Revista
de
Ciencias Económicas

PUBLICACIÓN DE LA FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
CENTRO DE ESTUDIANTES Y COLEGIO
DE GRADUADOS

AÑO XX — DICIEMBRE DE 1933 — SERIE II, Nº 137

DIRECCION Y ADMINISTRACION
CALLE CHARCAS 1835
BUENOS AIRES

de Julio Alizón García (*)

Algunas consideraciones sobre el ajustamiento de series económicas

MÉTODO DE LOS CUADRADOS MÍNIMOS CON UTILIZACIÓN DE POLINOMIOS ORTOGONALES

1. La utilización de polinomios ortogonales en el método de los cuadrados mínimos —innovación debida al gran estadístico ruso Tschebyschow— exige, al considerar el problema del ajustamiento de series cronológicas (económicas especialmente), el estudio de algunos aspectos interesantes tales como, por ejemplo, la cuestión de la flexibilidad de las curvas de ajuste; su relación con el número de bases y la vinculación de éstas con la determinación de los coeficientes o parámetros.

No escapará al criterio del lector que estas cuestiones deben ser encaradas a través de una investigación experimental —a la manera en que Gini iniciara la consideración de algunos problemas de la interpolación estadística— y que las soluciones que se propongan han de ser tanto más valiosas como guía, cuanto mayor haya sido el número y la variedad de las experimentaciones en que se fundamentan.

En cuanto a la utilidad de tales soluciones existirá, indiscutiblemente, en las orientaciones que suministren al estudioso cuando encare el tratamiento estadístico de las series económicas.

Por otra parte, objeto de este trabajo será —y no el menos interesante, a nuestro entender— mostrar a los que se inician en la aplicación del método, un grupo de ejemplos prácticos que aclaren la teoría desarrollada por Jordan[1] y Dieulefait[2] y considerada por nosotros en nuestra tesis.[3]

(*) Ayudante de Investigaciones del Instituto de Estadística de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad del Litoral.

(1) JORDÁN, CHARLES. — *Sur la détermination de la tendance seculaire par la méthode des moindres carrés.* (Budapest, 1930).

(2) DIEULEFAIT, CARLOS. — *La determinación de la tendencia secular en las series económicas.* (Rosario, 1932).

(3) *La teoría de las series económicas.* (Rosario, 1932).

2. No corresponde a la índole de este modesto trabajo la discusión teórica del método. Esto no obstante nos permitiremos reseñar en sus líneas más salientes sus postulados fundamentales.

Considerada la curva económica empírica como representativa de un complejo causal que en lo íntimo condiciona la estructura del fenómeno, aparece la necesidad de distinguir en cada uno de los valores que componen la serie, la influencia de causas o complejos de causas cuya valorización separativa se hace menester.

Nadie con tanta fluidez como Darmois(1) ha explicado y descripto la existencia de esas diversas componentes de una serie cronológica, que hoy sin discusión se aceptan clasificadas en:

a) la línea de tendencia secular (trend-line), variaciones de largo período que reflejan la "tendencia" o esencia pura del fenómeno en su dinamismo general;

b) movimiento cíclico o episecular, de dirección, intensidad y duración diversas de las de la tendencia secular;

c) variaciones estacionales;

d) variaciones irregulares.

Precisado de esta manera el concepto y entendido que dentro del método estadístico se obtiene generalmente el movimiento cíclico, singularmente importante desde el punto de vista económico, por diferencia entre los valores empíricos (corregidos de las influencias estacionales y de las variaciones irregulares) y los valores teóricos de esa media dinámica que representa la tendencia secular, se comprende fácilmente la necesidad de afinar el procedimiento utilizado en su determinación y el análisis especulativo en torno a cada caso que se presenta para estudio.

De allí la necesidad de una discusión previa sobre la formulación matemática del *trend.*

3. Dentro de la estadística estática, un grupo de valores se caracteriza por un punto normal (media aritmética) para el cual los desvíos sumados dan cero.

En la estadística dinámica, frente a una serie que es representación de una sucesión de valores que se expresan en función del tiempo, un valor determinado unidimensionalmente no satisface las exigencias del problema.

---

(1) DARMOIS, G. — *Statistique mathématique*, págs. 215/7. (París, 1926).

Por ello se tiene que considerar como expresión del recorrido principal de una curva económica —que esa es la significación de línea trénea—, una serie de puntos normales que varían en el tiempo (media dinámica); en otras palabras, una función que cumpla las condiciones de aproximación necesarias para que la suma de los cuadrados de los desvíos de los valores empíricos con respecto a los teóricos sea un mínimo.

En este sentido y considerando la continuidad del fenómeno, "puede postularse el carácter analítico de dicha función; es decir, que ella admite un desarrollo en serie de Taylor".[1]

Es decir que:

$$f(x) = f(o) + f'(o)\,x + f''(o)\frac{x^2}{2!} + \ldots + f^n(o)\frac{x^n}{n!} + \ldots$$

en la cual sustituyendo las constantes por a_n se tiene:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

que es la forma llamada parabólica con la cual se introduce generalmente el estudio del problema del ajustamiento.[2]

Esta función es la que dentro de su generalidad permite el cumplimiento de los postulados del problema del tratamiento de curvas irregulares como lo son las económicas.

Teniendo en cuenta la condición de los cuadrados mínimos, podemos exigir que:

$$\sum_{L=0}^{n-1}\left[f(x_i) - y_i\right]^2 \quad \Sigma.m.$$

o en otra forma:

$$\sum_{L=0}^{n-1}[a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_n x^n - y_i]^2 = \text{mínimo!}$$

(1) Dieulefait, Carlos. — Opus. cit., pág. 12.

(2) Su limitación a *n* términos está plenamente justificada porque siendo la serie fuertemente convergente, puede expresarse: en la que:

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!}f^n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(x) + \ldots$$

que por la fórmula de Lagrange es igual a:

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!}f^n(\Theta x) \text{ siendo } 1 > \Theta > 0$$

Para que tal igualdad exista es necesario determinar los parámetros a_n de manera que la derivada con respecto a ellos sea cero.

