REVISTA

DE

CIENCIAS ECONÓMICAS

PUBLICACIÓN MENSUAL

DEL

Centro Estudiantes de Ciencias Económicas.

DIRECTOR:

ROBERTO A. GUIDI

AÑO II NÚM. 19-20

EN. Y FEB. DE 1915

DIRECCIÓN Y ADMINISTRACIÓN

1835 - CALLE CHARCAS - 1835

BUENOS AIRES

LA FILOSOFÍA MATEMÁTICA [1]

El Sr. Emilio Corra ha esbozado ya en términos generales la filosofía positiva, que forma un sistema coherente, propio para dirigir al hombre y perfeccionarlo. Desearíamos volver a tratar brevemente primero los dos principios fundamentales, que forman la trama, la armazón de esta filosofía: estos dos principios son la ley de los tres estados y la clasificación de las ciencias. La ley de los tres estados nos hace comprender el desarrollo histórico de los conocimientos humanos; la clasificación de las ciencias permite agrupar racionalmente estos conocimientos una vez llegadas a su constitución normal.

La ley de los tres estados, que puede ser considerada como la ley fundamental de la sociología, fué presentada por Turgot y por Condorcet, pero no fué demostrada y formulada sino en 1822 por Augusto Comte: «Por la misma naturaleza del espíritu humano, cada rama de nuestros conocimientos está necesariamente sometida, en su evolución, a pasar sucesivamente por tres estados teóricos diferentes: el estado teológico, el estado metafísico, el estado positivo o científico». En otros términos, el espíritu humano ha empleado sucesivamente, en cada una de sus investigaciones, tres métodos de filosofar, que, en definitiva, se excluyen recíprocamente; ha construído tres especies de sistemas generales de concepciones respecto al conjunto de los fenómenos: la teología es el punto de partida de la inteligencia humana; la ciencia es su estado fijo y definitivo; la metafísica ha servido de transición, minando las bases del espí-

(1) Conferencia dada en la Escuela de Altos Estudios de París.

ritu teológico, y preparando, por esto mismo, el advenimiento del estado positivo.

El Sr. Corra ha insistido suficientemente, en su última conferencia, acerca de los caracteres fundamentales del espíritu positivo, que consiste esencialmente en subordinar las construcciones subjetivas a los materiales objetivos; en otros términos, en someter la imaginación al control severo de la observación y de la experiencia, y esto en cualquier rama de nuestros conocimientos a fin de permitir una adaptación, tan perfecta como sea posible, del pensamiento a los hechos. Como nuestras observaciones y nuestros experimentos son esencialmente relativos, tanto bajo el punto de vista subjetivo como bajo el objetivo, nos está vedada la investigación de lo absoluto, como conducente a resultados imposibles de verificar y, por lo tanto, quiméricos: constituye, según la feliz expresión de Mach, un problema aparente.

En la evolución del pensamiento humano, el espíritu positivo ha sido aplicado sucesivamente a los diversos dominios del conocimiento, y es una de las glorias de Augusto Comte haber mostrado su generalidad entera: extiende a los fenómenos sociales y morales el imperio del espiritu positivo, que Descartes había limitado únicamente a las realidades cosmológicas.

Henos así inducidos a recordar brevemente el segundo gran principio de la filosofía positiva: la clasificación de las ciencias, que presenta a la vez interés filosófico e histórico. Comte distinguia siete ciencias fundamentales e irreductibles; este número siete no es evidentemente inmutable, y además en el fondo, importa poco. Lo que es esencial es el fundamento sobre el cual descansa esta jerarquía de nuestros conocimientos; estos deben estar clasificados conforme a su generalidad decreciente, desde las matemáticas, hasta la moral, pasando por la astronomía, la física, la biología y la sociología; lo que vuelve por lo demás a colocarlas por orden de sencillez decreciente, siendo cada una de las ciencias más compleja y por consiguiente menos adelantada que la precedente. Vemos por ello que esta clasificación tiene tambien gran valor histórico, puesto que representa muy sensiblemente el orden siguiente en el que cada una de las ciencias ha llegado a un estado suficiente de posividad. Así es que las matemáticas y la astronomía eran ya verdaderas ciencias en la antiguedad griega, desde Tales e Hiparco; Galileo apenas creó la observación y la experimentación en física. Lavoisier y Bichat fundaron la química y la biología positivas. En fin, Augusto Comte indicó, el primero, la existencia de ciencias de los fenómenos sociales y morales y demostró su posibilidad. Todas las ciencias fundamentales son concebidas desde entonces como positivas: todas han abandonado la investigación de las causas para el conocimiento de las leyes, todas han abandonado la persecución de lo absoluto por el estudio de lo relativo.

Las matemáticas consideran los fenómenos más generales y más simples, que son también los más abstractos y los más alejados de la humanidad; estos fenómenos influyen sobre todos los demás, sin ser directamente influenciados por ellos. Este carácter de gran sencillez y de gran generalidad fué lo que sorprendió a los primeros observadores atentos del mundo: gracias a ese doble carácter es que las matemáticas son aún hoy la ciencia más adelantada y la más perfecta, y que durante toda la antigüedad fueron, como su nombre lo indica, la *ciencia* por excelencia.

