Revista
de
Ciencias Económicas

PUBLICACIÓN DE LA FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
CENTRO DE ESTUDIANTES Y COLEGIO
DE GRADUADOS

La dirección no se responsabiliza de las afirmaciones, los juicios y las doctrinas que aparezcan en esta Revista, en trabajos subscritos por sus redactores o colaboradores.

AÑO XX **NOVIEMBRE DE 1932** **SERIE II, Nº 136**

DIRECCION Y ADMINISTRACION
CALLE CHARCAS 1835
BUENOS AIRES

Colaboración estudiantil

UN ENSAYO FILOSOFICO-MATEMATICO

En el estudio de la demostración de la fórmula de Stirling

$$\left(n! \doteq n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\right)$$

atrajeron mi atención las características particulares de la integral euleriana de segunda especie:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$$

que constituye el punto de partida de uno de los métodos de determinación de la fórmula iniciada por Wallis.

Esta expresión, que se resuelve mediante sucesivas integraciones por partes, plantea el siguiente resultado, en el primer paso: haciendo

$$x^n = u \;;\; e^{-x}\, dx = dv$$

resultan respectivamente

$$n\, x^{n-1} = du \;;\; -e^{-x} = v$$

o sea, recordando la conocida fórmula

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

que:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx = -\Big[x^n e^{-x}\Big]_0^\infty + n\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, .dx$$

La expresión encerrada por el corchete, que escribiremos $f(x) = \dfrac{x^n}{e^x}$, puede servir como representación matemática del concepto filosófico de que "cuantos más conocimientos adquiere el hombre en el transcurso de su vida, tanto mayores son aquellos cuya existencia (primitivamente ignorada) descubre, sin alcanzarlos a poseer."

El numerador de $f(x)$ representará el total de los conocimientos que en un momento dado ($\underline{x}$ marcará estos momentos) posee el individuo; el denominador, el total de aquellos cuya existencia vislumbra, pero en cuya esencia aún no ha logrado penetrar.

Evidentemente, el cociente, o sea $f(x)$ será una forma de expresar el valor relativo del saber de ese individuo, valor enteramente subjetivo, puesto que sólo para sí mismo es aplicable.

Para poder estudiar el comportamiento de $f(x)$ a través de distintos valores de $\underline{x}$ daremos en esa expresión, un valor determinado a $\underline{n}$, valor constante y finito, que no puede alterar para nada nuestro raciocinio. Atribuyámosle el valor 10; podríamos haberlo convertido en cualquier otro número y si le damos tal valor es sólo por razones de comodidad.

El primer valor que puede tomar $\underline{x}$ en la vida del hombre, es cero. Cuando aquel no ha estudiado nada, nada sabe y es nulo el valor relativo de sus conocimientos. Precisamente para

$$x = 0 \,; f(0) = \frac{0}{e^{0}} = 0$$

Da el hombre su primer paso en la larga senda del saber (podemos dar a $\underline{x}$ el valor 1) y descubre al propio tiempo la existencia de algunos problemas cuyos "por qué" ignora.

Tenemos que: $$f(1) = \frac{1^{n}}{e^{1}} = \frac{1}{e}$$

valor bastante alto simbolizará el saber de ese individuo.

Aumenta con el transcurso de su vida el cúmulo de sus conocientos, mientras $\underline{x}$ crece cada vez más. Supongamos que alcanza ya a: $$50 \therefore f(50) = \frac{50^{10}}{e^{50}}$$

Para determinar mejor este valor, ayudémonos con los logaritmos vulgares. Tenemos como logaritmo del dividendo a 10 log. 50; del divisor a 50 log. e. Esto es, que:

$$f(50) = \frac{\text{antilog } (16{,}98970)}{\text{antilog } (21{,}71305)}$$

El valor subjetivo del saber del individuo se ha reducido a un número que tiene cuatro ceros a la derecha de la coma, antes de que aparezca el primer guarismo, es decir menos de un diezmilésimo.

Sigue creciendo $\underline{x}$. Démosle el valor $100 : f(100) = \dfrac{100^{10}}{e^{100}}$

o sea:

$$f(100) = \frac{\text{antilog } (20. -)}{\text{antilog } (43{,}42610)}$$

El valor de la expresión decrece rapidísimamente. ¡Ya hay 23 ceros después de la coma! Creciendo en veloz progresión sus conocimientos, el hombre ha descubierto con celeridad mucho mayor, la existencia de otros muchos que aun ignora. Comprueba asombrado que muy poco valen los que posee, comparativamente a los que no domina.

Prosigue creciendo $\underline{x}$. Sólo queda ya una duda. ¿Qué sucederá cuando en la cumbre de la sabiduría, el hombre llegue a aumentar infinitamente su dominio en la ciencia? ¿Aumentará al fin el cociente que simboliza sus conocimientos? ¿Llegará a un límite el rápido descenso del valor de $f(x)$?

Veamos: $\displaystyle \underset{x \to \infty}{f(x)} = \frac{\infty^n}{e^\infty}$

El cociente afecta **una forma indeterminada.**

Apliquemos entonces la regla de L'Hopital que dice "el verdadero valor de una forma indeterminada, es el que arroja el cociente de sus primeras derivadas". O sea que el verdadero valor de

$$\underset{x \to \infty}{\frac{x^n}{e^x}} \quad \text{es} \quad \underset{x \to \infty}{\frac{n\ x^{n-1}}{e^x}}$$ Otra forma indeterminada.

Parecería que no quisiera dejar traslucir con facilidad el secreto que encierra. Apliquemos nueva y sucesivamente la regla de L'Hopital hasta llegar a una determinación. Después de la enésima derivada tendremos

$$\underset{x \to \infty}{\frac{n(n-1)\ (n-2)\ (n-3) \ldots\ldots 4.3.2.1.}{e^x}}$$

que es el verdadero valor de: $\underset{x \to \infty}{f^{n-1}(x)}$ que es a su vez el valor verdadero de: $\underset{x \to \infty}{f^{n-2}(x)}$ . . . . que es a su vez el verdadero valor de:

$\underset{x \to \infty}{f'(x)}$ que es el valor verdadero de: $\displaystyle \underset{x \to \infty}{\frac{x^n}{e^x}}$

Tenemos en el numerador la expresión $n!$ valor finito por hipótesis. El denominador sigue siendo infinito. Quiere decir que el cociente, a pesar de serlo de dos valores infinitos, posee un valor único, determinado y finito: cero.

Es decir, que cuando un individuo ha llegado a su más alto grado de sabiduría, no sabe nada comparativamente a lo que desconoce. El valor subjetivo de sus conocimientos vuelve a ser — para él — nulo. El resultado no es una paradoja, como semeja. Los otros hombres, aquellos que conservan valores finitos para $\underline{x}$ saben mucho menos que éste. Y su propio menos valer les impide apreciar en toda su extensión lo que aun ignoran. Y por lo tanto, su valor subjetivo, es mayor...

El que esto escribe — y cuya ecuación de saber posee una $\underline{x}$ que se aparta muy poco de cero — no ha podido menos que admirar una vez más a la ciencia matemática capaz de sintetizar en un solo símbolo, todo un bello concepto filosófico.

José M. Cascarini.