Por ese camino se llega fácilmente al conocido sistema de acuaciones normales de Gauss.[1]

$$n\,a_0 + a_1\,\Sigma x + a_2\,\Sigma x^2 + \ldots = \Sigma y$$

$$a_0 \Sigma x + a_1\,\Sigma x^2 + a_2\,\Sigma x^3 + \ldots = \Sigma yx$$

$$a_0 \Sigma x^2 + a_1\,\Sigma x^3 + a_2\,\Sigma x^4 + \ldots = \Sigma yx^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

que se reducen a la mitad de los términos si se toma origen arbitrario. Utilizando determinantes, los parámetros valdrán, en el caso de una parábola de segundo grado, por ejemplo:

$$a_0 = \frac{\Sigma y\,\Sigma x^4 - \Sigma yx^2\,\Sigma x^2}{n\,\Sigma x^4 - [\Sigma x^2]^2}$$

$$a_1 = \frac{\Sigma\,y\,x}{\Sigma\,x^2}$$

$$a_2 = \frac{n\,\Sigma\,y\,x^2 - \Sigma\,x^2\,\Sigma\,y}{n\,\Sigma\,x^4 - [\Sigma\,x^2]^2}$$

que, como fácilmente se nota, al aplicarse a parábolas de mayor grado exigen cálculos largos y fatigosos. Y, considerando que no siempre una parábola de grado bajo, ha de satisfacer las condiciones que debe reunir la línea trénea, se tropieza con que la simplicidad de operatoria — condición a que se debe aspirar — está ausente en este procedimiento.

4. Ha venido a simplificar notablemente la tarea, además de haber significado un adelanto en la concepción metodológica, la introducción de los polinomios ortogonales, citada más arriba.

Supongamos un polinomio racional entero de grado *V*:

$$F_v(x_i) = \alpha_{v,0} + \alpha_{v,1}\,x_i + \alpha_{v,2}\,x_i^2 + \ldots + \alpha_{v,v}\,x_i^v$$

o en otra forma:

$$F_v(x_i) = \sum_{l=0}^{v} a_{v,l}\,(x_i)^l$$

(1) Suprimimos la indicación de los límites de la sumatoria para simplificar.

polinomio para el cual exigimos la condición de ortogonalidad definida por estas igualdades:

$$\sum_{i=0}^{n-1} F_m(x_i)\, F_n(x_i) = 0 \qquad \text{si } m \neq n$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} F_m(x_i)\, F_n(x_i) \neq 0 \qquad \text{si } m = n$$

Nada impide por lo demás, tomar estas $F_v\,(x_i)$ en reemplazo de las $\underline{x}$ utilizadas en el desarrollo parabólico considerado al formular el trend. Haciéndolo así, tendremos:

$$f(x) = a_0 F_0(x) + a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) + \ldots + a_n F_n(x)$$

en lo que, aplicando cuadrados mínimos:

$$\sum_{i=0}^{n-1} [a_0 F_0(x) + a_1 F_1(x) + \ldots + a_n F_n(x) - y]^2 = \text{mínimo!}$$

y derivando con respecto a cada uno de los parámetros, obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones, reducido a un término en cada miembro,(1) por la postulada condición de ortogonalidad:

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{i=0}^{n-1} F_0^2(x_i) &= \sum_{i=0}^{n-1} F_0(x_i)\, y_i \\ a_1 \sum_{i=0}^{n-1} F_1^2(x_i) &= \sum_{i=0}^{n-1} F_1(x_i)\, y_i \qquad (1) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_n \sum_{i=0}^{n-1} F_n^2(x_i) &= \sum_{i=0}^{n-1} F_n(x_i)\, y_i \end{aligned}$$

con lo cual cada uno de los parámetros estaría determinado, en general por la siguiente expresión:

$$a_v = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} F_v(x_i)\, y_i}{\sum_{i=0}^{n-1} F_v^{\,2}(x_i)}$$

innegablemente sencilla.(2)

Ahora bien, tomando un polinomio binomial, en lugar del de la forma potencial que hemos considerado,(1) toda la tarea

---

(1) Para más detalles puede consultarse con éxito la ya citada obra de Dieulefait, passim.

(2) Este es el primitivo camino seguido por Jordán. Cfr. su *Statistique Mathématique*. (París, 1927).

se simplifica al permitir el enlace directo con el esquema sumatorio del estadístico ruso Tschetwerikoff que suministra, por una sencilla operación de suma, los momentos binomiales reducidos y la valorización de los parámetros se convierte en una serie sencilla de operaciones aritméticas al alcance del operador menos versado en matemática.

Por lo demás, y como se infiere naturalmente del sistema de ecuaciones dado en (1) el valor de los parámetros es *absolutamente independiente* del grado de la parábola con que se trabaja, lo que significa que, calculada una parábola de grado *n* puede obtenerse la de grado utilizando toda la labor ya realizada, pues basta la adición de un nuevo término.

Esta enorme ventaja que no existía hasta la introducción de los polinomios ortogonales en el procedimiento de los cuadrados mínimos, aporta un nuevo significado a la igualdad trénea. Como se sabe, en el fondo, el método que utiliza estos polinomios ortogonales, pertenec en su aspecto analítico al gran matemático ruso Tshebyskew; si bien las simplificaciones de carácter técnico han surgido posteriormente gracias a las investigaciones de los cultores de la Estadística.

