Revista
de
Ciencias Económicas

Publicación mensual del "Centro estudiantes de ciencias económicas"

Año VI　　Abril de 1918　　Núm. 58

DIRECCIÓN Y ADMINISTRACIÓN
CHARCAS 1835
BUENOS AIRES

Problema del punto de convergencia (*)

A.—CUESTION.— B.—PLANTEO. C.—SOLUCION. a) MECÁNICA. b) MATEMÁTICA. 1.er PASO: FÓRMULAS DEL GASTO MÍNIMO (II Y III); OBSERVACIONES QUE SE DESPRENDEN DE LAS FÓRMULAS (II Y III).—2.º PASO: USO DE LAS FÓRMULAS II Y III PARA DETERMINAR EL PUNTO DE CONVERGENCIA.—COROLARIOS. — D.—CASO PRACTICO DE PUNTO DE CONVERGENCIA.

A—CUESTION

Entre tres poblaciones A, B y C (fig. 1) cuyas producciones son recíprocamente cambiables, se trata de construir un camino (carretero o ferroviario), de manera que los gastos de construcción del camino, los gastos de conservación del camino, y los gastos de transporte (flete), sean en total un mínimum. Este camino constará de tres ramas AP, BP y CP que se encuentran en un punto P, llamado punto de convergencia.

La posición de este punto P depende del mayor o menor valor de los fletes, del mayor o menor costo de construcción, y del mayor o menor gasto de conservación, en un camino que en otro. Así, si estos tres gastos son mayores en el camino que sale de A, el punto P estará muy cerca de A, pues cuánto menos se usa el camino AP, menor resulta el gasto total.

De tal manera, el problema se reduce a "determinar la longitud que corresponde a cada camino, para que los gastos totales sean un mínimum". O también "determinar la posición del punto P en función de las tres variables: costo de construcción, gastos de conservación y flete".

(*) Pertenece a transportes y tarifas; materia que se dicta en la facultad de ciencias económicas.

—Obra de consulta. Apuntes de ferrocarriles, por Alberto Schneidewind, B. Aires, 1915. Tomo I, pág. 26|34.

B—PLANTEO

Supongamos

	en la línea		
	AP.	BP.	CP.
que el tráfico anual se calcula en toneladas....	A	B	C
que la tarifa de transporte es en pesos........	f	f_1	f_2
que la amortización anual de los gastos de construcción por kilómetro de vía es...........	ki	$k_1 i$	$k_2 i$
y que el gasto de conservación por kilómetro y por año es..............................	u	u_1	u_2

El gasto anual por kilómetro que corresponde a cada camino es

$$
\begin{array}{ll}
(AP) & Af + ki + u = A_1 \\
(BP) & Bf_1 + k_1 i + u_1 = B_1 \\
(CP) & Cf_2 + k_2 i + u_2 = C_1
\end{array}
$$

y expresando por r, s y t la longitud que corresponderá a los caminos AP, BP y CP respectivamente, el gasto ánual para el total de kilómetros de línea, será

$$(1)\quad S = A_1 r + B_1 s + C_1 t \qquad (I)$$

C—SOLUCION

Dos soluciones se presentan: a) mecánica, b) matemática.

a) Mecánica

Se agujerea una tabla horizontal, en tres puntos que correspondan a las poblaciones A, B y C; tres hilos iguales que cuelguen uno por cada agujero, se unen arriba del tablero. En el extremo libre de estos tres hilos se cuelgan pesas que guarden entre sí la misma proporción que sus respectivos gastos kilométricos (A_1, B_1, C_1).

Este sistema de hilos librado a la acción de las distintas pesas, se moverá corriéndose hacia los agujeros que tengan mayores pesos, hasta llegar a un estado de equilibrio en que se compensa el mayor peso de uno con el mayor brazo de balanza de otros, o sea el mayor gasto kilométrico con la mayor longitud del camino.

(1) Esta fórmula se compone de cantidades conocidas A_1 B_1 y C_1—son datos concretos del problema—, y de cantidades desconocidas r, s y t, cuyos valores a despejar han de asegurar a S un valor mínimo.