Por el contrario, la física, cuyo objeto y cuyo método estaban aun mal determinados, abandonaba difícilmente las especulaciones metafísicas y recibía apenas forma verdaderamente científica.

Las matemáticas existían ya, en estado embrionario, en el tiempo de las antiguas civilizaciones de Egipto y de Caldea: se enseñaba especialmente en Babilonia que el costado del exágono regular es igual al radio. Tales descubrimientos fueron ciertamente de orden puramente experimental; pero los fenómenos matemáticos, cuyo conocimiento se debe a los egipcios y a los caldeos, fueron la base necesaria de las especulaciones ulteriores. Estas especulaciones abstractas nacieron sólo en Grecia, pues allí solamente se reunían las condiciones favorables a su nacimiento; se concibe, en efecto, que los griegos, hombres que disponían de tiempo, sumidos en frecuentes meditaciones y dedicados a altas consideraciones filosóficas, se sintieran atraídos por el descubrimiento de las relaciones más sencillas y de las más abstractas de la geometría y del cálculo. Es a Tales y a Pitágoras, a quienes hay que atribuir la gloria de haber abstraído de los objetos concretos, las líneas, los ángulos, las superficies que los determinan y de haber llegado hasta las principales leyes del espacio y del número. El famoso teorema de Tales se presenta como una cosa absolutamente nueva en el mundo: la ciencia abstracta anunciándose por medio de la geometría. Setecientos años antes de nuestra era, la ciencia abstracta estaba fundada; era, pues, posible a la posteridad darle su completo desarrollo: la ciencia abstracta, que no hay que confundir con la masa heteróclita y desordenada de las observaciones concretas y de los conocimientos empíricos, así como no hay que confundir un edificio con una carrera; la ciencia abstracta, que se compone, no de hechos, sino de leyes, y cuyo fin es investigar relaciones constantes y precisas entre los fenómenos importantes que gobiernan al mundo, al hombre y la sociedad.

Después de Tales, después de Pitágoras, las matemáticas, y especialmente la geometría, se desarrollaron bajo la poderosa influencia de Eudoxio, el fundador de la geometría del espacio, de Euclides y de Arquímedes. Euclides aportó en sus demostraciones una exactitud y un rigor desconocidos hasta entonces, coordinando, en sus *Elementos*, el conjunto de los conocimientos adquiridos antes de él y por él sobre los polígonos y sobre los poliedros. Arquímedes concentró sus esfuerzos sobre los más importantes y sobre los más difíciles de los numerosos problemas que se refieren a las figuras curvilíneas, como el círculo, la parábola y las superficies engendradas por ellas. En mecánica, los descubrimientos de este gran genio no han sido menos importantes, puesto que él fundó la estática, indicando las condiciones de equilibrio de la palanca y desarrollando la teoría de los cuerpos sumidos en los líquidos; sus estudios mecánicos nos lo muestran guiado por un agudo sentido de las realidades físicas y constantemente preocupado por el cuidado de las aplicaciones prácticas, que durante demasiado tiempo había desdeñado por un amor exclusivo de las especulaciones metafísicas.

La metodología de los grandes matemáticos de la antigüedad estaba mucho más próxima a la nuestra de lo que se cree generalmente: las demostraciones de Euclides satisfacen aún a los sabios más enamorados del rigor; los métodos de agotamiento de Eudoxio y Euclides pertenecen ya al cálculo infinitesimal, y Arquímedes puede, a justo título, contarse entre los fundadores de este cálculo; obtiene la superficie de un segmento de parábola por medio de una verdadera integración.

Hemos recordado con más detalles en otra parte cómo y por qué el fin de la ciencia griega coincidió con la propagación del cristianismo, y cómo las elevadas inteligencias musumanas pudieron conservar la tradición científica abandonada por el mundo cristiano. Asímismo, la influencia de los árabes en la Europa occidental se hizo considerable cuando poco a poco el catolicismo empezó a perder su acción política. Por lo demás, los árabes habían enriquecido el patrimonio que les habían dejado los griegos, ya sea por sus propios descubrimientos, ya por lo que habían tomado en préstamo a otras civilizaciones: de esta manera dotaron a la posteridad de esta numeración escrita tan cómoda, de esas cifras llamadas árabes tan sin razón puesto que los árabes las recibieron de los indios. Gracias a esta numeración, el cálculo aritmético iba a hacer progresos decisivos.

De esta manera llegamos a las matemáticas modernas, que no ceden en nada a la antigüedad por el brillo y la importancia de los descubrimientos. Cuatro de entre ellos forman, por decirlo así, el nudo de la admirable ciencia tal como la conocemos hoy: en el siglo XVI, Copérnico y Galileo establecieron las bases de la dinámica, en la que más tarde debían ilustrarse los grandes nombres de Newton y de d'Alembert; en la misma época, Francisco Viéte fundaba el álgebra. Poco tiempo después, el inmortal Descartes, creaba la «geometría análica» o aplicación del álgebra a la geometría Por fín ese descubrimiento fundamental de Descartes, verdadero punto de partida de todas las aplicaciones teóricas de las matemáticas, fué completado de la manera más feliz por la genial institución del cálculo infinitesimal, debida principalmente a Leibnitz, a Fermat y a Guler. Por lo demás vamos a tener ocasión de volver dentro de un instante sobre estos puntos esenciales.

