

Revista

de

Ciencias Económicas

PUBLICACION MENSUAL DEL

“Centro Estudiantes de Ciencias Económicas”, “Colegio de
doctores en Ciencias Económicas y Contadores Públicos
Nacionales”

Director:

JOSÉ H. PORTO

Sub-Director:

MIGUEL PESCUÑA

Administrador:

Bernardo J. Matta

Secretario de Redacción:

Enrique A. Siewers

Sub-Administrador:

Arturo R. Giannattasio

Redactores:

Félix Genta - Emilio B. Bottini - Raúl Prebisch - Manuel
Clauso - Egidio Trevisán - Dr. Julio N. Bastiani - Jacobo
Wainer - Dr. Mauricio Greffier - Dr. Argentino Acerboni -
Guillermo J. Watson - Luis Moreno.

Año VIII

Diciembre de 1920

N.º 90

DIRECCIÓN Y ADMINISTRACIÓN
CHARCAS 1835
BUENOS AIRES

Demostración de la fórmula de Stirling

POR RAMÓN SALAS EDWARDS

Profesor de Probabilidades y Teoría de la Estadística

(De la Revista Universitaria de Chile)

En el curso de Probabilidades se necesita la fórmula de Stirling que permite expresar aproximadamente los productos de números enteros sucesivos, denominados *factoriales*, por funciones algebraicas rápidas de calcular y cuyas propiedades analíticas son familiares al ingeniero.

El objeto de estas líneas es exponer una breve demostración de esta fórmula, que sólo supone los conocimientos de análisis más usuales.

En una relación establecida por Moivre

$$n! = C \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

aparece igualado el factorial $1.2.3 \dots n = n!$ al producto de n factores iguales a $\frac{n}{e}$, multiplicado por $\sqrt{n}$ y por coeficiente por determinar.

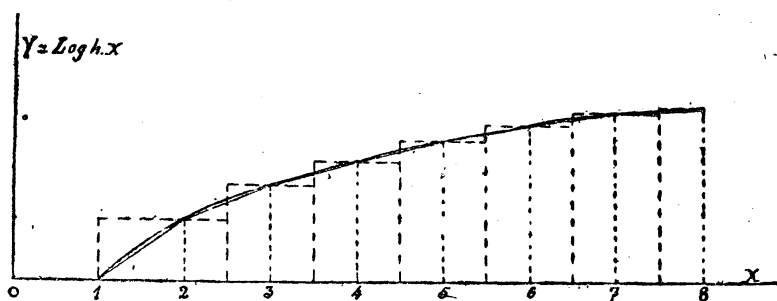
Este coeficiente es igual a e cuando n es 1 y disminuye a medida que n aumenta tendiendo rápidamente a $\sqrt{2\pi}$, como descubrió Stirling y vamos a demostrar.

Para establecer mediante los logaritmos estos límites del factorial

$$e \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n > n! > \sqrt{2\pi} n \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

consideramos la curva $y = \text{Logh } x$, que para $x = 1$, $y = 0$ corta al eje de las x y que a medida que crece la abscisa va ascendiendo con una inclinación $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, cada vez menor que tiende a anularse.

En esta curva trazaremos la serie de ordenadas que corresponden a valores enteros de la abscisa hasta el número n y uniremos los extremos de ellas; el área del conjunto de los trapecios que quedan bajo la polygonal así formada es menor que la que hay bajo la curva, salvo cuando ambas son nulas y $n = 1$.



El área bajo la curva es expresada por la integral definida

$$\int_1^n \text{Logh } x \, dx$$

cuyo valor indefinido fácil de verificar por una derivación es

$$x \text{ Logh } x - x = \text{Logh} \left(\frac{x}{e} \right)^x$$

y dicha área vale por lo tanto

$$\text{Logh} \left(\frac{n}{e} \right)^n - \text{Logh} \frac{1}{e} = \text{Logh} \left[e \left(\frac{n}{e} \right)^n \right]$$

Las áreas del triángulo inicial y de los trapecios cuyos lados paralelos distan una unidad, suman:

$$\frac{\text{Logh} 2}{2} + \frac{\text{Logh} 2 + \text{Logh} 3}{2} + \frac{\text{Logh} 3 + \text{Logh} 4}{2} + \dots + \frac{\text{Logh} (n-1) + \text{Logh } n}{2}$$

o sea expresando el logaritmo de un producto y atendiendo a que $\frac{\text{Logh } n}{2}$ aparece sólo una vez:

$$\text{Logh} \left[1.2 \dots (n-1) \sqrt{n} \right] = \text{Logh} \frac{n!}{\sqrt{n}}$$

Si se compara ambas áreas se obtiene

$$\text{Logh} \frac{n!}{\sqrt{n}} \leq \text{Logh} \left[e \left(\frac{n}{e} \right)^n \right]$$

y el segundo miembro excede al primero tanto más cuanto mayor es n , a consecuencia de los segmentos que quedan entre la poligonal y la curva.

