Revista de Ciencias Económicas

Publicación mensual del Centro Estudiantes de Ciencias Económicas

Director:
Italo Luis Grassi

Administrador:
Juan Delbosco

Secretario de Redacción
Jacobo Waismann

Redactores:
Mario V. Ponisio - Mauricio E. Greffier - Rómulo Bogliolo
Mario R. Natta - Agustín A. Forné - Dívico A. A. Fürnkorn

Año IV Julio y Agosto de 1916 Núm. 37-38

Dirección y Administración
1835 - CALLE CHARCAS - 1835
BUENOS AIRES

La esperanza matemática y la ruina de los jugadores [1]

Según el concepto clásico, *esperanza matemática* es la cantidad que un jugador debe pagar para poder participar en el juego. Es lógico que esta cantidad sea proporcional a la probabilidad de ganar de cada jugador.

Si tres jugadores A, B y C, cuyas probabilidades son p_a, p_b y p_c interesan una suma o puesta total S, llamando e_a, e_b y e_c a las esperanzas o puestas respectivas, tendremos, haciendo la repartición proporcional, que

$$e_a = \frac{p_a S}{p_a + p_b + p_c} = p_a S$$

$$e_b = \frac{p_b S}{p_a + p_b + p_c} = p_b S$$

$$e_c = \frac{p_c S}{p_a + p_b + p_c} = p_c S \quad \text{desde que}$$

$$p_a + p_b + p_c = 1$$

Vemos así que, la *esperanza matemática,* es el producto de la probabilidad de ganar por la suma total a cobrar.

Según un concepto más moderno, otra cosa es la *esperanza matemática*. En lugar de basarse el cálculo de ésta en la *suma total interesada* o *puesta,* se basa en la *ganancia* o en la *pérdida* que un juego puede ocasionar. Cada jugador

(1) Concepto moderno tomado del curso del profesor José González Galé, en la Facultad de ciencias económicas.

tiene, entonces, dos esperanzas matemáticas: la esperanza matemática de ganar y la esperanza matemática de perder, que juntas forman la *esperanza matemática total*. La primera es el producto de la probabilidad de cobrar por la suma a ganar y la segunda el producto de la probabilidad de pagar por la suma a perder.

Si el juego es equitativo, la *esperanza positiva* de ganar debe ser igual a la *esperanza negativa* de perder y, por lo tanto, su suma será igual a cero.

Sea S la suma que se juega; sea e la que paga un jugador, cuya probabilidad de ganar es p.

Si la suma es S y el jugador paga e, la ganancia a realizar será:

$$S - e$$

Como su probabilidad de ganar es p, su *esperanza matemática positiva* será:

$$p\,(S - e)$$

Su probabilidad de perder es la contraria, es decir $(1 - p)$ y como pierde e, su esperanza negativa será:

$$-(1 - p)\,e$$

Sumando tendremos:

$$p\,(S - e) - (1 - p)\,e = p\,S - p\,e - e + p\,e = p\,S - e$$

Si el juego es equitativo, la suma anterior ha de ser igual a cero. Tendremos, pues,

$$p\,S - e = 0 \quad \therefore \quad e = p\,S$$

El nuevo concepto de *esperanza matemática*, nos ha llevado al concepto antiguo.

Del concepto clásico se puede, asimismo, pasar al moderno.

Si, tomando el ejemplo anterior, la suma que se paga para jugar, es decir, la puesta, es pS, la ganancia a realizar será $S-pS$, y la esperanza de ganar

$$p\,(S - p\,S);$$

la de perder

$$-(1 - p)\,p\,S$$

Sumando ambas expresiones y sacando factor común S en el primer término, tendremos la esperanza total:

$$p\,S\,(1 - p) - (1 - p)\,p\,S = p\,S - p^2\,S - p\,S + p^2\,S,$$

suma que, como se ve, es igual a cero.

Todo esto se verá mejor con un ejemplo numérico.

Sea $S = 1000$; $p = \frac{1}{1000}$

La esperanza, según el concepto clásico, será

$$pS = \frac{1}{1000} \times 1000 = 1\,;$$

la ganancia a realizarse sería

$$S - pS = 1000 - 1 = 999\,;$$

la esperanza de ganar

$$p\,(S - p\,S) = \frac{1}{1000} \times 999\,;$$

la de perder

$$-(1 - p)\,p\,S = -\frac{999}{1000} \times 1$$

Sumando y sacando factor común S en el primer sumando, tendremos:

$$pS\,(1 - p) - (1 - p)\,pS = \frac{999}{1000} - \frac{999}{1000} = 0$$

Teniendo esta ecuación, no es necesario conocer la suma a pagar, porque en caso de perder, ella se hallaría muy fácilmente. Nos bastaría el siguiente cálculo:

$$\frac{999}{1000} - \frac{999}{1000} \times x = 0\,; \quad \text{de donde } x = 1$$

Con este concepto moderno de esperanza matemática, el problema de la ruina de un jugador, se nos presenta muy sencillo.

Siendo p la probabilidad que tiene un jugador A de fortuna a para arruinar a su contrincante B de fortuna b, calculemos el valor de p en función de a y de b.

La esperanza matemática de ganar de A, según hemos visto anteriormente, será

$$p\,b$$

y la esperanza de perder

$$-(1 - p)\,a$$

De donde $p\,b - (1 - p)\,a = p\,b - a + p\,a = 0$

sacando p factor común, tenemos

$$p\,(b + a) - a = 0;$$

de donde la probabilidad de que A arruine a B es

$$p = \frac{a}{a + b}$$

Por lo tanto, la probabiiidad de que B arruine a A será

$$q = 1 - \frac{a}{a + b} = \frac{b}{a + b} \quad (1)$$

Tomemos un ejemplo numérico:

Si un jugador A juega con \$ 5 y otro B con \$ 100 ¿cuál sería la probabilidad de que el segundo jugador arruine al primero?

Según la fórmula (1) tendremos:

$$\frac{100}{105} = \frac{20}{21}$$

Es decir que, el segundo jugador, tiene casi la certeza de arruinar al primero.

Luego podemos decir que, en un juego equitativo, las probabilidades de que dos jugadores se arruinen son, respectivamente, proporcionales a sus fortunas.

La matemática, de perfecto acuerdo con la moral, prueba en este caso, que el jugador de profesión, si no se vale de trampas, concluye, forzosamente, por arruinarse. Prueba además que al jugar contra cualquier adversario que se presente, juega, en realidad, contra todo el mundo, esto es, contra un jugador impersonal, inmensamente más rico que él y que, por lo tanto, posee infinitas probabilidades de arruinarle.

Si el juego no es equitativo, cambia el aspecto del problema, la pequeña ventaja que cada partida deja al jugador favorecido, concluye por inclinar en su favor la balanza. Es lo que ocurre con las casas de juego, las que viven merced a esa ventaja. Resulta, por lo expuesto, que al jugador profesional no le quedan, como con razón dice Laurent, más que dos caminos abiertos: ser víctima o victimario, estafado o estafador. Lo primero en el caso de que juegue juegos equitativos; lo segundo si juega con una ventaja a su favor.

JOSÉ PORTO.