AÑO XIII, SERIE II

REVISTA

DE

CIENCIAS ECONÓMICAS

PUBLICACIÓN DE LA FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
CENTRO DE ESTUDIANTES Y COLEGIO
DE GRADUADOS

DIRECCIÓN Y ADMINISTRACIÓN
CALLE CHARCAS, 1835
BUENOS AIRES

La Dirección no se responsabiliza de las afirmaciones, los juicios y las doctrinas que aparezcan en esta Revista, en trabajos subscritos por sus redactores o colaboradores.

Imprenta de la Universidad

Apuntes sobre el cálculo de las probabilidades (1)

I

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

1. Una urna contiene 15 bolillas, de las que 5 son azules, 7 blancas y 3 rojas. Si se extrae una bolilla al azar, ¿cuál será su color?

Para poder dar una respuesta exacta sería necesario conocer a ciencia cierta la colocación de las bolillas en la urna y las variaciones que van a producirse dentro de ella al removerlas.

No poseyendo ninguno de estos datos, nada podemos afirmar al respecto, y sólo decimos que la salida de una bolilla determinada depende del « azar ».

Como se ve, el « azar » no es, en este caso, más que una palabra elegida para encubrir nuestra ignorancia. Y lo mismo acontece siempre, cualquiera que sea el fenómeno de que se trate (2). En la naturaleza no existe el « azar », y, si para nosotros existe, es únicamente porque lo limitado de nuestra inteligencia nos impide, en una infinidad de ocasiones, penetrar las causas y las leyes que rigen la producción de los acontecimientos.

Desconociendo las causas que han de influir para que se produzca

(1) Estos *Apuntes* fueron redactados, primeramente, por un grupo de alumnos de segundo año de la Facultad de ciencias económicas. Corregidos, más tarde, por otro núcleo de estudiantes y, finalmente, leídos por mí. No constituyen, pues, un curso orgánico de la materia. Les faltan, para ello, muchos requisitos. Pero entiendo que, tal como están, pueden prestar útiles servicios a los estudiantes, y por ello los doy a publicidad hasta tanto llega el momento en que pueda presentarlos en forma más adecuada.

(2) Como es lógico, nos referimos exclusivamente a los fenómenos físicos, sin entrar a considerar los de orden moral.

un suceso más bien que otro cualquiera, nos vemos obligados a avaluar qué circunstancias por nosotros conocidas pueden influir en su producción.

En el ejemplo propuesto, nuestra ignorancia acerca de la colocación de las bolillas en la urna y de las variaciones que, al moverlas, se producirán, nos impulsa a considerar como igualmente posible la salida de una cualquiera de las 15 bolillas que hay dentro.

Por eso decimos que hay *quince casos posibles*. De las 15 bolillas, 5 son azules; luego, para que salga una azul tiene necesariamente que salir una de esas cinco; es decir, que hay *cinco casos favorables* a la salida de una bolilla azul. Los casos favorables están en la relación de 5 a 15 con respecto a los posibles. Esta relación es lo que se llama PROBABILIDAD.

Probabilidad de un suceso es, pues, la relación del número de casos favorables al número total de casos posibles, *cuando todos los casos son igualmente posibles.*

En el ejemplo considerado, la probabilidad de que sea azul la bolilla extraída es $\frac{5}{15}$; la de que sea blanca $\frac{7}{15}$; y la de que sea roja $\frac{3}{15}$.

2. La definición que acabamos de dar contiene una condición que es preciso tener siempre en vista. Decimos *cuando todos los casos son igualmente posibles; es decir,* que en el ejemplo propuesto, *admitimos* que el color de las bolillas contenidas en la urna *no influye* en la probabilidad de su salida. La definición, así, se presta a la crítica, puesto que se vale implícitamente del concepto mismo que pretende definir, pero es indispensable fijar desde luego tal limitación, pues su olvido podría hacernos caer en errores groseros, según veremos más adelante al examinar algunos problemas.

3. Ocurre a veces que no conocemos con exactitud el número total de casos posibles ni el de casos favorables. Sólo sabemos que después de hacer n pruebas en igualdad de condiciones, el acontecimiento A que nos interesa, se ha presentado m veces.

No podemos afirmar que la fracción $\frac{m}{n}$ sea realmente la probabilidad de A. Pero si el número de pruebas n, es suficientemente grande, la experiencia nos permite afirmar que la fracción $\frac{m}{n}$ ha de diferir poco de la probabilidad de A. La fracción $\frac{m}{n}$ obtenida de un modo experimental, es lo que se llama *la frecuencia.*

4. Supongamos que tenemos un dado común, de seis caras; ¿cuál es la probabilidad de que al arrojarlo se presente al punto 6? Evidentemente $\frac{1}{6}$ puesto que son 6 las caras — casos posibles — y sólo una de ellas es el seis — caso favorable.

Pero después de lanzarlo un gran número de veces, digamos 6000, encontramos que el 6 sólo se ha presentado 400 veces. La frecuencia es $\frac{400}{6000} = \frac{1}{15}$. ¿Qué consecuencia sacamos del hecho? Que el dado ofrece, evidentemente, un defecto de fabricación que dificulta la presencia del 6, o en otros términos, que los *seis* casos no son igualmente posibles.

Se ve, pues, por esto, que la observación de la *frecuencia* permite investigar si los instrumentos materiales (dados, bolilleros, naipes, etc.) son normales o defectuosos.

A este respecto cabe recordar la anécdota que cita Bertrand en el prólogo de su bello libro sobre probabilidades.

Un día, en Nápoles, un hombre de la Basilicata, en presencia del abate Galiani, agitó tres dados en un cubilete y apostó a que sacaba *3 seis*. Y lo hizo. El caso es posible, se dijo. Repitió la experiencia otra vez con el mismo resultado, y nadie observó nada. Pero cuando una tercera, una cuarta, una quinta experiencia produjeron el mismo resultado de sacar los 3 seis, el abate no pudo más y exclamó : « *Sangue di Bacco.* Esos dados están cargados. » Y lo estaban. ¿No era posible el hecho? Sí, teóricamente lo era, pero su *probabilidad* era tan pequeña, que *prácticamente* era imposible.

5. Lo que acabamos de exponer nos permite formular la que, con Castelnuovo, llamaremos ley empírica del azar, y cuyo enunciado es el que sigue :

« En una serie de pruebas, repetidas un gran número de veces en igualdad de condiciones, cada uno de los acontecimientos posibles se manifiesta con una *frecuencia relativa,* que es, sobre poco más o menos, igual a su probabilidad. La aproximación *crece, ordinariamente,* a medida que crece el número de pruebas. »

Es preciso insistir en que esta ley empírica del azar ofrece un carácter particular que hace que no se la pueda parangonar con los postulados geométricos. En estos últimos, la certidumbre que implican es absoluta, dentro de la relatividad de los conocimientos humanos. Dos líneas paralelas, dentro de la geometría euclídea, deben *forzosamente* no encontrarse jamás.