5. En un principio en nuestra tesis utilizamos los polinomios Q_v (x) de Jordán que en su expresión explícita están dados por la siguiente fórmula:

$$Q_v(x) = \frac{v!}{2^v} \sum_{l=0}^{v} \binom{v+l}{l} \binom{v-n}{v-l} \binom{x}{l}$$

pero trabajos posteriores debidos al Director de nuestro Instituto [2] han permitido la generación de unos nuevos polinomios — los más sencillos para su enlace directo con el esque-

(1) LOREN, E. y HENNIG, H., del Institut für Konjuncturforschung, de Berlín, persisten en ese camino con sus polinomios x_1, según puede verse en *Der Trend. Ein Beitrag zur Methode seiner Ausswertung für die Untersuchung vom Wirtschaftskurven* (Berlín, 1928) y *Der Trend. Ein Beitrag zur Methode seiner Berechung und seiner Ausswertung zur die Untersuchung vom Wirtschafkurven und sosntigen zeitreben* (Berlín, 1930) del primero y *Die Analyse vom Wirtschaftkurven* (Berlín, 1928), del segundo, trabajos de gran mérito científico, pero a través de los cuales parece que no se llegaría a una simplicidad como la conseguida con los polinomios de forma binomial, pese a las tabulaciones realizadas por ellos.

(2) DIEULEFAIT, CARLOS. — *Sobre una nueva introducción de los polinomios de Legendre, de los de Ch. Jordán y definición de un nuevo polinomio ortogonal que cumple determinadas condiciones.* (Anales Soc. Científica Arg., tomo CXIV, pág. 196).

ma de Tschetwerikoff — que siendo progresivamente más pequeños que los de Jordán,[1] facilitan la tarea de la valorización del trend, además de ofrecer otras ventajas tales como la disminución de la probabilidad de error de lectura o cálculo por dislocación de cifras, etc.

Estos polinomios, definidos por:

$$\Phi_v(x) = \frac{1}{\binom{2v}{v}} \sum_{l=0}^{v} \binom{v+l}{l} \binom{v-n}{v-l} \binom{v}{l}$$

son los que utilizamos en los cálculos que siguen.

6. Vamos a considerar como primer caso el estudio de una serie económica; la de las cotizaciones del maíz, durante los últimos 30 años, en pesos oro:

1902 .. 2.—	1912 .. 2.14	1922 .. 2.98
1903 .. 1.81	1913 .. 2.29	1923 .. 3.13
1904 .. 1.77	1914 .. 2.22	1924 .. 3.31
1905 .. 2.08	1915 .. 2.16	1925 .. 3.54
1906 .. 2.—	1916 .. 2.44	1926 .. 2.65
1907 .. 2.27	1917 .. 4.33	1927 .. 2.82
1908 .. 2.45	1918 .. 2.26	1928 .. 3.74
1909 .. 2.54	1919 .. 2.65	1929 .. 3.47
1910 .. 2.35	1920 .. 3.74	1930 .. 2.10
1911 .. 2.28	1921 .. 3.18	1931 .. 0.93

cuya representación gráfica demuestra una marcada irregularidad.

Optamos, haciendo abstracción en el presente caso de toda especulación con respecto al grado de la parábola y sólo teniendo presente el objetivo de nuestra tarea, por una de quinto grado.

Vale decir que:

$$f(x) = a_0 + a_1 \Phi_1 + a_2 \Phi_2 + a_3 \Phi_3 + a_4 \Phi_4 + a_5 \Phi_5$$

---

(1) Siendo la base de los Q_v *(x)* (hecha explícita por el ingeniero Dieulefait con utilización del método ortogonalizador de Romanosky) $\frac{V^1}{2^v}\binom{2v}{v}\binom{x}{v}$ y la de los Φ (x), $\binom{x}{v}$, se comprende fácilmente la indiscutible sencillez de estos últimos.

Para la determinación de los seis parámetros es necesario obtener los valores de seis T, siendo éstas en forma general:

$$T_m = \frac{\sum_{i=0}^{n+1} \binom{x_i}{m} y_i}{\binom{n}{m+1}}$$

Como consecuencia lógica, siendo los numeradores, los momentos reducidos que suministra el esquema de Tschetwerikoff, necesitamos calcular hasta la sexta sumatoria, tal como puede verse a continuación:

ESQUEMA SUMATORIO DE TSCHETWERIKOFF

Año	x	y ↑	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
1902	0	0.93	0.93	0.93	0.93	0.93	0.93	0.93
3	1	2.10	3.03	3.96	4.89	5.82	6.75	7.68
4	2	3.47	6.50	10.46	15.35	21.17	27.92	35.60
5	3	3.74	10.24	20.70	36.05	57.22	85.14	120.74
6	4	2.82	13.06	33.76	60.81	127.03	211.17	331.91
7	5	2.65	15.71	49.47	119.28	246.31	458.48	790.39
8	6	3.64	19.35	68.82	188.10	434.41	892.89	1683.28
9	7	3.31	22.66	91.48	279.58	713.99	1606.88	3290.16
1910	8	3.13	25.79	117.27	396.85	1110.84	2717.72	6007.88
1	9	2.98	28.77	146.04	542.89	1653.73	4371.45	10379.33
2	10	3.16	31.93	177.97	720.86	2374.59	6746.04	17125.37
3	11	3.74	35.67	213.64	934.50	3309.09	10055.13	27108.50
4	12	2.65	38.32	251.96	1186.46	4495.55	14550.68	41731.18
5	13	2.26	40.58	292.54	1479.00	5974.55	20525.23	62256.41
6	14	4.33	44.91	337.45	1816.45	7791.00	28316.23	90572.64
7	15	2.44	47.35	384.80	2201.25	9992.25	38308.48	128881.12
8	16	2.16	49.31	434.31	2635.56	12627.81	50936.29	179817.41
9	17	2.22	51.73	486.04	3121.60	15749.41	66685.70	246503.11
1920	18	2.29	54.02	540.06	3661.66	19411.07	86096.77	332599.88
1	19	2.14	56.16	596.22	4257.88	23668.45	109765.72	442365.60
2	20	2.28	58.44	654.66	4912.54	28581.49	138347.21	580712.81
3	21	2.35	60.79	715.45	5627.99	34209.48	172556.69	753269.50
4	22	2.54	63.33	778.78	6406.77	40616.25	213172.94	964442.44
5	23	2.45	65.78	844.56	7251.33	47867.58	261040.52	1227482.96
6	24	2.27	68.05	912.61	8163.94	56031.52	317072.04	1544555.00
7	25	2.—	70.05	982.66	9146.60	65178.12	382250.16	—
8	26	2.08	72.13	1054.79	10201.36	75379.51	—	—
9	27	1.77	73.90	1128.69	11330.08	—	—	—
1930	28	1.81	75.71	1204.40	—	—	—	—
31	29	2.—	77.71	—	—	—	—	—

