Revista
de
Ciencias Económicas

PUBLICACION MENSUAL DE LA

Facultad de Ciencias Económicas, Centro de Estudiantes y Colegio de Egresados.

Año XI — Abril de 1923 — Serie II. Nº 21

DIRECCIÓN Y ADMINISTRACIÓN
CHARCAS 1835
BUENOS AIRES

Teoría del Trazado Comercial de las Vías de Comunicación

(Caminos y Ferrocarriles)

(*Continuación, véanse los Nos.* 15|16)

V. — Zonas de afluencia en los ferrocarriles

Hemos supuesto que en las zonas de explotación de los caminos éstos son accesibles en cualesquiera de sus puntos. Cuando se trata de ferrocarriles, la zona de explotación debe ser determinada considerando la situación que crea el acceso obligado por las Estaciones de la línea.

Si llamamos:

$$F_x = f_1\, x = \varphi\,(x)$$

al flete del ferrocarril,

y

$$F_r = f_2\, r = \varphi\,(r)$$

al flete del carro hasta las Estaciones, los valores de x y de r en las (10) y (11) serán

$$x = \frac{v - \varphi\,(r)}{f_1} \qquad (20)$$

$$r = \frac{v - \varphi\,(x)}{f_2} \qquad (21)$$

y, como antes, sus valores máximos serán dados por las (12) y (13), pero en este caso, como el flete ferroviario no es, en general, una simple función lineal de la distancia de transporte (x), como veremos al estudiar la teoría de las tarifas, los lados $P_1 P^1$ (fig. 5) de la zona de explotación son *curvas* dependientes de la función φ (x) que define el flete o sea del *sistema de tarifa* aplicado en el ferrocarril.

Consideremos sin embargo, para simplificar, una tarifa media unitaria tal que

$$F_{x=a} = f_1\, a;$$

Consideremos sinembargo para simplificar, una tarifa me-P' P P' (Fig. 7) ya considerado, cuya superficie deberá ser igual a la suma de las zonas de afluencia de las Estaciones E.... del ferrocarril que va de de *M* a *P*.

Como sabemos, la zona de afluencia de cada una de aquellas es un círculo de radio (r) determinado por la (21), el cual podría ser substituído, con una cierta aproximación, por el cuadrado circunscripto de lados iguales a $2r$, tangentes en los puntos (F) de intersección del círculo con la línea M P y los lados P'P del triángulo que limita la zona (*).

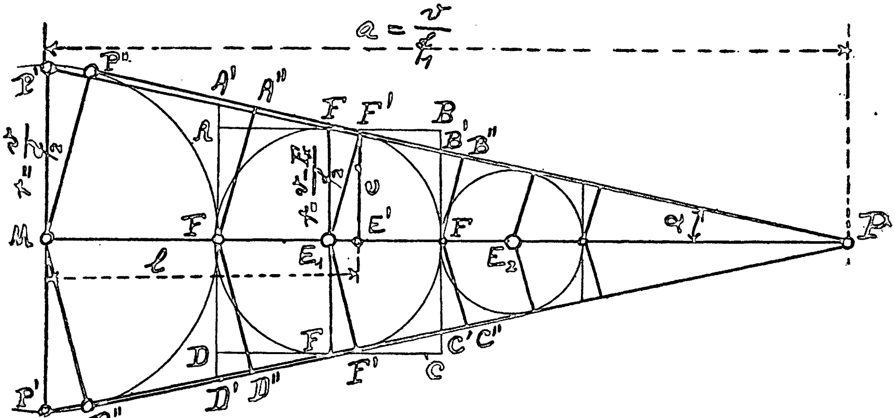

Fig. 7

(*) Esta substitución se justifica, notando que el radio del círculo de afluencia de un producto, dado por la (21), depende de su coeficiente de transporte (v) y hemos visto que

$$v = m - p$$

siendo m el precio de venta y p el costo de producción, en el cual se incluye la ganancia del productor (Δ); luego si hacemos

$$p_1 = p - \Delta$$

obtendremos un valor de v:

$$v_1 = m - p_1 = m - p + \Delta = v + \Delta$$

$$\therefore\ v = v_1 - \Delta$$

de modo que v podrá tener un valor máximo (v_1) cuando $\Delta = o$, es decir, cuando la ganancia del productor sea nula, lo que implica que el radio del círculo de afluencia, dado por la (21), aumenta en relación a la diminución de esta ganancia, lo que significa, en nuestro caso, que la ganancia de los productores situados en los triángulos mixtilíneos (F A F) será menor que la de los situados dentro del círculo de radio r.