En tales condiciones, la longitud más conveniente de los caminos estará dada por la longitud de los distintos hilos hasta su agujero respectivo, y el punto de convergencia será el punto de unión de los tres hilos.

b) Matemática (2)

Nos serviremos de dos pasos para dar la solución:

1er. *paso*: *Fórmulas que aseguran un gasto mínimo.*

Si en la fig. 1.ª trazamos líneas que unan las tres poblaciones A, B y C obtendremos la fig. 2, en la que la posición del punto P queda definida por la longitud del camino r y el valor del ángulo φ; de tal modo, el problema se resuelve derivando los gastos totales S, con respecto a las dos variables r y φ, y haciendo estas derivadas iguales a cero; es decir:

$$\frac{dS}{dr} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dS}{d\varphi} = 0$$

Sabemos por fórmula (I) $S = A_1 r + B_1 s + C_1 t$

para derivar con respecto a r y S, debemos reemplazar en esa fórmula, s y t por sus valores dados en función de r y de φ así

$$(3) \quad S = A_1 r + B_1 (r^2 + c^2 - 2rc \cos. \varphi)^{1/2} + C_1 \left[r^2 + b^2 - 2br \cos (\varepsilon - \varphi) \right]^{1/2}$$

$$\frac{dS}{dr} = A_1 + B_1 \frac{r - c \cos \varphi}{(r^2 + c^2 - 2rc \cos \varphi)^{1/2}} + C_1 \frac{r - b \cos (\varepsilon - \varphi)}{\left[r^2 + b^2 - 2rb \cos (\varepsilon - \varphi) \right]^{1/2}} = 0$$

y como

$$(r^2 + c^2 - 2rc \cos \varphi)^{1/2} = s$$

$$\left(r^2 + b^2 - 2rb \cos (\varepsilon - \varphi)\right]^{1/2} = t$$

$$c \cos \varphi - r = PE$$

$$b \cos (\varepsilon - \varphi) - r = PD$$

tenemos

$$\frac{dS}{dr} = A_1 - B_1 \frac{PE}{s} - C_1 \frac{PD}{t} = 0$$

---

(2) Ignoramos porqué no se usa el procedimiento de despejar las tres variables (fórm. I) r, s y t, una vez igualadas las derivadas a cero.

(3) s y t adquieren esos nuevos valores en virtud de un teorema trigonométrico: "un lado de un triángulo es igual a la raíz cuadrada de la diferencia entre la suma del cuadrado de los otros dos lados, y el duplo producto de estos dos lados por el ángulo que ellos comprenden". Ver Elementos de trigonometría, por J. P. Ramos Mejía, B. Aires, 1913, páginas 32|33.

tenemos en definitiva

$$\frac{dS}{dr} = A_1 + B_1 \cos \delta_1 + C_1 \cos \beta_1 = 0 \qquad \text{(II)}$$

y como

$$\frac{PE}{s} = \cos x = -\cos \delta_1$$

$$\frac{PD}{t} = \cos z = -\cos \beta_1$$

Ahora

$$\frac{dS}{d\varphi} = B_1 \frac{c \operatorname{sen} \varphi}{(r^2 + c^2 - 2rc \cos \varphi)^{1/2}} - C_1 \frac{b \operatorname{sen}(\xi - \varphi)}{[r^2 + b^2 rb \cos(\xi - \varphi)]^{1/2}} = 0$$

tenemos

$$\frac{dS}{d\varphi} = B_1 \frac{EB}{s} - C_1 \frac{CD}{t} = 0$$

y como

$$c \operatorname{sen} \varphi = EB$$

$$b \operatorname{sen}(\xi - \varphi) = CD$$

tenemos finalmente

$$\frac{dS}{d\rho} = B_1 \operatorname{sen} \delta_1 - C_1 \operatorname{sen} \beta_1 = 0$$

y como

$$\frac{EB}{s} = \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \delta_1$$

$$\frac{CD}{t} = \operatorname{sen} z = \operatorname{sen} \beta_1$$

o sea

$$B_1 \operatorname{sen} \delta_1 = C_1 \operatorname{sen} \beta_1 \qquad \text{III}$$

Observaciones que se desprenden de las fórmulas II y III.

La fórmula II puede transformarse así:

$$\frac{B_1}{C_1} = \frac{\operatorname{sen} \beta_1}{\operatorname{sen} \delta_1}$$

lo cual significa que "los gastos kilométricos (A_1, B_1 y C_1) están entre sí como los senos de sus respectivos ángulos en el punto de convergencia".

