433

Revista
de
Ciencias Económicas

PUBLICACION DE LA FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS
CENTRO DE ESTUDIANTES Y COLEGIO
DE GRADUADOS

AÑO XXII **JUNIO DE 1934** **SERIE II, Nº 155**

DIRECCION Y ADMINISTRACION
CALLE CHARCAS 1835
BUENOS AIRES

de José González Galé

Las leyes de la mortalidad[1]

CAPITULO IV

La medida de la muerte. — Las tablas de mortalidad. — Las funciones biométricas

I

Al viajero curioso que llega a Egipto, una de las primeras cosas que se le enseña es el *nilómetro.*

Egipto —como dijo Herodoto— *es un don del Nilo.* De la altura que el río alcance, en su crecida periódica, depende que el año económico sea próspero o desdichado. Por éso no es de extrañar que, desde remotos tiempos, hayan tratado los egipcios de tener informaciones precisas al respecto.

Estrabón dice, hablando del *nilómetro,* que es "un pozo artificial, construído sobre la orilla del río con piedras cortadas en trozos regulares, y en una de cuyas paredes están registradas la altura máxima y la mínima alcanzadas por la corriente. Otras marcas, hechas entre ambos límites extremos, suministran útiles indicaciones con respecto a la altura suficiente para la irrigación. Las informaciones que se obtienen por medio del *nilómetro* son publicadas periódicamente. Son de interés, no sólo para los agricultores, sino también para los oficiales del gobierno, desde que a la par del río, suben los impuestos".

El hombre ha tratado siempre de reducir a cifras concretas todos los hechos susceptibles de influir en sus condiciones de vida, por imprecisos que tales hechos puedan aparecer. El *nilómetro* no es más que una expresión de esa aspiración a la certidumbre.

Sin embargo, en lo que se refiere a la vida misma —a su duración— sus tentativas fueron infructuosas durante siglos y siglos. Y no aludimos a la duración de la vida de *un hombre,* —de un ser cualquiera, en general— de por sí incierta y sometida a mil azares, sino a la de *una entera generación.*

(1) Continuación. Véase nuestro número de abril último.

Esa generación debería ofrecer, como el Nilo al cabo de muchas crecidas periódicas, un cierto número de alturas máximas, un cierto número de alturas mínimas y una altura *media* hacia la que, en general, *tenderían* la mayor parte de las vidas, desviándose de ella con frecuencia, pero no tanto que no pudiera descubrirse facilmente esa *tendencia.*

La primera tentativa seria para *medir* de ese modo la vida fué realizada en Roma por el jurisconsulto Ulpiano, en tiempos del emperador Alejandro Severo (205-235 d. C.). De ella nos ocuparemos, más adelante, con algún detalle. Baste decir, por ahora, que sus resultados fueron demasiado imprecisos.

Y es que, para llegar a conclusiones satisfactorias, era preciso que se produjeran dos hechos que sólo ocurrieron a mediados del siglo XVII: el descubrimiento de las leyes del azar —invención del cálculo de probabilidades—, y el reconocimiento de que, ciertos fenómenos vitales que *parecen* no obedecer sino al azar, presentan, no obstante, regularidades dignas de atención.

El cálculo de las probabilidades fué inventado en 1654 por dos grandes matemáticos franceses: Blas Pascal y Pedro Fermat, como consecuencia de una consulta que —acerca de algunas dificultades de juego— hizo al primero un cierto caballero de Méré que, por ese solo hecho, ha pasado a la historia.

La regularidad de los fenómenos vitales fué puesta de relieve por un modesto comerciante londinense: John Graunt, a quien sus antecedentes no parecían indicar para tal empresa. Examinando los registros parroquiales, en los que se anotaba el *movimiento de la población,* en cuanto se refiere a nacimientos, bodas y defunciones, dedujo algunas consecuencias interesantes y llegó hasta formular un *estado* en el que se da el número de los que —de un grupo inicial de recién nacidos,— llegan en vida a determinadas edades:

Nacen al mismo tiempo	100
Cumplen los 6 años	64
” ” 16 ”	40
” ” 26 ”	25
” ” 36 ”	16
” ” 46 ”	10
” ” 56 ”	6
” ” 66 ”	3
” ” 76 ”	1
” ” 86 ”	0

II

El cuadro que antecede no es todavía una verdadera tabla de mortalidad o, mejor dicho, de supervivencia —luego veremos el alcance de la distinción—, pero da ya la visión clara de lo que debe ser una tabla de esa especie.