Puede observarse que los valores de las series se colocan invertidos, vale decir que, en general, si tenemos dos series de pares de valores $(x_i\ y_i)$; $i = 0, 1, 2, \ldots n\text{-}1$, la correspondencia será:

$$x_0 \text{ —— } y_{n-1}$$

$$x_1 \text{ —— } y_{n-2}$$

....

$$x_{n-2} \text{ —— } y_1$$

$$x_{n-1} \text{ —— } y_0$$

y que los valores sumatorios se obtienen por adición del valor anterior de la misma columna al valor correspondiente de la columna anterior.

El cálculo de los T_m de acuerdo a la fórmula general nos da:

$$T_0 = \frac{77{,}71}{30} = 2{,}577$$

$$T_1 = \frac{1204{,}40}{435} = 2{,}768735$$

$$T_2 = \frac{11330{,}08}{4060} = 2{,}79066$$

$$T_3 = \frac{75379{,}51}{27405} = 2{,}750556$$

$$T_4 = \frac{328250{,}16}{142506} = 2{,}682344$$

$$T_5 = \frac{1.544{,}555}{593.775} = 2{,}601246$$

y los parámetros, con utilización de las fórmulas dadas en el fascículo publicado por nuestro Instituto,(1) son los siguientes:

$$a_0 = 2{,}577$$

$$a_1 = \frac{-6}{31}\,[2{,}577 - 2{,}768735] = 0{,}03711$$

$$a_2 = \frac{30}{496}\,[2{,}577 - 3\,(2{,}768735) + 2\,(2{,}79066)] = -0{,}0089446$$

$$a_3 = \frac{-140}{5456}\,[2{,}577 - 6\,(2{,}768735) + 10\,(2{,}79066) - 5\,(2{,}750556)] = -0{,}00303838$$

(1) Dieulefait, C. — Opus. cit., páginas 38 y 39.

$$a_4 = \frac{630}{46376}[2{,}577—10\ (2{,}768735) + 30\ (2{,}79066) —$$

$$—35\ (2{,}750556) + 14\ (2{,}682344)] = —0{,}00145619$$

$$a_5 = \frac{—2772}{324632}[2{,}577—15\ (2{,}768735) + 70\ (2{,}79066) —$$

$$—140(2{,}750556)+126(2{,}682344—42(2{,}601246) =—0{,}0003189$$

Valorizando la igualdad trénea, obtendremos:

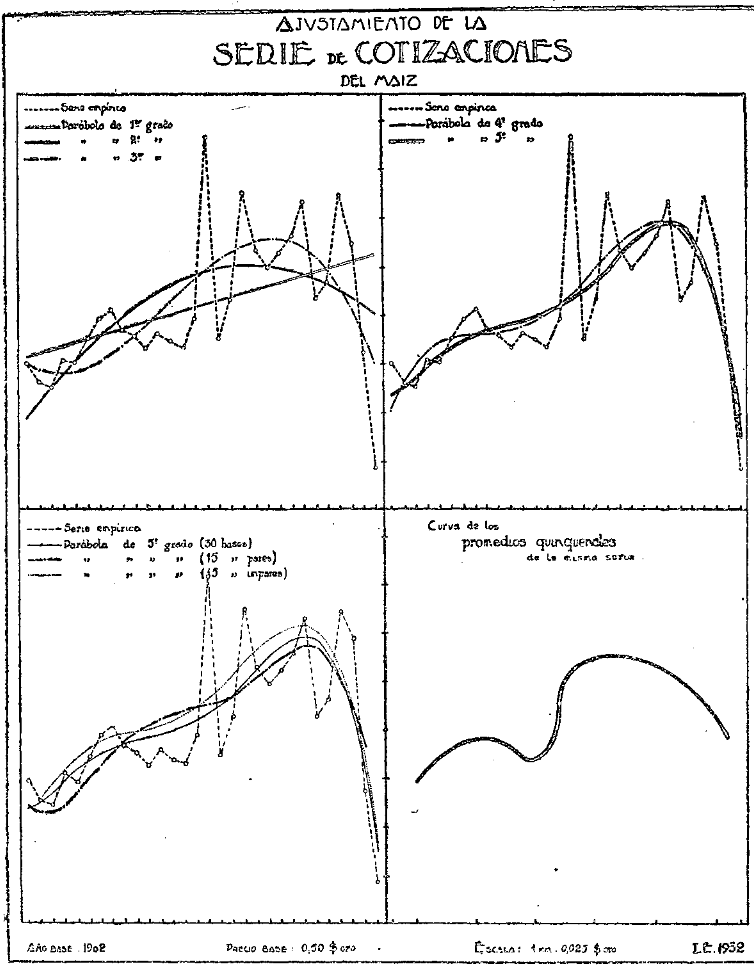
x	$a_1\ \Phi_1$	$a_2\ \Phi_2$	$a_3\ \Phi_3$	$a_4\ \Phi_4$	$a_5\ \Phi_5$
0	—0,538095	—0,605254	0,555112	—0,494085	0,150282
1	—0,500985	—0,480030	0,325410	—0,153337	—0,005182
2	—0,463875	—0,363750	0,136727	0,077891	—0,082914
3	—0,426765	—0,256415	—0,013976	0,218515	—0,105945
4	—0,389655	—0,158024	—0,129739	0,286010	—0,093320
5	—0,352545	—0,068578	—0,213598	0,296407	—0,060422
6	—0,315435	0,011923	—0,268593	0,264283	—0,019274
7	—0,278325	0,083480	—0,297761	0,202702	0,021118
8	—0,241215	0,146092	—0,304142	0,123339	0,054468
9	—0,204105	0,199760	—0,290773	0,036376	0,076880
10	—0,166995	0,244483	—0,260693	—0,049423	0,086527
11	—0,129885	0,280261	—0,216940	—0,126805	0,083338
12	—0,092775	0,307095	—0,162553	—0,189945	0,068678
13	—0,055665	0,324984	—0,100570	—0,234461	0,045025
14	—0,018555	0,333929	—0,034030	—0,257454	0,015661
15	0,018555	0,333929	0,034030	—0,257454	—0,015661
16	0,055665	0,324984	0,100570	—0,234461	—0,045025
17	0,092775	0,307095	0,162553	—0,189945	—0,068678
18	0,129885	0,280261	0,216940	—0,126805	—0,083338
19	0,166995	0,244483	0,260693	—0,049423	—0,086527
20	0,204105	0,199760	0,290773	0,036376	—0,076880
21	0,241215	0,146092	0,304142	0,123339	—0,054468
22	0,278325	0,083480	0,297761	0,202702	—0,021118
23	0,315435	0,011923	0,268593	0,264283	0,019274
24	0,352545	—0,068578	0,213598	0,296407	0,060422
25	0,389655	—0,158024	0,129739	0,286010	0,093320
26	0,426765	—0,256415	0,013976	0,218515	0,105945
27	0,463875	—0,363750	—0,136727	0,077891	0,082914
28	0,500985	—0,480030	—0,325410	—0,153337	0,005182
29	0,538095	—0,605254	—0,555112	—0,494085	—0,150282

