923	504.610.197
30	34	9.580.096	9.510.829	91.114.654	25.972.956	477.500.274
31	35	9.563.522	9.491.807	90.775.112	24.880.929	451.527.319
32	36	9.546.499	9.471.779	90.422.337	23.830.996	426.646.389

[19] El valor de k utilizado para la confección de los grupos de supervivencia conjunta es de 10^{-6}.
En la práctica estas tablas son reemplazadas por planillas de Excel, las tablas se construyen sólo para individuos de la misma edad que, en consecuencia, serán utilizadas cuando pueda aplicarse la ley de Makeham.

x	y	I(x)	I(y)	I(x:y)	D(x:y)	N(x:y)
33	37	9.529.029	9.450.563	90.054.689	22.821.251	402.815.393
34	38	9.510.829	9.427.881	89.666.966	21.849.035	379.994.142
35	39	9.491.807	9.403.557	89.256.754	20.912.576	358.145.107
36	40	9.471.779	9.377.322	88.819.922	20.009.834	337.232.531
37	41	9.450.563	9.349.002	88.353.330	19.139.152	317.222.697
38	42	9.427.881	9.318.244	87.851.297	18.298.463	298.083.545
39	43	9.403.557	9.285.071	87.312.697	17.486.806	279.785.082
40	44	9.377.322	9.249.138	86.732.137	16.702.435	262.298.276
41	45	9.349.002	9.210.384	86.107.896	15.944.444	245.595.841
42	46	9.318.244	9.168.476	85.434.099	15.211.229	229.651.397
43	47	9.285.071	9.123.368	84.711.114	14.502.408	214.440.167
44	48	9.249.138	9.074.831	83.934.363	13.816.759	199.937.759
45	49	9.210.384	9.022.742	83.102.913	13.153.741	186.121.000
46	50	9.168.476	8.966.710	82.211.074	12.512.095	172.967.258
47	51	9.123.368	8.906.544	81.257.673	11.891.339	160.455.163
48	52	9.074.831	8.841.526	80.235.357	11.290.127	148.563.824
49	53	9.022.742	8.771.148	79.139.799	10.707.662	137.273.697
50	54	8.966.710	8.694.751	77.963.314	10.142.772	126.566.036
51	55	8.906.544	8.611.629	76.699.852	9.594.615	116.423.264
52	56	8.841.526	8.521.465	75.342.758	9.062.357	106.828.649
53	57	8.771.148	8.423.809	73.886.474	8.545.378	97.766.292
54	58	8.694.751	8.318.596	72.328.119	8.043.409	89.220.914
55	59	8.611.629	8.205.546	70.663.120	7.556.009	81.177.505
56	60	8.521.465	8.084.350	68.890.510	7.083.138	73.621.496
57	61	8.423.809	7.954.354	67.005.960	6.624.398	66.538.357
58	62	8.318.596	7.814.835	65.008.451	6.179.729	59.913.959
59	63	8.205.546	7.664.868	62.894.427	5.748.817	53.734.230
60	64	8.084.350	7.503.446	60.660.484	5.331.370	47.985.413
61	65	7.954.354	7.329.816	58.303.951	4.927.171	42.654.043
62	66	7.814.835	7.143.492	55.825.209	4.536.246	37.726.872
63	67	7.664.868	6.944.546	53.229.026	4.158.929	33.190.626
64	68	7.503.446	6.733.154	50.521.855	3.795.586	29.031.697
65	69	7.329.816	6.509.680	47.714.760	3.446.823	25.236.111

