617

Revista
de
Ciencias Económicas

PUBLICACION DE LA FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS
CENTRO DE ESTUDIANTES Y COLEGIO
DE GRADUADOS

Año XVII — Agosto, 1929 — Serie II, Nº 97

DIRECCION Y ADMINISTRACION
CALLE CHARCAS 1835
BUENOS AIRES

819

618

103

de Justo Pascali (h.)

Funciones Polinomiales Enteras y Elementos del Cálculo de Diferencias Finitas

Propósito. — A pedido de los alumnos del curso de Matemáticas escribo estas líneas, que responden al programa respectivo de la Facultad de Ciencias Económicas.

Su contenido puede ser útil aun al Ingeniero cuando se trata de hallar la ley aproximada de fenómenos físicos que dependen de una variable y que sólo se conocen por mediciones empíricas, sin conocer la ley real del fenómeno.

Al hacerlo aprovecho la circunstancia para echar una vista panorámica sobre el Algebra a objeto de situar este asunto en su verdadero lugar.

En el cálculo de DIFERENCIAS FINITAS sólo se expone el método cuando los crecimientos de la variable siguen una progresión aritmética. En caso contrario ellas forman lo que se designa con el nombre de DIFERENCIAS FINITAS DIVIDIDAS.

Esta cuestión y aun el estudio detallado y técnico de la primera es abocado en esta Facultad por el eminente Profesor de Matemáticas Actuariales señor González Galé, causal por la que se sobreentiende no pretenda el suscrito entrar en ese dominio.

Escritas estas líneas para estudiantes, tratamos de pecar por exceso de claridad, aun sacrificando la elegancia de un lenguaje matemático puramente técnico.

I.

Las expresiones del análisis en el campo de las cantidades reales pueden dividirse para nuestro objeto en tres grupos primordiales cuando en ellas interviene una sola variable: *las funciones polinomiales de exponente entero; las de exponente fraccionario; y las funciones trascendentes.*

Son *polinomiales enteras* aquellas en que la variable x está elevada a potencias positivas y enteras.

Por ejemplo:

$$y = a_1 \, x + a_o$$
$$y = a_2 \, x^2 + a_1 \, x + a_o$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y = a_m \, x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_o$$

La primera suele llamarse función de primer grado o, en lenguaje geométrico, *parábola* (1) *de primer grado;* la segunda, función de segundo grado o *parábola* de segundo grado... la última, parábola de grado *m.*

Cuando se supone que la *y vale cero,* esas mismas expresiones se denominan *ecuaciones* de primero, segundo...... o emésimo grado. Los valores de x, que hacen cero a la y, se llaman *las raíces de la ecuación.*

En general: una ecuación de primer grado tiene *una* sola raíz; *dos,* una de segundo... y *m,* una de grado emésimo, como se demuestra sencillamente en las obras de Algebra (su teorema fundamental).

Las funciones de *exponente fraccionario* son evidentemente del tipo:

$$y = a \, x^{\frac{1}{m}} + bx^{\frac{n}{p}} + \ldots\ldots + k$$

Se comprende que la constitución de estas expresiones es mucho más irregular y variada que las ordenadas funciones enteras recién enumeradas.

Cuando la y vale cero, esas mismas expresiones se llaman *ecuaciones* y se designan con el nombre de raíces los valores de x que anulan la y.

Estas expresiones de exponente fraccionario pueden transformarse en otras de exponente entero a través de transformaciones pesadas, pero, en síntesis su estudio puede quedar comprendido en aquél.

Finalmente, se llaman expresiones *trascendentes* aquellas en que intervienen relaciones de x, que no son funciones enteras de x (o racionales), ni tampoco funciones de exponente fraccionario (o irracionales). Así, expresiones tales como:

$$y = \operatorname{sen} x + 8$$
$$y = \log x - \operatorname{tg} x + 8$$

---

(1) En particular a esta parábola de primer grado se la llama línea recta.

etc., etc. se llaman *trascendentes,* pues, con las operaciones que forman la aritmética, no se puede llegar a expresar con exactitud absoluta esos nuevos símbolos que son los senos, logaritmos, tangentes... etc., de una variable x.

II. *RESOLUCION DE LAS ECUACIONES POLINOMIALES ENTERAS*

Cada vez que la resolución de un problema nos lleva a una función polinomial como resultado, el asunto de encontrar los *números* o *soluciones* que él tiene, queda reducido *siempre* a encontrar las raíces de una ecuación entera, que según lo dicho anteriormente será de alguno de los tipos:

$$a_1 x + a_o = 0$$

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_o = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_o = 0$$

Es, pues, importantísimo saber a qué atenernos en lo que respecta a la solución de estas ecuaciones.

Se entiende por método de resolver una ecuación de grado dado, *hallar una fórmula o molde general formado por relaciones aritméticas de los coeficientes, tal que sustituyendo en ella los valores numéricos que en cada caso particular tengan los coeficientes, se obtengan automáticamente las raíces, o sea, los valores de x que anulan al polinomio dado.*

Desde la más remota antigüedad es conocida la solución de la ecuación de 1er. grado.

La solución algebraica (1) de la de segundo grado se atribuye a Diophanto (2), que residía en Alejandría en el siglo IV de nuestra era.

La ecuación de tercer grado fué resuelta analíticamente por Niccolo Fontana, generalmente conocido por Tartaglia, quien recibió este sobrenombre debido a un defecto en su pronunciación, originado por una de las tantas calamidades que le persiguieron desde el nacimiento.

---

(1) La solución geométrica de la ecuación de segundo grado era conocida desde mucho antes, pues figura en la obra de Euclides, célebre geómetra que vivió de 330 a 275 antes de nuestra era.

(2) Se atribuye también al matemático hindú denominado *Padmanahba* la fórmula que da la solución de las dos raíces de la ecuación de segundo grado.

Finalmente, la ecuación de cuarto grado debe su solución a Luis Ferraro, generalmente conocido por Ferrari, hombre de tanto talento como de hábitos licenciosos y que nació en Boloña en 1522.

Los tratados actuales de Algebra dan las fórmulas que permiten resolver esas ecuaciones, y lo que tanto esfuerzo y talento requirió de sus creadores hoy no exige más que una aplicación automática de los números particulares de la ecuación a resolver.

Se comprende por esta última razón la sugestión que produjo en los matemáticos la *solución* de la ecuación de quinto grado, sexto, etc., etc.

La intuición casi afirma que si por medio de relaciones aritméticas de los coeficientes de una ecuación se ha hallado la *solución* de los cuatro primeros grados, *ha de poder* hallarse también para los grados subsiguientes.

Sin embargo, todos los esfuerzos de los matemáticos fueron vanos para lograrlo; nadie llegaba al resultado apetecido y quién sabe si aun no seguiría preocupando el asunto, como nos preocupa la *indemostrada* ecuación (1) de Fermat, a no haber mediado la célebre demostración de Abel. Este matemático demostró en 1826 *la imposibilidad de la resolución algebraica de las ecuaciones que pasan del cuarto grado,* dando fin a las tentativas anteriores que se nutrían en la esperanza intuitiva (2) de su posibilidad.

Queda en síntesis expuesto que así como en el espacio no hay más que cinco poliedros regulares, en el Algebra no hay más que cuatro ecuaciones polinomiales enteras resolubles por fórmulas. O en otros términos, el Algebra no existe más allá del cuarto grado, en cuanto a resolución de ecuaciones se refiere.

Sólo puede decirse que *como casos de excepción* hay ecua-

(1) El célebre matemático Fermat, abogado de profesión, *afirmó* que la ecuación $x^m + y^m = z^m$ no puede ser resuelta para valores de x, y, z enteros, siendo m entero y mayor que dos. Aun no se ha encontrado una demostración de esa afirmación, si bien prácticamente se comprueba. Y ello a pesar que la sociedad científica de Göttingue ha establecido un premio de 100.000 marcos para el que lo demuestre de un modo riguroso...

(2) Es éste otro ejemplo fecundo de que si bien la intuición es una guía utilísima en matemáticas, puede, sin embargo, llevar a afirmaciones erróneas y que las proposiciones matemáticas deben desarrollarse en el puro campo lógico para adquirir una certeza definitiva.

ciones de grado superior al cuarto, cuyas raíces pueden calcularse por radicales. Las condiciones especiales para que tal resolubilidad sea posible fueron dejadas en una Memoria por un genial estudiante francés, Galois, de veinte años de edad, que la escribió, según se dice, la noche anterior a un duelo que tuvo por una dama, y en el que fué muerto.