La superficie de este cuadrado (ABCD) es equivalente a la del trapecio A'B'C'D' formado por los lados del triángulo y las tangentes al círculo perpendiculares a MP, y por lo tanto podemos decir que la zona de explotación del ferrocarril es aproximadamente la suma de los trapecios formados por los lados del triángulo P'PP' y las perpendiculares a la línea MP tangentes al círculo de afluencia de cada Estación.

Cuando las estaciones están muy próximas y los círculos de afluencia se cortan, la línea límite de la zona común será un arco de hipérbole definida como sigue (fig. 8): El límite debe ser tal que los costos totales de transporte al mercado (M) para todos sus puntos H..... sean iguales para cada par de Estaciones E_1 y E_2, que distan entre sí la longitud e y respectivamente x e y de H.

Siendo los gastos de carga y descarga iguales para ambas estaciones, tendremos:

$$x f_2 = y f_2 + e f_1 \qquad (22)$$

$$\therefore x - y = \frac{e f_1}{f_2} = constante$$

o sea la ecuación de la hipérbole.

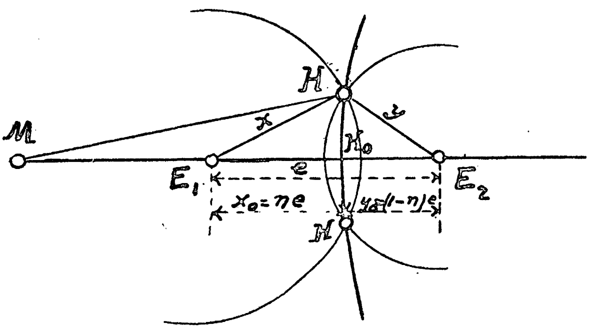

Fig. 8

Cuando H está sobre la recta $E_1 E_2$ en H_0, hagamos

$$x_0 = x = E_1 H_0 = ne,$$

$$y_0 = y = E_2 H_0 = e - ne = e (1 - n),$$

substituyendo en la (22) tendremos

$$ne f_2 = e (1 - n) f_2 + e f_1$$

$$\therefore n = \frac{f_1 + f_2}{2 f_2}. \qquad (23)$$

y por lo tanto

$$x_0 = ne = \frac{f_1 + f_2}{2 f_2} e$$

$$y_0 = (1 - n) e = \frac{f_2 - f_1}{2 f_2} e.$$

Como f_1 es siempre muy pequeño respecto de f_2 podemos prácticamente prescindir de su valor, de lo que resulta

$$n = \frac{1}{2}$$

y en tal caso

$$x_0 = y_0 = \frac{e}{2}$$

lo que significa substituir la hipérbole por una perpendicular a $E_1 E_2$ en su punto medio, como ya lo hemos notado en las (4) y (5).

De acuerdo con lo que precede, podemos determinar la distancia hasta la cual será conveniente el transporte directo en carros al mercado M, con prescindencia del ferrocarril.

Supongamos para ello la existencia de un camino carretero de H a M (fig. 8) y llamemos *U $ por tn* al costo de carga y descarga en la Estación E_2 del ferrocarril; la (22) nos dará en este caso

$$HM - HE_2 = \frac{U + E_2 M f_1}{f_2}$$

y el punto H_0 que fijará, en el ferrocarril, la distancia límite para los carros, quedará determinado reemplazando en la anterior HE_2 por su valor

$$H_0 E_2 = ME_2 - H_0 M$$

resultando

$$H_0 M - (M E_2 - H_0 M) = \frac{U + E_2 M f_1}{f_2}$$

$$\therefore H_0 M = \frac{U + M E_2 (f_1 + f_2)}{2 f_2}. \quad (24)$$

La zona de explotación del ferrocarril puede limitarse, con el mismo orden de aproximación establecido, considerando el *frente de afluencia* definido por la (18):

Si trazamos los radios MP" perpendiculares a las tangentes PP" al círculo de afluencia de M, tendremos (fig. 7).

$$\frac{M\,P'}{M\,P} = \frac{r}{a} = \frac{\frac{v}{f_2}}{\frac{v}{f_1}} = \frac{f_1}{f_2} = \operatorname{sen} \alpha$$

Es decir, que el *frente de afluencia* del ferrocarril es dado por la tangente al círculo de afluencia del mercado M, trazada desde el límite (P) de su zona de explotación, la cual queda limitada por la misma.

