AÑO XIII, SERIE II, n· 48
1925, Jul

REVISTA

DE

CIENCIAS ECONÓMICAS

PUBLICACIÓN DE LA FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

CENTRO DE ESTUDIANTES Y COLEGIO

DE GRADUADOS

BUENOS AIRES
IMPRENTA DE LA UNIVERSIDAD

1925

Apuntes sobre el cálculo de las probabilidades

(Continuación)

III

ESPERANZA MATEMÁTICA

18. Una urna contiene a bolillas azules y b blancas. Dos jugadores, Juan y Pedro, resuelven hacer apuestas sobre los colores de las bolillas que vayan saliendo en una serie de extracciones sucesivas.

Cada bolilla extraída será repuesta en la urna en el acto y a cada extracción, el que acierte, retira la suma de m pesos que habrá sido previamente integrada de un modo *equitativo* por ambos jugadores. Pedro elige el color azul y Juan el blanco.

¿Cuáles deben ser las *puestas* respectivas?

La probabilidad de que salga una bolilla azul es

$$p_{(a)} = \frac{a}{a+b}$$

y la de que salga una blanca es

$$p_{(b)} = \frac{b}{a+b}.$$

Las probabilidades de ganar de Pedro y Juan están entre sí en la relación $p_{(a)} : p_{(b)}$.

Para que el juego sea equitativo, las *puestas* deberán estar en la misma relación; luego, para calcularlas, bastará repartir la suma m en partes proporcionales a $p_{(a)}$ y $p_{(b)}$.

La puesta de Pedro será :

$$\frac{mp_{(a)}}{p_{(a)} + p_{(b)}} = mp_{(a)}$$

desde que

$$p_{(a)} + p_{(b)} = 1.$$

La puesta de Juan será :

$$\frac{mp_{(b)}}{p_{(a)} + p_{(b)}} = mp_{(b)}.$$

Es decir, que para cada uno de ellos, la *puesta* debe ser igual al producto de la suma eventual m por la probabilidad de cobrarla. Este producto recibe el nombre de *esperanza matemática.*

19. *Problemas.* I. Una persona extrae al azar una carta de una baraja de 40 cartas. Si saca un *as* recibe cinco pesos. ¿Cuál es la esperanza matemática de cobrar esa suma?

La baraja tiene 4 ases; luego, la probabilidad de sacar uno es $\frac{1}{10}$. La esperanza matemática de cobrar cinco pesos a la salida del as es, por lo tanto :

$$\frac{1}{10} \times 5 = \$\ 0{,}50.$$

En efecto, su adversario gana siempre que la carta extraída no sea un *as,* y como 36 de las 40 cartas están en esas condiciones, la probabilidad de ganar del adversario, es $\frac{9}{10}$ y su esperanza matemática

$$5 \times \frac{9}{10} = \$\ 4.50.$$

Como es lógico, las dos esperanzas suman 5 pesos, o sea la *puesta total,* que debe ser integrada así : 0,50 pesos por la primera persona y 4,50 pesos por la segunda.

II. Tres personas, A, B y C, hacen apuestas acerca de cuál será la primera carta que se extraiga de una baraja de 40, y convienen en interesar una *puesta* total de 50 pesos. Apuesta por la salida de un as; B, por la de una *figura* cualquiera; y C, por la de una carta que no sea ni *as* ni *figura*. ¿Cuáles son las *esperanzas matemáticas* de los tres jugadores?

La probabilidad de que salga un *as* es $\frac{1}{10}$; luego la esperanza matemática de A es :

$$50 \times \frac{1}{10} = \$\ 5.$$

La probabilidad de que salga una *figura* es $\frac{3}{10}$; luego la esperanza matemática de B es :

$$50 \times \frac{3}{10} = \$\,15.$$

La probabilidad de que salga una carta que no sea *as* ni *figura* es $\frac{3}{5}$; luego la esperanza matemática de C es :

$$50 \times \frac{3}{5} = \$\,30.$$

Luego A, B y C deben contribuir respectivamente con 5, 15 y 30 pesos para formar la puesta total de cincuenta que retirará el que gane.

III. Una lotería consta de cien números y tiene veinte premios : uno de mil pesos, nueve de cien pesos y diez de diez pesos. ¿Cuál debe ser el precio de cada billete para que sea igual a su esperanza matemática?

