Revista
de
Ciencias Económicas

PUBLICACION MENSUAL DE LA

Facultad de Ciencias Económicas, Centro de Estudiantes y Colegio de Egresados.

Año XI **Mayo de 1923** **Serie II. N° 22**

DIRECCIÓN Y ADMINISTRACIÓN
CHARCAS 1835
BUENOS AIRES

Teoría del Trazado Comercial de las Vías de Comunicación

(Caminos y Ferrocarriles)

(*Continuación, véase el N.° 21*)

VIII. — El Empalme

Hemos definido anteriormente la dirección más conveniente para la afluencia del tráfico a un camino primario desde cualquier punto de su zona; veamos ahora cómo se concreta el problema cuando, conociendo el intercambio de tráfico existente o probable entre tres mercados A, B, C, de los cuales están unidos los dos primeros por un camino (A B), se trata de construir otro camino (C D)que una al mercado C con los anteriores por medio del camino existente.

Suponemos conocida la posición de C respecto de A y B por sus coordenadas respectivas (a, c) y (b, c); y que C D sea el camino a construir, inclinado del ángulo α con relación a c.

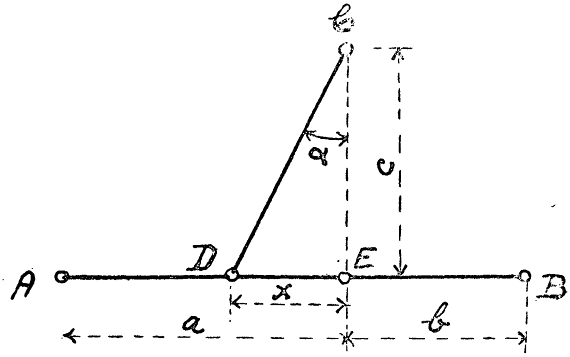

Fig. 12

Llamemos A, B, C, respectivamente, al tonelaje del tráfico que llega o sale a cada uno de los mercados A y B procedente o con destino a C, es decir, que

A es el tonelaje procedente o con destino a C que circula sobre A D $= a - x$.

B el tonelaje análogo sobre B D $= b + x$.

C el tonelaje sobre C D $= (c^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$.

y sean

f_1 la tarifa sobre A B.

f_2 „ „ „ C D.

A_1 el costo kilométrico de construcción de A B.

A_2 „ „ „ „ „ „ C D.

$U_1 + \beta_1$ A el costo kilométrico de conservación anual en la sección A D del camino A B.

$U_1 + \beta_1$ B el mismo valor para la sección D B.

$U_2 + \beta_2$ C „ „ „ „ „ „ C D.

i „ interés anual (tanto por uno).

Los gastos anuales de explotación ($K = K_1 + K_2 + K_3$) por transporte, construcción y conservación en cada una de las tres secciones de camino, serán:

sobre A D:

$$K' = (Af_1 + A_1 i + U_1 + \beta_1 A)(a - x)$$

sobre D B:

$$K'' = (Bf_1 + A_1 i + U_1 + \beta_1 B)(b + x)$$

sobre C D:

$$K''' = (Cf_2 + A_2 i + U_2 + \beta_2 C)(x^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}$$

cuya suma

$$S = K' + K'' + K'''$$

será mínima cuando

$$\frac{dS}{dx} = -\left[(A_1 i + U_1 + (\beta_1 + f_1) A\right] +$$

$$+ (A_1 i + U_1 + (\beta_1 + f_1) B +$$

$$+ \left[A_2 i + U_2 + (\beta_2 + f_2) C\right] \frac{x}{(x^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

de donde, simplificando y teniendo presente que

$$\frac{x}{(x^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}} = sen\,\alpha$$

obtendremos

$$sen\,\alpha = \frac{(A - B)(\beta_1 + f_1)}{A_2 i + U_2 + (\beta_2 + f_2) C}. \quad (39)$$

Conocido el ángulo α por la (39), será

$$x = c \; tang \; \alpha \qquad (40)$$

y la longitud del camino a construir

$$C\,D = \frac{x}{sen \; \alpha}. \qquad (41)$$

Dependiendo el signo de *sen* α del que corresponde a la diferencia $A—B$ en la (39), ésta indicará el sentido de la inclinación de $\overline{C\,D}$ respecto a la perpendicular a $\overline{A\,B}$ trazada desde C, posición que corresponderá al camino cuando $A = B$, o sea *sen* $\alpha = 0$.