Los puntos (F') de esta tangente serán puntos límites de la zona de explotación, si el costo de transporte de un producto desde cualquiera de ellos hasta el mercado (M) equivale a su coeficiente de transporte (v) y es mínimo para la dirección ($F'E_1$) perpendicular a ella.

En efecto, para el punto F' de coordenadas $(l,\ c)$ respecto a M, el costo de transporte es

$$K = F'\,E_1\,f_2 + E_1\,M\,f_1:$$

pero

$$F'\,E_1 = E_1\,P\operatorname{sen}\alpha = E_1\,P\,\frac{f_1}{f_2}$$

luego

$$K = E_1\,P\,f_1 + E_1\,M\,f_1 = MP\,f_1 = a\,f_1 = v,$$

y para que este costo sea mínimo es necesario que

$$\frac{dK}{d\alpha} = 0.$$

Ahora bien, en el triángulo $E_1\ E'\ F'$:

$$E_1\,F' = \frac{E'\,F'\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{c}{\cos\alpha}$$

y

$$E_1\,M = M\,E' - E_1\,E' = l - c\operatorname{tang}\alpha$$

luego

$$K = \frac{c}{\cos\alpha}\,f_2 + (l - c\operatorname{tang}\alpha)\,f_1$$

$$= \frac{c}{\cos\alpha}\,(f_2 - f_1\operatorname{sen}\alpha) + lf_1$$

y

$$\frac{dK}{d\alpha} = \frac{c}{\cos^2\alpha}\,(f_2\operatorname{sen}\alpha - f_1) = 0;$$

para que esta igualdad sea cero será

$$f_2 \text{ sen } \alpha - f_1 = 0$$

$$\therefore \text{ sen } \alpha = \frac{f_1}{f_2}$$

valor que corresponde a la dirección del costo mínimo de transporte, que es lo que queríamos demostrar.

Luego si desde E_1 con radio

$$E_1 F' = r = \frac{v - F_x}{f_2}$$

trazamos el círculo de afluencia de E_1 tangente en F' a la recta PP" y por F las paralelas a E_1 F', podríamos substituir el cuadrilátero FA"B"F al FA'B'F para obtener aproximadamente la semizona de afluencia de E_1.

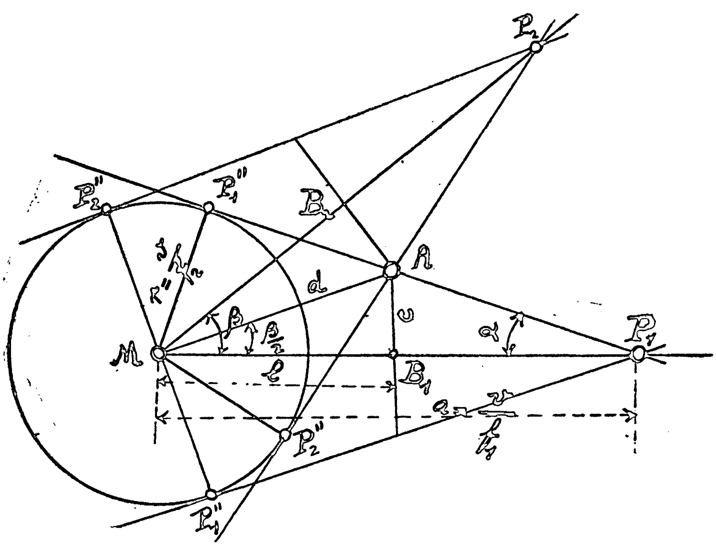

Fig. 9

Los valores de *d, c, l,* correspondientes a las *zonas de explotación reducidas* de dos líneas MP_1 y MP_2 que forman entre sí el ángulo β, se obtienen en este caso — notando que dependen del ángulo β y del ángulo α — como sigue, (fig. 9):

$$a = d \cos \frac{\beta}{2} + AP_1 \cos \alpha$$

$$c = d \text{ sen } \frac{\beta}{2} = AP_1 \text{ sen } \alpha = AP_1 \frac{r}{a}$$

$$\therefore \ AP_1 = d \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \frac{a}{r}$$

y substituyendo

$$a = d \cos \frac{\beta}{2} + d \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \frac{a}{r}$$

$$\therefore \ d\left(r \cos \frac{\beta}{2} + a \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}\right) = a\, r$$

de donde obtendremos, finalmente, los valores ya conocidos de *d, c, l,* dados por las (14), (15) y (16):

$$d = \frac{a\, r}{a \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} + r \cos \frac{\beta}{2}}$$

$$c = d \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} = \frac{a\, r}{a + r \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2}}$$

$$l = d \cos \frac{\beta}{2} = \frac{a\, r}{r + a \operatorname{tang} \frac{\beta}{2}}$$

