.UBA económicas
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

FUNCIÓN GENERATRIZ DE MOMENTOS

DETERMINACIÓN y APLICACIÓN

Profesores: Act. METELLI, María Alejandra
Act. CAVIEZEL, Pablo

Metelli, María Alejandra
Función generatriz de momentos: determinación y aplicación / María Alejandra Metelli/ Pablo Caviezel - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas, 2024.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-950-29-2025-2

1. Estadísticas. 2. Función Pública. I. Título.
CDD 318

EDITOR RESPONSABLE: Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas

Av. Córdoba 2122 - 1120AAQ - Ciudad Autónoma de Buenos Aires - República Argentina

Todos los derechos reservados. Prohibida su reproducción y almacenamiento. Ninguna parte de esta publicación puede reproducirse o almacenarse por ningún medio sin la previa autorización del editor.

Primera edición: febrero 2024

Libro Digital, PDF

ISBN: 978-950-29-2025-2

ISBN 978-950-29-2025-2
9 789502 920252

Índice

1. Introducción

La finalidad perseguida con este trabajo es mostrar a los alumnos cómo se puede obtener analíticamente la denominada función generatriz de momentos, en qué casos resulta de suma utilidad, en qué casos resulta imposible su obtención, indicando las razones en cada una de las situaciones mencionadas.

Para lograr el objetivo mencionado, se procede a realizar el análisis bajo el siguiente esquema:

Se presenta el concepto de variable aleatoria y se muestra cómo pueden determinarse distintos momentos para la misma que van a depender del análisis que quiera realizarse.

Luego, se define el concepto de la función generatriz de momentos mostrando la propiedad que da lugar a su nombre: generar momentos. Para ello, se muestra el desarrollo en serie que permite llegar a esa conclusión.

Ya en este punto en el cual se ha demostrado que a partir de la función mencionada se pueden obtener los sucesivos momentos absolutos de las variables aleatorias a partir de la obtención de las derivadas sucesivas de la mencionada función valuadas en el valor cero de la variable matemática real no negativa «t», se muestran las funciones de probabilidad y de densidad correspondientes a aquellas variables aleatorias para las cuales ha de ser calculada la función generatriz de momentos correspondiente.

Una vez presentadas las funciones previamente mencionadas, se procede en cada caso a la obtención de la función generatriz de momentos correspondiente. Obtenidas las correspondientes expresiones, se muestra cómo se obtienen las dos medidas tradicionales de las variables aleatorias: esperanza matemática y varianza.

Concluye el trabajo con cuadros resumen que muestran los resultados que se fueron obteniendo y con aplicaciones del tema al área actuarial.

2. Variables aleatorias

Una variable es aleatoria cuando puede adoptar distintos valores dentro de un intervalo determinado y estos valores no son valores ciertos, sino que cada uno de ellos tiene asociado un valor de frecuencia o probabilidad.

Las variables aleatorias pueden ser discretas o continuas de acuerdo con la definición del conjunto de valores que podría eventualmente tomar. Una variable aleatoria es discreta cuando la misma adopta solo valores puntuales dentro del intervalo considerado mientras que es continua cuando puede adoptar un infinito de valores entre dos valores puntuales posibles.

2.1. Estados de una variable aleatoria

Para una presentación didáctica del tema, se definirán tres «estados» en los cuales se puede encontrar una variable aleatoria. Además, también en pos de simplificar notación, se definirá a μ y a σ como el valor esperado y el desvío estándar de una variable aleatoria respectivamente, sin necesidad de que deba verificarse ningún tipo de distribución.

El primer estado es el estado absoluto, también llamado natural. Bajo este estado, la variable no está transformada. Su valor esperado está dado por μ mientras que su varianza está dada por σ^2 y su desvío estándar por el resultado positivo de la raíz cuadrada de su varianza; es decir, por σ.

El segundo estado surge de restar a la variable su valor esperado. Así, se dirá que la variable se encuentra en estado centrado. En rigor, se está asociando este estado a una transformación de escala de la variable original. Si se denomina con X_c a la variable en estado centrado, entonces, será su esperanza igual a cero y su varianza igual a σ^2, tal como se demuestra a continuación:

$$X_c = X - \mu$$

Se toma primero esperanza miembro a miembro resulta:

$$E(X_c) = E(X - \mu)$$

en virtud de las propiedades ya conocidas del operador esperanza resulta:

$$E(X_c) = E(X) - E(\mu)$$

se recuerda que la esperanza matemática de una constante es igual a la misma constante, con lo cual:

$$E(X_c) = E(X) - \mu = \mu - \mu = 0$$

Se aplica ahora el operador varianza se tiene:

$$Var(X_c) = Var(X - \mu)$$

al aplicar ahora las propiedades de la varianza, se llega a:

$$Var(X_c) = Var(X) + Var(\mu)$$

se recuerda que la varianza de una constante es igual cero, con lo cual:

$$Var(X_c) = Var(X) + 0 = \sigma^2$$

El tercer y último estado surge de dividir a la variable centrada por el desvío estándar de la variable aleatoria. Así, se dirá que la variable se encuentra en estado estandarizado. En rigor, se está asociando este estado a una transformación afín de la variable original. Si se denomina con X_e a la variable en estado estandarizado, entonces, será su esperanza igual a cero y su varianza igual a 1, tal como se demuestra a continuación:

$$X_e = \frac{X_c}{\sigma}$$

$$X_e = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Se toma primero esperanza miembro a miembro resulta:

$$E(X_e) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)$$

en virtud de las propiedades ya conocidas del operador esperanza resulta:

$$E(X_e) = \frac{1}{\sigma} \cdot E(X-\mu)$$

$$E(X_e) = \frac{1}{\sigma} \cdot [E(X) - E(\mu)]$$

$$E(X_e) = \frac{1}{\sigma} \cdot [E(X) - \mu]$$

$$E(X_e) = \frac{1}{\sigma} \cdot (\mu - \mu) = 0$$

Aplicando ahora el operador varianza se tiene:

$$Var(X_e) = Var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)$$

al aplicar ahora las propiedades de la varianza, se llega a:

$$Var(X_e) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot Var(X-\mu)$$

$$Var(X_e) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot [Var(X) + Var(\mu)]$$

$$Var(X_e) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot [Var(X) + 0]$$

$$Var(X_e) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^2 = 1$$

El cuadro siguiente resume lo visto en esta sección.

Variable	***Presentación***	***Esperanza***	***Varianza***	***Desvío estándar***
Absoluta	X	μ	σ^2	σ
Centrada	$X-\mu$	*0*	σ^2	σ
Estandarizada	$\frac{X-\mu}{\sigma}$	*0*	*1*	*1*

2.2. Momentos de una variable aleatoria

2.2.1. Definición

Los momentos de una variable aleatoria son valores numéricos asociados a ella y que, combinados adecuadamente, permiten caracterizarla. Existen momentos absolutos, momentos centrados y momentos estandarizados de una variable aleatoria, según el estado en que la variable se encuentre.

Para $j \in \Re$, se define el momento absoluto (o momento natural) de orden j de una variable aleatoria X, que se simboliza m_j, como la esperanza matemática de la potencia j-ésima de la variable aleatoria en estado absoluto. Así, será:

$$m_j = E(X^j)$$

Para el caso en que la variable aleatoria sea discreta:

$$m_j = E(X^j) = \sum_{\forall k} k^j \cdot P(X=k)$$

Para el caso en que la variable aleatoria sea continua:

$$m_j = E(X^j) = \int_{\forall x} x^j \cdot f(x)\, dx$$

Puede observarse que si $j = 1$ el momento absoluto de orden 1 es la esperanza matemática de la variable aleatoria.

Análogamente se definen los momentos centrados y los momentos estandarizados de una variable aleatoria:
Para $j \in \Re$, se define el momento centrado de orden j de una variable aleatoria X, que se simboliza mc_j, como la esperanza matemática de la potencia j-ésima de la variable aleatoria en estado centrado. Así, será:

$$mc_j = E(X-\mu)^j$$

Para el caso que la variable aleatoria sea discreta:

$$mc_j = E(X-\mu)^j = \sum_{\forall k}(k-\mu)^j \cdot P(X=k)$$

Para el caso que la variable aleatoria sea continua:

$$mc_j = E(X-\mu)^j = \int_{\forall x}(x-\mu)^j \cdot f(x)\,dx$$

Puede observarse que si $j = 2$ el momento centrado de orden 2 es la varianza de la variable aleatoria.

Para $j \in \Re$, se define el momento estandarizado de orden j de una variable aleatoria X, que se simboliza me_j, como la esperanza matemática de la potencia j-ésima de la variable aleatoria en estado estandarizado. Así, será:

$$me_j = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^j$$

Para el caso que la variable aleatoria sea discreta:

$$me_j = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^j = \sum_{\forall k}\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)^j \cdot P(X=k)$$

Para el caso que la variable aleatoria sea continua:

$$me_j = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^j = \int_{\forall x}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^j \cdot f(x)\,dx$$

Puede observarse que si $j = 3$ el momento estandarizado de orden 3 es el coeficiente de asimetría de la variable aleatoria y si $j = 4$, el coeficiente de kurtosis.

Todos estos momentos existirán siempre y cuando la suma (o la integral, según corresponda) converja para el valor de j definido.

2.2.2. Reducción a momentos absolutos

Todo momento centrado y todo momento estandarizado puede ser escrito como combinación de momentos absolutos. Para ello basta aplicar propiedades de esperanza matemática y, para el caso que j sea natural, el desarrollo del binomio de Newton (obrante en el Anexo I).

Por ejemplo, si se quisiera expresar el momento centrado de orden 2 (varianza) en función de momentos absolutos se procedería de la siguiente manera:

$$mc_2 = E(X-\mu)^2$$

Se desarrolla el cuadrado del binomio:

$$mc_2 = E(X^2 - 2X\mu + \mu^2)$$

Se aplican propiedades del operador esperanza:

$$mc_2 = E(X^2) - 2\mu E(X) + E(\mu^2)$$

$$mc_2 = E(X^2) - 2\mu\mu + \mu^2$$

$$mc_2 = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$mc_2 = E(X^2) - \mu^2$$

Se recuerda que $E(X^2) = m_2$ *y que* $E(X) = \mu = m_1$

De este modo:

$$mc_2 = m_2 - {m_1}^2$$

expresión que suele también escribirse como:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Se desarrolla a continuación el momento estandarizado de orden 3 de una variable aleatoria a través de sus momentos absolutos.

Se parte de:

$$me_3 = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3$$

Es decir:

$$me_3 = \frac{1}{\sigma^3}E(X-\mu)^3$$

Se desarrolla el cubo del binomio a la expresión anterior:

$$me_3 = \frac{1}{\sigma^3}E(X^3 - 3X^2\mu + 3X\mu^2 - \mu^3)$$

Se aplican propiedades del operador esperanza:

$$me_3 = \frac{1}{\sigma^3}\left[E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 3\mu^2 E(X) - E(\mu^3)\right]$$

$$me_3 = \frac{1}{\sigma^3}\left[E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 3\mu^2\mu - \mu^3\right]$$

$$me_3 = \frac{1}{\sigma^3}\left[E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 3\mu^3 - \mu^3\right]$$

$$me_3 = \frac{1}{\sigma^3}\left[E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 2\mu^3\right]$$

Se recuerda que $E(X^3) = m_3$*, que* $E(X^2) = m_2$ *y que* $E(X) = \mu = m_1$

Con lo cual:

$$me_3 = \frac{m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3}{\sigma^3}$$

La expresión obtenida resulta entonces lo pedido: reexpresar el momento estandarizado de orden 3 a través de la combinación de momentos absolutos.

La propiedad y los ejemplos expuestos son el fundamento principal de la necesidad de contar especialmente con los momentos absolutos de una variable aleatoria. Para ello, en los capítulos que siguen se explicará la técnica que permite conocer los momentos absolutos de una variable aleatoria sin necesidad de aplicar la definición vista en 2.2.1 que, a veces, resulta complicada de evaluar.

3. Función generatriz de momentos (FGM)

Sea X una variable aleatoria de cualquier naturaleza (discreta o continua) y sea t una variable matemática real no negativa, se sabe, por la expansión en serie de Mac-Laurin (obrante en Anexo II), que e^{xt} puede expresarse de la siguiente manera:

$$e^{Xt} = 1 + Xt + \frac{1}{2!}X^2t^2 + \frac{1}{3!}X^3t^3 + \frac{1}{4!}X^4t^4 + ...$$

Se aplica el operador esperanza matemática a ambos miembros.

$$E\left(e^{Xt}\right) = E\left(1 + Xt + \frac{1}{2!}X^2t^2 + \frac{1}{3!}X^3t^3 + \frac{1}{4!}X^4t^4 + ...\right)$$

Se recuerda que la esperanza matemática de una suma es la suma de las esperanzas matemáticas:

$$E\left(e^{Xt}\right) = E\left(1\right) + E\left(Xt\right) + E\left(\frac{1}{2!}X^2t^2\right) + E\left(\frac{1}{3!}X^3t^3\right) + E\left(\frac{1}{4!}X^4t^4\right) + ...$$

En virtud de que la variable t es matemática y no aleatoria, al aplicar esperanza matemática se la toma como una constante, por lo que resulta:

$$E\left(e^{Xt}\right) = 1 + t\,E\left(X\right) + \frac{1}{2!}\,t^2\,E\left(X^2\right) + \frac{1}{3!}\,t^3\,E\left(X^3\right) + \frac{1}{4!}\,t^4\,E\left(X^4\right) + ...$$

La expresión $E\left(e^{Xt}\right)$ recibe la denominación de función generatriz de momentos de X y se la simboliza $M_X(t)$ o $\varphi_X(t)$. Es decir que la expresión que se acaba de obtener es la función generatriz de momentos de la variable aleatoria X.

3.1. Definición

Sea X una variable aleatoria de cualquier naturaleza (discreta o continua) y sea t una variable matemática real no negativa, la función generatriz de momentos de X está dada por:

$$M_X(t) = E\left(e^{Xt}\right)$$

O, en forma expandida:

$$M_X(t) = 1 + t\,E\left(X\right) + \frac{1}{2!}\,t^2\,E\left(X^2\right) + \frac{1}{3!}\,t^3\,E\left(X^3\right) + \frac{1}{4!}\,t^4\,E\left(X^4\right) + ...$$

Expresión que puede también escribirse como:

$$M_X(t) = 1 + t\,m_1 + \frac{1}{2!}\,t^2\,m_2 + \frac{1}{3!}\,t^3\,m_3 + \frac{1}{4!}\,t^4\,m_4 + ...$$

Una de las propiedades de la función generatriz de momentos es que la relación entre una función de probabilidad (o densidad) y su función generatriz de momentos es unívoca. Es decir, cuando exista función generatriz de momentos, para cada F.G.M. existe una y solo una función de probabilidad (o densidad) asociada y, viceversa, para cada función de probabilidad (o densidad) existe una y solo una F.G.M. que se corresponde con ella.