IX. — El punto de convergencia

Consideremos el caso general de unir tres mercados, A, B, C, sin que exista ningún camino ya construído entre ellos, que pueda reducir el problema a la determinación de un punto de empalme. La solución puede ofrecerse sea por la construcción de los caminos perimetrales $\overline{A\,B}$, $\overline{B\,C}$, $\overline{C\,A}$ (fig. 13), sea por la elección de un punto central o de convergencia (P) donde concurran los tres caminos $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$, que unan indirectamente cada par de mercados.

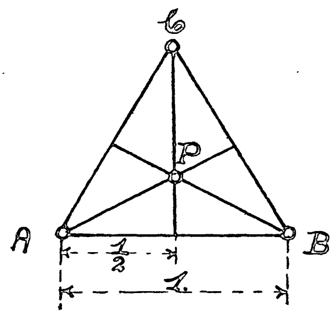

FIG. 13

Para decidir de una u otra solución notaremos, desde luego, que como los caminos directos (AB) son más largos que los convergentes (APB), para un mismo costo unitario los gastos totales de *construcción* serán mayores en los caminos perimetrales; en cambio, como cada camino convergente soporta un tráfico doble, los gastos de *transporte* serán mayores para estos últimos, de modo que la elección de una u otra de las soluciones propuestas, prescindiendo de los gastos de conservación, dependerá de la magnitud del tráfico previsto entre los mercados y del costo de construcción de los caminos.

Tratemos de apreciar el valor relativo de cada uno de estos factores y supongamos, al efecto, los tres mercados A, B, C, formando un triángulo equilátero de lados iguales a la unidad (fig. 13), y las condiciones del intercambio y del costo indénticas para todos ellos.

Llamemos

Q al tráfico despachado por cada mercado.

A al costo kilométrico de cada camino.

f_0 al costo de la tonelada-kilómetro.

i al interés anual.

Sea P el punto de convergencia que corresponderá, como veremos luego, al de intersección de las tres medianas del triángulo.

Prescindiendo como hemos dicho de los gastos de conservación, los gastos totales de explotación anuales de los caminos serán:

Para los caminos perimetrales

$$K = (\mathrm{A}i + \mathrm{Q}\,f_0)\,(\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA})$$

es decir,

$$K = 3\,(\mathrm{A}i + \mathrm{Q}f_0); \qquad (42)$$

Para los caminos convergentes:

$$K' = (\mathrm{A}i + 2\mathrm{Q}f_0)\,(\mathrm{AP} + \mathrm{BP} + \mathrm{CP})$$

pero

$$\mathrm{AP} = \mathrm{BP} = \mathrm{CP} = \frac{\frac{1}{2}}{\cos\,\alpha} = \frac{1}{2\cos 30^0} = \frac{1}{1{,}732} = 0{,}5774$$

luego

$$K' = 1{,}732\,(\mathrm{A}i + 2\,\mathrm{Q}f_0) \qquad (43)$$

De modo que la ventaja económica de una u otra solución dependerá de que

$$K \lesseqgtr K'$$

La conveniencia de fijar un punto de convergencia (P) resultará así, para las condiciones establecidas, cuando

$$3\,(\mathrm{A}i + f_0\,\mathrm{Q}) > 1{,}732\,(\mathrm{A}i + 2\,f_0\,\mathrm{Q})$$

o bien

$$1{,}268\,\mathrm{A}i > 0{,}464\,f_0\,\mathrm{Q}$$

$$\therefore\ \mathrm{A}i > 0{,}37\,f_0\,\mathrm{Q}.$$

$$Q < \frac{Ai}{0{,}37\ f_0} \qquad (44)$$

es decir, que para valores determinados de A, i, f_0, el tráfico (Q) no debe exceder de un cierto tonelaje. P. ej.: para A = 15000 \$; i = 0,05; f_0 = 0,02, el tonelaje Q entre los mercados debe ser inferior a 100.000 *tn*.

Veamos ahora a qué condiciones debe satisfacer el punto de convergencia (P) y cómo se determina su posición respecto a los mercados A, B, C, que forman el triángulo A B C de lados conocidos a, b, c, (fig. 14).

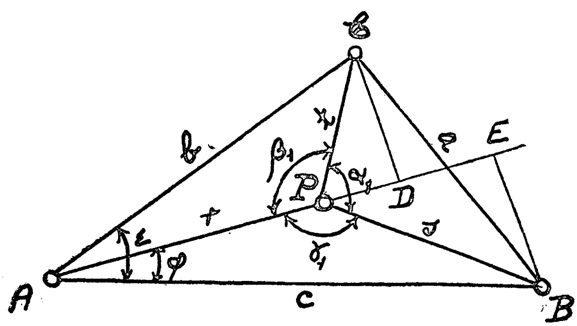

FIG. 14

Sean para cada uno de los caminos AP, BP, CP, respectivamente:

A, B, C,	el tráfico anual en toneladas.
f_1, f_2, f_3,	el costo de transporte por tn-km.
A_1, A_2, A_3,	el costo de construcción de un kilómetro de camino.
U_1, U_2, U_3,	el costo de conservación anual por Km.
r, s, t,	la longitud kilométrica de cada camino.
i	el interés anual.