Si lanzamos un dado al aire 60.000; 600.000; 600.000.000 de veces, cada punto se presentará un número de veces que diferirá muy poco relativamente, de 10.000; 100.000; 100.000.000 de veces. La probabilidad de que en este último caso, un punto dado, el cinco, por ejemplo, salga sólo un millón de veces en lugar de cien millones, es de una pequeñez que hace que podamos considerar el caso como *prácticamente imposible*. Sin embargo, no hay ninguna *imposibilidad material* para que tal cosa ocurra.

Más adelante, al estudiar el teorema de Santiago Bernoulli, tendremos ocasión de volver sobre este punto. Ahora, sólo hemos querido fijar ciertos conceptos, desvanecer ciertos prejuicios y evitar errores de interpretación muy comunes.

6. La probabilidad está siempre expresada por una fracción propia. No se concibe, en efecto, que pueda haber más casos favorables que posibles, y si el número de unos y otros fuera igual, la relación que expresa la probabilidad sería igual a *uno;* pero entonces no habría ya probabilidad, sino *certeza*. De una urna que no contiene sino 20 bolillas blancas, tan sólo una bolilla blanca puede salir.

Uno es, pues, el símbolo de la certeza. Por otra parte, si no hay ningún caso favorable a la producción del acontecimiento, es evidente que éste no se puede producir. Si en una urna donde hay 20 bolillas de distintos colores, ninguna de ellas es blanca, la probabilidad de sacar una bolilla blanca es a todas luces $\frac{0}{20} = 0$.

Cero es, pues, el símbolo de la imposibilidad, que en cierto modo, es también una certeza.

7. Probabilidad contraria es la de que no se produzca un acontecimiento dado.

Esta probabilidad será, evidentemente, igual a la relación que existe entre el número de casos desfavorables a la producción del acontecimiento y el número total de casos posibles.

Siendo f el número de casos favorables para que un suceso acontezca y d el número de casos desfavorables, es evidente que el número total de casos posibles será $f + d$.

La probabilidad de que el suceso ocurra será $\frac{f}{f+d}$, que representamos por p.

Y la contraria $\frac{d}{f+d}$ que simbolizamos por q.

Como el acontecimiento se produce o no, es indudable que la suma de ambas probabilidades ha de ser igual a uno, y así es, en efecto :

$$p + q = 1 \quad \therefore \quad p = 1 - q \quad \therefore \quad q = 1 - p.$$

Luego, restando de uno la probabilidad de que el acontecimiento se produzca, tendremos la probabilidad contraria.

8. La probabilidad de que acabamos de ocuparnos es la probabilidad simple, llamada así porque depende de una sola eventualidad. Pero puede ocurrir que la producción de un suceso dependa de varias eventualidades. Dos casos pueden, entonces, presentarse : que dichas eventualidades se excluyan o que se complementen.

En el primer caso la probabilidad es total; en el segundo, compuesta.

9. *La probabilidad total es igual a la suma de las probabilidades simples que la componen.* Una urna contiene a bolillas azules, b blancas y e encarnadas. ¿Cuál es la probabilidad de que salga una bolilla azul o blanca?

Llamemos $p_{(a)}$, $p_{(b)}$, $p_{(e)}$ a las probabilidades respectivas que corresponden a la salida de una bolilla azul, una blanca o una encarnada. Como si sale una azul no puede salir una blanca, es decir, como se excluyen ambas eventualidades, la probabilidad es total. Y decimos que es igual a la suma de las probabilidades simples de dichas eventualidades.

$$\mathrm{P} = p_{(a)} + p_{(b)}.$$

En efecto, el número total de casos posibles es igual al número de bolillas que la urna contiene, es decir, $a + b + e$, y el número de casos favorables es igual a la suma de las bolillas azules y blancas que hay en la urna: $a + b$.

Luego la probabilidad es :

$$\mathrm{P} = \frac{a+b}{a+b+e} = \frac{a}{a+b+e} + \frac{b}{a+b+c} = p_{(a)} + p_{(b)}.$$

10. *La probabilidad compuesta es igual al producto de las probabilidades simples que la forman.*

Dos urnas contienen : la primera a bolillas azules y b blancas, la segunda a' bolillas azules y b' blancas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos bolillas azules, sacando una de cada urna?

La probabilidad de sacar una bolilla azul de la primera urna es $\frac{a}{a+b} = p$; y la probabilidad de sacar otra, también azul, de la segunda es $\frac{a'}{a'+b'} = p'$.

Como para que el suceso se produzca es preciso que salgan las dos bolillas azules, es decir, como ambas eventualidades se complementan, la probabilidad es *compuesta*. Y decimos que es igual al producto de las probabilidades simples de dichas eventualidades. Llamando P a esta probabilidad, hemos de tener :

$$P = p \cdot p'.$$

En efecto; cada una de las $a + b$ bolillas de la primera urna puede combinarse, al salir, con cada una de las $a' + b'$ de la otra. El número de combinaciones que pueden formarse entre las bolillas de ambas urnas es :

$$(a + b)\ (a' + b').$$

Este es, pues, el número total de casos posibles. De igual modo, cada una de las a bolillas azules de la primera urna puede, al salir, combinarse con cada una de las a' de la segunda. El número total de casos favorables es, por consiguiente : aa'. La probabilidad es, entonces :

$$P = \frac{aa'}{(a + b)\ (a' + b')} = \frac{a}{a + b} \cdot \frac{a'}{a' + b'} = p \cdot p'.$$

11. Observaciones : I. Puede ocurrir que el primer acontecimiento sea tal que su producción influya en la del segundo. Sea, por ejemplo, una urna que contiene a bolillas azules y b blancas, y que se quiera averiguar cuál es la probabilidad de extraer dos bolillas blancas seguidas sin reponer la bolilla sacada.

La probabilidad buscada es :

$$\frac{b}{a + b} \cdot \frac{b - 1}{a + b - 1}$$

puesto que una vez que salió en la primera extracción una bolilla blanca, sólo quedan en la urna $a + b - 1$ bolillas y de ellas hay $b - 1$ blancas. Luego, la probabilidad de sacar una bolilla blanca (habiendo salido la primera) es $\frac{b - 1}{+ b - 1}$ y la de que *concurran* ambos acontecimientos.

$$\frac{b}{a + b} \cdot \frac{b - 1}{a + b - 1}.$$

Otro ejemplo : Una urna contiene noventa bolillas numeradas de 1 a 90; ¿cuál es la probabilidad de que la primera bolilla extraída sea, a la vez, un número múltiplo de 15 y de 18?