3.2. Derivadas sucesivas de la función generatriz de momentos

Esta función tiene la particularidad de que sus derivadas sucesivas respecto de t, valuadas en t=0, permiten conocer secuencialmente los sucesivos momentos absolutos de la variable aleatoria X. En efecto, para la primera derivada se tendrá:

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = E\left(X\right) + \frac{1}{2!}\,2t\,E\left(X^2\right) + \frac{1}{3!}\,3t^2\,E\left(X^3\right) + \frac{1}{4!}\,4t^3\,E\left(X^4\right) + ...$$

Más sintéticamente:

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = E\left(X\right) + t\,E\left(X^2\right) + \frac{1}{2}\,t^2\,E\left(X^3\right) + \frac{1}{3!}\,t^3\,E\left(X^4\right) + ...$$

expresión que, valuada en t=0, se resume a:

$$\left.\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = E\left(X\right) = m_1$$

Análogamente, para la segunda derivada se tendrá:

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = E\left(X^2\right) + \frac{1}{2}\,2t\,E\left(X^3\right) + \frac{1}{3!}\,3t^2\,E\left(X^4\right) + ...$$

Más sintéticamente:

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = E\left(X^2\right) + t\,E\left(X^3\right) + \frac{1}{2}\,t^2\,E\left(X^4\right) + ...$$

expresión que, valuada en t=0, se resume a:

$$\left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = E\left(X^2\right) = m_2$$

Luego, para la tercera derivada se tendrá:

$$\frac{\partial^3 M_X(t)}{\partial t^3} = E\left(X^3\right) + \frac{1}{2}\,2t\,E\left(X^4\right) + ...$$

Más sintéticamente:

$$\frac{\partial^3 M_X(t)}{\partial t^3} = E\left(X^3\right) + t\,E\left(X^4\right) + ...$$

expresión que, valuada en t=0, se resume a:

$$\left.\frac{\partial^3 M_X(t)}{\partial t^3}\right|_{t=0} = E\left(X^3\right) = m_3$$

Esto entonces permite decir que la función generatriz de momentos $M_X(t)$ verifica:

$$\left.\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = E\left(X\right)$$

$$\left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = E\left(X^2\right)$$

$$\left.\frac{\partial^3 M_X(t)}{\partial t^3}\right|_{t=0} = E\left(X^3\right)$$

Y, en general, para $j \in \mathbb{N}$

$$\left.\frac{\partial^j M_X(t)}{\partial t^j}\right|_{t=0} = E\left(X^j\right) = m_j$$

3.3. Propiedades de la FGM

A la ya señalada al comienzo, se agregan tres propiedades importantes de la FGM:

1) $M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$ *para X e Y variables aleatorias independientes.*

2) $M_{aX}(t) = M_X(at)$ *para a escalar real.*

3) $M_b(t) = e^{bt}$ *para b constante real.*

A continuación, se demostrarán las tres propiedades.

1) Se consideran dos variables aleatorias independientes X e Y. Se sabe que su suma será, a su vez, una variable aleatoria. Se designará esta suma con la letra «S» de modo tal que:

$$S = X + Y$$

Luego, por definición de FGM, se tendrá:

$$M_S(t) = E\left(e^{St}\right)$$

A su vez, como $S = X + Y$, se podrá escribir:

$$M_{X+Y}(t) = E\left[e^{(X+Y)t}\right]$$

$$M_{X+Y}(t) = E\left(e^{Xt+Yt}\right)$$

Se aplican propiedades de potencias:

$$M_{X+Y}(t) = E\left(e^{Xt} \cdot e^{Yt}\right)$$

En virtud de X e Y son independientes, se tiene:

$$M_{X+Y}(t) = E\left(e^{Xt}\right) \cdot E\left(e^{Yt}\right)$$

Es decir,

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

con lo que queda entonces demostrado.

Se hace saber que la misma propiedad vale para el caso de tener una suma de tres o más variables aleatorias independientes entre sí; es decir:

$$M_{X_1+X_2+X_3+...+X_k}(t) = E\left(e^{X_1t}\right) \cdot E\left(e^{X_2t}\right) \cdot E\left(e^{X_3t}\right) \cdot ... \cdot E\left(e^{X_kt}\right)$$

$$M_{X_1+X_2+X_3+...+X_k}(t) = MX_1(t) \cdot MX_2(t) \cdot MX_3(t) \cdot ... \cdot MX_k(t)$$

La deducción es análoga.

2) Se considera una variable aleatoria X y un escalar real «a». Se sabe que su producto será, a su vez, una variable aleatoria. Se designará este producto con la letra «J» de modo tal que:

$$J = aX$$

Luego, por definición de FGM, se tendrá:

$$M_J(t) = E\left(e^{Jt}\right)$$

A su vez, como $J = aX$, se podrá escribir:

$$M_{aX}(t) = E\left(e^{(aX)t}\right)$$

$$M_{aX}(t) = E\left(e^{aXt}\right)$$

En el exponente se aplica propiedad conmutativa del producto:

$$M_{aX}(t) = E\left(e^{Xat}\right)$$

En el exponente se aplica propiedad asociativa del producto:

$$M_{aX}(t) = E\left[e^{X(at)}\right]$$

Y por definición de FGM resulta:

$$M_{aX}(t) = M_X(at)$$

con lo que queda entonces demostrado.

3) Se considera una constante «b». Luego, será:

$$M_b(t) = E\left(e^{bt}\right)$$

Se recuerda que la esperanza matemática de una constante es la misma constante; por lo tanto, podrá escribirse:

$$M_b(t) = e^{bt}$$

con lo que queda entonces demostrado.

3.4. Función generatriz de cumulantes

En ocasiones, especialmente cuando la función generatriz de momentos es una expresión exponencial, resulta conveniente recurrir a la función generatriz de cumulantes para obtener sus momentos absolutos. En esencia, esta función es una transformación de la anterior.

Sea X una variable aleatoria de cualquier naturaleza (discreta o continua) y sea $M_X(t)$ su función generatriz de momentos, la función generatriz de cumulantes de X está dada por:

$$R_X(t) = \ln M_X(t)$$

Sus propiedades son:

$$\left.\frac{\partial R_X(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = E(X)$$

$$\left.\frac{\partial^2 R_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = Var(X)$$

Para distribuciones tales como Poisson o como la normal, resulta especialmente útil.

4. Distribuciones de probabilidad y de densidad

A fin de poder determinar las funciones generatrices de momentos, es necesario definir cuáles son las variables aleatorias que han de tenerse en cuenta para el mencionado objetivo.

En todos los casos el lector podría demostrar la ley de cierre; es decir, que la suma de la función de probabilidades (en el caso de las discretas) o el área (en el caso de las continuas) en el intervalo de existencia de la variable es igual a la unidad.

A continuación, se enumeran las distribuciones de probabilidad y de densidad, junto con sus particularidades.

4.1. Distribución binomial puntual (Bernoulli)

La variable aleatoria X representa el número de éxitos que pueden obtenerse al realizar un único ensayo aleatorio. En consecuencia, la cantidad de éxitos es 0 o es 1. Dicho de otro modo, el valor 0 representa el fracaso mientras que el valor 1 representa el éxito, no pudiendo existir otro valor posible. La probabilidad de éxito se simboliza p mientras que su complemento -probabilidad de fracaso- se simboliza q. Así, se tendrá que:

$$0 < p < 1 \qquad\qquad 0 < q < 1 \qquad\qquad p + q = 1$$

La forma de la función de probabilidades de esta variable está dada por la siguiente expresión:

$$P(X = k) = \begin{cases} q & si\ k = 0 \\ p & si\ k = 1 \end{cases}$$

Más convenientemente, para el dominio dado, la función de probabilidad puede expresarse de la siguiente manera:

$$P(X = k) = p^k \cdot q^{1-k}$$

En la distribución binomial siempre se verifica la dicotomía; es decir, sí (éxito) o no (fracaso).

4.2. Distribución binomial general

La variable aleatoria X representa el número de éxitos que pueden obtenerse al realizarse n ensayos aleatorios. Resulta indispensable que los mismos sean independientes entre sí dado que ello garantiza que la probabilidad de éxito p se mantenga constante a lo largo de toda la serie de ensayos realizados.

La variable X es de tipo discreta dado que solo puede adoptar valores enteros pertenecientes al intervalo [0;n]; es decir, toma valores naturales 0;1;2; ... ; n.

La probabilidad de éxito se simboliza p y su complemento q. Así, se tendrá que:

$$0 < p < 1 \qquad\qquad 0 < q < 1 \qquad\qquad p + q = 1$$

La función de probabilidades asociada a esta variable está dada por la expresión:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Donde $\binom{n}{k}$ representa el número combinatorio de n elementos tomados de a k; es decir, las distintas formas en que pueden presentarse los k éxitos y n-k fracasos en la serie de n ensayos analizada.

Ha de notarse que la distribución binomial general resulta de la suma de n variables aleatorias independientes, todas ellas idénticamente distribuidas, donde la distribución de cada una de ellas es la binomial puntual y su parámetro el mismo p para todas ellas.

Esta distribución es frecuentemente utilizada en el campo actuarial en el caso de cálculo de coberturas relacionadas con la supervivencia de un grupo de personas, para la modelización del número de siniestros de una cartera determinada, entre otras.

4.3. Distribución de Poisson

La distribución de Poisson se aplica cuando la cantidad de ensayos crece y la probabilidad de éxito es muy pequeña. La variable sigue siendo una variable discreta que adopta valores enteros en el intervalo $[0; \infty]$*; es decir, todos los números naturales: 0; 1; 2; 3; ...*

Se transcribe a continuación la función de probabilidades:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$$

Aquí, λ *es el valor medio de la distribución y por lo tanto será siempre positivo.*

Esta distribución es muy utilizada en el campo actuarial para la tarificación en el caso de sucesos con poca probabilidad de ocurrencia.

4.4. Distribución geométrica

Se define como k+1 al número de ensayos independientes necesarios hasta alcanzar un éxito en un experimento binomial con probabilidad de éxito constante p. Así, se puede definir a la variable geométrica, que representa el número de fracasos hasta la obtención del primer éxito.

Se trata de una variable discreta que puede adoptar valores enteros en el intervalo $[0; \infty)$*; es decir todos los números naturales: 0; 1; 2; 3; ...*

Su función de probabilidades está dada por la siguiente expresión:

$$P(X = k) = p \cdot q^k$$

Al igual que en el caso de la distribución binomial general, se tendrá que:

$$0 < p < 1 \qquad 0 < q < 1 \qquad p + q = 1$$

4.5. Distribución binomial negativa

Se define como k+r al número de ensayos independientes necesarios hasta alcanzar r éxitos en un experimento binomial con probabilidad de éxito constante p. Así, se puede definir a la variable binomial negativa, que representa el número de fracasos hasta la obtención de r éxitos.

Se trata de una variable discreta que puede adoptar valores enteros en el intervalo $[0; \infty)$*; es decir, todos los números naturales: 0; 1; 2; 3; ...*

Su función de probabilidades está dada por la siguiente expresión:

$$P(X = k) = \binom{r + k - 1}{r - 1} \cdot p^r \cdot q^k$$

Ha de notarse que la distribución binomial negativa resulta de la suma de r variables aleatorias independientes, todas ellas idénticamente distribuidas, donde su distribución es geométrica y su parámetro el mismo p para todas ellas.

4.6. Distribución normal estándar

Se define una variable Z con distribución normal estándar en el intervalo $(-\infty; \infty)$ *como una variable continua cuya función de densidad está dada por la siguiente expresión:*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2}$$

Se trata de una distribución simétrica.

4.7. Distribución normal

Se define una variable X con distribución normal en el intervalo $(-\infty; \infty)$ *como una variable continua cuya función de densidad está dada por la siguiente expresión:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Se trata de una distribución simétrica. Aquí, μ *y* σ *representan, respectivamente, la media y el desvío estándar de la distribución. La media puede asumir cualquier valor real, pero el desvío estándar debe ser real positivo.*

En el caso particular en que el valor medio sea igual a 0 y el desvío standard igual a 1, se tiene la variable normal estandarizada (o normal estándar) presentada en el punto anterior.

4.8. Distribución lognormal

Se define una variable X con distribución lognormal en el intervalo $(0; \infty)$ *como una variable continua cuya función de densidad está dada por la siguiente expresión:*

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

En este caso es la variable $\ln x$ *la que se distribuye en forma normal.*

4.9. Distribución uniforme

Se dice que una variable aleatoria tiene distribución uniforme en el intervalo $(a; b)$ *si su función de densidad está dada por la siguiente expresión:*

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

Se trata de una variable aleatoria continua que puede adoptar cualquier valor en el intervalo mencionado.

En este texto se considera únicamente la versión continua de la distribución uniforme. Ha de notarse, sin embargo, que existe también en versión discreta: una variable aleatoria discreta tiene distribución uniforme cuando la probabilidad de ocurrencia de cualquiera de sus valores finitos es la misma.

4.10. Distribución exponencial

Se define una variable X con distribución exponencial en el intervalo $(0; \infty)$ *como una variable continua cuya función de densidad está dada por la siguiente expresión:*

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$

El parámetro λ *debe ser positivo.*

Usualmente permite modelizar variables que representan el tiempo de espera hasta la ocurrencia de un suceso. Se trata, por lo tanto, de la versión continua de la distribución geométrica. En el campo actuarial resulta de especial interés porque presenta múltiples aplicaciones, tanto para el cálculo de probabilidades de supervivencia de una persona como también por ejemplo para el tiempo de espera hasta la ocurrencia de un siniestro, de la cancelación de una póliza o de un pago determinado.

4.11. Distribución gamma

Se define una variable X con distribución gamma en el intervalo $(0; \infty)$ *como una variable continua cuya función de densidad está dada por la siguiente expresión:*

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)}$$

Sus dos parámetros son α *y* β*, parámetros de forma y de escala respectivamente, que definen la forma que tiene la curva que resulta de la gráfica de la función de densidad.*

Debe recordarse que:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\, dx \qquad\qquad \alpha > 0$$

Usualmente permite modelizar variables que representan el tiempo de espera hasta la ocurrencia de α sucesos. Se trata, por lo tanto, de la versión continua de la distribución binomial negativa.

A su vez, la distribución exponencial es un caso particular de esta distribución gamma, para el caso en que $\alpha = 1$ y $\beta = \frac{1}{\lambda}$. O, dicho de otra manera, una variable con distribución Gamma es una suma de variables aleatorias independientes entre sí, cada una de ellas con distribución exponencial.

4.12. Distribución chi cuadrado

La función de densidad de esta variable está dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{x^{\frac{k}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma(\frac{k}{2})}$$

Se trata de una variable continua cuyo intervalo de existencia es $X > 0$. El parámetro k debe ser un número natural.

Puede observarse que es un caso particular de la distribución gamma cuando $\alpha = \frac{k}{2}$ y $\beta = 2$.

La misma distribución puede definirse como una suma de k variables aleatorias independientes, normales estandarizadas y elevadas al cuadrado; es decir:

$$\chi_k^2 = \sum_{i=1}^{k} z_i^2$$

Donde cada z_i representa una variable normal estandar, tal como fue definida en la sección 4.6.

