Revista
de
Ciencias Económicas

PUBLICACION MENSUAL DEL
"Centro Estudiantes de Ciencias Económicas", "Colegio de doctores en Ciencias Económicas y Contadores Públicos Nacionales"

Director:
RAÚL PREBISCH

Administrador:
BERNARDO J. MATTA

Año IX Mayo de 1921 N° 95

DIRECCIÓN Y ADMINISTRACIÓN
CHARCAS 1835
BUENOS AIRES

Cálculo infinitesimal [1]

El cálculo infinitesimal está prácticamente restringido en sus aplicaciones a las funciones que poseen (dentro de ciertos límites) la propiedad de *continuidad;* será, pues, necesario considerar en primer lugar la naturaleza de una función contínua.

Se dice que una cantidad o magnitud es de *variación contínua* entre ciertos límites, cuando todo valor intermediario puede ser determinado entre aquellos límites. Por consiguiente, en la expresión v^t, que indica el valor actual, a la tasa efectiva i, de 1 a recibirse al final de t años (en que t puede ser o entero a parte entera y parte fraccionaria), el índice t admite variación contínua entre o y cualquier valor positivo finito, y dado un número cualquiera *n* de años puede tener un número infinito de valores, en el que cada valor diferirá del que le precede en una cantidad infinitamente pequeña.

Una cantidad que no admite variación se llama cantidad constante.

Por consiguiente, si en un problema dado se indica la tasa de interés, la cantidad v será una constante.

Por otra parte, la expresión v^t puede, en otros problemas, ser utilizada para expresar el valor actual, a cierta tasa de interés dentro de ciertos límites, de la suma *uno* a recibirse al finalizar un número determinado t de años; en este caso t sería un constante, y v admitiría variación contínua dentro de límites especificados.

Una cantidad variable es *función* de otra cuando, el valor dado a la última determina el valor de la primera y siempre que cualquier otra cantidad comprendida en la expresión de la prime-

---

(1) Síntesis y exposición de la parte I. del *Institute of Actuaries' Tex-Book.*

ra con relación a la última, permanezca invariable. Por consiguiente, v^t es una función de t, porque para una tasa dada *i* constante su valor está determinado por el valor de t. Análogamente, v^t es una función de *v* o de *i*, porque para un valor constante de t, su valor está determinado por el que tenga *v* o *i*.

Cuando una cantidad variable es función de otra, ésta última se llama *variable independiente*, y la primera *variable dependiente*. Las variables independientes y dependientes se hallan representadas generalmente por las letras *x* e *y* respectivamente, y la relación entre ellas se expresan por:

$$y = f\ (x),\ y = F\ (x)\ \text{o}\ y = \varphi\ (x)$$

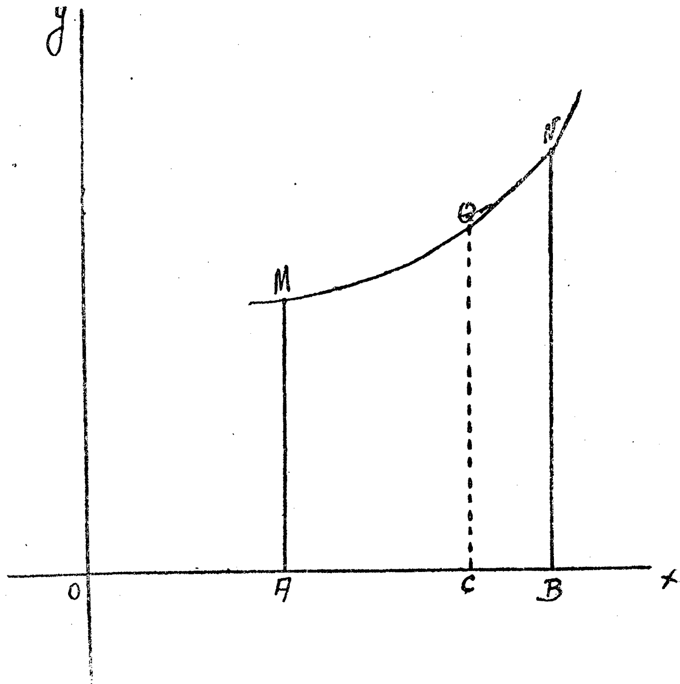
Aquí *x* es la variable independiente, e *y* es la variable dependiente, y el valor del último puede ser determinado por cualquier valor que se dé al primero, si la forma de la función f, F o φ, es conocida.