VI. — Densidad de los caminos

Hemos visto que las zonas de explotación de un sistema de n caminos uniformemente distribuídos alrededor de un mercado (M), forman un polígono regular de n lados de longitud $b = 2\, r$, siendo

$$r = c = \frac{b}{2}$$

el radio de afluencia en el límite de las *zonas reducidas.*

Tratemos de determinar cuál es el valor más conveniente que debe darse a b a fin de que la zona de explotación del mercado (M) sea económicamente servida por los n caminos también del modo más conveniente, lo que ocurrirá cuando los gastos totales del transporte por cualquiera de ellos sean mínimos.

Los gastos totales o sean los *gastos de explotación* (K) de un servicio organizado de transportes, están constituídos por tres grupos bien determinados de gastos anuales, a saber: los gastos directamente aplicados al transporte de las masas del tráfico movido o sea el *costo de transporte* propiamente dicho

(K_1); los *intereses del capital* invertido en la construcción de los caminos (K_2); y los gastos de su *conservación* (K_3).

Sean (fig. 10):

A M A la zona de explotación reducida de un camino primario (M N) en la zona del mercado M.

$M B = l$ la longitud reducida del camino.

$c = \frac{b}{2}$ la amplitud de la zona de explotación del camino, es decir, su radio de afluencia máximo.

f_1 la tarifa del camino primario.

f_2 la tarifa de los caminos secundarios.

M F el frente de afluencia, que forma el ángulo α con el camino M N.

Q la producción de la zona M B′A o sea la mitad de la explotación del camino.

γ la densidad de producción de la zona o sea el número de toneladas por unidad de superficie.

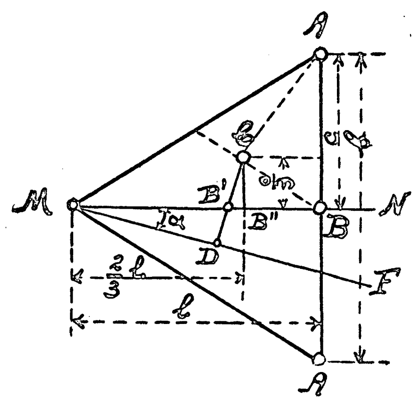

Fig. 10

Supongamos concentrada la producción (Q) en el centro de gravedad (C) del triángulo M B A (*).

Con los datos de la figura, siendo

$$Q = \frac{c\,l}{2}\,\gamma,$$

el costo de transporte (K_1) de C a M será (19):

$$K_1 = \frac{c\,l}{2}\,\gamma\, f_2\,\overline{C\,D}.$$

(*) El centro de gravedad de un triángulo se encuentra en la intersección de las medianas, o sea a un tercio de la altura, desde la base.

Determinaremos C D, en función de los datos que nos son conocidos, notando que

$$C\,D = C\,B' + B'\,D.$$

En el triángulo C B' B":

$$C\,B' = \frac{c}{3 \cos \alpha}$$

y en el triángulo M B' D:

$$B'\,D = M\,B' \operatorname{sen} \alpha = \left(\frac{2}{3}\,l - \frac{1}{3}\,c \operatorname{tang} \alpha\right) \operatorname{sen} \alpha$$

luego

$$\overline{C\,D} = \frac{c}{3 \cos \alpha}\,(1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) + \frac{2}{3}\,l \operatorname{sen} \alpha.$$

y por lo tanto

$$K_1 = \frac{c\,l}{2}\,\gamma\,f_2\left(\frac{1}{3}\,c \cos \alpha + \frac{2}{3}\,l \operatorname{sen} \alpha\right).$$