x	y	I(x)	I(y)	I(x:y)	D(x:y)	N(x:y)
66	70	7.143.492	6.274.225	44.819.879	3.113.176	21.789.287
67	71	6.944.546	6.026.331	41.850.130	2.795.094	18.676.112
68	72	6.733.154	5.765.391	38.819.262	2.492.950	15.881.018
69	73	6.509.680	5.490.670	35.742.506	2.207.079	13.388.068
70	74	6.274.225	5.201.641	32.636.267	1.937.760	11.180.989
71	75	6.026.331	4.898.957	29.522.737	1.685.477	9.243.229
72	76	5.765.391	4.584.493	26.431.395	1.450.952	7.557.752
73	77	5.490.670	4.261.149	23.396.562	1.234.956	6.106.800
74	78	5.201.641	3.932.529	20.455.605	1.038.194	4.871.844
75	79	4.898.957	3.602.590	17.648.935	861.294	3.833.650
76	80	4.584.493	3.274.574	15.012.263	704.443	2.972.356
77	81	4.261.149	2.950.915	12.574.290	567.348	2.267.913
78	82	3.932.529	2.633.751	10.357.302	449.345	1.700.565
79	83	3.602.590	2.324.944	8.375.819	349.403	1.251.220
80	84	3.274.574	2.026.746	6.636.731	266.208	901.817
81	85	2.950.915	1.742.495	5.141.956	198.318	635.609
82	86	2.633.751	1.475.981	3.887.365	144.163	437.292
83	87	2.324.944	1.230.835	2.861.622	102.042	293.129
84	88	2.026.746	1.009.839	2.046.686	70.175	191.087
85	89	1.742.495	814.667	1.419.553	46.801	120.911
86	90	1.475.981	645.795	953.180	30.216	74.111
87	91	1.230.835	502.577	618.589	18.855	43.895
88	92	1.009.839	383.476	387.249	11.350	25.039
89	93	814.667	286.284	233.226	6.573	13.689
90	94	645.795	208.383	134.573	3.647	7.117
91	95	502.577	146.723	73.739	1.921	3.470
92	96	383.476	98.310	37.700	945	1.549
93	97	286.284	60.505	17.322	417	604
94	98	208.383	31.450	6.554	152	187
95	99	146.723	10.757	1.578	35	35
96	100	98.310	0	0	0	0
97	101	60.505	0	0	0	0
98	102	31.450	0	0	0	0
99	103	10.757	0	0	0	0
100	104	0	0	0	0	0

4. Tabla de mortalidad para tres personas de edades x , y , z - diferencia de edad entre dichas personas: 2 años.[20]

x	y	z	l(x)	l(y)	l(z)	l(x:y:z)	D(x:y:z)	N(x:y:z)
0	2	4	10.000.000	9.947.545	9.927.958	9.875.880	9.130.807	200.234.882
1	3	5	9.958.200	9.937.697	9.918.526	9.815.529	8.725.970	191.104.076
2	4	6	9.947.545	9.927.958	9.909.599	9.786.602	8.365.628	182.378.106
3	5	7	9.937.697	9.918.526	9.901.176	9.759.323	8.021.452	174.012.478
4	6	8	9.927.958	9.909.599	9.893.255	9.733.191	7.692.282	165.991.026
5	7	9	9.918.526	9.901.176	9.885.737	9.708.295	7.377.506	158.298.744
6	8	10	9.909.599	9.893.255	9.878.421	9.684.626	7.076.461	150.921.237
7	9	11	9.901.176	9.885.737	9.871.210	9.661.982	6.788.380	143.844.776
8	10	12	9.893.255	9.878.421	9.863.609	9.639.680	6.512.222	137.056.396
9	11	13	9.885.737	9.871.210	9.855.225	9.617.140	6.247.111	130.544.174
10	12	14	9.878.421	9.863.609	9.845.468	9.593.117	5.991.833	124.297.063
11	13	15	9.871.210	9.855.225	9.834.146	9.566.952	5.745.663	118.305.230
12	14	16	9.863.609	9.845.468	9.821.067	9.537.419	5.507.622	112.559.567
13	15	17	9.855.225	9.834.146	9.806.237	9.503.981	5.277.223	107.051.945
14	16	18	9.845.468	9.821.067	9.789.860	9.466.110	5.054.033	101.774.721
15	17	19	9.834.146	9.806.237	9.772.434	9.424.141	4.838.102	96.720.688
16	18	20	9.821.067	9.789.860	9.754.258	9.378.413	4.629.449	91.882.586
17	19	21	9.806.237	9.772.434	9.735.725	9.329.823	4.428.330	87.253.138
18	20	22	9.789.860	9.754.258	9.717.129	9.279.161	4.234.888	82.824.808
19	21	23	9.772.434	9.735.725	9.698.764	9.227.572	4.049.369	78.589.920
20	22	24	9.754.258	9.717.129	9.680.724	9.175.718	3.871.744	74.540.551
21	23	25	9.735.725	9.698.764	9.663.105	9.124.338	3.701.984	70.668.808
22	24	26	9.717.129	9.680.724	9.646.002	9.073.883	3.539.917	66.966.823
23	25	27	9.698.764	9.663.105	9.629.314	9.024.610	3.385.283	63.426.907
24	26	28	9.680.724	9.646.002	9.612.848	8.976.504	3.237.729	60.041.624
25	27	29	9.663.105	9.629.314	9.596.506	8.929.460	3.096.885	56.803.895
26	28	30	9.646.002	9.612.848	9.580.096	8.883.196	2.962.346	53.707.011
27	29	31	9.629.314	9.596.506	9.563.522	8.837.438	2.833.737	50.744.665
28	30	32	9.612.848	9.580.096	9.546.499	8.791.563	2.710.603	47.910.928
29	31	33	9.596.506	9.563.522	9.529.029	8.745.400	2.592.664	45.200.325
30	32	34	9.580.096	9.546.499	9.510.829	8.698.260	2.479.508	42.607.661
31	33	35	9.563.522	9.529.029	9.491.807	8.649.987	2.370.911	40.128.153
32	34	36	9.546.499	9.510.829	9.471.779	8.599.914	2.266.525	37.757.242
33	35	37	9.529.029	9.491.807	9.450.563	8.547.817	2.166.149	35.490.717
34	36	38	9.510.829	9.471.779	9.427.881	8.493.057	2.069.492	33.324.568