De donde podemos obtener, si así lo deseamos, los valores teóricos de los trenes parabólicos de 1º, 2º, 3º, 4º y 5º grados, con sólo omitir las columnas en que figuren productos a_v de subíndice mayor al de la parábola deseada. Así tendremos:

VALORES TEORICOS DE LOS TRENES PARABOLICOS

x	1er. grado	2°. grado	3er. grado	4°. grado	5°. grado
0	2,039	1,434	1,989	1,495	1,645
1	2,076	1,596	1,921	1,768	1,758
2	2,113	1,749	1,886	1,964	1,881
3	2,150	1,894	1,880	2,098	1,992
4	2,187	2,029	1,900	2,186	2,092
5	2,224	2,156	1,942	2,239	2,178
6	2,262	2,273	2,005	2,269	2,245
7	2,299	2,382	2,084	2,287	2,308
8	2,336	2,482	2,178	2,301	2,355
9	2,373	2,573	2,282	2,318	2,395
10	2,410	2,654	2,394	2,344	2,431
11	2,447	2,727	2,510	2,384	2,467
12	2,484	2,791	2,629	2,439	2,507
13	2,521	2,846	2,746	2,511	2,556
14	2,558	2,892	2,858	2,601	2,616
15	2,595	2,929	2,963	2,706	2,690
16	2,633	2,958	3,058	2,824	2,779
17	2,670	2,977	3,142	2,952	2,884
18	2,707	2,987	3,204	3,077	2,994
19	2,744	2,988	3,249	3,200	3,113
20	2,781	2,981	3,272	3,308	3,231
21	2,818	2,964	3,268	3,392	3,337
22	2,855	2,939	3,237	3,439	3,418
23	2,892	2,904	3,173	3,437	3,456
24	2,929	2,861	3,075	3,371	3,431
25	2,967	2,809	2,938	3,224	3,318
26	3,004	2,747	2,761	2,980	3,086
27	3,041	2,677	2,540	2,618	2,701
28	3,078	2,598	2,272	2,119	2,124
29	3,115	2,510	1,955	1,461	1,310

La representación gráfica que va a continuación sugiere con claridad esa noción de aproximación encerrada ya en la teoría del ajustamiento y, en forma analítica, puede verse lo mismo en la planilla que formulamos más abajo, en cuyas columnas figuran los desvíos de la serie empírica con respecto a cada una de las parábolas de ajuste.



Desvíos con respecto a las parábolas de grado:

1o.	2o.	3o.	4o.	5o.
0,039	—0,566	—0,011	—0,505	—0,355
0,266	—0,214	0,091	—0,043	—0,052
0,343	—0,021	0,116	0,194	0,111
0,070	—0,186	—0,200	0,010	—0,088
0,187	0,029	—0,100	0,186	0,092
—0,046	—0,114	—0,328	—0,031	—0,092
—0,188	—0,177	—0,445	—0,181	—0,205
—0,241	—0,158	—0,456	—0,253	—0,232
—0,014	0,132	—0,172	—0,049	0,005
0,093	0,293	0,002	0,038	0,115
0,240	0,514	0,254	0,204	0,291
0,157	0,437	0,220	0,094	0,177
0,262	0,571	0,407	0,219	0,287
0,361	0,686	0,586	0,351	0,396
0,118	0,452	0,418	0,161	0,176
—1,735	—1,401	—1,367	—1,624	—1,640
0,373	0,698	0,798	0,564	0,419
0,020	0,327	0,492	0,302	0,234
—1,013	—0,753	—0,536	—0,662	—0,746
—0,416	—0,172	0,089	0,040	—0,047
—0,199	0,001	0,292	0,328	0,251
—0,312	—0,166	0,138	0,262	0,207
—0,455	—0,371	—0,043	0,129	0,108
—0,748	—0,736	—0,467	—0,203	—0,184
0,279	0,211	0,425	0,721	0,781
0,147	—0,011	0,118	0,404	0,498
—0,736	—0,993	—0,979	—0,760	—0,666
—0,571	—0,793	—0,930	—0,852	—0,769
0,978	0,498	0,172	0,019	0,024
2,185	1,580	1,025	0,531	0,380

La suma de los desvíos y el desvío medio absoluto, nos dan para:

		Desvío absoluto	Desvío medio absoluto
1° grado	(recta)	12,792	4,624
2° „	—	12,261	4,087
3° „	—	11,677	3,892
4° „	—	9,921	3,307
5° „	—	9,628	3,209

y con un ligero análisis se descubre cómo, a medida que aumenta el grado va disminuyendo el desvío, cosa lógica, puesto que en el cálculo de la parábola de grado (N - 1) tendríamos, en realidad, un proceso de interpolación, aunque debamos hacer notar que la aproximación excesiva significa la negación de la existencia de línea tendencial en su verdadera esencia.