La probabilidad de que un número dado saque el premio de mil pesos es $\frac{1}{100}$, y su esperanza matemática

$$1000 \times \frac{1}{100} = \$\,10.$$

La probabilidad, para un número dado, de sacar uno de los premios de cien pesos es $\frac{9}{100}$, y su esperanza matemática

$$100 \times \frac{9}{100} = \$\,9.$$

Y la probabilidad de que un cierto número obtenga uno de los premios de diez pesos es $\frac{10}{100}$, y su esperanza matemática

$$10 \times \frac{10}{100} = \$\,1.$$

Como la obtención de un premio excluye la de los demás, la esperanza matemática *total* es

$$10 + 9 + 1 = \$\,20.$$

En efecto, cien billetes a veinte pesos importan dos mil pesos, el importe total de los premios.

IV. Dos jugadores constituyen un fondo común, que le será adjudicado al primero que gane tres partidas. Pero tienen que suspender el juego cuando A ha ganado dos partidas y B una. ¿Qué parte del fondo común le toca, entonces, a cada uno, si admitimos que en cada partida aislada tienen ambos la misma probabilidad de ganar?

Es evidente que la parte de cada uno debe ser, precisamente, la *esperanza matemática* que tiene al suspenderse el juego.

Ahora bien, el juego, de proseguirse, no puede durar más que otras dos partidas, porque : o gana A la primera y su triunfo es definitivo; o pierde A la primera, en cuyo caso iguala puntos con B, y la segunda partida es la que decide quién es el ganador.

Por lo tanto, las probabilidades de ganar de uno y otro son :

Para A. Ganando la primera partida : probabilidad $\frac{1}{2}$. Perdiendo la primera partida y ganando la segunda : probabilidad $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

En total $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Para B. Ganando la primera y la segunda partida : probabilidad $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Luego el fondo común debe repartirse dando a A los $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{4}$ a B.

V. Supongamos, ahora, que se trata de tres jugadores, A, B y C, de los cuales el primero ha ganado dos partidas, el segundo una y el tercero ninguna, cuando llega el momento de separarse. Admitamos, como en el caso anterior, que en cada partida aislada, tienen los tres la misma probabilidad de ganar. ¿En qué proporción se distribuirán el fondo común?

Notemos, ante todo, que el juego puede decidirse en la primera partida — si la gana A —, pero que, en todo caso, no puede prolongarse más de cuatro partidas, porque para que llegue a ganar C — el jugador que en peores condiciones está — tiene que ganar el mismo tres partidas, pero B sólo puede ganar una y A ninguna.

Hecha esta observación, enumeraremos los distintos casos que pueden presentarse :

Casos	Gana la primera partida	Gana la segunda	Gana la tercera	Gana la cuarta	Resulta vencedor
1	A	—	—	—	A
2	B	A	—	—	A
3	B	B	—	—	B
4	B	C	A	—	A
5	B	C	B	—	B
6	B	C	C	A	A
7	B	C	C	B	B
8	B	C	C	C	C
9	C	A	—	—	A
10	C	B	A	—	A
11	C	B	B	—	B
12	C	B	C	A	A
13	C	B	C	B	B
14	C	B	C	C	C
15	C	C	A	—	A
16	C	C	B	A	A
17	C	C	B	B	B
18	C	C	B	C	C
19	C	C	C	—	C

La probabilidad de ganar una partida aislada es, para cada jugador, $\frac{1}{3}$. De modo que, en los distintos casos que acabamos de enumerar, la probabilidad de ganar definitivamente será $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{27}$ o $\frac{1}{81}$ según sea necesario, para ello, jugar 1, 2, 3 ó 4 partidas.

A resulta vencedor en 9 casos, cuyas probabilidades respectivas son $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{81}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{81}$; $\frac{1}{27}$ y $\frac{1}{81}$, luego su probabilidad *total* de ganar es

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}=\frac{57}{81}=\frac{19}{27}.$$

Análogamente, B resulta vencedor en 6 casos, cuyas probabilidades respectivas son $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{81}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{81}$; $\frac{1}{81}$, su probabilidad total es, entonces :

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{81}=\frac{18}{81}=\frac{6}{27}.$$

Y, por fin, C resulta vencedor en 4 casos, cuyas probabilidades respectivas son $\frac{1}{81}$; $\frac{1}{81}$; $\frac{1}{81}$ y $\frac{1}{27}$. En total :

$$\frac{1}{81}+\frac{1}{81}+\frac{1}{81}+\frac{1}{27}=\frac{2}{27}.$$

Por consiguiente, los tres jugadores se repartirán el fondo común proporcionalmente a 19, 6 y 2.