La fórmula III puede transformarse así:

$$-A_1 = B_1 \cos \delta_1 + C_1 \cos \beta_1$$

lo cual significa que "uno de los gastos kilométricos, es en valor absoluto, igual a la suma del producto de cada uno de los otros gastos kilométricos por el coseno de los ángulos del punto de convergencia recíprocos".

En resumen: "cuando tengamos ángulos en el punto de convergencia, cuyos senos (fórm. III) y cuyos cosenos (fórmula II) satisfagan los valores de ambas fórmulas, estaremos en presencia de los ángulos del punto de convergencia que satisfacen la condición de un gasto total mínimo".

2.° *paso: Uso de las fórmulas II y III para determinar el punto de convergencia.* (4)

Si a los gastos kilométricos A_1, B_1 y C_1 los representamos por líneas rectas de longitud proporcional a dichos gastos, y con ellas formamos un triángulo (5), tendremos (fig. 3) en base de teoremas trigonométricos (6).

$$A_1 = B_1 \cos \delta + C_1 \cos \beta$$

y

$$\frac{B_1}{C_1} = \frac{\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\delta}$$

o, usando los ángulos suplementarios:

$$A_1 = -B_1 \cos \delta_1 - C_1 \cos \beta_1 \therefore A_1 + B_1 \cos \delta_1 + C_1 \cos \beta_1 = 0 \qquad \text{(fórm. II)}$$

y

$$\frac{B_1}{C_1} = \frac{\text{sen}\,\beta_1}{\text{sen}\,\delta} \therefore B_1 \,\text{sen}\,\delta_1 = C_1 \,\text{sen}\,\beta_1 \qquad \text{(fórm. III)}$$

Llegamos a las fórmulas II y III ya conocidas y que nos dicen:

1.°) que los ángulos suplementarios del triángulo de gastos (fig. 3) son los ángulos del punto de convergencia (fig. 2);

2.°) que los gastos kilométricos (A_1, B_1 y C_1) están en las misma relación que los senos de sus ángulos suplementarios (α_1, β_1 y δ_1), o sea de sus ángulos en el punto de convergencia. Así (fig. 2) a medida que crece A_1 el camino AP se irá acortando y el ángulo α_1 se irá cerrando y su seno aumentará constantemente hasta que el ángulo sea un recto.

Para construir el punto de convergencia debemos aplicar este triángulo de gastos kilométricos a los lados del triángulo de las poblaciones (fig. 4).

Al aplicar el triángulo de los gastos (fig. 3) al triángulo de las poblaciones (fig. 2) deberá colocarse cada lado que representa gastos kilométricos—frente a la población de donde arranca el respectivo camino; así C_1 frente a C, B_1 frente a B, A_1 frente a A.

---

(4) No sabemos porqué no se procede a despejar los valores de *r* y *s* en las fórmulas II y III.

(5) Cuando no se puede formar triángulo por ser una línea más larga que las otras dos juntas, no habrá punto de convergencia; pues en el camino que corresponde a este lado grande, los gastos son tan elevados que no conviene hacer camino, y el trazado de la línea estará constituído por los lados de un triángulo cuyos vértices estarán en los distintos mercados.

(6) ''Un lado de un triángulo es igual a la suma del producto de los otros dos lados por el coseno del ángulo respectivo formado con el primer lado''; y ''en todo triángulo los lados son entre sí como los senos de los ángulos opuestos''.—Ver Ramos Mejía, op. cit., pág. 31-2.

Esto es así porque (fig. 4) la línea O_1 C que representa la dirección del tráfico que sale de C, y la línea O_2 B que representa la dirección del tráfico que sale de B, se irán acercando a A, a medida que A_1 aumenta con respecto a los otros lados B_1 y C_1; de tal manera que *r* — longitud del camino que sale de A — se irá acortando a medida que sus gastos kilométricos aumentan; satisfaciendo así las condiciones del problema. (7)

Cada triángulo de gastos kilométricos nos dá en las líneas AO_3, BO_2 y CO_1 la dirección más conveniente del camino a trazarse desde cada punto. Así la dirección del camino que sale de C depende de los gastos kilométricos correspondientes a los caminos que salen de A y de B, o sea depende de A_1 y B_1:
si $A_1 > B_1$, *t* se dirigirá más bien hacia A
si $A_1 < B_1$, *t* se dirigirá más bien hacia B y así en los otros casos.

Ahora bien, estas tres direcciones más convenientes de caminos, se cortan en un punto P; y como nuestro objeto es unir en la forma más conveniente, las tres poblaciones A, B y C, resulta que ese camino más conveniente deberá ser el descripto por la poligonal A P C B, siendo P el punto de convergencia.

