157-

AÑO XIII, SERIE II, N-49

1925, 290

REVISTA

DE

CIENCIAS ECONÓMICAS

PUBLICACIÓN DE LA FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
CENTRO DE ESTUDIANTES Y COLEGIO
DE GRADUADOS

DIRECCIÓN Y ADMINISTRACIÓN
CALLE CHARCAS, 1835
BUENOS AIRES

La Dirección no se responsabiliza de las afirmaciones, los juicios y las doctrinas que aparezcan en esta Revista, en trabajos subscritos por sus redactores o colaboradores.

Imprenta de la Universidad

157 325

Las hipótesis de Pearl y Reed sobre el crecimiento de la población

La nota que sigue es extractada, en su parte fundamental, del discurso inaugural pronunciado por Yule en la Royal statistical society de Londres, en noviembre de 1924.

La hipótesis más generalizada sobre la ley de crecimiento de las poblaciones, es la llamada fórmula del interés compuesto, consistente en suponer que la población de un Estado crece mediante un porcentaje anual constante de aumento, en la misma forma que crece un capital puesto a interés capitalizado anualmente.

En efecto, si se observan los nacimientos y defunciones de un país, y aun en cierta medida el mismo movimiento migratorio, en un período relativamente corto, se encuentra que si bien hay variaciones anuales en más o en menos, los índices resultantes son de una constancia fácilmente observada. Mucho más resulta así si, en vez de considerar índices anuales, se consideran medias de varios años.

Resulta así un aumento anual proporcional a la población,

$$P.c$$

Es decir, que la población al cabo de n años, es :

$$P_n = P_o\,(1 + c)^n.$$

En que c es un factor constante, resultado de la suma algebraica de los índices natal, mortuorio y migratorio.

Pero la aplicación ilimitada de esta fórmula llega, con el crecimiento de n, a dar a P valores excesivamente grandes, como se ha observado ya para el interés compuesto (el famoso problema de un centavo puesto a intereses el día del nacimiento de Cristo).

Ya Malthus había hecho la conocida observación de que el crecimiento de la población en proporción geométrica acarreará un desnivel entre la población y las subsistencias, que, dice, crecen en razón aritmética.

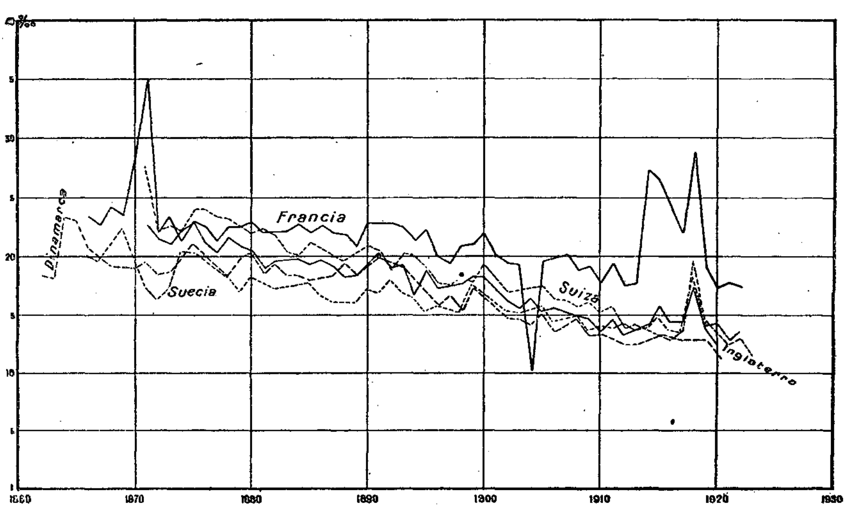
Por otra parte, aun cuando se multiplicaran indefinidamente los medios de subsistencia, hay todavía, por lo menos, otra razón limitativa de la población; y que es la necesidad de un límite mínimo al territorio que requiere cada individuo para su vida fisiológica.

Una consecuencia que no ha sacado Malthus de su teoría, aunque surge naturalmente de su mismo enunciado, es que, a medida que la población crece sin un aumento correlativo en los medios de subsistencia (ampliando la teoría, podríamos decir, sin un aumento correlativo en el territorio), el desequilibrio obra como una fuerza retardadora del crecimiento mismo, en forma paulatinamente creciente.

Esta observación llevó al matemático belga Verhulst, ya en 1838, a plantear una ley de crecimiento que tuviera un límite máximo, y en que la razón de crecimiento fuera función de la población misma.