VI. Una persona, A, tira un dado una sola vez. Otra persona, B, se compromete a pagarle tantos pesos cuantos sean los puntos que saque. ¿Cuál será la *puesta* que tendrá que depositar A en las manos de B para tener derecho a jugar?

Lo que se pide es la esperanza matemática de A. Como la probabilidad de salida de un punto cualquiera es $\frac{1}{6}$, la esperanza matemática pedida será

$$\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=3.50$$

puesto que la salida de un punto cualquiera *excluye* la salida de los otros cinco.

VII. Un jugador, A, apuesta con otro a que tirando un dado dos veces seguidas sacará en ambas un punto determinado (6, por ejemplo). Habiendo sacado 6 en el primer tiro, los jugadores resuelven suspender el segundo. Se pregunta : 1° ¿qué parte de la puesta colocó cada uno al principio?; 2° ¿cómo se distribuirá esa suma entre los dos jugadores, suspendido el segundo tiro?; 3° ¿cuánto ganó A?

1° La probabilidad de ganar A es $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$. Luego, llamando m a la cantidad apostada, su esperanza matemática es : $\frac{m}{36}$ y la de su adversario : $\frac{35m}{36}$.

Estas son las *puestas*.

2° La esperanza matemática de A de obtener un 6 en el segundo tiro es $\frac{m}{6}$ y la de su adversario $\frac{5m}{6}$.

Esto es lo que corresponde a cada uno al separarse.

3° La puesta de A era $\frac{m}{36}$ y como en la distribución obtuvo $\frac{m}{6}$, ganó la diferencia :

$$\frac{m}{6}-\frac{m}{36}=\frac{5m}{36}.$$

VIII. Tres jugadores, A, B y C, juegan a cara o cruz. A y B juegan la primera partida. El que gana sigue jugando y el que pierde es reemplazado por el que no jugó, haciéndose lo mismo después de cada partida.

El que gana dos veces seguidas retira la puesta total m. Se pregunta cuáles son las esperanzas matemáticas de A, B y C : 1° después de la primera partida; 2° al principio del juego.

Supongamos que A gane la primera partida, y representemos por a, b y c las esperanzas matemáticas que, después de jugada esa primera partida, corresponden a A, B y C.

Si A gana la segunda partida es el ganador y se termina el juego. Si no, deja de jugar y toma el puesto de B, que es el que no jugaba durante la segunda partida. En el primer caso, A cobra *m pesos* y B y C nada; en el segundo, la esperanza matemática de A se transforma en la de B al principio de la segunda partida, puesto que ocupa el lugar que éste ocupaba antes; B toma el lugar de C y éste, a su vez, el que tenía A al empezar la segunda partida. Luego las esperanzas matemáticas de B y C, en este segundo caso, se hacen respectivamente iguales a c y a a.

La esperanza matemática de cada jugador, al empezar la segunda partida, es igual a la suma de las esperanzas matemáticas que resultan de cada una de las dos hipótesis consideradas, y como la probabilidad es $\frac{1}{2}$ para cada partida, resulta :

$$a = \frac{m}{2} + \frac{b}{2}$$

$$b = 0 + \frac{c}{2}$$

$$c = 0 + \frac{a}{2}.$$

Resolviendo el precedente sistema de ecuaciones, resultan :

$$a = \frac{4m}{7}; \quad b = \frac{m}{7}; \quad c = \frac{2m}{7}.$$

Calculemos ahora las esperanzas matemáticas — que llamaremos α, β y γ — de A, B y C al empezar el juego.

La de C es, evidentemente, la misma antes y después de jugarse la primera partida. Gánela quien la gane, su posición no varía.

Tenemos, pues :

$$\gamma = c = \frac{2m}{7}.$$

Las de A y B son, evidentemente, iguales al iniciarse el juego :

$$\alpha=\beta=\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{4m}{7}+\frac{m}{7}\right)=\frac{5m}{14}.$$

IX. Tres jugadores A, B y C, extraen bolillas de una urna en la cual hay 3 bolillas negras y 5 blancas. Juegan hasta que salga una bolilla negra, y, el que la extraiga, cobrará la *puesta* total, s, constituída al principio. ¿Con cuánto debe contribuir cada uno a formar esa suma s, o, en otros términos, cuál es la *esperanza matemática* de cada jugador? Considérense dos casos : 1° que las bolillas extraídas no sean repuestas en la urna; 2° que después de cada extracción la bolilla sea inmediatamente repuesta en la urna, de modo que ésta conserve siempre la misma composición. Los jugadores efectúan las extracciones en el orden A, B, C.