Este será el valor del *costo de transporte* de la producción Q, o sea la de la mitad de la zona A M A. El correspondiente a la producción total será doble, y se obtendrá en función de *b*, ancho total de la zona, substituyendo *c* por $\frac{b}{2}$, resultando

$$K_1 = 2\,\frac{\frac{b}{2}\,l}{2}\,\gamma\,f_2\left(\frac{1}{3}\,\frac{b}{2} \cos \alpha + \frac{2}{3}\,l \operatorname{sen} \alpha\right)$$

y finalmente

$$K_1 = b\,l\,\gamma\,f_2\left(\frac{1}{12}\,b \cos \alpha + \frac{1}{3}\,l \operatorname{sen} \alpha\right). \qquad (25)$$

Llamemos ahora A al capital *correspondiente a un kilómetro* de camino; *i* al interés anual (tanto por uno). El monto de los intereses anuales, para la longitud *l* de camino, será

$$K_2 = A\,l\,i \qquad (26)$$

Los *gastos de conservación anuales por kilómetro,* dependen por una parte de las características específicas del camino y por otra del uso que de este se haga o sea de la magnitud del tráfico, es decir, que tendrán por expresión

$$B + \beta\,C$$

siendo B una constante por kilómetro, β un coeficiente numérico y C el tráfico medio anual que circula por el camino, expresado en unidades de tráfico, es decir, el número de *toneladas-kilómetros* producidas.

Estando la producción total de la zona

$$2\,Q = \frac{b\,l}{2}\,\gamma$$

concentrada en el centro de gravedad de cada triángulo (AMB), solo se utilizará en su transporte $\frac{2}{3}$ de la longitud l del camino, luego el número de *toneladas-kilómetros* por cada kilómetro de camino será

$$C = \frac{2}{3}\left(\frac{b\,l}{2}\,\gamma\right) = \frac{1}{3}\,b\,l\,\gamma$$

y los *gastos de conservación* de todo el camino de longitud l serán por lo tanto

$$K_3 = B\,l + \frac{1}{3}\,b\,l^2\,\gamma\,\beta. \qquad (27)$$

Los gastos totales de explotación

$$K = K_1 + K_2 + K_3$$

para la longitud l del camino, serán, pues,

$$K = b\,l\,\gamma\,f_2\left(\frac{1}{12}\,b\cos\alpha + \frac{1}{3}\,l\operatorname{sen}\alpha\right) + A\,i\,l + B\,l + \frac{1}{3}\,b\,l^2\,\gamma\,\beta \qquad (28)$$

y los *gastos totales unitarios,* es decir, por unidad de producción, serán

$$k = \frac{K}{2\,Q} = \frac{K}{\frac{b\,l\,\gamma}{2}}.$$

Efectuando las operaciones tendremos

$$k = \frac{1}{6}\,b\,f_2\cos\alpha + \frac{2}{3}\,l\,f_2\operatorname{sen}\alpha + \frac{2\,A\,i}{b\,\gamma} + \frac{2\,B}{b\,\gamma} + \frac{2}{3}\,l\,\beta. \qquad (29)$$

Siendo b la variable, de la cual depende el número n de caminos de la zona, el valor mínimo de k se obtendrá igualando a cero su primera derivada respecto a b, o sea:

$$\frac{d\,k}{d\,b} = \frac{1}{6}\,f_2\cos\alpha - \frac{2\,A\,i}{b^2\,\gamma} - \frac{2\,B}{b^2\,\gamma} = 0$$

$$\therefore\ \frac{1}{6}\,f_2\cos\alpha = \frac{2\,(A\,i + B)}{b^2\,\gamma}$$

$$\therefore\ b = \sqrt{\frac{12\,(A\,i + B)}{\gamma\,f_2\cos\alpha}} \qquad (30)$$

Además, como M B $= l$ es la longitud total de los caminos en la zona que consideramos (A M A), si llamamos δ o *coeficiente de densidad* al número que expresa la relación entre la longitud de los caminos (l) y la superficie $\left(\frac{b\,l}{2}\right)$ de la zona que sirven, será

$$\delta = \frac{l}{\frac{b\,l}{2}} = \frac{2\,l}{b\,l} = \frac{2}{b}$$

$$\therefore l = \delta\left(\frac{b\,l}{2}\right).$$

Por la (30)

$$\delta = \frac{2}{\sqrt{\frac{12\,(A\,i + B)}{\gamma f_2 \cos \alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3\,(A\,i + B)}{\gamma f_2 \cos \alpha}}}$$

