343

Revista

de

Ciencias Económicas

PUBLICACION MENSUAL DEL

"Centro Estudiantes de Ciencias Económicas", "Colegio de doctores en Ciencias Económicas y Contadores Públicos Nacionales"

Director:

RAÚL PREBISCH

Administrador:

BERNARDO J. MATTA

Año IX Junio - Julio de 1921 Nos. 96 - 97

DIRECCIÓN Y ADMINISTRACIÓN

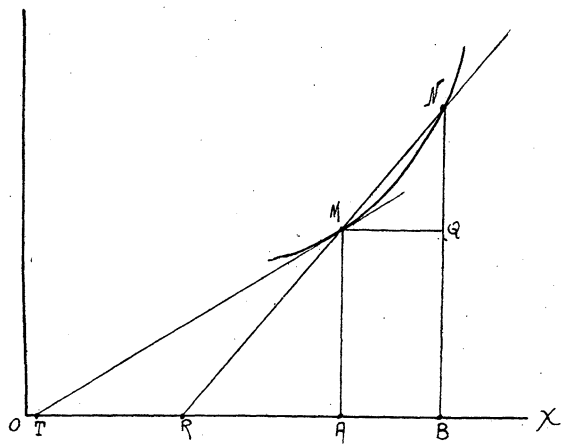
CHARCAS 1835

BUENOS AIRES

Cálculo integral (1)

(Continuación)

Podemos obtener una interpretación geométrica de la derivada de una función, del siguiente modo:



Supongamos que la curva del gráfico 3, represente la función $f(X)$, y supongamos $OA=X$, luego la ordenada AM representa y ó $f(X)$.

Tomemos $AB=h$ y tracemos la ordenada BN. Luego:

$$BN=y+k \text{ ó } BN=f(X+h)$$

Tracemos MQ perpendicular a BN, unamos los puntos MN por una recta que prolongamos hasta cortar en un punto R al eje de las abscisas. Luego:

$NQ=k$

(1) Síntesis y exposición de la Parte I. del *Institute of Actuaries Text - Book.*

Nota.—Por equivocación la primera parte de este artículo salió bajo el nombre de "Cálculo Infinitesimal".

y comparando los triángulos semejantes MQN y RNB, se tiene:

$$\frac{NQ}{MQ} = \frac{NB}{RB} = \frac{k}{h} = \frac{f(X+h)-f(X)}{h}$$

Supongamos ahora que h disminuya indefinidamente. Los puntos B y N se acercarán cada vez más a los puntos A y M respectivamente, y la recta NMR tiende, en el límite, a ser MT, es decir, tangente de la curva MN en el punto M. Por consiguiente, el límite de:

$$\frac{f(X+h)-f(X)}{h}$$

es:

$$\frac{AM}{AT}$$

cuando MT es una tangente de la curva en el punto M.

En símbolos se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = f'(X) = \frac{AM}{AT}$$

El valor de f'(X) será la relación $\frac{AM}{AT}$, por consiguiente, la tangente trigonométrica del ángulo formado por la tangente geométrica TM y el eje de las abcisas OX.

De modo que la derivada nos da una medida de la variación de la curva en cualquier punto dado.

Es evidente, también, que un pequeño incremento en el valor de x producirá un incremento o decrecimiento en el valor de y que f'(X) sea positiva o negativa.

Por lo tanto, si f'(X) es positiva para todo valor de x, dentro de ciertos límites, entonces f(X) aumenta con x dentro de esos límites, e inversamente, si f'(X) es negativo para todo valor de x dentro de ciertos límites, dentro de esos límites f(X) decrece en tanto como x crece. Además, si f'(X) es positiva para todos los valores de x dentro de un cierto límite hasta X = a, y negativa para todo valor mayor de x dentro de cierto límite, o en otras palabras, si f'(X) cambia de valor positivo a negativo cuando x pasa del valor a, entonces $f(X)$ crece con x hasta $X = a$, y luego decrece.

Análogamente, si $f'(X)$ cambia de valor negativo en positivo, cuando x pasa del valor a, $f(X)$ decrece en tanto como x crece hasta $X = a$ y luego crece.

Ahora, al pasar de un valor positivo a uno negativo, o de uno negativo a uno positivo, $f'(X)$ pasa por un valor cero.

De modo que, si $f(X)$ crece con x hasta $X = a$ y luego decrece, o viceversa, $f'(a) = o$.

Cuando una función crece hasta un cierto valor de la variable independiente y luego decrece, se dice que tiene un valor *máximo*, o que es un máximo para aquel valor de la variable; y cuando decrece en tanto como la variable crece hasta un cierto valor y luego crece, se dice que tiene un valor *mínimo*, o que es un mínimo para aquel valor de la variable.

