Revista
de
Ciencias Económicas

Publicación mensual del Centro estudiantes de ciencias económicas

Director:
Mario V. Ponisio

Administrador:
Eduardo S. Azaretto

Secretario de redacción:

Redactores:
**Italo Luis Grassi - Mauricio E. Greffier - Luis Marforio - Rómulo Bogliolo
José H. Porto - Jacobo Waisman - Juan F. Etcheverry**

Año V — Abril, mayo y junio de 1917 — Núms. 46 - 47 - 48

DIRECCIÓN Y ADMINISTRACIÓN
CHARCAS 1835
BUENOS AIRES

Impuesto progresivo sobre los réditos [1]

Aplicación de la fórmula de Pareto

Es sabido que el impuesto sobre los réditos puede ser proporcional o progresivo.

Si llamamos *I* al impuesto, *c* al porcentaje y *r* a los réditos, el impuesto proporcional resultará definido por la relación:

$$I = c\,r$$

siempre que el cociente $\frac{I}{r} = c$ quede constante con el variar de *r*.

Si, por el contrario, ese cociente aumenta al crecer *r*, el impuesto será progresivo, siendo *c* función creciente de *r*. Pero, como para que $\frac{I}{r}$ sea una función creciente, es necesario que su derivada sea positiva, el impuesto progresivo quedará caracterizado matemáticamente por la condición de que:

$$\frac{d\,\frac{I}{r}}{dr} > 0$$

derivando tendremos:

$$\frac{\frac{dI}{dr}\,r - I}{r^2} > 0$$

---

(1) Del curso de estadística que dicta el doctor Hugo Broggi. en la Facultad de ciencias económicas.—*(N. de la D.)*

Para que esta fracción sea positiva bastará que lo sea el numerador, puesto que el denominador es un cuadrado, luego:

$$\frac{dI}{dr}\,r - I > 0$$

pasando *I* y *r* al segundo miembro tendremos:

$$\frac{dI}{dr} > \frac{I}{r}$$

De manera, que podemos definir el impuesto progresivo, diciendo que es aquel, cuya derivada respecto a *r* es mayor que la relación $\frac{I}{r}$.

Según esta definición, progresivo será, por ejemplo, un impuesto de la forma:

$$I = cr - a \qquad (1)$$

ya que:

$$\frac{dI}{dr} = c > \frac{cr - a}{r} = c - \frac{a}{r} \qquad (2)$$

Supongamos, para tener un ejemplo numérico que:

$$I = \frac{5}{100}\,2000 - 100$$

a $r = 2000$ corresponde $I = 0$: el impuesto es igual al 5 % de la diferencia entre *r* y 2000.

De acuerdo con esta fórmula quienes tengan $ 3000 pagarán:

$$I = \frac{5}{100}\,3000 - 100 = 50$$

En la misma forma podríamos hallar el impuesto que corresponde a un rédito cualquiera.

Ahora, el problema que nos proponemos es el siguiente: conocido el impuesto que se va a aplicar, hallar aproximadamente lo que éste producirá.

Es evidente que si el impuesto es proporcional bastará conocer el porcentaje y la suma total de los réditos de la población.

Pero, si el impuesto es progresivo, será necesario conocer además, la distribución de los réditos, porque en este caso, los que tienen más, pagan una proporción mayor, y no es indiferente, por lo tanto, que haya muchos que tengan poco y muy pocos que tengan mucho.

Admitamos como cierta la fórmula de Pareto, según la cual el número *N* de individuos que tienen un rédito por lo menos igual a *r* es:

$$N = Cr^{-\alpha} \qquad (3)$$

donde α es una constante a la cual atribuimos el valor 1.5.