El parámetro k recibe el nombre de grados de libertad. Se entiende por grados de libertad al número de variables aleatorias independientes contempladas en la construcción de la chi cuadrado.

4.13. Distribución t de Student

Se trata de una variable continua que puede tomar cualquier valor real y cuya función de densidad está dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \cdot \sqrt{\pi k}} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$$

La misma distribución puede definirse como el cociente entre una variable aleatoria normal estandarizada y la raíz cuadrada de una variable con distribución chi-cuadrado con k grados de libertad dividida por sus respectivos grados de libertad; es decir:

$$t_k = \frac{z}{\sqrt{\frac{\chi_k^2}{k}}}$$

Es importante resaltar que las dos variables previamente mencionadas deben ser independientes entre sí, lo cual está demostrado a partir del Lema de Fisher. Los grados de libertad que le corresponden a esta distribución son los mismos que los de la distribución chi cuadrado que le da origen.

4.14. Distribución F de Snedecor

Se trata de una variable continua que puede tomar cualquier valor real positivo y cuya función de densidad está dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{r+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{r}{2}} \cdot \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{\left(1 + \frac{rx}{s}\right)^{\frac{r+s}{2}}}$$

donde r y s deben ser números enteros positivos.

También se la puede definir del siguiente modo:

$$F_{r;s} = \frac{\frac{\chi_r^2}{r}}{\frac{\chi_s^2}{s}}$$

Es decir, el cociente entre dos chi cuadrado divididas cada una de ellas por sus respectivos grados de libertad. De este modo, la F toma los grados de libertad de las chi cuadrado para el numerador y denominador, respectivamente.

5. FGM asociadas a distribuciones conocidas

La propuesta de esta sección es obtener las funciones generatrices correspondientes a cada una de las distribuciones vistas con anterioridad.

5.1. Distribución binomial puntual (Bernoulli)

Por definición de función generatriz de momentos, se tiene:

$$M_X(t) = E\left(e^{Xt}\right)$$

Por otra parte, si X es una variable aleatoria discreta que toma valores entre dos números naturales a y b, esta definición puede operacionalizarse como:

$$M_X(t) = \sum_{k=a}^{b} \left[e^{kt} \cdot P(X = k)\right]$$

Para el caso que X siga una distribución binomial puntual cuyo dominio se sabe que son los valores naturales 0 y 1 y cuya función de probabilidad ya ha sido presentada, se tendrá:

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{1} \left(e^{kt} \cdot p^k \cdot q^{1-k}\right)$$

Resta ahora expandir la suma, presentando sus dos términos por separado. De esta manera:

$$M_X(t) = e^{0t} \cdot p^0 \cdot q^{1-0} + e^{1t} \cdot p^1 \cdot q^{1-1}$$

Se concluye que:

$$M_X(t) = q + p \cdot e^t$$

5.2. Distribución binomial general

Se presentarán dos maneras de obtener la función generatriz de momentos de la distribución binomial general:

- *por aplicación de la definición de FGM*
- *por aplicación de las propiedades de FGM a la FGM de la distribución binomial puntual*

Por aplicación de la definición de FGM:

Por definición de función generatriz de momentos, se tiene:

$$M_X(t) = E\left(e^{Xt}\right)$$

Por otra parte, si X es una variable aleatoria discreta que toma valores entre dos números naturales a y b, esta definición puede expresarse como:

$$M_X(t) = \sum_{k=a}^{b} \left[e^{kt} \cdot P(X = k)\right]$$

Para el caso que X siga una distribución binomial general cuyo dominio se sabe que son los valores naturales entre 0 y n y cuya función de probabilidad ya ha sido presentada, se tendrá:

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \left[e^{kt} \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}\right]$$

Se observa que e^{kt} puede escribirse como $(e^t)^k$, lo que posibilita que la expresión pueda ser escrita como:

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} \cdot (e^t \cdot p)^k \cdot q^{n-k}\right]$$

Se reconoce aquí la expresión del binomio de Newton (obrante en Anexo I) y se concluye que:

$$M_X(t) = (q + p \cdot e^t)^n$$

Como se mencionó previamente a esta conclusión puede arribarse también por aplicación de propiedades de función generatriz de momentos a la distribución binomial puntual. En efecto, se recuerda que la distribución binomial es la suma de n variables aleatorias independientes, todas ellas distribuidas binomial puntual. Así:

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n$$

Se recuerda, por la propiedad de suma de variables aleatorias independientes, que:

$$M_X(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdot M_{X_3}(t) \cdot ... \cdot M_{X_n}(t)$$

$$M_X(t) = (q + p \cdot e^t) \cdot (q + p \cdot e^t) \cdot (q + p \cdot e^t) \cdot ... \cdot (q + p \cdot e^t)$$

Se concluye que:

$$M_X(t) = (q + p \cdot e^t)^n$$

Cabe destacar que la distribución binomial puntual también puede presentarse como caso particular de la distribución binomial general, para el caso que n=1. Bajo esta concepción, tanto su dominio como su función de probabilidad y su función generatriz de momentos pueden obtenerse a partir de la distribución binomial general, especializando en n=1.

5.3. Distribución de Poisson

Por definición de función generatriz de momentos, se tiene:

$$M_X(t) = E\left(e^{Xt}\right)$$

Por otra parte, si X es una variable aleatoria discreta que toma valores entre dos números naturales a y b, esta definición puede expresarse como:

$$M_X(t) = \sum_{k=a}^{b} \left[e^{kt} \cdot P(X = k)\right]$$

Para el caso que X siga una distribución de Poisson cuyo dominio se sabe que son los valores naturales y cuya función de probabilidad ya ha sido presentada, se tendrá:

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{kt} \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$$

La expresión $e^{-\lambda}$ no depende de k y por lo tanto puede ser extraido de la suma.

$$M_X(t) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} e^{kt} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

Al igual que se mencionó en el caso de la distribución binomial general, se observa que e^{kt} puede escribirse como $(e^t)^k$, lo que posibilita que la expresión pueda ser escrita como:

$$M_X(t) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^t \cdot \lambda)^k}{k!}$$

Se reconoce aquí la expresión de la expansión en serie de la función exponencial (obrante en Anexo II). Es decir:

$$M_X(t) = e^{-\lambda} \cdot e^{e^t \lambda}$$

Se aplica la propiedad de producto de potencias de igual base para obtener:

$$M_X(t) = e^{-\lambda + e^t \lambda}$$

Se saca factor común λ para finalmente obtener:

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

5.4. Distribución geométrica

Por definición de función generatriz de momentos, se tiene:

$$M_X(t) = E\left(e^{Xt}\right)$$

Por otra parte, si X es una variable aleatoria discreta que toma valores entre dos números naturales a y b, esta definición puede expresarse como:

$$M_X(t) = \sum_{k=a}^{b} \left[e^{kt} \cdot P(X = k)\right]$$

Para el caso que X siga una distribución geométrica cuyo dominio se sabe que son los valores naturales y cuya función de probabilidad ya ha sido presentada, se tendrá:

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{kt} \cdot p \cdot q^k$$

La expresión p no depende de k y por lo tanto puede ser extraido de la suma.

$$M_X(t) = p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} e^{kt} \cdot q^k$$

Al igual que se mencionó en casos anteriores, se observa que e^{kt} *puede escribirse como* $(e^t)^k$*, lo que posibilita que la expresión pueda ser escrita como:*

$$M_X(t) = p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(q \cdot e^t\right)^k$$

Debe notarse que la expresión $q \cdot e^t$*, para valores de t cercanos a 0, es una expresión que, en valor absoluto, es menor a 1. Se reconoce entonces en la suma la expresión de la expansión de la serie geométrica para el caso convergente (obrante en Anexo III), por lo que puede escribirse:*

$$M_X(t) = p \cdot \frac{1}{1 - q \cdot e^t}$$

Se concluye que la FGM es entonces:

$$M_X(t) = \frac{p}{1 - q \cdot e^t}$$

5.5. Distribución binomial negativa

Se presentarán dos maneras de obtener la función generatriz de momentos de la distribución binomial negativa:

- *por aplicación de la definición de FGM*
- *por aplicación de las propiedades de FGM a la FGM de la distribución geométrica*

Por aplicación de la definición de FGM:

Se parte de la definición de función generatriz de momentos:

$$M_X(t) = E\left(e^{Xt}\right)$$

Por otra parte, si X es una variable aleatoria discreta que toma valores entre dos números naturales a y b, esta definición puede expresarse como:

$$M_X(t) = \sum_{k=a}^{b} \left[e^{kt} \cdot P(X = k)\right]$$

Para el caso que X siga una distribución binomial negativa cuyo dominio se sabe que son los valores naturales y cuya función de probabilidad ya ha sido presentada, se tendrá:

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{kt} \cdot \binom{r+k-1}{r-1} \cdot p^r \cdot q^k$$

La expresión p^r no depende de k y por lo tanto puede ser extraido de la suma.

$$M_X(t) = p^r \cdot \sum_{k=0}^{\infty} e^{kt} \cdot \binom{r+k-1}{r-1} \cdot q^k$$

Al igual que se mencionó en casos anteriores, se observa que e^{kt} puede escribirse como $(e^t)^k$, lo que posibilita que la expresión pueda ser escrita como:

$$M_X(t) = p^r \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{r-1} \cdot (q \cdot e^t)^k$$

Debe notarse que la expresión $q \cdot e^t$, para valores de t cercanos a 0, es una expresión que, en valor absoluto, es menor a 1. Se reconoce entonces en la suma la expresión de la expansión en serie de potencia natural de la serie geométrica para el caso que $|a| < 1$ (obrante en Anexo IV), por lo que puede escribirse:

$$M_X(t) = p^r \cdot \left(\frac{1}{1 - q \cdot e^t}\right)^r$$

Se concluye que:

$$M_X(t) = \left(\frac{p}{1 - q \cdot e^t}\right)^r$$

Como se mencionó previamente a esta conclusión puede arribarse también por aplicación de propiedades de función generatriz de momentos a la distribución geométrica. En efecto, se recuerda que la distribución binomial negativa es la suma de r variables aleatorias independientes, todas ellas con distribución geométrica. Así:

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_r$$

Se recuerda, por la propiedad de suma de variables aleatorias independientes, que:

$$M_X(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdot M_{X_3}(t) \cdot ... \cdot M_{X_r}(t)$$

$$M_X(t) = \frac{p}{1 - q \cdot e^t} \cdot \frac{p}{1 - q \cdot e^t} \cdot \frac{p}{1 - q \cdot e^t} \cdot ... \cdot \frac{p}{1 - q \cdot e^t}$$

Se concluye que:

$$M_X(t) = \left(\frac{p}{1 - q \cdot e^t}\right)^r$$

Cabe destacar que la distribución geométrica también puede presentarse como caso particular de la distribución binomial negativa, para el caso que r=1. Bajo esta concepción, tanto su dominio como su función de probabilidad y su función generatriz de momentos pueden obtenerse a partir de la distribución binomial negativa, especializando en ese valor.

5.6. Distribución normal estándar

Por definición de función generatriz de momentos, se tiene:

$$M_X(t) = E\left(e^{Xt}\right)$$

Por otra parte, si X es una variable aleatoria continua que toma valores entre dos números reales a y b, esta definición puede expresarse como:

$$M_X(t) = \int_a^b \left[e^{xt} \cdot f(x)\right] \, dx$$

Para el caso que la variable X, denominada en este caso Z, siga una distribución normal estándar cuyo dominio se sabe que son todos los números reales y cuya función de densidad ya ha sido presentada, se tendrá:

$$M_Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zt} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot z^2}\, dz$$

Se procede a operar algebraicamente del siguiente modo:

$$M_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{zt} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot z^2}\, dz$$

$$M_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{zt-\frac{1}{2}\cdot z^2}\, dz$$

$$M_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\cdot(z^2-2zt)}\, dz$$

Se suma y se resta t^2 dentro del paréntesis del exponente, de forma tal de completar el desarrollo de un binomio elevado al cuadrado.

$$M_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\cdot(z^2-2zt+t^2-t^2)}\, dz$$

$$M_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\cdot[(z^2-2zt+t^2)-t^2)]}\, dz$$

$$M_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\cdot(z^2-2zt+t^2)+\frac{1}{2}\cdot t^2}\, dz$$

$$M_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\cdot(z^2-2zt+t^2)} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot t^2}\, dz$$

La expresión $e^{\frac{1}{2}\cdot t^2}$ no depende de z, por lo que se extrae afuera de la integral.

$$M_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot t^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\cdot(z-t)^2}\, dz$$

Se ingresa nuevamente una de las constantes al integrando.

$$M_Z(t) = e^{\frac{1}{2}\cdot t^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(z-t)^2}\, dz$$

Se considera ahora dentro de la integral definida el siguiente cambio de variables:

$u = z - t$ *donde t es una constante*

$du = dz$

Puede verse que para este cambio de variables, los límites de la integral definida no se modifican.

$$M_Z(t) = e^{\frac{1}{2}\cdot t^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot u^2}\, du$$

Se reconoce dentro de la integral a la función de densidad de una variable aleatoria normal estándar. La integral definida entre $-\infty$ y ∞ representa el área bajo la distribución y el eje horizontal, que por ley de cierre es igual a 1.