En el ejemplo que va a continuación, hemos tomado la serie de promedios quinquenales de la cotización del maíz para ajustarla con una parábola de quinto grado.

TABLA I

Cálculos de momentos reducidos

x	$\hat{y}$	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
0	2,61	2,61	2,61	2,61	2,61	2,61	2,61
1	3,14	5,75	8,63	10,97	13,58	16,19	—
2	3,23	8,98	17,34	28,31	41,89	—	—
3	2,25	11,23	28,57	56,88	—	—	—
4	2,38	13,61	42,18	—	—	—	—
5	1,93	15,54	—	—	—	—	—

$T_0 = 2{,}59$ $\quad$ $T_3 = 2{,}79267$

$T_1 = 2{,}812$ $\quad$ $T_4 = 2{,}69833$

$T_2 = 2{,}844$ $\quad$ $T_5 = 2{,}61$

$a_0 = 2{,}59$ $\quad$ $a_3 = -0{,}324415$

$a_1 = 0{,}190285$ $\quad$ $a_4 = -0{,}530471$

$a_2 = -0{,}169285$ $\quad$ $a_5 = 6{,}68532$

TABLA II

Valorización de la línea trénea

x	a_0	$a_1 \Phi_1$	$a_2 \Phi_2$	$a_3 \Phi_3$	$a_4 \Phi_4$	$a_5 \Phi_5$	f_5 (x)
0	2,59	—0,4757125	—0,2821473	0,1622080	—0,0378756	—0,0267413	1,9297303
1		—0,2854275	0,0564227	—0,2270912	0,1136799	0,1323693	2,3799532
2		—0,0951425	0,2257077	—0,1297664	—0,0758043	—0,2654072	2,2495873
3		0,0951425	0,2257077	0,1297664	—0,0758043	0,2654072	3,2302195
4		0,2854275	0,0564227	0,2270912	0,1136799	—0,1323693	3,1402520
5		0,4757125	—0,2821473	—0,1622080	—0,0378756	0,0267413	2,6102229

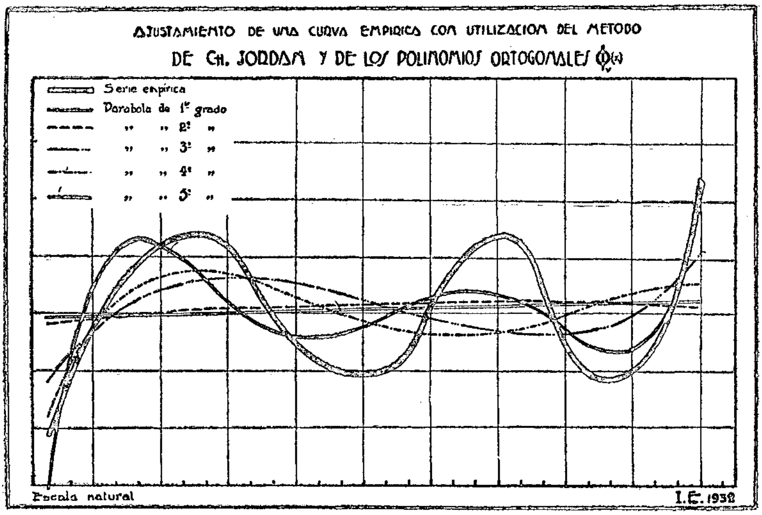
Los desvíos con respecto a los valores empíricos son:

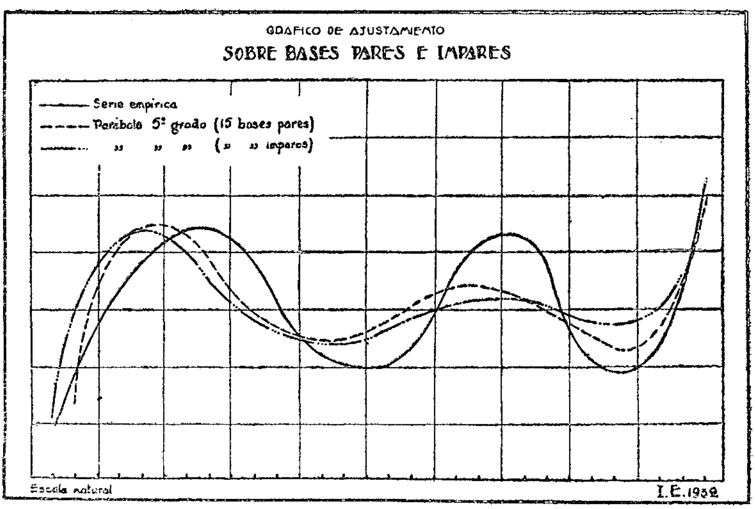
x	y	y'	δ
0	1,93	1,9297303	—0,0002697
1	2,38	2,3799532	—0,0000468
2	2,25	2,2495873	—0,0004127
3	3,23	3,2302195	+0,0002195
4	3,14	3,1402520	+0,0002520
5	2,61	2,6102229	+0,0002229