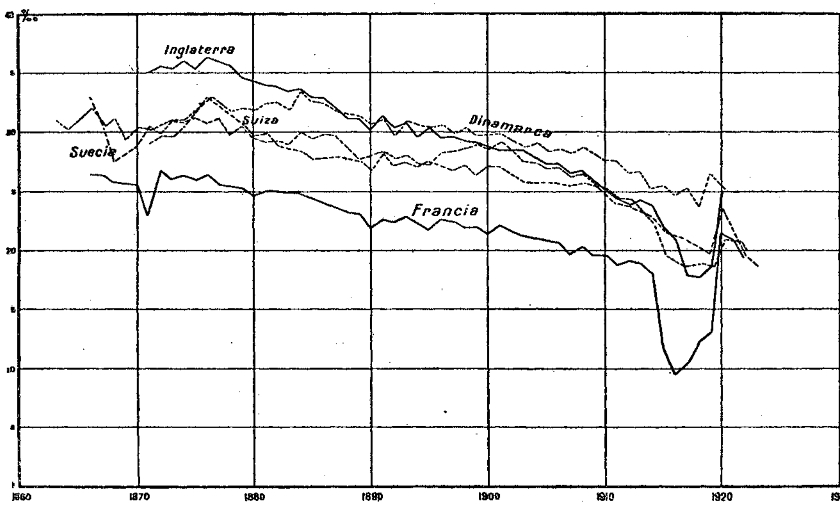
El trabajo de Verhulst fué casi completamente olvidado, y sólo en los últimos años, los profesores Pearl y Reed, que llegaron a la misma fórmula sin conocer el trabajo anterior, han vuelto a poner en discusión el asunto, principalmente a causa del trabajo que publicaron en la revista *Metron*, en 1923 (1).

A — *Tasas de natalidad de diversos países*



(1) El artículo de Pearl y Reed se encuentra incompleto en el ejemplar de *Metron* existente en la Biblioteca de la Facultad.

B — *Tasas de natalidad de diversos países*



Observadas las tasas demográficas de un país sobre un período relativamente largo, se observa que los índices, en lugar de ser constantes, como aparece a un examen más superficial, tienen una disminución paulatina, cuyo grado varía en los diferentes países (gráficos A y B). De la misma manera, hay una paulatina disminución en el índice del crecimiento general de la población.

A primera vista, el índice de crecimiento aparecería así como una función del tiempo

$$i = a - f(t).$$

Pero la observación más arriba apuntada, hace suponer que el crecimiento sea, más bien que función de la población misma :

$$i = a - f(y).$$

Confirman esta hipótesis, observaciones hechas por Pearl, Reed, y otros investigadores, no sólo sobre estadísticas de población, sino también sobre cultivos animales y vegetales, en los cuales han comprobado que, independientemente del hacinamiento, el simple aumento en la masa de una población, parece tener una influencia negativa sobre las tasas de reproducción de los individuos.

Tratándose de una tasa que varía con la población misma, la tasa de crecimiento en un año dado no es constante, sino continuamente decreciente.

Para tener su expresión verdadera, debemos, pues, considerar el crecimiento en un período muy pequeño de tiempo, o sea la tasa instantánea (análoga a la tasa instantánea de mortalidad de Gomperz).

La tasa de crecimiento en un período $\left(\frac{1}{n} \text{ de año}\right)$, será

$$\frac{y_{t+\frac{1}{n}} - y_t}{y_t}$$

y la tasa anual equivalente :

$$n \cdot \frac{y_{t+\frac{1}{n}} - y_t}{y_t}$$

Haciendo a n muy grande, o sea $\frac{1}{n} = dt$, tenemos la tasa instantánea :

$$\frac{dy}{y \cdot dt} = a - f(y)$$

Desconociendo la forma de la función contenida en el segundo miembro, podemos suponerla función lineal de y, es decir :

$$\frac{dy}{y \cdot dt} = \mathrm{A} - \mathrm{B}y$$

¿Qué forma deben tener las constantes A y B?

Siendo el crecimiento, función de la población, decreciente en forma continua, tiene que llegar un momento en que el crecimiento sea O, y por lo tanto, la población desde ese momento será constante. Habremos llegado entonces a la población límite, población que llamaremos L, a la cual corresponde una tasa de crecimiento igual a O :

$$\mathrm{O} = \mathrm{A} - \mathrm{BL} \quad \therefore \quad \mathrm{B} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{L}}$$

de donde obtenemos para la forma de la tasa instantánea :

$$\frac{dy}{y \cdot dt} = \mathrm{A} - \frac{\mathrm{A}y}{\mathrm{L}}$$

que se puede escribir también, como lo hace Yule, por mayor comodidad para la discusión de la curva,

$$\frac{dy}{y \cdot dt} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{y}{\mathrm{L}}\right).$$

La solución de esta ecuación diferencial, da para la función y el valor :

$$y_t = \frac{L}{1 + k \cdot e^{\frac{c-t}{a}}}$$

K y C son constantes de integración, que podemos elegir arbitrariamente, y podemos, por lo tanto, hacer

$$k = e^{\frac{b-c}{a}}$$

con lo cual llegamos a la forma que emplea Yule :

$$y_t = \frac{L}{1 + e^{\frac{b-t}{a}}}$$

Discusión de la curva logística

La ecuación que antecede, es la de la curva de crecimiento, de la población a la cual Verhulst ha dado el nombre de logística.