Se concluye que:

$$M_Z(t) = e^{\frac{1}{2}\cdot t^2}$$

5.7. Distribución normal

Se presentarán dos maneras de obtener la función generatriz de momentos de la distribución normal:

- *por aplicación de la definición de FGM*
- *por aplicación de las propiedades de FGM a la FGM de la distribución normal estándar*

Por definición de función generatriz de momentos, se tiene:

$$M_X(t) = E\left(e^{Xt}\right)$$

Por otra parte, si X es una variable aleatoria continua que toma valores entre dos números reales a y b, esta definición puede expresarse como:

$$M_X(t) = \int_a^b \left[e^{xt} \cdot f(x)\right] \, dx$$

Para el caso que X siga una distribución normal cuyo dominio se sabe que son todos los números reales y cuya función de densidad ya ha sido presentada, se tendrá:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \, dx$$

Se procede a operar algebraicamente del siguiente modo:

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \, dx$$

Se realiza la siguiente sustitución:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

De aquí se deduce que:

- ◇ $x = \sigma \cdot z + \mu$
- ◇ $dx = \sigma \, dz$
- ◇ *los límites de la integral no cambiarán, pues cuando x se aproxima hacia el infinito (menos infinito), z también lo hace.*

La sustitución resulta entonces:

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma \cdot z + \mu) \cdot t} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} \cdot \sigma \, dz$$

Se observa que σ no depende de z, por lo que se extrae afuera del operador integral

$$M_X(t) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma \cdot z + \mu) \cdot t} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} \, dz$$

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma \cdot z + \mu) \cdot t} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} \, dz$$

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma \cdot z \cdot t + \mu \cdot t} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} \, dz$$

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma \cdot z \cdot t} \cdot e^{\mu \cdot t} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} \, dz$$

La expresión $e^{\mu \cdot t}$ no depende de z, por lo que se extrae afuera de la integral.

$$M_X(t) = \frac{e^{\mu \cdot t}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma \cdot z \cdot t} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} \, dz$$

$$M_X(t) = \frac{e^{\mu \cdot t}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma \cdot z \cdot t - \frac{1}{2} \cdot z^2} \, dz$$

$$M_X(t) = \frac{e^{\mu \cdot t}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot (z^2 - 2 \cdot \sigma \cdot z \cdot t)} \, dz$$

Se suma y se resta $\sigma^2 \cdot t^2$ dentro del paréntesis del exponente, de forma tal de completar el desarrollo de un binomio elevado al cuadrado.

$$M_X(t) = \frac{e^{\mu \cdot t}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot (z^2 - 2 \cdot \sigma \cdot z \cdot t + \sigma^2 \cdot t^2 - \sigma^2 \cdot t^2)} \, dz$$

$$M_X(t) = \frac{e^{\mu \cdot t}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot [(z^2 - 2 \cdot \sigma \cdot z \cdot t + \sigma^2 \cdot t^2) - \sigma^2 \cdot t^2)]} \, dz$$

$$M_X(t) = \frac{e^{\mu \cdot t}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot [(z - \sigma \cdot t)^2 - \sigma^2 \cdot t^2)]} \, dz$$

$$M_X(t) = \frac{e^{\mu \cdot t}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot (z - \sigma \cdot t)^2 + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot t^2} \, dz$$

$$M_X(t) = \frac{e^{\mu \cdot t}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot (z - \sigma \cdot t)^2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot t^2} \, dz$$

La expresión $e^{\frac{1}{2}\sigma^2 \cdot t^2}$ no depende de z, por lo que se extrae afuera de la integral.

$$M_X(t) = \frac{e^{\mu \cdot t} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot t^2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot (z - \sigma \cdot t)^2} \, dz$$

$$M_X(t) = \frac{e^{\mu \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot t^2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot (z - \sigma \cdot t)^2} \, dz$$

Se ingresa nuevamente una de las constantes al integrando.

$$M_X(t) = e^{\mu \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot t^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \cdot (z - \sigma \cdot t)^2} \, dz$$

Se considera ahora dentro de la integral definida el siguiente cambio de variables:

$u = z - \sigma t$ *donde σt es una constante*

$du = dz$

Puede verse que para este cambio de variables, los límites de la integral definida no se modifican.

$$M_X(t) = e^{\mu \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot t^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \cdot u^2} \, du$$

Se reconoce dentro de la integral a la función de densidad de una variable aleatoria normal estándar. La integral definida entre $-\infty$ y ∞ representa el área bajo la distribución y el eje horizontal, que por ley de cierre es igual a 1.

Se concluye que:

$$M_X(t) = e^{\mu \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot t^2}$$

Como se mencionó previamente a esta conclusión puede arribarse también por aplicación de propiedades de función generatriz de momentos a la distribución normal estándar.

Como se vio en 4.7, si X es una variable aleatoria normal con media igual a μ y desvío estándar igual a σ, se define:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

donde Z es una variable aleatoria normal estándar.

Se expresa X en función de Z:

$$X = \sigma \cdot Z + \mu$$

Esto implica entonces que:

$$M_X(t) = M_{\sigma \cdot Z + \mu}(t)$$

Según lo visto en la sección 3.3, primera propiedad, la FGM de una suma independiente es el producto de las FGM. En este caso, la constante μ es indendiente de Z por ser una constante.

$$M_X(t) = M_{\sigma \cdot Z}(t) \cdot M_\mu(t)$$

En la sección 3.3 también se vieron las propiedades segunda y tercera, que respectivamente aplicadas resultan en:

$$M_X(t) = M_Z(\sigma \cdot t) \cdot e^{\mu \cdot t}$$

Se demostró en la sección anterior que:

$$M_Z(t) = e^{\frac{1}{2} \cdot t^2}$$

Por lo que resulta inmediato que:

$$M_Z(\sigma \cdot t) = e^{\frac{1}{2} \cdot (\sigma \cdot t)^2}$$

Reemplazando en la primera expresión:

$$M_X(t) = e^{\frac{1}{2} \cdot (\sigma \cdot t)^2} \cdot e^{\mu \cdot t}$$

$$M_X(t) = e^{\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot t^2} \cdot e^{\mu \cdot t}$$

Se concluye que:

$$M_X(t) = e^{\mu \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot t^2}$$

Cabe destacar que la distribución normal estándar también puede presentarse como caso particular de la distribución normal, para el caso que $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. Bajo esta concepción, tanto su función de densidad como su función generatriz de momentos pueden obtenerse a partir de la distribución normal, especializando en esos valores.

5.8. Distribución lognormal

Por definición de función generatriz de momentos, se tiene:

$$M_X(t) = E\left(e^{Xt}\right)$$

Por otra parte, si X es una variable aleatoria continua que toma valores entre dos números reales a y b, esta definición puede expresarse como:

$$M_X(t) = \int_a^b \left[e^{xt} \cdot f(x)\right] \, dx$$

Para el caso que X siga una distribución lognormal cuyo dominio se sabe que son todos los números reales positivos y cuya función de densidad ya ha sido presentada, se tendrá:

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{xt} \cdot \frac{1}{x \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2} \, dx$$

Se procede a operar algebraicamente del siguiente modo:

$$M_X(t) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^\infty e^{xt} \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2} \, dx$$

Se realiza la siguiente sustitución:

$$y = \frac{\ln x - \mu}{\sigma}$$

De aquí se deduce que:

- $x = e^{\sigma \cdot y + \mu}$
- $dx = e^{\sigma \cdot y + \mu} \cdot \sigma \, dy$
- *los límites de la integral cambiarán, pues cuando «x» se aproxima a cero, «y» tiende a infinito; cuando «x» se aproxima a infinito «y» también lo hace.*

La sustitución resulta entonces:

$$M_X(t) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{(e^{\sigma \cdot y + \mu}) \cdot t} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot y^2} \cdot \sigma \, dy$$

La constante σ no depende de y, por lo que se extrae afuera de la integral.

$$M_X(t) = \frac{\sigma}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{(e^{\sigma \cdot y + \mu}) \cdot t} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot y^2} \, dy$$

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{(e^{\sigma \cdot y + \mu}) \cdot t} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot y^2} \, dy$$

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{t \cdot e^{\sigma \cdot y + \mu} - \frac{1}{2} \cdot y^2} \, dy$$

Para todo valor $t > 0$ la integral planteada diverge, por lo tanto, si bien como se verá más adelante los momentos de esta distribución son finitos, no existe función generatriz de momentos.

5.9. Distribución uniforme

Por definición de función generatriz de momentos, se tiene:

$$M_X(t) = E\left(e^{Xt}\right)$$

Por otra parte, si X es una variable aleatoria continua que toma valores entre dos números reales a y b, esta definición puede expresarse como:

$$M_X(t) = \int_a^b \left[e^{xt} \cdot f(x)\right] \, dx$$

Para el caso que X siga una distribución uniforme cuyo dominio se sabe que son todos los números reales comprendidos entre a y b y cuya función de densidad ya ha sido presentada, se tendrá:

$$M_X(t) = \int_a^b e^{xt} \cdot \frac{1}{b-a} \, dx$$

La constante $\frac{1}{b-a}$ no depende de x, por lo que se extrae afuera de la integral.

$$M_X(t) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b e^{xt} \, dx$$

La integral definida es inmediata.

$$M_X(t) = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{e^{xt}}{t} \bigg|_b^a \right]$$

$$M_X(t) = \frac{1}{b-a} \cdot \left(\frac{e^{bt}}{t} - \frac{e^{at}}{t} \right)$$

$$M_X(t) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{e^{bt} - e^{at}}{t}$$

Se concluye que:

$$M_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)\cdot t}$$

5.10. Distribución exponencial

Por definición de función generatriz de momentos, se tiene:

$$M_X(t) = E\left(e^{Xt}\right)$$

Por otra parte, si X es una variable aleatoria continua que toma valores entre dos números reales a y b, esta definición puede expresarse como:

$$M_X(t) = \int_a^b \left[e^{xt} \cdot f(x)\right]\, dx$$

Para el caso que X siga una distribución exponencial cuyo dominio se sabe que son todos los números reales positivos y cuya función de densidad ya ha sido presentada, se tendrá:

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{xt} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda\cdot x}\, dx$$

La constante λ no depende de x, por lo que se extrae afuera de la integral.

$$M_X(t) = \lambda \cdot \int_0^\infty e^{xt} \cdot e^{-\lambda\cdot x}\, dx$$

$$M_X(t) = \lambda \cdot \int_0^\infty e^{xt-\lambda x}\, dx$$

$$M_X(t) = \lambda \cdot \int_0^\infty e^{(t-\lambda)\cdot x}\, dx$$

La integral definida se puede resolver con cálculo integral típico.

$$M_X(t) = \lambda \cdot \lim_{m\to\infty} \left[\left.\frac{e^{(t-\lambda)\cdot x}}{t-\lambda}\right|_0^m\right]$$

$$M_X(t) = \lambda \cdot \lim_{m\to\infty} \frac{e^{(t-\lambda)\cdot m} - 1}{t-\lambda}$$

Debe tenerse la precaución de recordar que $t > 0$ y que está en el entorno de cero, por lo que $t - \lambda$ resultará ser negativo, permitiendo que la integral converja; es decir, que a medida que m tiende a infinito, la expresión $e^{(t-\lambda)\cdot m}$ tiende a 0. Es entonces:

$$M_X(t) = \lambda \cdot \frac{(-1)}{t-\lambda}$$

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

Se procede a dividir numerador y denominador por λ.

$$M_X(t) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda}t}$$

Se concluye que:

$$M_X(t) = \left(1 - \frac{1}{\lambda}t\right)^{-1}$$

5.11. Distribución gamma

Por definición de función generatriz de momentos, se tiene:

$$M_X(t) = E\left(e^{Xt}\right)$$

Por otra parte, si X es una variable aleatoria continua que toma valores entre dos números reales a y b, esta definición puede expresarse como:

$$M_X(t) = \int_a^b \left[e^{xt} \cdot f(x)\right] \, dx$$

Para el caso que X siga una distribución Gamma cuyo dominio se sabe que son todos los números reales positivos y cuya función de densidad ya ha sido presentada, se tendrá:

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{xt} \cdot \frac{x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} \, dx$$

Las constantes se extraen afuera de la integral.

$$M_X(t) = \frac{1}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^\infty e^{xt} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}} \, dx$$

$$M_X(t) = \frac{1}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^\infty e^{xt} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}} \cdot x^{\alpha-1} \, dx$$

$$M_X(t) = \frac{1}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^\infty e^{xt-\frac{x}{\beta}} \cdot x^{\alpha-1} \, dx$$

$$M_X(t) = \frac{1}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^\infty e^{-\left(\frac{1}{\beta}-t\right)\cdot x} \cdot x^{\alpha-1} \, dx$$

Se procede ahora con la siguiente sustitución, eligiendo a «u» como variable sustituta.

$$u = \left(\frac{1}{\beta} - t\right) \cdot x$$

$$du = \left(\frac{1}{\beta} - t\right) \cdot dx$$

Esto implica que:

$$x = \frac{u}{\frac{1}{\beta} - t}$$

$$dx = \frac{du}{\frac{1}{\beta} - t}$$

Se realizan las sustituciones, atendiendo a que cuando $x = 0$ la variable u también lo hace. Por otra parte, cuando x se aproxima a infinito, u también lo hace, en virtud de ser β un parámetro positivo y de encontrarse t en un entorno de cero.

$$M_X(t) = \frac{1}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^\infty e^{-u} \cdot \left(\frac{u}{\frac{1}{\beta} - t}\right)^{\alpha-1} \frac{du}{\frac{1}{\beta} - t}$$

$$M_X(t) = \frac{1}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^\infty e^{-u} \cdot \frac{u^{\alpha-1}}{\left(\frac{1}{\beta} - t\right)^{\alpha-1}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\beta} - t} \, du$$

$$M_X(t) = \frac{1}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^\infty e^{-u} \cdot u^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\beta} - t\right)^\alpha} \, du$$

La constante respecto de u se extrae fuera de la integral.

$$M_X(t) = \frac{1}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\beta} - t\right)^\alpha} \int_0^\infty e^{-u} \cdot u^{\alpha-1} \, du$$

La expresión $\int_0^\infty e^{-u} \cdot u^{\alpha-1} du$ es equivalente a $\Gamma(\alpha)$, según obra en el Anexo V, por lo que:

$$M_X(t) = \frac{1}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\beta} - t\right)^\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)$$

Así entonces:

$$M_X(t) = \frac{1}{\beta^\alpha} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\beta} - t\right)^\alpha}$$

$$M_X(t) = \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha}$$

Se concluye que:

$$M_X(t) = (1-\beta t)^{-\alpha}$$

Cabe destacar que la distribución exponencial también puede presentarse como caso particular de la distribución gamma, para el caso que $\alpha = 1$ y $\beta = \frac{1}{\lambda}$. Bajo esta concepción, tanto su función de densidad como su función generatriz de momentos pueden obtenerse a partir de la distribución gamma, especializando en esos valores.

5.12. Distribución chi cuadrado

Se presentarán dos maneras de obtener la función generatriz de momentos de la distribución chi cuadrado:

- *por aplicación de las propiedades de FGM*
- *como caso particular de la distribución gamma*

Por aplicación de las propiedades de FGM:

Se parte de aquella definición de la distribución chi cuadrado donde se la presenta como suma de k variables aleatorias independientes, normales estandarizadas y elevadas al cuadrado; tal como se vio en la sección 4.12. En efecto, si X sigue distribución chi cuadrada, será:

$$X = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + ... + Z_k^2$$

Luego, será:

$$M_X(t) = M_{Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+...+Z_k^2}(t)$$

Se aplica la primera propiedad de FGM vista en la sección 3.3.:

$$M_X(t) = M_{Z_1^2}(t) \cdot M_{Z_2^2}(t) \cdot M_{Z_3^2}(t) \cdot ... \cdot M_{Z_k^2}(t)$$

En el Anexo VI se prueba que la función generatriz de momentos de la variable aleatoria normal estándar elevada al cuadrado está dada por $(1-2t)^{-\frac{1}{2}}$, por lo tanto, se tiene:

$$M_X(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-2t)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-2t)^{-\frac{1}{2}} \cdot ...(1-2t)^{-\frac{1}{2}}$$

Se trata de un producto factores con idéntica base, por lo tanto, se suman sus exponentes

$$M_X(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-...-\frac{1}{2}}$$

Al tratarse de k factores resulta:

$$M_X(t) = (1-2t)^{-\frac{k}{2}}$$

Alternativamente, y como se vio también en la sección 4.12, la distribución chi cuadrado es un caso particular de la distribución gamma cuando $\alpha = \frac{k}{2}$ y $\beta = 2$.