Para ver lo que significa *C*, supongamos que se haya determinado estadísticamente que hay 100.000 individuos que tienen un rédito superior a \$ 2.000. Reemplazando en la fórmula (3) tenemos:

$$100.000 = C\ 2.000^{-1.5}$$

De donde:

$$C = 100.000 \times 2.000^{1.5}$$

tomando logaritmos resulta:

$$\log.\ C = \log.\ 100.000 + 1.50 \log.\ 2.000$$

Conociendo *C* podríamos determinar, reemplazando en la fórmula (3), el número *N* de individuos que tienen más de \$ 3.000 de rédito, el cual sería igual a:

$$\log.\ N = \log.\ C - 1.50 \log.\ 3.000$$

Sin embargo, no es *N* lo que es necesario conocer, sino el número de individuos cuyos réditos son exactamente igual a *r*, porque conociendo ya por la fórmula (1), lo que corresponde abonar a cada uno de éstos, fácil será averiguar lo que pagarán en conjunto.

Se trata, pues, de deducir del número *N* de individuos que tienen *r* o más que *r*, el número que llamaré *n*, de los que tienen exactamente *r*.

Si llamamos $N_{(r)}$ al número de los que tienen *r* o más que *r*, $N_{(r+h)}$ expresará el número de los que tienen por lo menos $(r+h)$. La diferencia:

$$N_{(r)} - N_{(r+h)}$$

nos dará el número de los que poseen un rédito comprendido entre r y $r+h$ y para tener el número de los que tienen exactamente *r*, no tendremos más que hacer tender *h* hacia cero, en cuyo caso bastará dividir por *h* y tomar límites

$$n = \lim_{h=o} \frac{N_{(r)} - N_{(r+h)}}{h}$$

lo cual es igual a la derivada de $N_{(r)}$ con signo negativo. El producto

$$-\frac{d\ N}{dr}(cr - a)$$

será lo que pagan en conjunto.

Considerando todos los valores de *r* que puede haber y determinando el impuesto que corresponde a cada uno de ellos, para obtener el impuesto total que representamos por *T*, no tendremos más que efectuar la suma de todos estos impuestos.

Suponiendo que *r* varía con continuidad, esa suma será la integral de todos sus términos, tomada entre los límites en que varían los réditos.

Llamando *m* al rédito mínimo y *M* al rédito máximo, el total *T* de lo que producirá el impuesto será:

$$T = -\int_m^M \frac{dN}{dr}(cr - a)\, dr$$

pero:

$$N = Cr^{-1.5}$$

$$-\frac{dN}{dr} = 1.5\, Cr^{-2.5}$$

reemplazando tendremos:

$$T = \int_m^M 1.5\, Cr^{-2.5}(cr - a)\, dr$$

Como el ejemplo no tiene otro valor que el de ilustración del método, tomaremos, para simplificar, $M = \infty$

La integral de una suma es igual a la suma de las integrales. Sacando las constantes afuera del signo, podemos escribir:

$$T = 1.5\, Cc \int_m^\infty r^{-1.5}\, dr - a\, 1.5\, C \int_m^\infty r^{-2.5}\, dr \qquad (4)$$

integrando el primer sumando da:

$$1.5\, Cc \int_m^\infty r^{-1.5}\, dr = 1.5\, Cc \left(\frac{1}{-0.5}\, r^{-0.5} \right)_m^\infty = 1.5\, Cc\, 2\, m^{-0.5} = 3\, Ccm^{-0.5}$$

del mismo modo:

$$a\, 1.5\, C \int_m^\infty r^{-2.5}\, dr = a\, 1.5\, C \left(\frac{1}{-1.5}\, r^{-1.5} \right)_m^\infty = a\, 1.5\, C \frac{2}{3} m^{-1.5} = a\, Cm^{-1.5}$$

sustituyendo estos valores en la fórmula (4) tendremos:

$$T = 3\, Cc\, m^{-0.5} - a\, Cm^{-1.5}$$

que se puede escribir también:

$$T = 3\, Cc\, m^{-1.5}\, m - a\, Cm^{-1.5}$$

donde $Cm^{-1.5}$ es el número de individuos que tienen por lo menos un rédito igual a *m*, es decir, el número total de los contribuyentes, que representamos por $N_{(m)}$ luego puedo escribir que:

$$T = 3\ cm\ N_{(m)} - a\ N_{(m)}$$

sacando factor común:

$$T = N_{(m)}\ (3\ cm - a) \qquad (5)$$

Ejemplo numérico:

$$\text{Sea } m = 2.000 \qquad N = 100.000$$
$$c = 0.05 \qquad y \qquad a = 100$$