Pasando a los números correspondientes a los logaritmos, resulta:

$$\frac{n!}{\sqrt{n}} \leq e \left(\frac{n}{e} \right)^n \text{ o sea } n! \leq e \sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

En la última relación, el segundo miembro es igual al factorial cuando $n = 1$; pero lo excede en general en una proporción tanto mayor cuanto mayor es n , a consecuencia del exceso creciente del logaritmo.

Para establecer un límite por defecto, trazaremos en la misma curva, rectángulos cuya altura sea $\text{Logh } x$ para cada valor entero de x , y cuya base se extiende desde $x - \frac{1}{2}$ hasta $x + \frac{1}{2}$.

Estos rectángulos son mayores que el área que queda bajo la curva entre las mismas ordenadas; pues el triángulo de exceso adyacente a $x - \frac{1}{2}$, con un lado curvilíneo, es mayor que el triángulo correspondiente de defecto contiguo a $x + \frac{1}{2}$, por la inclinación decreciente de la curva.

La base de los rectángulos mide una unidad, de excepción del último en que sólo mide $\frac{1}{2}$ y del primero cuya altura es $\text{Logh } 2$, que exagerando el exceso extenderemos hasta $x = 1$, dándole una base igual a $3\frac{1}{2}$.

La suma de las áreas de los rectángulos vale pues:

$$\frac{1}{2} \text{Logh } 2 + \text{Logh } 3 + \dots \text{Logh } (n-1) + \frac{1}{2} \text{Logh } n = \text{Logh} \left[\sqrt{2} \frac{n!}{\sqrt{n}} \right]$$

y comparando los números correspondientes a este logaritmo y al que expresa el área de la curva, se obtiene:

$$\sqrt{2} \frac{n!}{\sqrt{n}} > e \left(\frac{n}{e} \right)^n \text{ o sea } n! > \frac{e}{\sqrt{2}} \sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

Así pues el coeficiente de $\sqrt[n]{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ que conviene usar para igualar $n!$ desciende continuamente desde el valor inicial e que corresponde a $n = 1$ a medida que n crece; pero nunca llega a reducirse a $\frac{e}{\sqrt{2}}$ y tiende por lo tanto necesariamente a un límite, que determinaremos valiéndonos de una integral conocida que se expresa por factoriales.

Para ello partiremos de la siguiente integral indefinida, fácil de obtener por partes o de verificar por derivación:

$$\int \text{sen}^m x \, dx = \frac{m-1}{m} \int \text{sen}^{m-2} x \, dx - \frac{\text{sen}^{m-1} x \cos x}{m}$$

Integrando entre θ y $\frac{\pi}{2}$, desaparece el último término y la integral definida que queda en el segundo miembro es la del primero disminuido el exponente en dos unidades y con el coeficiente $\frac{m-1}{m}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^m x \, dx = \frac{m-1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{m-2} x \, dx.$$

Aplicando repetidamente este procedimiento se puede llegar

$m = 2n$ es par a $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^m x \, dx = \frac{\pi}{2}$ y si $m = 2n + 1$ es impar a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^m x \, dx = 1.$$

Así se obtiene

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n} x \, dx = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

valor, que amplificando numerador y denominador por el producto de los factores pares, para completar en el primero $2n!$ y agrupando en seguida el factor 2 repetido $2n$ veces en el denominador, equivale a

$$\frac{2n}{(2n)^2} \frac{(2n-1)}{(2n-2)^2} \frac{(2n-2)}{(2n-4)^2} \dots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \frac{\pi}{2}$$

Análogamente:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2n+2}{\sin x} dx = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2} (n+1)!} \frac{\pi}{2},$$

integral que ha de ser menor que la anterior, pues siendo $\sin x$ menor que la unidad, los elementos $\sin^n x dx$ del integral son tanto menores cuanto mayor es n , sin embargo este último integral guarda con el anterior una razón igual a:

$$\frac{(2n+1)(2n+2)}{2^2(n+1)^2}$$

que para $n = \infty$ tiende a la unidad, pues se puede despreciar los sumando finitos agregados a n .

Por el mismo camino se obtiene también

$$\int_0^{\pi} \frac{2n+1}{\sin x} dx = \frac{2n(2n-2)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 3} \frac{2^{2n} n!^2}{(2n+1)!};$$

es necesario asimismo que esta integral comprendida entre las dos anteriores, guarde con la primera una razón que igualmente tienda a 1:

$$\lim \frac{2^{4n} n!^4}{(2n)! (2n+1)!} \frac{2}{\pi} = \lim \frac{2^{4n} n!^4}{(2n+1)! (2n)!^2} = 1$$

Esta razón límite toma la forma siguiente, expresando los factores por la fórmula establecida en que designaremos por $C_{\min}$ el límite a que tiende el coeficiente para infinitos factores:

$$\lim \frac{2^{4n} C_{\min}^4 n^2 \left(\frac{n}{e}\right)^{4n}}{(2n+1) C_{\min}^2 (2n) \left(\frac{2n}{e}\right)^n} \frac{2}{\pi} = \frac{C_{\min}^2}{2\pi} = 1$$

y por lo tanto $C_{\min} = \sqrt{2\pi}$ con lo que queda demostrada la fórmula

$$n! = C \cdot \sqrt[n]{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

en que el coeficiente C parte del valor $e = 2,72$, para $n = 1$ y

tiende al valor $\sqrt{2\pi} = 2,51$, a medida que aumentan los factores.