Los *gastos unitarios de explotación*, o sean los gastos totales *por kilómetro y por año* en cada uno de los caminos AP, BP, CP, serán respectivamente:

$$k' = A_1\, i + U_1 + Af_1$$

$$k'' = A_2\, i + U_2 + Bf_2$$

$$k''' = A_3\, i + U_3 + Cf_3$$

cuyo producto por las longitudes r, s, t, nos dará el respectivo gasto total en cada camino.

La posición del punto P respecto a los mercados A, B, C, debe ser tal que la suma

$$S = k' r + k'' s + k''' t \qquad (45)$$

de los gastos totales de explotación sea mínima, posición que quedará determinada por las coordenadas polares (r, φ) respecto a un vértice (A) y a un lado (AB) del triángulo A B C (*).

La posición de P que cumple la condición de que S sea mínimo, se obtendrá así, expresando S en función de r y φ y haciendo

$$\frac{dS}{dr} = 0, \quad \frac{dS}{d\varphi} = 0.$$

En los triángulos A P B y A P C tenemos

$$s = \left(r^2 + c^2 - 2\, r\, c \cos \varphi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$t = \left(r^2 + b^2 - 2\, r\, b \cos (\varepsilon - \varphi)\right)^{\frac{1}{2}}$$

y substituyendo en la (45)

$$S = k' r + k'' \left(r^2 + c^2 - 2\, r\, c \cos \varphi\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ k''' \left(r^2 + b^2 - 2\, r\, b \cos (\varepsilon - \varphi)\right)^{\frac{1}{2}}$$

cuya derivada respecto a r igualada a cero, será:

$$\frac{dS}{dr} = k' + k'' \frac{r - c \cos \varphi}{s} + k''' \frac{r - b \cos (\varepsilon - \varphi)}{t} = 0. \quad (46)$$

Prolonguemos AP y bajemos desde B y C las perpendiculares B E y C D.

En el triángulo A E B:

$$r + PE = c \cos \varphi$$

$$\therefore PE = c \cos \varphi - r,$$

pero en el triángulo P E B

$$PE = s \cos (180^0 - \gamma_1) = - s \cos \gamma_1$$

(*) Las coordenadas polares de un punto (P) del plano son: su distancia (r = *radio vector*) a un punto fijo (O = *polo*) y el ángulo (φ = *argumento*) que el radio vector forma con una recta fija (OX = *eje polar*) que pasa por el polo. Las relaciones que permiten pasar de un sistema cartesiano de ejes ortogonales a un sistema polar son:

$$x = r \cos \varphi; \; y = r \operatorname{sen} \varphi.$$

luego

$$r - c \cos \varphi = s \cos \gamma_1.$$

Análogamente en los triángulos A C D y C P D, tenemos

$$r + PD = b \cos (\varepsilon - \varphi)$$

$$\therefore PD = b \cos (\varepsilon - \varphi) - r.$$

y también

$$PD = t \cos (180 - \beta_1) = - t \cos \beta_1$$

luego

$$r - b \cos (\varepsilon - \varphi) = t \cos \beta_1$$

Substituyendo valores en la (46) tendremos la expresión

$$\frac{d\,S}{d\,r} = k' + k'' \cos \gamma_1 + k''' \cos \beta_1 = 0 \quad (47)$$

$$\therefore k' = k'' \cos \gamma + k''' \cos \beta \quad (48)$$

siendo $\gamma = 180^0 - \gamma_1$ y $\beta = 180^0 - \beta_1$.

