Revista
de
Ciencias Económicas

PUBLICACION DE LA FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS
CENTRO DE ESTUDIANTES Y COLEGIO
DE GRADUADOS

Año XVI **Mayo 1928 Serie II - Nº 82**

DIRECCION Y ADMINISTRACION
CALLE CHARCAS 1835
BUENOS AIRES

Discusión del sistema de ecuaciones que define el equilibrio del consumidor (*)

1. — La teoría clásica del equilibrio del consumidor, en su forma más conocida, tal cual fué construída por Walras, Edgeworth, Pareto, y que se refiere en los tratados, comprendidas mis lecciones de Economía Matemática, no es completa. En realidad, dicha teoría, reduciendo el problema a un problema de máximo, exige a los datos la satisfacción de ciertas ecuaciones, las cuales son necesarias para el máximo, no ya *necesarias y suficientes.* Falta, pues, la *discusión* del sistema, es decir, la demostración de la existencia de soluciones, la determinación de su número, etc.

Colmar esta laguna, es el objeto de esta nota.

2. — El problema, como es sabido, se enuncia en los siguientes términos:

Dados

1º) las cantidades $c_1, c_2, \ldots c_n$ de cada uno de los bienes poseídos en la configuración inicial;

2º) los precios $p_1, p_2, \ldots p_n$ con relación a los cuales hemos puesto por simetría $p_n = 1$, si, como queremos suponer, el bien n^{mo} es tomado como moneda;

3º) la función índice de la ofelimidad

$$\Phi\ (\ x_1\ ,\ x_2\ , \ldots \ldots x_n\ )$$

que expresa el placer procurado por la posesión de las cantidades $x_1, x_2, \ldots x_n$

determinar las cantidades $x_1, x_2, \ldots x_n$ *correspondientes a la configuración del equilibrio.*

La solución se obtiene mediante la aplicación del *principio hedónico,* en virtud del cual las cantidades incógnitas se identifican con las variables, que corresponden al

(*) *Traducido de* ANALI DI ECONOMIA, por Carlos Garda.

máximo, que la función Φ puede alcanzar compatiblemente a los vínculos del sistema, que, en este caso, están expresados por la ecuación del equilibrio del presupuesto.

$$\sum_{r=1}^{n} d_r \left(c_r - x \right) = 0 \tag{1}$$

Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange, se tiene entonces:

$$d\,\Phi = \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,x} + \lambda\,p_r \right) d\,x_r$$

Para que Φ sea un máximo, es necesario que las x_r, sean tales que $d\,\Phi = 0$, cualquiera sean $d\,x_1, d\,x_2, \ldots.\ d\,x_n$. Esto lleva a las condiciones

$$\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,x_r} + \lambda\,p_r = 0 \tag{2}$$

$$r = 1, 2, \ldots\ldots, n,$$

las cuales, conjuntamente con la (1) constituyen un sistema de n+1 ecuaciones, aptas justamente para determinar las n incógnitas del problema y la auxiliar λ.

Eliminando esta auxiliar, el sistema característico de la configuración del equilibrio se escribe

$$(3)\ \begin{cases} \dfrac{1}{p_1}\,\dfrac{\partial\,\Phi}{\partial\,x_1} = \dfrac{1}{p_2}\,\dfrac{\partial\,\Phi}{\partial\,x_2} = \ldots\ldots = \dfrac{1}{p_n}\,\dfrac{\partial\,\Phi}{\partial\,x_n} \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{n} p_r \left(c_r - x_r \right) = 0 \end{cases}$$

Nos proponemos demostrar que — bajo ciertas condiciones que precisaremos en el § siguiente, *el sistema (3) admite siempre una y una sola solución, la cual corresponde efectivamente a la condición de máximo, postulada por el principio hedonístico,* y por lo tanto representa la única solución del problema del consumidor.

3. — Las condiciones del enunciado que precede se refieren a la función Φ, y no hacen sino traducir en forma algebráica, propiedades evidentes que son expresión de su significado económico.