Primer caso. Empecemos por notar que, no reponiéndose la bolilla extraída, lo más que puede durar el juego son seis extracciones, puesto que sólo pueden salir cinco bolillas blancas antes que la negra. O lo que es igual, que cada jugador no puede hacer sino dos extracciones.

Por consiguiente A puede ganar sacando la bolilla negra en la primera, o en la cuarta extracción; en este último caso habiendo salido tres bolillas blancas en las tres primeras extracciones.

Su probabilidad, en el primer caso, es $\frac{3}{8}$.

En el segundo

$$\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{28}.$$

Y en total

$$\frac{3}{8}+\frac{3}{28}=\frac{27}{56}.$$

B puede ganar a la segunda o a la quinta extracción.

Su probabilidad es :

$$\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}+\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{15}{56}+\frac{3}{56}=\frac{18}{56}.$$

Y C puede ganar a la tercera o a la sexta extracción.

Su probabilidad es :

$$\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}+\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{3}=\frac{10}{56}+\frac{1}{56}=\frac{11}{56}.$$

Luego, sus *puestas* deben ser $\frac{27s}{56}$; $\frac{18s}{56}$ y $\frac{11s}{56}$.

Segundo caso. Reponiéndose la bolilla extraída ya no hay limitación en cuanto al número de extracciones durante las cuales puede no presentarse la bolilla negra. Y las probabilidades de salida de una bolilla blanca y de una bolilla negra permanecen constantemente iguales a $\frac{5}{8}$ y $\frac{3}{8}$ respectivamente.

En tales condiciones A puede ganar a la primera, a la cuarta, a la séptima... extracción.

Sus probabilidades de ganar, en cada caso, son :

$$\frac{3}{8};\ \left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \frac{3}{8};\ \left(\frac{5}{8}\right)^6 \frac{3}{8};\ldots$$

Y en total :

$$\frac{3}{8} + \left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \frac{3}{8} + \left(\frac{5}{8}\right)^6 \times \frac{3}{8} + \ldots$$

Es la suma de una progresión geométrica decreciente de primer término igual a $\frac{3}{8}$ y de razón igual a $\left(\frac{5}{8}\right)^3$.

$$\frac{\frac{3}{8}}{1 - \left(\frac{5}{8}\right)^3} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{8^3 - 5^3}{8^3}} = \frac{3 \times 8^2}{8^3 - 5^3} = \frac{192}{387}.$$

B, por su parte, puede ganar a la segunda, quinta, octava... extracción. Sus probabilidades, en cada caso, son :

$$\frac{5}{8} \times \frac{3}{8};\ \left(\frac{5}{8}\right)^4 \times \frac{3}{8};\ \left(\frac{5}{8}\right)^7 \times \frac{3}{8};\ldots$$

En total :

$$\frac{\frac{5}{8} \times \frac{3}{8}}{1 - \left(\frac{5}{8}\right)^3} = \frac{5 \times 3 \times 8}{8^3 - 5^3} = \frac{120}{387}.$$

Por fin, C puede ganar a la tercera, sexta, novena... extracción. Sus probabilidades, en cada caso, son :

$$\left(\frac{5}{8}\right)^2 \times \frac{3}{8};\ \left(\frac{5}{8}\right)^5 \times \frac{3}{8};\ \left(\frac{5}{8}\right)^8 \times \frac{3}{8};\ldots$$

En total :

$$\frac{\left(\frac{5}{8}\right)^2 \times \frac{3}{8}}{1-\left(\frac{5}{8}\right)^3} = \frac{5^2 \times 3}{8^3 - 5^3} = \frac{75}{387}.$$

Por lo tanto, sus *puestas* habrán de ser : $\frac{192s}{387}$; $\frac{120s}{387}$; $\frac{75s}{387}$.

20. Hemos definido la esperanza matemática de *cobrar* una suma eventual como el producto de la suma eventual a cobrar por la probabilidad de ganarla. Y hemos visto que esa esperanza matemática es la *puesta* que, equitativamente, debe integrar el jugador — antes de empezar el juego — para tener derecho a jugar.