Se dice que f (x) es una función continua de *x* para todos los valores de x comprendido entre los límites *a* y *b* cuando, para cada valor de *x* entre estos límites, f (x) tiene un valor finito, y que un cambio infinitamente pequeño en el valor de *x*, produce un cambio infinitamente pequeño en el valor de f (x).

Por ejemplo, v^t es una función continua de t entre cualquier límite finito, porque tiene un valor finito para cualquier valor finito que se de a t, y, más aún, el cambio de v^t $(v^h - 1)$ producido en su valor por un cambio de *h* en el valor de *t*, se hace infinitamente pequeño cuando *h* es indefinidamente disminuído.

Si f(x) es una función contínua de *x* para todos los valores de *x* entre x = a y x = b, entonces, desde que cada cambio infinitamente pequeño en el valor de *x* produce un cambio infinitamente pequeño en el valor de f(x), resulta que como *x* varía de *a* a *b*, f(x) puede tener por lo menos uno de todos los valores intermediarios comprendidos entre f(a) y f(b) Es necesario tener presente también, como una consecuencia necesaria de ésto, que si f (a) y f (b) tienen *diferentes signos*, puede haber algún valor de x entre *a* y *b* para el cual f (x) = o, de modo que pasando de un valor positivo a uno negativo la función puede pasar por un valor o (cero).

Se puede representar geométricamente una función contínua:



Supongamos que OA y OB tomados sobre la recta OX representen *a* y *b* respectivamente, y que las ordenadas A M y B N representen (en una escala proporcional) las funciones f(a) y f(b) respectivamente. Entonces, si f(x) es una función contínua para valores de x comprendidos entre x = a y x = b, resulta según vemos que f(x) tiene un valor finito para cada valor de x comprendido entre *a* y *b*.

Por lo tanto, si OC representa cualquier valor intermediario de X, una ordenada CQ puede representar (en la misma escala anterior) el valor correspondiente de f(x).

Supongamos así trazadas un número infinito de ordenadas que representan los valores sucesivos de f(x) cuando *x* pasa por incrementos infinitamente pequeños desde un valor *a* y *b*. Por consiguiente, se comprende claramente por qué se dijo que la terminación de éstas ordenadas formarán una serie de puntos desde M a N.

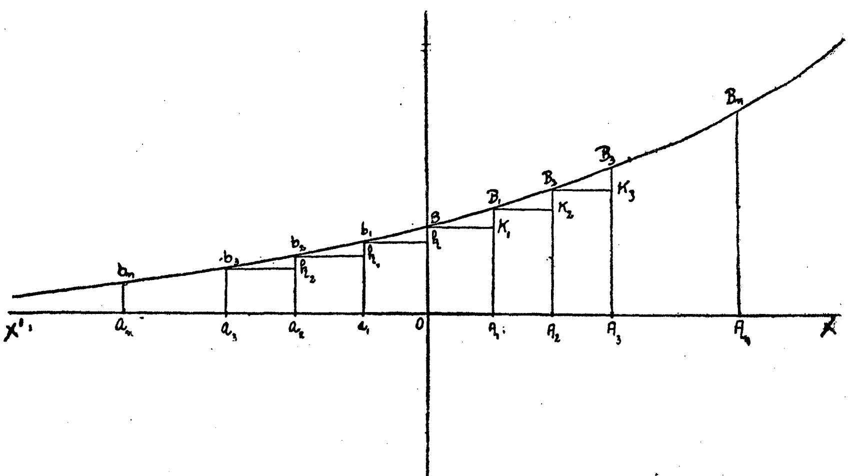
Este serie de puntos, o curva, es la representación geométrica de la función f(x) para valores de x comprendidos entre x = a y x = b.

Por supuesto, no sería posible construir la curva representativa de cualquier función dada por el método indicado anteriormente. Hay sin embargo ciertas funciones especiales, por ejemplo, las representadas por una recta, un círculo y una elipse, para las cuales una curva contínua puede ser trazada por medio de algún artificio.