En verdad, la Φ es la función índice de la ofelimidad, y representa, por lo tanto, el placer que procura la posesión de determinadas cantidades $x_1, x_2, \ldots.\ x_n$ de cada bien. Para que ella sea definida en modo riguroso, el primer punto que es necesario fijar es el campo en el cual la función misma es dada

Supondremos que este campo sea el conjunto (S) de los valores x_1, $x_2, \ldots x_n$ que verifican las desigualdades

$$(4) \qquad a_r < x_r < b_r \qquad r = 1, 2 \ldots . n$$

en las que a_r, b_r, son constantes reales; positivas o negativas las a_r, siempre positivas las b_r. Suponer que las x_r puedan ser negativas, significa colocar las bases de la teoría en forma tal que ésta pueda comprender los fenómenos del crédito.

Supongamos, pues, que en el campo indicado, la función Φ sea siempre positiva, continua y derivable, respecto a todos los argumentos, con las derivadas continuas y a su vez derivables, hasta que se desee.

Sentado esto, admitamos como verdades experimentales las siguientes:

a) que el placer crece con el crecer *(separadamente o simultáneo)* de las cantidades poseídas; disminuye con su disminución;

b) que para *variaciones iguales sucesivas* de la cantidad poseída, el placer experimenta variaciones (positivas o negativas) siempre *menores.*

La hipótesis *a)* se traduce analíticamente en la condición

$$(5) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x_r} > 0;$$

la *b)* en la

$$(6) \qquad \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_r \, \partial x_s} z_r z_s < 0$$

ambas válidas para cada sistema de valores $_r$, z_r que verifican a (4).

A esas agregamos

$$(7) \qquad \lim_{x = a_r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_r}\right) > 0_s \quad , \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_r}\right)_{x_r =_r b} = 0,$$

las cuales expresan que el campo considerado comprende toda la gama de las variaciones de las ofelinidades marginales, del infinito — *que corresponde a la máxima deseabilidad de cada bien* — a cero — *que corresponde al grado de saciedad.*

Queda excluído que las ofelimidades marginales puedan tener valores negativos, lo que significa que se conviene que se pueda siempre despreciar lo que no es más ofélimo.

A las condiciones relativas a la función Φ, ahora indicadas, es menester después agregar, en lo que respecta de las cantidades $c_1, c_2, \ldots c_n$, que individualizan la configuración inicial, que para éstas se tenga

$$(8) \qquad a_r < c_r < b_r ,$$

con lo que se viene a decir que el punto que corresponde a esta configuración — es decir, el punto de coordenadas $c_1, c_2, \ldots c_n$ — está comprendido en el campo de variabilidad de la función, es decir, en el campo S, definido por la (4).

Finalmente, con relación a las constantes $p_1\, p_2, \ldots p_n$ que expresan los precios del mercado, es menester agregar como hipótesis, que ellas sean cantidades positivas.

Resumiendo, todas las hipótesis que hemos hecho relativas a las variables y a las funciones que figuran en el sistema (3) — *aparte las condiciones cualitativas de la continuidad y derivabilidad de* Φ *y de sus derivadas* — están contenidas en las fórmulas (4) a (8), que para comodidad del lector transcribimos:

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_r < x_r < b_r,\; a_r < z_r < b_r,\; a_r < c_r < b_r,\; p_r > 0 \\[1em] \lim\limits_{x_r = a_r} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_r} = \infty \\[1em] \text{para} \quad a_r < x_r < b_r, \quad \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_r} > 0 \\[1em] \quad ,, \qquad x_r = b_r, \quad \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_r} = 0 \\[1em] \sum\limits_{r=1}^{m} \sum\limits_{s=1}^{n} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x_r \partial x_s} z_r z_s < 0 \\[1em] \qquad r = 1, 2, \ldots\ldots n. \end{array} \right.$$

y que en conjunto denominaremos las hipótesis (A).