Pero podemos considerar, ahora, que el jugador no abona de antemano cuota alguna. Si gana, *cobra* una suma que es su ganancia eventual; si pierde *paga* una cantidad que es su pérdida eventual. La probabilidad de ganar multiplicada por la ganancia eventual nos da *una esperanza matemática positiva*, que corresponde a la ganancia. La probabilidad de perder multiplicada por la pérdida eventual nos da la esperanza matemática negativa, que corresponde a la pérdida.

Para que un juego sea equitativo *la esperanza matemática total*, que es la suma de las esperanzas matemáticas de ganar y de perder, debe ser *nula*, puesto que eso prueba que una y otra son iguales en valor absoluto.

21. Vamos a ver cómo de este nuevo concepto de esperanza matemática podemos pasar al anterior.

Sean p y $q = 1 - p$ las probabilidades respectivas de ganar y de perder de un determinado jugador. Y sean e la suma que debe pagar el jugador si pierde, y $s - e$ la que debe cobrar si gana.

Su esperanza matemática positiva es : $p(s - e)$.

Y la negativa : $-qe = -(1-p)e$.

De acuerdo con lo dicho tendremos :

$$p(s-e)-(1-p)e=0 \quad \therefore$$
$$ps-pe-e+pe=0 \quad \therefore$$
$$e=ps,$$

es decir, que la *pérdida* (o la *puesta* según se considere que se paga al final o al principio de cada partida) es igual al producto de la *suma total atravesada* por la probabilidad de cobrarla.

22. Apliquemos este nuevo concepto a la resolución de un problema resuelto antes con el otro criterio.

Tres jugadores, A, B y C, atraviesan una suma total de cincuenta pesos, apostando acerca de cuál será la primera carta que salga de una baraja de 40. A, apuesta por un as; B, por una figura, y C, por una carta que no sea ni una figura ni un as. ¿Cuáles son sus esperanzas matemáticas, positivas y negativas? Es decir. ¿Cuánto debe cobrar cada uno si gana, y cuánto debe pagar si pierde?

Sea x la suma que debe pagar A si pierde. Si gana cobrará $50 - x$. Y como sus probabilidades de ganar y de perder son, respectivamente $\frac{1}{10}$ y $\frac{9}{10}$, tendremos :

$$\frac{50 - x}{10} - \frac{9x}{10} = 0 \quad \therefore \quad 50 - 10x = 0 \quad \therefore$$

$$x = 5.$$

Sea y la suma que debe pagar B si pierde. Si gana cobrará $50 - y$. Y como sus probabilidades respectivas de ganar y de perder son $\frac{3}{10}$ y $\frac{7}{10}$, tendremos :

$$\frac{3(50 - y)}{10} - \frac{7y}{10} = 0 \quad \therefore \quad 150 - 10y = 0 \quad \therefore$$

$$y = 15.$$

Sea z la suma que debe pagar C si pierde. Si gana cobrará $50 - z$. Y como sus probabilidades de ganar y de perder son, respectivamente, $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{5}$, tendremos :

$$\frac{3(50 - z)}{5} - \frac{2z}{5} = 0 \quad \therefore \quad 150 - 5z = 0 \quad \therefore$$

$$z = 30.$$

Resultados idénticos a los que obtuvimos antes.

23. Esta nueva manera de considerar la esperanza matemática nos permite resolver fácilmente un problema clásico : el que se conoce con el nombre de « la ruina de los jugadores » y que es el siguiente :

Dos jugadores A y B, tienen *fortunas* (1) respectivamente iguales a a y b. ¿Qué probabilidad tiene A de arruinar a B y recíprocamente?

Sea P la probabilidad que tiene A de arruinar a B, y $Q = 1 - P$ la que tiene B de arruinar a A.

La esperanza positiva de A es entonces Pb, puesto que es b la suma que espera ganar. Y su esperanza negativa $-(1 - P)a$.

(1) Entendemos por *fortuna de un jugador* la suma total que destina al juego. Y admitimos que el jugador está *arruinado* cuando ha perdido toda esa suma.

Resulta :

$$Pb-(1-P)a=0 \quad \therefore \quad P=\frac{a}{a+b}$$

Análogamente tendremos para B :

$$Qa-(1-Q)b=0 \quad \therefore \quad Q=\frac{b}{a+b}$$

Es decir, que las probabilidades que tienen, respectivamente, de arruinarse A y B son *proporcionales a sus fortunas.*

Esto nos indica que el jugador de profesión (que no sea tramposo, por supuesto) está fatalmente condenado a arruinarse, puesto que juega contra un jugador infinitamente más rico que él : todos los demás jugadores a quienes acepta, sucesivamente, por adversarios.