Observando el valor dado a la tasa instantánea de crecimiento, vemos que cuando y es muy pequeño con relación a la población límite L, es decir, cuando un Estado está en su período inicial de población, el factor

$$\left(1 - \frac{y}{L}\right)$$

difiere muy poco de la unidad y decrece muy lentamente; por lo tanto, la tasa de crecimiento se aproxima mucho a la constante

$$\frac{1}{a}$$

y se conserva algún tiempo cercana a este valor.

Es decir, que en los primeros años del crecimiento de una población por la fórmula *logística,* la razón del crecimiento es casi una constante (fórmula del interés compuesto).

L es la población límite, pues a medida que t crece, el segundo sumando del denominador disminuye, y el denominador tiende al límite l

b es el punto medio de la curva, pues cuando $t = b$;

$$y_b = \frac{L}{1 + e^0} = \frac{L}{2}.$$

Por otra parte,

$$y_{b+h} = \frac{L}{1+e^{-\frac{h}{a}}} = \frac{Le^{\frac{h}{a}}}{e^{\frac{h}{a}}+1} = L - \frac{L}{1+e^{\frac{h}{a}}} = L - y_{b-h}$$

Luego la curva es simétrica en 6.

Podemos escribir la fórmula del modo siguiente :

$$\frac{y_t}{L} = \frac{1}{1+e^{\frac{b}{a}-\frac{t}{a}}}$$

o también

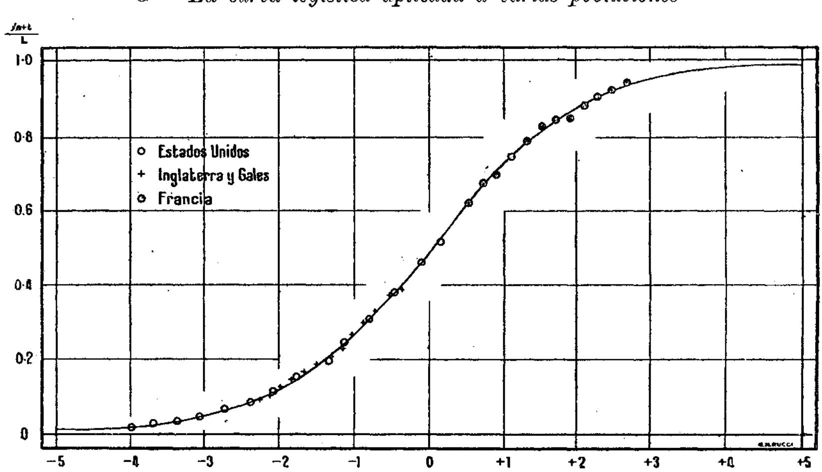
$$\frac{y_{b+t}}{L} = \frac{1}{1+e^{-\frac{t}{a}}}$$

a es una constante diferente para cada curva. Si tomamos valores sucesivos de t, $t = a$, $t = 2a$, $t = 3a$, etc., vemos que se convierte en $1 + e$, $1 + e^2$, $1 + e^3$, etc., independientemente de las constantes.

Por consiguiente, si tomamos sobre el eje de las abcisas los valores de a como unidad, y sobre el de las ordenadas, los valores de $\frac{y_{b+t}}{L}$ tendremos una curva que representa a todas las poblaciones que respondan a esta ley de crecimiento.

El valor de a que determina la mayor o menor inclinación de la curva, podemos llamarlo por lo tanto el *standard interval,* intervalo tipo.

C — *La curva logística aplicada a varias poblaciones*



En la curva anexa (gráfico C) se ha representado en esta forma la población de Estados Unidos, Inglaterra y Gales, y Francia, correspondiendo cada punto a una cifra censal.

De este gráfico puede deducirse a simple vista que Francia se encuentra casi en el límite de su población, mientras que los Estados Unidos han llegado a un grado más avanzado que Inglaterra y Gales, ambos en la primera parte de la curva. (Calculado por Yule.)

Solución de la ecuación diferencial

La ecuación diferencial de segundo grado,

$$\frac{dy}{y\,.\,dt}=\frac{1}{a}\left(1-\frac{y}{\mathrm{L}}\right)$$

es de la forma llamada « ecuación de Bermouilly » y puede resolverse mediante dos sucesivas substituciones de variable, y dos integraciones.