LEMA I. — En las hipótesis (A), el sistema (3) no puede admitir más de una solución dentro del campo S, definido por la (4).

Supongamos, en efecto, que exista una solución, y que esté expresada por

$$(9) \qquad x_1 = u_1, \quad x_2 = u_2, \ldots\ldots x_n = u_n$$

que verifican a las (4).

Digo que no puede existir una segunda solución, dentro del mismo campo S.

Supongamos, por absurdo, que, no obstante, exista una segunda solución, y que ésta sea

(10) $$x_1 = v_1, \quad x_2 = v_2, \ldots . \; x_n = v_n ,$$

que verifica también a las (4).

Formemos las combinaciones lineales

(11) $$x_r = u_r \times \rho \, (v_r = u_r)$$

En lenguaje geométrico podremos decir que las (11) representan, en el espacio a n dimensiones, definido por (4), una recta, de la que ρ representa la abcisa de un punto genérico. Esta recta pasa por los dos puntos de coordenadas (9) y (10) ; precisamente al punto (9) corresponde la abscisa $\rho = o$, y al (10) $\rho = 1$.

El segmento comprendido entre los dos puntos está comprendido en el campo S, y esto significa que para cada ρ comprendido entre o y 1, las x_r verifican las desigualdades (4).

Llamemos, entonces I los valores que Φ asume en los puntos de esta recta. Será I una función de ρ, cuyas derivadas, como se comprende fácilmente, son

$$\mathrm{I}' = \frac{d\,\mathrm{I}}{d\,\rho} = \sum_{r=1}^{m} (v_r - u_r) \frac{\partial \, \Phi}{\partial \, x_r}$$

$$'' = \frac{d^2\,\mathrm{I}}{d\,\rho^2} = \sum_{r=1}^{n} (v - u_r) \frac{\mathrm{I}}{\partial \, x_r} = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 \, \Phi}{\partial \, x_r \, \partial \, x_s} \varepsilon_r \varepsilon_s$$

donde $\varepsilon_r = v_r - u_r$.

De la (6), se deduce de inmediato, para cada ρ_1

(12) $$\mathrm{I}'' (\rho) < o$$

Además, ya que (9) y (10) verifican a (3), se tiene que, llamando λ a un factor de proporcionalidad e I'_0 al valor que $\mathrm{I}' (\rho)$ toma para $\rho = o$,

$$\mathrm{I}'_0 = \lambda \sum_{r=1}^{m} (v_r - u_r) p_r = o ,$$

y análogamente, cero es el valor que (toma para $\rho = 1$

Pero, si $\mathrm{I}' (\rho)$ se anula para $\rho = o$ y para $\rho = 1$ dada la hipótesis de la continuidad de la función Φ en el campo S, y por consiguiente, en particular para cada ρ comprendida entre o y 1, existirá, por el teorema de Rolle, un valor ρ_0 de ρ comprendido entre o y 1, en el que $\mathrm{I}'' (\rho) = o$.

Tal conclusión está en contradicción con la (12), que acabamos de escribir.

Luego, la hipótesis de que exista una segunda solución (10) del sistema (3) es absurda.

6. — *LEMA II. — La única solución compatible con el enunciado del Lema I, si existe, corresponde efectivamente al máximo de* Φ.

En realidad, se expresa la condición necesaria y suficiente para que una solución eventual del sistema (3) corresponda efectivamente al máximo de Φ, agregando a las ecuaciones de (3) la desigualdad $d^2 \Phi < 0$.

Esta desigualdad se reduce a la (6) y siempre se verifica no sólo para los valores de $x_1, x_2, \ldots x_n$ que corresponden eventualmente a la solución de (3), sino para cada sistema de valores de $x_1, x_2, \ldots x_n$, que corresponden a un punto cualquiera comprendido en el campo dado S.