III. *ECUACIONES POLINOMIALES ENTERAS DE GRADO SUPERIOR AL CUARTO*

Si bien éstas no pueden resolverse por fórmulas algebraicas, ello no excluye que se hayan encontrado métodos *aproximados* o *de tanteo* que permiten con más que suficiente exactitud hallar sus raíces dentro del límite (1) que exigen las cuestiones humanas.

Supongamos que:

$$y = x^6 + 3x^5 - 124\,x^4 - 328\,x^3 + 2448\,x^2 - 2800\,x - 4800$$

y que se desea resolver aproximadamente la ecuación, o sea, hallar los valores de x que hacen cero o que *casi* hacen cero la y.

Podemos utilizar el método gráfico o de representación gráfica de la función. Dando valores a x desde -12 a $+12$, por ejemplo, se obtendrán los valores respectivos de y, y usando un sistema de ejes rectangulares, cada par de números x, y nos dará un punto del plano y, unidos esos puntos por un tra-

---

(1) Las cuestiones de la vida real del hombre dimanan de sus necesidades o van encaminadas a satisfacerlas. Dentro del orden objetivo el hombre se orienta por sus juicios de origen empírico, a los que llega, en primer término, por las sensaciones que los objetos producen sobre sus sentidos. Todo resultado que exceda en su aproximación al de un sentido será vacuo en la realidad. La vista, que es el órgano más sensible, sólo acusa magnitudes de orden de $\frac{1}{1000}$ de milímetro y ni con los más potentes microscopios puede pasar este límite, que es el grandor de las ondas luminosas. La propia medida de lo que con más exactitud puede medir el hombre, longitudes (y su producto: áreas, volúmenes, etc.) por medio de su más sensible sentido, la vista, está condicionado, pues, dentro de un límite insuperable. Con mucha mayor razón en otras cuestiones de índole práctica.

Este orden de cosas permite utilizar los *métodos matemáticos de aproximación*, que, en general, lo son todos los que se dirigen a resolver *cuestiones de origen experimental o de un grado superior al cuarto*. El asunto se reduce a *aproximar* el resultado hasta un grado suficiente que depende de cada cuestión concreta.

zo continuo (a pulso es sólo posible, en general), se obtendrá una curva, que es una parábola entera del 6º grado.

Esa parábola cortará al eje de las x en seis puntos, y midiendo en la escala del dibujo la distancia de cada uno de ellos al origen se obtendrán las seis raíces de la ecuación. La aproximación depende del número de x que elijamos o de y que calculemos, vale decir, del número de puntos que se hayan construído en la curva a trazarse.

Si se da a x el valor *cero*, la y toma el valor -4800; si se le da el valor $+2$, la y toma el valor $+6078$. Es evidente (1) que si la y ha pasado de un valor *negativo* a uno *positivo* mientras la x ha pasado de *cero* a *dos*, la y ha pasado por cero para un valor de x comprendido entre 0 y 2, o en otras palabras, *hay una raíz de la ecuación entre cero y dos.*

Si la queremos hallar, ahora será más fácil, pues ya la tenemos encerrada entre dos límites más cercanos. Dando a x los valores 0,5 y 1,50 veremos que la y va disminuyendo de valor, o sea la x raíz va estando más estrechada entre estos nuevos valores.

Se comprende que de este modo puede, por simples cálculos y sin figuras, ir acercándose tanto como se quiera al valor de las raíces. Este método es lo que se suele llamar en Algebra *regla de Descartes,* y, con el ejemplo citado, se comprende su enorme ventaja.

Esto exige tanteos y paciencia, pero, *en el fondo,* es todo lo que se puede hacer.

En nuestro caso el estudiante comprenderá que para: $x = -2$, $x = -3$, la y cambio de signo; análogamente para: $x = -5$, $x = -7$..... etc.; para $x = 9$, $x = 10$, también la y cambia de signo. Y ya sólo falta que digamos que esas raíces son:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 10, \quad x_4 = -2, \quad x_5 = -6 \quad x_6 = -10$$

Pero, conviene recordar otra vez, que no hay métodos rigurosos excediendo el cuarto grado.

IV. *RESOLUCION DE LAS ECUACIONES TRASCENDENTES*

Toda esta variedad de ecuaciones está en situación análoga a las polinomiales enteras que exceden del cuarto grado, o

(1) Se admite aquí el concepto intuitivo de función continua en ese intervalo.

en otros términos, no hay para ellas, en su infinita variedad, fórmulas generales que permitan resolverlas.

El método de la representación gráfica, o la regla de Descartes o sucedáneos, pero siempre de tanteo, son los que permiten hallar las raíces de este tipo de ecuaciones.

Hay casos raros de ecuaciones trascendentes que pueden resolverse directamente, pero, la excepción confirma la regla.

Para aclarar ideas daremos algunos ejemplos que, si bien sencillos, permitirán al estudiante contemplar el fondo de la dificultad.

1º) Resolver el sistema:

$$y = 2x - 1$$
$$y = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

o, en términos geométricos: hallar la intersección de una recta con una parábola cúbica.

Diremos: donde estas curvas se corten *sus ordenadas y* son iguales para los mismos valores *de sus abcisas x,* o sea, siendo los primeros miembros iguales lo serán los segundos, de donde se deduce que:

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 2x - 1$$
$$\therefore \quad x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

La resolución de esta ecuación nos dará los valores de x buscados y sustituyéndolos en la ecuación de la recta obtendremos los de y. Se habrán calculado así las coordenadas de los puntos de intersección.

Este es un problema con resolución algebraica, de precisión, según lo expuesto.

Si se hubiera tratado de hallar la intersección de las curvas:

$$y = x^3 + x^2 - x - 1$$
$$y = x^6 - x^5 + x^4 - 3$$

razonando como antes se tendría:

$$x^6 - x^5 + x^4 - 3 = x^3 + x^2 - x - 1$$
$$\therefore \quad x^6 - x^5 + x^4 - x^3 - x^2 + x + 2 = 0$$

Ya no sentimos tentación de hallar una solución exacta de esta ecuación, por los fundamentos históricos dados, pero, comprendemos que *las soluciones aproximadas* de esta ecuación, halladas como se expuso, nos resuelven el problema.

Notamos que hay *homogeneidad* entre las variables o incógnitas en ambas ecuaciones.

2º) Resolver el sistema:

$$y = 2\,x - 1$$
$$y = \text{sen } x + 10$$

Siguiendo el proceso anterior, escribiremos:

$$10 + \text{sen } x = 2\,x - 1$$
$$\therefore \quad \text{sen } x - 2\,x + 11 = 0$$

¿Cómo resolver *con exactitud* esta ecuación?

Notamos inmediatamente que hay *heterogeneidad* entre los dos miembros de las ecuaciones dadas, o en el primer miembro de la ecuación resolvente final, y que siempre se conservará esa heterogeneidad aunque efectuemos cualquier transformación con tal ecuación.

No es posible, pues, resolverla con precisión.

Pero, si dibujamos la recta que representa la primera y la sinusoide que representa la segunda, en los puntos en que aquélla corte a ésta se obtendrán los valores de x que resuelven aproximadamente el problema.

A idénticas dificultades llegaríamos si quisiéramos resolver el sistema:

$$y = x^2 + \text{sen } x - 1$$
$$y = x + \log_{10} x - 4$$

o cualquier otro sistema donde entren funciones trascendentes.

V. *RESUMEN. — FUNCIONES SUSTITUTAS*

Lo que termina de exponerse da por tierra con la creencia vulgar de que todas las cuestiones o problemas matemáticos tienen soluciones *exactas.* Las Matemáticas, en saliendo del cuarto grado, se convierten en Ciencia de aproximación, como otra cualquiera, en último término.

Y aquellos matemáticos que miran de soslayo las ecuaciones de la Física, de la Hidráulica, de la Estadística biométrica o de la Economía matemática, porque su origen empírico les quita el rigor de lo apodícticamente cierto, encuentran así en la esencia misma de los números un límite a la perfección humana, aun en el campo en que con más libertad y pureza el espíritu se ejercita.

Pero, ocurre que aun dentro de las cuestiones que dependen de una sola variable independiente, hay un gran número de problemas o fórmulas complicadas cuya solución excede el dominio del Algebra, antes demarcado, y entonces, haciendo uso de la *inevitable tolerancia* que dimana de lo que se ha historiado, se busca reemplazar aquella fórmula por otra más sencilla y suficientemente equivalente.

Estas funciones sustitutas son en general parábolas de grado entero.

Es muy vasto el problema para pretender abarcarlo en estas líneas con toda su amplitud.

Sólo nos limitaremos a exponer su solución por medio del cálculo de las *diferencias finitas.*

En los problemas de la vida real, que preocupan a la estadística, esas funciones sustitutas tienen un enorme valor.