[20] El valor de k utilizado para el cálculo de los grupos de sobrevivientes conjuntos es 10^{-12}
Son válidos los comentarios efectuados en las tablas anteriores.

x	y	z	I(x)	I(y)	I(z)	I(x:y:z)	D(x:y:z)	N(x:y:z)
35	37	39	9.491.807	9.450.563	9.403.557	8.435.266	1.976.356	31.255.075
36	38	40	9.471.779	9.427.881	9.377.322	8.373.837	1.886.503	29.278.719
37	39	41	9.450.563	9.403.557	9.349.002	8.308.356	1.799.761	27.392.216
38	40	42	9.427.881	9.377.322	9.318.244	8.238.099	1.715.906	25.592.455
39	41	43	9.403.557	9.349.002	9.285.071	8.162.866	1.634.842	23.876.549
40	42	44	9.377.322	9.318.244	9.249.138	8.081.912	1.556.374	22.241.707
41	43	45	9.349.002	9.285.071	9.210.384	7.995.179	1.480.453	20.685.334
42	44	46	9.318.244	9.249.138	9.168.476	7.901.917	1.406.908	19.204.881
43	45	47	9.285.071	9.210.384	9.123.368	7.802.219	1.335.727	17.797.973
44	46	48	9.249.138	9.168.476	9.074.831	7.695.502	1.266.786	16.462.246
45	47	49	9.210.384	9.123.368	9.022.742	7.581.784	1.200.064	15.195.459
46	48	50	9.168.476	9.074.831	8.966.710	7.460.516	1.135.452	13.995.395
47	49	51	9.123.368	9.022.742	8.906.544	7.331.670	1.072.925	12.859.944
48	50	52	9.074.831	8.966.710	8.841.526	7.194.472	1.012.353	11.787.019
49	51	53	9.022.742	8.906.544	8.771.148	7.048.621	953.683	10.774.666
50	52	54	8.966.710	8.841.526	8.694.751	6.893.147	896.776	9.820.983
51	53	55	8.906.544	8.771.148	8.611.629	6.727.457	841.558	8.924.207
52	54	56	8.841.526	8.694.751	8.521.465	6.550.865	787.949	8.082.650
53	55	57	8.771.148	8.611.629	8.423.809	6.362.829	735.896	7.294.700
54	56	58	8.694.751	8.521.465	8.318.596	6.163.416	685.416	6.558.804
55	57	59	8.611.629	8.423.809	8.205.546	5.952.526	636.504	5.873.388
56	58	60	8.521.465	8.318.596	8.084.350	5.730.723	589.218	5.236.884
57	59	61	8.423.809	8.205.546	7.954.354	5.498.205	543.568	4.647.666
58	60	62	8.318.596	8.084.350	7.814.835	5.255.511	499.591	4.104.098
59	61	63	8.205.546	7.954.354	7.664.868	5.002.845	457.281	3.604.507
60	62	64	8.084.350	7.814.835	7.503.446	4.740.516	416.638	3.147.226
61	63	65	7.954.354	7.664.868	7.329.816	4.468.921	377.661	2.730.588
62	64	66	7.814.835	7.503.446	7.143.492	4.188.814	340.375	2.352.927
63	65	67	7.664.868	7.329.816	6.944.546	3.901.590	304.842	2.012.552
64	66	68	7.503.446	7.143.492	6.733.154	3.609.025	271.137	1.707.710
65	67	69	7.329.816	6.944.546	6.509.680	3.313.573	239.366	1.436.573
66	68	70	7.143.492	6.733.154	6.274.225	3.017.791	209.615	1.197.207
67	69	71	6.944.546	6.509.680	6.026.331	2.724.310	181.952	987.592
68	70	72	6.733.154	6.274.225	5.765.391	2.435.608	156.413	805.640
69	71	73	6.509.680	6.026.331	5.490.670	2.153.962	133.006	649.227