La derivada de S respecto a φ, igualada a cero, será (*)

$$k'' \frac{r\,c \operatorname{sen} \varphi}{s} - k''' \frac{r\,b \operatorname{sen} (\varepsilon - \varphi)}{t} = 0;$$

dividiendo por r y notando en los triángulos A E B y P E B; A D C y P D C, que

$$BE = s \operatorname{sen} \gamma_1 = c \operatorname{sen} \varphi$$

$$CD = t \operatorname{sen} \beta_1 = b \operatorname{sen} (\varepsilon - \varphi)$$

tendremos

$$k'' \operatorname{sen} \gamma_1 = k''' \operatorname{sen} \beta_1$$

$$\therefore \frac{k''}{k'''} = \frac{\operatorname{sen} \beta_1}{\operatorname{sen} \gamma_1} \quad (49)$$

Las (48) y (49) que expresan las condiciones a que debe satisfacer el punto de convergencia P para que la suma S de los gastos anuales de explotación en los tres caminos que a él concurren sea mínima, son también relaciones conocidas entre los lados y los ángulos de un triángulo, cuyos lados son en este caso los gastos unitarios (k', k'', k''') y sus ángulos los

(*) Haremos notar que

$$\frac{d \cos (\varepsilon - \varphi)}{d\,\varphi} = \frac{d}{d\,\varphi} (\cos \varepsilon \cos \varphi + \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} \varphi)$$
$$= - \cos \varepsilon \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} \varepsilon \cos \varphi$$
$$= \operatorname{sen} (\varepsilon - \varphi)$$

lo que explica el signo (—) del segundo término.

suplementos de los ángulos adyacentes que forman en P los tres caminos A P, B P y C P.

Si construímos (fig. 15), en una escala cualquiera, un triángulo cuyos lados a_1, b_1, c_1, sean proporcionales respectivamente a *k'*, *k''*, *k'''*, —siendo sus ángulos externos α_1, β_1, γ_1 — y dispuestos de modo que resulten opuestos a la posición relativa de los mercados A, B, C, pudiendo además ser recorridos sucesivamente en la *dirección del tráfico que sale* de cada mercado hacia los otros dos, o sea hacia el punto de convergencia P, tal

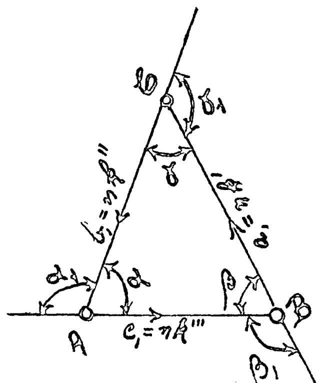

Fig. 15

triángulo será también representativo de un sistema de tres fuerzas en equilibrio aplicadas en el punto P, cuyas magnitudes fueran los gastos kilométricos de explotación en cada camino y su dirección la establecida anteriormente para el tráfico.

Dicho triángulo se denomina el *triángulo de gastos unitarios.*

Lo dicho ofrece, desde luego, una solución mecánica para fijar la posición de P respecto de A, B, C: si se perfora el punto que corresponde a cada uno de estos en un plano fijado en una mesa, pasando por los agujeros hilos apoyados en pequeñas roldanas y se anuda una de las extremidades de cada hilo a un anillo, colgando en la otra pesos proporcionales a los gastos kilométricos de explotación de cada camino, la posición de equilibrio que tome el anillo indicará la posición que corresponde a P en el plano.

La solución geométrica del problema supone el conocimiento previo de lo que se entiende por *polo* de dos mercados:

Llamaremos *polo económico* de un sistema de dos o más mercados a un punto fijo que substituye a estos para determinar la dirección, o sea el trazado de los caminos, que más conviene para el intercambio del tráfico.

Sean, en una escala dada (fig. 16), los tres mercados A, B, C; sobre uno de los lados (A B) del triángulo que forman, construyamos el *triángulo de gastos unitarios,* de lados a_1, b_1, c_1, opuestos a A, B, C; prolonguemos B C' y por A tracemos la paralela a A' C': al punto O de intersección de las dos rectas lo llamamos el *polo* de A y B.

A su respecto observaremos que:

a) su posición depende solo del valor relativo (a_1, b_1, c_1) de los gastos unitarios de explotación de los caminos convergentes, de modo que *la posición de O es independiente de la de C.*