Esta disminución es rápida; pues comparando $6! = 720$ con $\sqrt{6} \left(\frac{6}{e}\right)^6$ resulta $C = 2,54$.

Por lo tanto se puede aceptar la fórmula de Stirling:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Santiago, 27 Junio de 1920.

INDICE DEL TOMO XV

MARZO - DICIEMBRE 1920

	Pág.
Arévalo Alberto	La moneda de cuenta en la contabilidad
	592
Argañaráz Carlos	Curso libre de Valuaciones, . 831, 893, 968
	1027
Blanco Eugenio A.	Ideas y propósitos
	573
Bott Ernesto J. J.	El costo demográfico-social de las guerras
	1001, 1068 y 1140
Bottini Emilio B.	Coordenadas (fórmulas de interés y descuento)
	1159
Broggi Hugo	Sobre una determinación de promedio
	694
Chianelli Pascual	Derecho internacional americano.
	610
Dirección, La	† Ingeniero Orfilio Casariego
	590
Ferrari, Ludovico A. y Juan Carlos Valle ..	Costo de la vida en la República Argentina, 1910-1919
	665
Gotti U.	Teoría de la conveniencia económica
	578
Gondra Luis Roque ...	Apuntes de historia económica: edad moderna primitiva .. 836, 898 y
	976
González Galé José ...	La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria
	803
Greffier Mauricio E. ..	Principios económicos que rigen los transportes
	585
	Organización de la contabilidad de una cervcería
	727 y 785
Humphries Wilfred R..	El andamiaje de la nueva Rusia..
	676
Levene Ricardo	La obra económica y educacional de Manuel Belgrano
	637
Mackay John A.	Vida estudiantil en una universidad Sudamericana
	917
Palacios Alfredo L. ...	Derecho Internacional Obrero, 808, 863 y
	939
	Los Sindicatos de trabajadores en la Cámara de Diputados
	1103

Puch Bernardo	Exposición de una contabilidad industrial de electricidad, ...	987,	Pág.
	1053 y	1131	

LA REDACCION

Notas Universitarias ..	Gastos de la Escuela de Comercio Anexo, por E. Lobos y Ricardo Levene. — Programa de valuación, por Carlos Argañaraz ...	619
Notas Bibliográficas ..	El nuevo derecho, por el Dr. Alfredo L. Palacios	627
	Análisis matemático, por el Dr. Hugo Broggi. — El Hogar Obrero. — Cooperativa de crédito, edificación y consumo (Lda.). — Stabilizing the Dollar (La estabilización de la moneda, por Irving Fisher. — Ideas e Ideales, por Enrique Dickmann. — Las tierras en Economía, ensayo de diferenciación técnica, económica y social	738
	Circulación monetaria y atesoramiento. — Seguro de supervivencia. — Principios de desinflación	1018
	La Società per azioni. — Revista del Bco. Hipotecario Nacional .	1097
Notas y Comentarios ..	El trigo. — El duodécimo del presupuesto	776
	El costo de la vida en Inglaterra. — Deuda pública de las naciones antes y después de la guerra. — Participación de los empleados y obreros en los beneficios de las empresas. — Reformas a la Ley de Contabilidad, por el Dr. Santiago B. Zaccheo. — La huelga de los metalúrgicos en Italia. — "Los problemas económicos del presente, por Alejandro E. Bunge	849
	Contabilidad del Estado, por Gualterio Pessagno. — "El Instituto Nacional de los Seguros". — Revista de Seguros.	933
	El seguro contra el paro forzoso. — El Congreso de la Trades Unions	1091

	Pág.
Nuestro número especial	926
Revista de Revistas ...	
Revista Económica "The Economic Riview Tegucigalpa (Honduras). — Revista de Mutualidad. — Producción de oro y plata en los Estados Unidos en el año 1919. — Tarifas de transporte tranviario. — Organizaciones obreras en el Japón. — Salarios y horas de trabajo en los Estados Unidos (1907-1919). — Los consejos del trabajo en Alemania	630
El medio circulante y los precios en Italia. — El medio circulante y los precios. — "Claridad, año I, N.º8. — Comercio de importación en 1919. — La Cooperativa Libre (Revista de la Cooperación). — Atesoramiento universal de oro. — Impuesto municipal sobre la tierra libre de mejoras. La Organización Obrera. — Bolletino delle Assicurazioni	750
Salas Edwards Ramón. Demostración de la fórmula de Stirling	1168
Sa Viana De la Non existence d'un droit International Americain	698
Siewers Enrique A. ... La representación funcional en Alemania	888
Soares C. F. Finanzas argentinas	984
Tapen Guillermo La carrea actuarial	718
Valle, Juan Carlos y Ludovico A. Ferrari. Costo de la vida en la República Argentina de 1910-1919	665
Waisman J. Reforma del income-tax británico	1039