x	y	z	I(x)	I(y)	I(z)	I(x:y:z)	D(x:y:z)	N(x:y:z)
70	72	74	6.274.225	5.765.391	5.201.641	1.881.608	111.719	516.221
71	73	75	6.026.331	5.490.670	4.898.957	1.620.996	92.544	404.502
72	74	76	5.765.391	5.201.641	4.584.493	1.374.866	75.473	311.958
73	75	77	5.490.670	4.898.957	4.261.149	1.146.188	60.500	236.484
74	76	78	5.201.641	4.584.493	3.932.529	937.786	47.596	175.984
75	77	79	4.898.957	4.261.149	3.602.590	752.047	36.701	128.388
76	78	80	4.584.493	3.932.529	3.274.574	590.362	27.702	91.687
77	79	81	4.261.149	3.602.590	2.950.915	453.000	20.439	63.985
78	80	82	3.932.529	3.274.574	2.633.751	339.158	14.714	43.546
79	81	83	3.602.590	2.950.915	2.324.944	247.163	10.311	28.832
80	82	84	3.274.574	2.633.751	2.026.746	174.795	7.011	18.521
81	83	85	2.950.915	2.324.944	1.742.495	119.548	4.611	11.510
82	84	86	2.633.751	2.026.746	1.475.981	78.787	2.922	6.899
83	85	87	2.324.944	1.742.495	1.230.835	49.864	1.778	3.977
84	86	88	2.026.746	1.475.981	1.009.839	30.209	1.036	2.199
85	87	89	1.742.495	1.230.835	814.667	17.472	576	1.163
86	88	90	1.475.981	1.009.839	645.795	9.626	305	587
87	89	91	1.230.835	814.667	502.577	5.039	154	282
88	90	92	1.009.839	645.795	383.476	2.501	73	129
89	91	93	814.667	502.577	286.284	1.172	33	55
90	92	94	645.795	383.476	208.383	516	14	22
91	93	95	502.577	286.284	146.723	211	6	8
92	94	96	383.476	208.383	98.310	79	2	3
93	95	97	286.284	146.723	60.505	25	1	1
94	96	98	208.383	98.310	31.450	6	0	0
95	97	99	146.723	60.505	10.757	1	0	0
96	98	100	98.310	31.450	0	0	0	0
97	99	101	60.505	10.757	0	0	0	0
98	100	102	31.450	0	0	0	0	0
99	101	103	10.757	0	0	0	0	0
100	102	104	0	0	0	0	0	0

ISBN 978-950-29-1940-9