Por ejemplo: Si se conocen las poblaciones de un país en n fechas diferentes, ¿cuál será la población en el año m?

O, en general, si se conocen los n valores: $v_1, v_2, \ldots v_n$ de un fenómeno cualquiera que se *supone* dependiente de una sola variable en los n estados: $x_1, x_2, \ldots x_n$ de la variable, ¿cuál es la ley matemática del fenómeno?

Este es en general el asunto que interesa resolver en estas líneas, usando *funciones sustitutas* sencillas, de la verdadera ley *desconocida.*

Para entrar directamente en materia diremos finalmente que una parábola de grado *n-1* se expresa por la siguiente fórmula:

$$(1) \qquad y = A + B\,x + C\,x^2 + \ldots\ldots + Kx^{n-1}$$

en que x es la variable independiente y A, B, C,.... K, son n coeficientes que hay que determinar en cada problema particular.

También se suele expresar la misma parábola de grado *n-1* en *series de factoriales* del siguiente modo:

$$(2) \qquad y = a + b.x + c.\,x.\,(x-h) + d.\,x.\,(x-h)\,(x-2h) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + k.x.\,(x-h)\,(x-2h)\,(x-3h)\,\ldots\left[x-(n-2).h\right]$$

en que x es la variable independiente, h el incremento *conocido* de dicha variable y a, b, c,.... k, son n coeficientes que hay que calcular en cada problema particular. Es fácil comprender que si en esta fórmula última se ejecutan los productos y se ordenan con respecto a x habrá: 1º) términos sin x que representan la A de la fórmula (1); 2º) término en x cuyo coeficiente es la B de la (1); 3º) término en x^2 cuyo coeficiente es la C de aquélla.... y término en x^{n-1}, cuyo coeficiente es la K de la (1). Surge así la equivalencia de ambos modos de escribir.

Finalmente, puede escribirse la ecuación de una parábola de grado entero *n-1,* del siguiente modo, que llamaremos método de *factores desiguales.*

$$
\begin{aligned}
y &= A\ (x\text{-}b)\ (x\text{-}c)\ (x\text{-}d)\ldots\ldots(x\text{-}n) \\
&+ B\ (x\text{-}a)\ (x\text{-}c)\ (x\text{-}d)\ldots\ldots(x\text{-}n) \\
(3) \qquad &+ C\ (x\text{-}a)\ (x\text{-}b)\ (x\text{-}e)\ldots\ldots(x\text{-}n) \\
&+ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ K\ (x\text{-}a)\ (x\text{-}b)\ (x\text{-}c)\ldots\ldots(x\text{-}l)
\end{aligned}
$$

Hay acá n términos, y si se efectúan los productos y se ordena la suma total en x se obtiene un polinomio análogo al de la fórmula (1) de grado *n-1*. Las letras $a, b, c, \ldots\ l, n$, son datos u observaciones conocidas y los coeficientes A, B, C.... K, son incógnitas que más tarde se verá cómo se despejan.

VI. *DIFERENCIAS FINITAS*

Si x es una variable independiente, generalmente se designa con y los valores que toma la expresión o función de x del modo siguiente: $y = f(x)$.

En lo que sigue cambiaremos la nomenclatura cambiando la $f(x)$ por una V_x de tal modo que: $V_x = f(x)$.

Si damos a x incrementos constantes (1) $h, 2h, 3h \ldots$ la función toma valores que representamos con:

$$V_{x+h};\ V_{x+2h};\ V_{x+3h};\ldots \text{ etc.}$$

Dicho esto, observemos el siguiente cuadro: (1)

Variable	Función	Prim difer.	Seg. difer.	Terc. difer.	Cuarta difer.	etc. etc.
x	V_x	ΔV_x	$\Delta^2 V_x$	$\Delta^3 V_x$	$\Delta^4 V_x$	$\Delta^5 V_x$
$x+h$	V_{x+h}	ΔV_{x+h}	$\Delta^2 V_{x+h}$	$\Delta^3 V_{x+h}$	$\Delta^4 V_{x+h}$	
$x+2h$	V_{x+2h}	ΔV_{x+2h}	$\Delta^2 V_{x+2h}$	$\Delta^3 V_{x+2h}$		
$x+3h$	V_{x+3h}	ΔV_{x+3h}	$\Delta^2 V_{x+3h}$	..		
$x+4h$	V_{x+4h}	ΔV_{x+4h}				
$x+5h$	V_{x+5h}					

(1) En la práctica estadística suelen no ser constantes esos incrementos. El asunto es, entonces, objeto del Cálculo de Diferencias Finitas Divididas a que nos hemos referido en la Introducción.

Se ha escrito en la primer columna vertical los valores de la variable x con el incremento constante h. En la segunda columna figuran los valores de la función correspondiente. En la tercer columna se obtienen las diferencias entre cada término y el que le precede en la segunda. En la cuarta columna figuran las diferencias entre cada término y el que le precede en la tercera columna... Y así sucesivamente.

Los elementos obtenidos en la tercera columna se llaman *diferencias finitas primeras* y por lo expuesto, ellas son:

$$\Delta V_x = V_{x+h} - V_x; \quad \Delta V_{x+h} = V_{x+2h} - V_{x+h};$$
$$\Delta V_{x+2h} = V_{x+3h} - V_{x+2h}; \ldots\ldots \text{ etc., etc.}$$

Es evidente que, en general, estas diferencias primeras son funciones de x y las diferencias de estas diferencias, que figuran en la columna cuarta, se denominan *diferencias finitas segundas* y por lo expuesto, ellas son:

$$\Delta^2 V_x = \Delta V_{x+h} - \Delta V_x; \quad \Delta^2 V_{x+h} = \Delta V_{x+2h} - \Delta V_{x+h};$$
$$\Delta^2 V_{x+2h} = \Delta V_{x+3h} - \Delta V_{x+2h}; \ldots\ldots \text{ etc., etc.}$$

Con idénticos argumentos se forman las *diferencias finitas terceras, cuartas*.... etc.

El nombre de diferencias finitas proviene de que siendo h un incremento apreciable (no infinitesimal), el aumento del valor de la función es también apreciable, y en consecuencia, las columnas que contienen las diferencias finitas de distintos órdenes son números finitos.

En muchos casos es posible elegir incrementos de x unitarios, en cuyo caso: $h=1$, y la nomenclatura anterior se simplifica, como es fácil comprender.

Primer ejercicio. — Formar el cuadro de diferencias finitas de la función: $V_x = x^4$

Daremos a x los valores: $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, etc. Y fácilmente obtendremos el siguiente cuadro, en el que una rápida observación nos advierte que sólo existen *hasta diferencias finitas cuartas.*

V	V	ΔV	$\Delta^2 V$	$\Delta^3 V$	$\Delta^4 V$	$\Delta^5 V$
$V_0 = 0^4$	0	1	14	36	24	0
$V_1 = 1^4$	1	15	50	60	24	0
$V_2 = 2^4$	16	65	110	84	24	
$V_3 = 3^4$	81	175	194	108		
$V_4 = 4^4$	256	369	302			
$V_5 = 5^4$	625	671				
$V_6 = 6^4$	1296					

Segundo ejercicio. — Se supone que la población de una ciudad es en los años 1880 de 10.000 habitantes; 1885 de 12.000; 1890 de 16.000; 1895 de 25.000; 1900 de 40.000. Deseamos formar el cuadro de diferencias finitas.

A 1880 le suponemos el año 0, con lo cual el 1895 sería el x = 1... etc., y se tendrá:

Variable x	Función V	ΔV	$\Delta^2 V$	$\Delta^3 V$	$\Delta^4 V$
0	10.000	2.000	2.000	3.000	-2.000
1	12.000	4.000	5.000	1.000	
2	16.000	9.000	6.000		
3	25.000	15.000			
4	40.000				

Si no hay más datos estadísticos no podríamos seguir más adelante, o sea calcular las diferencias *quintas.* En estos casos se supone que todas las diferencias *cuartas* son constantes, con lo cual se supone nulas las *quintas,* etc., etc.....

Antes de terminar esta formación de diferencias finitas, diremos que al término V_x, que figura en la primera línea horizontal se le llama el *término principal* de la serie y las diferencias: ΔV_x, $\Delta^2 V$ $\Delta^3 V_x$,... etc., que están en esa misma línea se les denomina *diferencias principales.*

En el último cuadro el término principial es 10.000 y las diferencias principales son: 2.000; 2.000; 3.000; —2.000.

El término principal y las diferencias principales tienen gran importancia, como ha de verse.