La ciencia matemática tiene por fin el estudio de los fenómenos más sencillos y más generales del mundo. La propiedad más sencilla y más general de los cuerpos que nos circundan es, con seguridad, la extensión; así es que las matemáticas tendrán esencialmente por objeto el estudio de la extensión. Este estudio se subdividirá en un estudio estático o del espacio (geometría) y en un estudio dinámico o del movimiento (mecánica). En fin, la geometría y la mecánica deben estar lógicamente precedidas por un preámbulo indispensable: el cálculo o estudio abstracto del número, que constituye un método destinado a facilitar las concepciones geométricas y que debe ser, como lo veremos, incorporado a la geometría.

La ciencia matemática comprende, pues, tres elementos fundamentales: el cálculo, la geometría y la mecánica, que se proponen respectivamente el estudio del número, del espacio y del movimiento, y cuya íntima conexión fué espontáneamente sentida por los antiguos. «La coordinación general de estos tres elementos matemáticos, dice Augusto Comte, constituye una serie parcial enteramente análoga a la gran escala enciclopédica, pues difieren entre sí por el grado de independencia, de universalidad y de sencillez de los fenómenos correspondientes. Al mismo tiempo, su sucesión caracteriza la marcha inicial de las concepciones matemáticas y su tendencia gradual hacia un dominio superior».

Veamos el cuadro de las tres grandes ramas de las matemáticas, acompañadas de sus tres más importantes subdivisiones. Nos referimos a este cuadro en la rápida apreciación que vamos a hacer de estas diferentes partes.

- I.—Cálculo
  - Cálculo aritmético
  - Cálculo algebraico
- II.—Geometría
  - Geometría elemental (Tales)
  - Geometría general
    - Geometría Analítica (Descartes).
    - Geometría diferencial (Leibnitz).
    - Geometría integral (Arquímedes).
- III.—Mecánica
  - Cinemática
  - Estática (Arquímedes)
  - Dinámica (Galileo)

La primera rama de las matemáticas, el cálculo, debe ser considerado bajo dos fases principales, el cálculo aritmético y el cálculo algebraico, a los que vendrá a agregarse más tarde el cálculo infinitesimal.

El cálculo aritmético tiene por objeto formar los números, calcularlos y resolver ciertas cuestiones simples relativas a los números; descansa esencialmente sobre la numeración, que toda entera procede de este principio experimental, a saber, que se llega al mismo resultado agrupando juntos tres objetos idénticos y después uno, que reuniendo sucesivamente dos y después otros dos; en otras palabras, que dos más dos es igual a tres más uno. Por intuitivas que ahora nos parezcan estas nociones, no por ello dejan de tener origen experimetal, y se han formado en nosotros lentamente. Ni aun la aritmética, ni el álgebra que de ella se deriva, ninguna ciencia podría fundarse sin tomar algunas nociones primordiales al mundo exterior. No existen ciencian racionales, en el sentido estricto de la palabra; las matemáticas, como las demás son ciencias naturales.

En el servicio de la vida práctica comienza la aritmética a desarrollarse. Quien tiene que hacer a menudo cálculos semejantes, y que ha adquirido, con vistas de conjunto, facilidad especial, halla medio de simplificar y de abreviar los procedimientos; así se constituye el álgebra, cuyos símbolos generales no designan ningún número en particular, y que llama la atención exclusivamente sobre la forma de las operaciones. El cálculo algebraico se propone formar las ecuaciones, es decir, las relaciones que, en todo problema, existen entre las cantidades conocidas y las cantidades desconocidas. La resolución de las ecuaciones algebraicas conduce a veces a considerar, con Wallis, cantidades que no tienen existencia real, cantidades imaginarias, y—hecho curioso—estas cantidades imaginarias hallan aplicaciones en geometría y en física, puesto que simplifican el cálculo de las corrientes eléctricas alternativas. Semejantes concepciones son perfectamente legítimas, si evitamos acordarles existencia objetiva, y si nos limitamos a considerarlas como simples métodos, como simples instrumentos de cálculo.

La aritmética y el álgebra no son más que las dos partes sucesivas de todo cálculo completo, en que, antes de avaluar los números buscados, se debe ante todo determinar las relaciones que existen entre las diferentes cantidades del problema. La separación de estas dos partes, no puede ni aún decidirse netamente sino respecto de las cuestiones suficientemente sencillas para que se descubra la fórmula sin especificar ningún valor.

En todas partes, por lo demás, ambos cálculos alternan con la mayor frecuencia; pero permitiendo siempre caracterizar bien cada operación parcial que será aritmética o algebraica, según concierna a los valores o a las relaciones.

