AÑO XIV, SERIE II

REVISTA

DE

CIENCIAS ECONOMICAS

PUBLICACION DE LA FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS
CENTRO DE ESTUDIANTES Y COLEGIO
DE GRADUADOS

DIRECCION Y ADMINISTRACION
CALLE CHARCAS, 1835
BUENOS AIRES

La Dirección no se responsabiliza de las afirmaciones, los juicios y las doctrinas que aparezcan en esta Revista, en trabajos subscritos por sus redactores o colaboradores.

Imp. The Envelope Printing-San Juan 2544-Bs. As.

Sobre interpolación

1. El problema de determinar el polinomio de grado $n-1$ en x que para $x = x_1, x_2, \ldots x_n$ toma los valores $y_1, y_2, \ldots y_n$ tiene *ch* la fórmula de *Lagrange.*

$$P_{n-1}(x) = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \ldots + A_n y_n \qquad [1]$$

donde

$$A_r = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots |^{(r)} \ldots (x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots |^{(r)} \ldots (x_1-x_n)}$$

y la notación $|^{(r)}$ solo quiere expresar que falta en el numerador el factor $x - x_r$ y en el denominador $x_r - x_r$, $(r=1, 2, \ldots n)$, una solución inmediata y elegante por cierto, pero prácticamente poco satisfactoria. Por dos razones:

1. Porque si no es muy reducido el número de los valores que se quieren determinar por medio de la interpolación, requiere cálculos muy largos;

2. Porque además de los valores $y_1, y_2, \ldots y_n$ de y se quiere tomar en cuenta otro valor más, el valor y_{n+1} correspondiente a x_{n+1}, y pasar asi del polinomio $P_{n-1}(x)$ al polinomio de grado n

$$P_n(x) = A_1^1 y_1 + \ldots + A_{n+1}^1 y_{n+1}$$

$$A_r^1 = \frac{(x-x_1)\ldots |^{(r)} \ldots (x-x_{n+1})}{(x_r-x_1)\ldots |^{(r)} \ldots (x^r-x_{n+1})}$$

$$(r = 1, 2, \ldots n+1)$$

nada de lo hecho sirve más.

2. Es tan fácil pasar de una manera inmediata de la fórmula [1] a otra, la generalizada o de las diferencias divididas de *Newton*, la cual no presenta ninguno de los inconvenientes mencionados, que asombra un poco ver que eso no haya sido hecho, y que a la segunda fórmula solo se llegue por otro camino muy distinto, y como su aplicación de la teoría de las funciones interpolares.

Propongámonos de dar a $P_n(x)$ la forma

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + Q_n(x).$$

Es

$$\overset{1}{A}_r - A_r = \frac{(x-x_1)\ .\ .\ .\ |^{(r)}.\ .\ .\ (x-x_n)}{(x_r-x_1)\ .\ .\ .\ |^{(r)}.\ .\ .\ (x^r-x^n)}\left(\frac{x-x_{n+1}}{x^r-x_{n+1}}-1\right) =$$

$$= \frac{(x-x_1)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (x-x^n)}{(x_r-x_1)\ .\ .\ |^{(r)}.\ .\ (x^r-x_{n+1})}$$

y por tanto

$$P_n(x) - P_{n-1}(x) = \sum_{r=1}^{n}(\overset{1}{A}_r - A_r)\ y_r + y_{n+1}\ \overset{1}{A}_{n+1}$$

$$= (x-x_1)\ .\ .\ .\ .\ (x-x^n)$$

$$\left[\frac{y_1}{(x_1-x_r)\ .\ .\ .\ (x_1-x_{n+1})} + \frac{y_2}{(x_r-x_1)(x_r-x_3)\ .\ .\ .\ (x_r-x_{n+1})} + \right.$$

$$\left.\ .\ .\ . + \frac{y_{n+1}}{(x_{n+1}-x_1)\ .\ .\ .\ (x_{n+1}-x_n)}\right]$$

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + (x-x_1)\ .\ .\ .\ (x-x^n)$$

$$\sum_{r=1}^{n+1}\frac{y_2}{(x_r-x_1)\ .\ .\ .\ |^{(r)}.\ .\ .\ (x_r-x_{n+1})}$$

Obtenemos pues $P_n(x)$ sumando a $P_{n-1}(x)$ el polinomio de grado n

$$Q_n(x) = (x-x_1)\ .\ .\ .\ (x-x_n)\sum_{r=1}^{n+1}\frac{y_r}{(x_r-x_1)\ .\ .\ .\ |^{(r)}.\ .\ .(x_r-x_{n+1})}$$

y si atribuimos a n sucesivamente los valores 1, 2, 3, . . . n y recordamos que $P_o(x) = y_1$

$$P_n(x) = y_1 + (x - x^1)\left[\frac{y_1}{x^1 - x^2} + \frac{y_2}{x^2 - x_1}\right] +$$

$$+ (x - x_1)(x - x_2)\left[\frac{y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{y_2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}\right.$$

$$\left. + \frac{y_3}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}\right] + \ldots + (x - x_1) \ldots (x - x_n)$$

$$\left[\frac{y_1}{(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_{n+1})} + \ldots + \frac{y_{n+1}}{(x_{n+1} - x_1) \ldots (x_{n+1} - x_n)}\right]$$

esto es, la fórmula de *Newton* a la cual queríamos llegar.