VII. *LOS DOS CASOS FUNDAMENTALES*

Al hallarse las diferencias finitas de las funciones pueden suceder dos casos opuestos, a saber:

1º) que las diferencias de un cierto orden que se supone sea n sean independientes de x, con lo cual las diferencias de orden $n+1$ serán todas nulas.

2º) que las diferencias de ningún orden se anulen (o que no tomen valores prácticamente despreciables).

Demostraremos que: *para toda función racional entera de* x *de grado* n, *las diferencias finitas de orden* n *son constantes.*

Según lo antes dicho, una parábola de grado n o función racional entera es de la forma siguiente:

$$V_x = a.\, x^n + b.x^{n-1} + c.\, x^{n-2} + \ldots\ldots + r.x + s$$

Incrementando de la unidad se tiene:

$$V_{x+1} = a\ (x+1)^n + b\ (x+1)^{n-1} + c\ (x+1)^{n-2} + \ldots\ldots + r\ (x+1) + s.$$

Restando de ésta la anterior, se tiene:

$$\Delta V_x = V_{x+1} - V_x = \left[a\ (x+1)^n - a.x^n \right] + \left[b(x+1)^{n-1} - b.x^{n-1} \right] + \left[c(x+1)^{n-2} - c.x^{n-2} \right] + \ldots \ldots\ldots + \left[r(x+1) - r.x \right]$$

Al desarrollar el primer corchete se anulan las $a.x^n$; al desarrollar el segundo se anulan las $b.x^{n-1}$... y así sucesivamente, con lo cual se ve que el grado de ΔV_x no es más n, sino n-1. Supuestas hechas todas las operaciones indicadas y ordenados los términos se obtiene un polinomio cuyo primer término es $a.n\ x^{n-1}$ (el de mayor grado) y si llamamos b_1 al coeficiente de x^{n-2}, c al de x^{n-3} etc., etc., podremos escribir finalmente:

$$\Delta V_x = a.\, n.\, x^{n-1} + b_1\, x^{n-2} + c_1 x^{n-3} + \ldots . + r_1 x + s_1$$

Incrementando a la x, se tendrá análogamente:

$$\Delta V_{x+1} = a.n.\ (x+1)^{n-1} + b\ \ (x+1)^{n-2} + c\ \ (x+1)^{n-3} + \ldots\ldots + r\ \ (x+1) + s$$

y restando como antes, se obtiene:

$$\Delta^2 V_x = \Delta_{x+1} - \Delta V_x = \text{a.n.}\left[(x+1)^{n-1} - x^{n-1} \right] +$$
$$+ \left[b_1 (x+1)^{n-2} - b_1 x^{n-2} \right] + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \left[r_1 (x+1) - r_1\ x \right]$$

Al desarrollar el primer corchete se anulan las x^{n-1}; en el segundo corchete se anulan las $b_1 x^{n-2}$.... etc., con lo cual se ve que el grado de $\Delta^2 V_x$ no es más *n-1*, sino *n-2*. Supuestas hechas todas las operaciones indicadas y ordenados los términos, se obtiene un polinomio cuyo término más alto es: $a.n.\ (n\text{-}1) . x^{n-2}$ (y que proviene del primer corchete) y si llamamos simbólicamente b_2 el coeficiente del término siguiente x^{n-3}; c_2 al de x^{n-4}, etc., etc., se tendrá:

$$\Delta^2 V_x = \text{a.n.}(n-1).x^{n-2} + b_2 .x^{n-3} + c_2 .x^{n-4} + \ldots + r_2 .x + s_2$$

Repitiendo el procedimiento, se ve que:

$$\Delta^3 V_x = \text{a.n.}(n-1)\ (n-2)\ x^{n-3} + b_3 x^{n-4} + c_3 x^{n-5} + \ldots + r_3\ x + s_3$$

.. ..

.. ..

.. ..

$$\Delta^n V_x = \text{a.n}\ (n-1)\ (n-2) \ldots\ldots 3.2.1$$

como deseaba probarse.

Siendo constantes las diferencias de orden *n*, es evidente que son nulas todas las siguientes, pues:

$$\Delta^{n+1} V_x = \Delta^n V_{x+1} - \Delta^n V_x = 0$$

Las funciones racionales enteras pertenecen, pues, al primer tipo de funciones referidas. Es sencillo demostrar que: *una función exponencial del tipo* a^x *tiene sus diferencias finitas que crecen con el orden considerado* (cuando $a > 2$).

Basta para ello considerar los sucesivos valores: a^x; a^{x+1}; a^{x+2}... etc., y proceder como se indicó en un comienzo, para obtener el siguiente cuadro:

V	ΔV	$\Delta^2 V$	$\Delta^3 V$	$\Delta^4 V$	etc.
$V_0 = a^x$	$a^x (a-1)$	$a^x (a-1)^2$	$a^x (a-1)^3$	$a^x (a-1)^4$	-
$V_1 = a^{x+1}$	$a^{x+1} (a-1)$	$a^{x+1} (a-1)^2$	$a^{x+1} (a-1)^3$	-	-
$V_2 = a^{x+2}$	$a^{x+2} (a-1)$	$a^{x+2} (a-1)^2$	-	-	-
$V_3 = a^{x+3}$	$a^{x+3} (a-1)$	-	-	-	-
$V_4 = a^{x+4}$	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-

Este es el tipo de las funciones del segundo género.

Si en cambio: $a = 2$, el cuadro anterior se transforma en:

V	ΔV	$\Delta^2 V$	Δ^3	
$V_0 = 2^0 = 1$	1	1	1	
$V_1 = 2^1 = 2$	2	2	2	etc.
$V_2 = 2^2 = 4$	4	4	4	etc.
$V_3 = 2^3 = 8$	8	8	8	
$V_4 = 2^4 = 16$	16	16	16	
$V_5 = 2^5 = 32$	32	32	32	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Es un caso curioso en que los valores de la función son los mismos que las diferencias finitas primeras y éstas que las segundas, etc., etc.... Pero no hay diferencias de orden n constantes; ni crecientes tampoco. Pero no pertenece esta función a la primera categoría estudiada. Y esto es lo que nos importa saber, por razones que se verán más adelante.

En cambio, si: $a < 2$, por ejemplo, las diferencias finitas de orden cuarto son menores que las de orden tercero; y las de quinto, menores que las de cuarto, etc., etc..... sin ser ninguna nula.

Por ejemplo:

$$\Delta^4 V = a^x (a-1)^4 < \Delta^3 V = a^x (a-1)^3$$

pues simplificando queda:

$$(a-1)^4 < (a-1)^3$$

y dividiendo por $(a-1)^3$ se obtiene:

$$a - 1 < 1$$

$$\therefore \quad a < 2$$

lo que concuerda con la hipótesis. Pero si bien la diferencia de orden n no es nula, o sea: $\Delta^n V = a^x (a-1)^n \neq 0$, se puede elegir n suficientemente grande para suponer nulas todas las diferencias finitas de ese orden o sea *despreciables*. En tal caso una serie tal pertenecería, o podría considerarse al menos, prácticamente comprendida en la primera categoría estudiada.

VIII. *CALCULO DE LA SERIE O FUNCION POR MEDIO DEL TERMINO PRINCIPAL Y DIFERENCIAS PRINCIPALES.*

Supongamos en el cuadro siguiente conocidos: V_0, ΔV_0,

$\Delta^2 V_0, \Delta^3 V_0, \Delta^4 V_0$, siendo constantes por hipótesis todas las: $\Delta^4 V_0$, o sea: $\Delta^4 V_0 = \Delta^4 V_1 = \Delta^4 V_2 = \Delta^4 V$ ... etc.

V	ΔV	$\Delta^2 V$	$\Delta^3 V$	$\Delta^4 V$
V_0	ΔV_0	$\Delta^2 V_0$	$\Delta^3 V_0$	$\Delta^4 V_0$
V_1	ΔV_1	$\Delta^2 V_1$	$\Delta^3 V_1$	-
V_2	ΔV_2	$\Delta^2 V_2$	$\Delta^3 V_2$	-
V_3	ΔV_3	$\Delta^2 V_3$	-	-
V_4	ΔV_4	-	-	-
V_5	-	-	-	-
-	-	-	-	-
-	-	-	-	-

Por definición dada al comienzo:

$$\begin{array}{lll} \Delta^4 V_0 = \Delta^3 V_1 - \Delta^3 V_0 & \therefore & \Delta^3 V_1 = \Delta^4 V_0 + \Delta^3 V_0 \\ \Delta^4 V_1 = \Delta^3 V_2 - \Delta^3 V_1 & \therefore & \Delta^3 V_2 = \Delta^4 V_1 + \Delta^3 V_1 \\ \Delta^4 V_2 = \Delta^3 V_3 - \Delta^3 V_2 & \therefore & \Delta^3 V_3 = \Delta^4 V_2 + \Delta^3 V_2 \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \text{etc., etc.} & & \text{etc., etc.} \end{array}$$

Se deduce que se ha formado así toda la columna de las diferencias terceras en función de los datos dados.