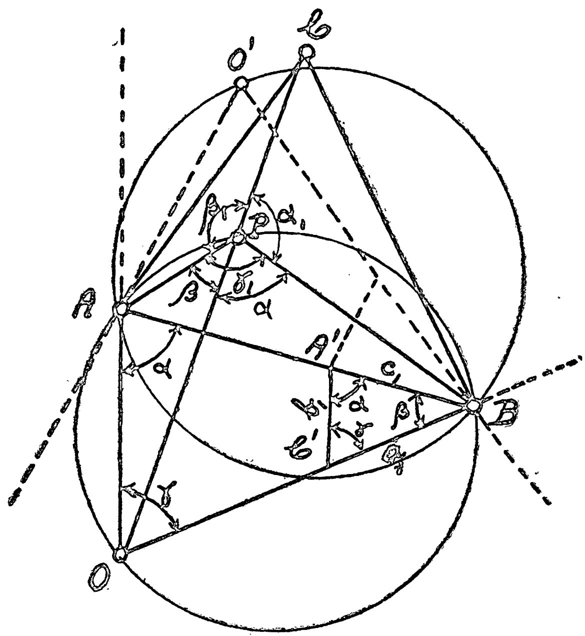

FIG. 16

b) si en el triángulo A O B, semejante al A' B C' elegimos la escala de modo que A B = c_1, será OB = a_1 y O A = b_1 es decir, que *el polo de los mercados A y B es el vértice del triángulo de gastos unitarios opuesto a la recta que los une, construído en la escala que ésta determina.*

La determinación del polo de A B permite construir geométricamente el punto de convergencia de los caminos que unen los mercados, pues si trazamos la circunferencia que pasa por los tres puntos A, B, O y unimos el polo O de A B con C, el punto P de intersección de O C con la circunferencia será el *punto de convergencia* de los caminos. En efecto, los ángulos α_1, β_1, γ_1, adyacentes en P, son iguales a los ángulos externos del triángulo de gastos unitarios A' B C' dado que, por las construcciones hechas

$$\gamma_1 = 180^0 - \gamma,$$
$$\beta_1 = 180^0 - \beta,$$
$$\alpha_1 = 180^0 - \alpha.$$

El polo O de A B que fija la posición de P y determina el trazado económico de los caminos A P, B P y C P, substituye a A y B en el intercambio con C, supuesto concentrado en O el tráfico de A y B. En efecto, los gastos totales de explotación de los caminos son

$$S = a_1 \times AP + b_1 \times BP + c_1 \times CP,$$

que, en la escala del triángulo A B O, equivale a

$$S = \underbrace{OB \times AP + OA \times BP}_{AB \times OP.} + AB \times CP$$

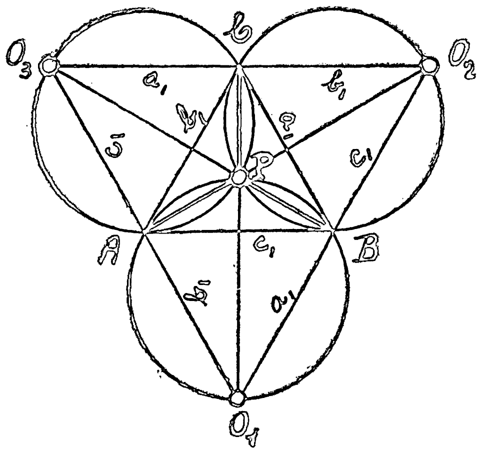

Fig. 17

y como los dos primeros términos son la suma de los productos de los lados opuestos de un cuadrilátero inscripto en un círculo, igual al producto de las diagonales, será

$$S = AB \times OP + AB \times CP$$
$$= AB\,(OP + CP)$$
$$= c_1 \times CO.$$

Esto significa que el tráfico entre O y C equivale en dirección y costo al que se efectúa sobre los caminos convergentes entre A, B y C, lo que nos permite decir que:

El intercambio entre tres mercados se verifica como si el tráfico de cada uno de ellos se dirigiera al polo de los otros dos.

Lo dicho permite construir el punto de convergencia P por la intersección de dos de las rectas $O_1 C$, $O_2 A$, $O_3 B$ (fig. 17) determinadas por los polos O_1, O_2, O_3, en los triángulos de gastos unitarios construídos p. ej. en la escala del triángulo A B C, que en la figura supone además la identidad del tráfico y de los costos o sea el caso considerado anteriormente (fig. 13) en que:

$$AB = BC = CA = 1; A = B = C = Q;$$

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_0; \text{ y } A_1 = A_2 = A_3 = A.$$

Por las demostraciones hechas se ve que cualquiera que sea la posición de un mercado respecto de los otros dos, p. ej.: C respecto de A B (fig. 16), su tráfico se dirigirá al polo de A, B, pasando por el punto de convergencia P, y por lo tanto *habrá un punto de convergencia solo y cuando C, perteneciendo a la mitad superior del plano de A B se encuentre dentro del ángulo A O B y sea externo al círculo que pasa por estos puntos.*

Cuando C corresponda a la mitad inferior del plano de A B, el polo (O') tendrá la posición simétrica de O respecto de A B. Para los puntos (C) del plano que no satisfagan a las condiciones anteriores, no habrá punto de convergencia y el intercambio entre dos de los mercados se hará pasando por el tercero.

C. M. RAMALLO.

(*Continuará*)