969

Revista
de
Ciencias Económicas

PUBLICACION DE LA FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS
CENTRO DE ESTUDIANTES Y COLEGIO
DE GRADUADOS

Año XVIII **Octubre, 1930** **Serie II, Nº 111**

DIRECCION Y ADMINISTRACION
CALLE CHARCAS 1835
BUENOS AIRES

de Carlos E. Dieulefait

Sobre el Ajustamiento de la Mortalidad

1.—Tiene por objeto la presente nota, hacer ver dentro de qué ideas generales tiene su base el método usado por los señores G. King y G. F. Hardy, para el ajustamiento de las tablas de mortalidad, cuando se acepta la ley de Gompertz-Makeham.

2.—Sabido es que al integrar la ecuación diferencial de la mortalidad, según la hipótesis de Gompertz, se tiene — después de una sencilla substitución — *:

(1) $y_i = k.s^{x_i}(g)^{c^{x_i}}$ ($y = l_x$ según la notación preponderante).

El problema que se plantea es el de ajustar la (1) siendo los datos $(x_i; y_i)$, con x_i variable, correspondiente a las edades.

No figurando en la (1) los parámetros k, s, g y c linealmente, el recurso de los cuadrados mínimos debe afrontarse mediante un previo desarrollo en Taylor, considerando un valor inicial aproximado: $\bar{k}$, $\bar{s}$, $\bar{g}$ y $\bar{c}$.

De la aproximación de los anteriores parámetros se sigue, indicando con Δk, Δs, Δg y Δc las correcciones a que deben someterse que, los valores exactos son:

$$k = \bar{k} + \Delta k;\quad s = \bar{s} + \Delta s;\quad g = \bar{g} + \Delta g;\quad c = \bar{c} + \Delta c,$$

y de consiguiente:

$$y = f(x, k, s, g, c) = f(x, \bar{k} + \Delta k, \bar{s} + \Delta s, \bar{g} + \Delta g, \bar{c} + \Delta c,) =$$

$$= f(x, \bar{k}, \bar{s}, \bar{g}, \bar{c}) + f'_k \Delta k + f'_s \Delta s + f'_g \Delta g + f'_c \Delta c.$$

tomándose las f' en el punto $(x, \bar{k}, \bar{s}, \bar{g}, \bar{c})$ e interrumpiéndose los términos del desarrollo de Taylor en los cuales los errores aparecen a mayores potencias

(*) V. TEXT, *Book de l'Institut des Actuaires de Londres*, pág. 73-74.

Estando entonces en $y = f + f'_k \Delta k + f'_s \Delta s + f'_g \Delta g + f'_c \Delta c.$ los errores linealmente, se los puede determinar por cuadrados mínimos y se tendrán los valores más aproximados $k + \Delta k$, etc. El resultado no es exacto por efectos de que el desarrollo de Taylor se ha interrumpido para potencias mayores que 1. Luego para obtener una mejor aproximación habrá que recomenzar el cálculo conservando las mismas ideas.

Por esta razón es que, en las aplicaciones, el ajustamiento debe enderezarse en otro sentido.

3.—Para un cierto grupo de funciones no lineales en sus parámetros, comunes en las aplicaciones, existen fáciles transformaciones basadas en logaritmaciones y diferenciaciones infinitas que, convenientemente combinadas, permiten transformarlas en funciones lineales respecto a sus parámetros y de consiguiente fácilmente ajustables por cuadrados mínimos.

Este procedimiento puede aplicarse a la función (1) de Makeham y se tiene, logaritmando:

$$\log y_i = \log k + x_i \log s + c^{x_i} . \log g \qquad (3)$$

La expresión (3) es tal que mientras que x varía aritméticamente, log y varía geométricamente. La función (3) cae pues, dentro de la forma siguiente:

$$(4) \qquad Y_i = a + b\, x_i + d\, c^{x_i}$$

siendo: $Y_i = \log y_i \qquad b = \log s$

$a = \log k \qquad d = \log g$

pudiendo transformarse la (4) en una ecuación lineal. Estando dificultada la logaritmación por las sumas de la (4) usando diferencias se tiene:

$$\Delta Y_i = b \Delta x + d c^{x_i} \left(c^{\Delta x} - 1 \right) \quad \text{además } \Delta^2 Y_i = \Delta Y_{i+1} - \Delta Y_i$$

y siendo $\Delta Y_{i+1} = b \Delta x + d c^{x_{i+1}} \left(c^{\Delta x} - 1 \right)$ se tiene:

$$\Delta^2 Y_i = d . c^{x_i} \left(c^{\Delta x} - 1 \right)^2$$

Luego logaritmando:

$$\log \Delta^2 Y_i = \log \left[d \left(c^{\Delta x} - 1 \right)^2 \right] + x_i . \log c. \qquad \text{o sea:}$$

$$(5) \qquad \mathcal{V}_i = A + B\, x_i \quad \text{con} \quad A = \log d + \log \left(c^{\Delta x} - 1 \right)^2,$$

$$B = \log c; \quad \mathcal{V}_i = \log \Delta^2 Y_i$$

Para determinar A y B bastará otra condición análoga a la (5). Sea la (5'): $V_{i+1}=A+Bx_{i+1}$ de donde se tiene restando (5') - (5):

$$B=\frac{V_{i+1}-V_i}{\Delta x}$$

y substituyendo por los primeros valores se tiene:

$$B=\log c=\frac{\log\Delta^2\log y_{i+1}-\log\Delta^2\log y_i}{\Delta x}$$

que es precisamente la fórmula empleada por los Srs. Hardy-King para el cálculo del primer parámetro, con log c.
El referido método queda, pues, fundamentado, como un caso particular de la transformación de funciones.