Además, el ciclo de cualquier función puede ser indicada con suficiente exactitud, para casos prácticos, por el trazado de un cierto número de ordenadas para valores de la variable independiente, uniendo luego los puntos extremos de las ordenadas por una curva.

Tomemos por ejemplo la función $(1+i)^t$.

En el punto O de la recta XX' trazemos una ordenada OB que represente la unidad, o lo que es igual, $a(1\times i)^0$. Tolas porciones OA,; A, A2; A2 A3; etc. sobre OX, y Oa,; a, a2; a2 a3; etc. sobre OX', de modo que cada una sea igual a OB esto es, a la unidad trazemos las ordenadas A, B,; A2 B2; A3 B3; etc. representativas de $(1+i)$; $(1\times i)^2$; $(1+i)^3$;



etc. respectivamente; y las ordenadas a, b, a2 b2; a3 b3; etc. representativas de v; v'; v^2; etc. respectivametne.

Uniendo luego los puntos b3; b2; b,; B; B,; B2; B3... Tendremos la curva representativa de la función $(1+i)^x$ y una idea general del ciclo de la curva..

Se ve fácilmente que la ordenada tiende a ser cero en la dirección OX', e infinitamente grande en la dirección OX.

El mismo gráfico puede ser utilizado para el caso de querer tener una representación geométrica de las funciones:

$$s_{\overline{n|}};\ s^{(m)}_{\overline{n|}};\ \bar{s}_{\overline{n|}};\ \dot{a}_{\overline{n|}};\ a^{(m)}_{\overline{n|}}\ \text{y}\ \bar{a}_{\overline{n|}}.$$

En efecto, trazemos las perpendiculares:

BK,; B,K; B2 K3; etc. desde los puntos B; B,; B2... a las rectas A, B,; A2 B2; A3 B3... y las perpendiculares b, k; b2 k,; b3 k2;... desde los puntos m,; b2; b3... a las rectas OB; a, b,; a a2 b2...

Luego, desde que OA,; A, A2; A2 A3;...; Oa,; a, a2; a2 a3;... son todas iguales a la unidad y que las ordenadas O B; A, B,; A2 B2; A3 B3; ...; a, b,; a_2 b_2; a_3 b_3; ... representan respectivamente:

1; $(1+i)$; $(1\times i)^2$; $(1+i)^3$; ...; v; v^2; v^3; ... es claro que los rectángulos:

K, o; K2 A,; K3 A2; ... representan el producto de la unidad por 1; $(1+i)$; $(1\times i)^2$; ... y que los rectángulos:

k a,; k, a2; k2 a3;

representan geométricamente el producto de la unidad por v; v^2; v^3; ...

Por lo tanto si OA_n y Oa_n los suponeos divididos en *n* partes iguales a OB = 1 y suponemos trazados los *n* rectángulos cada uno de los cuales tiene por base la unidad; se tiene que la suma de las superficies de los rectángulos construídos sobre OA_n es

$$1+(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+\ldots+(1+i)^{n-1}=s_{\overline{n|}}$$

y las trazadas a la izquierda de OB serán respectivamente iguasobre O a n es:

$$v+v^2+v^3+v^4+\ldots+v^n=a_{\overline{n|}}$$

Ahora, si cada una de las bases oA,; A, A2; A2 A3; ...; Oa,; a, a2; a2 a3; ... las dividimos en *m* partes iguales, y de cada uno de estos puntos de subdivisión trazamos las ordenadas a la curva, tendremos construídas una nueva serie de rectángulos si trazamos las perpendiculares desde los puntos en que cada ordenada toca a la curva hasta la ordenada inmediata siguiente de la derecha.