Se puede ligar con el cálculo dos capítulos importantes de la ciencia matemática: la teoría de los números y el cálculo de las probabilidades. La teoría de los números estudia particularmente las propiedades de los números enteros; exige con frecuencia el empleo de las matemáticas superiores, y este «análisis de lo discontinuo» presenta a veces dificultades invencibles. El cálculo de las probabilidades, debido a los genios de Pascal y de Fermat, es una de las más curiosas y de las más útiles aplicaciones de las matemáticas; sirve para apreciar la exactitud de las medidas, para interpretar los resultados de la estadística, para calcular las probabilidades de éxito de las empresas aleatorias; en estos últimos tiempos, una aplicación sistemática del cálculo de las probabilidades a los átomos que constituyen los cuerpos ha permitido prever gran número de sus propiedades y ha hecho hacer a la física grandes progresos.

En suma, el cálculo, que representa la primera iniciación de la humanidad y del individuo en la ciencia abstracta, tiene principalmente un destino lógico, y, según los términos de Comte, constituye un tipo de claridad, de precisión y de consistencia, propia ya para guiar los esfuerzos racionales en los casos más complicados.

En el principio, la geometría se desarrolló independientemente del cálculo, y fué sólo Descartes quien, en el siglo XVII, por una verdadera revolución científica, estableció la íntima conexión entre el estudio del número y el estudio de la extensión. Este orden histórico en el génesis de los conocimientos geométricos conserva, con todo, gran importancia, pues la diferencia entre la geometría de los antiguos y la geometría de los modernos, consiste en la naturaleza misma de las cuestiones tratadas. La geometría, en efecto, que se ha supuesto ha llegado al estado de perfección, debe por una parte, abrazar todas las formas interesantes, y, por otra, descubrir todas las propiedades esenciales de cada forma. Esta ciencia puede, pues, ser estudiada según dos métodos diferentes: el método más natural, el de los antiguos, consistía en ocuparse sucesivamente de las diversas formas (recta, círculo, parábola), agrupando todas las propiedades relativas a cada forma; el método más lógico es el de los modernos desde Descartes, puesto que consiste en reunir bajo el mismo punto de vista todas las cuestiones semejantes (distancias tangentes, superficies), sea cuales fueren las formas a que pertenecen. La geometría de los antiguos estudia especialmente las diversas formas, esto es, la geometría especial, que se llama generalmente geometría elemental; la geometría de los modernos se ocupa de las propiedades generales de las diversas formas; conviene darle el nombre de geometría general.

En la enseñanza de la geometría, es útil respetar el orden histórico, pues parece imposible comprender la geometría general antes de tener algunas nociones precisas sobre las formas más familiares y más importantes. En la base de la geometría elemental se encuentran los conceptos simples de línea recta y de plano; todos los matemáticos actuales están de unánime acuerdo en reconocer que estas nociones provienen de la experiencia, y han dado la razón a Augusto Comte contra la teoría de la inneidad de Kant. El animal que asalta violentamente y cae sobre su presa adquiere poco a poco, en estado rudimentario, la idea de línea recta; la propagación dectilínea de la luz que va de los diferentes objetos a nuestros ojos, los experimentos que nos han hecho reconocer el camino de menor esfuerzo para ir de un lugar a otro, las observaciones sobre los hilos tendidos y sobre la caída de los cuerpos, han contribuído mucho a la formación de este concepto de la línea recta; y es preciso admirar en el pensamiento humano ese maravilloso poder de abstraer, de simplificar, de pasar el límite, que se manifiesta en toda ciencia, y que nos permite formarnos una imagen del mundo exterior, conforme a nuestro ideal y cómodo para las aplicaciones. Habría que evitar creer que estos conceptos abstractos, tales como el de línea recta o de plano, sean lo propio de las ciencias matemáticas; la física se ha visto obligada a establecer nociones análogas, como las de gas perfectos, de aislador perfecto de cuerpo negro, es decir, de cuerpo con propiedades particularmente simples y tales que ciertos cuerpos reales se alejan de ella en cantidades que a menudo escapan al experimento. Vemos una vez más que las matemáticas se distinguen de las otras ciencias, no por diferencias de naturaleza, sino por diferencia de grado.

La geometría tiene, pues, por base esos conceptos simples, y también uno o dos «axiomas indemostrables» a los que convendría mucho mejor — en la enseñanza elemental, por lo menos — el nombre de «principios experimentales». La experiencia muestra, en efecto, que, por dos puntos, se puede hacer pasar una línea recta, una sola, y también que, por un punto exterior a una línea recta, no se puede llevar más que una sola línea recta, paralela a la primera. Esta proposición famosa, llamada postulado de Euclides, hase demostrado que era indemostrable, es decir, irreductible a los principios precedentes, por el hecho de que ha sido posible construir geometrías que pueden pasarse sin ella: Si, en una cnstrucción geométrica inicial, se tiene la idea asaz natural de reemplazar el ángulo recto de Euclides por un ángulo agudo o por un ángulo obtuso ,se tiene o la geometría de Lobatchefsky o la de Biemann. La edificación de las geometrías no euclidianas tiene cierta importancia filosófica: además de que son indispensables al positivismo de las nociones astronómicas, nos hacen comprender la relatividad de nuestra concepción del mundo, puesto que consideran espacios profundamente diferentes del nuestro; justifican una vez más el pensamiento de Augusto Comte: todo es relativo... hasta la noción de las rectas paralelas. En realidad, el número de las geometrías lógicamente posibles es infinito; habría, empero, que precaverse de abusar de esos juegos de ingenio y de considerar las matemáticas como una ciencia artificial, a la cual no se pide sino que sea lógica. Esta concepción sería desastrosa, pues el fin esencial de las matemáticas es aplicarse a los fenómenos reales, y para ello deben tomar una base en la realidad. Esta base aquí es el principio de Euclides, y la geometría euclidiana, que siempre ha sido verificada por la experiencia, aún en astronomía, debe considerarse como la primera y la más simple de las teorías físicas.