Una vez calculada esa columna pasamos al cálculo de las diferencias segundas, observando que:

$$\begin{array}{lll} \Delta^3 V_0 = \Delta^2 V_1 - \Delta^2 V_0 & \therefore & \Delta^2 V_1 = \Delta^3 V_0 + \Delta^2 V_0 \\ \Delta^3 V_1 = \Delta^2 V_2 - \Delta^2 V_1 & \therefore & \Delta^2 V_2 = \Delta^3 V_1 + \Delta^2 V_1 \\ \Delta^3 V_2 = \Delta^2 V_3 - \Delta^2 V_2 & \therefore & \Delta^2 V_3 = \Delta^3 V_2 + \Delta^2 V_2 \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \text{etc., etc.} & & \text{etc., etc.} \end{array}$$

Formadas ya las segundas diferencias se obtienen las primeras, observando que:

$$\begin{array}{lll} \Delta^2 V_0 = \Delta V_1 - \Delta V_0 & \therefore & \Delta V_1 = \Delta^2 V_0 + \Delta V_0 \\ \Delta^2 V_1 = \Delta V_2 - \Delta V_1 & \therefore & \Delta V_2 = \Delta^2 V_1 + \Delta V_1 \\ \Delta^2 V_2 = \Delta V_3 - \Delta V_2 & \therefore & \Delta V_3 = \Delta^2 V_2 + \Delta V_2 \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \text{etc., etc.} & & \text{etc., etc.} \end{array}$$

Y es ahora fácil deducir la columna que permite hallar los valores de *la función*, para lo cual basta recordar que:

$$\begin{array}{lll}
\Delta V_0 = V_1 - V_0 & \therefore & V_1 = \Delta V_0 + V_0 \\
\Delta V_1 = V_2 - V_1 & \therefore & V_2 = \Delta V_1 + V_1 \\
\Delta V_2 = V_3 - V_2 & \therefore & V_3 = \Delta V_2 + V_2 \\
\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots \\
\text{etc., etc.} & & \text{etc., etc.}
\end{array}$$

Simples operaciones de suma, un poco largas es cierto, nos habrían llevado a conocer la función para distintos valores de la variable en función del término principal y diferencias principales.

Tercer ejercicio. — Hallar la serie o función cuyo término principal es 0 y cuyas diferencias principales son:

$$\Delta V_0 = 2, \ \Delta^2 V_0 = 4, \ \Delta^3 V_0 = 6, \ \Delta^4 V_0 = 1, \ \Delta^5 V_0 = 0$$

Lo mismo que se ha indicado en las fórmulas anteriores se ha hecho en el cuadro adjunto siguiendo el orden de las flechas que allí figuran, lo cual ahorra todo comentario.

V	ΔV	$\Delta^2 V$	$\Delta^3 V$	$\Delta^4 V$
$V_0 = 0$	2	4	6	1
$V_1 = 2$	6	10	7	1
$V_2 = 8$	16	17	8	1
$V_3 = 24$	33	25	9	1
$V_4 = 57$	58	34	10	1
$V_5 = 115$	etc.		etc.	

IX. *EXPRESION DE UNA DIFERENCIA PRINCIPAL DE ORDEN n, $\Delta^n V_0$, EN FUNCION DE LOS SUCESIVOS VALORES DE LA FUNCION* V.

De acuerdo a las definiciones del comienzo podremos escribir los siguientes grupos:

$$a) \left\{ \begin{array}{l}
\Delta V_0 = V_1 - V_0 \\
\Delta V_1 = V_2 - V_1 \\
\Delta V_2 = V_3 - V_2 \\
\cdots\cdots\cdots \\
\text{etc., etc.}
\end{array} \right.$$

$$b)\ \begin{cases} \Delta^2 V_0 = \Delta V_1 - \Delta V_0 = V_2 - 2V_1 + V_0 \\ \Delta^2 V_1 = \Delta V_2 - \Delta V_1 = V_3 - 2V_2 + V_1 \\ \Delta^2 V_2 = \Delta V_3 - \Delta V_2 = V_4 - 2V_3 + V_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \text{etc., etc.} \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} \Delta^3 V_0 = \Delta^2 V_1 - \Delta^2 V_0 = V_3 - 3V_2 + 3V_1 - V_0 \\ \Delta^3 V_1 = \Delta^2 V_2 - \Delta^2 V_1 = V_4 - 3V_3 + 3V_2 - V_1 \\ \Delta^3 V_2 = \Delta^2 V_3 - \Delta^2 V_2 = V_5 - 3V_4 + 3V_3 - V_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \text{etc., etc.} \end{cases}$$

Observando estos grupos que hemos deducido directamente, se ve que en ellos se han expresado las diferencias finitas primeras, segundas y terceras en función de los distintos valores de la función V.

En el grupo a) los coeficientes de las V del segundo miembro son los del binomio $(m\text{-}n)^1$; los del b) son los coeficientes del binomio $(m\text{-}n)^2$; los del c) son los de $(m\text{-}n)^3$. Probaremos que esta ley binomial es general, para lo cual será suficiente que admitida "como que rige" para las diferencias finitas de orden *n* demostremos "que rige también para la de orden *n + 1*".

Es decir, *admitimos* por un momento que:

$$\Delta^n V_0 = V_n - n V_{n-1} + \frac{n(n\text{-}1)}{\underline{|2}} V_{n-2} - \dots\dots$$
$$\dots + \frac{n(n\text{-}1)}{\underline{|2}} V_2 - n V_1 + V_0 \quad (6)$$

Esta fórmula implica admitir también que:

$$\Delta^n V_1 = V_{n+1} - n V_n + \frac{n(n\text{-}1)}{\underline{|2}} V_{n-1} - \dots\dots$$
$$\dots\dots + \frac{n(n\text{-}1)}{\underline{|2}} V_3 - n V_2 + V_1$$

Demostraremos ahora que la misma ley binomial rige para la diferencia: $\Delta^{n+1} V_0$.

En efecto; por definición: $\Delta^{n+1}V_0 = \Delta^n V_1 = \Delta^n V_0$, y sustituyendo en vez de éstos, sus valores admitidos, se tiene que:

$$\Delta^{n+1} V_0 = V_{n+1} - nV_n - V_n + \frac{n(n\text{-}1)}{\underline{|2}} V_{n-1} + nV_{n-1} - \dots$$
$$\dots - nV_2 - \frac{n(n\text{-}1)}{\underline{|2}} V_2 + V_1 + nV_1 - V_0$$

o sea:

$$\Delta^{n+1}V_0 = V_{n+1} - (n+1)\ V_n + \frac{(n+1).n}{\underline{|2}} V_{n-1} - \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots - \frac{(n+1).n}{\underline{|2}} V_2 + (n+1)\ V_1 - V_0$$

Esta fórmula deducida es análoga a la de: $\Delta^n V_0$, en que simplemente se ha cambiado el orden n por el nuevo $n+1$. En consecuencia si la ley binomial "regía" para el orden n rige para el $n+1$. Pero, al deducirla directamente en el cuadro c) vimos que se cumplía para el orden tercero, luego rige para el cuarto y así sucesivamente.

X. *EXPRESION DE LA FUNCION INCREMENTADA DE* n, V_n, *POR EL TERMINO PRINCIPAL Y LAS DIFERENCIAS PRINCIPALES DE LA SERIE.*

Conviene, en primer lugar, una nueva notación, que consiste en usar la letra D antepuesta a una función para significar el valor que aquélla toma cuando la variable ha sido incrementada de una unidad.

Así es equivalente escribir:

$$DV_x = V_{x+1}; \qquad DV_{x+1} = D.DV_x = V_{x+2};$$
$$DV_{x+2} = DDDV_x = V_{x+3}$$

y esta misma escritura se simplifica escribiendo:

$$DV_x = V_{x+1}; \quad D^2V_x = V_{x+2}; \quad D^3V_x = V_{x+3}; \text{ etc.}$$

y en general:

$$D^nV_x = V_{x+n}$$

De acuerdo a este nuevo simbolismo la fórmula (6) se transforma en:

$$(7) \quad \Delta^n V_0 = D^n V_0 - n.D^{n-1}V_0 + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} D^{n-2}V_0 - \cdots$$
$$\cdots + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} D^2V_0 - n\ DV_0 + V$$

En esta expresión puede tratarse el símbolo de la operación D, ya definido, como si fuera una cantidad y no un símbolo y separándolo de la función V_0 esa expresión puede ser puesta en forma compacta del siguiente modo:

$$\Delta^n V_0 = V_0 \Big(D^n - n\ D^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} D^{n-2} - \cdots\cdots$$
$$\cdots + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} D^2 - n + 1 \Big)$$

o sea:

$$\Delta^n V_0 = \left(D-1 \right)^n \cdot V_0$$

Tomando los símbolos en general, resulta:

$$\left\{ \begin{array}{ll} & \Delta^n = \left(D-1 \right)^n \\ \therefore & D = 1 + \Delta \\ \therefore & D^n = \left(1+\Delta \right)^n \end{array} \right.$$

Estas tres ecuaciones fundamentales expresan las relaciones que hay entre los símbolos de las diferencias finitas y los incrementos finitos de la función, o sea entre Δ y D.

