Revista
de
Ciencias Económicas

PUBLICACION MENSUAL DE LA

Facultad de Ciencias Económicas, Centro de Estudiantes y Colegio de Egresados.

La Dirección no se responsabiliza de las afirmaciones, los juicios y las doctrinas qua aparezcan en esta Revista, en trabajos suscriptos por sus redactores o colaboradores.

Año X **Julio de 1922** **Serie II. Nº 12**

DIRECCIÓN Y ADMINISTRACIÓN
CHARCAS 1835
BUENOS AIRES

Sobre una fórmula de cuadratura

1. En la revista norteamericana *Nature* de 1920 ha propuesto el Sr. A. F. Dufton una fórmula de cuadratura muy sencilla y de la cual — como de sus posibles aplicaciones —, precisamente por ser ella muy sencilla, quiero yo decir algo.

Supongamos dada una función f (x) por su desarrollo en serie de Mac Laurin, convergente en el intervalo (0,1)

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Es

$$\int_0^1 f(x)\,dx = a_0 + \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{3} a_2 + \frac{1}{4} a_3 + \dots$$

$$= a_0 + 0{,}5\, a_1 + 0{,}3333\, a_2 + 0{,}25\, a_3 + 0{,}2\, a_4 + 0{,}16667\, a_5 + 0{,}142857\, a_6 + 0{,}125\, a_7 + 0.11111\, a_8 + 0.1\, a_9 + 0.090909\, a_{10} + 0{,}08333\, a_{11} + \dots \qquad (1)$$

y también

$$f(0\ 1) = a_0 + 0{,}1\, a_1 + 0{,}01\, a_2 + 0{,}001\, a_3 + \dots$$
$$f(0{,}4) = a_0 + 0{,}4\, a_1 + 0{,}16\, a_2 + 0{,}064\, a_3 + \dots$$
$$f(0{,}6) = a_0 + 0{,}6\, a_1 + 0{,}36\, a_2 + 0{,}216\, a_3 + \dots$$
$$f(0{,}9) = a_0 + 0{,}9\, a_1 + 0{,}81\, a_2 + 0{,}729\, a_3 + \dots$$

$$\frac{1}{4}\Big[f(0{,}1) + f(0{,}4) + f(0{,}6) + f(0{,}9) \Big] =$$

$$a_0 + 0{,}5\, a_1 + 0{,}335\, a_2 + 0{,}2525\, a_3 + 0{,}20285\, a_4 + 0{,}169625\, a_5 + 0{,}14555\, a_6 + 0{,}12698\, a_7 + 0{,}11198\, a_8 + 0{,}09944\, a_9 + 0{,}08871\, a_{10} + 0{,}07937\, a_{11} + \dots \qquad (2)$$

La comparación de las expresiones (1) y (2) — por lo menos hasta donde se indica el resultado de los cálculos — dice que los coeficientes numéricos coinciden bastante y que por lo tanto podemos admitir con bastante aproximación (tal vez suficiente para fines de orden práctico, o para ciertos fines de orden práctico)

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{4}\Big[f(0{,}1) + f(0{,}2) + f(0{,}4) + f(0{,}9) \Big]$$

que es precisamente en lo que consiste la fórmula de Dufton.

En las dos expresiones (1) y (2) los dos primeros coeficientes coinciden, y la diferencia máxima entre los coeficientes numéricos que se indican es de 0,00296, correspondiente a la diferencia de los coeficientes de a_5.

2. Se me ocurre (no sé si la observación ya ha sido hecha) que la comparación extendida a los términos que siguen a a_{11} habría dejado de ser tan favorable.

Para verlo, llamemos A_n al coeficiente numérico de a_n en la (1), A^1_n al coeficiente numérico de a_n en la (2). Es

$$A_n = \frac{1}{n+1}, \quad A_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} A_n$$

$$A^1_{n+1} = \frac{0{,}1^{n+1} + 0{,}4^{n+1} + 0{,}6^{n+1} + 0{,}9^{n+1}}{4} \quad 09$$

$$< 0{,}9 \frac{0{,}1^n + 0{,}4^n + 0{,}6^n + 0{,}9^n}{4} = 0{,}9\, A^1_n$$

: a partir de un cierto valor de n, que el cálculo demuestra ser 5, los A^1_n decrecen más rápidamente que los A_n, así que la diferencia $A_n - A^1_n$, positiva para $n \leq 8$, se vuelve negativa y crece negativamente con el crecer de n, una vez alcanzado este valor. Pero ni la constatación de la concordancia relativa de los 12 primeros coeficientes, ni la otra de la no posible concordancia de los coeficientes, que siguen a estos, permiten formular un juicio respecto al grado de aproximación de la fórmula considerada.

Si con f (x) suponemos dadas en el intervalo (0,1) las cuatro primeras derivadas de la función, sería posible, aplicando el método que G. Peano (1) utiliza en el estudio de la fórmula de Cavalieri-Simpson, determinar el "resto" de la fórmula de Dufton bajo forma de integral. Sin embargo, como bien observ. Mises (2), si la función f (x) es una función empírica (y tales son precisamente las funciones de la estadística y por consiguiente de la matemática actuarial) falta toda posibilidad de definir y determinar numéricamente las derivadas de orden superior al segundo.

---

(1) *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino,* Torino 1915, Vol. L, Disp. 8. Peano llama fórmula de Cavalieri-Simpson a la llamada fórmula de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

publicada por Simpsin en 1743 y por B Cavalieri en "Centuria di varii problemi" algo más de un siglo antes (Bologna 1639).

(2) *Zeitschrift für angewanate Mathematik und Mechanik,* B d 1, H 1, 1921.