7. Consideraremos ahora el caso en una curva de marcada periodicidad. Ha sido dibujada arbitrariamente, pero se pueden hallar curvas reales de este tipo, como expresión de fenómenos físicos: lluvias, humedad, crecimiento de los ríos, etc. Utilizando el procedimiento ya ampliado en el párrafo anterior se obtienen como valores teóricos para las parábolas de distinto grado los siguientes:

x	y	1er. grado	2º grado	3er. grado	4º grado	5º grado
0	18	35,527	24,721	58,76024	56,545	—1,07059
1	35,8	45,456	42,103	58,94689	57,190	43,09512
2	54	52,872	54,575	59,13354	57,802	69,35614
3	68	58,886	63,665	59,32019	58,382	82,55192
4	77,5	63,606	69,861	59,50684	58,928	86,49946
5	84	67,145	73,628	59,69349	59,443	83,40007
6	87	69,608	75,388	59,88014	59,923	78,82634
7	87,5	71,108	75,541	60,06679	60,371	71,77897
8	84,5	71,754	74,451	60,25344	60,787	64,74348
9	75	71,656	72,451	60,44009	61,171	58,74725
10	59,5	70,921	69,840	60,62674	61,520	54,41625
11	49	69,661	66,888	60,81339	61,838	52,03194
12	43	67,984	63,830	61,00004	62,123	51,58809
13	39,5	66,001	60,873	61,18669	62,375	52,84766
14	38,5	63,822	58,191	61,37334	62,595	55,39962
15	40,5	61,554	55,923	61,55998	62,781	58,71582
16	47	59,309	54,181	61,74663	62,935	62,20753
17	63	57,195	53,041	61,93328	63,056	65,28389
18	74,5	55,352	52,548	62,11993	63,144	67,40546
19	83	53,799	52,718	62,30658	63,200	68,14447
20	87,5	52,739	53,534	62,49323	63,224	67,23985
21	84,5	52,246	54,943	62,67988	63,213	64,65458
22	68,5	52,434	56,867	62,86653	63,171	60,63245
23	50	53,411	59,191	63,05318	63,096	55,75488
24	40,5	55,287	61,770	63.23983	62,989	49,99789
25	37,5	58,170	64,425	63,42648	62,848	47,78878
26	40,5	62,171	66,950	63,61313	62,675	48,06316
27	49,5	67,398	69,101	63,79978	62,468	59,32168
28	70	73,964	70,611	63,98643	62,230	69,68694
29	107	64,17308	61,958	91,976	71,170	97,96025

La representación gráfica nos releva del comentario, puesto que es fácil notar cómo aumenta la aproximación con el grado de la parábola (gráficos Nos. 2 y 3).





8. Con el objeto de analizar la influencia del número de bases sobre la flexibilidad de cada una de las parábolas hemos procedido a ajustar la serie del maíz, tomando en lugar de 30 bases solamente 15, en dos veces.

En la primera, las correspondientes a, $x = 1, 3, 5, \ldots n\text{-}1$; en la segunda, $x = 0, 2, 4, \ldots n\text{-}2$.

Los valores teóricos obtenidos para una parábola de 5º grado, son los siguientes:(1)

x	y	y' 30 bases	y'' 15 bases	y''' 15 bases	y — y'	y — y''	y — y'''
0	2,—	1,64	—	1,72	0,36	—	0,28
1	1,81	1,76	1,76	—	0,05	0,05	—
2	1,77	1,88	—	1,66	—0,11	—	0,11
3	2,08	1,99	2,10	—	0,09	—0,02	—
4	2,—	2,09	—	1,87	—0,09	—	0,13
5	2,27	2,18	2,30	—	—0,09	—0,03	—
6	2,45	2,24	—	2,15	0,21	—	0,30
7	2,54	2,31	2,41	—	0,23	×0,13	—
8	2,35	2,35	—	2,39	0,00	—	—0,04
9	2,28	2,39	2,47	—	—0,11	—0,19	—
10	2,14	2,43	—	2,55	—0,29	—	—0,41
11	2,29	2,47	2,54	—	—0,18	—0,25	—
12	2,22	2,51	—	2,65	—0,29	—	—0,43
13	2,16	2,56	2,65	—	—0,40	—0,49	—
14	2,44	2,62	—	2,72	—0,18	—	—0,28
15	4,33	2,69	2,81	—	1,64	1,52	—
16	2,26	2,78	—	2,81	—0,52	—	—0,55
17	2,65	2,88	3,03	—	—0,23	—0,38	—
18	3,74	2,99	—	2,96	0,75	—	0,78
19	3,16	3,11	3,27	—	0,05	—0,11	—
20	2,98	3,23	—	3,15	—0,25	—	—0,17
21	3,13	3,34	3,47	—	—0,21	—0,24	—
22	3,31	3,42	—	3,31	—0,11	—	0,00
23	3,64	3,46	3,53	—	0,18	0,11	—
24	2,65	3,43	—	3,35	—0,78	—	0,70
25	2,82	3,32	3,31	—	—0,50	—0,49	—
26	3,74	3,09	—	2,98	0,65	—	0,76
27	3,47	2,70	2,63	—	0,77	0,84	—
28	2,10	2,12	—	1,87	—0,02	—	—0,23
29	0,93	1,31	1,25	—	—0,38	—0,32	—

De la comparación de los correspondientes desvíos medios cuadráticos que dan: $\sigma y = 0{,}45$; $\sigma y_1 = 0{,}4627$; $\sigma y_2 = 0{,}4988$ se infiere que las tres líneas de ajuste satisfacen — dentro de una relativa diversidad — las condiciones de aproximación, cosa lógica por lo demás, puesto que se ha trabajado con un número de bases distinto pero con el mismo grado de ajustamiento. Se observa sin embargo que el tercer sigma corresponde precisamente a la serie en la cual figura la cotización

(1) No damos los cálculos por considerarlos innecesarios para la comprensión del asunto.

más elevada, que da un carácter marcadamente irregular a la serie y que arrastra consigo a toda la curva de ajuste, como puede verse en el gráfico correspondiente.