Partiendo de estos principios experimentales, toda la geometría elemental se construye por una cadena no interrumpida de deducciones incontestables y se aplica a las diversas líneas, superficies y volúmenes simples. El estudio práctico de los volúmenes ha sido singularmente facilitado por la institución de la geometría descriptiva, constituída en un cuerpo de doctrina por una percepción de genio de nuestro ilustre Monge. La geometría descriptiva presenta la propiedad filosófica importante de ejercitar la imaginación, es decir, la facultad de representarse netamente un vasto conjunto de objetos, ficticios, como si los tuviéramos delante de los ojos. La geometría descriptiva, por lo demás, no tiene valor más que como ciencia de aplicación : constituye la teoría de las artes geométricas.

La geometría de los antiguos se ocupaba sucesivamente de las diversas líneas, superficies, volúmenes, que se presentaban al espíritu, no pasando nunca al examen de una nueva forma sino cuado se creía haber agotado todo lo que había de interesante en las formas precedentes. En esta manera de proceder, no se podía sacar ningún auxilio directo de los trabajos anteriores, cuando se emprendía el estudio de un nuevo problema. La geometría de los modernos, por el contrario, es relativa a todas las formas y a cualquiera de ellas ; el estado normal de la geometría fué constituído por el incomparable Descartes, de acuerdo con la armonía fundamental que estableció entre las figuras y las ecuaciones, a fin de convertir todas las concepciones geométricas en puras nociones algebraicas. La obra de Descartes ha determinado los demás progresos matemáticos ulteriores y ha permitido todas las aplicaciones teóricas ; ha creado la noción positiva de función, que debía suplantar más tarde la relación mucho más metafísica de causa a efecto ; puede ser considerada como uno de los principales esfuerzos científicos del espíritu humano.

La geometría analítica se presenta, pues, como una prolongación indispensable de la geometría elemental : a la geometría plana y a la geometría del espacio corresponden las geometrías analíticas a dos y a tres dimensiones. Un punto se halla así determinado por un sistema de dos o tres números, colocados en orden determinado ; la generalización, que consiste en llamar punto, no ya a un sistema de dos o tres números, sino a un sistema de cuatro, cinco... números, no debe sorprendernos, y han resultado de ellos las geometrías de cuatro, cinco... dimensiones, la geometría de *n* dimensiones en la nuestra no es un caso particular; nuestro espacio, nuestros volúmenes, nuestras superficies se presenta como casos particulares de hiperespacios, de hipervolúmenes, de hipersuperficies.

He indicado ya, a propósito de las geometrías no euclidianas, el peligro del abuso de esas ingeniosas construcciones del espíritu; pero aquí, lo que es sorprendente, es la utilidad del lenguaje geométrico en estos capítulos del álgebra; así también la aplicación a la mecánica y a la física de la geometría de *n* dimensiones, que se introduce naturalmente en los sistemas caracterizados por parámetros en número superior a tres; en particular, hay interés en considerar el tiempo como proporcional a una cuarta dimensión imaginaria del espacio.

Empero, el descubrimiento fundamental de Descartes habría quedado incompleto, puesto que era aún indispensable tratar gran número de problemas relativos a las funciones. Leibnitz tuvo la gloria de combinar la concepción cartesiana con las vistas primitivas de Arquímedes sobre las medidas geométricas, que consistían en reducir las figuras curvilíneas a sus elementos rectilíneos; instituyó el concepto fundamental de cantidad infinitamente pequeña como se quiere. La geometría infinitesimal estaba entonces fundada bajo sus dos aspectos inversos: 1.º la geometría diferencial, que comprende el estudio de la variación de las funciones, determinando la tangente en un punto de la curva correspondiente; esta geometría descansa sobre el cálculo diferencial, cuyo fin principal es calcular el cuociente de dos cantidades infinitamente pequeñas; 2.º la geometría integral, ya entrevista por Arquímedes, que se propone medir la superficie limitada por una curva cualquiera, y que se apoya en el cálculo integral, es decir, en el cálculo de la suma de magnitudes infinitamente pequeñas, tomados en número infinitamente grande.

El cálculo infinitesimal debía tener un alcance y una fecundidad que sus fundadores estaban lejos de sospechar. Gracias a la advertencia fundamental de que en mecánica y en física se puede considerar como infinitamente pequeña toda magnitud que escape a la medida, en otras palabras, que es inferior a los errores de experiencia, el cálculo infinitesimal se convirtió en un instrumento maravilloso sin el cual las ciencias físicas no hubieran podido desarrollarse.