Y véase por donde están perfectamente de acuerdo el cálculo y la moral.

Si el juego no es equitativo la cuestión cambia de aspecto, pues la pequeña ventaja que se reserva el *jugador favorecido* (generalmente, un empresario), concluye por inclinar la balanza a su favor. Es el caso de las casas de juego, loterías, ruletas, caballitos, carreras de caballos, etc., que viven — y bastante bien, por cierto — merced a esa ventaja.

Por eso tiene razón Laurent cuando dice que al jugador de profesión no le quedan sino dos caminos abiertos : ser víctima o victimario; estafado o estafador.

IV

PRUEBAS REPETIDAS.

24. Sea p la probabilidad de un acontecimiento A, y, $q=1-p$, la del acontecimiento contrario, B.

Si repetimos la experiencia — en igualdad de condiciones — un número determinado de veces, n, las probabilidades de A y de B seguirán siendo las mismas *en cada experiencia*, pero se nos presenta entonces un nuevo problema. Al hacer *n experiencias* ¿cuántas veces se presentará A y cuántas B? Es evidente que si A se presenta m veces, B habrá de presentarse $n-m$. Pero A puede presentarse un número de veces comprendido entre o y n, o, en otros términos, m puede tomar todos los valores enteros posibles entre o y n; luego, B podrá, correlativamente, presentarse un número de veces comprendido entre n y o. Habrá por consiguiente $n+1$ *eventualidades posibles* a cada una de las cuales corresponderá una cierta probabilidad. Determinemos cuáles son esas probabilidades.

Empecemos, para ello, por calcular no sólo la probabilidad de que A se presente m veces en las n experiencias, sino la de que A al repetirse las m veces lo haga en *un orden dado*. Es evidente, en este caso, que la probabilidad de que se trata es una probabilidad compuesta de n probabilidades simples : m iguales a p (las m veces que debe presentarse A, en el orden indicado) y $n-m$ iguales a q (las $n-m$ veces que debe presentarse B, en un orden dado, también, al establecer el de A).

La probabilidad buscada es, así : $p^m q^{n-m}$.

Pero si nos interesa solamente el número de veces que han de presentarse A y B — sin atender al orden en que se presenten — nuestra probabilidad será mucho mayor que la calculada, puesto que ésta sólo representa *una sola* de las diversas *modalidades* del acontecimiento esperado. ¿Cuántas son esas modalidades?

Evidentemente, tantas como combinaciones se pueden hacer con n objetos tomados m a m (o $n-m$ a $n-m$).

En consecuencia, la probabilidad de que A se presente m veces y B, $n-m$ (sin atender al orden de presentación) es :

$$C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

25. Ya hemos dicho que las *eventualidades* posibles son $n+1$ (que salgan, respectivamente, A, 0, 1, 2... n veces, y B, n, $n-1$, $n-2$... 0 veces). A cada una de esas eventualidades corresponde una probabilidad determinada, y, como son excluyentes y comprenden todos los casos posibles, su suma debe ser uno.

Y así es, en efecto :

$$\sum_{m=0}^{m=n} C_n^m p^m q^{n-m} = (p+q)^n = 1,$$

puesto que $p+q=1$

26. *Ejemplos.* I. ¿Cuál es la probabilidad de sacar *exactamente tres figuras*, de una baraja de 40 cartas, si se hacen cinco extracciones, reponiendo cada vez la carta extraída?

$$C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} = \frac{5!}{3!\,2!}\left(\frac{3}{10}\right)^3\left(\frac{7}{10}\right)^2 = 0{,}1323.$$

II. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un as, y sólo un as, tirando tres dados a la vez?

Como aquí lo que nos interesa no es la suma de los puntos de los tres dados, sino el número de *ases* que puedan salir, considerando cada dado aisladamente, es claro que tirar tres *dados a la vez*, equivale a tirar un solo dado *tres veces seguidas*. Luego, la probabilidad buscada es :

$$C_n^m p^m q^{n-m} = C_3^1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{25}{36} = \frac{25}{72}.$$

III. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos veces cara y dos veces cruz, tirando simultáneamente cuatro monedas al aire?

Conforme hicimos notar en el problema anterior, tirar cuatro monedas juntas equivale, dados los términos de la cuestión, a tirar una sola moneda *cuatro veces seguidas*, es decir, equivale a repetir cuatro veces la experiencia. La probabilidad pedida, es, así :

$$C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6. \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}.$$

IV. Una urna contiene una bolilla blanca y dos negras. ¿Cuál es la probabilidad de sacar, en cinco extracciones, dos bolillas blancas y tres negras?