2. Pongamos

$$\delta y_r = \frac{y_{r+1} - y_r}{x_{r+1} - x_r}$$

$$\delta_r^{(k)} = \frac{\delta^{k-1} y_{r+1} - \delta^{k-1} y_r}{x_{r+k} - x_r}$$

Es ante todo evidentemente

$$\delta y_1 = \frac{y_1}{x_1 - x^r} + \frac{y^r}{x_r - x_1}$$

Queremos demostrar que la fórmula (de *Ampère*)

$$\delta^{(k)} y_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_r) \ldots (x_1 - x_{k+1})} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{y_{k+1}}{(x_{k+1} - x_1) \ldots (x_{k+1} - x^k)}$$

cierta para $k = 1$ lo es para todo valor de k, y que por lo tanto

$$P_n(x) = y_1 + (x - x_1)\,\delta y_1 + \ldots$$

$$\ldots + (x - x_1)(x - x_r) \ldots (x - x_n)\,\delta^{(n)} y_1 \qquad [2]$$

Sea pues

$$\delta^{k-1} y_r = \frac{y^r}{(x_r - x_{r+1}) \ldots (x_r - x_{k+r-1})} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{y_{k+r-1}}{(x_{r+k-1} - x_r) \ldots (x_{r+k-1} - x_{r+k-2})}$$

$$\delta^{k-1}\, y_{r+1} = \frac{y_{r+1}}{(x_{r+1} - x_{r+2}) \ldots (x_{r+1} - x_{r+k})} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{y_{r+k}}{(x_{r+k} - x_{r+1}) \ldots (x_{r+k} - x_{r+k-1})}$$

Será también

$$\delta^{(k-1)}\, y_{r+1} - \delta^{(k-1)}\, y_r = - \frac{y_r}{(x_r - x_{r+1}) \ldots (x_r - x_{r+k-1})}$$

$$+ y_{r+1} \left[\frac{1}{(x_{r+1} - x_{r+2}) \ldots (x_{r+1} - x_{r+k})} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(x_{r+1} - x^r) \ldots (x_{r+1} - x_{r+k-1})} \right] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{y_{r+k}}{(x_{r+k} - x_{r+1}) \ldots (x_{r+k} - x_{r+k-1})}$$

$$= \frac{-y_r}{(x_r - x_{r+1}) \ldots . (x_r - x_{k+r-1})}$$

$$+ \frac{(x_{r+k} - x_r)\, y_{r+1}}{(x_{r+1} - x_r)(x_{r+1} - x_{r+2}) \ldots (x_{r+1} - x_{r+k})}$$

$$+ \frac{(x_{r+k} - x_r)\, y_{r+2}}{(x_{r+2} - x_r) \ldots |^{(r+2)} \ldots (x_{r+2} - x_{r+k})} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{y_{r+k}}{(x_{r+k} - x_{r+1}) \ldots (x_{r+k} - x_{r+k-1})}$$

$$\delta^{(k)}\, y_r = \frac{\delta^{(k-1)}\, y_{r+1} - \delta^{(k-1)}\, y_r}{x_{r+k} - x_r} =$$

$$\sum_{s=r}^{r+k} \frac{y_s}{(x_s - x_r) \ldots |^{(s)} \ldots (x_s - x_{r+k})}$$

y si $r = 1$

$$\delta^{(k)}\, y_1 = \sum_{r=1}^{k+1} \frac{y_r}{(x_r - x_1) \ldots |^{(r)} \ldots (x_r - x_{k+1})}$$

3. El cuadro

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c}
x_1 & y_1 & \delta y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} & \delta^{(2)} y_1 = \dfrac{\delta y_2 - \delta y_1}{x_3 - x_1} & \delta^{(3)} y_1 = \dfrac{\delta^{(2)} y_2 - \delta^{(2)} y_1}{x_4 - x_1} \\
 & & & & \\
x_2 & y_2 & \delta y_2 = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} & \delta^{(2)} y_2 = \dfrac{\delta y_3 - \delta y_2}{x_4 - x_2} & \dots\dots\dots\dots \\
 & & & & \\
x_3 & y_3 & \delta y_3 = \dfrac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

indican como se utilizan los datos y_1, y_2, . . . para deducir de ellos δy_1, $\delta^{(2)} y_1$ . . . : las constantes que, con y_1, figuran en la fórmula de *Newton.*

HUGO BROGGI