La unión íntima de la geometría y del cálculo ha demostrado ser, pues, particularmente feliz y particularmente fecunda; esta unión es tal vez aún más grande en el cálculo vectorial, cuya creación, por lo demás, reciente, ha sido en gran parte sugerida por el desarrollo de la física. Sea como fuere, la revolución algebraica debida a Leibnitz se presenta como la consecuencia necesaria y el indispensable complemento de la revolución geométrica realizada por Descartes; la institución de la geometría infinitesimal es el último progreso decisivo del espíritu humano en geometría.

Nos hemos extendido quizá demasiado en la apreciación de la geometría, pues ella forma el dominio esencial de las especulacines matemáticas. En cuanto a la mecánica, podríamos, más aún que a la geometría, considerala como un capítulo de las ciencias físicas. Todo un conjunto de cuestiones, que se reunen bajo el nombre de mecánica física, forman netamente parte de la física. Hay, empero, interés filosófico en considerar la mecánica como la última rama de las matemáticas; por lo demás, estas distinciones tienen muy poca importancia y son asaz delicadas, de lo cual más bien debemos alegrarnos, pues es indicio de gran coherencia, del paso casi insensible de una ciencia a la siguiente.

La mecánica es la ciencia del movimiento y de los diferentes factores que lo determinan. Como la geometría, la mecánica descansa en varios principios experimentales, que se puede, según parece, reducir a dos: el principio de menor acción y el principio de relatividad.

El primero, debido principalmente a los esfuerzos de Keplero, de Newton, de Leibnitz y de Hamilton, nos enseña que las modificaciones que afectan un sistema, son tales, que tienden a hacer mínimas las perturbaciones exteriores. Tenemos allí no un simple principio de mecánica, sino una ley universal, cuyas aplicaciones son tan numerosas como variadas: esta ley da cuenta del equilibrio y de la inercia en mecánica, de la inducción electromagnética, del desplazamiento del equilibrio físico o químico; hasta podría asociársele la costumbre y la adaptación de los seres vivientes, el instinto conservador de las sociedades y hasta la ley de la oferta y de la demanda, en economía política.

El segundo principio de la mecánica, el principio de relatividad, fué entrevisto por Galileo. Todo movimiento, exactamente común a todos los elementos de un sistema, no altera en ese sistema ninguna propiedad interior. De ello resulta la imposibilidad de poner en evidencia un movimiento de translación absoluto; una vez más lo absoluto se nos escapa. La aplicación del principio de relatividad ha promovido, en estos últimos tiempos, grandes dificultades, debidas sobre todo a los progresos de la óptica y del electromagnetismo. No podemos insistir sobre esta mecánica nueva, que ha modificado profundamente las concepciones tradicionales de espacio y de tiempo, y que ha destruído el carácter absoluto de la mecánica clásica, puesto que ésta no puede aplicarse más que a los cuerpos que tienen velocidad pequeña con relación a la velocidad de la luz. En suma, el principio de relatividad se aplica también a la física, y y no sólo a la física, sino también a todos los fenómenos orgánicos.

Los dos principios de la mecánica presentan, pues, un carácter extremadamente notable, a saber, que, verificados al principio por los fenómenos mecánicos, parecen aplicarse a multitud de otros fenómenos, a los que eran extraños al principio. Por accidente, y no por esencia, esos principios han sido mecánicos primero. Hubieran podido ser obtenidos igualmente por el estudio de los fenómenos biológicos o sociales. Si la mecánica ha sido la primera en formularlos, es porque ella tiene por objeto fenómenos menos complejos.

Establecida sólidamente esta base experimental, la mecánica se desarrolla en seguida lógicamente, con auxilio de la geometría y del cálculo. La mecánica se presenta como la primera aplicación de la geometría general, y como su aplicación más perfecta, porque es la más simple. En mecánica es donde vemos surgir asimilaciones inesperadas entre problemas que, a primera vista, no parecen tener conexión alguna, y que finalmente consideramos como idénticos. ¿Cómo habríamos podido, sin el auxilio de la geometría general, notar la menor analogía entre la determinación de la dirección de una curva en cada uno de sus puntos y la de la velocidad adquirida por un cuerpo en cada instante de su movimiento? Es cómodo comenzar la mecánica por un preámbulo puramente cinemático, cuyo objeto es estudiar las posiciones sucesivas de un cuerpo móvil, haciendo abstracción de las diversas circunstancias que dan nacimiento a su movimiento. La cinemática se halla singularmente facilitada por la introducción del concepto de punto material, es decir, de cuerpo cuyas dimensiones son muy pequeñas con relación a los desplazamientos que sufre; el punto material permite pasar naturalmente a la cinemática del cuerpo sólido, cuyos movimientos de translación y de rotación se estudian sucesivamente. Es necesario considerar especialmente los fenómenos desde el punto de vista puramente cinético, no sólo en mecánica, sino también en electricidad (corriente eléctrica), en óptica (teoría ondulatoria) y hasta en química (celeridad de reacción); tenemos allí un nuevo ejemplo de la influencia ejercida por la mecánica sobre las otras ciencias. En el mismo orden de ideas, conviene conceder particular importancia al estudio del movimiento vibratorio, que se encuentra en gravedad y en acústica, y también, bajo otra forma, en electricidad y en óptica.