Dados los términos del problema es evidente que la bolilla extraída se repone a cada extracción.

La probabilidad que se pide es, entonces :

$$C_5^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 10 \times \frac{1}{9} \times \frac{8}{27} = \frac{80}{243}.$$

V. Una urna contiene tres bolillas blancas y dos rojas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar, en seis extracciones cuatro bolillas rojas por lo menos?

También, en este caso, para que el problema sea posible hay que admitir que la bolilla extraída se repone después de cada extracción.

La probabilidad pedida es la suma de las probabilidades de que la bolilla roja salga 4, 5 ó 6 veces :

$$\sum_{m=4}^{m=6} C_n^m p^m q^{n-m} = C_6^4 \left(\frac{2}{5}\right)^4 \left(\frac{3}{5}\right)^2 + C_6^5 \left(\frac{2}{5}\right)^5 \left(\frac{3}{5}\right) + C_6^6 \left(\frac{2}{5}\right)^6 =$$

$$= 15 \times \frac{16 \times 9}{15625} + 6 \times \frac{32 \times 3}{15625} + \frac{64}{15625} = \frac{112}{625}.$$

VI. Una urna contiene una bolilla blanca y dos negras ¿Cuál es la probabilidad de sacar, en cinco extracciones, dos veces a lo sumo, la bolilla blanca?

Tiene que salir la bolilla blanca, *cero*, una o dos veces. La probabilidad pedida es, por lo tanto :

$$\sum_{m=0}^{m=2} C_n^m p^m q^{n-m} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 + 5 \times \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 + 10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{64}{81}.$$

VII. Una urna contiene una bolilla blanca y dos rojas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar en cuatro extracciones la bolilla blanca no menos de una vez, ni más de tres?

$$\sum_{m=1}^{m=3} C_n^m p^m q^{n-m} = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{64}{81}.$$

VIII. ¿Cual es la probabilidad de que un acontecimiento A de probabilidad p se presente, *por lo menos una vez* en n experiencias?

El suceso esperado comprende *todas* las eventualidades posibles, menos la de que el acontecimiento A *no se presente nunca* en las n experiencias.

Si es p la probabilidad de A, según queda dicho, su contraria será : $q = 1 - p$.

Y la probabilidad de que A no se produzca *nunca* en las n experiencias :

$$q^n = (1 - p)^n.$$

Ahora, la probabilidad de que A se produzca *por lo menos* una vez, es la contraria de la anterior :

$$1 - q^n = 1 - (1 - p)^n.$$

IX. ¿Cuál es la probabilidad de sacar, por lo menos, una vez el *doble seis* tirando *n veces dos dados?*

$$1 - q^n = 1 - \left(1 - \frac{1}{36}\right)^n = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n.$$

X. ¿Cuántas veces habrá que repetir una experiencia, para que un acontecimiento A de probabilidad p, tenga una probabilidad r, de producirse *por lo menos una vez?*

Ha de ser, evidentemente :

$$1 - (1 - p)^n = r \quad \therefore \quad (1 - p)^n = 1 - r \quad \therefore$$

$$n = \frac{\log(1 - r)}{\log(1 - p)}.$$

XI. ¿Cuántas veces habrá que tirar dos dados, para que sea $\frac{1}{2}$ la probabilidad de que salga *una vez por lo menos* el doble seis?

$$n = \frac{\log\left(1 - \frac{1}{2}\right)}{\log\left(1 - \frac{1}{36}\right)} = \frac{\log \frac{1}{2}}{\log \frac{35}{36}} = \frac{\log 2}{\log 36 - \log 35} = 24{,}605.$$

27. Entre las $n+1$ eventualidades que resultan haciendo n experiencias en idénticas condiciones, hay, evidentemente, una que tiene mayor probabilidad que las demás.