En este caso, los que tienen una renta de $ 2.000 no pagarán nada, según se observa aplicando la fórmula (1).

$$I = 0.05 \times 2.000 - 100 = 0$$

El que tenga $ 4.000 pagará:

$$I = 0.05 \times 4.000 - 100 = 100$$

y el que tenga $ 10,000

$$I = 0.05 \times 10.000 - 100 = 400$$

El estado percibirá según la fórmula (5):

$$T = 100.000\ (3 \times 0.05 \times 2.000 - 100) = 20.000.000$$

Si quisiéramos averiguar el número N_1 de personas que tienen por lo menos $ 3.000 de rédito, sabiendo que hay N_0 que tienen $ 2.000, bastará hacer la siguiente relación:

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{C\ 3000^{-1.5}}{C\ 2000^{-1.5}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1.5} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{1.5}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1.5} = 0.667^{1.5}$$

de donde:

$$N_1 = N_0 \times 0,667^{1.5} = 100.000 \times 0,667^{1.5}$$

resolviendo por logaritmos tendríamos:

$$N_1 = 100.000 \times 0.54475 = 54.475$$

Si comparamos el número de los que tienen $ 2.000 con los que tienen $ 3.000, veremos, que para un rédito que no es doble, el número de personas se reduce a la mitad; de la misma manera veríamos, que para un rédito doble el número de los que lo poseen, se reduciría a la tercera parte, es decir, a 35.356.

De modo que, para una renta 1 se tienen 100.000 individuos, y para una renta 2 hay 35.356. Con una simple regla de tres podríamos hallar el número que corresponde a un rédito 4.

$$\begin{array}{ccc} 100.000 & \text{———} & 35.356 \\ 35.356 & \text{———} & x \end{array}$$

de donde:

$$x = \frac{35356^2}{100000}$$

De la rapidez con que decrecen estos números se saca como consecuencia que una modificación aparentemente inocente en el mínimo, puede influír bastante sobre *T*.

En efecto, siendo \$ 3.000 el límite, en vez de \$ 2.000, el estado percibiría:

$$T = 54.475\ (3 \times 0.05 \times 3.000 - 100) = 19.066.250$$

es decir, que el estado dejaría de cobrar \$ 933.750 y eximiría del impuesto a 45.525 personas.

Como se ve, esta es una consecuencia fiscal muy importante.

El impuesto, que hemos considerado de la forma

$$f(r) = c\, r - a$$

es un impuesto progresivo porque satisface la condición de que la derivada del impuesto respecto al rédito, es mayor que $\frac{I}{r}$ pero, es seguramente el menos progresivo de los impuestos de esta clase.

Para darse cuenta de la afirmación anterior, bastará observar la fórmula (2), donde el cociente $\frac{I}{r}$ tiende hacia *c* con el crecer de *r*, diferiendo por lo tanto muy poco del impuesto proporcional cuando *r* es grande. En la práctica el problema que hemos tratado, se presenta en una forma algo diferente.

Cuando el estado va a aplicar un impuesto, estudia cual es el más conveniente y lo aplica porque necesita cierta suma, *T* por ejemplo, que se conoce de antemano.

Supongamos que el impuesto que el estado prefiere aplicar sea el progresivo y que al mismo tiempo establece, por razones obvias, que los que tengan un rédito inferior a \$ 2.000 no contribuyan.