Por lo tanto, para obtener su función generatriz de momentos, resulta más sencillo partir de la función generatriz de momentos de la distribución gamma y especializar para los valores mencionados. En efecto, para una variable aleatoria con distribución gamma, se tiene:

$$M_X(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha}$$

Y, puntualmente, si $\alpha = \frac{k}{2}$ y $\beta = 2$ será entonces:

$$M_X(t) = (1 - 2t)^{-\frac{k}{2}}$$

Debe tenerse presente que k es un número natural y que representa los grados de libertad de la distribución.

5.13. Distribución t de Student

Por definición de función generatriz de momentos, se tiene:

$$M_X(t) = E\left(e^{Xt}\right)$$

Por otra parte, si X es una variable aleatoria continua que toma valores entre dos números reales a y b, esta definición puede expresarse como:

$$M_X(t) = \int_a^b \left[e^{xt} \cdot f(x)\right] \, dx$$

Para el caso que X siga una distribución T de Student cuyo dominio se sabe que son todos los números reales y cuya función de densidad ya ha sido presentada, se tendrá:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \cdot \sqrt{\pi k}} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} \, dx$$

$$M_X(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \cdot \sqrt{\pi k}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} \, dx$$

Se puede demostrar que dicha integral no converge para valores naturales de k y, por lo tanto, no existe la función generatriz de momentos para esta distribución.

5.14. Distribución F de Snedecor

Por definición de función generatriz de momentos, se tiene:

$$M_X(t) = E\left(e^{Xt}\right)$$

Por otra parte, si X es una variable aleatoria continua que toma valores entre dos números reales a y b, esta definición puede expresarse como:

$$M_X(t) = \int_a^b \left[e^{xt} \cdot f(x)\right] \, dx$$

Para el caso que X siga una distribución F de Snedecor cuyo dominio se sabe que son todos los números reales positivos y cuya función de densidad ya ha sido presentada, se tendrá:

$$M_X(t) = \int_0^{\infty} e^{xt} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{r+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{r}{2}} \cdot \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{\left(1 + \frac{rx}{s}\right)^{\frac{r+s}{2}}} \, dx$$

$$M_X(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{r+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{r}{2}} \cdot \int_0^{\infty} e^{xt} \cdot \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{\left(1 + \frac{rx}{s}\right)^{\frac{r+s}{2}}} \, dx$$

Se puede demostrar que dicha integral no converge para valores naturales de r y de s y, por lo tanto, no existe la función generatriz de momentos para esta distribución.

6. Cálculo de esperanza y varianza de distribuciones conocidas

Como se vio en la sección 3.2, para una variable aleatoria X con función generatriz de momentos $M_X(t)$ conocida, se tiene:

$$\left.\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = E\left(X\right)$$

$$\left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = E\left(X^2\right)$$

Y, como se vio en la sección 2.2.2, para esta misma variable aleatoria se tiene además:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

A partir de esta información, se procede a calcular, por lo tanto, el momento absoluto de orden uno, de orden dos y la varianza para cada una de las distribuciones vistas, dando por conocida su función generatriz de momentos.

6.1. Distribución binomial puntual (Bernoulli)

Se parte de la función generatriz de momentos:

$$M_X(t) = q + p \cdot e^t$$

La derivada primera respecto a t está dada por:

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = p \cdot e^t$$

La derivada segunda respecto a t está dada por:

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = p \cdot e^t$$

A partir de la derivada primera se obtiene el momento absoluto de orden uno -esperanza matemática-, al igualar t a cero; es decir:

$$\left.\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = p$$

A partir de la derivada segunda se obtiene el momento absoluto de orden dos, al igualar t a cero; es decir:

$$\left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = p$$

Se tiene entonces respectivamente:

$$E(X) = p \qquad\qquad E(X^2) = p$$

De este modo, recordando que la varianza es igual a:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Se reemplazan los momentos absolutos obtenidos previamente y se llega a:

$$Var(X) = p - p^2$$

Se saca factor común p para obtener:

$$Var(X) = p \cdot (1 - p)$$

Se recuerda que en esta distribución $p + q = 1$, por lo tanto será:

$$Var(X) = p \cdot q$$

6.2. Distribución binomial general

Se parte de la función generatriz de momentos:

$$M_X(t) = (q + p \cdot e^t)^n$$

La derivada primera respecto a t está dada por:

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = n \cdot (q + p \cdot e^t)^{n-1} \cdot p \cdot e^t$$

que puede escribirse como:

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = n \cdot p \cdot e^t \cdot (q + p \cdot e^t)^{n-1}$$

Para obtener la derivada segunda de la función generatriz de momentos, debe aplicarse la regla de derivada del producto de funciones; es decir: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$.

Donde: $u = n \cdot p \cdot e^t$ $\qquad$ $v = (q + p \cdot e^t)^{n-1}$

De este modo, la derivada segunda está dada por la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = n \cdot p \cdot e^t \cdot (q + p \cdot e^t)^{n-1} + n \cdot p \cdot e^t \cdot (n-1) \cdot (q + p \cdot e^t)^{n-2} \cdot p \cdot e^t$$

Que puede escribirse como:

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = n \cdot p \cdot e^t \cdot \left[(q + p \cdot e^t)^{n-1} + (n-1) \cdot (q + p \cdot e^t)^{n-2} \cdot p \cdot e^t\right]$$

A partir de la derivada primera se obtiene el momento absoluto de orden uno -esperanza matemática-, al igualar t a cero; es decir:

$$\left.\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = n \cdot p \cdot (q + p)^{n-1}$$

Se recuerda que en esta distribución $q + p = 1$*, por lo que se tiene:*

$$\left.\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = n \cdot p$$

A partir de la derivada segunda se obtiene el momento absoluto de orden dos, al igualar t a cero; es decir:

$$\left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = n \cdot p \cdot \left[(q + p)^{n-1} + (n-1) \cdot (q + p)^{n-2} \cdot p\right]$$

Se recuerda nuevamente que en esta distribución $q + p = 1$*, por lo que se tiene:*

$$\left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = n \cdot p \cdot [1 + (n-1) \cdot p]$$

$$\left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = n \cdot p + n \cdot (n-1) \cdot p^2$$

Se aplica propiedad distributiva para obtener:

$$\left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = n \cdot p + n^2 \cdot p^2 - n \cdot p^2$$

Se tiene entonces respectivamente:

$$E(X) = n \cdot p \qquad\qquad E(X^2) = n \cdot p + n^2 \cdot p^2 - n \cdot p^2$$

De este modo, recordando que la varianza es igual a:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Se reemplazan los momentos absolutos obtenidos previamente:

$$Var(X) = n \cdot p + n^2 \cdot p^2 - n \cdot p^2 - (n \cdot p)^2$$

$$Var(X) = n \cdot p + n^2 \cdot p^2 - n \cdot p^2 - n^2 \cdot p^2$$

$$Var(X) = n \cdot p - n \cdot p^2$$

Tomando factor común $n \cdot p$ esta expresión puede escribirse como:

$$Var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Resultando la varianza equivalente a:

$$Var(X) = n \cdot p \cdot q$$

6.3. Distribución de Poisson

Se parte de la función generatriz de momentos:

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

La derivada primera respecto a t está dada por:

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = e^{\lambda(e^t-1)} \cdot \lambda \cdot e^t$$

Expresión que puede escribirse como:

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = \lambda \cdot e^{\lambda(e^t-1)} \cdot e^t$$

Por la propiedad de productos de potencia de igual base:

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = \lambda \cdot e^{\lambda(e^t-1)+t}$$

La derivada segunda respecto a t está dada por:

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = \lambda \cdot e^{\lambda(e^t-1)+t} \cdot \left(\lambda \cdot e^t + 1\right)$$

A partir de la derivada primera se obtiene el momento absoluto de orden uno -esperanza matemática-, al igualar t a cero; es decir:

$$\left.\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \lambda$$

A partir de la derivada segunda se obtiene el momento absoluto de orden dos, al igualar t a cero; es decir:

$$\left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \lambda \cdot (\lambda + 1)$$

$$\left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \lambda^2 + \lambda$$

Se tiene entonces respectivamente:

$$E(X) = \lambda \qquad\qquad E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$$

De este modo, recordando que la varianza es igual a:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Se reemplazan los momentos absolutos obtenidos previamente y se llega a:

$$Var(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$Var(X) = \lambda$$

6.4. Distribución geométrica

Se parte de la función generatriz de momentos:

$$M_X(t) = \frac{p}{1 - q \cdot e^t}$$

A los efectos de derivarla, resulta conveniente expresarla como producto:

$$M_X(t) = p \cdot (1 - q \cdot e^t)^{-1}$$

Se deriva respecto de t recordando que p es constante:

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = p \cdot (-1) \cdot (1 - q \cdot e^t)^{-2} \cdot (-q) \cdot e^t$$

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = p \cdot q \cdot e^t \cdot (1 - q \cdot e^t)^{-2}$$

La derivada primera respecto a t está dada entonces por:

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = \frac{p \cdot q \cdot e^t}{(1 - q \cdot e^t)^2}$$

Para obtener la derivada segunda de la función generatriz de momentos, conviene trabajar con la expresión presentada como producto. Así, se tenía:

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = p \cdot q \cdot e^t \cdot (1 - q \cdot e^t)^{-2}$$

Se deriva respecto de t recordando que $p \cdot q$ es constante; para ello, se aplica la propiedad de derivada de un producto de funciones:

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = p \cdot q \cdot \left[e^t \cdot (1 - q \cdot e^t)^{-2} + e^t \cdot (-2) \cdot (1 - q \cdot e^t)^{-3} \cdot (-q) \cdot e^t\right]$$

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = p \cdot q \cdot \left[e^t \cdot (1 - q \cdot e^t)^{-2} + 2 \cdot q \cdot e^{2t} \cdot (1 - q \cdot e^t)^{-3}\right]$$

Dentro del corchete se toma factor común $e^t \cdot (1 - q \cdot e^t)^{-2}$

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = p \cdot q \cdot e^t \cdot (1 - q \cdot e^t)^{-2} \cdot \left[1 + 2 \cdot q \cdot e^t \cdot (1 - q \cdot e^t)^{-1}\right]$$

Se expresan los productos como cocientes:

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = \frac{p \cdot q \cdot e^t}{(1 - q \cdot e^t)^2} \cdot \left[1 + 2 \cdot \frac{q \cdot e^t}{1 - q \cdot e^t}\right]$$

Se distribuye de modo que la derivada segunda está dada por la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = \frac{p \cdot q \cdot e^t}{(1 - q \cdot e^t)^2} + 2 \cdot \frac{p \cdot q^2 \cdot e^{2t}}{(1 - q \cdot e^t)^3}$$

Las dos expresiones finales para ambas derivadas resultan respectivamente:

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = \frac{p \cdot q \cdot e^t}{(1 - q \cdot e^t)^2}$$

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = \frac{p \cdot q \cdot e^t}{(1 - q \cdot e^t)^2} + 2 \cdot \frac{p \cdot q^2 \cdot e^{2t}}{(1 - q \cdot e^t)^3}$$

A partir de la derivada primera se obtiene el momento absoluto de orden uno -esperanza matemática-, al igualar t a cero; es decir:

$$\left.\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{p \cdot q}{(1-q)^2}$$

Se recuerda que en esta distribución $1 - q = p$*, por lo que se tiene:*

$$\left.\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{p \cdot q}{p^2}$$

$$\left.\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{q}{p}$$

A partir de la derivada segunda se obtiene el momento absoluto de orden dos, al igualar t a cero; es decir:

$$\left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \frac{p \cdot q}{(1-q)^2} + 2 \cdot \frac{p \cdot q^2}{(1-q)^3}$$

Se recuerda nuevamente que en esta distribución $1 - q = p$*, por lo que se tiene:*

$$\left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \frac{p \cdot q}{p^2} + 2 \cdot \frac{p \cdot q^2}{p^3}$$

$$\left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \frac{q}{p} + 2 \cdot \frac{q^2}{p^2}$$

Se tiene entonces respectivamente:

$$E(X) = \tfrac{q}{p} \qquad\qquad E(X^2) = \tfrac{q}{p} + 2 \cdot \tfrac{q^2}{p^2}$$

De este modo, recordando que la varianza es igual a:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Se reemplazan los momentos absolutos obtenidos previamente y se llega a:

$$Var(X) = \frac{q}{p} + 2 \cdot \frac{q^2}{p^2} - \frac{q^2}{p^2}$$

$$Var(X) = \frac{q}{p} + \frac{q^2}{p^2}$$

Se resuelve la suma para obtener:

$$Var(X) = \frac{p \cdot q + q^2}{p^2}$$

Se recuerda nuevamente que en esta distribución $p = 1 - q$*, por lo que se tiene:*

$$Var(X) = \frac{(1-q) \cdot q + q^2}{p^2}$$

$$Var(X) = \frac{q - q^2 + q^2}{p^2}$$

$$Var(X) = \frac{q}{p^2}$$

6.5. Distribución binomial negativa

Se parte de la función generatriz de momentos:

$$M_X(t) = \left(\frac{p}{1-q\cdot e^t}\right)^r$$

A los efectos de derivarla, resulta conveniente expresarla como producto:

$$M_X(t) = p^r \cdot (1-q\cdot e^t)^{-r}$$

Se deriva respecto de t recordando que p^r es constante:

$$M_X(t) = p^r \cdot (-r) \cdot (1-q\cdot e^t)^{-r-1} \cdot (-q) \cdot e^t$$

$$M_X(t) = r \cdot p^r \cdot q \cdot e^t \cdot (1-q\cdot e^t)^{-r-1}$$

La derivada primera respecto a t está dada entonces por:

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = r \cdot \frac{p^r\cdot q\cdot e^t}{(1-q\cdot e^t)^{r+1}}$$

Para obtener la derivada segunda de la función generatriz de momentos, conviene trabajar con la expresión presentada como producto. Así, se tenía:

$$M_X(t) = r \cdot p^r \cdot q \cdot e^t \cdot (1-q\cdot e^t)^{-r-1}$$

Se deriva respecto de t recordando que $r\cdot p^r\cdot q$ es constante; para ello, se aplica la propiedad de derivada de un producto de funciones:

$$M_X(t) = r\cdot p^r\cdot q\cdot\left[e^t\cdot(1-q\cdot e^t)^{-r-1} + e^t\cdot(-r-1)\cdot(1-q\cdot e^t)^{-r-2}\cdot(-q)\cdot e^t\right]$$

$$M_X(t) = r\cdot p^r\cdot q\cdot\left[e^t\cdot(1-q\cdot e^t)^{-r-1} + e^{2t}\cdot(r+1)\cdot q\cdot(1-q\cdot e^t)^{-r-2}\right]$$

$$M_X(t) = r\cdot p^r\cdot q\cdot\left[e^t\cdot(1-q\cdot e^t)^{-(r+1)} + e^{2t}\cdot(r+1)\cdot q\cdot(1-q\cdot e^t)^{-(r+2)}\right]$$

Dentro del corchete se toma factor común $e^t\cdot(1-q\cdot e^t)^{-(r+1)}$

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = r\cdot p^r\cdot q\cdot e^t\cdot(1-q\cdot e^t)^{-(r+1)}\cdot\left[1+e^t\cdot(r+1)\cdot q\cdot(1-q\cdot e^t)^{-1}\right]$$