o finalmente

$$\delta = \sqrt{\frac{\gamma f_2 \cos \alpha}{3\,(A\,i + B)}} \qquad (31)$$

Vemos, pues, que la densidad de los caminos depende de la densidad de la producción (α) y de los costos de construcción (A), conservación (B) y transporte (f_1, f_2) en la zona. Como normalmente α no es constante, diminuyendo al aumentar la distancia a los mercados, y notando además que hemos considerado solamente la zona de explotación reducida y no la total de los caminos, es recomendable aumentar algo el valor de δ para fomentar las zonas más alejadas de aquéllos, por lo que puede establecerse

$$\delta = \sqrt{\frac{\gamma f_2 \cos \alpha}{2\,(A\,i + B)}} \qquad (32)$$

correspondiendo a la longitud total de los caminos de la zona

$$l\,[Km] = \delta \left[\frac{Km}{Km^2}\right] . S\,[Km^2]. \qquad (33)$$

Las fórmulas halladas que no tienen, como se comprende, sino un valor práctico relativo permiten afirmar sin embargo que:

La densidad más conveniente para una red de caminos, es proporcional a la raíz cuadrada de la densidad del tráfico e inversamente proporcional al costo de construcción y conservación de la vía.

Al establecer una red de caminos no hay ventaja económica en exceder un determinado máximo de longitud total.

VII. — El Capital con relación al trazado

El primer problema concreto que se presenta en el trazado de una vía de comunicación es el de considerar el capital que será necesario para su establecimiento, teniendo en cuenta las finalidades que se persiguen con su construcción y las características económicas y topográficas de la región considerada. Dado que la construcción de una vía de comunicación debe responder o bien al sistema de la economía pública, es decir, a satisfacer intereses generales desprovistos de todo propósito de lucro, o bien al sistema de la economía privada, en que los intereses particulares en juego tienen principalmente en vista rendimientos comerciales para el capital empleado, las previsiones para determinar el que debe considerarse necesario, variarán según sea uno u otro el criterio determinante de la construcción.

En el primer caso (principio del interés público), el objetivo buscado será el transporte más económico posible, con lo que se obtendrá el máximo beneficio público. Para ello será necesaria la aplicación de *tarifas mínimas,* lo que supone la reducción correlativa del *costo de transporte* y por lo tanto la mayor perfección en las estructuras y en los procedimientos para obtener este resultado, sin reparar en beneficios posibles con relación al capital empleado.

En el segundo caso (principio del interés privado) se trata precisamente de llegar al máximo beneficio obtenible del capital empleado, es decir, obtener un *dividendo máximo* en la prestación del servicio.

Es evidente que para que la tarifa sea mínima, los gastos anuales de la explotación deberán ser también mínimos y clasificados éstos, como sabemos, en gastos de construcción, conservación y transporte, notaremos desde luego que a los segundos podemos considerarlos independientes del capital, prescindiendo de ellos en el análisis, y en cuanto a los gastos de transporte, éstos son tanto mayores cuanto mayor es la pendiente del camino. En tesis general puede decirse que la pendiente varía inversamente al capital empleado en la construcción, es decir, que cuanto más se adapte un camino, que une dos puntos situados a diferente nivel, a las condiciones naturales del terreno, menor será el *capital unitario* a emplearse y mayores serán las pendientes del trazado adoptado, lo que quiere decir que el costo del transporte es una función del capital.

Sean:

A Capital por kilómetro de vía.
i Interés anual (tanto por uno).
f Tarifa por unidad de tráfico.
f_0 Costo unitario de transporte.
C Tráfico anual (toneladas-kilómetros de pasajeros y carga por año).
k Gastos totales de explotación por unidad de tráfico.
d Dividendo.
s Pendiente máxima del trazado; $s = tang\ \alpha$, siendo α el ángulo que forma el eje de la vía con la horizontal.

De acuerdo con lo dicho anteriormente, tendremos:

$$k = f_0 + \frac{A\,i}{C}$$

y siendo

$$f_0 = \varphi\,(A)$$

será

$$k = \varphi\,(A) + \frac{A\,i}{C}. \qquad (34)$$

Para que k sea mínimo deberá ser

$$\frac{d\,k}{d\,A} = \varphi'\,(A) + \frac{i}{C} = 0,$$

ecuación que permitirá calcular, conociendo φ (A), el valor que más conviene para A cuando se consideren solamente los intereses generales (principio del interés público).