Se tendrá así que las ordenadas trazadas a la derecha de OB serán respectivamente igual a:

$$(1+i)^{\frac{1}{m}};\ (1+i)^{\frac{2}{m}};\ (1+i)^{\frac{3}{m}};\ \ldots\ldots;\ (1+i)^{n-\frac{1}{m}}$$

y las trazadas a la izquierda de oB serán respectivamente iguales a:

$$v^{\frac{1}{m}};\quad v^{\frac{2}{m}};\quad v^{\frac{3}{m}};\quad \ldots\ldots;\quad v^{n}$$

Luego, desde que las bases de la nueva serie de rectángulos son todas iguales a $\frac{1}{m}$ el área total de los nuevos rectángulos construídos en la base oAn será igual a:

$$\frac{1}{m}\left[1+(1+i)^{\frac{1}{m}}+(1+i)^{\frac{2}{m}}+\ldots+(1+i)^{n-\frac{1}{m}}\right]=s_{\overline{n|}}^{(m)}$$

y el área total de los nuevos rectángulos construídos en la base O a n,º será igual a:

$$\frac{1}{m}\left[v^{\frac{1}{m}}+v^{\frac{2}{m}}+v^{\frac{3}{m}}+\ldots+v^{n}\right]=a_{\overline{n|}}^{(m)}$$

Si ahora *m* se aumenta infenidamente, el área representada por la serie de rectángulos resultantes en la base oAn coincidirá con el área limitado por OB; OA_n ; An Bn y la intercepción de la porción de curva y análogamente, el área representada por los rectángulos en la base O a n coincidirá con el área comprendida entre OB; Oa_n ; a_n b_n y la intercepción de la porción de curvo.

Pero, si *m* es indefinidamente aumentado, $s_{\overline{n|}}^{(m)}$ llegará a ser $\bar{s}_{\overline{n|}}$; y $a_{\overline{n|}}^{(m)}$ llegará á ser $\bar{a}_{\overline{n|}}$. Por lo tanto, el área limitada por OB; OA_n ; A_n B_n y la curva representada geométricamente $\bar{s}_{\overline{n|}}$ y el área limitada por OB ; Oa_n ; a_n b_n y la curva representa geométricamente $\bar{a}_{\overline{n|}}$.

La explicación dada de la naturaleza de una función contínua puede servir para comprender el carácter general de los problemas con los cuales los métodos del Cálculo Infinitesimal están más particularmente adaptados.

El cálculo aritmético y algebraico y el cálculo de las diferencias finitas nos dan los métodos para proceder, con los valores de una función correspondiente a cualquier valor dado a la variable indepnediente, y con los cambios en el valor de la función resultante de un cambio finito en el valor de la variable independiente.

El cálculo infinitesimal, por otra parte, viene a ser un instrumento para problemas en los cuales pueden indicarse todos lo svalores adquiridos por una función al pasar de un valor que corresponde a un valor de la variable independiente a otro, o del cambio en el valor de la función correspondiente a un cambio infinitamente pequeño en el valor de la variable independiente.

El cálculo diferencial se refiere a la primera clase de problemas, y el cálculo integral a la segunda clase.

Cuando una cantidad variable cambia de un valor a otro, la cantidad por la cual este último valor excede al primero, se llama *incremento* de la cantidad.

Un incremento en el valor de la variable independiente x se representa por h; $A\Delta_x$ o dx y el incremento correspondiente al valor de la variable dependiente y por k; $A\Delta_y$ o dy.

Supongamos que y sea una función contínua de x para todos los valores de x comprendidos entre ciertos límites; dentro de estos límites supongamos que x recibe un incremento h, y supongamos que el incremento correspondiente a y sea k.

Como se tenía:

$$y = f(x)$$

se tendrá:

$$y + k = f(x+h)$$

y

$$k = f(x+h) - y = f(x+h) - f(x)$$

Luego es evidente que la *relación de cambio* de y correspondiente a un incremento infinitamente pequeño de x estará indicado por el límite del valor, de

$$\frac{k}{h} \text{ o } \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

cuando h = o.

Este valor límite se llama *derivada primera de la función* y con respecto a x, y se representa por:

$$f'(x) \text{ o } \frac{dy}{dx} \text{ o } \frac{d\,f(x)}{dx}$$

Luego:

$$f'(x) \text{ o } \frac{dy}{dx} = Lh = o \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La identidad $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ puede ser escrita bajo la forma:

$$dy = f'(x).dx$$

con la indicación de que el límite del valor de la relación entre $\triangle y$ y $f'(x) \triangle x$ es la unidad.

Es decir que:

$$1 = \lim_{\triangle x \to o} \frac{\triangle y}{f'(x) \triangle x}$$

de donde:

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to o} \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

BENJAMÍN HARRIAGUE.

(Continuará).