A través del más intrincado análisis estos símbolos pueden ser tratados como si ellos fueran símbolos de cantidades, e interpretándose el resultado como si ellos fueran símbolos, él resulta correcto. Por lo que acaba de decirse, tendremos que:

$$V_n = D^n V_0 = \left(1+\Delta \right)^n V_0 \qquad (8)$$

o sea:

$$V_n = \left(1 + n\Delta + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} \Delta^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}} \Delta^3 + \dots \right.$$
$$\left. \dots + \Delta^n \right) . V_0$$

y, en fin:

$$(9) \quad V_n = V_0 + n\Delta V_0 + \frac{n(n-1)}{\underline{|3}} \Delta^2 V_0 +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|2}} \Delta^3 V_0 + \dots\dots + \Delta^n V_0$$

En esta última fórmula, de enorme importancia en el cálculo de diferencias finitas, los símbolos: V_0, ΔV_0, $\Delta^2 V_0 \dots$ $\Delta^n V_0$, son el *término principal y las diferencias principales de la serie.*

Cuarto ejercicio.—Sabiendo que el término principal y diferencias principales de una serie son: $V_0 = 0$, $\Delta V_0 = 1$, $\Delta^2 V_0 = 2$, $\Delta^3 V_0 = 3$, $\Delta^4 V_0 = 4$, calcular el término de lugar 10, o sea el: V_9.

Desde luego se admite que las diferencias cuartas son constantes, y las quintas, etc., nulas.

Aplicando la fórmula (8) se tendrá:

$$V_9 = \left(1+\Delta \right)^9 V_0$$

es decir:

$$V_9 = V_0 + 9\,\Delta V_0 + \frac{9.8}{1.2}\Delta^2 V_0 +$$

$$+ \frac{9.8.7}{1.2.3}\Delta^3 V_0 + \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4}\Delta^4 V_0$$

siendo evidente que es inútil añadir más términos al desarrollo, pues serían todos nulos.

Sustituyendo valores tendremos:

$$V_9 = 0 + 9 + \frac{9.8}{1.2}.2 + \frac{9.8.7.}{1.2.3}.3 + \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4}.4 = 837$$

A este mismo resultado se podría haber llegado por *sumaciones*, como se hizo en el cuadro del ejercicio tercero, pero se comprende *cuanto ahorro de trabajo* hay de este modo.

Quinto ejercicio. — Hallar la población que corresponde al año 1920 con los datos del ejercicio segundo, aplicando la fórmula binomial. Comprobarlo por la construcción directa de la serie.

Simbolismo. — Si observamos la fórmula (9) se ve que la letra n significa el grandor particular que tiene la variable x. Así: V_n, podría escribirse con más claridad, de acuerdo al hábito de la escritura matemática, con: V_x y en tal simbolismo esa fórmula sería:

$$(10)\quad V_x = V_0 + x.\ \Delta V_0 + \frac{x\ (x-1)}{\lfloor 2}\Delta^2 V_0 +$$

$$+ \frac{x\ (x-1)\ (x-2)}{\lfloor 3}\Delta^3 V_0 + \dots\dots$$

Esta fórmula es en realidad el aspecto de la seria de Mac Laurin cuando los *incrementos son finitos*. Se impone sobre la de Mac Laurin para las cuestiones en que no se conoce la *expresión analítica de la función,* como sucede en los problemas de interpolación de la estadística o de fenómenos que sólo se conocen por mediciones empíricas.

Dada su enorme aplicación, preferimos llegar a ella por otro camino que demuestra más su estrecha vinculación con la de Taylor (caso Mac Laurin de: x = 0).

XI. *EXPRESION DE UNA FUNCION RACIONAL Y ENTERA DE x, DE GRADO m, EN SERIES DE FACTORIALES.*

Comenzaremos por hallar las diferencias finitas de una expresión factorial de m factores y que representaremos con $x^{(m)}$.

Se tendrá:

$$V_x = x^{(m)} = x.(x-1).(x-2).(x-3)\dots$$
$$\dots\Big(x-(m-2)\Big).\Big(x-(m-1)\Big) =$$
$$= x.(x-1).(x-2).x-3)\ \dots\ .(x-m+2).(x-m+1)$$

Incrementando se tiene:

$$V_{x+1} = x+1^{(m)} = (x+1).\ x.(x-1).(x-2)\dots$$
$$\dots.(x-m+3).(x-m+2)$$

y restando se tendrá:

$$\Delta V_x = V_{x+1} - V_x =$$
$$= \Big[(x+1) - (x-m+1).\Big]\ x.(x-1).(x-2)\dots(x-m+2)$$

o bien:

$$\Delta V_x = m.\ x\ (x-1)\ (x-2)\dots\dots(x-m+2)$$

En esta expresión hay $m-1$ factores y de acuerdo al anterior simbolismo se podrá escribir:

$$\Delta V_x = m.\ x^{(m-1)}$$

o mejor aun:

$$\Delta x^{(m)} = m.\ \ x^{(m-1)}$$

Repitiendo la operación, se tiene:

$$\Delta^2\ x^{(m)} = m\ (m-1)\ x^{(m-2)}$$

y en general:

$$\Delta^n x^{(m)} = m.(m-1).(m-2)\dots(m-n+1).x^{(m-n)}$$

Dicho lo anterior consideremos una función: $\varphi_{(x)}$ y expresémosla en serie de factoriales que según lo dicho anteriormente será, (1) siendo h el incremento que se da a x:

$$(e)\quad \varphi_{(x)} = a + b.x + c.x.(x\text{-}h) + d.x.(x\text{-}h).(x\text{-}2h) + \dots$$
$$\dots + K.x.(x\text{-}h).(x\text{-}2h).(x\text{-}3h)\ \dots\ (x\text{-}m+h)$$

Según la notación anterior esta misma expresión puede escribirse, siendo acá el intervalo de los factores, h y no uno:

$$\varphi_{(x)} = a + b\ x + c\ x^{(2)} + d\ x^{(3)} + \dots + k\ x^{(m)}$$

Incrementemos la x de una cantidad h o sea: $\Delta_x = h$, y se tendrá:

$$\varphi\ (x+\Delta x) = a + b\ (x+h) + c\ (x+h)^{(2)} +$$
$$+ d\ (x+h)^{(3)} + \dots + K\ (x+h)^{(m)}$$

y restándole la anterior se tiene:

(1) Ver fórmula (2).

$$\Delta\varphi(x) = b\left[(x+h) - x\right] + c\left[(x+h)^{(2)} - x^{(2)}\right] +$$
$$+ d\left[(x+h)^{(3)} - x^{(3)}\right] + \ldots + K\left[(x+h)^{(m)} - x^{(m)}\right]$$

Cada corchete contiene diferencias finitas de factoriales y aplicando a ellos los resultados de la fórmula d) se tiene:

$$\Delta\varphi(x) = b.h + 2.c.h.x^{(1)} + 3.d.h.x^{(2)} + \ldots + m.K.h.x^{(m-1)}$$

Si a esta misma expresión se le aplica idéntico procedimiento se obtiene:

$$\Delta^2\varphi(x) = 2.1.\,c.h^2 + 3.2.d.h^2\, x^{(1)} + \ldots + m(m-1)K\, h^2\, x^{(m-2)}$$

y análogamente:

$$\Delta^m \varphi(x) = m\ (m-1)\ (m-2)\ \ldots\ .3.2.1.h^m$$

Recordando que: $\Delta_x = h$, y dividiendo estas tres últimas igualdades por h, h^2. . . . h^m, se obtiene finalmente:

$$\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x} = b + 2.c.x^{(1)} + 3.d.x^{(2)} + \ldots + m.K.\, x^{(m-1)}$$

$$\frac{\Delta^2\varphi(x)}{(\Delta x)^2} = 2.1.c + 3.2.d.x^{(1)} + \ldots + m(m-1).K.x^{(m-2)}$$

.. ..