Se puede evitar la tarea de aplicar los tres triángulos de gastos kilométricos (fig. 4), aplicando uno solo (fig. 5): se traza la línea dirección de camino OC, luego se traza una circunferencia que toque los puntos AO y B—el centro se halla por tanteo—y el punto donde la circunferencia corta la línea OC, es el punto de convergencia P; se unen P con A y B, y tendremos la poligonal buscada A P C B. (8)

Si aplicamos los otros dos triángulos y trazamos sus circunferencias respectivas, veremos que las tres circunferencias se cortan en el punto P ya determinado.

Corolario 1.°

"La suma de los gastos de explotación para el tráfico entre los tres puntos A, B y C, es igual a los que se originarían si el tráfico se dirigiese de uno de los puntos hacia el polo de los otros dos".

---

(7) los puntos O_1, O_2 y O_3 se llaman polos de las poblaciones A y B, A y C, y B y C, respectivamente.

(8) Suponemos, sin afirmarlo, que la razón en virtud de la cual la circunferencia corta la línea dirección en el punto de convergencia, ha de ser geométrica.

El gasto total es (fig. 5)

$$S = \overline{AP} \times A_1 + \overline{CP} \times C_1 + \overline{BP} \times B_1$$

y reemplazando A_1, B_1 y C_1 por sus valores proporcionales, dados en el triángulo de gastos kilométricos, tenemos:

$$S = \overline{AP} \times \overline{BO} + \overline{BP} \times \overline{AO} + \overline{CP} \times \overline{AB}$$

y según el teorema de Ptolomeo (9).

Corolario 2.°

Mientras no haya variación en los gastos kilométricos, es invariable el polo O_1 de las poblaciones A y B, siendo indiferente la posición del punto C. La única condición a que va sujeto el punto C es que se halle en la zona limitada por A_2 A B B_2 (fig. 6). Dentro de este límite cualquiera que sea la posición de C deberá dirigirse el tráfico en dirección a O_1. Si el punto C se halla dentro de la zona A_1 A B_1 B aparece otro polo O_2 simétrico al cual se dirige todo el tráfico.

Si el punto C se halla en la zona A_1 A A_2 o B_1 B B_2, no tenemos punto de convergencia y todo el tráfico se dirige en dirección a los puntos A y B respectivamente. Lo mismo sucede si el punto C se halla en la zona APB; tampoco resulta punto de convergencia y todo el tráfico se dirige según la línea A C B.

Corolario 3.°

Hay casos en que la elección del punto de convergencia no representa ventaja alguna.

El punto de convergencia aumenta los gastos de transporte a la vez que disminuye los gastos de construcción. En otras palabras: "la conveniencia de un punto de convergencia está en relación directa con los gastos de construcción, y es inversamente proporcional al tráfico". Por ejemplo, (fig. 7) sean los lados del triángulo iguales a 1; A = costo kilométrico de construcción para cualquiera de las líneas; Q = tráfico medio correspondiente a cada población; i = interés; f = tarifa.

Si construímos las líneas AC, BE y AB, los gastos totales son

$$S = 3\ (Ai + f\ Q)\ .\ 1$$

(9) En un cuadrilátero inscripto en un círculo, la suma de los productos de los lados opuestos, es igual al producto de las diagonales.

y si construímos las líneas AP, BP y CP, tenemos que

$S_1 = 1.732$ (Ai + 2 f Q) porque el nuevo camino tiene la longitud que corresponde a la poligonal APBC.

En síntesis: conviene el punto de convergencia siempre que $S_1 < S$ o sea

$$1{,}732\,(Ai + 2\,f\,Q) < 3\,(Ai + f\,Q).\,1$$

$$0.46\ f\,Q < 1.27\,Ai \therefore 0.37\ f\,Q < Ai$$

$$Q \lesssim \frac{Ai}{0.37\,f.}$$

Ejemplo:

para A = \$ 15.000 , f = 0.02 , i = 0.05.

debe ser Q < 101351 toneladas.

D—CASO PRACTICO DE PUNTO DE CONVERGENCIA

Entre	A y B	hay	un tráfico	anual	de	320.000	toneladas.
»	A y C	»	»	»	»	30.000	»
»	B y C	»	»	»	»	10.000	»

Imaginemos colocados en cualquier parte el punto de convergencia P (fig. 8). Tendremos los tres caminos AP, BP y CP.