Hecha la misma operación con respecto a la curva regular, obtenemos el siguiente cuadro:

x	y	y'	y''	y'''	y—y'	y — y''	y—y'''
0	18	—1	—	17,7	19	—	0,3
1	35,5	43	27,2	—	— 7,8	8,3	—
2	54	69,3	—	74,8	—15,3	—	—20,8
3	68	82,5	83,4	—	—14,5	—14,5	—
4	77,5	86,5	—	86,6	— 9	—	—9
5	84	83,4	89,7	—	0,6	— 5,7	—
6	87	78,8	—	77,3	8,2	—	9,7
7	87,5	71,8	75,7	—	15,7	11,8	—
8	84,5	64,7	—	62,6	19,8	—	21,9
9	75	58,7	59,6	—	16,3	15,4	—
10	59,5	54,4	—	51,4	5,1	—	8,1
11	49	52	50,4	—	— 3	— 0,6	—
12	43	51,6	—	47,2	— 8,6	—	— 4,2
13	39,5	52,8	51	—	—13,3	—11,5	—
14	38,5	55,4	—	49,6	—16,9	—	—11,1
15	40,5	58,7	56,9	—	—18,2	—16,4	—
16	47	62,2	—	55,6	—15,2	—	— 8,6
17	63	65,3	65,6	—	— 2,3	— 2,6	—
18	74,5	67,4	—	61,4	7,1	—	13,1
19	83	68,1	69,3	—	14,9	13,7	—
20	87,5	76,2	—	63,6	20,3	—	23,9
21	84,5	64,6	63,7	—	19,9	20,8	—
22	68,5	60,6	—	60,9	17,9	—	7,6
23	50	55,7	56,9	—	— 5,7	— 6,9	—
24	40,5	50	—	55,6	— 9,5	—	—15,1
25	37,5	47,8	47,5	—2	—11,3	—10	—
26	40,5	48,1	—	54,6	— 7,6	—	—14,1
27	49,5	54,3	53,6	—	— 4,8	— 4,1	—
28	70	69,7	—	71,6	0,3	—	— 1,6
29	107	98	101,3	—	9	— 5,7	—

que nos suministra como expresión del desvío medio cuadrático, los siguientes valores:

$$\sigma_{y'} = 12{,}87$$

$$\sigma_{y''} =$$

$$\sigma_{y'''} = 13{,}16$$

En los cuadros se representan gráficamente las curvas así obtenidas. Como en el caso anterior, parecería que el desvío medio cuadrático se hiciera menor cuando aumenta el número de bases que se consideran (dentro de un mismo caso).

9. Tal vez alguna conclusión podría obtenerse de estas breves consideraciones. Esto no obstante, consideramos lo que dijimos al principio como más honesto: más que conclusiones aspiramos a obtener guías para el trabajo.

Por eso nuestras apreciaciones irán expresadas en condicional, sujetas, como es lógico y humano a rectificaciones.

En primer término, parecería al sentido común que el número de bases tuviera a través de los coeficientes paramétricos, una influencia más o menos directa sobre la flexibilidad de la curva de ajuste anterior. Sin embargo, no es así.

Ocurre preguntarse entonces: ¿qué es lo que determina ese "andamento" de la curva con flexiones que muchas veces escapan al ojo del observador?

En el ajustamiento de la serie de promedios quinquenales hemos tenido oportunidad de corroborar cómo seis bases han sido suficientes para determinar una curva de flexibilidad acentuada. Al considerar los demás casos, se ha observado que la disminución del número de bases no ha menguado en nada desde el punto de vista de la fidelidad, las ondas de la línea trénea.

Esto nos permite afirmar que posiblemente la flexibilidad de la curva, independiente en forma directa, del número de bases, está determinada por las diferencias absolutas entre los valores empíricos e inversamente por el número de aquéllas desde el momento que el aumento de las bases produce, generalmente, una disminución de las diferencias entre los valores de la serie.

En segundo término, se puede anotar que el procedimiento es tan sensible como para que un valor arrastre consigo toda la línea trénea (tal es el caso de la cotización 4,33 del maíz para cuya estimación deben compararse las tres líneas de ajuste representadas en el gráfico).

Por lo demás, pareciera que en las series de carácter cíclico o periódico, la regularidad de las cifras determina escasas diferencias entre las líneas ajustadas para diverso número de bases, cosa que permitiría — en casos de excepción — justificar el tratamiento de series incompletas, con lagunas, suprimiendo bases intermedias y considerar la línea de ajuste así obtenida como expresión de la tendencia de la serie completa.

Y por último creemos poder afirmar que las ventajas técnicas, de operatoria y especulativas, que reporta el método de ajustamiento de Ch. Jordan, con utilización de los polinomios ortogonales Φ_v (x) de Dieulefait y el esquema sumatorio de Tschetwerikoff, hacen de él, el procedimiento obligado para el tratamiento de las series cronológicas de carácter económico, que hasta la fecha venían siendo ajustadas con el auxilio de las ecuaciones normales de Gauss, aplicado en gran escala por W. M. Persons en el Instituto de Harward y utilizado y expuesto entre nosotros en la obra de Baiocco.[1]

La tabulación de los polinomios Φ_v (x) para n de 31 a 50, que en el momento presente ocupa la atención de nuestro Instituto, permitirá ampliar extraordinariamente la aplicación del método estadístico, cuyo auxilio consideramos indispensable para la comprensión del complejo fenómeno económico.

Por último, es un placer para nosotros agradecer a la señorita doctora Clotilde A. Bula la eficaz colaboración prestada en la realización de los cálculos que figuran en el presente trabajo.

---

(1) Baiocco, Pedro J. — *Análisis estadístico y económico de algunas series bancarias y afines*, 1ª parte (Buenos Aires, 1929).