1105

Revista

de

Ciencias Económicas

PUBLICACION DE LA FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS
CENTRO DE ESTUDIANTES Y COLEGIO
DE GRADUADOS

AÑO XXII DICIEMBRE DE 1934 SERIE II, Nº 161

DIRECCION Y ADMINISTRACION
CALLE CHARCAS 1835
BUENOS AIRES

de José Barral Souto

Expresión de la renta vitalicia en serie potencial entera de la variación del tipo de interés [1]

INTRODUCCION

Preséntase a menudo en trabajos actuariales la necesidad de valores de conmutación, a un tipo de interés ligeramente distinto del de la tabla que se posee.

Cierta clase de problemas pueden reducirse a la utilización de un nuevo tipo de interés v. g. rentas vitalicias variables en progresión geométrica, siempre que la tasa de progresión sea inferior a la del interés rentas vitalicias combinadas con sorteos de probabilidad constante; valuación de fondos, cuyos gastos de administración se cubren con un porcentaje sobre la renta que producen; etcétera.

Tales problemas, antes de decidir la confección de las tablas de conmutación a tipos determinados, para el caso que convenga, requieren cálculos a tipos distintos, pero próximos a los usuales, para estudiar v. g. qué probabilidad conviene asignar al sorteo, o qué porcentaje aplicar sobre la renta suficiente para cubrir los gastos.

Demuestro aquí que la renta a'_x calculada al nuevo tipo de interés, puede expresarse así:

$$a'_x = a_x - p\frac{S_x}{D_x} + p^2\frac{S_x^{(2)}}{D_x} - \dots + p^{2r}\frac{S_x^{(2r)}}{D_x} - p^{2r+1}\frac{S_x^{(2r+1)}}{D_x} + \dots$$

donde "a_x" es la renta vitalicia calculada a un cierto tipo de interés i; D_x y S_x los valores conocidos de conmuta-

(1) De la tesis presentada por el autor para optar el título de doctor en ciencias económicas en abril del corriente año.

ción; $S^{(2)}$; $S^{(3)}$; $S_{(4)}$, etc, sumas acumulativas, semejantes a la S respecto de la N y ésta respecto de la D, pero de orden superior, indicado por el número entre paréntesis, (se atribuye a la S el valor $S^{(1)}$ y $p = \frac{i' - i}{1+i} = \frac{\Delta i}{1+i}$

La serie converge absolutamente para todas las tasas posibles, pero prácticamente sólo resulta utilizable cuando el tipo de interés difiere poco del que se toma como base, bastando, generalmente, la misma tabla de conmutación si la diferencia entre los tipos no excede de ½ %, con un error inferior al 1 %.

Aun cuando me referiré sólo a rentas vitalicias, lo mismo, sería aplicable p. e. a la prima única del seguro de vida A'_x, en cuyo caso llegaríamos a la expresión siguiente:

$$A'_x = A_x - p\frac{R_x}{D_x} + p^2\frac{R_x^{(2)}}{D_x} - p^3\frac{R_x^{(3)}}{D_x} + \ldots$$

donde las $R^{(s)}$ indicarían sumas acumulativas de orden superior, a partir de: $R_x = R_x^{(1)}$ de la tabla de conmutación, al tipo de interés base.

Los demás símbolos tienen el significado que se sabe:

$$R_x = \sum_x^{\infty}{}_t\, M_t\,;$$

A_x igual a la prima única del seguro de vida al tipo i; y

A'_x al nuevo tipo i'.

II—EXPRESION DE LA RENTA VITALICIA, MEDIANTE UNA SERIE POTENCIAL ENTERA DE LA VARIACION DEL TIPO DE INTERES

7. — Es:

$$a_x = \frac{N_x}{D_x} = \frac{\sum_x^{\infty}{}_t\, D_{t+1}}{D_x} = \frac{\sum_x^{\infty}{}_t\, v^{t+1} l_{t+1}}{D_x} = \frac{\sum_x^{\infty}{}_t\, v^{t-x+1}\, l_{t+1}}{l_x}$$

o también puesto que $v = (1+i)^{-1}$;

$$a_x = \frac{1}{l_x}\sum_x^{\infty}{}_t\, (1+i)^{-t+x-1}\, l_{t+1}$$

Si tenemos un tipo de interés distinto:

$$i' = i + \Delta i \quad \therefore \quad 1 + i' = 1 + i + \Delta i = (1+i)\left(1 + \frac{\Delta i}{1+i}\right)$$

podremos escribir; designando por a'_x, la renta calculada al nuevo tipo de interés:

$$a'_x = \frac{1}{l_x} \sum_x^{\infty} {}_t (1+i')^{-t+x-1} l_{t+1} =$$

$$= \frac{1}{l_x} \sum_x^{\infty} {}_t (1+i)^{-t+x-1} \left(1 + \frac{\Delta i}{1+i}\right)^{-t+x-1} l_{t+1}$$

Desarrollando, y poniendo $\frac{\Delta i}{1+i} = p$

$$a'_x = \frac{1}{l_x} \sum_x^{\infty} {}_t v^{t-x+1} l_{t+1} \left[1 - \binom{c-x+1}{1} p + \binom{t-x+2}{2} p^2 - \dots - \right.$$

$$\left. - \binom{t-x+h}{h} p^h + \dots \right]$$

puesto que: $(1+i)^{-t-1} l_{t+1} = v^{t+1} l_{t+1} = D_{t+1}$

$$(10) \qquad a'_x = \frac{1}{D_x} \sum_x^{\infty} {}_t D_{t+1} \left[1 - \binom{t-x+1}{1} p + \binom{t-x+2}{2} p^2 - \right.$$

$$\left. \binom{t-x+3}{3} p^3 + \dots \mp \binom{t-x+h}{h} p^h \pm \dots \right]$$

y utilizando la (8), después de efectuar el paréntesis:

$$(11) \quad a'_x = \frac{N_x}{D_x} - p \frac{S_x}{D_x} + p^2 \frac{S_x^{(2)}}{D_x} - p^3 \frac{S_x^{(3)}}{D_x} p^4 + \frac{S_x^{(4)}}{D_x} \dots\dots$$