En efecto, si nosotros quisiéramos averiguar la *marcha de la mortalidad,* podríamos —si tuviésemos los medios necesarios para hacerlo, incluso *vida suficiente*— tomar un gran número de niños —digamos cien mil—, nacidos en el mismo año, y seguirlos durante *toda su vida* hasta que el grupo se extinguiera. Registrando, año tras año, el número de los que llegaban en vida a cumplir un año más, y anotando frente a ese número la edad alcanzada, tendríamos una tabla de *supervivencia.* Una tabla más detallada y más precisa que la de Graunt, pero del mismo tipo.

	Edad alcanzada	Sobrevivientes
(Al nacimiento)	0	127.283
	1	112.925
	2	108.963
	3	106.588
	4	104.942
	....	....
		93.044
	26	92.386
	....	....
	99	9
	100	4
	101	1
	102	0

Es evidente que tal cosa no se puede hacer. Ni podría seguirse, año por año, al grupo inicial; ni tendría el observador *vida* para seguirlo.

Pero admitamos que las dificultades de *orden material* están vencidas. Los elementos del grupo inicial que escapan a la observación, por una o por otra causa, son reemplazados fácilmente por otros elementos semejantes. El observador *único* es substituído por una institución *impersonal* cuya vida es, prácticameente, ilimitada. Ni aún así, ni aún con todas esas concesiones, podríamos construir la tabla. Porque ¿qué representaría esa tabla una vez construída? Simplemente un aspecto de la *historia* de una generación, que, como todas las generaciones, se ha desarrollado *a lo largo de un vasto período de tiempo,* en el transcurso del cual han ido variando, sucesiva y paulatinamente, las condiciones de vida, de tal modo que no se puede dudar de que, durante él, las *leyes de la mortalidad* —admitiremos que tales leyes existen— han debido irse modificando.

Una prueba palpable de esas modificaciones la tendremos, más adelante, al estudiar las variaciones que ha sufrido la mortalidad en el transcurso del siglo XIX.

Según un famoso actuario inglés —fallecido hace pocos años— George King, *una tabla de mortalidad es el instrumento destinado a medir las probabilidades de vida y de muerte.* Y la tabla que describe históricamente como ha ido extinguiéndose una generación dada, no nos sirve para eso: no es, pues, una tabla de *mortalidad,* en su verdadera acepción.

III

Pero, ante todo, ¿qué entendemos por *probabilidades de vida* y *de muerte?*

Sabemos que, si tenemos un dado y lo lanzamos al aire, la *probabilidad* de que salga un *punto* dado, el as, por ejemplo, es 1/6 porque el dado tiene *seis* caras y no hay razón para que salga una más bien que otra. Luego, de los *seis casos* que llamamos *posibles,* sólo hay *uno favorable* a la salida del as. Y llamamos *probabilidad a esa relación entre el número de casos favorables y el número total de casos posibles, siendo todos ellos igualmente posibles,* es decir, no habiendo ninguna circunstancia que favorezca a uno de ellos especialmente; lo que ocurriría, sin duda, si el dado de nuestro ejemplo estuviese *cargado.*

Tal el caso, que refiere José Bertrand como ocurrido en presencia del abate Galiani. Una vez, en la Basilicata, un hombre que agitaba tres dados en un cubilete apostó a que sacaba, *de primera intención,* los *tres seises.* Y lo hizo. Una segunda y una tercera vez hizo lo mismo. *"Sangue di Bacco"* —exclamó el abate— "¡Esos dados están cargados!" Y lo estaban. Sólo así se explica tan maravillosa *casualidad.*