$a = A - \beta$

De

$$\frac{dy}{y\,.\,dt}=\frac{1}{a}-\frac{y}{a\mathrm{L}}$$

obtenemos :

$$\frac{dy}{y^2\,.\,dt}-\frac{1}{ay}=-\frac{1}{a\mathrm{L}}$$

y haciendo :

$$u=-y^{-1} \quad \therefore \quad du=y^{-2}\,dy \text{ y tambien } y=-u^{-1}$$

tenemos :

$$\frac{du}{dt}+\frac{u}{a}=-\frac{1}{a\mathrm{L}}$$

Haciendo ahora $u=vz$

$$z\frac{dv}{dt}+v\frac{dz}{dt}+\frac{vz}{a}=-\frac{1}{a\mathrm{L}} \quad \therefore \quad z\frac{dv}{dt}+v\left(\frac{dz}{dt}+\frac{z}{a}\right)=-\frac{1}{a\mathrm{L}} \qquad (1)$$

Podemos tomar z arbitrariamente, y lo hacemos con tal modo que

$$\frac{dz}{dt}+\frac{z}{a}=0$$

$$\therefore \quad \frac{dz}{z}=-\frac{1}{a}dt \quad \therefore \quad \int\frac{dz}{z}=-\frac{1}{a}\int dt$$

Integrando :

$$log_e\, z=\frac{-t+c}{a} \quad \therefore \quad z=e^{\frac{c-t}{a}}.$$

De la ecuación (1) obtenemos (por ser nulo el segundo término del primer miembro) :

$$z\frac{dv}{dt}=-\frac{1}{a\mathrm{L}}$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{dt}=-\frac{1}{a\mathrm{L}}z^{-1}=-\frac{1}{a\mathrm{L}}e^{\frac{t-c}{a}}$$

$$\therefore \quad \int\frac{dv}{dt}=\frac{1}{\mathrm{L}}\int-\frac{1}{a}e^{\frac{t-c}{a}}$$

a integrando

$$v=-\frac{1}{\mathrm{L}}\left(e^{\frac{t-c}{a}}+k\right)$$

$$u=vz=-\frac{1}{\mathrm{L}}\left(e^{\frac{t-c}{a}}+k\right)\left(e^{\frac{c-t}{a}}\right)=-\frac{1}{\mathrm{L}}\left(1+ke^{\frac{c-t}{a}}\right)$$

$$\therefore \quad y=-u^{-1}=\frac{\mathrm{L}}{1+ke^{\frac{c-t}{a}}}$$

Método para determinar las constantes

Yule da tres métodos distintos para determinar las constantes de la curva. El siguiente es el más sencillo :

Tomando de tres censos equidistantes, los valores

$$y_t, y_{t+h}, y_{t+2h}$$

y haciendo

$$f_{(0)}=\frac{1}{y_t};\ f_{(1)}=\frac{1}{y_{t+h}};\ f_{(2)}=\frac{1}{y_{t+2h}}$$

tenemos :

$$f_{(0)}=\frac{1}{\mathrm{L}}\left(1+e^{\frac{b-t}{a}}\right)=\frac{1}{\mathrm{L}}+\frac{1}{\mathrm{L}}e^{\frac{b-t}{a}}$$

$$f_{(1)}= \qquad =\frac{1}{\mathrm{L}}+\frac{1}{\mathrm{L}}e^{\frac{b-t}{a}}\cdot e^{-\frac{h}{a}}$$

$$f_{(2)}= \qquad =\frac{1}{\mathrm{L}}+\frac{1}{\mathrm{L}}e^{\frac{b-t}{a}}\cdot e^{-\frac{h}{a}}\cdot e^{-\frac{h}{a}}$$

Tomando diferencias sucesivas :

$$\Delta^1 f_{(0)}=\frac{1}{\mathrm{L}}e^{\frac{b-t}{a}}\left(e^{-\frac{h}{a}}-1\right)$$

$$\Delta^1 f_{(1)}=\frac{1}{\mathrm{L}}e^{\frac{b-t}{a}}e^{-\frac{h}{a}}\left(e^{-\frac{h}{a}}-1\right)$$

$$\Delta^2 f_{(1)}=\frac{1}{\mathrm{L}}e^{\frac{b-t}{a}}\cdot\left(e^{-\frac{h}{a}}-1\right)^2$$

De

$$\frac{\Delta^1 f_{(1)}}{\Delta^1 f_{(0)}} = e^{-\frac{h}{a}}$$

obtenemos el valor de a; y por medio de.

$$\frac{[\Delta^1 f_{(0)}]^2}{\Delta^2 f_{(0)}} = \frac{1}{L} - e^{\frac{b-t}{a}}$$

obtenemos el valor de L.

$$\frac{1}{L} = f_{(0)} - \frac{[\Delta^1 f_{(0)}]^2}{\Delta^2 f_{(0)}}$$

ARGENTINO V. ACERBONI.