Renuncio, dado el carácter de la Revista en que escribo, a formular el problema de cálculo de las variaciones, en que se transformaría en este último caso el problema (que la teoría de la interpolación y de la cuadratura mecánica, en su estado actual, no permiten resolver) de la determinación del error.

3. Precisamente por esto es doblemente interesante que apliquemos la fórmula a problemas numéricos: la aplicación sirve a un tiempo para ilustrar el empleo de la fórmula y para determinar experimentalmente la aproximación que puede ser alcanzada.

Se trate de determinar el valor de una anualidad vitalicia correspondiente a la edad 20, y a $i = 0.06$. Para poder comparar el valor al cual llegaremos, con el valor que resulta utilizando los procedimiento elementales y rigurosos de determinación. Supongamos que la tabla de mortalidad sea la H^M. Entonces

$$a_{20} = (l_{21}\, v + v^2\, l_{22} + \ldots) : l_{20} = 14{,}035$$

(Text - Book, 2.ª Ed. pág.) Definimos $\bar{a}_{20}$ por medio de la integral

$$\bar{a}_{20} = \frac{80}{l_{20}} \int_0^{80} v^t\, l_{20+t}\, dt$$

que, por medio de la substitución $u = \frac{t}{80}$, tranformamos previamente en una integral entre los límites 0,1:

$$\bar{a}_{20} = \frac{80}{l_{20}} \int_0^1 v^{80u}\, l_{20+80u}\, du = du \frac{80}{l_{20}} \int_0^1 f(u)\, du$$

si ponemos

$$f(u) = v^{80u}\, l_{20+80u}.$$

será, por la fórmula de Dufton

$$\int_0^1 f(u)\, du = \frac{1}{4}\left[v^8\, l_{28} + v^{32}\, l_{52} + v^{48}\, l_{68} + v_{72}\, l_{92}\right]$$

$$\bar{a}_{20} = \frac{20\,[D_{28} + D_{52} + D_{68} + D_{92}]}{D_{20}} = 14.711$$

Obtenemos así para la diferencia $\bar{a}_{20} - a_{20}$ el valor 0,676. La fórmula de sumación de Enlero nos dá, si nos limitamos (como es costumbre) a no tomar en cuenta los términos en que aparecen derivadas de la función $f(t) = v^t\, l_{20+t}$ de orden superior al primero

$$\bar{a}_{20} = a_{20} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\left(u_{20} + \ln(1{,}06)\right)$$

$$\bar{a}_{20} - a_{20} = 0{,}495$$

y una diferencia de

$$0{,}676 - 0.495 = 0{,}181$$

con el valor anteriormente obtenido. Es este un error (si error puede llamarse desde que la relación

$$\bar{a}_{20} - a_{20} = 0{,}495$$

es puramente aproximada) absoluto, al cual corresponde un error relªtivo de

$$\frac{0{,}181}{14{,}711} = 0{,}012$$

muy satisfactorio por cierto. La fórmula de Dufton nos ha permitido reemplazar una suma de ochenta sumandos por otra de cuatro, a costas de un sacrificio en la exactitud de los resultados que de muy poco sobrepasa el doce por mil, y parece llamada a prestar reales servicios en la práctica actuarial.

4. Esta última observación podría parecer tal vez fundada en el aire, desde que una aplicación constituye sin duda una base experimental deficiente, si no se encontrara justificada por consideraciones de otra naturaleza, fundadas en la interpretación geométrica de la fórmula de Dufton. Interpretación tan inmediata, que asombra un poco no verla utilizada en la nota crítica de von Mises.

La fórmula de Dufton reemplaza la superficie medida por

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

($f(x) > 0$), por la suma de los números que miden las siguientes superficies:

el rectángulo de base 0,1 y de altura $f(0{,}1)$;
el rectángulo de base 0,1 y de altura $f(0{,}9)$;
el trapecio de bases $f(0{,}1)$, $f(0{,}4)$ y de altura 0,3;
el trapecio de bases $f(0{,}4)$ 'f $(0{,}6)$ y de altura 0,2;
el trapecio de bases $f(0{,}6)$, $f(0{,}9)$ y de altura 0,3. Tenemos en realidad $0{,}1\, f(0{,}1) + 0{,}1\, f(0{,}9) + 0{,}15\,[f(0{,}1) + f(0{,}4)] + 0{,}1\,[f(0{,}4) + f(0{,}6)] + 0{,}15\,[f(0{,}6) + f(0{,}9)] = \frac{1}{4}[f(0{,}1) + f(0{,}4) + f(0{,}6) + f(0{,}9)]$.

Se pueden esperar buenos resultados de la aplicación de la fórmula de Dufton sobre todo en los casos en los cuales los dos errores más temibles

$$\int_0^{0,1} f(x)\,dx - 0{,}1\, f(0{,}1)$$
$$\int_{0,9}^{1} f(x)\,dx - 0{,}1\, f(0{,}1)$$

son aproximadamente iguales en valor numérico y de signo contrario (1). Es lo que pasa siempre, o casi siempre, en las integrales que se presentan en la estadística y en la matemática actuarial, que lo son de funciones constantemente crccientes o constantemente decrecientes (monótonas, en la terminología de las matemáticas) y que definen curvas de pequeña curvatura en todos sus puntos.

HUGO BROGGI.

(1) Lo que se dice en el texto no excluye que la compensación de los errores pueda operarse por otras causas. Es. p. e.

$$\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = 0{,}0833$$

mientras la fórmula de Dufton nos da 0,085. La aproximación no es tan mala como podría esperarse, desde que la condición que se formula en el texto no se encuentra de ninguna manera realizada, por una razón que aparece manifiesta, cuando se representan gráficamente la superficie $\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx$ y el segundo miembro de la fórmula de Dufton.