

Revista

de

Ciencias Económicas

PUBLICACION DE LA FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS
CENTRO DE ESTUDIANTES Y COLEGIO
DE GRADUADOS

La Dirección no se responsabiliza de las afirmaciones, los juicios y las doctrinas que aparezcan en esta Revista, en trabajos suscritos por sus redactores o colaboradores.

DIRECTORES

Dr. José León Suárez
Por la Facultad

Alfredo H. Berros
Por el Centro de Estudiantes

Carlos E. Daverio
Por el Centro de Estudiantes

REDACTORES

Dívico A. Fürnkorn
Mario V. Ponisio
Por la Facultad

Luis J. Mancini
Por el Centro de Estudiantes

Francisco A. Duranti
Por el Centro de Estudiantes

Año XVI

Noviembre 1928

Serie II, N° 88

DIRECCION Y ADMINISTRACION
CALLE CHARCAS 1835
BUENOS AIRES

Concepto de derivadas y sus aplicaciones

La publicación del presente artículo obedece al deseo de estimular entre los alumnos de la Facultad la cooperación que esta Dirección ha requerido en diversas oportunidades y se realiza también con el ánimo de contribuir a dilucidar cuestiones de importancia corriente entre el alumnado.

N. de la D.

Función es una cantidad que varía con el variar de otra llamada variable independiente. La función es la variable dependiente.

Usaremos el siguiente símbolo para expresar a la función: $f(x)$, que se lee de la siguiente manera: función de x .

1^{er}. *Ejemplo*. — La circunferencia es una función del radio, porque, a cada valor del radio, corresponderá un valor variable de la circunferencia. Cuanto mayor sea el radio, mayor será la circunferencia.

Es decir: $C = f(r) = 2 \pi r$
y se lee: circunferencia en función del radio.

2^o. *ejemplo*. — El monto de un capital c a una tasa constante i está en función del tiempo n .

A mayor tiempo habrá mayor monto.

$$M = f(n) = c(1 + i)^n$$

3^{er}. *ejemplo*. — La cantidad de mercaderías que venda un comerciante está en función del precio, y sucede que a mayor precio menor será la venta.

$$c = f(p)$$

En los ejemplos (1) y (2) la función es *creciente* porque con el crecer de la variable independiente crece la variable dependiente.

En el ejemplo (3) la función es *decreciente* porque con el crecer de la variable independiente decrece la dependiente.

Supongamos un automóvil que viaja a 25 metros por segundo, deducimos que va a 1.500 metros por minuto, o también a 90 kilómetros por hora, es decir que la proporción que hay entre las distancias recorridas y los tiempos empleados en recorrerla es la misma en ambos casos.

Veamos esto bajo el aspecto del cálculo matemático.

Sea y la distancia, y x el tiempo empleado, si recorremos en un corto tiempo dx (diferencial de x) la distancia dy (diferencial de y), la velocidad estará dada por la siguiente relación:

$$v = \frac{dy}{dx} \text{ (derivada de } y \text{ con respecto a } x \text{)}$$

Supongamos un tren que sale de Buenos Aires a las 18 horas y llega a Rosario a las 23 horas, siendo la distancia que separa de 300 kilómetros, decimos que la velocidad media es:

$\frac{300}{5} = 60$; o sea, comparamos la distancia recorrida y el tiempo que tarda en recorrerla, de una manera general, llamando y la distancia total, y x el tiempo empleado, tendremos que la velocidad media es $\frac{y}{x}$. La velocidad que lleva el tren

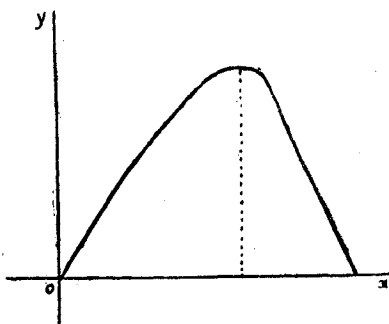
no es la misma durante todo el viaje, porque se sabe que al arrancar, lo mismo que al llegar, la velocidad es menor que la velocidad media; habrá partes del trayecto en que la velocidad sea mayor que la media, que bien puede ser por factores topográficos.

En una parte muy pequeña de tiempo dx (diferencial de x) la distancia recorrida será dy (diferencial de y); luego la velocidad estará dada por la relación $\frac{dy}{dx}$ (derivada de y con respecto a x). Tendremos que, llamando v a la velocidad en un instante de tiempo, el resultado será el siguiente:

$$v = \frac{dy}{dx}$$

La velocidad entre una estación y otra, en cada instante de tiempo, o sea la derivada, es al principio pequeña, después irá en aumento, luego decrece cuando se acerca a la estación

de llegada, es decir, gráficamente sería como lo indica la figura siguiente:



Sobre el eje de las abscisas tomamos el tiempo y sobre las ordenadas las velocidades.