Pero volvamos a nuestras *probabilidades de vida.* ¿Podemos hablar, en rigor, de tales probabilidades? ¿Conocemos, acaso, el número de *casos posibles* y el número de *casos favorables,* como cuando se lanzan dados al aire, o se sacan cartas de una baraja? Evidentemente, no. Se trata de fenómenos cuya producción obedece, *al parecer,* a las leyes del azar, pero cuya probabilidad no puede establecerse comparando *a priori* casos *favorables* con casos *posibles*. Por el contrario, es necesario comparar, *a posteriori*, las veces que el acontecimiento ha sido *observado* con la *masa* de individuos que —como se dice en lenguaje técnico— estuvieron *expuestos al riesgo*. Y el resultado de esa comparación recibe el nombre de *frecuencia*.

La *frecuencia* no es una verdadera *probabilidad*. Está, por lo común, *muy cerca* de ella, pero para poder determinar *probabilidades*, basadas en las *frecuencias*, se hace preciso someter los datos de que nos valemos —o los resultados a que hemos llegado— a un proceso de elaboración que carece, por el momento, de interés para nosotros. Bástenos saber, que las frecuencias nos sirven de base para calcular —con suficiente aproximación —las *probabilidades* requeridas.

IV

Para construir una tabla de mortalidad se sigue, pues, un camino distinto del indicado más arriba. En lugar de esforzarse en seguir, de año en año, a una generación dada, desde su origen hasta su extinción, se empieza por calcular *frecuencias* relativas a la mortalidad en las distintas edades, para lo cual basta comparar, para cada edad, el número de *muertes* ocurridas con el número de los *expuestos al riesgo*. Para ello es preciso, desde luego, poseer un *censo* de la población correspondiente al período en que se construye la tabla. Claro está que la determinación de las frecuencias, primero, y de las probabilidades, después, requiere una labor considerable, bajo una dirección técnica eficiente. Pero esos son detalles de orden material, cuyo examen requeriría, por sí solo, un grueso volumen, erizado de fórmulas matemáticas. Nuestro propósito no es, hoy, entrar en esos detalles, sino dar una *visión total* de lo que es una tabla de *mortalidad* y de *como* se puede llegar a construirla.

Iniciada, por el camino que queda esbozado, la construcción de la tabla, obtenemos, como primer resultado, una serie de valores —uno para cada edad— cada uno de los cuales corresponde a la *probabilidad* que tiene de morir, dentro del año, una persona de una edad dada. En términos más precisos: la probabilidad que tiene una persona, al cumplir la edad x, de morir antes de llegar a cumplir la edad siguiente, es decir, la edad $x + 1$. Esta probabilidad de muerte se representa mediante la notación convencional q_x, donde el subíndice x indica la edad. Pero, cuando un acontecimiento puede *ocurrir o no ocurrir,* las probabilidades que se refieren a cada una de esas dos eventualidades, y que se llaman *contrarias,* deben sumar *uno,* que es el símbolo de la *certeza,* Una persona de edad x —recién cumplida— puede *morir dentro del año o vivir, todavía, un año más.* Si representamos por p_x la probabilidad que corresponde a esta última eventualidad, es evidente que tendremos

$$q_x + p_x = 1$$

de donde deducimos

$$p_x = 1 - q_x$$

Es decir, que una vez que hayamos calculado las *probabilidades de muerte,* para todas las edades, tendremos calculadas las correlativas *probabilidades de vida* con sólo restar aquéllas de *uno.*

Podemos, ahora, calcular la columna que nos da el número de *sobrevivientes* para cada edad: la que *supusimos* podía obtenerse, en nuestra primera tentativa, *siguiendo durante toda su vida* a una cierta generación.

Representemos, para facilitar la exposición, por l_x el número de personas que —de un grupo inicial dado— llegan a cumplir la edad x.