AP	tendrá	un tráfico	de convergencia	de	350.000	toneladas
BP	»	»	»	»	330.000	»
CP	»	»	»	»	40.000	»

Supongamos: que en el camino APB el costo kilométrico de construcción es \$ 20.000, amortización anual 5 %; que la mantención del camino cuesta anualmente \$ 500; y que el costo de transporte \$ 0.02 por tts. kilom.

Los gastos kilométricos serán en la línea APB

A_1=20.000×0.05+500+350.000×0,02=\$ 8.500

B_1=20.000×0.05+500+330.000×0,02=» 8.100

Y supongamos en el camino CP, el costo kilométrico de construcción es de \$ 3.000, la mantención 30+0.03×40.000, y la tarifa = 0.10

C_1=3000×0.05+30+0,03×40.000+0,10×40.000=\$ 5.380

Si con estos datos — siguiendo el procedimiento matemático — construímos el punto de convergencia P, obtendremos como longitud más conveniente para AP=57 km., BP=48,5 km., y CP=24,5 km., en consecuencia los gastos anuales mínimos serán

$$S = 57 \times 8500 + 48.5 \times 8100 + 24.5 \times 5380 = \$\ 1.009.160$$

Para cualquier variación que introduzcamos en la longitud de los caminos, nos resultará una suma mayor.

El problema del punto de convergencia también puede aplicarse para elegir la situación de un gran establecimiento industrial. Sería por ej.: el punto donde debería establecerse una fundición de hierro, si el mineral se halla en A, el carbón en B y en C las fábricas que elaboran los lingotes de hierro.

Carlos P. CABRINI.

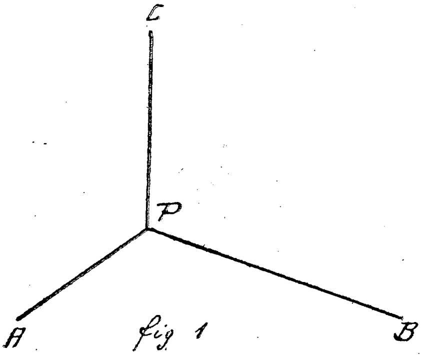


fig 1

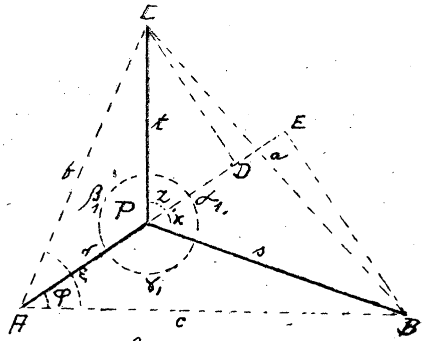
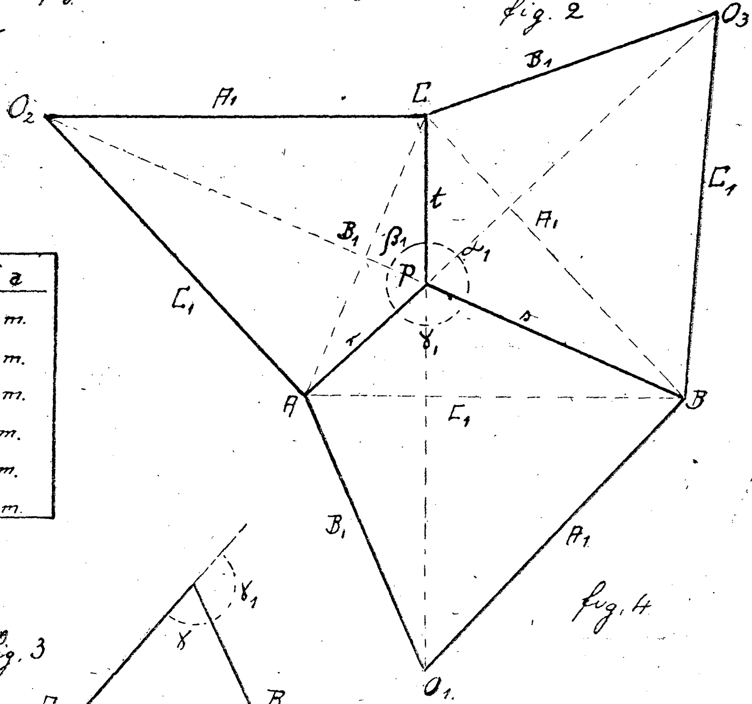


fig. 2



Escala
$\overline{AB}$ = 5 cm.
$\overline{BC}$ = 5 cm.
$\overline{AC}$ = 4 cm.
A_1 = 5 cm.
C_1 = 5 cm.
B_1 = 4 cm.

