243

Revista
de
Ciencias Económicas

PUBLICACION DE LA FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
CENTRO DE ESTUDIANTES Y COLEGIO
DE GRADUADOS

AÑO XXII — ABRIL DE 1934 — SERIE II, Nº 153

DIRECCION Y ADMINISTRACION
CALLE CHARCAS 1835
BUENOS AIRES

de José Barral Souto

Análisis de la curva de Pearl y Read[1]

1.—Para períodos infinitesimales de tiempo se admite que el incremento de la población dy, que corresponde a un determinado instante, es proporcional a la población "y" y al tiempo "dx".

Llamando α al coeficiente de proporcionalidad es:

$$(1) \quad dy = \alpha \, y \, dx$$

$$\therefore \quad (2) \quad \alpha = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d \ln y}{dx}$$

En (2) vese que α es una tasa instantánea de crecimiento de la población, (velocidad del crecimiento de la población en un cierto instante).

Pearl y Read sientan como hipótesis, que la tasa α es una función lineal decreciente de la población:

$$(2)' \quad \alpha = A - By$$

Se deduce de (1), y substituyendo (2)':

$$(3) \quad dx = \frac{dy}{\alpha \, y} = \frac{dy}{Ay - By^2} = \frac{y^{-2}\,dy}{Ay^{-1} - B}$$

pero;

$$y^{-2}\,dy = -\,dy^{-1} = -\frac{1}{A}\,dAy^{-1} = -\frac{1}{A}\,d\,(Ay^{-1} - B)$$

Reemplazando en (3) e integrando:

$$\int dx = -\frac{1}{A}\int \frac{d\,(Ay^{-1} - B)}{Ay^{-1} - B} \quad \therefore$$

$$(4) \quad x = -\frac{1}{A} \ln\,(Ay^{-1} - B) + C$$

---

(1) Sobre las hipótesis de Pearl y Read, véase el artículo del Dr. Argentino Acerboni en esta Revista, serie II, N° 47 de agosto de 1925.

de donde se obtiene:

$$\ln (Ay^{-1} - B) = A (C - x)$$

y pasando de los logaritmos a los números:

$$Ay^{-1} - B = e^{A (C-x)}$$

$$(5) \quad y = \frac{A}{B + e^{A (C-x)}}$$

curva que se ha denominado "Logística".

2.—De la (1) y (2) se deduce:

$$(6) \quad y' = \frac{dy}{dx} = y \alpha = Ay - By^2$$

$$(6') \quad y' = By \left(\frac{A}{B} - y \right)$$

y' se anula sólo para $y = 0$ y para $y = \frac{A}{B}$. Reemplazando esos valores en la (4) obtenemos: $x = -\infty$ y $x = +\infty$ que respectivamente les corresponden.

Para cualquier valor $0 < y < \frac{A}{B}$ vése fácilmente en la (6') que es $y' > 0$; y como en esos valores límites está comprendido todo el campo de variación de las "y" se deduce que la curva es monótona creciente.

Esto limita también el campo de las $\alpha = A - By$ pues a $0 < y < \frac{A}{B}$ corresponde (3): $A < \alpha < 0$. No existen valores negativos de α, para A y B positivos.

Las rectas tangentes a la curva en los puntos $(0; -\infty)$ y $\left(\frac{A}{B}, +\infty\right)$ tienen como coeficiente angular: $y' = \frac{dy}{dx} = 0$, es decir son paralelas al eje de las abcisas. Las igualdades $y = 0$ e $y = \frac{A}{B}$ además de ser los valores límites de la función, definen, pues, dos rectas tangentes a la curva en $(0, -\infty)$ y $\left(\frac{A}{B}, +\infty\right)$, es decir sus asíntotas.

Derivando la (6) o (6') es:

$$(7) \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = A \frac{dy}{dx} - 2By \frac{dy}{dx}$$

$$(7') \quad y'' = \frac{dy}{dx} (A - 2By)$$

y'' se anula para los valores límites de la función, $y = 0$ e $y = \frac{A}{B}$ que hacen $\frac{dy}{dx} = 0$ y además, para $A - 2By = 0$, es decir, para:

$$(8) \quad y_i = \frac{A}{2B}$$

punto que por ser $y' > 0$, en todo el campo de las "y" es evidentemente de inflexión, y único, pues el signo de y'' cambia sólo con $A - 2By$.