Si llamamos *A* a lo que pagan los que tienen \$ 2.000, si el impuesto fuera proporcional, los que tienen \$ 10.000 pagarán cinco veces más o sea *5A*. Para que sea progresivo vamos a suponer que pagan *8A;* del mismo modo podríamos establecer que los que tienen \$ 50.000 en vez de pagar *10A*, paguen *80 A*, es decir, diez veces más que los que tienen 10.000; luego, simplificando los ceros tendríamos que:

Los	que	tienen	2	pagan	A
»	»	»	10	»	8A
»	»	»	50	»	80A

A cada una de estas condiciones corresponde una ecuación; tendremos por lo tanto tres ecuaciones que permiten determinar tres incógnitas.

Admitamos que el impuesto sea de la forma:

$$I\,(r) = a + b\,r + cr^{2}$$

donde *a, b* y *c* son las constantes que determinaremos, tomando en cuenta los datos del problema.

Reemplazando en esta última ecuación cada una de las condiciones, tendremos que para

$$\begin{array}{lll} r = 2 & A = a + 2b + 4c & (6) \\ r = 10 & 8A = a + 10b + 100c & (7) \\ r = 50 & 80A = a + 50b + 2500c & (8) \end{array}$$

Determinando en ese sistema de tres ecuaciones las tres constantes *a, b* y *c* en función de *A* podemos deducir lo que pagan los que tienen $ 2.000 o sea *A*.

Multiplicando la (6) por 5 y restando este producto de la (7) tendremos:

$$3\,A = -\,4\,a + 80\,c \qquad (9)$$

Multiplicando la (7) por 5 y restando el producto de la (8) resulta:

$$40\,A = -\,4\,a + 2000\,c \qquad (10)$$

restando de la (10) la (9) da:

$$37\;A = 1920\;c$$

de donde:

$$c = \frac{37\;A}{1920}$$

reemplazando este valor en la (9) se obtendría *a* y conociendo *a* y *c* se hallaría *b*.

Vamos a determinar el valor de *A*. Hemos visto que el número de individuos que tienen exactamente *r* era:

$$N_{(r)} = -\,\frac{d\,N}{dr} = 1.5\;Cr^{-2.5}$$

y que cada uno de éstos pagaba:

$$I = a + br + cr^{2}$$

luego pagarán en conjunto:

$$1.5\;Cr^{-2.5}\,(a + br + cr^{2})$$

y todos los contribuyentes pagarán:

$$T = 1.5\ C \int_{2000}^{M} r^{-2.5}\ (a + br + cr^{2})$$

Como límite inferior hemos tomado el rédito mínimo y como límite superior el rédito mayor posible, porque si r tomase un valor infinito $r^{-2.5}$ se anularía.

Si se efectuase la integración, que es muy sencilla, hallaríamos:

$$T = a\ I_1 + b\ I_2 + c\ I_3$$

En los numeradores de las expresiones *a, b* y *c* aparecería, según vimos anteriormente, la constante *A* que todavía queda indeterminada; si se pusiera en evidencia esa constante encontraríamos:

$$T = A \left(\frac{a}{A} I_1 + \frac{b}{A} I_2 + \frac{c}{A} I_3 \right)$$

Habiendo determinado *c* para hallar *A* tendríamos una ecuación de primer grado:

$$A = \frac{T}{\frac{a}{A} I_1 + \frac{b}{A} I_2 + \frac{c}{A} I_3}$$

Resuelta esta ecuación, quedaría determinado lo que pagan los individuos que tienen \$ 2.000, que hemos tomado como punto de partida, así como también los valores de las constantes *a, b* y *c*, que se determinan en función de *A*.

Reemplazando en la expresión

$$I = a + br + cr^{2}$$

los valores de *a*, *b* y *c* correspondientes y haciendo variar a *r*, conoceremos lo que pagan los poseedores de un rédito cualquiera.

JOSÉ H. PORTO.