Se expresan los productos como cocientes:

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = \frac{r\cdot p^r\cdot q\cdot e^t}{(1-q\cdot e^t)^{r+1}}\cdot\left[1+\frac{(r+1)\cdot q\cdot e^t}{1-q\cdot e^t}\right]$$

Se distribuye de modo que la derivada segunda está dada por la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = \frac{r\cdot p^r\cdot q\cdot e^t}{(1-q\cdot e^t)^{r+1}} + \frac{r\cdot(r+1)\cdot p^r\cdot q^2\cdot e^{2t}}{(1-q\cdot e^t)^{r+2}}$$

Las dos expresiones finales para ambas derivadas resultan respectivamente:

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = r \cdot \frac{p^r\cdot q\cdot e^t}{(1-q\cdot e^t)^{r+1}}$$

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = \frac{r\cdot p^r\cdot q\cdot e^t}{(1-q\cdot e^t)^{r+1}} + \frac{r\cdot(r+1)\cdot p^r\cdot q^2\cdot e^{2t}}{(1-q\cdot e^t)^{r+2}}$$

A partir de la derivada primera se obtiene el momento absoluto de orden uno -esperanza matemática-, al igualar t a cero; es decir:

$$\left.\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = r\cdot\frac{p^r\cdot q}{(1-q)^{r+1}}$$

Se recuerda que en esta distribución $1-q=p$, por lo que se tiene:

$$\left.\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = r \cdot \frac{p^r \cdot q}{p^{r+1}}$$

$$\left.\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = r \cdot \frac{q}{p}$$

A partir de la derivada segunda se obtiene el momento absoluto de orden dos, al igualar t a cero; es decir:

$$\left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \frac{r \cdot p^r \cdot q}{(1-q)^{r+1}} + \frac{r \cdot (r+1) \cdot p^r \cdot q^2}{(1-q)^{r+2}}$$

Se recuerda nuevamente que en esta distribución $1 - q = p$*, por lo que se tiene:*

$$\left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \frac{r \cdot p^r \cdot q}{p^{r+1}} + \frac{r \cdot (r+1) \cdot p^r \cdot q^2}{p^{r+2}}$$

$$\left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \frac{r \cdot q}{p} + \frac{r \cdot (r+1) \cdot q^2}{p^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \frac{r \cdot q}{p} + \frac{(r^2 + r) \cdot q^2}{p^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \frac{r \cdot q}{p} + \frac{r^2 \cdot q^2 + r \cdot q^2}{p^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = r \cdot \frac{q}{p} + r^2 \cdot \frac{q^2}{p^2} + r \cdot \frac{q^2}{p^2}$$

Se tiene entonces respectivamente:

$$E(X) = r \cdot \tfrac{q}{p} \qquad\qquad E(X^2) = r \cdot \tfrac{q}{p} + r^2 \cdot \tfrac{q^2}{p^2} + r \cdot \tfrac{q^2}{p^2}$$

De este modo, recordando que la varianza es igual a:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Se reemplazan los momentos absolutos obtenidos previamente y se llega a:

$$Var(X) = r \cdot \frac{q}{p} + r^2 \cdot \frac{q^2}{p^2} + r \cdot \frac{q^2}{p^2} - r^2 \cdot \frac{q^2}{p^2}$$

$$Var(X) = r \cdot \frac{q}{p} + r \cdot \frac{q^2}{p^2}$$

Se toma factor común:

$$Var(X) = r \cdot \frac{q}{p} \cdot \left(1 + \frac{q}{p}\right)$$

Se resuelve la suma del paréntesis:

$$Var(X) = r \cdot \frac{q}{p} \cdot \frac{p+q}{p}$$

Debe tenerse presente que $p + q = 1$*, por lo que resulta:*

$$Var(X) = r \cdot \frac{q}{p} \cdot \frac{1}{p}$$

Que puede escribirse:

$$Var(X) = r \cdot \frac{q}{p^2}$$

6.6. Distribución normal estándar

Se parte de la función generatriz de momentos:

$$M_X(t) = e^{\frac{1}{2}\cdot t^2}$$

La derivada primera respecto a t está dada por:

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = e^{\frac{1}{2}\cdot t^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t$$

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = e^{\frac{1}{2}\cdot t^2} \cdot t$$

Para obtener la derivada segunda de la función generatriz de momentos, debe aplicarse la regla de derivada del producto de funciones ya mencionada, donde:

$u = e^{\frac{1}{2}\cdot t^2}$ $\qquad$ $v = t$

De este modo, la derivada segunda está dada por la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = e^{\frac{1}{2}\cdot t^2} \cdot t \cdot t + e^{\frac{1}{2}\cdot t^2}$$

Que puede escribirse como:

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = e^{\frac{1}{2}\cdot t^2} \cdot (t^2 + 1)$$

A partir de la derivada primera se obtiene el momento absoluto de orden uno -esperanza matemática-, al igualar t a cero; es decir:

$$\left.\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

A partir de la derivada segunda se obtiene el momento absoluto de orden dos, al igualar t a cero; es decir:

$$\left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = 1$$

Se tiene entonces respectivamente:

$$E(X) = 0 \qquad\qquad E(X^2) = 1$$

De este modo, recordando que la varianza es igual a:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Se reemplazan los momentos absolutos obtenidos previamente y se llega a:

$$Var(X) = 1$$

6.7. Distribución normal

Se parte de la función generatriz de momentos:

$$M_X(t) = e^{\mu\cdot t + \frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot t^2}$$

La derivada primera respecto a t está dada por:

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = e^{\mu\cdot t + \frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot t^2} \cdot \left(\mu + \frac{2t}{2} \cdot \sigma^2\right)$$

que puede escribirse como:

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = e^{\mu\cdot t + \frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot t^2} \cdot \left(\mu + t \cdot \sigma^2\right)$$

Para obtener la derivada segunda de la función generatriz de momentos, debe aplicarse la regla de derivada del producto de funciones ya mencionada, donde:

$u = e^{\mu \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot t^2}$ $\qquad v = \mu + t \cdot \sigma^2$

De este modo, la derivada segunda está dada por la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = e^{\mu \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot t^2} \cdot \left(\mu + t \cdot \sigma^2\right)^2 + e^{\mu \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot t^2} \cdot \sigma^2$$

Que puede escribirse como:

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = e^{\mu \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot t^2} \cdot \left[\left(\mu + t \cdot \sigma^2\right)^2 + \sigma^2\right]$$

A partir de la derivada primera se obtiene el momento absoluto de orden uno -esperanza matemática-, al igualar t a cero; es decir:

$$\left.\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \mu$$

A partir de la derivada segunda se obtiene el momento absoluto de orden dos, al igualar t a cero; es decir:

$$\left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \mu^2 + \sigma^2$$

Se tiene entonces respectivamente:

$$E(X) = \mu \qquad\qquad E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2$$

De este modo, recordando que la varianza es igual a:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Se reemplazan los momentos absolutos obtenidos previamente y se llega a:

$$Var(X) = \sigma^2$$

6.8. Distribución lognormal

Se recuerda que la distribución lognormal no tiene función generatriz de momentos; por lo que los momentos absolutos deben obtenerse directamente por aplicación de la definición vista en la sección 2.2.1.

$$E(X^j) = \int_0^{\infty} x^j \cdot \frac{1}{x \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Es decir:

$$E(X^j) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{\infty} x^{j-1} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Debe notarse, sin embargo, que la distribución lognormal no está definida a partir de todos sus momentos. Es decir, podría existir otra distribución de probabilidad que coincida en todos sus momentos. Por eso esta distribución no tiene F.G.M. y no es posible la aplicación de la propiedad vista en la sección 3.1 acerca de la relación unívoca entre una función de densidad y la F.G.M.

No obstante, se presenta la expresión general para la obtención de sus momentos absolutos:

$$E(X^j) = e^{j \cdot \mu + \frac{1}{2} \cdot j^2 \cdot \sigma^2}$$

Se tiene entonces respectivamente:

$$E(X) = e^{\mu + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2} \qquad\qquad E(X^2) = e^{2 \cdot \mu + 2 \cdot \sigma^2}$$

De este modo, recordando que la varianza es igual a:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Se reemplazan los momentos absolutos enunciados previamente:

$$Var(X) = e^{2\cdot\mu+2\cdot\sigma^2} - \left(e^{\mu+\frac{1}{2}\cdot\sigma^2}\right)^2$$

$$Var(X) = e^{2\cdot\mu+2\cdot\sigma^2} - e^{2\cdot\mu+\sigma^2}$$

Se toma factor común $e^{2\cdot\mu+\sigma^2}$ *para finalmente obtener:*

$$Var(X) = e^{2\cdot\mu+\sigma^2} \cdot \left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

6.9. Distribución uniforme

Se parte de la función generatriz de momentos:

$$M_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)\cdot t}$$

Para obtener la derivada primera de la función generatriz de momentos, debe aplicarse la regla de derivada del cociente de funciones ya mencionada, donde:

$u = e^{bt} - e^{at}$ $\qquad\qquad$ $v = (b-a)\cdot t$

$$M_X(t) = \frac{(e^{bt}\cdot b - e^{at}\cdot a)\cdot(b-a)\cdot t - (e^{bt} - e^{at})\cdot(b-a)}{[(b-a)\cdot t]^2}$$

En el numerador se toma factor común $(b-a)$ *y en el denominador se distribuye la potencia:*

$$M_X(t) = \frac{(b-a)\cdot\left[(e^{bt}\cdot b - e^{at}\cdot a)\cdot t - (e^{bt} - e^{at})\right]}{(b-a)^2\cdot t^2}$$

$$M_X(t) = \frac{(e^{bt}\cdot b - e^{at}\cdot a)\cdot t - (e^{bt} - e^{at})}{(b-a)\cdot t^2}$$

Se procede a operar en el numerador:

$$M_X(t) = \frac{e^{bt}\cdot b\cdot t - e^{at}\cdot a\cdot t - e^{bt} + e^{at}}{(b-a)\cdot t^2}$$

$$M_X(t) = \frac{e^{bt}\cdot b\cdot t - e^{bt} - e^{at}\cdot a\cdot t + e^{at}}{(b-a)\cdot t^2}$$

Se procede a tomar factores común, de modo que la derivada primera está dada por la siguiente expresión:

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = \frac{e^{bt}\cdot(bt-1) - e^{at}\cdot(at-1)}{(b-a)\cdot t^2}$$

Para obtener la derivada segunda de la función generatriz de momentos, debe aplicarse la regla de derivada del cociente de funciones ya mencionada, donde:

$u = e^{bt}\cdot(bt-1) - e^{at}\cdot(at-1)$ $\qquad\qquad$ $v = (b-a)\cdot t^2$

Ha de notarse que, además, para derivar este cociente, en el numerador debe aplicarse la regla de derivada del producto de funciones. De este modo, la derivada segunda está dada por la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = \frac{\{e^{bt}b(bt-1) + e^{bt}b - [e^{at}a(at-1) + e^{at}a]\}(b-a)t^2 - [e^{bt}\cdot(bt-1) - e^{at}\cdot(at-1)]2t(b-a)}{[(b-a)t^2]^2}$$

En el denominador se distribuye la potencia.

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}=\frac{\{e^{bt}b(bt-1)+e^{bt}b-[e^{at}a(at-1)+e^{at}a]\}(b-a)t^2-[e^{bt}\cdot(bt-1)-e^{at}\cdot(at-1)]2t(b-a)}{(b-a)^2t^4}$$

Se divide numerador y denominador por $(b-a)\cdot t$

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}=\frac{\{e^{bt}b(bt-1)+e^{bt}b-[e^{at}a(at-1)+e^{at}a]\}t-[e^{bt}\cdot(bt-1)-e^{at}\cdot(at-1)]2}{(b-a)t^3}$$

Se procede a operar algebraicamente en el numerador:

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}=\frac{e^{bt}bt(bt-1)+e^{bt}bt-[e^{at}at(at-1)+e^{at}at]-2[e^{bt}\cdot(bt-1)-e^{at}\cdot(at-1)]}{(b-a)t^3}$$

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}=\frac{e^{bt}bt(bt-1)+e^{bt}bt-e^{at}at(at-1)-e^{at}at-2e^{bt}\cdot(bt-1)+2e^{at}\cdot(at-1)}{(b-a)t^3}$$

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}=\frac{e^{bt}b^2t^2-e^{bt}bt+e^{bt}bt-e^{at}a^2t^2+e^{at}at-e^{at}at-2e^{bt}bt+2e^{bt}+2e^{at}at-2e^{at}}{(b-a)t^3}$$

Simplificando:

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}=\frac{e^{bt}b^2t^2-e^{at}a^2t^2-2e^{bt}bt+2e^{bt}+2e^{at}at-2e^{at}}{(b-a)t^3}$$

Reordenando, se tiene:

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}=\frac{e^{bt}b^2t^2-2e^{bt}bt+2e^{bt}-e^{at}a^2t^2+2e^{at}at-2e^{at}}{(b-a)t^3}$$

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}=\frac{e^{bt}b^2t^2-2e^{bt}bt+2e^{bt}-(e^{at}a^2t^2-2e^{at}at+2e^{at})}{(b-a)t^3}$$

Se toma factor común en el numerador, para finalmente obtener:

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}=\frac{e^{bt}\cdot(b^2t^2-2bt+2)-e^{at}\cdot(a^2t^2-2at+2)}{(b-a)t^3}$$

Las dos expresiones finales para ambas derivadas resultan respectivamente:

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}=\frac{e^{bt}\cdot(bt-1)-e^{at}\cdot(at-1)}{(b-a)\cdot t^2}$$

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}=\frac{e^{bt}\cdot(b^2t^2-2bt+2)-e^{at}\cdot(a^2t^2-2at+2)}{(b-a)t^3}$$

Se observa que estas expresiones no están definidas para $t=0$. Pero debe notarse que a medida que t tiende a cero, estas derivadas se aproximan a un número finito; es decir, en t=0 hay una discontinuidad evitable en ambos casos. Se puede aplicar la regla de L'Hôpital tantas veces como sea necesario para resolver las indeterminaciones, puesto que las condiciones de aplicación del Teorema de Cauchy están dadas.