fig. 4

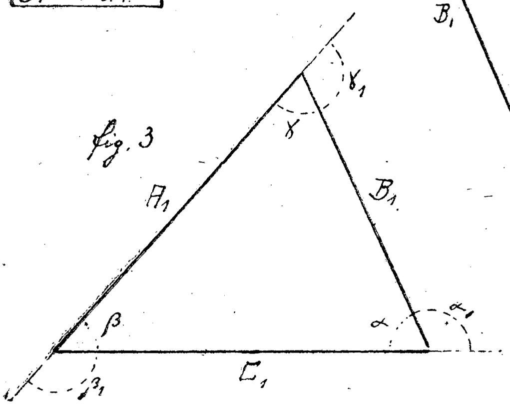


fig. 3

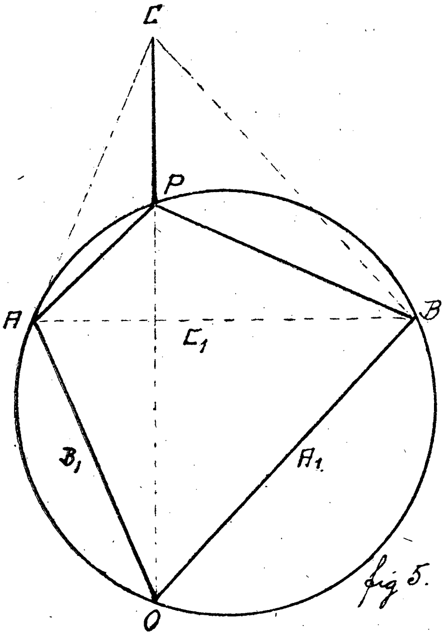


fig 5.

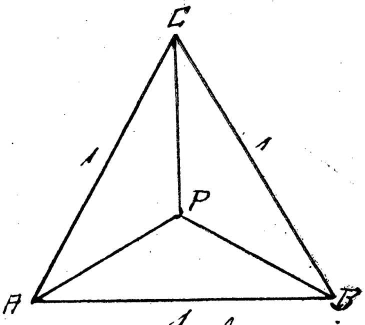


fig. 7

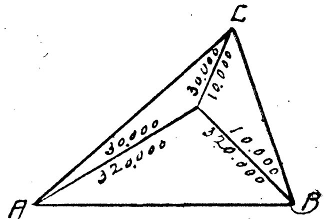


fig. 8.

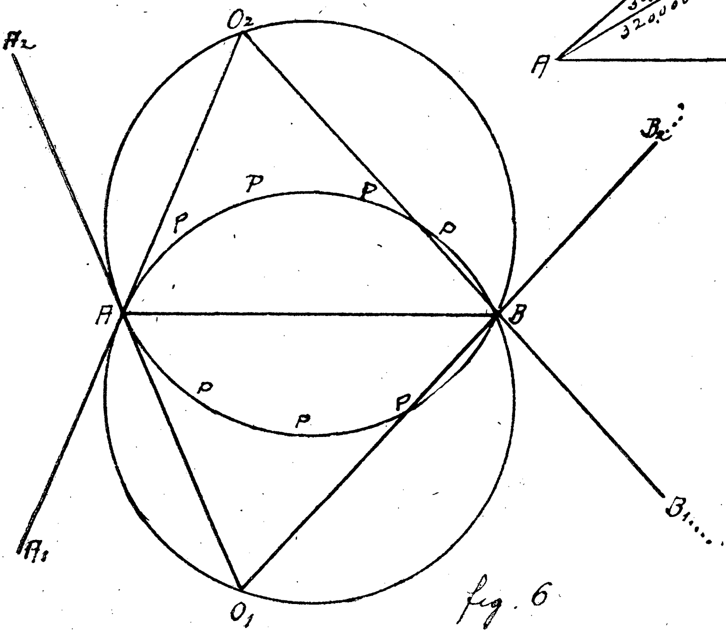


fig. 6