Revista
de
Ciencias Económicas

PUBLICACION DE LA FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS
CENTRO DE ESTUDIANTES Y COLEGIO
DE GRADUADOS

La Dirección no se responsabiliza de las afirmaciones, los juicios y las doctrinas que aparezcan en esta Revista, en trabajos subscritos por sus redactores o colaboradores.

Año XVII | Julio, 1929 | Serie II, Nº 96

DIRECCION Y ADMINISTRACION
CALLE CHARCAS 1835
BUENOS AIRES

de T. Sánchez de Bustamante

Sobre un erróneo desarrollo en serie de tang x [1]

El actual programa de Matemáticas (primera parte) de la Facultad de Ciencias Económicas, exige (bolilla VII) el estudio de las series correspondientes a las funciones elementales, y en el mismo programa se considera como funciones elementales, cuya derivación debe conocerse, a las siguientes: x^n; *sen x; cos x; tang x; log x.*

Se infiere, por lo tanto, que es exigible al alumno el desarrollo en serie de *tang x*.

He revisado numerosos textos de cálculo o análisis infinitesimal y, en uno solo de ellos, en la importante obra del Paul Appell, *Eléments d'analyse mathématique* (2), he encontrado el desarrollo en serie de esta función. Pero, si bien el procedimiento seguido en esta obra para dicho desarrollo es correcto, se llega en la misma a un resultado inexacto. Se obtiene, en la obra referida, una serie cuyos términos son alternadamente positivos y negativos. Los valores numéricos obtenidos son exactos, pero la alternación de signos es errónea. La serie verdadera tiene todos sus términos del mismo signo que x.

En el citado texto de Appell, se expone esta cuestión como sigue (págs. 151|152):

"*Método de los coeficientes indeterminados.* — En las aplicaciones, se emplea a menudo el método de los coeficientes indeterminados para calcular los primeros términos del desarrollo de una función en serie de potencias.

(1) El doctor Broggi, a quien expuse esta corrección en 1927, se mostró conforme con la misma, previa revisión que efectuó personalmente de los cálculos, etc.) — *T. S. de B.*

(2) *Eléments d'analyse mathématique*, por PAUL APPELL, miembro del Instituto, decano honorario de la Facultad de Ciencias, rector de la Universidad de París (cuarta edición, París, 1921).

Tomemos por ejemplo la función:

$$tang\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x}$$

que es finita, así como todas sus derivadas, para $x=0$. Pongamos:

$$\frac{sen\ x}{cos\ x} = a_0 + a\ \ x + a_2 x^2 + \ldots .$$

El primer miembro cambia de signo con x; debe suceder lo mismo con el segundo. La serie no debe contener más que potencias *impares* de x. Los coeficientes a_0, a_2, $a_4 \ldots$, son nulos y se puede, en la serie, poner a x como factor. Se tiene así, quitando al denominador:

$$sen\ x = x\ cos\ x\ (a_1 + a_3 x^2 + a_5\ x^4 + \ldots).$$

y, reemplazando *sen* x y *cos* x por sus desarrollos:

$$x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \ldots\right)$$

$$= x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots\right)\left(a_1 + a_3 x^2 + a_5 x^4 + \ldots\right)$$

Haciendo el producto de las dos series del segundo miembro y ordenando según las potencias crecientes de x, se debe encontrar una serie idéntica al primer miembro: se tiene, pues:

$$a_1 = 1; \quad -\frac{a_1}{2} + a \ = -\frac{1}{6};$$

$$\frac{a_1}{24} - \frac{a_3}{2} + a_5 = \frac{1}{120}\ ; \ldots\ldots;$$

de donde:

$$a_1 = 1;\ a_3 = \frac{1}{3}; \qquad a_5 = \frac{2}{15}, \qquad \ldots .$$

Se tiene, pues:

$$tang\ x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \ldots ."$$

Efectuando debidamente las sustituciones de a_1, a_3, a_5, ... en el desarrollo de *tang* x, el resultado correcto es el siguiente:

$$tang\ x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots .$$

Como comprobación, desarrollaremos *tang* x, aplicando otro método: la fórmula de Maclaurin:

$$f(x) = f(o) + x f^{I}(o) + \frac{x^2}{2!} f^{II}(o) + \frac{x^3}{3!} f^{III}(o) +$$

$$+ \frac{x^4}{4!} f^{IV}(o) + \frac{x^5}{5!} f^{V}(o) + \ldots$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}
f\ (x) &= tang\ x \\
f^{I}(x) &= cos^{-2}x \\
f^{II}(x) &= 2\ cos^{-3}x\ sen\ x \\
f^{III}(x) &= 2\ cos^{-2}x + 6\ cos^{-4}x\ sen^2x \\
f^{IV}(x) &= 16\ cos^{-3}x\ sen\ x + 24\ cos^{-5}x\ sen^3x \\
f^{V}(x) &= 16\ cos^{-2}x + 120\ cos^{-4}x\ sen^2x + 120\ cos^{-6}x\ sen^4x \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned}
f\ (o) &= 0 \\
f^{I}(o) &= 1 \\
f^{II}(o) &= 0 \\
f^{III}(o) &= 2 \\
f^{IV}(o) &= 0 \\
f^{V}(o) &= 16 \\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Luego, se obtiene, como antes:

$$tang\ x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots.$$

Se observa fácilmente, aplicando este método — fórmula de Maclaurin — que la serie de que se trata tiene todos sus términos del mismo signo que x.

He considerado conveniente salvar este error, del único texto por mí conocido que contiene este desarrollo, para seguridad y satisfacción de los alumnos que, aplicando conocimientos adquiridos en el curso, estudien y resuelvan este problema y quieran verificar los resultados obtenidos.

Buenos Aires, 23 de julio de 1928.