Además, por ser para: $y = \frac{A}{2B}$;

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = 0$$

y' alcanza ahí un máximo (no puede tratarse de un mínimo desde que $y' > 0$) cuyo valor lo calculamos mediante la (6).

$$y'_i = y'_{max} = B \frac{A}{2B}\left(\frac{A}{B} - \frac{A}{2B}\right) \quad \therefore$$

$$(9) \quad y'_i = \frac{A^2}{4B}$$

La abcisa que corresponde al punto de inflexión puede obtenerse de la (5) (designamos por x_i y_i las coordenadas de dicho punto).

debe ser:

$$y_i = \frac{A}{2B} = \frac{A}{B + e^{A\,(C - x_i)}}$$

de donde:

$$(10) \quad e^{A\,(C - x_i)} = B \quad \therefore \quad (10') \quad x_i = C - \frac{\ln B}{A}$$

si recurrimos a los logaritmos naturales.

Lo cual nos dice que para que sea real la abcisa del punto de inflexión x_i debe ser $\ln B$ real, es decir $B > 0$.

3.—Tenemos, pues, caracterizados dos campos de variación; para:

$x < x_i$	$x > x_i$
$-\infty < x < C - \frac{\ln B}{A}$	$C - \frac{\ln B}{A} < X < +\infty$
$0 < y < \frac{A}{2B}$	$\frac{A}{2B} < y < \frac{A}{B}$

$x \ll x_i$	$x \gg x_i$
$0 < y' \ll \frac{A^2}{4B}$	$\frac{A^2}{4B} \gg y' > 0$
$\frac{d^2y}{dx^2} \gg 0$	$\frac{d^2y}{dx^2} \ll 0$
asíntota inferior: $y = 0$	asíntota superior: $y = \frac{A}{B}$

Se desprende del cuadro que antecede, que en el 1er. tramo la curva viene desde un valor $y = 0$, para $x = -\infty$, creciendo aceleradamente, es decir cada vez más rápidamente, hasta el punto $(x_i \; y_i)$, a partir del cual la curva crece retardadamente o lo que es lo mismo, cada vez más lentamente.

Lo mismo suele expresarse, diciendo que la curva es convexa en el 1er. tramo $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ y cóncava en el 2º, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, entendiendo la convexidad o concavidad por la parte que mira hacia el eje de las x.

4.—Si trasladamos el origen de las coordenadas al punto de inflexión $(x_i \; y_i)$, la relación entre las nuevas coordenadas $\bar{x}, \bar{y}$, y las antiguas x, y es:

$$(12) \quad \bar{x} = x - x_i \quad \therefore \quad x = \bar{x} + x_i$$
$$\bar{y} = y - y_i \quad \therefore \quad y = \bar{y} + y_i$$

Remplazando (12) en (5) queda:

$$(13) \quad \bar{y} + y_i = \frac{A}{B + e^{A(C - \bar{x} - x_i)}} = \frac{A}{B + e^{A(C - x_i)} e^{-A\bar{x}_i}}$$

pero, por (9) y (10) es:

$$y_i = \frac{A}{2B}; \quad e^{A(C - x_i)} = B$$

substituyendo y efectuando en (13) obtenemos:

$$\bar{y} = \frac{A}{B + Be^{A\bar{x}}} - \frac{A}{2B} = \frac{A}{B}\left[\frac{1}{1+e^{-A\bar{x}}} - \frac{1}{2}\right]$$

$$(14) \quad \bar{y} = \frac{A}{2B} \frac{1 - e^{-A\bar{x}}}{1 + e^{-A\bar{x}}} = -\frac{A}{2B} \frac{1 - e^{A\bar{x}}}{1 + e^{A\bar{x}}}$$