Y es, a todas luces, la que corresponde al término máximo del desarrollo de :

$$(p+q)^n.$$

Dicho término será mayor que el que le precede y el que le sigue. Siendo m el exponente de p en dicho término, hemos de tener :

$$C_n^m p^m q^{n-m} > C_n^{m-1} p^{m-1} q^{n-m+1} \tag{1}$$

y también :

$$C_n^m p^m q^{n-m} > C_n^{m+1} p^{m+1} q^{n-m-1} \tag{2}$$

Operemos primeramente con (1). Reemplazando los símbolos que indican combinaciones por sus valores en factoriales, tenemos :

$$\frac{n!}{m!\,(n-m)!} p^m q^{n-m} > \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m+1)!} p^{m-1} q^{n-m+1}$$

Dividiendo toda la desigualdad por el segundo miembro :

$$\frac{\dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}}{\dfrac{n!}{(m-1)!\,(n-m+1)!}} \cdot \frac{p^m q^{n-m}}{p^{m-1} q^{n-m+1}} > 1 \quad \therefore$$

$$\frac{(m-1)!\,(n-m+1)!}{m!\,(n-m)!} \cdot \frac{p}{q} > 1 \quad \therefore$$

$$\frac{(m-1)!\,(n-m)!\,(n-m+1)}{(m-1)!\,m\,(n-m)!} \cdot \frac{p}{q} > 1 \quad \therefore$$

$$\frac{n-m+1}{m} \cdot \frac{p}{q} > 1 \quad \therefore$$

$$(n-m+1)\,p > mq \quad \therefore$$

$$np - mp + p > mq \quad \therefore$$

$$np + p > mq + mp \quad \therefore$$

$$m < np + p \tag{3}$$

De la desigualdad (2) deducimos :

$$\frac{n!}{m!\,(n-m)!}p^m q^{n-m} > \frac{n!}{(m+1)!\,(n-m-1)!}p^{m+1}q^{n-m-1} \quad \therefore$$

$$\frac{\dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}}{\dfrac{n!}{(m+1)!\,(n-m-1)!}}\cdot\frac{p^m q^{n-m}}{p^{m+1}q^{n-m-1}} > 1 \quad \therefore$$

$$\frac{(m+1)!\,(n-m-1)!}{m!\,(n-m)!}\cdot\frac{q}{p} > 1 \quad \therefore$$

$$\frac{m!\,(m+1)\,(n-m-1)!}{m!\,(n-m-1)!\,(n-m)}\cdot\frac{q}{p} > 1 \quad \therefore$$

$$\frac{m+1}{n-m}\cdot\frac{q}{p} > 1 \quad \therefore$$

$$(m+1)q > (n-m)p \quad \therefore$$

$$mq + q > np - mp \quad \therefore$$

$$mp + mq > np - q \quad \therefore$$

$$m > np - q. \tag{4}$$

Hemos encerrado, así, el valor de m entre dos límites :

$$m < np + p$$

$$m > np - q.$$

cuya diferencia es *uno*, y cada uno de los cuales, si np es entero, es igual a este entero más o menos una fracción.

Y como m forzosamente ha de ser entero, resulta que su valor más probable es precisamente np si éste es entero, o si no es entero el entero más próximo a él.

28. El acontecimiento más probable tiene, pues, una probabilidad igual a :

$$\frac{n!}{(np)!\,(nq)!}p^{nq}q^{nq}.$$

Para simplificar el cálculo de esta expresión nos valdremos de la fórmula de Stirling, según la cual :

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

Esta fórmula es, como se sabe, *asintótica*, es decir, *aproximada*, pero de una aproximación que crece al crecer n; tanto, que para valores suficientemente altos de n, es prácticamente exacta.

Transformando mediante la fórmula de Stirling los factoriales que intervienen en la probabilidad que estamos calculando, resulta ésta igual a :

$$\frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{(np)^{np}e^{-np}\sqrt{2\pi np}\,(nq)^{nq}e^{-nq}\sqrt{2\pi nq}}\,p^{np}q^{nq} =$$

$$= \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,p^{np}q^{nq}}{n^{np}p^{np}e^{-np}n^{nq}q^{nq}e^{-nq}\sqrt{2\pi np 2\pi nq}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}$$

puesto que:

$$e^{-n} = e^{-np}\,.\,e^{-nq} \quad \text{y} \quad n^n = n^{np}\,.\,n^{nq}.$$

29. *Ejemplo.* Se tira un dado 6000 veces consecutivas. ¿Cuál es el número de veces que el punto 6 tiene más probabilidad de salir, y cuál es esa probabilidad?

El número de veces que el 6 tiene mayor probabilidad de salir, es :

$$np = 6000 \times \frac{1}{6} = 1000.$$

Y la probabilidad de que el 6 salga mil veces es :

$$\frac{1}{\sqrt{2 \times 3.1416 \times 6000 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{5236}} = 0.01383.$$

(Continuará.)

JOSÉ GONZÁLEZ GALÉ.