Cada 15 números consecutivos hay uno múltiplo de 15; cada 18 hay uno múltiplo de 18. Luego en una serie de números consecutivos, la probabilidad de que salga un número múltiplo de 15 es $\frac{1}{15}$ y la de que salga un múltiplo de 18 es $\frac{1}{18}$.

¿Será $\frac{1}{15}\times\frac{1}{18}$ la probabilidad de que el número extraído sea, a la vez, múltiplo de 15 y de 18? No, porque el primer acontecimiento influye sobre el segundo. Ser múltiplo de 15 es serlo de 3, y 3 es divisor de 18. Entonces, bastará que el cociente de dividir el número por 15 sea divisible por 6 para que el número lo sea por 18.

Luego la probabilidad buscada es :

$$\frac{1}{15}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{90}.$$

Efectivamente, cada noventa números consecutivos hay uno divisible a la vez por 15 y 18, es decir, por 90.

II. Demostrado este teorema para un acontecimiento que depende de otros dos, fácil es extenderlo a tres, cuatro, etc. Luego es general.

12. *La probabilidad « relativa » de que un suceso se verifique más bien que otro, es igual al resultado de dividir la probabilidad del acontecimiento que se espera más bien que otro por la suma de las probabilidades de los acontecimientos que se toman en cuenta.*

Si de un bolillero que contiene bolillas de colores distintos : blancas, rojas, negras, violetas, azules, se extrae una al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca *más bien* que roja o negra?

Según el enunciado, llamando P a la probabilidad buscada, debemos tener :

$$P=\frac{p_{(b)}}{p_{(n)}+p_{(r)}+p_{(b)}}.$$

En efecto, podemos prescindir de las bolillas azules y violetas, puesto que aunque salga una de ellas no influye en el acontecimiento que nos interesa. Dejando, pues, esas de lado, el número de casos posibles es de $n+b+r$. El de casos favorables es b; la probabilidad de que salga una bolilla blanca *más bien* que negra o roja es :

$$P=\frac{b}{n+b+r}\quad\therefore$$

multiplicando numerador y denominador por $\frac{1}{s}$ (donde s es el número total de bolillas que hay en la urna) :

$$\mathrm{P} = \frac{\frac{b}{s}}{\frac{n}{s} + \frac{b}{s} + \frac{r}{s}} = \frac{p_{(b)}}{p_{(n)} + p_{(b)} + p_{(r)}}.$$

13. Consideremos ahora el caso de que tuviéramos dos urnas conteniendo cada una bolillas de distintos colores. Sea p la probabilidad de que salga una bolilla blanca de la primera y p' la de que salga de la segunda.

Serán, por definición : $q = 1 - p$, la probabilidad de que la bolilla que salga de la primera urna no sea blanca, y $q' = 1 - p'$ la probabilidad de que tampoco lo sea la que se saque de la segunda.

Por el teorema de la probabilidad compuesta, tendremos, que extrayendo una bolilla de cada una, serán :

pp' la probabilidad de que las dos bolillas sean blancas.

$qq' = (1 - p)\ (1 - p')$ la de que ninguna de las dos bolillas sea blanca.

$pq' = p\ (1 - p')$ la probabilidad de que únicamente sea blanca la bolilla extraída de la primera urna.

$qp' = (1 - p)\ p'$ la de que tan sólo sea blanca la bolilla que salga de la segunda urna.

Como no hay más eventualidades posibles que las correspondientes a las cuatro probabilidades analizadas, su suma ha de ser igual a *uno*. Y en efecto :

$$pp' + (1 - p)(1 - p') + p(1 - p') + (1 - p)p' =$$
$$= pp' + 1 - p - p' + pp' + p - pp' + p' - pp' = 1$$

Si ahora queremos averiguar cuál es la probabilidad de que salga *por lo menos* una bolilla blanca sin ponernos a investigar de qué urna sale, es evidente que el hecho se producirá tanto si la bolilla blanca sale de la primera como si sale de la segunda o como si sale de las dos. Todas estas eventualidades se excluyen; luego la probabilidad buscada es :

$$p(1 - p') + p'(1 - p) + pp' = p - pp' + p' - pp' + pp' = p + p' - pp'.$$

Podríamos haber razonado de este modo también : la probabilidad de que salga *por lo menos* una bolilla blanca es la *contraria* de que no salga ninguna. La de que no salga ninguna es :

$$qq' = (1 - p)(1 - p').$$

La probabilidad buscada es, pues :

$$1 - qq' = 1 - (1 - p)(1 - p') = 1 - [1 - p - p' + pp'] =$$
$$= 1 - 1 + p + p' - pp' = p + p' - pp'$$

que es el resultado que hallamos antes por otro procedimiento.

14. Si ahora queremos calcular la probabilidad de que *por lo menos una vez no se* produzca la salida de la bolilla blanca, es evidente que será la *contraria* de que acontezca dos veces, o sea :

$$1 - pp' = 1 - (1 - q)(1 - q')$$

desde que : $p = 1 - q$ y $p' = 1 - q'$ efectuando los cálculos tendremos :

$$1 - pp' = 1 - (1 - q)(1 - q') = 1 - 1 + q + q' - qq' =$$
$$= q + q' - qq'.$$

Al mismo resultado se llega, evidentemente, sumando las probabilidades de las tres eventualidades que corresponden a la salida de una bolilla *no blanca por lo menos una vez* :

$$pq' + p'q + qq' = (1 - q)q' + (1 - q')q + qq' =$$
$$= q' - qq' + q - qq' + qq' = q + q' - qq'.$$

15. Vamos a considerar, ahora, tres acontecimientos en lugar de dos. Supongamos tres urnas conteniendo cada una bolillas blancas mezcladas con otras de distintos colores. Sea p la probabilidad de que salga una bolilla blanca de la primera urna y q su contraria. Para la segunda urna sean p' la favorable y q' la contraria. Y para la tercera p'' y q'' respectivamente.

Vamos a determinar los casos que en tales circunstancias pueden presentarse. Son ocho, a saber :

1° Que salga una bolilla blanca de cada urna. En tal caso las probabilidades simples serán p, p' y p'', y la probabilidad compuesta el producto de ellas, o sea $pp'p''$;

2° Que sólo de las dos primeras urnas salgan bolillas blancas. En tal caso la probabilidad será : $pp'q''$;

3° Que salga sólo de la 1ª y 3ª urnas; luego la probabilidad es : $pq'p''$;

4° Que sólo se presenten en las dos últimas urnas : $qp'p''$;

5° Que salga bolilla blanca de la primera urna y no de las otras dos : $pq'q''$;

6° Que salga tan sólo de la segunda; tendremos : $qp'q''$;

7° Que salga sólo de la tercera : $qq'p''$;

8° Y, finalmente, que no se presente en ninguna de las tres urnas. La probabilidad es, entonces : $qq'q''$.