La rapidez con que crece la velocidad se llama **aceleración**, y la expresamos por la letra a : en un instante de tiempo dx (diferencial de x) la aceleración es:

$$a = \frac{dv}{dx}; \text{ sabemos que } v = \frac{dy}{dx}$$

o también

$$a = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$$

• de otra manera se escribe

$$a = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Es decir que la aceleración a es la segunda derivada de la distancia con respecto al tiempo. Por el gráfico se ve que al principio, cuando el tren sale, su velocidad v es pequeña, luego aumenta y entonces la aceleración es mayor que cero, es decir:

$$a = \frac{d^2y}{dx^2} > 0$$

y cuando ha alcanzado su velocidad máxima decrece; es decir:

$$a = \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

y al acercarse a la estación de parada la aceleración es menor que cero, es decir, es negativa:

$$a = \frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

Veamos en el caso de una casa de comercio: queremos ave-

riguar, en un momento dado, cuál es su situación; llamemos dy (diferencial de y) la ganancia habida en un breve lapso de tiempo, y sea dx (diferencial de x), ese breve tiempo transcurrido; la relación $\frac{dy}{dx}$ nos indicará según sea el resultado, cuál es la situación de dicha casa en ese momento dado.

Pueden ocurrir tres casos:

1º — que $\frac{dy}{dx}$ sea mayor que cero, entonces se deduce que está en progreso.

2º — que $\frac{dy}{dx}$ sea igual a cero, entonces quiere decir que está en un período de estacionamiento.

3º — que $\frac{dy}{dx}$ sea menor que cero o sea negativa, entonces se deduce que está en decadencia o regreso.

Ahora, si en todos los momentos dados $\frac{dy}{dx}$ es mayor que cero y la intensidad va en aumento, la $\frac{d^2y}{dx^2}$ será mayor que cero, es decir que crece acelerando.

Veamos otro ejemplo para explicar el concepto matemático de derivadas.

Supongamos la caída de un cuerpo sin velocidad inicial. De la observación se deduce que el valor y de metros recorridos en x segundos, de libre caída, vale:

$$\frac{1}{2}g x^2; \text{ siendo } g = 9,81: \frac{1}{2} \quad 9,81x^2 = 4,905 x^2$$

$$y = 4,905 x^2$$

De tal fórmula, queda analíticamente hallada la función y de la x , así se puede calcular el valor y para cada valor positivo de x , y se tiene que:

Para 3'' el cuerpo ha recorrido metros:

$$y = 4,905 (3)^2 = 44,145$$

Para 3'',1, el cuerpo ha recorrido metros:

$$y = 4,905 (3,1)^2 = 44,145 + 2,992$$

Para 3'',01 el cuerpo ha recorrido metros:

$$y = 4,905 (3,01)^2 = 44,145 + 0,295$$

Para 3'',001, el cuerpo ha recorrido metros:

$$y = 4,905 (3,001)^2 = 44,145 + 0,029435$$

Para $3''.0001$, el cuerpo ha decorrido metros:

$$y = 4,905 (3,0001)^2 = 44,145 + 0,002943$$

ahora bien; se nota que la velocidad media en un intervalo de tiempo está dada por el cociente; o sea el espacio recorrido en tal intervalo y el tiempo empleado en recorrerlo.

En el intervalo ($3''$; $3'',01$) la velocidad media es:

$$\frac{0,295}{\frac{1}{100}} = 29,5$$

En el intervalo ($3''$, $3'',001$) la velocidad media es:

$$\frac{0,0294349}{\frac{1}{1000}} = 29,435$$

para ($3''$, $3'',0001$) la velocidad media es:

$$\frac{0,002943}{\frac{1}{10.000}} = 29,43$$

y podríamos seguir calculando la velocidad media en un intervalo de tiempo más pequeño, hasta que se llega a determinar la velocidad del cuerpo al instante: o sea el límite. A esto, en el cálculo matemático, se llama derivada o coeficiente diferencial.

Veamos cómo se puede determinar la derivada en este ejemplo en una forma general.

$$\text{Sea } y = 4,905 x^2$$

si incrementamos a x el valor h , y a y el valor k , tenemos:

$$y + k = 4,905 (x+h)^2 = 4,905 (x^2 + 2xh + h^2)$$

despejando k

$$k = 4,905 x^2 + 2 \times 4,905 x h + 4,905 h^2 - 4,905 x^2$$

simplificando:

$$k = 9,81 x h + 4,905 h^2$$

dividiendo por h :

$$\frac{k}{h} = 9,81 x + 4,905 h$$

achicando h indefinidamente, hemos visto que k disminuye, y

la relación $\frac{k}{h}$ o sea la velocidad media llega a un límite, llamado derivada.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h} = 9,81 x$$

• también:

$$\frac{dy}{dx} = 9,81 x$$

Entonces si queremos determinar para $x = 3''$, nos queda:

$$\frac{dy}{dx} = 9,81 \times 3 = 29,43$$

o sea el mismo resultado que se ha obtenido para el intervalo ($3''$, $3''$, 0001).

Si quisiéramos determinar la velocidad en el instante $x = 4''$, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = 9,81 \times 4 = 39,24$$

Ahora si calculamos la aceleración

$$a \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(9,81 x)}{dx} = 9,81$$

y llegamos a la conclusión que a es igual a 9,81; es decir, que crece acelerando.

Abraham BOIGEN