7. — *LEMA III. — El sistema*

$$(13) \qquad E_1 = 0 \qquad p_1 x_1 + p_2 x_2 =$$

en el que

$$E_1 = \frac{1}{p_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{1}{p_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}$$

y h_1 *es una constante comprendida entre los límites* $p_1 a_1 + p_2 a_2$ y $p_1 b_1 + p_2 b_2$, *admite una sola solución,* x_1, x_2, *que verifica las desigualdades*

$$a_1 < x_1 < b_1 \qquad a_2 < x_2 < b_2$$

Consideremos, en cambio, en el plano x_1, x_2, la recta $p_1 x_1 + p_2 x_2 = h_1$. - Sus intersecciones con las $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, caen en dos puntos M, N, cuyas coordenadas son respectivamente

$$\xi_1 = a_1, \qquad \xi_2 = \frac{h_1 - p_1 a_1}{p_2}$$

para M, y

$$\eta_2 = a_2, \quad \eta_1 = \frac{h_1 - p_2 a_2}{p_1}$$

para N

Siendo además

$$a_1 < b_1; \; a_2 < b_2; \; p_1 a_1 + p_2 a_2 < h_1 < p_1 b_1 + p_2 b_2,$$

se tiene: $\quad a_2 < \xi_2 < b_2 \qquad a_1 < \eta_1 < b_1$.

Establecido esto, consideremos los puntos del segmento M N y sobre ellos los valores de la función E_1.

Sea ahora R un punto de este segmento, que de M, se aproxima indefinidamente hacia N. En virtud de la (7), la derivada $\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}$ tenderá al infinito para valores positivos, mientras que, por ser la abscisa η_1 de N mayor que a_1, la otra derivada $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$ permanece finita.

Siendo p_2 una cantidad positiva, nos resulta que en los puntos del segmento M N, que están alrededor de N, es $E_1 < 0$.

Viceversa, en los puntos del segmento situados alrededor de M, se tiene que la $\frac{\partial x}{\partial x_2}$ es finita, mientras que la $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$ tiende al infinito para valores positivos, y por consiguiente, siendo p_1 positivo, resulta $E_1 > 0$.

Por consiguiente, si un punto P ecorre el segmento M N en el sentido de M a N, los valo s de la función E_1 pasan del positivo — alrededor de M — al negativo — alrededor de N — Por la continuidad, existirá un punto T, *dentro del segmento* N, en el que $E_1 = 0$ - Las coordenadas x_1, x_2 de T verifican entonces las ecuaciones (13) y constituyen una solución del sistema.

En virtud del Lema I, tal solución es única.

Finalmente, siendo el punto T interno a M N, se tendrá:

$$\xi_1 < x_1 < \eta_1 \qquad \xi_2 < x_2 < \eta_2$$

con mayor razón

$$a_1 < x_1 < b_1 \qquad a_2 < x_2 < b_2$$

8. — *LEMA IV. — Sea el sistema*

$$\text{(14)} \qquad E_1 = 0, \qquad E_2 = 0, \ldots E_{m-1} = 0$$
$$p_1 x_1 + \cdots + p_m x_m = h_m$$

en el que las E_r se definen por las

$$\text{(15)} \qquad E_r = \frac{1}{p_1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{1}{p_r}\frac{\partial \Phi}{\partial x_r},$$

y h_m es una constante comprendida entre los límites indicados por la fórmula

$$\text{(16)} \qquad \sum_{r=1}^{m} p_r a_r < h_m < \sum_{r=1}^{m} p_r b_r,$$

Si (14) *admite para* $m = n - 1$ *una y una sola solución que verifica las desigualdades*

$$\text{(17)} \qquad a_r < x_r < b_r,$$
$$r = 1, 2, \ldots n - 1,$$

admitirá una y una sola solución también para $m = n$, y esta solución verificará las desigualdades

$$a_r < x_r < b_r \qquad (18)$$

$$r = 1, 2, \dots n;$$

En efecto, admitidas las hipótesis, consideremos la ecuación

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots\dots + p_n x_n = h_n$$

donde h_n es una constante cualquiera, que verifica las (16), haciendo allí $m = n$.