En tal caso serán:

$$l_{x+1} \;;\; l_{x+2} \;;\; l_{x+3} \;\ldots\; l_{x+n}$$

los que alcanzan a cumplir, respectivamente, las edades

$$x + 1;\; x + 2;\; x + 3; \ldots\; x + n$$

Siendo la probabilidad la relación entre el número de casos favorables y el número total de casos posibles, las probabilidades de que, personas que tienen hoy, *exactamente,* $x;\ x + 1;\ x + 2 \ldots\ x + n$ años, lleguen a cumplir *un año más,* serán, a todas luces,

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x};\; p_{x+1} = \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}};\; p_{x+2} = \frac{l_{x+3}}{l_{x+2}} \;\ldots\; p_{x+n} = \frac{l_{x+n+1}}{l_{x+n}}$$

de donde deducimos

$$l_{x+1} = l_x\, p_x \;;\; l_{x+2} = l_{x+1}\, p_{x+1} \;;\; l_{x+3} = l_{x+2}\, p_{x+2} \;\ldots$$

$$l_{x+n+1} = l_{x+n}\, p_{x+n}$$

Y esa serie de ecuaciones demuestra la posibilidad de construir la columna de supervivencia, conocidas las probabilidades de vida, con sólo partir, para una determinada edad, generalmente la más baja de la tabla, de un número *arbitrario* —normalmente una potencia entera de diez— que se llama *base* o *raíz* de la tabla..

Así, la tabla de mortalidad H^m, que tomamos como modelo, fué construída sobre una base de *cien mil* sobrevivientes a la edad de 10 años, y luego prolongada hasta la edad *0*. A esa edad se tuvieron 127.283 sobrevivientes. Las probabilidades de vivir un año más a las edades *0*, *1* y *2*, son, respectivamente:

0,88720 0,96492 0,97821.

El número de sobrevivientes a cada una de las edades 1, 2 y 3, resulta, entonces,

$$127283 \times 0{,}88720 = 112925$$
$$112925 \times 0{,}96492 = 108963$$
$$108963 \times 0{,}97821 = 106588$$

Restando, ahora, del número de sobrevivientes de una edad dada, el de los que llegan en vida a la siguiente, nos quedará el número de los muertos en el transcurso del año, es decir, el de los que *mueren después de cumplir la edad x y antes de cumplir la edad x + 1*. Simbolicémoslo por d_x, y tendremos:

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

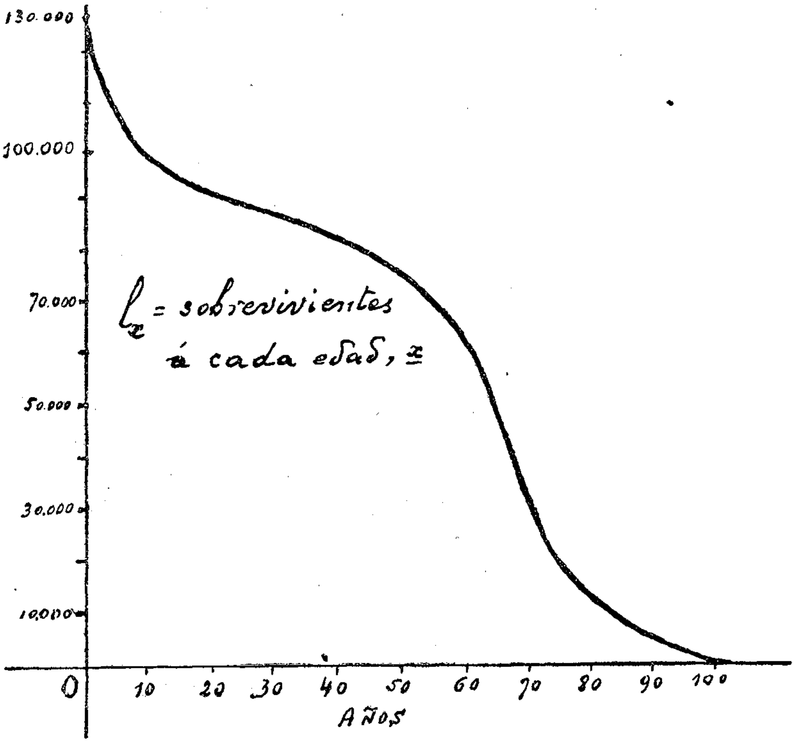
En nuestro ejemplo,

$$d_0 = 127283 - 112925 = 14358$$
$$d_1 = 112925 - 108963 = 3962$$
$$d_2 = 108963 - 106588 = 2375$$