Representando estas distintas probabilidades por P_1, P_2, P_3, etc., y substituyendo q, q' y q'' por sus valores en función de p, p' y p'', que son $(1 - p)$, $(1 - p')$ y $(1 - p')$, obtendremos los siguientes resultados :

$$
\begin{aligned}
P_1 &= pp'p'' \\
P_2 &= pp'q'' = pp'(1-p'') = pp' - pp'p'' \\
P_3 &= pq'p'' = pp''(1-p') = pp'' - pp'p'' \\
P_4 &= qp'p'' = p'p''(1-p) = p'p'' - pp'p'' \\
P_5 &= pq'q'' = p(1-p')(1-p'') = p - pp' - pp'' + pp'p'' \\
P_6 &= qp'q'' = p'(1-p)(1-p'') = p' - pp' - p'p'' + pp'p'' \\
P_7 &= qq'p'' = p''(1-p)(1-p') = p'' - pp'' - p'p'' + pp'p'' \\
P_8 &= qq'q'' = (1-p)(1-p')(1-p'') = 1 - p - p' + pp' - p'' + \\
&\qquad + pp'' + p'p'' - pp'p''.
\end{aligned}
$$

Siendo estos los ocho casos posibles, la suma de todas las probabilidades calculadas debe darnos 1 o sea la certeza.

Fácil es, ahora, calcular probabilidades totales particulares. Así, por ejemplo, si se quiere saber cuál es la probabilidad de que en las tres extracciones salga al menos una bolilla blanca, sabiendo que en los ocho casos sale por lo menos una bolilla blanca, salvo en el último, la probabilidad pedida será igual a la suma de las siete primeras. Pero todas suman 1; luego dichas siete sumarán uno menos la última, esto es :

$$1 - qq'q''.$$

Si se quiere saber cuál es la probabilidad de que en las tres extracciones no salga siempre una bolilla blanca, basta excluir solamente P_1 y tendremos :

$$1 - pp'p''.$$

Ahora, si se quiere saber cuál es la probabilidad de que en las tres extracciones salga *solamente* una bolilla blanca, no importa de qué urna, la probabilidad deseada será :

$$P_5 + P_6 + P_7 = pq'q'' + qp'q'' + qq'p''.$$

La probabilidad de que en las condiciones anteriores salgan dos bolillas blancas será :

$$P_2 + P_3 + P_4 = pp'q'' + pq'p'' + qp'p''.$$

La probabilidad de que salgan tres blancas será :

$$pp'p''.$$

Y, finalmente, la de que no salga ninguna bolilla blanca :

$$qq'q''.$$

II

ALGUNOS PROBLEMAS

17. I. ¿Cuál es la probabilidad de que en dos cartas extraídas de una baraja que consta de cuarenta, la primera sea un *as* y la segunda un *dos?*

Se trata — como se ve — de calcular una probabilidad compuesta, perteneciente a la categoría en que el primer acontecimiento influye sobre el segundo. Siendo cuarenta las cartas y cuatro los *ases,* la probabilidad de sacar uno de ellos a la primera extracción será :

$$\frac{4}{40}=\frac{1}{10}.$$

Quedando ahora 39 cartas y siendo cuatro los *doses,* la probabilidad de sacar un *dos* en la segunda extracción será de :

$$\frac{4}{39}$$

y como la probabilidad compuesta es igual al producto de las probabilidades simples, la que buscamos es :

$$\frac{1}{10}\times\frac{4}{39}=\frac{2}{195}.$$

II. Supongamos ahora el mismo enunciado del problema anterior, pero con la salvedad de que no nos interesa el orden de extracción : lo mismo nos da que salga primero el *as* como que sea el *dos,* con tal de que ambas sean las cartas extraídas. Las condiciones del problema varían entonces. En la primera extracción, por sernos indiferente que salga un *uno* o un *dos,* tenemos ocho casos favorables sobre cuarenta posibles; luego la probabilidad simple es :

$$\frac{8}{40}=\frac{1}{5}.$$

Han quedado 39 cartas, que son los casos posibles, y 4 los favorables, pues si salió un *as* en la primera extracción debemos sacar un *dos* en la segunda, y si salió un *dos* en la primera, habremos de sacar un *as* en la segunda. Luego esta segunda probabilidad simple será igual a $\frac{4}{39}$ y la compuesta que deseamos encontrar :

$$\frac{1}{5} \times \frac{4}{39} = \frac{4}{195}.$$

Comparando los resultados, vemos que el segundo es doble que el primero. Esto se debe a la indiferencia mencionada con respecto a la primera extracción, lo cual duplica necesariamente la probabilidad del acontecimiento.

III. Se tienen dos dados y se echan dos veces; ¿cuál es la probabilidad de que los puntos sacados sumen 6 la primera vez y 5 la segunda?

Se trata de una probabilidad compuesta en que el primer acontecimiento no influye sobre el segundo.

Cada cara del primer dado puede combinarse, al salir, con cualquiera de las del otro. Luego los casos posibles son $6 \times 6 = 36$. Veamos cuantos son los favorables. En el primer tiro los dados deben sumar *seis*, y esto se obtiene en las siguientes condiciones :

Primer dado	Segundo dado
5	1
4	2
3	3
2	4
1	5

Es decir, en cinco casos. La primera probabilidad simple es, pues, $\frac{5}{36}$.

En el segundo tiro deben los dados sumar 5, y esta suma se obtiene en las condiciones siguientes :

Primer dado	Segundo dado
1	4
2	3
3	2
4	1

Es decir, en cuatro casos; probabilidad $\frac{4}{36}$.

Luego la probabilidad buscada es :

$$\frac{5}{36} \times \frac{4}{36} = \frac{20}{1296} = \frac{5}{324}.$$

IV. Supongamos ahora el enunciado anterior con la variante de que nos es indiferente que la primera suma sea 5 ó 6, con tal de que 5 y 6 sean las sumas obtenidas.

De acuerdo con lo dicho en el problema II, la probabilidad en este caso será doble que en el anterior, es decir, igual a :

$$\frac{10}{324}.$$

V. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 3 bolillas azules seguidas, de una urna que contiene 5 azules, 9 rojas y 2 blancas, sin reponer la bolilla extraída?

Se trata de una probabilidad compuesta en la que cada acontecimiento influye en el siguiente. Siendo 16 el total de las bolillas y 5 las azules, la probabilidad de sacar una primera bolilla azul será $\frac{5}{16}$.