En efecto, para el caso de la derivada primera se obtendrá:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{bt}\cdot(bt-1)-e^{at}\cdot(at-1)}{(b-a)\cdot t^2}=\frac{a+b}{2}$$

La indeterminación se resuelve derivando respecto de t numerador y denominador:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{bt}\cdot b^2\cdot t-e^{bt}\cdot b+e^{bt}\cdot b-e^{at}\cdot a^2\cdot t+e^{at}\cdot a-e^{at}\cdot a}{2\cdot t\cdot(b-a)}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{bt}\cdot b^2\cdot t-e^{at}\cdot a^2\cdot t}{2\cdot t\cdot(b-a)}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{bt}\cdot b^2\cdot t-e^{at}\cdot a^2}{2\cdot(b-a)}=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}$$

En el numerador se reconoce una diferencia de cuadrados, por lo que será:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = \frac{a+b}{2}$$

Análogamente con la derivada segunda pero en este caso haciendo uso de la regla de L'Hôpital dos veces se arriba a la siguiente expresión:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

Se tiene entonces respectivamente:

$E(X) = \frac{a+b}{2}$ $\qquad$ $E(X^2) = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$

De este modo, recordando que la varianza es igual a:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Se reemplazan los momentos absolutos obtenidos previamente:

$$Var(X) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$Var(X) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4}$$

Se desarrolla el cuadrado del binomio para obtener:

$$Var(X) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$

Se procede a multiplicar y dividir el primer término por 4 y a multiplicar y dividir el segundo término por 3.

$$Var(X) = \frac{4a^2+4ab+4b^2}{12} - \frac{3a^2+6ab+3b^2}{12}$$

Se efectúa la resta:

$$Var(X) = \frac{4a^2+4ab+4b^2-\left(3a^2+6ab+3b^2\right)}{12}$$

$$Var(X) = \frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2}{12}$$

$$Var(X) = \frac{a^2-2ab+b^2}{12}$$

$$Var(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

Como en la distribución uniforme $b > a$ y por otra parte $(a-b)^2 = (b-a)^2$ para cualquier par de reales a y b, es frecuente encontrar la expresión anterior de la siguiente manera:

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

6.10. Distribución exponencial

Se parte de la función generatriz de momentos:

$$M_X(t) = \left(1 - \frac{1}{\lambda}t\right)^{-1}$$

La derivada primera respecto a t está dada por:

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = -\left(1 - \frac{1}{\lambda}t\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = \left(1 - \frac{1}{\lambda}t\right)^{-2} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

La derivada segunda respecto a t está dada por:

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = -2\left(1 - \frac{1}{\lambda}t\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = 2\left(1 - \frac{1}{\lambda}t\right)^{-3} \cdot \frac{1}{\lambda^2}$$

A partir de la derivada primera se obtiene el momento absoluto de orden uno -esperanza matemática-, al igualar t a cero; es decir:

$$\left.\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{1}{\lambda}$$

A partir de la derivada segunda se obtiene el momento absoluto de orden dos, al igualar t a cero; es decir:

$$\left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Se tiene entonces respectivamente:

$E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $\qquad\qquad$ $E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$

De este modo, recordando que la varianza es igual a:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Se reemplazan los momentos absolutos obtenidos previamente y se llega a:

$$Var(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

6.11. Distribución gamma

Se parte de la función generatriz de momentos:

$$M_X(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha}$$

La derivada primera respecto a t está dada por:

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = -\alpha \cdot (1 - \beta t)^{-\alpha-1} \cdot (-\beta)$$

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = \alpha \cdot \beta \cdot (1 - \beta t)^{-\alpha-1}$$

La derivada segunda respecto a t está dada por:

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = \alpha \cdot \beta \cdot (-\alpha - 1) \cdot (1 - \beta t)^{-\alpha-2} \cdot (-\beta)$$

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = \alpha \cdot \beta^2 \cdot (\alpha + 1) \cdot (1 - \beta t)^{-\alpha-2}$$

A partir de la derivada primera se obtiene el momento absoluto de orden uno -esperanza matemática-, al igualar t a cero; es decir:

$$\left. \frac{\partial M_X(t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \alpha \cdot \beta$$

A partir de la derivada segunda se obtiene el momento absoluto de orden dos, al igualar t a cero; es decir:

$$\left. \frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} \right|_{t=0} = \alpha \cdot (\alpha + 1) \cdot \beta^2$$

Se tiene entonces respectivamente:

$$E(X) = \alpha \cdot \beta \qquad\qquad E(X^2) = \alpha \cdot (\alpha + 1) \cdot \beta^2$$

De este modo, recordando que la varianza es igual a:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Se reemplazan los momentos absolutos obtenidos previamente:

$$Var(X) = \alpha \cdot (\alpha + 1) \cdot \beta^2 - (\alpha \cdot \beta)^2$$

$$Var(X) = \alpha \cdot (\alpha + 1) \cdot \beta^2 - \alpha^2 \cdot \beta^2$$

Se toma factor común $\alpha \cdot \beta^2$

$$Var(X) = \alpha \cdot \beta^2 \cdot [(\alpha + 1) - \alpha]$$

$$Var(X) = \alpha \cdot \beta^2$$

6.12. Distribución chi cuadrado

Se parte de la función generatriz de momentos:

$$M_X(t) = (1 - 2t)^{-\frac{k}{2}}$$

La derivada primera respecto a t está dada por:

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = -\frac{k}{2} \cdot (1 - 2t)^{-\frac{k}{2}-1} \cdot (-2)$$

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = k \cdot (1 - 2t)^{-\frac{k}{2}-1}$$

La derivada segunda respecto a t está dada por:

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = k \cdot \left(-\frac{k}{2} - 1 \right) \cdot (1 - 2t)^{-\frac{k}{2}-2} \cdot (-2)$$

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = k \cdot (k + 2) \cdot (1 - 2t)^{-\frac{k}{2}-2}$$

A partir de la derivada primera se obtiene el momento absoluto de orden uno -esperanza matemática-, al igualar t a cero; es decir:

$$\left. \frac{\partial M_X(t)}{\partial t} \right|_{t=0} = k$$

A partir de la derivada segunda se obtiene el momento absoluto de orden dos, al igualar t a cero; es decir:

$$\left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = k \cdot (k+2)$$

Se tiene entonces respectivamente:

$$E(X) = k \qquad\qquad E(X^2) = k \cdot (k+2)$$

De este modo, recordando que la varianza es igual a:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Se reemplazan los momentos absolutos obtenidos previamente:

$$Var(X) = k \cdot (k+2) - k^2$$

Se procede a distribuir:

$$Var(X) = k^2 + 2k - k^2$$

Se tiene:

$$Var(X) = 2k$$

7. Cuadros resumen

I) Dominio, parámetros, función de probabilidad $P(X = k)$ y función generatriz de momentos (FGM) para distribuciones discretas.

Distribución	***Dominio***	***Parámetro(s)***	***Función de probabilidad***	***FGM***
Binomial puntual	*0;1*	p	$p^k \cdot q^{1-k}$	$q + p \cdot e^t$
Binomial general	*0;1;2;3;...;n*	*n;p*	$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$	$(q + p \cdot e^t)^n$
Poisson	*0;1;2;3;...*	λ	$\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$	$e^{\lambda(e^t-1)}$
Geométrica	*0;1;2;3;...*	p	$p \cdot q^k$	$\frac{p}{1-q \cdot e^t}$
Binomial negativa	*0;1;2;3;...*	*p;r*	$\binom{r+k-1}{r-1} \cdot p^r \cdot q^k$	$\left(\frac{p}{1-q \cdot e^t}\right)^r$

En todos los casos: $q = 1 - p$

II) Dominio, parámetros, función de densidad $f(x)$ y función generatriz de momentos (FGM) para distribuciones continuas.

Distribución	***Dominio***	***Parámetro(s)***	***Función de densidad***	***FGM***
Normal estándar	$(-\infty; \infty)$	-	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2}$	$e^{\frac{1}{2} \cdot t^2}$
Normal	$(-\infty; \infty)$	$\mu; \sigma$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$e^{\mu \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot t^2}$
Lognormal	$(0; \infty)$	$\mu; \sigma$	$\frac{1}{x \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2}$	*no existe*
Uniforme	$(a; b)$	$a; b$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a) \cdot t}$
Exponencial	$(0; \infty)$	λ	$\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$	$\left(1 - \frac{1}{\lambda} t\right)^{-1}$
Gamma	$(0; \infty)$	$\alpha; \beta$	$\frac{x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)}$	$(1 - \beta t)^{-\alpha}$
Chi cuadrado	$(0; \infty)$	k	$\frac{x^{\frac{k}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$	$(1 - 2t)^{-\frac{k}{2}}$
T de Student	$(-\infty; \infty)$	k	$\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \cdot \sqrt{\pi k}} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$	*no existe*
F de Snedecor	$(0; \infty)$	*r;s*	$\frac{\Gamma\left(\frac{r+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{r}{2}} \cdot \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{\left(1+\frac{rx}{s}\right)^{\frac{r+s}{2}}}$	*no existe*

III) Parámetros, función generatriz de momentos (FGM), esperanza y varianza para distribuciones discretas.

Distribución	***Parámetro(s)***	***FGM***	***Esperanza***	***Varianza***
Binomial puntual	p	$q + p \cdot e^t$	p	$p \cdot q$
Binomial general	*n;p*	$(q + p \cdot e^t)^n$	$n \cdot p$	$n \cdot p \cdot q$
Poisson	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$	λ	λ
Geométrica	p	$\frac{p}{1-q \cdot e^t}$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Binomial negativa	*p;r*	$\left(\frac{p}{1-q \cdot e^t}\right)^r$	$r \cdot \frac{q}{p}$	$r \cdot \frac{q}{p^2}$

En todos los casos: $q = 1 - p$

IV) Parámetros, función generatriz de momentos (FGM), esperanza y varianza para distribuciones continuas.

Distribución	***Parámetro(s)***	***FGM***	***Esperanza***	***Varianza***
Normal estándar	-	$e^{\frac{1}{2} \cdot t^2}$	*0*	*1*
Normal	$\mu; \sigma$	$e^{\mu \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot t^2}$	μ	σ^2
Lognormal	$\mu; \sigma$	*no existe*	$e^{\mu + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2}$	$e^{2 \cdot \mu + \sigma^2} \cdot \left(e^{\sigma^2} - 1\right)$
Uniforme	$a; b$	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a) \cdot t}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponencial	$(0; \infty)$	$\left(1 - \frac{1}{\lambda} t\right)^{-1}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Gamma	$\alpha; \beta$	$(1 - \beta t)^{-\alpha}$	$\alpha \cdot \beta$	$\alpha \cdot \beta^2$
Chi cuadrado	k	$(1 - 2t)^{-\frac{k}{2}}$	k	*2k*

8. Ejercicios

Ejercicio 1 *Un actuario determina que el importe de los siniestros de cierto tipo de accidentes es una variable aleatoria, X, con la función generatriz de momentos:*

$$M_x(t) = \frac{1}{(1 - 2500 \cdot t)^4}$$

Determine la desviación estándar del importe de los siniestros para esta clase de accidentes.

Ejercicio 2 *Una compañía asegura hogares en tres ciudades J, K y L. Dado que una distancia suficiente separa a las ciudades, es razonable suponer que las pérdidas que ocurren en las ciudades son independientes. Las funciones generatrices de momentos para la distribución de las pérdidas de las ciudades son las siguientes:*

- $M_J(t) = (1 - 2t)^{-3}$
- $M_K(t) = (1 - 2t)^{-2,5}$
- $M_L(t) = (1 - 2t)^{-4,5}$

Si X representa las pérdidas combinadas de las tres ciudades, calcule $E(X^3)$.

Ejercicio 3 *Las variables aleatorias independientes X e Y tienen igual función generatriz de momentos:*

$$M(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

Por otra parte, se definen:

$$W = X + Y \qquad\qquad Z = X - Y$$

Determine la función conjunta generatriz de momentos, $M_(t_1; t_2)$ *de W y Z.*

Ejercicio 4 *Sea X una variable aleatoria y su función generatriz de momentos:*

$$M_X(t) = \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot e^t\right)^5$$

Halle la probabilidad de que X sea igual a 1 ó que X sea igual a 2.

Ejercicio 5 *Sea una población cuya función generatriz de momentos para todos los reales es:*

$$M_X(t) = e^{5t + \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot \sigma^2}$$

Se proponen los siguientes estimadores del parámetro desconocido:

$$h(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad j(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n} \qquad k(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - 5)^2}{n} \qquad l(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n - 1}$$

Determine cuáles de ellos son insesgados.

Ejercicio 6 *Dada una variable aleatoria cuya función de densidad es:*

$$f(x) = e^{-x} \qquad\qquad x > 0$$

Halle la función generatriz de momentos y utilícela para obtener media y varianza.

Ejercicio 7 *Una variable aleatoria tiene de función generatriz de momentos la expresión:*

$$M_X(t) = e^{\alpha(e^t-1)}$$

Demuestre que la media y la varianza coinciden.

Ejercicio 8 *Los errores mensuales en la entrega de un producto (X) tienen como función generatriz de momentos:*

$$M_X(t) = e^{3(e^t-1)}$$

Calcule la esperanza de la función de gastos incurridos cuya expresión es $G = x^2 - x + 1$.

Ejercicio 9 *De acuerdo con la experiencia obtenida de los registros de asistencia, se sabe que el 21 % del personal de la oficina A de una empresa incurre en ausencias de cualquier tipo mientras que para la oficina B el ausentismo es del 15 %. Ambas oficinas cuentan cada una de ellas con 10 empleados y los ausentismos son independientes entre sí.*
a) Construya la función de probabilidades de la variable X, que representa el número de empleados ausentes un día cualquiera en dicha oficina.
b) Construya la función generatriz de momentos que representa el número de ausentes en ambas oficinas y calcule el número medio de empleados ausentes en ambas oficinas.

Ejercicio 10 *Sean:*

$$J \sim \chi^2_{10} \qquad\qquad Z \sim N(0;1) \qquad\qquad X = J - 2Z$$

J y Z son variables aleatorias independientes

a) Halle la función generatriz de momentos de X.
b) Utilizando la función hallada, obtenga $E(X)$.
c) Utilizando la función hallada, obtenga $Var(X)$.
d) Recalcule $E(X)$ *y* $Var(X)$ *pero ahora sin utilizar la función generatriz de momentos.*

Ejercicio 11 *De una población normal con media* μ *y desvío estándar* σ *se extraen dos muestras aleatorias e independientes de tamaños* n_1 *y* n_2 *respectivamente. Se define la variable aleatoria:*

$$R = \overline{x}_1 - \overline{x}_2$$

a) Obtenga la función generatriz de momentos de R y utilicéla para calcular y obtener la esperanza matemática, la varianza y el desvío estándar de R.
b) Se define la variable aleatoria:

$$Z = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sigma \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

¿Qué distribución sigue Z? Justifique realizando todos los cálculos y utilizando toda la información que considere conveniente.

Ejercicio 12 *Una variable aleatoria X tiene la siguiente función generatriz de momentos:*

$$M_X(t) = 0,5 + 0,3 \cdot e^t + 0,15 \cdot e^{2t} + 0,05 \cdot e^{3t}$$

Obtenga el desvío estándar de X.

9. Anexos

9.1. Anexo I

El binomio de Newton permite expandir la potencia n-ésima de cualquier binomio, siempre y cuando n sea un número natural. La expresión general es:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i$$

donde

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)! \cdot i!}$$

La fórmula es especialmente útil cuando $n \geq 2$.