.. ..

.. ..

$$\frac{\Delta^m\varphi(x)}{(\Delta x)^m} = m\ (m-1)\ (m-2)\ \ldots\ .\ 3.2.1$$

Si damos a x el valor cero, estas ecuaciones se transforman en:

$$\left\{\begin{array}{ll}
\varphi(0) = a & \therefore\ a = \varphi(0) \\[2mm]
\dfrac{\Delta\varphi(0)}{\Delta x} = b & \therefore\ b = \dfrac{\Delta\varphi(0)}{\Delta x} \\[2mm]
\dfrac{\Delta\varphi^2(0)}{(\Delta x)^2} = 2.1.c & \therefore\ c = \dfrac{1}{\underline{|2}} \cdot \dfrac{\Delta^2\varphi(0)}{(\Delta x)^2} \\[2mm]
\dfrac{\Delta^3\varphi(0)}{(\Delta x)^3} = 3.2.1.d & \therefore\ d = \dfrac{1}{\underline{|3}} \cdot \dfrac{\Delta^3\varphi(0)}{(\Delta x)^3} \\[2mm]
\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \\[2mm]
\dfrac{\Delta^m\varphi(0)}{(\Delta x)^m} = m(m-1)\ \ldots\ 3.2.1.K & \therefore\ K = \dfrac{1}{\underline{|m}} \cdot \dfrac{\Delta^m\varphi(0)}{(\Delta x)^m}
\end{array}\right.$$

Si se medita un instante se reconoce que: $\varphi_{(0)}$, es el término principal de la serie antes denominada: V_0; $\frac{\Delta\varphi_0(0)}{\Delta x}$ es la relación de la primer diferencia finita principal al incremento de la variable . . . . etc., etc.

Si se supone que: $\Delta_x = h = 1$ (o sea crecimientos unitarios de la variable) la fórmula factorial (e) se transforma por lo recién deducido en:

$$(11)\quad \varphi(x) = \varphi(0) + x\,\Delta\varphi(0) + \frac{x.(x\text{-}1)}{\underline{|2}}\,\Delta^2\varphi(0) + \\ + \frac{x.(x\text{-}1).(x\text{-}2)}{\underline{|3}}\,\Delta^3\varphi(0) + \ldots . \\ \ldots . + \frac{x.(x\text{-}1).(x\text{-}2)\ldots\ldots(x-m+1)}{\underline{|m}}\,\Delta^m\varphi(0)$$

Por lo que recién termina de exponerse, esta fórmula, obtenida por series de factoriales, es idéntica en concepto y resultado a la (10) a que habíamos llegado por un camino completamente distinto.

XII. *SERIE DE MAC LAURIN*

Es digno de notarse que tanto en la fórmula (9) como en la (10), los incrementos de x han sido a la postre *uno*. Si en cambio hubieran sido infinitamente pequeños dx los incrementos de la variable, la (11) se transforma, teniendo en cuenta los valores de *a, b, c...* etc., obtenidos en el cuadro último en

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\,\frac{d\varphi(0)}{dx} + \frac{x(x-dx)}{\underline{|2}} \cdot \frac{d^2\varphi(0)}{(dx)^2} + \\ + \frac{x(x-dx)(x-2dx)}{\underline{|3}} \cdot \frac{d^3\varphi(0)}{(dx)^3} + \ldots\ldots + \\ + \frac{x(x-dx)(x-2dx)\ \ldots\ (x-m.dx+dx)}{\underline{|m}} \cdot \frac{d^m x(0)}{(dx)^m}$$

Ahora bien; por el *postulado fundamental* del cálculo diferencial se tiene que:

$$x\,(x-dx) = x^2$$
$$x\,(x-dx)\,(x-2dx) = x^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

etc., etc.

y además se sabe que:

$$\frac{d\varphi(0)}{d\,x} = \varphi^{I}(0)$$

$$\frac{d^{2}\varphi(0)}{(d\,x)^{2}} = \varphi^{II}(0)$$

$$\frac{d^{3}\varphi(0)}{(d\,x)^{3}} = \varphi^{III}(0) \quad \ldots\ldots \text{ etc., etc.}$$

con lo cual esta última expresión podrá escribirse:

$$\varphi(x)=\varphi(0)+x\varphi^{I}(0)+\frac{x^{2}}{\underline{|2}}\,\varphi^{II}(0)+\frac{x^{3}}{\underline{|3}}\,\varphi^{III}(0)\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots \text{ etc., etc.}$$

que es la célebre fórmula de Taylor, deducida como un caso especial de la fórmula binomial o factorial, del cálculo de diferencias finitas.

Cuando no se conoce la función analítica no pueden hallarse las derivadas sucesivas y es por lo tanto imposible usar el desarrollo de Taylor o Mac Laurin, como sucede en todas las mediciones y es en cambio utilizable la fórmula (11) cuando hay un número suficiente de medidas u observaciones.

Observación

Las fórmulas equivalentes (9), (10) y (11) justifican la división fundamental que se hizo respecto a las funciones de una variable.

En efecto, si las diferencias de un cierto orden, las de cuarto, por ejemplo, son constantes, el desarrollo binomial (o factorial) tiene cinco términos y puede calcularse su valor, cualquiera sea el exponente del binomio.

Si en cambio ocurre lo contrario, serían innumerables los términos principales de la serie, mientras que en el desarrollo del binomio no entrarían más que los que fija la potencia, vale decir, se considerarían constantes las diferencias correspondientes al exponente, lo que va contra la realidad.

Es por esto que a tales funciones no puede aplicárseles el cálculo de diferencias finitas.

Las expresiones o fenómenos que de este modo se comportan no pueden ponerse en ecuación de forma polinomial entera.

XIII. *ECUACION POLINOMIAL ENTERA DE UN FENOMENO ESTADISTICO EN QUE LOS INCREMENTOS DE LA VARIABLE ESTAN EN SERIE ARITMETICA POR MEDIO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS.*

Cuando para *n* valores de la variable que suponemos *a, b, c, ... n* y que están en progresión aritmética se conocen los correspondientes valores de la función V_a, V_b, V_c,..... V_n, puede sencillamente encontrarse la ecuación sustituta o polinomial entera del fenómeno que se estudia.

Si sólo se conocen *dos* valores V_a y V_b, para dos estados de la variable es evidente que la función sustituta es una recta, o sea una parábola de *primer* grado: si hay tres datos es una de *segundo* grado . . . . y para *n* datos una de orden *n-1.*

Veremos con claridad el procedimiento, aplicándolo a un caso concreto: *encontrar la ley de crecimiento de la población a que se refiere el Ejercicio segundo.*

Considerando el año 1880 como año 0 (para simplicidad de cálculos), el 1885 como 5, etc., etc., se tendrá que los valores *de la variable* (tiempo) conocidos son $n = 5$.

$$a = 0;\ b = 5;\ c = 10;\ d = 15;\quad e = 20$$

y los de la función (población):

$$V_0 = 10000;\quad V_5 = 12000;\quad V_{10} = 16000$$
$$V_{15} = 25000\quad V_{20} = 40000;$$

Habiendo $n = 5$ datos, la parábola sustituta será de *cuarto* grado y según antes se expuso su forma será:

$$V_x = A + B.X + C.X^2 + D.X^3 + E.X^4 \tag{12}$$

Hay ahora que calcular A, B, ... E.