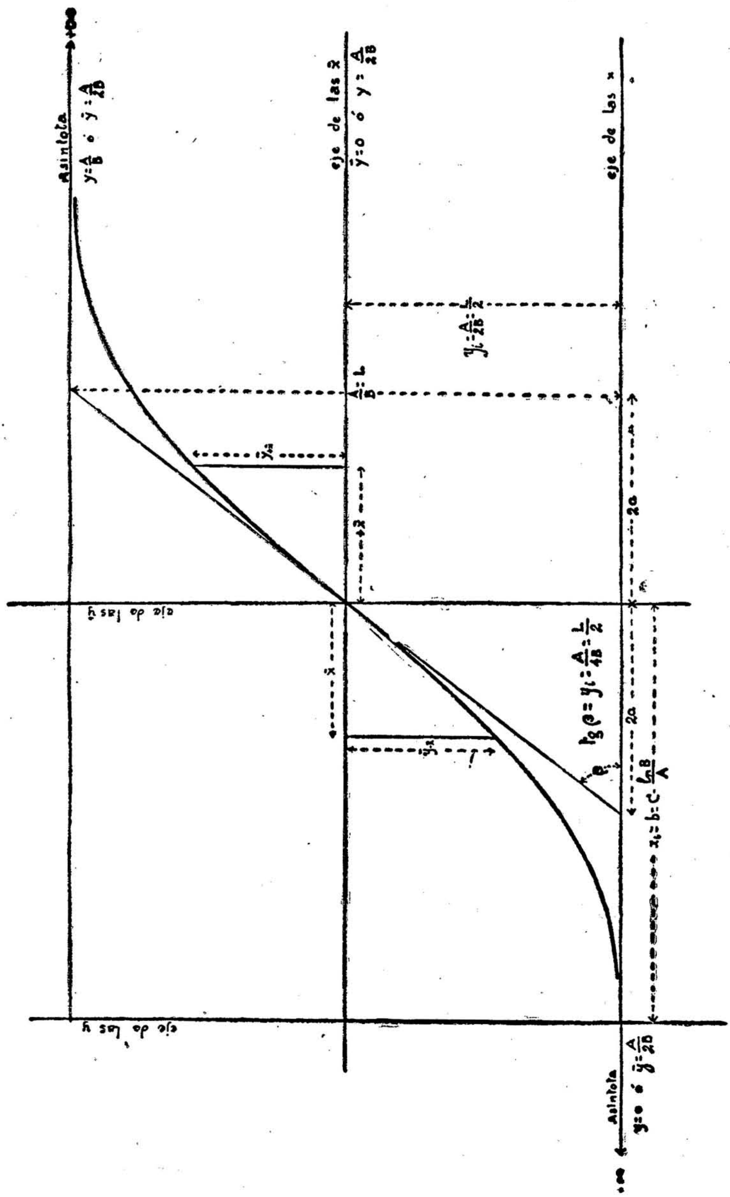
En esta forma, vemos fácilmente que, a los valores positivos de $\bar{x}$ corresponde la (14) y a los negativos:

$$(15) \quad \bar{y}_{(-\bar{x})} = \frac{A}{2B} \frac{1 - e^{A\bar{x}}}{1 + e^{A\bar{x}}} = -\bar{y}_{(+\bar{x})}$$

Es decir, existe la simetría,

(16) $-\bar{y}_{(-\bar{x})} = \bar{y}_{(-\bar{x})}$ respecto del punto de inflexión.

Suponiendo no coincidentes el origen de las $\bar{x}\ \bar{y}$ con el de las x y, y traduciendo en un gráfico las relaciones obtenidas en (7), (11) y (16), y por la (12):



5.—Volviendo a la (5) y para darle a la logística una forma más conocida, debemos poner: $\frac{A}{B} = L$ población límite: si $x_i = b$ por la (10) es $e^{A(C - b)} = B \therefore \frac{1}{B} = e^{-AC + bA}$ reemplazando en (5) es:

$$y = \frac{\frac{A}{B}}{1 + \frac{1}{B} e^{AC - x}} = \frac{L}{1 + e^{-AC + bA} e^{AC - Ax}} = \frac{L}{1 + e^{A(b - x)}}$$

y haciendo $A = \frac{1}{a}$, queda finalmente:

$$(17) \quad y = \frac{L}{1 + e^{\frac{b - x}{a}}}$$