Si la construcción se hace en vista del interés privado, la condición a satisfacer será la de obtener el dividendo máximo, y como

$$d = \frac{C\,(f - k)}{A},$$

reemplazando k por su valor, será

$$d = \frac{C\left[f - \left(\varphi\,(A) + \frac{A\,i}{C}\right)\right]}{A}.$$

Como el capital (A) que se busca debe satisfacer a la condición

$$\frac{d\,d}{d\,A} = 0,$$

tendremos la ecuación

$$\frac{d}{d\,A}\left[\frac{C\left[f - \left(\varphi(A) + \frac{A\,i}{C}\right)\right]}{A}\right] = 0$$

o sea

$$\frac{d\,d}{d\,A} = \frac{A\left(-C\,\varphi'(A) - i\right) - \left(C\,f - C\,\varphi(A) - A\,i\right)}{A^2} =$$

$$= C\left[\frac{-\left(\varphi'(A) + \frac{i}{C}\right)A - \left[f - \left(\varphi(A) + \frac{A\,i}{C}\right)\right]}{A^2}\right] = 0.$$

Este producto será cero cuando

$$-A\,\varphi'(A) - \frac{A\,i}{C} - f + \varphi(A) + \frac{A\,i}{C} = 0$$

o sea

$$A\,\varphi'(A) + \left(f - \varphi(A)\right) = 0$$

$$\therefore\ A = \frac{\varphi(A) - f}{\varphi'(A)} \qquad (35)$$

expresión del capital (A) más conveniente en el caso del interés privado.

Para nuestros ferrocarriles puede establecerse empíricamente, según Schneidewind:

$$f_0 = 0{,}012 + 0{,}05\,s$$

y

$$s = \frac{54.000}{A + 42.000} - 0{,}07$$

o simbólicamente

$$s = \frac{c_1}{A + c_2} - c_3$$

luego

$$\varphi(A) = f_0 = c_4 + \left[\frac{c_1}{A + c_2} - c_3\right] c_5$$

y llamando

$$c_6 = \frac{C}{i},$$

será (34):

$$k = c_4 + \frac{c_1\,c_5}{A + c_2} - c_3\,c_5 + \frac{A}{c_6} \qquad (36)$$

De esto resulta que, en el caso del interés público

$$\frac{d\,k}{d\,A} = \varphi'(A) + \frac{i}{C} = -\frac{c_1\,c_5}{(c_2 + A)^2} + \frac{1}{c_6} = 0,$$

$$\therefore \frac{c_1\,c_5}{(c_2 + A)^2} = \frac{1}{c_6}$$

obteniéndose:

$$A = -c_2 + \sqrt{c_1\,c_5\,c_6}\,. \qquad (37)$$

Para determinar el capital A correspondiente al caso del interés privado, conociendo

$$\varphi(A) = c_4 + \frac{c_1\,c_5}{A + c_2} - c_3\,c_5$$

y

$$\varphi'(A) = -\frac{c_1\,c_5}{(A + c_2)^2}$$

substituiremos sus valores en la (35) obteniendo

$$A = \frac{c_4 + \dfrac{c_1\,c_5}{A + c_2} - c_3\,c_5 - f}{-\dfrac{c_1\,c_5}{(A + c_2)^2}}$$

y si hacemos

$$f - c_4 + c_3\,c_5 = c_7$$

tendremos:

$$A = \frac{\dfrac{c_1\,c_5}{A + c_2} - c_7}{-\dfrac{c_1\,c_5}{(A + c_2)^2}} = \frac{\dfrac{c_1\,c_5 - c_2\,c_7 - A\,c_7}{A + c_2}}{-\dfrac{c_1\,c_5}{(A + c_2)^2}} =$$

$$= \frac{c_1\,c_5 - c_2\,c_7 - A\,c_7}{-\dfrac{c_1\,c_5}{A + c_2}}$$

$$\therefore -A\frac{c_1\,c_5}{A + c_2} = c_1\,c_5 - c_2\,c_7 - A\,c_7$$

y

$$A^2\,c_7 + A\,(c_2\,c_7 - c_1\,c_5) = A\,(c_1\,c_5 - c_2\,c_7) + c_2\,(c_1\,c_5 - c_2\,c_7).$$

Dividiendo por C_7 y haciendo

$$c_8 = \frac{c_1\, c_5 - c_2\, c_7}{c_7},$$

tendremos

$$A^2 - A\, c_8 = A c_8 + c_2\, c_8$$

o bien

$$A^2 - 2\, A\, c_8 - c_2\, c_8 = 0,$$

ecuación de segundo grado, que resuelta da

$$A = c_8 + \sqrt{c_8\,(c_2 + c_8)}\,, \qquad (38)$$

expresión que nos dá el valor del capital más conveniente en el caso del interés privado.