Este preámbulo cinemático sirve de introducción a la mecánica propiamente dicha, que, como siempre, debe ser sucesivamente considerada desde el punto de vista estático, después desde el punto de vista dinámico, según que el sujeto de estudio se someta a las condiciones de equilibrio o a las leyes del movimiento. Las cuestiones de estática son, por su naturaleza, mucho más fáciles de tratar que las cuestiones de dinámica; también habían sido ya resueltas en parte por las bellas investigaciones de Arquímedes, relativas al equilibrio, ya de los sólidos, ya de los líquidos. Pero la estática no forma más que un caso particular de la dinámica, puesto que la inmovilidad puede ser considerada como un simple equilibrio, en el cual diversos movimientos se neutralizan exactamente, como lo demuestra el teorema de los trabajos virtuales, teorema fundamental de la estática, debido al genio de Lagrange.

Partiendo del teorema de Lagrange, el paso de la estática a la dinámica es posible merced a la institución del concepto de inercia, comprendido por primera vez en toda su generalidad por d'Alembert: la inercia de la materia se presenta como una abstracción en extremo ventajosa, que asegura la perfecta homogeneidad de la ciencia mecánica, permitiendo considerar todos los móviles como idénticos y todas las fuerzas como de igual naturaleza. El teorema de d'Alembert, que establece la correlación entre el punto de visto estático y el punto de vista dinámico, tiene también un alcance que excede con mucho el dominio de la mecánica; encontramos, en efecto, relaciones análogas en biología y en sociología, puesto que, por una parte, las cuestiones fisiológicas derivan de las cuestiones anatómicas, y que, por la otra, el progreso es el desarrollo del orden, como claramente lo ha demostrado el fundador de la sociología, Augusto Comte.

La mecánica, bajo sus tres aspectos esenciales, cinemática, estática y dinámica, constituye el último estadio de las especulaciones matemáticas. Sirve de transición, de unión con las ciencias superiores, la astronomía y la física. La astronomía constituye una aplicación de las matemáticas a los fenómenos celestes. Por lo demás, los vínculos de la mecánica con la física son sumamente estrechos: por una parte la física se inicia por el estudio de muchas cuestiones, que todavía son de la mecánica, como, por ejemplo, la gravedad y la elasticidad. Por otra parte, el teorema de d'Alembert, de que hablábamos hace un momento, admite como consecuencia inmediata el teorema de las fuerzas vivas o principio de la conservación de la energía mecánica, caso particular del principio de la conservación de la energía, que domina todas las ciencias físicas: la noción fundamental de energía se introduce por primera vez y naturalmente en mecánica.

Después de apreciar así la constitución normal de la ciencia matemática, y de indicar su lugar en la jerarquía de los conocimientos humanos, poco nos queda que decir, para terminar, respecto a su importancia filosófica, científica y social.

Es pueril y vano tratar de estudiar los métodos científicos fuera de las investigaciones positivas en que los sabios los emplean: todo lo que se ha podido decir hasta ahora de los métodos considerados en abstracto se ha reducido con gran frecuencia a generalidades vagas, sin gran interés teórico, sin gran alcance práctico.

El método de las matemáticas no difiere esencialmente del de las demás ciencias. Como toda ciencia, ellas poseen una base física experimental: son los principios, que enuncian cierto número de fenómenos primitivos, establecidos por la observación y no por el razonamiento. Por otra parte, hay gran interés en reducir al mínimum el número de esos principios fundamentales, puesto que la ciencia está esencialmente destinada a dispensarnos lo más posible de las observaciones directas, permitiendo deducir del menor número de datos inmediatos el mayor número de resultados. Como Mach lo ha hecho resaltar claramente, el fin de la ciencia es expresar los hechos de la manera más sencilla y más económica. Si ninguna ciencia, ni siquiera las matemáticas, se edifica con puras abstracciones lógicas, no es por ello menos cierto que la deducción representa en matemáticas un papel predominante y casi exclusivo, al menos para lo que es ciencia hecha. Así es que, en la enseñanza, todas las proposiciones se deducen de los principios experimentales, o de los teoremas ya demostrados, evitando generalmente hacer llamamiento a la evidencia directa, en ocasiones engañosa, de la proposición a establecer; se muestra que esta proposición está contenida en una proposición anteriormente demostrada o en un principio. El empleo de la deducción presenta gran interés pedagógico y educativo; pero no habría que disimularse la ineptitud de este método para hacer progresar la ciencia: es este un nuevo punto común entre las matemáticas y las ciencias más experimentales. Parecería que esta proposición, a consecuencia de la evidencia misma del método deductivo, hubiera podido ser demostrada en cualquiera parte y en cualquier tiempo. Nada es más inexacto, en lo que concierne a la ciencia que se hace. Los mismos matemáticos lo reconocen: hacen uso constante de la inducción y de la hipótesis. «En vano, escribía Galois, trataríamos de disimularlo: no deducimos, combinamos, comparamos; cuando llegamos a la verdad, es después de muchos titubeos antes de alcanzarla». Muchas proposiciones nuevas, especialmente en la teoría de los números, han sido adquiridas por la generalización de observaciones repetidas. «No hay abismo entre la experimentación y la deducción, dice

Mach: se trata siempre de adaptar ideas a los hechos, e ideas unas a las otras». En las diversas ciencias, la marcha del descubrimiento es la misma: iguales ensayos, iguales titubeos, iguales esperanzas defraudadas, igual sutileza e igual imaginación para comprender las analogías y los vínculos inesperados. En tanto que la deducción se adelanta lógicamente y paso a paso, la inducción procede por saltos, que no tienen nada de metódicos. De ello se sigue que los resultados de la inducción deber ser después justificados por la deducción.