Quedan ahora 15 bolillas y de ellas 4 azules; luego la probabilidad de sacar la segunda bolilla azul es $\frac{4}{15}$. Análogamente, la probabilidad de sacar la tercera bolilla azul es $\frac{3}{14}$, y la probabilidad de sacar las tres :

$$\frac{5}{16} \times \frac{4}{15} \times \frac{3}{14} = \frac{1}{56}.$$

VI. Se tienen dos urnas; la primera contiene 5 bolillas blancas y 3 rojas; la segunda 7 blancas y 4 rojas. ¿Cuál es la probabilidad de que sacando una bolilla de cada urna, sean rojas las dos?

En la primera urna el total de bolillas es 8, las rojas 3; luego la probabilidad correspondiente será $\frac{3}{8}$.

En la segunda hay 11 bolillas, de las que 4 son rojas; la probabilidad es $\frac{4}{11}$.

Y como ambos casos se complementan, la probabilidad buscada es :

$$\frac{3}{8} \times \frac{4}{11} = \frac{3}{22}$$

VII. Si teniendo las dos mismas urnas del anterior ejemplo se vierte el contenido de una en la otra, ¿cuál será la probabilidad de sacar dos bolillas rojas consecutivas?

El total de bolillas es 19; las rojas son 7; luego la probabilidad de sacar la primera bolilla es $\frac{7}{19}$.

Sacada ésta, quedan 18 bolillas y entre ellas 6 rojas, de donde la probabilidad de sacar la segunda, habiendo salido la primera, es $\frac{6}{18}$, y la probabilidad que nos interesa :

$$\frac{7}{19}\times\frac{6}{18}=\frac{7}{57}.$$

VIII. Se tienen cinco urnas idénticas; dos de ellas contienen respectivamente 3 bolillas rojas y 5 blancas, y las otras tres contienen cada una 4 rojas y 3 blancas. ¿Cuál es la probabilidad de que elegida una urna cualquiera salga una bolilla roja?

Separemos las urnas en dos grupos; el primero constituído por las dos primeras y el otro por las otras tres. Ahora la probabilidad de que la urna elegida pertenezca al primer grupo es $\frac{2}{5}$; en esas urnas la probabilidad de que salga una bolilla roja es $\frac{3}{8}$. Y la probabilidad de elegir una de esas dos urnas y sacar una bolilla roja :

$$\frac{2}{5}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{20}.$$

Análogamente, la probabilidad de que la urna elegida sea del 2º grupo es $\frac{3}{5}$ y la de que elegida la urna salga una bolilla roja es $\frac{4}{7}$. Luego la probabilidad de que se elija una urna de este grupo y salga una bolilla roja es :

$$\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{12}{35}.$$

Pero a nosotros lo mismo nos da que la bolilla roja pertenezca al primero o al segundo grupo de urnas, y como si sale del uno no puede salir del otro, la probabilidad buscada es :

$$\frac{3}{20}+\frac{12}{35}=\frac{69}{140}.$$

Siendo 4 las urnas y habiendo 3 de ellas que por la composición de sus bolillas satisfacen nuestro deseo, en la primera bolilla que de ellas se extraiga, pues contienen bolillas de un solo color, el acontecimiento no depende más que de la urna que elijamos. La probabilidad deseada es igual a $\frac{3}{4}$.

X. ¿Cuál es la probabilidad de que sobre 17 personas que van a sentarse alrededor de una mesa, dos dadas resulten colocadas una al lado de otra?

Supongamos que una de las dos personas que nos interesan no cambie de asiento; es claro que a su derecha puede sentarse cualquiera de las otras 16; luego entre 16 casos posibles hay uno de que la persona que se siente a su derecha sea la requerida; la probabilidad es así $\frac{1}{16}$.

También es $\frac{1}{16}$ la probabilidad de que se siente a la izquierda; y como no nos interesa el lado en que se siente, y si se sienta a la derecha no puede hacerlo a la izquierda, la probabilidad es :

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{8}.$$

XI. Se apilan al azar ocho volúmenes. Entre ellos hay una obra en 4 tomos, otra en 3 y la última en 1. ¿Cuál es la probabilidad de que los tomos de cada obra estén juntos?

Los ocho volúmenes se podrán colocar de tantas maneras como permutaciones se pueden hacer con 8 objetos, es decir : $P_8 = 8\,!$ Este es el número de casos posibles.

Calculemos ahora el número de casos favorables. Supongamos las 3 obras separadas, es decir, los 4 tomos de la primera atados entre sí y lo mismo los 3 de la segunda. Tenemos, pues, tres grupos de libros que pueden permutarse de $3\,!$ diferentes maneras.

Ahora, los 4 tomos de la primera obra pueden en el paquete permutarse de $4\,!$ maneras distintas y como cada una de ellas modifica la colocación general de los libros : $3\,!\,4\,!$ serán las permutaciones favorables.

Pero los 3 tomos de la segunda obra pueden permutarse de $3\,!$ maneras distintas dentro del mismo paquete y como cada una de ellas afecta también a cada disposición favorable de las ya calculadas, resulta finalmente que los casos favorables son $3\,!\,4\,!\,3\,!$; luego la probabilidad buscada es :

$$\frac{3\,!\,4\,!\,3\,!}{8\,!}=\frac{3\,!\,3\,!}{5\times 6\times 7\times 8}=\frac{3}{4\times 5\times 7}=\frac{3}{140}.$$

XII. Tres muebles idénticos, A, B y C, tienen cada uno dos cajones que llamaremos σ y σ' β y β', λ y λ' respectivamente. En el mueble A ambos cajones tienen una moneda de oro cada uno. Los cajones del mueble B tienen cada uno una moneda de plata; y en el C el cajón λ contiene una moneda de oro y λ' una de plata. ¿Cuál es la probabilidad de que abriendo un cajón cualquiera encontremos una moneda de oro?

Siendo 6 el total de cajones, de los cuales 3 contienen una moneda de oro, inmediatamente se nos ocurre que la probabilidad es $\frac{1}{2}$.

Más laboriosamente llegaremos al mismo resultado.

La probabilidad de que el mueble elegido sea el A es $\frac{1}{3}$. La probabilidad de que en uno de sus cajones encontremos una moneda de oro es 1 puesto que ambos las contienen. Luego la probabilidad de hallar una moneda de oro en el mueble A es :

$$\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}.$$

La probabilidad de que el mueble elegido sea el B es $\frac{1}{3}$. La de que en él hallemos una moneda de oro es 0, pues ninguno de sus dos cajones la contiene. De aquí que la probabilidad de encontrar una moneda de oro en el segundo mueble sea :

$$\frac{1}{3}\times 0=0.$$

La probabilidad de que el mueble elegido sea el C es $\frac{1}{3}$. La de que en él hallemos una moneda de oro es $\frac{1}{2}$, puesto que en el cajón λ la hay y en el λ' no. Luego la probabilidad de hallar una moneda de oro en el tercer mueble es :

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

Pero como nos es indiferente que la moneda de oro provenga del mueble A, del B o del C; y como si es de uno no puede ser de otro, es decir, como se trata de probabilidades que se excluyen, la que nos interesa es igual a la suma de las simples obtenidas, o sea :

$$\frac{1}{3}+0+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

XIII. Supongamos los datos del problema anterior y que habiendo abierto un cajón nos hemos hallado con una moneda de oro. ¿Cuál es la probabilidad de que en el otro cajón haya también una moneda de oro?