V

Hemos llegado, así, a determinar las cuatro columnas principales de una tabla de mortalidad: la que nos da el número de sobrevivientes año por año, la que nos da el número de los que mueren entre dos edades consecutivas, y las dos que nos dan, respectivamente, la probabilidad de vivir un *año más*, y la de morir *dentro del año*. Otras columnas más presenta la tabla. Cada una de ellas corresponde a lo que se ha llamado una *función biométrica*, porque es de esas funciones, precisamente,de las que nos valemos para *medir la vida*.

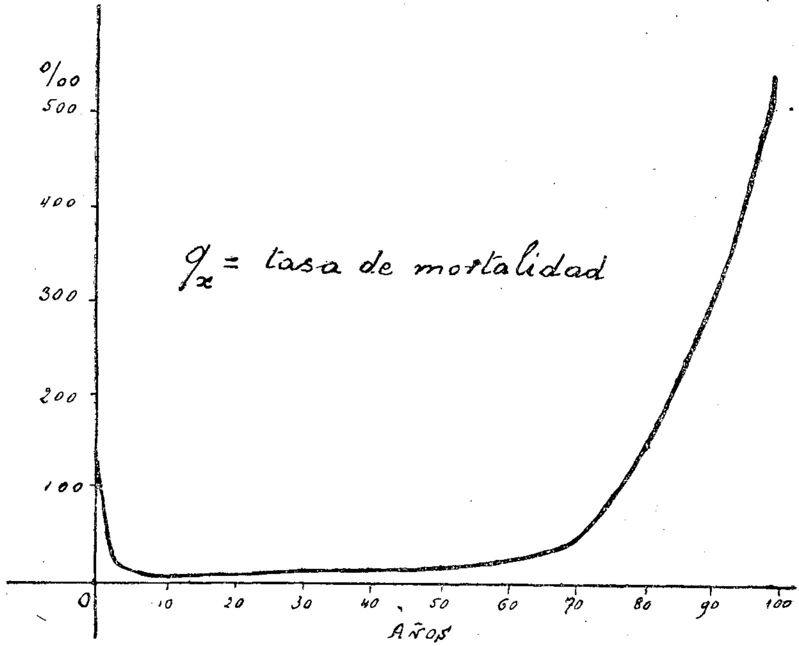
La función de supervivencia es, por definición, decreciente; el grupo básico —verdadero o supuesto— va *desgranándose* a lo largo del tiempo. El gráfico adjunto refleja claramente su marcha. En los tramos inicial y final, que corresponden a la primera infancia y a la senilidad, la curva *cae* rápidamente: así opera la mortalidad. Hacia el medio de la vida, la curva desciende muy suavemente: la muerte, en ese lapso de tiempo, apenas se hace sentir.



Ya vimos —en el capítulo segundo— al hablar del *puente de la vida,* cómo la curva de los decesos se descompone en varias otras curvas, y cómo sólo una de ellas —la que corresponde al período senil— es *normal,* en el sentido de que sólo es *normal* morir en ese período.

Las otras curvas parciales *deberían* desaparecer —o por lo menos *achatarse* considerablemente. En cambio la cúspide de la curva senil tendría que elevarse.

La curva que nos da las *probabilidades de muerte* tiene la forma de una *jota.* Es que esas probabilidades son altas en la niñez, poco importantes en la juventud y en la madurez, y, otra vez altas, —cada vez más altas— a medida que avanza la vejez.



En cuanto a la curva representativa de las probabilidades de vida, es la complementaria de la anterior.