En suma, si en las matemáticas la deducción parece representar un papel principal, es porque tenemos que hacer con fenómenos muy simples, de los cuales se nos presenta una construcción sabia, edificada penosamente piedra por piedra. Y esto es tan cierto, que acontece casi lo mismo con la física, cuyo admirable desarrollo presenciamos. Para no citar más que un ejemplo, la enseñanza de la electricidad puede ya no hacer uso más que del método deductivo, pues todas las propiedades de los cuerpos electrizados pueden derivarse de un número muy reducido de principios fundamentales, que, como los principios matemáticos, fueron obtenidos por una inducción general de los diferentes hechos conocidos.

Si las ciencias experimentales, y sobre todo la física, han llegado a tan notable estado de positivismo, es principalmente merced a la aplicación sistemática de la geometría general, a consecuencia de los descubrimientos de Descartes y de Leibnitz. En principio, desde el punto de vista estrictamente lógico, no hay cuestión, cualquiera que sea, que no pueda ser finalmente considerada como consistente en determinar cantidades las unas por las otras, y que, por consiguiente, no provenga de la ciencia matemática. Hase podido someter a ecuación los hechos más simples: los fenómenos geométricos, mecánicos y físicos; lo que se ha sabido hacer para estos fenómenos es muy natural imaginarlo posible para otros, pudiendo ser concebida cada cuestión como finalmente reductible a una cuestión de números; todo fenómeno, aún social, tendría ciertamente su ecuación, como una figura o como un movimiento, si su ley pudiera sernos conocida con suficiente precisión. Semejante apreciación no constituye en el fondo más que el sentido riguroso del principio fundamental de la invariabilidad de las leyes naturales.

En los hechos, pronto nos vemos detenidos por la complejidad de los problemas que se nos plantea; el dominio matemático se ha visto hasta aquí prácticamente limitado a las cuestiones más sencillas de las ciencias físicas, y esto por dos razones: primero, porque las diversas cantidades que figuran en las cuestiones más complejas y en la mayor parte de las cuestiones orgánicas no nos dan medidas bastante constantes para procurarnos la ecuación requerida, y porque los factores tan numerosos que determinan los fenómenos pueden escapar parcial o totalmente a nuestras facultades de experimentación; y en segundo lugar, aún cuando llegásemos a hacer explícitas las funciones que expresan las variantes de cada factor, seríamos incapaces de resolver el problema matemático correspondiente, tanto a causa de la invencible dificultad de los cálculos, como de la excesiva complejidad de los datos. Los procedimientos y las fórmulas matemáticas son pues rara vez susceptibles de aplicación al estudio efectivo de los diversos fenómenos, en cuanto se quiere sobrepujar la más extrema sencillez en las condiciones de los problemas. Así es que los matemáticos pretenderían en vano dirigir la filosofía general, puesto que no se aplican más que a los fenómenos más simples, y porque hacen abstracción de todas las propiedades extrañas al número, a la extensión, al movimiento; en fin, porque disponen a los sabios que a ellas se dedican exclusivamente a substituir la pura deducción a la contemplación directa de los hechos.

Esta restricción necesaria no quita en ninguna manera el inmenso interés teórico que hay que dedicar a las especulaciones matemáticas. Por el estudio de las matemáticas, y sólo por ellas, puede uno hacerse una idea justa y profunda de lo que es realmente una ciencia. Allí únicamente se puede esperar aprender con precisión el método general que el espíritu humano emplea en sus investigaciones positivas, porque en ninguna otra parte se ven resueltos los problemas de manera tan completa. Allí es donde la inteligencia humana ha dado las pruebas mayores de su poder, porque las ideas tienen allí el grado más alto de abstracción, y porque allí el razonamiento adquiere fuerza invencible. La ciencia matemática es la roca, el suelo granítico sobre el cual se han superpuesto sucesivamente todas las otras capas de conocimientos científicos; constituye la verdadera lógica de los modernos y debe ser considerada como la base filosófica de la educación general.

Las matemáticas fueron, en el pasado, la cuna del espíritu positivo, y son aún hoy su más sólido apoyo, puesto que representan este espíritu en toda su pureza elemental. Saludemos, pues, con reconocimiento muy sentido la memoria de esos bienhechores de la humanidad, cuyos nombres hemos rememorado y cuyos trabajos permitieron el advenimiento y el desarrollo de todas las demás ciencias, para llegar finalmente a la sociología y a la moral.

MARCELO BOLL.