Desde luego, tenemos que desechar la hipótesis de que el cajón abierto pertenezca al mueble B pues ninguno de sus dos cajones se halla en las condiciones expuestas en el enunciado : es evidente que se trata del mueble A o del C.

El cajón abierto puede ser tanto el σ como el σ' o el λ. Si fuera σ, el segundo que abriríamos sería el σ', donde también se halla una moneda de oro. Si fuera el σ' deberíamos luego abrir el σ y hallaríamos otra moneda de oro. Pero si el cajón abierto fuera el λ, en el segundo cajón, o sea el λ', sólo encontraríamos una moneda de plata. De lo dicho se desprende que pueden ser tres los cajones por abrir, y de ellos, dos contienen una moneda de oro.

Siendo, pues, dos los casos favorables y tres los posibles, la probabilidad deseada es :

$$\frac{2}{3}.$$

XIV. Una urna contiene 3 bolillas blancas, 4 negras y 5 rojas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar tres bolillas del mismo color sin reponer las extraídas?

Probabilidad de sacar tres bolillas blancas seguidas. Siendo 12 el total de bolillas, la probabilidad de sacar la primera blanca es $\frac{3}{12}$; la segunda $\frac{2}{11}$; y la tercera $\frac{1}{10}$; luego la probabilidad de que salgan las tres bolillas seguidas es

$$\frac{3}{12}\times\frac{2}{11}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{220}.$$

Probabilidad de sacar tres bolillas negras seguidas. La de sacar la primera es $\frac{4}{12}$; de la segunda $\frac{3}{11}$; y de la tercera $\frac{2}{10}$. La probabilidad de que salgan las negras seguidas es

$$\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}\times\frac{2}{10}=\frac{4}{220}.$$

Probabilidad de sacar tres bolillas rojas seguidas. La de sacar la primera es $\frac{5}{12}$; la de la segunda $\frac{4}{11}$; y de la tercera $\frac{3}{10}$. Luego la de que salgan las tres rojas seguidas es

$$\frac{5}{12}\times\frac{4}{11}\times\frac{3}{10}=\frac{10}{220}.$$

Pero como lo mismo nos da que las tres bolillas sean blancas, negras o rojas, con tal de que sean del mismo color, y como si salen de uno no pueden salir de otro, son probabilidades que se excluyen, y la probabilidad que nos interesa es :

$$\frac{1}{220}+\frac{4}{220}+\frac{10}{220}=\frac{3}{44}.$$

XV. Sobre una mesa hay 13 monedas con 5 caras y 8 escudos. ¿Qué probabilidad hay de que separando 6 monedas al azar resulten 3 caras y 3 escudos?

Determinemos, ante todo, los casos posibles. Son, evidentemente, tantos como combinaciones pueden hacerse con 13 objetos tomados de 6 en 6.

$$C_{13}^{6}=1716.$$

Veamos, ahora, los casos favorables.

Con cinco caras tomadas de tres en tres, formamos

$$C_{5}^{3}=10$$

grupos diferentes.

Y con ocho escudos, tomados de tres en tres, formamos

$$C_{8}^{3}=56$$

grupos distintos.

Como cada uno de los 10 grupos de 3 caras se puede combinar con cada uno de los 56 grupos de 3 escudos, resulta que, en definitiva, podemos formar $10\times 56=560$ grupos diferentes conteniendo cada uno tres caras y tres escudos. Tal es el número de casos favorables.

Y la probabilidad buscada, es, por lo tanto

$$\frac{560}{1716}=\frac{140}{429}.$$

XVI. Se tiene un juego de 48 cartas. Si se sacan tres, ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo palo?

La salida de la primera no nos interesa pues no se trata de un palo determinado, sino que la segunda y tercera sean del mismo que la primera.

La probabilidad de que la segunda sea del mismo palo que la primera es $\frac{11}{47}$ pues hay 12 cartas de cada palo y ya salió una de ellas. La probabilidad de la tercera, es $\frac{10}{46}$. Luego la probabilidad buscada, que es compuesta por complementarse las eventualidades, es :

$$\frac{11}{47} \times \frac{10}{46} = \frac{55}{1081}.$$

XVII. Se tienen tres urnas : en la primera hay 5 bolillas blancas y 3 rojas; en la segunda, 2 blancas y 10 rojas; en la tercera, 11 blancas y 13 rojas. De una de esas urnas, elegida al azar, se saca una bolilla blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que la bolilla extraída provenga de la primera urna más bien que de la segunda o tercera?

La extracción de una bolilla depende de dos acontecimientos : elección de urna y elección de bolilla.

La probabilidad de elegir la primera urna es $\frac{1}{3}$ y la de sacar una bolilla blanca $\frac{5}{8}$. Luego la probabilidad de que la bolilla blanca sea de la primera urna es :

$$\frac{1}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{24}.$$

La probabilidad de elegir la segunda urna es $\frac{1}{3}$ y la de sacar una bolilla blanca es $\frac{1}{6}$; la probabilidad de que la bolilla sea de la segunda es, pues :

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}.$$

Análogamente, la de que sea de la tercera :

$$\frac{1}{3} \times \frac{11}{24} = \frac{11}{72}.$$

La probabilidad que buscamos es relativa e igual, por lo tanto, a la probabilidad del acontecimiento esperado dividida por la suma de las probabilidades de los acontecimientos que se toman en cuenta. O sea :

$$\frac{\frac{5}{24}}{\frac{5}{24}+\frac{1}{18}+\frac{11}{72}}=\frac{1}{2}.$$

XVIII. Se tiran dos dados simultáneamente y se repite tres veces la experiencia. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan *por lo menos* una vez el punto 5 y el punto 7?

La probabilidad de que la suma de los puntos que marquen ambos dados sea 5 es $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$. La de que sea 7 es $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$. Y la de que la suma no sea ni una ni otra es, evidentemente :

$$1-\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{6}\right)=\frac{13}{18}$$

Sean p, p', p'' estas probabilidades.

La probabilidad de que los tres acontecimientos ocurran, y se sucedan en un orden dado es, a todas luces $pp'p''$.