Se desarrollan dos ejemplos:

1) Se quiere expandir $(x+y)^3$

$$(x+y)^3 = \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} x^{3-i} y^i$$

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0} x^{3-0} y^0 + \binom{3}{1} x^{3-1} y^1 + \binom{3}{2} x^{3-2} y^2 + \binom{3}{3} x^{3-3} y^3$$

$$(x+y)^3 = 1x^3y^0 + 3x^2y^1 + 3x^1y^2 + 1x^0y^3$$

que finalmente resulta en:

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

2) Se quiere expandir $(5t-2)^4$

$$(5t-2)^4 = \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} (5t)^{3-i} (-2)^i$$

$$(5t-2)^4 = \binom{4}{0} (5t)^{4-0} (-2)^0 + \binom{4}{1} (5t)^{4-1} (-2)^1 + \binom{4}{2} (5t)^{4-2} (-2)^2 + \binom{4}{3} (5t)^{4-3} (-2)^3 + \binom{4}{4} (5t)^{4-4} (-2)^4$$

$$(5t-2)^4 = 1 \cdot (5t)^4 \cdot 1 + 4 \cdot (5t)^3 \cdot (-2)^1 + 6 \cdot (5t)^2 \cdot 4 + 4 \cdot (5t)^1 \cdot (-8) + 1 \cdot 1 \cdot 16$$

$$(5t-2)^4 = (5t)^4 - 8(5t)^3 + 24(5t)^2 - 32(5t) + 16$$

$$(5t-2)^4 = 625t^4 - 8 \cdot 125t^3 + 24 \cdot 25t^2 - 32 \cdot 5t + 16$$

que finalmente resulta en:

$$(5t-2)^4 = 625t^4 - 1000t^3 + 600t^2 - 160t + 16$$

Se observa que:

- *el número de términos de la expansión es una uno más que el orden de la potencia*
- *una de las potencias va creciendo, la otra decreciendo*
- *en todos los términos la suma de los exponentes es igual al exponente del binomio*
- *en los binomios resta los signos son alternados*

9.2. Anexo II

La serie de Taylor permite expandir una función $f(x)$, siempre y cuando ésta sea diferenciable tantas veces como sea necesario, en un entorno de x_0. La expresión general es:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \frac{1}{4!}f''''(x_0)(x - x_0)^4 + ...$$

Para el caso que $x_0 = 0$ se obtiene la serie de Mac-Laurin:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \frac{1}{4!}f''''(0)x^4 + ...$$

Si bien estas series no necesariamente convergen para todas las funciones y en todos los entornos, sí lo hacen para la función de interés en este texto. En efecto, si la función fuera $f(x) = e^{ax}$ con «a» una constante cualquiera, la serie de Mac-Laurin es convergente para cualquier valor real de x. Por otra parte:

$f(x) = e^{ax}$ *por lo tanto* $f(0) = e^{a0} = 1$

$f'(x) = a \cdot e^{ax}$ *por lo tanto* $f'(0) = a \cdot e^{a0} = a$

$f''(x) = a^2 \cdot e^{ax}$ *por lo tanto* $f''(0) = a^2 \cdot e^{a0} = a^2$

$f'''(x) = a^3 \cdot e^{ax}$ *por lo tanto* $f'''(0) = a^3 \cdot e^{a0} = a^3$

$f''''(x) = a^4 \cdot e^{ax}$ *por lo tanto* $f''''(0) = a^4 \cdot e^{a0} = a^4$

y así sucesivamente. Será entonces, por aplicación de la expansión en serie de Mac-Laurin:

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{1}{2!}a^2x^2 + \frac{1}{3!}a^3x^3 + \frac{1}{4!}a^4x^4 + ...$$

9.3. Anexo III

Se considera la siguiente suma de infinitos términos donde x es un número real cuyo módulo es menor a 1.

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$$

Se desea saber a cuánto converge esta suma; es decir, el valor límite de S*. En tal sentido, la suma estricta no ha de poder realizarse puesto que se requeriría sumar infinitos términos, pero en su lugar puede obtenerse a qué valor converge esta suma para un número de términos finito pero suficientemente grande; es decir, se analizará la convergencia de esta serie que se conoce como serie geométrica.*

Para ello, se procede a multiplicar miembro a miembro por (1-x), que es una expresión distinta de cero puesto que x es distinto de 1.

$$(1 - x) \cdot S = (1 - x) \cdot \left(1 + x + x^2 + x^3 + ...\right)$$

Del lado derecho de la igualdad se procederá a resolver la distributiva. Primero se distribuirá el 1 a cada uno de los términos del segundo factor y luego se distribuirá -x a cada uno de estos términos. Así se tendrá como resultado:

$$\begin{aligned}(1 - x) \cdot S = (1 &+ x + x^2 + x^3 + ... \\ &- x - x^2 - x^3 - ...)\end{aligned}$$

La cancelación entre términos de a pares que son idénticos pero cambiados de signo es evidente, de manera tal que la expresión anterior se reduce a:

$$(1 - x) \cdot S = 1$$

Esto no permite afirmar que:

$$S = \frac{1}{1 - x}$$

Así, se obtiene entonces que para el caso convergente,

$$1 + x + x^2 + x^3 + ... = \frac{1}{1 - x}$$

9.4. Anexo IV

Se considera la siguiente serie geométrica convergente, tal cual se indicó en el Anexo anterior:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$$

Ahora se eleva a la r natural miembro a miembro, teniendo en cuenta que, en el miembro de la derecha, se efectuará el producto r veces.

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^r = \left(1 + x + x^2 + x^3 + ...+\right) \cdot \left(1 + x + x^2 + x^3 + ...+\right) \cdot \left(1 + x + x^2 + x^3 + ...+\right) \cdot ... \cdot \left(1 + x + x^2 + x^3 + ...+\right)$$

Se procede ahora en el miembro de la derecha a efectuar todas las distributivas, siempre agrupando convenientemente en potencias de x.

Términos independientes:

$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1$ *este producto r veces dará como resultado 1.*

Términos con x:

- $x \cdot 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1$ *este producto dará como resultado x.*
- $1 \cdot x \cdot 1 \cdot ... \cdot 1$ *este producto dará como resultado x.*
- $1 \cdot 1 \cdot x \cdot ... \cdot 1$ *este producto dará como resultado x.*
- *[y así sucesivamente]*
- $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot x$ *este producto dará como resultado x.*

Es decir, r veces se tiene x, lo cual arroja como resultado $r \cdot x$.

Términos con x^2*:*

Por un lado:

- $x^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1$ *este producto dará como resultado* x^2.
- $1 \cdot x^2 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1$ *este producto dará como resultado* x^2.
- $1 \cdot 1 \cdot x^2 \cdot ... \cdot 1$ *este producto dará como resultado* x^2.
- *[y así sucesivamente]*
- $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot x^2$ *este producto dará como resultado* x^2.

Es decir, r veces se tiene x^2*, lo cual arroja como resultado* $r \cdot x^2$.

Por otro lado:

- $x \cdot x \cdot 1 \cdot ... \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ *este producto dará como resultado* x^2.
- $1 \cdot x \cdot x \cdot ... \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ *este producto dará como resultado* x^2.
- *[y así sucesivamente]*
- $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1 \cdot x \cdot x$ *este producto dará como resultado* x^2.

Es decir, $\binom{r}{2}$ *veces se tiene* x^2*, lo cual arroja como resultado* $\binom{r}{2} \cdot x^2$.

Finalmente, el número de veces que tendremos x^2 *será* $r + \binom{n}{2}$ *que puede escribirse como* $\binom{r}{1} + \binom{r}{2}$ *y que por suma directa de números combinatorios da como resultado* $\binom{r+1}{2}$.

Es decir, $\binom{r+1}{2}$ *veces se tiene* x^2*, lo cual arroja como resultado* $\binom{r+1}{2} \cdot x^2$.

Términos con x^3*:*

Por un lado:

- $x^3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1$ *este producto dará como resultado* x^3.
- $1 \cdot x^3 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1$ *este producto dará como resultado* x^3.
- $1 \cdot 1 \cdot x^3 \cdot ... \cdot 1$ *este producto dará como resultado* x^3.
- *[y así sucesivamente]*
- $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot x^3$ *este producto dará como resultado* x^3.

Es decir, r *veces se tiene* x^3*, lo cual arroja como resultado* $r \cdot x^3$.

Por otro lado:

- $x^2 \cdot x \cdot 1 \cdot ... \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ *este producto dará como resultado* x^3.
- $1 \cdot x^2 \cdot x \cdot ... \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ *este producto dará como resultado* x^3.
- *[y así sucesivamente]*
- $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1 \cdot x^2 \cdot x$ *este producto dará como resultado* x^3.

Es decir, $\binom{r}{2}$ *veces se tiene* $x^2 \cdot x$*, lo cual arroja como resultado* $\binom{r}{2} \cdot x^3$.

Por otro lado:

- $x \cdot x^2 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ *este producto dará como resultado* x^3.
- $1 \cdot x \cdot x^2 \cdot ... \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ *este producto dará como resultado* x^3.
- *[y así sucesivamente]*
- $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1 \cdot x \cdot x^2$ *este producto dará como resultado* x^3.

Es decir, $\binom{r}{2}$ *veces se tiene* $x \cdot x^2$*, lo cual arroja como resultado* $\binom{r}{2} \cdot x^3$.

Por otro lado:

- $x \cdot x \cdot x \cdot 1 \cdot ... \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ *este producto dará como resultado* x^3.
- $1 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot ... \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ *este producto dará como resultado* x^3.
- *[y así sucesivamente]*
- $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot x \cdot x \cdot x$ *este producto dará como resultado* x^3.

Es decir, $\binom{r}{3}$ *veces se tiene* $x \cdot x \cdot x$*, lo cual arroja como resultado* $\binom{r}{3} \cdot x^3$.

Finalmente, el número de veces que tendremos x^3 *será:*

$$r + 2 \cdot \binom{r}{2} + \binom{r}{3}$$

que puede escribirse como

$$\left[\binom{r}{1}+\binom{r}{2}\right]+\left[\binom{r}{2}+\binom{r}{3}\right]$$

y que por suma directa de números combinatorios, pero tomados de a pares, da como resultado

$$\binom{r+1}{2}+\binom{r+1}{3}$$

cuya suma a su vez es $\binom{r+2}{3}$

Es decir, $\binom{r+2}{3}$ *veces se tiene* x^3*, lo cual arroja como resultado* $\binom{r+2}{3}\cdot x^3$*.*

Si se continúa este procedimiento iterativamente se tendrá:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^r = 1 + r\cdot x + \binom{r+1}{2}\cdot x^2 + \binom{r+2}{3}\cdot x^3 + ...$$

Lo cual puede directamente escribirse como:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^r = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{r+k-1}{k}\cdot x^k$$

Se recuerda la propiedad de igualdad de números combinatorios complementarios, que establece lo siguiente:

$$\binom{a+b}{a}=\binom{a+b}{b}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^r = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{r+k-1}{r-1}\cdot x^k$$

9.5. Anexo V

Para una variable real α positiva, se define la función gamma de α y se la simboliza $\Gamma(\alpha)$ a:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-u} \cdot u^{\alpha-1}\, du$$

Se debe notar que si $\alpha = 1$ resulta:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-u}\, du = 1$$

La función Gamma tiene dos propiedades fundamentales: la primera de ellas es la ley de recurrencia y la segunda de ellas la definición de esta función gamma cuando α es un número natural.

La propiedad de recurrencia establece que:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$$

Se vio que $\Gamma(1) = 1$ por lo tanto, si se aplica la ley de recurrencia, será:

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$$

Ahora que se conoce que $\Gamma(2) = 1$ se aplica nuevamente la ley de recurrencia para obtener:

$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2$$

Ya que se conoce que $\Gamma(3) = 2$ se aplica nuevamente la ley de recurrencia para obtener:

$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2 = 3! = 6$$

Ahora que se conoce que $\Gamma(4) = 6$ se aplica nuevamente la ley de recurrencia para obtener:

$$\Gamma(5) = 4 \cdot \Gamma(4) = 4 \cdot 3! = 4! = 24$$

Y así, en forma recursiva, se tiene la segunda propiedad, definida para n natural.

$$\Gamma(n + 1) = n!$$

9.6. Anexo VI

Se probara que si X es una variable aleatoria normal estandarizada elevada al cuadrado, su función generatriz de momentos está dada por:

$$M_X(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}}$$

En efecto, se parte de una variable aleatoria Z normal estandarizada, cuya función de densidad se conoce que está dada por:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

Por lo antedicho, se tiene:

$$X = Z^2$$

Se busca entonces la función generatriz de momentos de X. Por definición, se tiene:

$$M_X(t) = E(e^{Xt})$$

Es decir:

$$M_X(t) = M_{Z^2}(t) = E(e^{Z^2 t})$$

Por otra parte, en virtud de que la variable aleatoria Z es normal estándar, resulta:

$$M_X(t) = E(e^{Z^2 t}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz^2} \cdot f(z)\, dz$$

Se reemplaza por la función de densidad correspondiente para obtener:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz$$

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{tz^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz$$

Se procede a operar algebraicamente los exponentes:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{tz^2 - \frac{1}{2}z^2}\, dz$$

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2 + tz^2}\, dz$$

Se toma factor común en el exponente:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2 \cdot (1-2t)}\, dz$$

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(1-2t) \cdot z^2}\, dz$$

Se considera ahora la siguiente sustitución:

$$u = \sqrt{1-2t} \cdot z$$

Se diferencia miembro a miembro, teniendo en cuenta que u es función de z.

$$du = \sqrt{1-2t}\, dz$$

Por lo que se tiene:

$$dz = \frac{du}{\sqrt{1-2t}}$$

Por otra parte, resulta evidente que si $u = \sqrt{1-2t} \cdot z$ *entonces* $u^2 = (1-2t) \cdot z^2$ *por lo que se procede con la sustitución, de forma que:*

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(1-2t) \cdot z^2} \, dz$$

queda transformada en:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2} \, \frac{du}{\sqrt{1-2t}}$$

Expresión que puede escribirse como:

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2} \, du$$

$$M_X(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2} \, du$$

Ha de notarse que la integral resultante presente el área bajo la curva normal estándar para todo su dominio, que por ley de cierre es 1. Resulta entonces:

$$M_X(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}}$$

Expresión que se quería demostrar.

Referencias

[1] *Canavos, G. (1988). Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos. Primera edición. Editorial Mc Graw-Hill.*

[2] *Freund, J.; Miller, I. & Miller, M. (1999). Estadística matemática con aplicaciones. Sexta Edición. Pearson Educación.*

[3] *Gomez Villegas, M.A. (2005). Inferencia Estadística. Editorial Díaz de Santos. España.*

[4] *Mendenhall, W. & Reinmuth, J. (1992). Estadística para Administración y Economía. Grupo Editorial Iberoamérica.*

[5] *Novales, A. (1998) Estadística y econometría. Editorial Mc. Graw-Hill. España.*

[6] *Newbold, P.; Carlson, W & Thorne, B. (2013). Estadística para Administración y Economía, Pearson Educación S.A, Madrid.*

[7] *Render, B. & Hanna, M. (2009). Métodos cuantitativos para los negocios. Editorial Pearson, México.*