Sustituyendo ordenadamente en vez de *x* sus cinco valores dados y en vez de V_x las poblaciones correspondientes a esos años, se tendrá:

$$(13)\left\{\begin{array}{l} V_0 = 10000 = A+B.\ 0+C.\ 0^2+D.\ 0^3+E.\ 0^4 \\ V_5 = 12000 = A+B.\ 5+C.\ 25+D.\ 125+E.\ 625 \\ V_{10} = 16000 = A+B.10+C.100+D.1000+E.\ 10000 \\ V_{15} = 25000 = A+B.15+C.225+D.3375+E.\ 50625 \\ V_{20} = 40000 = A+B.20+C.400+D.8000+E.160000 \end{array}\right.$$

Formando ahora las diferencias primeras se tiene:

$$(14)\quad \begin{cases} \Delta V_0 = 2000 = B.5+C.\ 25+D.\ 125+E.\ 625 \\ \Delta V_5 = 4000 = B.5+C.\ 75+D.\ 875+E.\ 9375 \\ \Delta V_{10} = 9000 = B.5+C.125+D.2375+E.\ 40625 \\ \Delta V_{15} = 15000 = B.5+C.175+D.4625+E.109375 \end{cases}$$

Formando las diferencias segundas se tiene:

$$(15)\quad \begin{cases} \Delta^2 V_0 = 2000 = C.50 + D.\ 750 + E.\ 8750 \\ \Delta^2 V_5 = 5000 = C.50 + D.1500 + E.31250 \\ \Delta^2 V_{10} = 6000 = C.50 + D.2250 + E.68750 \end{cases}$$

y análogamente:

$$(16)\quad \begin{cases} \Delta^3 V_0 = 3000 = D\ .\ 750 + E\ .\ 22500 \\ \Delta^3 V_5 = 1000 = D\ .\ 750 + E\ .\ 37500 \end{cases}$$

y finalmente:

$$\Delta^4 V_0 = -2000 = E\ .\ 15000.$$

De esta última ecuación se deduce que:

$$E = \frac{-2000}{15000} = -0{,}13333\ .\ .\ . = -\frac{2}{15}$$

Sustituído este valor en la (16) se obtiene:

$$3000 = D\ .\ 750 - \frac{2}{15}\ .\ 22500$$

$$\therefore \quad D = 8$$

Sustituyendo los valores de D y E en la (15) se obtiene:

$$2000 = C\ .\ 50 + 8\ .\ 750 - \frac{2}{15}\ .\ 8750$$

$$\therefore \quad C = -56{,}6666$$

y sustituyendo estos valores conocidos en la (14) se obtiene:

$$2000 = B\ .\ 5 - 56{,}6666\ .\ 25 + 8\ .\ 125 - \frac{2}{15}\ .\ 625$$

$$\therefore \quad B = 500$$

En cuanto al valor de A, ya es conocido por la primera de las fórmulas (13), siendo $A = 10000$.

La ecuación que expresa el crecimiento de dicha población es en un año x cualquiera.

$$(17)\quad V_x = 10000 + 500.x - 56{,}6666.x^2 + 8.x^3 - \frac{2}{15}.x^4$$

Sexto Ejercicio — Se conoce el gasto de carbón por hora V_{10}; V_{20}; V_{30}; V_{40}; V_{50}, de un barco cuando marcha a velocidades de 10, 20, 30, 40 y 50 kilómetros por hora. ¿Cómo se procedería para encontrar la ecuación del gasto de carbón en función de la velocidad?

XIV. *CASO EN QUE LOS INCREMENTOS DE LA VARIABLE NO ESTAN EN SERIE ARITMETICA. — METODO DE LAGRANGE.*

Como surge claramente del ejercicio que terminamos de calcular si los valores de x no forman progresión aritmética no es aplicable el método de las diferencias finitas. Y es así cómo muchas veces se presentan las observaciones, a intervalos desiguales de la variable.

Suponemos pues que para valores conocidos cualesquiera de la variable: $x=a$, $x=b$ . . . . . $x=n$, la función toma valores conocidos V_a, V_b, ... V_n.

La parábola sustituta de n observaciones, sabemos que es de grado n-1, pero, en vez de escribirla en la forma de la ecuación (1) ó (2) adoptaremos para ella lo que antes se denominó de *factores desiguales*, o sea (1):

$$\begin{aligned} V_x = & A.(x-b).(x-c) \;.\;.\;.\;.\;.\; (x-n) + \\ & + B.(x-a).(x-c) \;.\;.\;.\;.\;.\; (x-n) + \\ & + C.(x-a).(x-b) \;.\;.\;.\;.\;.\; (x-n) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + K.(x-a).(x-b) \;.\;.\;.\;.\;.\; (x-l) \end{aligned}$$

siendo l el valor conocido *anterior* a n. En esta ecuación nuestras incógnitas son A, B, C, ... K.

Hagamos: $x=a$, en ambos miembros de esa ecuación y se obtendrá una nueva igualdad, donde desaparecerán todos los términos *menos el primero,* pues en ellos figurará el factor (a-a), resultando finalmente:

$$V_a = A.(a-b).(a-c) \;.\;.\;.\;.\;.\; (a-n)$$

$$\therefore \quad A = \frac{V_a}{(a-b)\ (a-c)\ \ldots\ldots\ (a-n)}$$

Haciendo ahora en ambos miembros de esa misma ecuación: $x=b$, desaparecerán todos los términos *menos el segundo,* debido al factor (b-b) y quedará:

$$V_b = B.(b-a).(b-c) \;.\;.\;.\;.\;.\; (b-n)$$

$$\therefore \quad B = \frac{V_b}{(b-a)\ (b-c)\ \ldots\ldots\ (b-n)}$$

(1) Ver fórmula (3).

y se obtiene análogamente:

$$C = \frac{V_c}{(c-a)\ (c-b)\ \ldots\ldots\ (c-n)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K = \frac{V_n}{(n-a)\ (n-b)\ \ldots\ldots\ (n-l)}$$

Estas fórmulas son fácilmente calculables por logaritmos y sustituyendo los valores obtenidos en función de los datos de la cuestión se obtiene la ecuación polinomial entera del fenómeno que se estudia.

La fórmula de Lagrange si bien es muy general obliga a muchos cálculos para obtener el valor de Vx para cada valor particular que se dé a x.

XV. *INTERPOLACION*

De lo anteriormente expuesto resulta que cuando se han medido n estados o valores de la función para n estados de la variable independiente la ecuación del fenómeno o asunto estudiado está dada por las fórmulas (10) o (1) cuando dicha variable sigue una progresión aritmética, o por la (3) cuando no la sigue.

Es entonces sencillo interpolar el valor de la función para otro de la variable en que el valor de aquélla *no ha sido medido.*

Aplicando el problema al *ejercicio segundo* nos proponemos, por ejemplo: averiguar qué población tenía la ciudad considerada el año 1881.

Si procedemos por Cálculo de Diferencias Finitas la ecuación general (10) se transforma en este caso, teniendo presente que: $x = \frac{1}{5}$, en:

$$\Delta V_{0+\frac{1}{5}} = V_0 + \frac{1}{5}\Delta V_0 + \frac{1}{2!}\,\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\Delta^2 V_0 + \frac{1}{3!}\,\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)$$

$$\left(\frac{1}{5}-2\right)\Delta^3 V_0 + \frac{1}{4!}\,\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)\left(\frac{1}{5}-3\right)\Delta^4 V_0$$

y sustituyendo los valores obtenidos en dicho ejercicio se tiene:

(18)

$$V_{0+\frac{1}{5}} = V_{1881} = 10000 + \frac{1}{5}\,2000 + \frac{1}{2!}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)2000 + \frac{1}{3!}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)3000 + \frac{1}{4!}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)\left(\frac{1}{5}-3\right)(-2000)$$

y ejecutando operaciones:

$$V_{1881} = 10451.$$

Si en vez de esta fórmula usamos la (17) bastará hacer $x=1$, y se tiene:

$$V_x = 10000 + 500 - 56{,}666 + 8 - \frac{2}{15} -$$

y ejecutando:

$$V_{1881} = 10451{,}21$$

Aparentemente esta fórmula parece más práctica, pero no hay que olvidar todo *el trabajo que costó hallarla.*

En cambio, la fórmula binomial de las diferencias finitas, es sencillamente la de Newton y basta en cada caso hacer un cuadro análogo al (1) *para obtener el término principal y las diferencias finitas principales.* Se interpola, pues, con este método con suma rapidez.

Examinando la fórmula (18) se ve inmediatamente que los términos van bajando de valor absoluto cuando crece el rango, en general, y esto permite muchas veces despreciar los que siguen a las diferencias finitas de *cuarto orden.*

En este caso, cuando se desea resolver una ecuación de grado superior al cuarto basta encontrar dos valores (o tres) lo más próximos posible que hagan cambiar el signo a la y (regla de Descartes citada). Entre los valores de x que tal condición verifican hay una raíz de la ecuación.

Se pueden interpolar entre ellos otros dos (o tres) valores de x equidistantes y calcular los valores de y. Se forma así una serie a la que se puede aplicar (para estos cuatro (o cinco) valores) la serie binomial de diferencias finitas y es entonces sencillo calcular los valores de x que anulan la función, pues ya se está dentro del cuarto grado, que es el límite de las soluciones algebraicas. Sólo queda por hacer notar que esta última función formada no es exactamente la primera y por ello la raíz hallada no es matemáticamente exacta, pero, puede ser prácticamente suficiente.

No entramos en más detalles, pues ese tema corresponde específicamente al método de solución de ecuaciones de grado superior al cuarto. Sólo hemos deseado bosquejar la enorme importancia que para ello tiene el Cálculo de Diferencias Finitas.

Por lo demás, la Estadística general, tomada en su carácter metodológico, echa mano siempre a este sencillísimo y valiosísimo instrumento de análisis.

Agosto 31, 1929.