Pero si no nos interesa el orden de presentación, los acontecimientos podrán agruparse de tantos modos como permutaciones se pueden hacer con 3 objetos, es decir de $3\,! = 6$ maneras diferentes. Luego, nuestra probabilidad sube a $6\,pp'p''$.

Del mismo modo la probabilidad de que ocurra dos veces el primer acontecimiento y una el segundo es, ateniéndonos a un orden dado, $ppp' = p^2p'$.

Que, no concediendo importancia al orden, se eleva a $C_3{}^1p^2p' = 3\,p^2p'$, puesto que los dos acontecimientos se pueden presentar de tantas maneras como combinaciones pueden hacerse con tres objetos tomados dos a dos (o uno a uno).

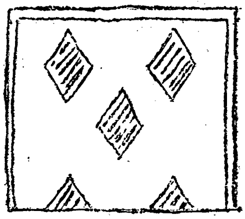
Y de inmediato se advierte que la probabilidad de que ocurra una vez el primer acontecimiento y dos el segundo, es $3\,pp'^2$.

La probabilidad que buscamos es la suma de las tres que acabamos de enumerar y que encierran todas las eventualidades posibles para la realización de nuestro propósito. Tenemos así :

$$6\,p\,p'p''+3p^2p'+3pp'^2=$$

$$=6\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{13}{18}+3\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{36}=\frac{31}{324}.$$

XIX. Supongamos tener a la vista medio naipe, en la forma que indica la figura. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un siete y cuál la de que sea un ocho? (1).



La carta puede ser un siete lo mismo que un ocho. Pero en el ocho las dos mitades son iguales, mientras que el siete, sólo mostrará esa disposición en su mitad superior. Así, el número de casos posibles es 3.

El de favorables para que sea un siete, es 1 y para que sea un ocho, 2.

Luego la probabilidad de que sea un ocho es :

$$\frac{2}{3}.$$

Y la de que sea un siete :

$$\frac{1}{3}.$$

XX. Una urna contiene m bolillas numeradas de 1 a m. Se extraen de ella n bolillas. ¿Cuál es la probabilidad de que entre estos n números haya k previamente elegidos?

Desde luego, del enunciado se desprende que debemos tener :

$$m \geq n$$
$$n \geq k.$$

Los n números que extraemos pueden comprender cualquiera de los m que contiene la urna. Luego el número de casos que se pueden presentar será igual a las combinaciones de m objetos tomados de n en n. Esto es :

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{n!} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}.$$

(1) Este problema, debido al actuario francés Quiquet, es un ejemplo típico de lo fácil que es errar al enumerar los casos posibles y favorables. Lo primero que se le ocurre a uno es decir que ambas probabilidades son iguales. Un análisis más detenido de la cuestión permite hallar la solución verdadera.

El número de casos favorables es el número de casos en que los k números están comprendidos en este grupo de n números, es decir, el número de combinaciones en que están los k números.

Pero nosotros sabemos que el número de combinaciones de m objetos tomados de n en n, que contienen p objetos determinados es igual al número de combinaciones que se puede formar con m-p objetos tomados de n-p en n-p. Luego el número de casos favorables es :

$$C_{m-k}^{n-k} = \frac{(m-k)!}{(n-k)!\,(m-n)!}.$$

La probabilidad es, entonces :

$$\frac{\dfrac{(m-k)!}{(n-k)!\,(m-n)!}}{\dfrac{m!}{n!\,(m-n)!}} = \frac{(m-k)!\,n!}{(n-k)!\,m!}.$$

XXI. Con los datos del problema anterior, ¿qué probabilidad tiene una persona que haya elegido n números antes de la extracción de acertar k de ellos?

Desde luego :

$$k \leq n.$$

En el caso anterior se elegían k números, que se debían acertar.

Ahora se eligen n números para acertar entre ellos k.

Como cualquiera de los n números puede formar parte de los k, el acontecimiento se produce de tantos modos como combinaciones se pueden formar con n elementos tomados de k en k, es decir :

$$C_n^k.$$

En el caso anterior, la probabilidad de acertar k números eligiendo k era :

$$\frac{(m-k)!\,n!}{(n-k)!\,m!}.$$

Ahora los casos en que podemos acertar son C_n^k veces más. La probabilidad buscada será :

$$P = \frac{(m-k)!\,n!}{(n-k)!\,m!} \times C_n^k = \frac{(m-k)!\,n!}{(n-k)!\,m!} \times \frac{n!}{k!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{(m-k)\,n!\,n!}{(n-k)!\,m!\,k!\,(n-k)!} = \frac{(m-k)!\,(n!)^2}{k!\,[(n-k)!]^2\,m!}.$$

Apliquemos la fórmula hallada a un ejemplo numérico.

En un bolillero hay 90 números y se extraen 5. ¿Qué probabilidad hay de acertar 2 previamente elegidos?

$$P=\frac{(m-k)!\,n!}{(n-k)!\,m!}.$$

$$P=\frac{(90-2)!\times 5!}{(5-2)!\times 90!}=\frac{5!\times 88!}{3!\times 90!}=\frac{3!\times 4\times 5\times 88!}{3!\times 88!\times 89\times 90}=$$

$$=\frac{4\times 5}{89\times 90}=\frac{2}{801}.$$

Es la probabilidad que tiene un jugador de acertar un ambo.

La de acertar un número es :

$$P=\frac{5!\times 89!}{4!\times 90!}=\frac{1}{18}.$$

La de acertar un terno :

$$P=\frac{5!\times 87!}{2!\times 90!}=\frac{1}{11748}.$$

La de acertar un cuaterno :

$$P=\frac{5!\times 86!}{90!}=\frac{1}{511038}.$$

Y la de acertar una quina (o lotería) (1) :

$$P=\frac{5!\,85!}{0!\,90!}=\frac{1}{43949268}$$

Si quisiéramos calcular la probabilidad de acertar un número tomando 5, tendremos :

$$C_5^1\times\frac{1}{18}=\frac{5}{18}$$

(1) Recordemos que por una convención se admite que $0\,! = 1$.
$0\,!$ en sí no representaría nada, pero para uniformidad de los desarrollos se le da ese valor, basado en que

$$P_m = m\,!$$

$$\therefore\quad P_0 = 0\,!.$$

Ahora, si en la expresión

$$P_m = mP_{m-1}$$

hacemos $m = 1$, tendremos :

$$P_1 = 1P_0 = P_0$$

y como $P_1 = 1$

$$1 = 0\,!.$$

Aplicando la fórmula calculada :

$$\frac{(m-k)!\,(n!)^2}{k!\,[(n-k)!]^2\,m!}=\frac{89!\times(5!)^2}{(4!)^2\times 90!}=\frac{5}{18}.$$

Para un ambo hallaríamos

$$C_5\times\frac{2}{801}=\frac{20}{801}$$

y, aplicando la fórmula :

$$\frac{88!\times(5!)^2}{2!\times(3!)^2\times 90!}=\frac{20}{801}.$$

Para un terno :

$$C_5^3\times\frac{1}{11748}=\frac{5}{5874}.$$

Para cuaterno :

$$C_5^4\times\frac{1}{511038}=\frac{5}{511038}.$$

Y para una quina (o lotería) :

$$C_5^5\cdot\frac{1}{43949268}=\frac{1}{43949268}.$$

XXI. Una persona introduce una mano en un saco que contiene un cierto número de semillas, granos, etc., de reducido tamaño, y extrae un puñado. ¿Cuál es la probabilidad de que el número extraído sea par?