VI

Si, en lugar de calcular la probabilidad de muerte correspondiente a un período de un año, considerásemos un período menor: un semestre, un mes, un día... y multiplicáramos, luego, el resultado por dos, por doce por trescientos sesenta y cinco..., obtendríamos una probabilidad de muerte *anual*, pero respondiendo a la hipótesis de que, *durante todo el año* la mortalidad ha conservado la misma intensidad que tenía durante el primer semestre, el primer mes, el primer día... Eso, evidentemente, no es exacto. En las primeras edades, la intensidad es menor a medida que transcurre el tiempo. En el resto de la vida, *por lo general,* la intensidad crece con los años. Si se considera la intensidad de la mortalidad con relación a un tiempo *infinitamente pequeño,* al *instante mismo* en que se llega a determinada edad, se tiene lo que se llama la *tasa instantánea de mortalidad,* o *fuerza de la mortalidad,* o *intensidad de la mortalidad,* que todos esos nombres recibe.

Es una función cuya determinación requiere el empleo del cálculo infinitesimal. No nos detendremos, pues, en detalles técnicos, pero señalaremos que es una función de alto interés, no sólo teórico, sino práctico. Para simbolizarla se usa la letra griega μ (mu), a la que se añade un subíndice indicador de la edad.

En la tabla de mortalidad H^m —que tomamos como ejemplo— puede verse que hasta los doce años de edad la *tasa instantánea es mayor* que la tasa anual de mortalidad; es que durante esa época de la vida la fuerza de la mortalidad va disminuyendo. Y a los trece años una y otra son iguales: 0,00342, y, en lo sucesivo, la tasa instantánea es menor: la acción de la mortalidad empieza a *ganar fuerza* —en lugar de perderla— a medida que el tiempo transcurre. Al llegar a los 73 años —edad que marca el mayor número de muertes en la tabla; la cima más alta de la curva respectiva— vuelven ambas tasas a ser iguales. Y, de ahí en adelante, —parece una paradoja— la tasa instantánea se hace superior. Es que, pasados los 73 años, la curva cae rápidamente, pero con cierto *desmayo:* parecería que, cada día transcurrido, fuese algo así como un obstáculo superado, una razón más para seguir viviendo.

VII

Tomemos la curva de supervivencia. Si consideramos una faja vertical limitada por las dos ordenadas correspondientes a dos edades consecutivas, x y $x+1$, su área nos indicará un cierto número de individuos, menor que l_x y mayor que l_{x+1}, y que llamaremos L_x. Son todos aquellos individuos que *declararían* tener x años de edad, si se levantara un censo en una ciudad cuya población coincidiese en su composición con la de nuestra tabla de mortalidad.

El área en cuestión es la de un trapecio mixtilíneo cuyas bases son iguales respectivamente a l_x y l_{x+1} y cuya altura es *uno.*

Si suponemos tener un segmento de recta en vez del segmento de curva, lo que no es un grave error, podemos escribir, aproximadamente, como valor de nuestra área:

$$L_x = {}^1/_2\,(l_x + l_{x+1}) = l_{x+1/2}$$

Pero esa área representa, no sólo un cierto número de personas, sino también un cierto número de *años de vida:* todos los que han vivido, en conjunto, los l_x individuos que empezaron vivos el año. Número, naturalmente, menor que l_x porque algunos murieron antes de terminar el año, y mayor que l_{x+1}. Tal como acabamos de ver.

Si ahora, y a partir de una ordenada cualquiera, sumamos *todas las áreas de todos los trapecios* que siguen —señalados o no— hasta llegar a la más alta edad considerada, tendremos *todos los años vividos, en conjunto, por todos los individuos del grupo de edad x tomado como inicial.* Es lo que se llama *cantidad de existencia* y se representa por T_x.

$$T_x = L_x + L_{x+1} + L_{x+2} + \dots = \sum_{t=0}^{t=\infty} L_{x+t}$$

$$= {}^1/_2\,(l_x + l_{x+1}) + {}^1/_2\,(l_{x+1} + l_{x+2}) + \dots =$$

$$= {}^1/_2\, l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \dots = {}^1/_2\, l_x + \sum_{t=1}^{t+\infty} l_{x+t}$$

