24

Revista

de

Ciencias Económicas

PUBLICACIÓN DE LA FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
CENTRO DE ESTUDIANTES Y COLEGIO
DE GRADUADOS

La dirección no se responsabiliza de las afirmaciones, los juicios y las doctrinas que aparezcan en esta Revista, en trabajos suscritos por sus redactores o colaboradores.

DIRECTORES

Victor M. Molina

Por la Facultad

Juan Girelli

Por el Centro de Estudiantes

Emilio Bernat

Por el Centro de Estudiantes

SECRETARIO DE REDACCIÓN

Carlos E. Daverio

REDACTORES

Enrique Loudet

José H. Porto

Por la Facultad

Andrés D. J. Devoto

Por el Centro de Estudiantes

Alberto Bonfanti

Por el Centro de Estudiantes

Año XX

Mayo, 1932

Serie II, N° 130

DIRECCIÓN Y ADMINISTRACIÓN

CALLE CHARCAS 1835

BUENOS AIRES

de José González Galé

Sobre un problema de probabilidades

1. — El primer tratado de probabilidades que se conoce se titula *De ratiociniis in Ludo Alea* y es obra del famoso matemático Huygens. Fué impreso en 1657, según Todhunter, y, como su nombre lo indica, está exclusivamente dedicado a cuestiones relativas a los juegos de azar.

Al final del libro, y después de haber demostrado una serie de proposiciones de carácter general, propone a sus lectores cinco problemas para que traten de resolverlos por su cuenta.

Los problemas han sido resueltos hace muchísimos años. Santiago Bernoulli, en su famoso libro *Ars Conjectandi*, impreso en 1713, años después de su muerte, da las soluciones de todos, pero, al resolver en clase uno de ellos, modifiqué, inconscientemente, el enunciado y resultó un caso interesante aunque, evidentemente, muy elemental. Pero puede ayudar a esclarecer la naturaleza del análisis que requiere el cálculo de las probabilidades, y, en tal sentido, resultará útil a más de un lector.

2. — Resolvamos, ante todo, el problema tal como Huygens lo enunció.

Tres jugadores, A, B y C sacan cada uno una bolilla de entre doce de las cuales ocho son negras y cuatro blancas. Juegan con los ojos tapados y continúan las extracciones hasta que uno de ellos — que será el vencedor — saque la primera bolilla blanca. Determinar las probabilidades de A, B y C sabiendo que empieza A y que los otros siguen en el orden nombrado.

Santiago Bernoulli resolvió el problema considerando

tres hipótesis: a) que la bolilla extraída no se volvía a reponer; b) que se reponía; c) que cada uno de los tres jugadores disponía de una *serie de doce bolillas* exclusivamente para él, y que la bolilla extraída no se reponía.

Como este tercer caso no había sido, verosimilmente, encarado por Huygens lo dejaremos de lado.

1ª hipótesis. No se repone la bolilla extraída.

A puede ganar a la 1ª, a la 2ª y a la 3ª extracción porque antes de que él gane no pueden haber salido más que 8 bolillas negras: todas las que hay.

Y sus probabilidades en cada caso son:

$$\frac{4}{12} ; \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} ; \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{6}$$

que corresponden a la salida de la *primera bolilla blanca*, en la primera, cuarta o séptima extracción. En total, su probabilidad es:

$$\frac{4}{12} + \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{77}{165}$$

Análogamente, la probabilidad de que gane B es la suma de las probabilidades que corresponden a la salida de la primera bolilla blanca, a la segunda, quinta u octava extracción. O sea:

$$\frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{53}{165}$$

Y la de que gane C, es la suma de las probabilidades de que la primera bolilla blanca que se extraiga sea la tercera, la sexta o la novena.

$$\frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} = \frac{35}{165}$$

Y, como es natural, las tres probabilidades suman *uno*.

2ª hipótesis. Se repone la bolilla extraída.

Aquí las probabilidades de sacar una bolilla blanca o negra son constantemente iguales a:

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{3} \text{ y á } \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \text{ respectivamente.}$$

La probabilidad de cada jugador es, ahora, la suma de los términos de una serie geométrica infinita puesto que, no agotándose las bolillas negras, puede retardarse indefinidamente la salida de la primera bolilla blanca.

El jugador A puede ganar a la primera, a la cuarta, a la séptima... extracción.

Las probabilidades en cada caso son:

$$\frac{1}{3}; \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3}; \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \frac{1}{3}; \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \frac{1}{3}; \dots$$

Y en total:

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \frac{1}{3} + \dots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{8}{27}} = \frac{9}{19}$$

Del mismo modo, el jugador B puede ganar a la segunda, a la quinta, a la octava... extracción.

Y su probabilidad es:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \dots = \frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{8}{27}} = \frac{6}{19}$$

Y la probabilidad de C, que puede ganar a la tercera, sexta, novena... extracción, es:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \dots = \frac{\frac{4}{27}}{1 - \frac{8}{27}} = \frac{4}{19}$$

Y, como es lógico, también en este caso las tres probabilidades suman *uno*.

3.—Modifiquemos, ahora, el enunciado. Consideremos sólo dos jugadores: A y B, y admitamos que uno se propone sacar una bolilla blanca y el otro una bolilla negra. Gana el primero que logra su propósito. Y dejemos el mismo número de bolillas que antes: 4 blancas y 8 negras. El que hace la primera extracción es A.

Y, también aquí, admitiremos dos casos: a) que *no* se reponga la bolilla extraída; b) que se reponga.

a) No se repone la bolilla extraída.