Recordemos, ante todo, que si en la fórmula del binomio $(a+b)^m$ hacemos $a=b=1$ nos resulta :

$$2^m=1+C_m^1+C_m^2+C_m^3+\ldots+C_m^m \quad \therefore$$

$$2^m-1=C_m^1+C_m^2+C_m^3+\ldots+C_m^m$$

es decir, que *el número total de combinaciones que se pueden hacer con m objetos tomándolos de todos los modos posibles es igual a la emésima potencia de 2, disminuída en 1.*

Recordemos también que si en el desarrollo de la fórmula del binomio $(a-b)^m$ hacemos $a=b=1$ tenemos :

$$(1-1)^m=0=1-C_m^1+C_m^2-C_m^3+\ldots \quad \therefore$$

$$C_m^1+C_m^3+C_m^5+\ldots=1+C_m^2+C_m^4+C_m^6+\ldots$$

Es decir, que *el número de combinaciones que pueden hacerse con m objetos tomándolos de todos los modos posibles, pero de manera que en cada combinación entre siempre un número impar de elementos, es mayor en una unidad que el número total de combinaciones que con los mismos m objetos se puede formar tomándolos de todos los modos posibles pero entrando en cada combinación un número par de elementos.*

Si representamos por I el número total de combinaciones que contienen un número impar de elementos y por P el de las que contienen un número par, nos resultará :

$$\mathrm{I} = \mathrm{P} + 1 \quad (\alpha).$$

Por otra parte, sabemos que el total es igual a $2^m - 1$, es decir :

$$\mathrm{I} + \mathrm{P} = 2^m - 1 \quad (\beta)$$

de donde, reemplazando en (β) I por su valor en (α):

$$\mathrm{P} + 1 + \mathrm{P} = 2^m - 1 \quad \therefore$$

$$\mathrm{P} = 2^{m-1} - 1$$

$$\therefore \quad \mathrm{I} = 2^{m-1}.$$

Luego hay siempre una ventaja a favor de la salida de un número impar de objetos, por haber un caso favorable más.

Esta ventaja disminuye a medida que aumenta el número de objetos. Siendo m este número, la probabilidad pedida es :

$$\frac{2^{m-1} - 1}{2^m - 1}.$$

La probabilidad de extraer un número impar de objetos es :

$$\frac{2^{m-1}}{2^m - 1}.$$

XXIII. A y B juegan un match. Sus probabilidades respectivas de ganar una partida son entre sí como $a : b$. ¿Qué probabilidad tiene cada uno de ellos de ganar el match, si para ganarlo hay que ganar dos partidas seguidas?

La probabilidad que tiene A de ganar una partida es $\dfrac{a}{a+b}$.

Y la de ganar dos consecutivas

$$\frac{a^2}{(a+b)^2}.$$

Para B, las probabilidades de ganar una partida, y de ganar dos consecutivas son

$$\frac{b}{a+b} \quad \text{y} \quad \frac{b^2}{(a+b)^2}$$

respectivamente.

Y la de que, de dos partidas consecutivas gane una cada uno es :

$$\frac{ab}{(a+b)^2}.$$

Ocupémonos ahora de A y admitamos que ganó la primera partida.

Puede ganar, entonces, ganando la 1^a y 2^a o, si pierde la 2^a, ganando la 3^a y 4^a, o si pierde la 2^a y4^a, ganando la 5^a y 6^a. Y así sucesivamente.

A dichas eventualidades corresponden, respectivamente, las probabilidades :

$$\frac{a^2}{(a+b)^2}; \quad \frac{a^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{ab}{(a+b)^2}; \quad \frac{a^2}{(a+b)^2}\cdot\left[\frac{ab}{(a+b)^2}\right]^2 \cdots$$

La probabilidad de A de ganar mediante *una cualquiera* de esas eventualidades es :

$$\frac{a^2}{(a+b)^2}+\frac{a^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{a^2}{(a+b)^2}\cdot\left[\frac{ab}{(a+b)^2}\right]^2+\cdots$$

Progresión geométrica decreciente de primer término igual a $\frac{a^2}{(a+b)^2}$ y de razón $\frac{ab}{(a+b)^2}$ cuya suma es :

$$\frac{\frac{a^2}{(a+b)^2}}{1-\frac{ab}{(a+b)^2}}=\frac{a^2}{(a+b)^2-ab}=\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}.$$

Pero A también puede ganar perdiendo la primera partida. En tal caso para ganar debe ganar la 2^a y la 3^a, o la 4^a y la 5^a o la 6^a y la 7^a...

Las probabilidades respectivas de esas eventualidades son :

$$\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a^2}{(a+b)^2}; \quad \frac{b}{a+b}\cdot\frac{a^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{ab}{(a+b)^2};$$

$$\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a^2}{(a+b)^2}\cdot\left[\frac{ab}{(a+b)^2}\right]^2 \cdots$$

En total, la probabilidad de ganar de A, perdiendo la primera partida, es :

$$\frac{b}{a+b} \cdot \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{ab}{(a+b)^2} + \dots$$

Progresión geométrica decreciente de primer término igual a $\frac{a^2b}{(a+b)^3}$ y de razón igual a $\frac{ab}{(a+b)^2}$. Su suma es :

$$\frac{\frac{a^2b}{(a+b)^3}}{1 - \frac{ab}{(a+b)^2}} = \frac{a^2b}{(a^2+ab+b^2)\,(a+b)}.$$

Luego, la probabilidad de A de ganar, en cualquier forma que sea, es :

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2} + \frac{a^2b}{(a^2+ab+b^2)\,(a+b)} = \frac{a^3+2a^2b}{(a^2+ab+b^2)\,(a+b)}.$$

La de B se obtendría de un modo análogo, pero sin necesidad de repetir el cálculo podemos establecerla con sólo poner a en lugar de b y recíprocamente en la expresión hallada.

Tenemos, así, para B la probabilidad :

$$\frac{b^3+2ab^2}{(a^2+ab+b^2)(a+b)}.$$

La suma de ambas probabilidades es *uno*, como es lógico y como es fácil comprobar.

(Continuará.)

José González Galé.