Demos a x_n un valor comprendido entre a_n y b_n, y pongamos $h_{n-1} = h_n - p_n x_n$

También h_{n-1} verificará entonces las (16), poniendo allí $m = n - 1$.

Para las hipótesis contenidas en el enunciado del teorema, el sistema

$$E_1 = 0, \qquad E_2 = 0, \dots E_{n-2} = 0$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots\dots + p_{n-1} x_{n-1} = h_{n-1}$$

admitirá, entonces, *para cada* x_n una y una sola solución

$$x_r = f \quad (x_n)$$

$$r = 1, 2, \dots n - 1.$$

por las que se verifican las (17).

Hagamos variar x_n con continuidad de a_n a b_n. Las $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ variarán también con continuidad, y describirán una línea γ, cuyos puntos tienen coordenadas, que verifican a (18) y son individualizados, apenas sea conocida la última de esas x_n. Llamamos M al punto que corresponde a $x_n = a_n$ y P al que corresponde a $x_n = b_n$. —

Hecho esto, consideremos los valores que toma E_{n-1} sobre cada punto de γ. Por lo que hemos dicho, estos puntos son individualizados por la sola x_n y por lo tanto E_{n-1} será una función de x_n

Sea ahora R un punto sobre γ que se aproxima indefinidamente de P hacia M. En virtud de la (7), la derivada $\frac{\partial \Phi}{\partial x_n}$ tiende al infinito para valores positivos, mientras, siendo allí $x_1 > a_1$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$ permanece finita. Siendo p_n cantidad positiva, se sigue que:

$$E_{n-1} = \frac{1}{p_1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{1}{p_n}\frac{\partial \Phi}{\partial x_n} < 0,$$

fórmula válida en los puntos de γ, que están alrededor de M, en la dirección P.

Para R coincidente con P en cambio, siempre en virtud de la (7) se tiene que la derivada $\frac{\partial \Phi}{\partial x_n}$ es nula, mientras siendo allí $x_1 < b_1$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$ es diversa de o y positiva. Se deduce, siendo p_1 a su vez positivo, que $E_{n-1} = 0$.

Pero entonces, si R. describe la curva γ de M a P, los valores de E_{n-1} pasan del negativo (alrededor de M) al positivo (en P).

Por la continuidad existirá un punto T de λ *suspendido en la línea* M P. en el que $E_{n-1}=0$. Las coordenadas $x_1, x_2, \ldots x_n$ de T verifican entonces todas las ecuaciones del sistema

$$(19) \qquad E_1 = 0, \ldots\ldots E_{n-2} = 0, \qquad E_{n-1} = 0$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots\ldots + p_n x_n = h_n$$

y constituyen, por lo tanto, una solución del sistema.

En virtud del *Lema I* tal solución, pues, es única.

En fin; siendo el punto T, interior al segmento M. P., será, por eso $a_n < x_n < b_n$. Verificándose, por otra parte, aquí las $n_r < x_r < b_r$ para r=1, 1,... n-1, *como se demostró más arriba,* resulta que $a_r < x_r < b_r$ para r=1, 2,... n, o sea que se verifican las (18).

9. — De los Lemas demostrados se deduce de inmediato el *teorema fundamental.*

El sistema (3) admite siempre una y una sola solución, la cual corresponde efectivamente al máximo de la función Φ.

En realidad, el sistema (3) no es otro que el (19), haciendo allí

$$h_n = p_1 c_1 + p_2 c_2 + \ldots\ldots + p_n c_n$$

Las (8) aseguran que la (16) se verifica, y por tanto (Lema IV) si el sistema (3) admite una y una sola solución para n=m-1 admitirá también una y una sola solución para n=m. Pero (Lema III) para n=2 existe efectivamente una y una sola solución. Por consiguiente, una y una sola solución existe para cada n. Finalmente, tal solución (Lema II) corresponde efectivamente al máximo de la función Φ.

Luigi AMOROSO.