Si A no gana a la primera extracción, para que pueda ganar a la 3ª, ha de haber sacado B una bolilla blanca, pues de lo contrario sacando B una bolilla negra, sería él el vencedor. Y para que A pueda ganar a la 5ª extracción es preciso que B haya sacado ya dos bolillas blancas. Se ve, pues, que para que A pueda ganar tiene que sacar la bolilla blanca antes de que B las haya sacado todas, es decir antes de la 9ª extracción. (Para entonces, B ha hecho ya cuatro extracciones y, si ha perdido siempre, no quedan ya bolillas blancas).

Por lo tanto A puede ganar en la 1ª, 3ª, 5ª o 7ª extracción.

La probabilidad de acertar a la primera extracción es:

$$\frac{4}{12}$$

Para acertar a la tercera tiene que haber sacado él, en la primera, una negra y B, en la segunda, una blanca. La probabilidad correspondiente es, pues:

$$\frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10}$$

Para acertar a la quinta tiene que haber sacado él negras en la primera y tercera extracción, y B blancas en la segunda y cuarta.

Probabilidad que corresponde:

$$\frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8}$$

La probabilidad de que A gane en la séptima extracción es, análogamente:

$$\frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6}$$

En total la probabilidad de A es:

$$\frac{4}{12} + \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} + \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{209}{495}$$

Análogamente se determina la probabilidad de B, que puede ganar a la 2ª, a la 4ª, a la 6ª, a la 8ª o a la 10ª extracción. Pero aquí debemos advertir una cosa. Para que B gane *basta* que A *no haya ganado* al llegar a la *séptima* extracción. En efecto, si A *no gana* a la séptima extracción; tiene que jugar B, y como ya no queda más que *una sola bolilla blanca*, los dos únicos casos que pueden ocurrir son: que la saque B, en cuyo caso A no puede sacar sino una bolilla negra en la siguiente extracción (la 9ª) y gana B, definitivamente, a la 10ª; o que saque B una bolilla negra, y entonces, gana B, también. Luego la probabilidad de que gane B se determina, más simplemente, calculando las probabilidades que tiene de ganar a la 2ª, 4ª y 6ª extracción, y la que tiene A de *no ganar en la 7ª*. En total:

$$\frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} + \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} + \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} + \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{286}{495}$$

Y, como siempre, la suma de ambas probabilidades, nos dá *uno*.

b) Se repone la bolilla extraída.

El problema es, ahora, mucho más fácil. No hay limitación en cuanto al número de extracciones y las probabilidades de ganar en cada extracción son constantemente iguales: para A, a $\frac{1}{3}$; para B, a $\frac{2}{3}$.

La probabilidad de A es la suma de la serie geométrica infinita:

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{3} + \dots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{3}{7}$$

Puesto que para que gane A a la tercera extracción tienen que haber salido una bolilla negra en la primera extracción y una blanca en la segunda; para que gane en la quinta tiene que haber salido una bolilla negra en la primera y en la tercera extracción y una blanca en la segunda y cuarta... y así sucesivamente para las demás extracciones.

Del mismo modo, la probabilidad de B es la suma de la serie geométrica:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right)^2 \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \dots = \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{4}{5}$$

4. — Consideremos, ahora, el mismo problema pero *iguando* el número de bolillas blancas y negras. Admitamos que hay cinco de cada color. En el caso de que las bolillas sean repuestas en su sitio después de cada extracción el problema no se modifica mayormente. Nos bastará aplicar el razonamiento seguido en el caso anterior haciendo iguales a $\frac{1}{2}$ las dos probabilidades que, en el ejemplo resuelto, eran iguales a $\frac{1}{3}$ y a $\frac{2}{3}$ respectivamente. Tendremos, así, que la probabilidad de A es:

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

Y la de B:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \dots = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

Pero si las bolillas no se reponen, la cuestión cambia de aspecto.

A puede ganar a la 1ª, a la 3ª, a la 5ª, a la 7ª o a la 9ª extracción.

Y la probabilidad de que gane es, en total:

$$\frac{5}{10} + \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} +$$

$$+ \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{175}{252}$$

B puede ganar a la 2ª, a la 4ª, a la 6ª o a la 8ª extracción. Su probabilidad es:

$$\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{76}{252}$$

Pero si sumamos, ahora, nuestras dos probabilidades *no encontramos uno como suma*

$$\frac{175}{252} + \frac{76}{252} = \frac{251}{252}$$

¿Por qué esta anomalía?

Porque hay, también, la probabilidad de que *no gane ninguno*. Puede darse el caso de que A saque todas las bolillas negras y B todas las blancas.

La probabilidad de que esto ocurra es:

$$\frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{252}$$

Agregando este resultado a la suma anterior tendremos *uno*, es decir, la certeza.

El resultado es interesante en sí; pero, aparte del interés que pueda ofrecer desde el punto de vista teórico, tiene un indiscutible valor práctico. Si se tratara, efectivamente, de un juego real y hubiera que calcular la *esperanza matemática* de cada jugador ¿cómo la determinaríamos? Recurriendo a las probabilidades relativas, es decir, que las *probabilidades* de A y de B, a efectos del cálculo de dicha esperanza, serían simplemente:

$$\frac{175}{251} \text{ y } \frac{76}{251}$$

Pues en caso de que A y B agotaran las bolillas, sacando precisamente, uno y otro, todas las del color opuesto al deseado, habría que tener la partida por nula y recomenzar de nuevo.