El resultado así obtenido permite entonces establecer que si $f(X)$ es un máximo o un mínimo para $X = a$, $f'(a) = O$.

Será expuesto luego, analíticamente, que ésta es una condición necesaria, pero no la única, para la existencia de un máximo o de un mínimo.

Geométricamente, es evidente que la ecuación $f'(a) = O$ expresa la condición de que la tangente de la curva en el punto correspondiente al valor a de x sería paralela a OX, y es claro que esto se verificará en cualquier punto de la curva que alcance a una distancia máxima o mínima de OX, se dice entonces que $f(x)$ es un máximo o un mínimo.

La operación que tiene por objeto hallar la derivada de una función se llama derivación de la función. Para hallar la derivada de cualquier función basta hallar el límite de la expresión $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ cuando $h \rightarrow o$, pero este procedimiento puede ser simplificado en ciertos casos por la ayuda de las siguientes reglas generales:

I.—La derivada de una constante es cero.

Esto es evidente, desde que un cambio en la variable independiente no produce ningún cambio en la constante. Supongamos:

$$y = a$$

Se tiene:

$$y + \Delta y = a \quad \therefore \quad \Delta y = o$$

de aquí que:

$$\text{Limit.}_{x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y' = o.$$

II.—La derivada de la suma algebraica de una serie de funciones es igual a la suma de las derivadas de las funciones.

Supongamos:

$y = u + v + w \ldots$ en que $u; v; w \ldots$

son funciones de x.

Luego, si Δy; Δu; Δv; Δw .... son los incrementos de y; u; v; $w \ldots$ correspondientes a un incremento Δx de x;

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v + w + \Delta w + \ldots$$

De donde:

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta w + \ldots$$

y

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x} + \ldots$$

los que en el límite cuando Δx disminuye indefinidamente, se convierten en:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} + \ldots$$

es decir:

$$y' = u' + v' + w' + \ldots$$

III.—La derivada del producto de dos funciones es la suma del producto de cada función por la derivada de la otra.

Supongamos:

$$y = u\,v$$

en que u y v son funciones de x.

Se tiene:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)\,(v + \Delta v)$$

De donde:

$$\Delta y = (u + \Delta u)\,(v + \Delta v) - uv =$$

$$= u.\ \Delta v + v.\ \Delta u + \Delta u.\ \Delta v =$$

$$= u.\,\Delta v + \Delta u\,(v + \Delta v)$$

Se tiene luego:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u.\frac{\Delta v}{\Delta x} + (v + \Delta v).\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

como en el límite $v + \Delta v$ tiende a ser v, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{du}{dx}$$

es decir:

$$y' = u.v' + v.u'$$

Si v fuera una constante, C por ejemplo, se tendría entonces:

$$y = C.u$$

y la derivada será:

$$y' = C.u'$$

IV.—La derivada del producto de cualquier número de funciones la suma de los productos de la derivada de cada función por las funciones restantes. Supongamos:

$$y = u.v.w.$$

Hagamos:

$$v.w = Z — \therefore\ y = u.Z$$

Ya vimos que:

$$y' = uZ' + Zu'$$

Pero como:

$$Z = v.w$$

se tiene que:

$$Z' = v.w' + w.v'$$

De donde:

$$y' = u\,(v.w' + w.v') + v.w.u'$$

o bien:

$$y' = u.v.w' + u.w.v' + v.w.u'$$

Este resultado puede ser escrito bajo la forma:

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \frac{1}{w}.\frac{dw}{dx} + \frac{1}{v}.\frac{dv}{dx} + \frac{1}{u}.\frac{du}{dx}$$

si dividimos ambos miembros por la función.

V.—La derivada del cociente de dos funciones es el resultado de restar el producto del numerador por la derivada del denominador, del producto del denominador por la derivada del numerador, y dividir esta diferencia por el cuadrado del denominador. Supongamos:

$$y = \frac{u}{v}$$

Entonces:

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} =,$$

$$= \frac{v \; \Delta u - u \; \Delta v}{v \, (v + \Delta v)}$$

de donde:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v . \frac{\Delta u}{\Delta x} - u . \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \, (v + \Delta v)}$$

y tomando límites se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v^2} . \quad v . \frac{du}{dx} - u . \frac{dv}{dx}$$

este resultado puede ser escrito del modo siguiente:

$$\frac{1}{y} . \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} . \frac{du}{dx} - \frac{1}{v} . \frac{dv}{dx}$$

BENJAMÍN HARRIAGUE.