Los resultados obtenidos anteriormente pueden ponerse de manifiesto gráficamente, como sigue (fig. 11):

En un sistema de coordenadas ortogonales, consideremos como abscisas los capitales A y como ordenadas los gastos k y las tarifas f:

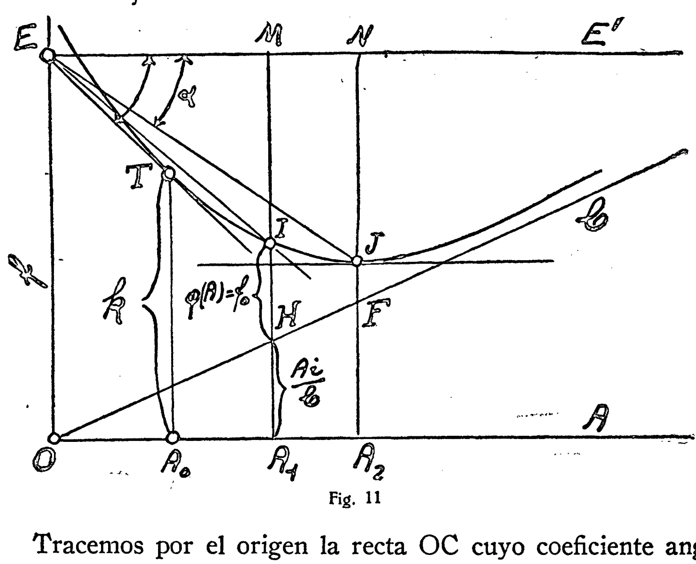

Fig. 11

Tracemos por el origen la recta OC cuyo coeficiente angular sea $\frac{i}{C}$; a cada abscisa $A = O\,A_1$; $A = O\,A_2$; ... corresponderán ordenadas $A_1 H = \frac{Ai}{C}$; $A_2\, F = \frac{Ai}{C}$;.... sobre las cuales, si a partir de los puntos H, F, ... llevamos las magnitudes HI, FJ,... correspondientes a $f_0 = \varphi\,(A)$ tendremos en

A'_1 I, A'_2 J,... segmentos representativos del *gasto de explotación* $k = \varphi(A) + \frac{Ai}{C}$, definido por la (36), cuyos puntos extremos determinarán una curva que pasará por un mínimo cuando $\frac{dk}{dA} = O$, a cuyo valor corresponderá el punto J, en que la tangente a la curva es paralela al eje de las A, y que siendo el punto más cercano al mismo, será precisamente el que corresponde al valor del capital ($A = OA_2$) que mejor satisface a los intereses públicos.

Tomemos OE $= f$ y tracemos por E la paralela EE' a OA.

Las ordenadas A_1 I, A_2 J,... cortarán a EE' en los puntos M, N,... tales que $A_1 M - A_1 I = IM$; $A_2 N - A_2 J = JN$; ... nos darán los *beneficios unitarios,* equivalentes a las diferencias entre los *productos* ($f = A_1 M$) y los *gastos* ($k = A_1 I$).

Los *dividendos* por unidad de tráfico $\left(\frac{f-k}{A}\right)$ estarán dados por la tangente trigonométrica

$$\frac{IM}{EM}, \frac{JN}{EN} = \frac{f-k}{A} = \tan \alpha$$

del ángulo en E, cuyo valor máximo corresponderá al punto de tangencia (T) de la tangente geométrica trazada desde E a la *curva de los gastos,* cuyo punto determinará el valor del capital ($A = OAo$) más conveniente desde el punto de vista del interés privado.

La construcción hecha pone de manifiesto como un capital reducido puede dar el mejor rendimiento y como el aumento de capital sólo favorece al público hasta un cierto valor ($A = OA2$) a partir del cual los *gastos totales* de explotación (k) aumentan, tendiendo los *gastos de transporte* (f_0) a tener un valor constante, sin beneficiar mayormente ni al público ni al empresario.

C. M. RAMALLO.

(*Continuará*).