Revista

de

Ciencias Económicas

Publicación mensual del "Centro estudiantes de ciencias económicas"

Director:

Mario V. Ponisio

Administrador:

Eduardo S. Azaretto

Secretario de Redacción:

Redactores:

Italo Luis Grassi - Mauricio E. Greffier - Luis Marforio - Rómulo Bogliolo
José H. Porto - Jacobo Waisman - Juan F. Etcheverry

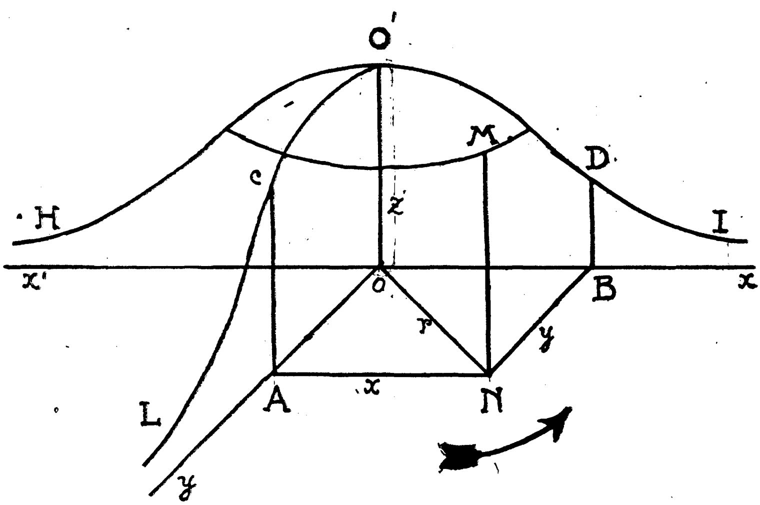
Año V **Julio y Agosto de 1917** **Núms. 49-50**

DIRECCIÓN Y ADMINISTRACIÓN
CHARCAS 1835
BUENOS AIRES

Cálculo de una integral usual (1)

Demostremos que:

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$



Sean x, y y z tres ejes coordenados rectangulares que determinan tres planos ortogonales $x\,y$, $x\,z$, e $y\,z$, que pasan por el punto común O.

Sobre el plano xz, tracemos la curva

$$e^{-x^2}$$

(1) Tomado del curso de matemática actuarial que dicta el profesor José González Galé en la Facultad de ciencias económicas.

y sobre el plano $y\,z$, la curva

$$e^{-y^2}$$

Integrando ambas funciones entre los límites 0 y más infinito, y representando por S cada una de las integrales, que tendrán igual valor, toda vez que solo se diferencian en el símbolo elegido para designar la variable independiente, tenemos:

$$S = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \qquad S = \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy$$

Multiplicando ambas ecuaciones, tenemos:

$$S^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2}\,e^{+y^2}\,dx\,dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

Pero $x^2 + y^2 = r^2$ desde que x e y son los catetos del triángulo rectángulo OAN = OBN cuya hipotenusa es r. Luego:

$$e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}$$

Además, $dx\,dy$ es el área de un rectángulo en el plano xy cuyos lados son respectivamente dx y dy. Por lo tanto

$$e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = e^{-r^2}\,dx\,dy$$

es el volumen de un paralelepípedo recto rectangular que tiene por base el rectángulo infinitesimal $dx\,dy$, y por altura

$$e^{-r^2}$$

La integral que buscamos, S^2, es, pues, la suma de los volúmenes de todos los paralelepípedos análogos que se forman en la región angular xOy del plano xy. O sea el volumen engendrado por la superficie plana $zO'CLy$ al girar sobre OO' en el sentido de la flecha para tomar la posición $zO'DIx$.

Pero dicho volumen es, evidentemente, la cuarta parte del que engendra $zO'CLy$ al girar sobre OO' hasta volver a ocupar su primitiva posición.

Calcular este nuevo volumen es, pues, calcular el anterior desde que representando por V el volumen total tenemos

$$V = 4\,S^2$$

Como, evidentemente, el volumen avaluado será el mismo, cualquiera que sea el procedimiento de descomposición que adoptemos para avaluarlo, supondremos en el plano xy una serie de círculos concéntricos cuyo radio indicaremos en función de la variable r. Ahora bien, dos círculos cuyos radios son, respectivamente r y $r+dr$ determinan una corona circular que tiene por área.

$$\pi(r+dr)^2 - \pi r^2 = \pi\left[r^2 + 2rdr + (dr)^2 - r^2\right] = \pi\left[2rdr + (dr)^2\right]$$

que se reduce a $2\pi r\,dr$ prescindiendo del infinitesimal de segundo orden $(dr)^2$.

A cada una de esas coronas corresponde una capa cilíndrica cuya altura es

$$e^{-r^2}$$

y su volumen

$$e^{-r^2}\,2\pi r\,dr$$

Hallar la suma de los volúmenes de todos los sólidos análogos es integrar la diferencial anterior entre o e ∞. Es decir que tenemos:

$$4S^2 = V = \int_o^\infty e^{-r^2}\,2\pi r dr = -\pi\int_o^\infty -e^{-r^2}\,2r\,dr$$

Pero la diferencial de e^{-r^2} es de la forma $e^u du$. En este caso $u = -r^2$; $du = -2rdr$. Luego $-e^{-r^2}2rdr$ es la diferencial de e^{-r^2}. Por lo tanto

$$4S^2 = -\pi\int_o^\infty -e^{-r^2}\,2rdr = -\pi\left[e^{-r^2}\right]_o^\infty =$$

$$= -\pi\left[e^{-\infty} - e^{-o}\right] = -\pi(-1) = \pi$$

Luego

$$S^2 = \frac{\pi}{4} \quad \therefore \quad S = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

JOSÉ H. PORTO.