Esa *cantidad de existencia* ha sido disfrutada por todos los individuos del grupo inicial *muy desigualmente.* Unos vivieron apenas unos pocos días, y aún unos instantes. Otros llegaron a la extrema vejez. Si esa *cantidad de existencia* se hubiese distribuído *equitativamente* entre *todos* los individuos que componían el grupo inicial, a cada uno le hubieran tocado tantos años como indica el cociente.

$$e_x^{\circ} = \frac{T_x}{l_x}$$

Es lo que se llama *vida media,* y que se simbóliza por e_x°

No nos olvidemos —ya que estamos pasando revista a las diversas *funciones biométricas*— de mencionar la llamada *vida probable,* ni la *más probable duración de la vida.*

Vida probable es el número de años que faltan para que el grupo de los que tienen una cierta edad, x, quede reducido a la mitad. En nuestra tabla la vida probable a los *treinta años* es igual a 37 años y una pequeña fracción, porque el grupo de sobrevivientes de treinta años de edad, que consta de 89685, queda reducido a la mitad poco después de cumplidos los 67 años.

La *más probable duración de la vida,* es el número de años que le faltan a una persona para alcanzar la edad en que es *más probable morir,* es decir, la edad en que más muertes hay. Eso se verifica en nuestra tabla —si no se toman en cuenta las muertes en los primeros años de la vida— al llegar a los 73 años. Luego, la *más probable duración de la vida* para una persona de 30 años de edad es de 43 años.

VIII

Al esbozar cómo puede construirse una tabla de mortalidad nos referimos, sobre todo, a una tabla de *población,* es decir, a una tabla que considera la población de un país o de una ciudad. Es evidente que dicha tabla puede tomar en cuenta toda la población, indistintamente, o una parte determinada de ella. Se tienen, así, tablas correspondientes a personas de determinado sexo o de determinada profesión.

Pueden, también, construirse tablas limitadas a grupos de personas especialmente seleccionadas: asegurados de una o de varias compañías; los mismos asegurados separados en categorías de acuerdo a distintos criterios: clase de seguro tomado; sexo; antigüedad en el seguro...

No insistiremos sobre ésto. Lo esencial es señalar que, dentro del nombre genérico de *tablas de mortalidad,* caben muchas y muy variadas especies.

Pero no terminaremos sin mencionar una *función biométrica* —no tabulada generalmente— pero de la que es difícil prescindir cuando se trata de tablas de *población.* Nos referimos a la *tasa central de mortalidad.* Al levantarse un *censo,* el número de individuos que declaran tener la edad x no corresponde, ya lo hicimos notar antes, a los l_x que tienen *exactamente* dicha edad, sino a los L_x cuyas edades varían entre x y $x + 1$ años.

Relacionando, para cada edad, el número de muertos con el de sobrevivientes, tendremos, pues, un cociente, que representaremos por m_x, y que es la llamada *tasa central de mortalidad.*

$$m_x = \frac{d_x}{L_x} = \frac{d_x}{{}^1/_2\,(l_x + l_{x+1})} = 2.\frac{l_x - l_{x+1}}{l_x + l_{x+1}}$$

Reemplazando L_x y d_x por sus valores ${}^1/_2\,(l_2 + l_{x+})$ y $l_x - l_{x+1}$, respectivamente, de acuerdo con las igualdades que antes establecimos.

De la ecuación

$$m_x = 2\,\frac{l_x - l_{x-1}}{l_x + l_{x-1}}$$

se pasa fácilmente, con sólo dividir los dos términos de la fracción por l_x, a estas otras dos

$$m_x = 2\,\frac{1 - p_x}{1 + p_x} = \frac{2q_x}{2 - q_x}$$

que permiten determinar la *probabilidad de muerte* —o simplemente la *tasa de mortalidad* que, así, también se la llama— mediante la *tasa central,* obtenida de los datos a nuestro alcance.

(Continuará.)